

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

**INVESTIGAÇÃO DE ESTRUTURAS AUTO-SIMILARES E
STICKINESS EM UM POÇO DE POTENCIAL DEPENDENTE
DO TEMPO**

FLÁVIO HELENO GRACIANO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO - SP

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Flávio Heleno Graciano

**Investigação de Estruturas Auto-Similares e *Stickiness*
em um Poço de Potencial Dependente do Tempo**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira
Co-orientador: Prof. Dr. Diogo Ricardo da Costa

Rio Claro - SP
2024

G731i Graciano, Flávio Heleno
Investigação de estruturas auto-similares e stickiness em um poço de potencial dependente do tempo / Flávio Heleno Graciano. -- Rio Claro, 2024
87 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Juliano Antônio De Oliveira
Coorientador: Diogo Ricardo Da Costa

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Caos. 3. Reflexões Múltiplas. 4. Stickiness. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Flávio Heleno Graciano

**Investigação de Estruturas Auto-Similares e *Stickiness*
em um Poço de Potencial Dependente do Tempo**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. JULIANO ANTÔNIO DE OLIVEIRA
UNESP/São João da Boa Vista (SP)

Prof. Dr. EDSON DENIS LEONEL
UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. ANTÔNIO MARCOS BATISTA
UEPG/Ponta Grossa (PR)

Prof. Dr. DENIS GOUVEA LADEIRA
UFSJ/Ouro Branco (MG)

Prof. Dr. RENE MEDRANO ORLANDO TORRICOS
UNIFESP/Diadema (SP)

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 6 de março de 2024

Agradecimentos

Como cristão, primeiramente agradeço a Deus por me dar forças e disposição durante todos esses anos de estudos enfrentando as estradas de Minas Gerais e São Paulo. Agradeço a minha esposa Rose e aos meus filhos Ruan e Laura pela paciência e por aceitarem minha ausência nos dias de viagem. Agradeço a minha mãe Belchiolina pelas orações e incentivo. Ao meu pai José Graciano que já se foi, mas está sempre comigo. Aos meus irmãos e sobrinhos que sempre perguntavam: *como está a que bolinha fica batendo na parede?* Aos amigos de curso Joelson, Valdir e Kadu, por cada palavra de motivação em nossas conversas durante nossas longas viagens, além das valiosas ajudas para o trabalho, feitas principalmente pelo Joelson. Ao Professor Denis que me motivou a retornar aos estudos em busca do título de doutor. Aos Professores Juliano e Diogo, por terem aceitado a me orientar e pelos ensinamentos durante meu doutoramento. Por fim, aos Professores Danilo e Batistas, e ao colega Matheus pelas colaborações que foram fundamentais para a finalização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho consideramos estruturas de auto-similaridade para o modelo poço de potencial dependente do tempo, que consiste da dinâmica de uma partícula clássica de massa m , confinada no interior de uma caixa com potencial infinito nas bordas e com um poço que possui o fundo oscilante. O modelo é descrito por um mapeamento bidimensional discreto, nas variáveis energia da partícula, fase do movimento do poço de potencial e os parâmetros de controle r , δ e N_c . O mapeamento tradicionalmente conhecido na literatura é considerado, e uma nova proposta da seção de Poincaré é considerada para reescrever o mapeamento, com o intuito de facilitar a análise dos pontos fixos e espaços de fases. O espaço de fases para análise do comportamento do sistema é constituído de um mar de caos em volta de ilhas periódicas e limitado por curvas invariantes *spanning*. A dispersão de primeira ordem é investigada para encontrar as regiões de colisões simples e colisões múltiplas, onde sub-regiões, de acordo o número de colisões múltiplas são destacadas. São realizados o estudo do número de colisões múltiplas em função do parâmetro de controle N_c e o estudo da área da região de colisões múltiplas em função do parâmetro N_c . A investigação das estruturas no plano e_0e_1 , é realizada para encontrar as estruturas auto-similares. Foram estudadas algumas propriedades dinâmicas do modelo, onde concluímos que o sistema é conservativo também para a nova proposta da seção de Poincaré. Investigamos o comportamento de *stickiness* para o modelo através do Expoente de Lyapunov de Tempo Finito e também por recorrência dinâmica.

Palavras Chaves: Estruturas Auto-Similares, Reflexões Múltiplas, *Stickiness*.

Abstract

In this work we consider self-similar structures for the time-dependent potential well model, which consists of the dynamics of a classical particle of mass m , confined inside a box with infinite potential at the edges and with a well with an oscillating bottom. The model is described by a discrete two-dimensional mapping in the variables energy of the particle, phase of movement of the potential well and the control parameters r , δ and N_c . The mapping traditionally known in the literature is considered and, we propose a new Poincaré section and we rewrite the mapping, in order to facilitate the analysis of fixed points and phase spaces. The phase space for analyzing the behavior of the system is constituted by a sea of chaos around islands of periodics and limited by invariant curves *spanning*. First-order scattering is investigated to find the regions of single collisions and multiple collisions, where sub-regions according to the number of multiple collisions are highlighted. The study of the number of multiple collisions as a function of the control parameter N_c and the study of the area of the region of multiple collisions as a function of the parameter N_c are carried out. The investigation of structures in the e_0e_1 plane is performed to find the self-similar structures. Some dynamic properties of the model were studied, where we concluded that the system is conservative also for the new proposal of the Poincaré section. We investigated the behavior of *stickiness* for the model through the Finite Time Lyapunov Exponent and also through dynamic recurrence.

Key Words: Self-Similar Structures, Multiple Reflections, *Stickiness*.

Lista de Figuras

2.1	(a) Uma sequência contendo um número infinito de poços de potenciais dependentes do tempo, onde b é a distância entre os poços de potenciais, a é a largura do poço móvel, V_0 é a profundidade do poço de potencial e o fundo do poço se move de acordo $F(t) = V_1 \cos(\omega t)$. Em (b) temos algumas simetrias onde pode-se tomar um único potencial dependente do tempo, e com um potencial infinito em ambos os lados, obtemos (c). Em (d), usamos outra simetria, onde dividimos o poço ao meio. Os dois últimos poços de potencial dependente do tempo são nossos objetos de estudo.	19
2.2	figura representativa do poço de potencial dependente do tempo.	20
2.3	Espaços de fase do poço de potencial dependente do tempo com $r = 1$ e $\delta = 0,5$ para (a), (b) e (c), e $N_c = 13$ para (a), $N_c = 33$ para (b) e $N_c = 53$ para (c).	23
2.4	Espaços de fase do poço de potencial dependente do tempo com $N_c = 33$ e $\delta = 0,5$ para as figuras (a), (b) e (c), e $r = 0,1$ para (a), $r = 1$ para (b) e $r = 1,9$ para (c).	24
2.5	Espaços de fase do poço de potencial assimétrico com $r = 1$ e $N_c = 33$ para (a), (b) e (c) e $\delta = 0,2$ para (a), $\delta = 0,5$ (b) e $\delta = 0,8$ (c).	25
2.6	Em (a) temos o espaço de fase do mapeamento para $N_c = 33$, $r = 1$ e $\delta = 0,5$. Em (b) temos o plot do observável $d(e, \phi)$, onde pintamos de preto os valores tais que $d(e, \phi) \rightarrow 0$. Em (a) e (b), temos os plots dos pontos fixos dos tipos P_1 e P_2 encontrados analiticamente através das equações dos pontos fixos de primeira ordem.	27
2.7	Dispersão de primeira ordem do poço de potencial para $r = 1$, $N_c = 3$ e $\delta = 0,5$	29
2.8	Curvas que separam as regiões coloridas da figura 2.7. Em (a) temos as curvas que separam as cores da figura 2.7(a) em (b) a ampliação de (a) para $e \in [1, 8, 2]$ e $\phi \in [0, 4, 1, 1]$	30
2.9	Em(a) temos o espaço de fase gerado com $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$. Em(b) temos, na cor vermelha, a região onde ocorrem as reflexões múltiplas, na cor amarela, a região onde não ocorre as reflexões múltiplas. Em cor preta mostra as curvas que separam essas duas regiões.	32

2.10	Análise da região onde ocorrem as reflexões múltiplas. Em (a), usamos $\phi \in [0, 2\pi]$ e $e \in [1, 2, 1]$. Em (b) mostramos uma ampliação de (a) no intervalo $\phi \in [4, 8, 2\pi]$ e $e \in [1, 1, 8]$ para destacar melhor a divisão da cores.	33
2.11	Histograma do número de reflexões múltiplas para quatro valores diferentes de N_c . Usamos $r = 1$ e $\delta = 0,5$.	34
2.12	Ajuste em lei do potência do decaimento de número reflexões múltiplas em função de N_c para $H = 10^3$.	35
2.13	Sobreposição das curvas do histograma do número de reflexões múltiplas em função de N_c , confirmando a invariância de escala.	35
3.1	Modelo do poço de potencial assimétrico com o fundo oscilante.	36
3.2	Espaços de fase do poço de potencial assimétrico com $N_c = 3$ e $\delta = 0,5$ em (a), (b) e (c), $r = 0,65$ para (a), $r = 1$ para (b) e $r = 1,35$ para (c).	40
3.3	Espaços de fase do poço de potencial assimétrico com $r = 1$ e $\delta = 0,5$ para (a), (b) e (c), e $N_c = 2,3$ para (a), $N_c = 3$ para (b) e $N_c = 3,7$ para (c).	41
3.4	Espaços de fase do poço de potencial assimétrico com $r = 1$ e $N_c = 0,5$ para (a), (b) e (c) e $\delta = 0,1$ para (a), $\delta = 0,5$ para (b) e $\delta = 0,9$ para (c).	42
3.5	Em (a) mostramos um espaço de fase do modelo para $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$, em (b) mostramos o comportamento de ∇ . Nesta figura temos os pontos fixos de primeira ordem dados pela equações (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20), encontrados numericamente.	44
3.6	Dispersão das condições iniciais após a primeira iteração. Em (a) temos o estudo da dispersão de primeira ordem para $\phi \in [0, 2\pi]$ e $e \in [1, 7]$. Em (b) temos esse estudo para $\phi \in [3, 5, 5]$ e $e \in [1, 6, 2, 2]$, mostrando com mais detalhes as divisões das cores próximo de $F(\infty)$.	45
3.7	Nesta figura mostramos as linhas para valores inteiros de σ . Em (a), temos uma analogia da com a figura 3.6(b), destacando as linhas que separam as cores. Em (b) uma ampliação da parte central da figura(a), mostrando mais detalhes da aglomeração das linhas quando $\sigma \rightarrow \infty$.	47
3.8	Em (a) temos um espaço de fase gerado com os parâmetros de controle $N_c = 0,1$, $r = 1$ e $\delta = 0,5$. Em (b) temos em vermelho a região de reflexões múltiplas e em amarelo a região de reflexões simples. A figura (b) foi gerada com os mesmos parâmetros de controle da figura (a).	48
3.9	Estudo detalhado no número de reflexões múltiplas dentro da região onde $G(1) < 0$ feito através da equação (3.24). Em (a) temos as regiões separadas por cores de acordo com o número de reflexões e em (b) temos uma ampliação de (a), e as curvas que separam as regiões coloridas.	49
3.10	Análise da região de reflexões múltiplas para $N_c = 0,2$ em (a), $N_c = 0,5$ em (b) e $N_c = 1$ em (c), com $r = 1$ e $\delta = 0,5$ nas três figuras.	50

3.11	Análise da região de reflexões múltiplas para $N_c = 5$ em (a), $N_c = 10$ em (b) e $N_c = 50$ em (c), com $r = 1$ e $\delta = 0,5$ nas três figuras.	51
3.12	Histograma H em função do número de reflexões múltiplas i para diferentes valores de M com $N_c = 3$, $r = 1$ e $\delta = 0,5$	52
3.13	Histograma H em função de i usando uma reescala no eixo vertical dada por $H \rightarrow H/M^2$, onde todas as curva são sobrepostas resultando em comportamento universal em uma única curva mostrando a invariância de escala.	53
3.14	Histograma H em função de i para vários valores de N_c , mostrando que as mudanças nos valores de N_c não interferem na área ocupada pela condições iniciais na região onde $i > 1$	53
3.15	Histograma no número de reflexões múltiplas no poço de potencial assimétrico para quatro valores diferentes de N_c . Usamos $r = 1$ e $\delta = 0,5$	54
3.16	Ajuste em lei do potência do decaimento de número reflexões múltiplas em função de N_c para $H = 10^3$ para o poço de potencial assimétrico.	55
3.17	Sobreposição das curvas do histograma de frequência do número de reflexões múltiplas em função de N_c , confirmando a invariância de escala. . . .	55
3.18	Densidade de pontos no plano e_0e_1 , onde as cores representam 0 número ξ dado pela equação (3.25). Foram usados $N_c = 3$ para (a) e $N_c = 5$ para (b). Os outros parâmetros foram mantidos fixos com $r = 1$ e $\delta = 0,5$	56
3.19	Densidade de pontos no plano e_0e_1 , onde as cores representam a número ξ dado pela equação (3.25). Foram usados $N_c = 10$ para (a) e $N_c = 50$ para (b). Os outros parâmetros foram mantidos fixos com $r = 1$ e $\delta = 0,5$	57
3.20	Densidade de pontos no plano e_0e_1 onde os pontos coloridos mostram os valores de ξ dados pela equação (3.25). Usamos $\delta = 0,2$ em (a), $\delta = 0,4$ em (b), $\delta = 0,7$ em (c) e $\delta = 1$ em (d). Os outros parâmetros de controle permaneceram fixos com $r = 1$ e $N_c = 0,5$	58
3.21	Densidade de pontos e_0e_1 onde as cores mostram os valores de ξ dados pela equação (3.25). Usamos $r = 1$, $N_c = 0,5$ and (d) $\delta = 0,7$	59
3.22	Densidade de pontos no plano e_0e_1 com $e_0 \in (1, 1, 4)$ e $e_1 \in (1, 1, 4)$. Em (a) temos uma cenário para todo valor de i e em (b) para $i = 1$	60
3.23	Densidade de pontos no plano e_0e_1 com $e_0 \in (1, 1, 4)$ e $e_1 \in (1, 1, 4)$. Em (a) temos o cenário para $i = 2$ e em (b) para $i = 3$	60
3.24	Densidade de pontos no plano e_0e_1 com $e_0 \in (1, 1, 4)$ e $e_1 \in (1, 1, 4)$. Em (a) temos o cenário para $i = 4$ e em (b) para $i = 5$	61
3.25	Em (a) temos o expoente de Lyapunov em função do número de iterações para $N_c = 3$, $r = 1$ e $\delta = 0,5$. Em (b) temos a ampliação da parte inicial de (a).	63

4.1	Espaço de e vs ϕ para os parâmetros de controle $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$. .	64
4.2	Em (a) temos o gráfico do FTLE com $n = 100$ e 10^7 iterações. Em (b) temos a ampliação da região R1 e em (c) temos a ampliação da região R2. As setas vermelhas destacam onde o FTLE é próximo de zero. Nós usamos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$	66
4.3	Em (a) mostramos o intervalo de $n \approx 1,1226 \times 10^8$ à $n \approx 1,1241 \times 10^8$, onde o valor de FTLE próximo de zero e em (c) temos o <i>stickiness</i> do espaço de referente à (a). Em (b) mostramos que o FTLE é próximos de zero para o intervalo de $n \approx 3,25926 \times 10^7$ à $n \approx 3,27609 \times 10^7$. Em (c) temos o <i>stickiness</i> no espaço de referente a figura (b). Nós consideramos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 30$	67
4.4	Espaço de parâmetro em função do número de iterações para $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 60$. Mostramos o comportamento das interações no intervalo de $n \approx 6,49975 \times 10^8$ até $n \approx 6,50518 \times 10^8$, onde o valor de FTLE é próximo de zero e observamos o comportamento de <i>stickiness</i>	68
4.5	Histogramas do FTLE para vários valores n com $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 30$	69
4.6	Histograma do FTLE para vários valores do tempo finito n com $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 30$	70
4.7	Espaço de fase para três intervalos diferentes de FTLE com tempo finito 100 para $N_c = 60$, $r = 0,5$ e $\delta = 0,5$	71
4.8	Espaço de fase para um intervalo mais curto centrado no primeiro pico do histograma FTLE com tempo finito 100 $N_c = 60$, $r = 0,5$ e $\delta = 0,5$	72
4.9	Em (a) temos a amplificação da região 1 da figura 4.8, em (b) da região 2 e em (c) da região 3 da mesma figura.	73
5.1	Em (a) temos o espaço de fase normalizado para o nosso modelo onde usamos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$. Em (b) temos os <i>plots</i> de recorrência para as órbitas destacadas em (a), onde usamos $\epsilon = 0,01$	76
5.2	Em (a) temos a taxa de recorrência considerando $M = 10^3$ condições iniciais, variando ϕ_0 e mantendo fixo $e_0 = 1.10$. O maior valor de RR é relativo à condição inicial ϕ_0^* destacada em verde. Em (b) temos um espaço de fase que destaca a evolução da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) encontrada em (a) e sucessivas ampliações das regiões que apresentam <i>stickiness</i> . Usamos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 2,5$	77
5.3	Em (a) temos a série temporal da órbita da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) , encontrada na figura 5.2 (a). Em (b) temos o <i>plot</i> de recorrência dessa mesma órbita. Usamos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 2,5$	78

5.4	Em (a) temos a taxa de recorrência considerando $M = 10^3$ condições iniciais, variando ϕ_0 e mantendo fixo $e_0 = 1, 10$. O maior valor de RR é relativo à condição inicial ϕ_0^* destacada em verde. Em (b) temos um espaço de fase que destaca a evolução da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) encontrada em (a) e sucessivas ampliações das regiões que apresentam <i>stickiness</i> . Usamos $r = 1$, $\delta = 0, 5$ e $N_c = 3, 0$	79
5.5	Em (a) temos a série temporal da órbita da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) , encontrada na figura 5.4 (a). Em (b) temos o <i>plot</i> de recorrência dessa mesma órbita. Usamos $r = 1, 0$, $\delta = 0, 5$ e $N_c = 3, 0$	79
5.6	Em (a) temos a taxa de recorrência considerando $M = 10^3$ condições iniciais, variando ϕ_0 e mantendo fixo $e_0 = 1, 10$. O maior valor de RR é relativo à condição inicial ϕ_0^* destacada em verde. Em (b) temos um espaço de fase que destaca a evolução da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) encontrada em (a) e sucessivas ampliações das regiões que apresentam <i>stickiness</i> . Usamos $r = 1$, $\delta = 0, 5$ e $N_c = 3, 5$	80
5.7	Em (a) temos a série temporal da órbita da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) , encontrada na figura 5.4 (a). Em (b) temos o <i>plot</i> de recorrência dessa mesma órbita. Usamos $r = 1$, $\delta = 0, 5$ e $N_c = 3, 5$	81

SUMÁRIO

1	Introdução	13
2	O Modelo do Poço de Potencial Dependente Periodicamente do Tempo e suas Propriedades	18
2.1	Definição dos Modelos Estudados	18
2.2	O Modelo	19
2.3	O Espaço de Fase Para o Modelo do Poço de Potencial Oscilante	22
2.4	Os Pontos Fixos do Mapeamento	25
2.5	Dispersão de Primeira Ordem Para o Modelo	28
2.6	As Reflexões Múltiplas	31
2.7	Número de Reflexões Múltiplas em Função do Parâmetro N_c	34
3	O modelo do poço de potencial com nova seção de Poincaré	36
3.1	O Modelo do Poço Potencial com o Fundo Dependente Periodicamente do Tempo com Nova Seção de Poincaré	36
3.2	Espaços de Fase do Modelo	39
3.3	Os Pontos Fixos	42
3.4	Dispersão de Primeira Ordem	45
3.5	As Reflexões Múltiplas	47
3.6	Alguns Estudos em Relação ao Parâmetro N_c	50
3.7	Estruturas de Auto-Similaridade	56
3.8	Propriedades Dinâmicas Para a Nova Proposta do Poço de Potencial . . .	61
3.8.1	A Matriz Jacobiana e seu Determinante	61
3.8.2	O Expoente de Lyapunov	62
4	<i>Stickiness</i> Através do Expoente de Lyapunov a Tempo Finito	64
4.0.1	O Expoente de Lyapunov a Tempo Finito (FTLE)	65
4.1	Histogramas	68
4.1.1	Histogramas do FTLE	68
5	<i>Stickiness</i> Via Recorrência Dinâmica	74
5.1	Recorrência Dinâmica	74

Capítulo 1

Introdução

Ao longo do desenvolvimento da ciência, os estudos em sistemas dinâmicos sempre foram muito atraentes, uma vez que eles podem descrever matematicamente vários sistemas naturais[1]. Estudos importantes para descrever os comportamentos dos pêndulos, planos inclinados e lançamentos de projéteis foram realizados por Galileu Galilei [2]. Isaac Newton [3] foi um dos primeiros a conseguir descrever sistemas físicos por meio de um conjunto de leis que, através delas, foi possível extrair equações que regem esses sistemas. Acreditava-se que, em sistemas determinísticos, dadas as condições iniciais e conhecendo as equações do movimento, podia-se prever toda uma órbita de um sistema. Mas, como tratamento analítico das equações não lineares que descrevem as propriedades caóticas de um sistema eram extremamente complicados, muitas características dos sistemas dinâmicos foram ignoradas até o século XX. Essas características estavam contidas em equações diferenciais conhecidas a séculos.

Os primeiros estudos relacionados a dinâmica não linear foram feitos por Poincaré [4]. Através de técnicas geométricas e topológicas, ele foi capaz de mostrar que a evolução de sistemas não lineares é sensível às condições iniciais. Em outras palavras, mostrou que leves perturbações nas condições iniciais, podem levar a grandes mudanças no estado final, ou seja, duas condições iniciais extremamente próximas podem levar a estados futuros extremamente distantes. No século passado, tivemos trabalhos de Birkhoff [5] que seguiam essa mesma linha de estudos e serviram de motivação para estudos de bilhares [6], além de outros trabalhos importantes como o de Kolmogorov [7] nos anos 50 e Smale [8] nos anos 60. Porém, no que diz respeito ao caos determinístico, somente a partir da integração numérica de equações diferenciais não lineares, que foi possibilitada com a chegada dos computadores, os resultados passaram a ter destaque. Após o trabalho de Lorenz [9], surgiu um grande número de resultados sobre comportamentos caóticos fornecendo propriedades da dinâmica caótica e sua descrição, e de como a dinâmica se instala em sistemas físicos. Como exemplo, podemos destacar os resultados de Feigenbaum [10], Kaplan [11], Chirikov[12] e May[13]. Nesses trabalhos foram feitas descrições

da dinâmica temporal de sistemas físicos, analisando universalidades no comportamento dinâmico desses sistemas e confirmando a presença de propriedades caóticas.

Nos dias de hoje, temos vários estudos na área de sistemas dinâmicos, sendo a grande parte deles feitos através de métodos numéricos e também analíticos. Encontramos estudos sobre a teoria de caos em diversas áreas de conhecimento, como Biologia, Astrofísica, Engenharia, Química e Medicina [14, 15].

Um sistema físico pode ter sua dinâmica descrita de forma Hamiltoniana, que muitas das vezes nos leva a trabalhar com mapas [16], sistemas que evoluem de forma discreta [17]. A partir de uma condição inicial, podemos evoluir um sistema, formando uma órbita. Ao conjunto de todas as órbitas possíveis damos o nome de espaços de fase. A estrutura de um espaço de fase pode apresentar basicamente três tipos de comportamentos: periódico, quase periódico ou caótico [16].

Ao estudar assuntos relacionados a caos e a sistemas dinâmicos, podemos encontrar uma grande quantidade de modelos que investigam as colisões ou reflexões múltiplas. Consideramos como colisão a interação de curta duração entre dois ou mais corpos, causando simultaneamente a mudança de movimento dos corpos envolvidos devido às forças internas agindo entre eles durante o evento. Por outro lado uma reflexão ocorre quando acontece uma mudança da direção de propagação de energia.

Um dos mais estudados é o modelo de Fermi-Ulam [18, 19, 20, 21], que foi proposto em 1949. Este modelo consiste em uma partícula de massa m confinada entre duas paredes rígidas sendo uma delas fixa e a outra móvel, sofrendo colisões. A parede móvel obedece uma função do tipo $x = h \cos(\alpha t)$, onde x é a posição da parede móvel, h a amplitude de oscilação, α a frequência de oscilação e t o tempo. A região onde a parede oscila é denominada de zona de colisão e quando a partícula se encontra nesta região ela está sujeita a sofrer colisões múltiplas, ou seja, mais de uma colisão com a parede móvel antes de colidir com a parede fixa. Um outro modelo em que podemos encontrar colisões múltiplas é o Modelo Bouncer [22]. Este modelo é considerado uma versão alternativa do modelo de Fermi-Ulam, onde consideramos uma partícula de massa m , movendo verticalmente sob a ação do campo gravitacional e colidindo com uma parede horizontal que oscila de acordo com uma função, definindo uma zona de colisão. Assim, quando a partícula sofre mais de uma colisão com a superfície oscilante antes de sair da zona de colisão, dizemos que a partícula sofreu colisões múltiplas.

Os sistemas de bilhares são sistemas que consistem de uma partícula clássica de massa m , movendo dentro de uma região fechada e colidindo com a fronteira dessa região, podendo essa fronteira ter a forma circular, elíptica ou oval entre outras [23]. Neles temos as colisões múltiplas quando suas fronteiras são dependentes do tempo, ou seja, a fronteira se move com o passar do tempo [24, 25, 26].

Também encontramos colisões múltiplas quando investigamos o movimento de partículas confinadas dentro de um poço ou barreira de potencial dependente do tempo. Na

literatura existem alguns trabalhos que investigam o movimento de partículas nesses sistemas [27, 28, 29, 30, 31, 32]. Podemos encontrar aplicações desses modelos em mecânica clássica, mecânica quântica e eletromagnetismo [33, 34, 35]. Na ref. [35] temos um trabalho em que os autores investigam uma partícula interagindo com um, dois ou infinitos poços de potenciais oscilando periodicamente no tempo. A dinâmica desses sistemas geralmente é descrita por mapas bidimensionais [36, 37] que produzem espaços de fase do tipo misto, ou seja, com mar de caos, ilhas de estabilidade e curvas invariantes do tipo *spanning*.

Em [32] foi investigada a probabilidade de sobrevivência de um *ensemble* de partículas que evoluem no tempo, onde foi encontrado um excelente resultado dado por um histograma de escape mostrando que o mesmo é invariante de escala [38, 39]. É considerado que uma partícula escapou se a energia for maior que um dado valor. O histograma cresce rapidamente até atingir um valor máximo e depois tende a zero para tempos longos. Um estudo sobre propriedades de escala, considerando o desvio da energia média também foi realizado [40], onde foram encontrados expoentes de escalas denominados expoentes de aceleração, saturação e de *crossover*. Com uso de uma reescala apropriada dos eixos, todas as curvas que descreveram o comportamento do desvio padrão foram plotadas em uma única curva universal [40], mostrando uma invariância de escala. Na Ref. [41] foi investigado o comportamento de uma partícula dentro de uma barreira de potencial. Os autores mostraram que uma partícula clássica de massa m sofre colisões múltiplas para algumas condições iniciais.

Inspirados em trabalhos citados anteriormente, propomos investigar as colisões múltiplas no modelo do poço de potencial dependente do tempo considerando seções de Poincaré diferentes para descrever o mapeamento discreto. Consideramos o modelo tradicional, onde temos uma região central com fundo oscilante e, conseqüentemente variando o potencial, e duas regiões externas com potencial fixo. A região que fica do lado esquerdo da região oscilante, é limitada por um potencial infinito à esquerda e de modo análogo, a região que se encontra do lado direito da região oscilante é limitada à direita por um potencial infinito [28]. Avançamos nossos estudos considerando o modelo obtido através de dois cortes no modelo anterior. Um corte dividindo a região oscilante ao meio e outro corte dividindo a região de potencial fixo do lado direito ao meio. A análise da seção de Poincaré que propomos neste trabalho, favorece a interpretação dos pontos fixos no espaço de fase.

Quando observamos um espaço de fase de um sistema hamiltoniano descrito por um mapa bidimensional, frequentemente encontramos comportamentos regulares e caóticos. Porém, é possível observar trajetórias que, ao passarem por uma região caótica, ficam presas em uma determinada área (geralmente uma ilha de estabilidade) por um tempo longo, mas finito. Então, elas escapam retornando à órbita caótica. Contopoulos fez os primeiros estudos sobre esses aprisionamentos [42] na década de 70, seguido por outros

estudos feitos por Sirts, Reinhardt, Karney e Menjuk [43, 44, 45, 46] na década de 80, sendo nomeado *Stickiness* por Karney.

Os espaços de fase dos sistemas hamiltonianos não-lineares não são totalmente regulares nem completamente caóticos, podendo ser observadas dinâmicas regulares e caóticas. A dinâmica regular é notada nas órbitas periódicas e quase periódicas. Por outro lado, as órbitas caóticas preenchem as outras partes do espaço de fase [36]. Sistemas não integráveis exibem aprisionamentos dinâmicos [47] que são o resultado de uma combinação de movimentos caóticos e regulares; como consequência, o sistema apresenta propriedades incomuns na região caótica do espaço de fase de uma órbita [44, 48, 49].

As armadilhas dinâmicas em órbitas caóticas acontecem devido à *stickiness* das órbitas para alguns domínios do espaço de fase, onde a dinâmica pode permanecer por um tempo consideravelmente longo. Este comportamento de órbita pode ocorrer devido ao aprisionamento de ilha hierárquicas, aprisionamento de rede ou aprisionamento de camada estocástica [47]. Nesses domínios do espaço de fase, partes das órbitas são quase periódicas, embora as órbitas completas sejam caóticas. Estudos atuais mostram que alguns sistemas hamiltonianos podem exibir espaços de fase com propriedades fractais ou multifractais, onde trajetórias regulares e caóticas são muito próximas umas das outras [50]. Mesmo quando o espaço de fase parece caótico, pode-se encontrar um número infinito de pequenas ilhas onde as trajetórias são regulares [51, 52].

Para encontrar regiões onde ocorre o fenômeno de *stickiness* podemos usar o número de rotação [53], análise de recorrência [54, 55] ou Expoente de Lyapunov de Tempo Finito (FTLE) [56, 57], sendo esses dois últimos métodos muito importantes para nosso trabalho. É importante destacar que Expoente de Lyapunov [58, 59] é um indicador de caos direto e valioso. Em sistemas unidimensionais, uma trajetória é caótica se o Expoente de Lyapunov for positivo e regular se o mesmo for negativo. Em sistemas bidimensionais, existem dois Expoentes de Lyapunov. Temos caos se pelo menos um deles for positivo, e se o sistema for conservativo, ou seja, obedecer ao Teorema de Liouville [60, 61], os dois Expoentes de Lyapunov são simétricos.

Motivados por [56], utilizamos o FTLE para investigar regiões de *stickiness* para a versão do poço de potencial. Através do FTLE, podemos detectar intervalos de aprisionamento ao longo da órbita de uma condição inicial e estimar o tempo que a órbita fica aprisionada. Em [62], foi mostrado que valores baixos de FTLE estão correlacionados com a existência de jatos de longa duração em um modelo bidimensional para mistura e transporte de fluidos. Do ponto de vista dinâmico, estes jatos estão relacionados com o *stickiness* da órbita de uma condição inicial.

Também, com o objetivo de encontrar regiões que apresentam comportamento de *stickiness* para nosso modelo, usamos os resultados encontrados em [54] e [55], onde regiões com esse comportamento foram encontrados através da recorrência dinâmica. Uma recorrência dinâmica acontece quando, uma certa condição inicial da região caótica de um

espaço de fase é evoluída no tempo, e retorna para sua vizinhança com uma precisão ϵ , após um certo número de iterações. De acordo com [55], o fato da órbita de uma condição inicial que apresentar um alto índice de recorrência, é suficiente para que a mesma apresente comportamento de *stickiness*.

Para melhor expressar nossas intenções, organizamos esse trabalho da seguinte forma: No capítulo 2, apresentamos e estudamos o poço de potencial no seu modelo tradicional já conhecido na literatura. Encontrado o mapeamento, construímos o espaço de fase, investigando dispersão de primeira ordem, a região de colisões múltiplas e construímos um histograma do número de colisões múltiplas em função do parâmetro de controle N_c . No capítulo 3, apresentamos uma nova versão do poço de potencial onde fizemos para essa nova versão todos os estudos feitos para a versão anterior e acrescentamos um estudo da área da região de colisões múltiplas em função de N_c , o estudo das estruturas encontradas no plano e_0e_1 e mostramos algumas propriedades dinâmicas do modelo. No capítulo 4 investigamos comportamentos de *stickiness* para nosso modelo através do FTLE e no capítulo 5 investigamos o mesmo comportamento através da recorrência dinâmica. Por fim, apresentamos nossas conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

O Modelo do Poço de Potencial Dependente Periodicamente do Tempo e suas Propriedades

Neste capítulo, definiremos os modelos estudados neste trabalho, apresentaremos uma breve revisão do modelo do tradicional poço de potencial dependente periodicamente do tempo, bem como a construção detalhada do seu mapeamento. Construiremos e discutiremos o espaço de fase para o modelo, destacando os efeitos causados pela variação dos parâmetros de controle. Embora nossos principais resultados não estejam exatamente nesse modelo, ele foi a inspiração para nossos principais resultados.

2.1 Definição dos Modelos Estudados

Consideramos uma partícula clássica movendo-se sob a influência de uma energia potencial $V(x, t)$. A figura 2.1(a) considera uma cadeia de infinitos poços potenciais dependentes do tempo, onde os fundos estão se movendo sincronicamente de acordo com $F(t) = V_1 \cos(\omega t)$. É relevante mencionar que os poços quadrados podem representar a banda de condução definida por um ponto quântico ou a heteroestrutura $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -GaAs. O fundo oscilante pode representar a interação elétron-fônon ou a presença de um eletromagnético monocromático ou acústico [35].

De acordo com a figura 2.1(a), consideramos V_0 como a altura do poço de potencial. Observe que a partícula pode se mover livremente ao longo do eixo x , e a dinâmica leva à difusão no espaço. Ressaltamos que os diferentes tipos de formas potenciais levam a dinâmicas semelhantes no plano de energia e tempo.

Pode-se também supor um único poço quadrado oscilante com condições de contorno periódicas, como mostrado na figura 2.1(b), onde a e b são as larguras do poço de potencial. Nesta nova figura, podemos imaginar uma partícula se movendo da esquerda para a direita.

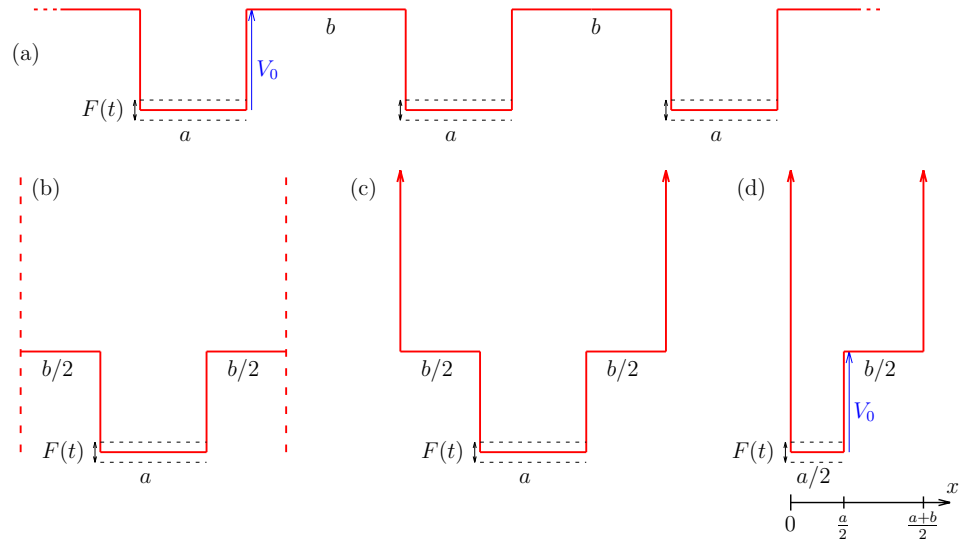


Figura 2.1: (a) Uma sequência contendo um número infinito de poços de potenciais dependentes do tempo, onde b é a distância entre os poços de potenciais, a é a largura do poço móvel, V_0 é a profundidade do poço de potencial e o fundo do poço se move de acordo $F(t) = V_1 \cos(\omega t)$. Em (b) temos algumas simetrias onde pode-se tomar um único potencial dependente do tempo, e com um potencial infinito em ambos os lados, obtemos (c). Em (d), usamos outra simetria, onde dividimos o poço ao meio. Os dois últimos poços de potencial dependente do tempo são nossos objetos de estudo.

Se esta partícula atinge a linha pontilhada vertical à direita, e é instantaneamente refletida para a linha pontilhada esquerda, ou a partícula continuar movendo da esquerda para a direita, terá, condições de contorno periódica análogas. Observe que é análogo ao caso mostrado na figura 2.1(a). Com isso em mente, pode-se alterar as condições de contorno mostradas na figura 2.1(b), onde podemos considerar um potencial infinito como contorno. Como exemplo, vamos admitir uma partícula que viaja da esquerda para a direita. Se atingir o potencial infinito do lado direito, experimenta uma reflexão elástica, ou seja, passa a se mover na direção oposta após o choque sem perder energia, mudando de direção e viajando para trás (da direita para a esquerda) [35].

O potencial mostrado na figura 2.1(c) apresenta uma importante simetria. Observe que podemos dividi-lo em duas metades, onde uma dessas metades é mostrada na figura 2.1(d). Consideramos um potencial infinito em $x = 0$. A dinâmica mostrada na figura 2.1(d) é exatamente a mesma mostrada na figura 2.1(a,b,c) no plano de energia e tempo. Neste trabalho usamos modelo da figura 2.1(c) para os estudos do capítulo 2 e o da figura 2.1(d) para o capítulo 3.

2.2 O Modelo

O modelo do poço de potencial dependente periodicamente é dado por uma caixa com potencial infinito nas bordas e com um poço que possui o fundo oscilante, como mostra a

figura 2.2

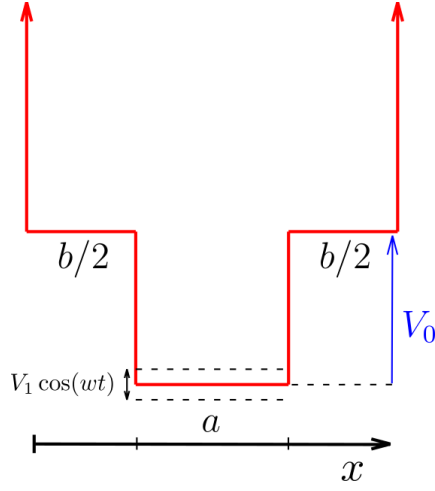


Figura 2.2: figura representativa do poço de potencial dependente do tempo.

Para esse modelo, a energia potencial $V(x, t)$ é dada por

$$V(x, t) = \begin{cases} \infty & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq (a + b) \\ V_0 & \text{se } 0 < x \leq \frac{b}{2} \text{ ou } (a + \frac{b}{2}) \leq x < (a + b) \\ V_1 \cos(wt) & \text{se } \frac{b}{2} < x < (a + \frac{b}{2}) \end{cases}, \quad (2.1)$$

onde a , b , V_0 , V_1 e w são constantes reais sendo que w é a frequência de oscilação do fundo que se move periodicamente ao longo do tempo.

Notemos que uma partícula de massa m confinada no interior da caixa da figura 2.2, pode estar submetida a diferentes potenciais, dependendo da posição onde se encontra. Assim a partícula pode ter ganhos ou perdas de energia cinética.

Para encontrarmos um mapeamento para o sistema, vamos considerar que em um certo instante $t = t_n$, a partícula está prestes a entrar no poço com uma energia $E = E_n$, na posição $x = \frac{b}{2}$. Neste instante temos que

$$E_n = V_0 + K_n, \quad (2.2)$$

onde $K_n = \frac{mv_n^2}{2}$ é a energia cinética.

Ao entrar no poço, a partícula sofre uma mudança brusca na velocidade devido à variação da energia cinética em função da mudança de potencial e conservação da energia total, então

$$K'_n = E_n - V_1 \cos(wt_n) = \frac{mv_n'^2}{2}, \quad (2.3)$$

portanto

$$|v'_n| = \sqrt{\frac{2K'_n}{m}}. \quad (2.4)$$

Temos que $|v'_n|$ é constante, pois consideramos que não existem forças de quaisquer natureza atuando na partícula. Apenas teremos variações na velocidade nos pontos $x = \frac{b}{2}$ e $x = a + \frac{b}{2}$, devido às variações abruptas de energia potencial nestes pontos. Ao chegar em $x = a + \frac{b}{2}$, a energia do sistema será dada por

$$E'_n = K'_n + V_1 \cos[w(t_n + \Delta t'_n)], \quad (2.5)$$

onde $\Delta t'_n = \frac{a}{|v'_n|}$. Caso a energia E'_n seja maior que V_0 , a partícula escapa do poço de potencial indo em direção ao potencial infinito localizado em $a + b$, caso contrário, será refletida de volta até que tenha energia suficiente para sair do poço, ou seja, até que a condição $E_n \geq V_0$ seja satisfeita e a partícula possa escapar do poço. Quando a partícula escapa do poço, teremos que

$$E'_n > K'_n + V_1 \cos[w(t_n + i\Delta t'_n)], \quad (2.6)$$

onde i é o menor número inteiro que satisfaz $E_n \geq V_0$.

Combinando as equações (2.3) e (2.6) temos que, ao sair do poço, a energia da partícula é dada por

$$E'_n > E_n + V_1 \cos[w(t_n + i\Delta t'_n)] - V_1 \cos(wt_n). \quad (2.7)$$

Devido a mudança de potencial ao sair do poço, a partícula sofrerá novamente uma mudança abrupta na energia cinética, saindo do poço com energia cinética K'' e, consequentemente, terá uma nova velocidade v''_n .

Uma vez que a partícula escapou do poço, ela se dirige até ao potencial infinito localizado em $a + b$ e é refletida de volta em direção ao poço. O tempo gasto para isso é dado por

$$\Delta t''_n = \frac{b}{|v''_n|}, \quad (2.8)$$

onde

$$|v''_n| = \sqrt{\frac{2K''_n}{m}}, \quad (2.9)$$

e

$$K''_n = E_{n+1} - V_0, \quad (2.10)$$

onde E_{n+1} é a energia da partícula imediatamente após a saída do poço, uma vez que a energia ao sair do poço, permanece constante até imediatamente antes de entrar no poço novamente.

Com as equações encontradas até aqui, podemos escrever o mapeamento do modelo

da seguinte forma

$$T_x : \begin{cases} E_{n+1} = E_n + V_1 \cos[w(t_n + i\Delta t'_n)] - V_1 \cos(wt_n) \\ t_{n+1} = t_n + i\Delta t'_n + \Delta t''_n \end{cases}, \quad (2.11)$$

onde i é o menor inteiro tal que

$$E_n + V_1 \cos[w(t_n + i\Delta t'_n)] - V_1 \cos(wt_n) > V_0,$$

que é a condição necessária para que a partícula escape do poço.

Da forma como esse mapeamento está escrito, temos uma quantidade elevada de parâmetros de controle, que pode ser diminuída sem afetar a dinâmica do sistema. Então, a fim de diminuir essa quantidade de parâmetros de controle, vamos dividir a equação (2.11) por V_0 e redefinir os parâmetros da seguinte forma: $\delta = \frac{V_1}{V_0}$, $r = \frac{a}{b}$, $e_n = \frac{E_n}{V_0}$, $N_c = \frac{w}{(2\pi)(a/\sqrt{2V_0/m})}$ e finalmente a medida do tempo em função do número de oscilações da poço como $\phi = wt$. O valor de N_c fornece o número de oscilações completadas pelo poço em um tempo $t = \frac{a}{\sqrt{2V_0/m}}$, que é o tempo que uma partícula com energia cinética igual a V_0 levaria para percorrer a distância a , caso o poço fosse estático. Assim, podemos reescrever o mapeamento como:

$$T : \begin{cases} e_{n+1} = e_n + \delta[\cos(\phi_n + i\Delta\phi_a) - \cos\phi_n] \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + i\Delta\phi_a + \Delta\phi_b] \mod 2\pi \end{cases}, \quad (2.12)$$

onde i é o menor inteiro tal que

$$e_{n+1} = e_n + \delta[\cos(\phi_n + i\Delta\phi_a) - \cos\phi_n] > 1, \quad (2.13)$$

sendo $\Delta\phi_a$ e $\Delta\phi_b$ dados por

$$\Delta\phi_a = \frac{2\pi N_c}{\sqrt{e_n - \delta \cos(\phi_n)}}, \quad (2.14)$$

e

$$\Delta\phi_b = \frac{2\pi N_c r}{\sqrt{e_{n+1} - 1}}, \quad (2.15)$$

onde r , N_c e δ são parâmetros de controle.

2.3 O Espaço de Fase Para o Modelo do Poço de Potencial Oscilante

Nas figuras 2.3, 2.4 e 2.5 mostramos os espaços de fase obtidos com o mapeamento do poço de potencial. Em todas elas, dependendo dos valores dos parâmetros de controle,

encontramos espaços de fase do tipo misto, onde se observa a presença de caos, comportamentos periódicos e comportamentos quasi-periódicos. Uma condição inicial no mar de caos pode se difundir no espaço de fase na região $e \in (1, e_{fisc})$, onde e_{fisc} corresponde à energia da primeira curva invariante do tipo *spanning*, curva esta que limita o tamanho do mar de caos. As ilhas de estabilidade circulam pontos fixos do tipo elípticos[16]. As regiões quasi-periódicas correspondem às curvas invariantes, sejam elas nas ilhas ou atravessando o espaço de fase, as quais são chamadas de curvas invariantes do tipo *spanning*. Se uma órbita tiver a condição inicial dada no mar de caos, ela jamais cruza a primeira curva invariante *spanning* e, além disso, jamais adentra às ilhas de estabilidade.

A figura 2.3, mostra os espaços de fase do modelo do poço de potencial para três valores diferentes do parâmetro de controle N_c . Para gerar essas figuras usamos $r = 1$ e $\delta = 0,5$ para as três figuras. Para os valores de N_c , usamos $N_c = 13$ para a figura(a), $N_c = 33$ para a figura(b) e $N_c = 53$ para a figura(c). Observando essas figuras, podemos perceber claramente que o valor de N_c influencia diretamente na estrutura do espaço de fase do modelo. A figura 2.3(a), mostra um espaço de fase com um mar caótico menor e um número maior de regiões periódicas e quasi-periódicas. A figura 2.3(b) mostra que com um aumento no valor de N_c , o mar de caos é um pouco maior e temos um número menor de curvas invariantes. A figura 2.3(c), mostra que, aumentando o valor de N_c , aumenta o mar de caos e diminui o tamanho das ilhas de estabilidade.

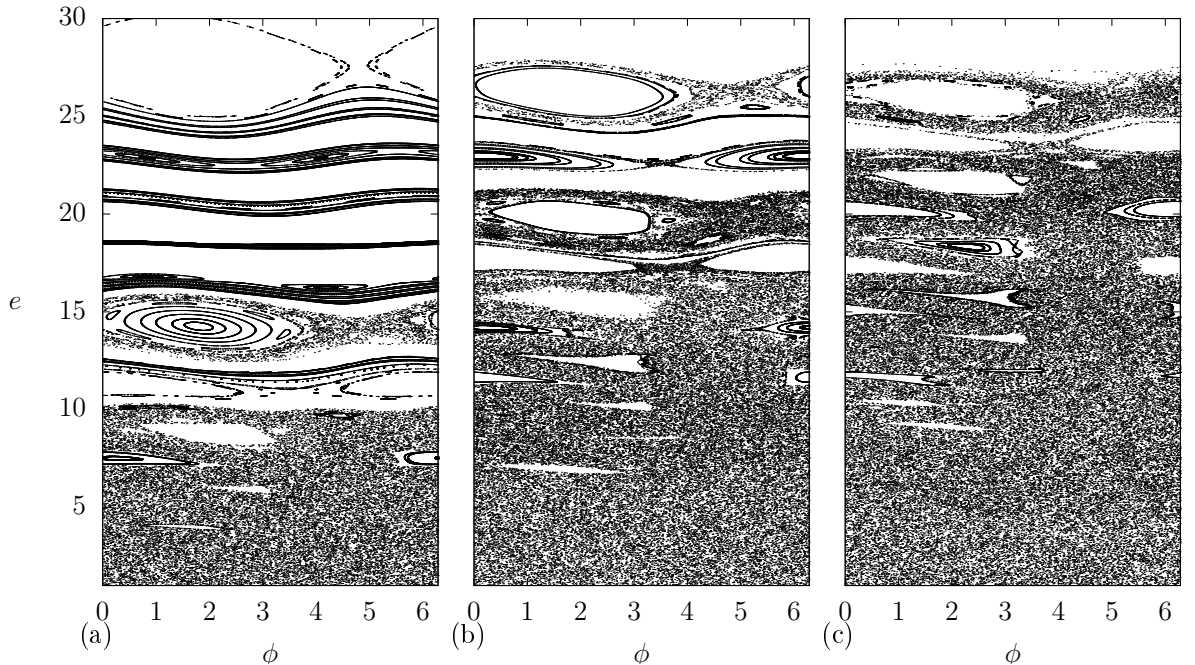


Figura 2.3: Espaços de fase do poço de potencial dependente do tempo com $r = 1$ e $\delta = 0,5$ para (a), (b) e (c), e $N_c = 13$ para (a), $N_c = 33$ para (b) e $N_c = 53$ para (c).

Uma explicação matemática que podemos dar para esse aumento do mar de caos, decorrente do aumento de N_c , pode ser dado pelas equações (2.12) e (2.14). Temos que $\Delta\phi_a$ é diretamente proporcional a N_c na equação (2.14). Isso faz com que ϕ_{n+1} perca a

correlação com ϕ_n e e_{n+1} perca a correlação com e_n na equação (2.12).

A figura 2.4 mostra três espaços de fase onde foram mantidos fixos os valores de $N_c = 33$ e $\delta = 0,5$ para os três espaços de fase. Agora, alteramos o valor do parâmetro r , onde usamos $r = 0,1$ para o caso (a), $r = 1$ para o caso (b) e $r = 1,9$ para o caso (c). Novamente, podemos observar uma variação na estrutura dos espaços de fase, agora em função da variação do parâmetro r . Na figura 2.4(a), para um valor menor do parâmetro de controle, temos um espaço de fase com maior número de curvas invariantes e ilhas de estabilidade, consequentemente um mar de caos de tamanho reduzido. Na figura 2.4(b), com um aumento de 0,9 unidades no parâmetro r , podemos perceber o aumento no tamanho da região caótica e diminuição das regiões de estabilidade. Na figura 2.4(c), onde temos mais um aumento de 0,9 unidades no valor de r , podemos observar um mar de caos ainda maior e um número ainda menor de regiões de estabilidade. Observamos ainda que a estrutura do espaço de fase é mais sensível ao parâmetro r do que ao parâmetro N_c , pois com uma variação muito menor em r do que em N_c podemos perceber maiores modificações na estrutura do espaço de fase. Uma explicação para o aumento do tamanho da região caótica mostrado na figura 2.4, pode dado pelas equações (2.12) e (2.15), pois podemos perceber que $\Delta\phi_b$ é proporcional à r na equação (2.15) fazendo com que ϕ_{n+1} perca a correlação com ϕ_n na equação (2.12) provocando um aumento da região caótica.

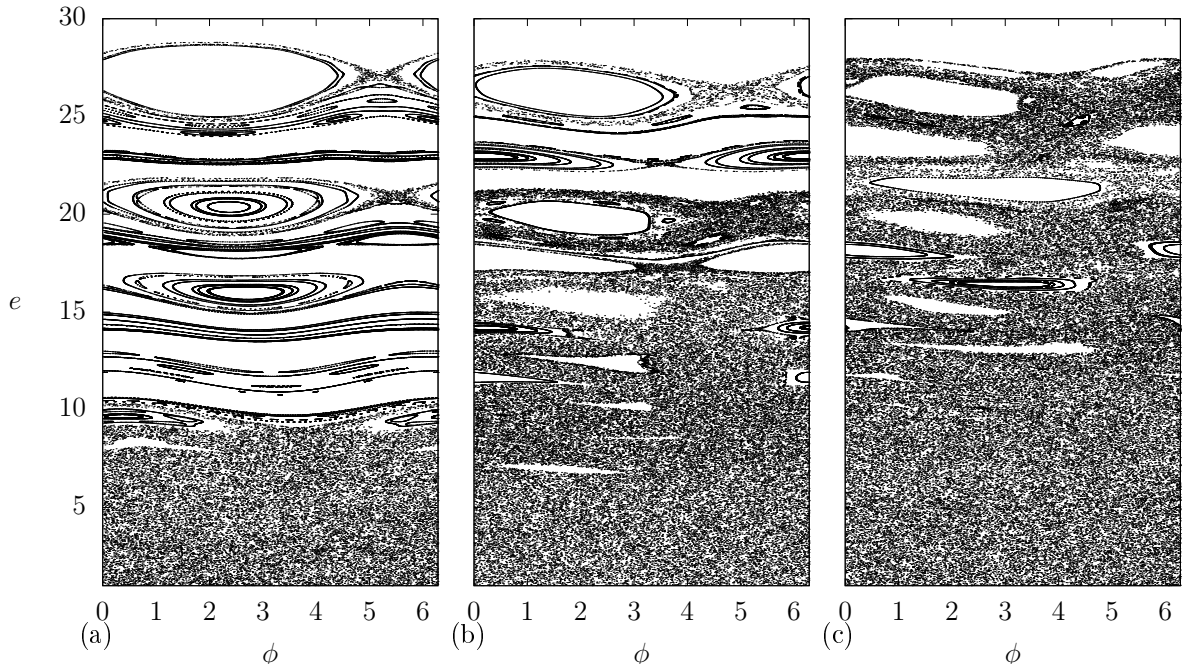


Figura 2.4: Espaços de fase do poço de potencial dependente do tempo com $N_c = 33$ e $\delta = 0,5$ para as figuras (a), (b) e (c), e $r = 0,1$ para (a), $r = 1$ para (b) e $r = 1,9$ para (c).

Por fim, temos na figura 2.5 uma análise do espaço de fase em função do parâmetro δ . Para a construção desta figura, mantemos fixos os valores de $N_c = 33$ e $r = 1$ para os três casos. Usamos $\delta = 0,2$ para o caso (a), $\delta = 0,5$ para o caso (b) e $\delta = 0,8$ para o caso (c). Podemos perceber o aumento no tamanho do mar de caos de acordo do aumento do

parâmetro de controle, que neste caso é δ . Na figura 2.5(a) podemos notar uma grande região com comportamentos que podemos considerar mais estáveis e um estreito mar de caos. Na figura 2.5(b), observamos que, com uma variação de apenas 0,3 unidades, o espaço de fase sofre uma grande mudança aumentando significativamente o mar de caos e diminuindo a área de estabilidade. Com mais um aumento de 0,3 unidades, podemos observar, na figura 2.5(c), que o mar de caos cobre quase toda a figura e existem poucas regiões de estabilidade. Dessa forma, podemos perceber que o espaço de fase desse modelo é ainda mais sensível ao parâmetro δ , pois pequenas variações no valor desse parâmetro, promovem grandes variações no espaço de fase. Essa maior sensibilidade ocorre devido ao fato de δ ter maior influências nas equações do mapeamento provocando maiores perdas de correlação entre e_{n+1} e e_n e também entre ϕ_{n+1} e ϕ_n .

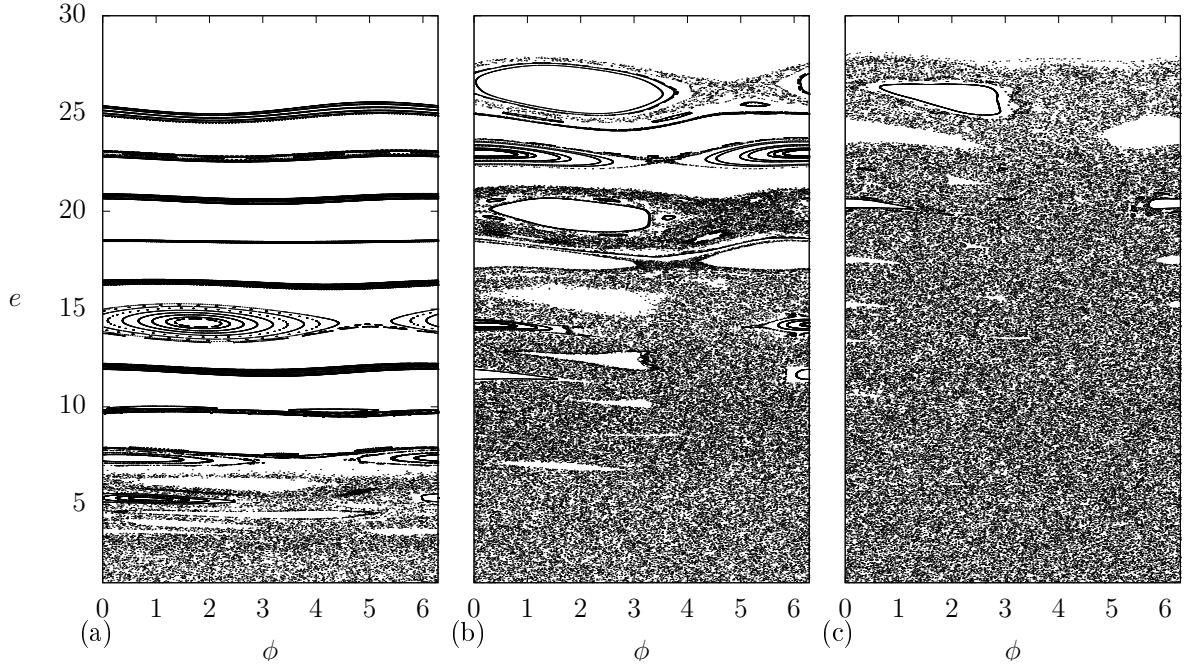


Figura 2.5: Espaços de fase do poço de potencial assimétrico com $r = 1$ e $N_c = 33$ para (a), (b) e (c) e $\delta = 0,2$ para (a), $\delta = 0,5$ (b) e $\delta = 0,8$ (c).

2.4 Os Pontos Fixos do Mapeamento

Nesta seção, encontraremos as expressões dos pontos fixos para o mapeamento e calcularemos os pontos fixos de primeira ordem de forma analítica e numérica.

Para encontrarmos os pontos fixos para este modelo, usaremos a equação (2.12), fazendo $e_{n+1} = e_n = e^*$ e $\phi_{n+1} = \phi_n + 2m\pi = \phi^* + 2m\pi$, sendo m um número inteiro positivo.

Usando $e_{n+1} = e_n = e^*$ na primeira sentença da equação (2.12), teremos a equação

$$\delta[\cos(\phi^* + \Delta\phi_a) - \cos(\phi^*)] = 0. \quad (2.16)$$

Para resolvermos a equação (2.16) temos duas opções: Primeiro fazendo $\delta = 0$, o que não é um valor de δ interessante para nosso trabalho. Segundo fazendo $[\cos(\phi^* + \Delta\phi_a) - \cos(\phi^*)] = 0$, onde teremos

$$\cos(\phi^* + \Delta\phi_a) = \cos(\phi^*), \quad (2.17)$$

o que nos leva a

$$\Delta\phi_a = 2k\pi, k \in \mathbb{N}^* \quad (2.18)$$

ou de forma análoga

$$\Delta\phi_a = 2k\pi - 2\phi^*, k \in \mathbb{N}^*. \quad (2.19)$$

Denominaremos de pontos fixos do tipo P_1 , os pontos fixos que encontraremos através da equação (2.18) e do tipo P_2 os que encontraremos através da equação (2.19).

Vamos iniciar o processo para encontrar os pontos fixos do tipo P_1 utilizando a segunda linha da equação (2.12), onde temos $\phi_{n+1} = \phi_n + i\Delta\phi_a + \Delta\phi_b$. Vamos substituir a equação (2.15) no lugar de $\Delta\phi_b$ e a equação (2.18) no lugar de $\Delta\phi_a$, o que nos levará a

$$\phi^* + 2m\pi = \phi^* + 2k\pi + \frac{2\pi N_c r}{\sqrt{e^* - 1}}. \quad (2.20)$$

Resolvendo essa equação, teremos que

$$e^* = 1 + \left(\frac{N_c r}{m - k} \right)^2. \quad (2.21)$$

Agora vamos substituir a equação (2.18) na equação de $\Delta\phi_a$, dada pela equação (2.14), onde teremos

$$2k\pi = \frac{2\pi N_c}{\sqrt{e^* - \delta \cos(\phi^*)}}, \quad (2.22)$$

o que nos leva a

$$\phi^* = \arccos \left[\frac{1}{\delta} \left[e^* - \left(\frac{N_c}{k} \right)^2 \right] \right], \quad (2.23)$$

ou

$$\phi^* = 2\pi - \arccos \left[\frac{1}{\delta} \left[e^* - \left(\frac{N_c}{k} \right)^2 \right] \right], \quad (2.24)$$

Para facilitar a identificação dos pontos fixos do tipo P_1 , vamos nomear de P'_1 os pontos fixos encontrados com as equações (2.21) e (2.23), e P''_1 os pontos fixos encontrados com as equações (2.21) e (2.24).

Agora vamos encontrar os pontos fixos do tipo P_2 . Primeiramente vamos substituir a equação (2.19) na equação (2.14), onde encontraremos

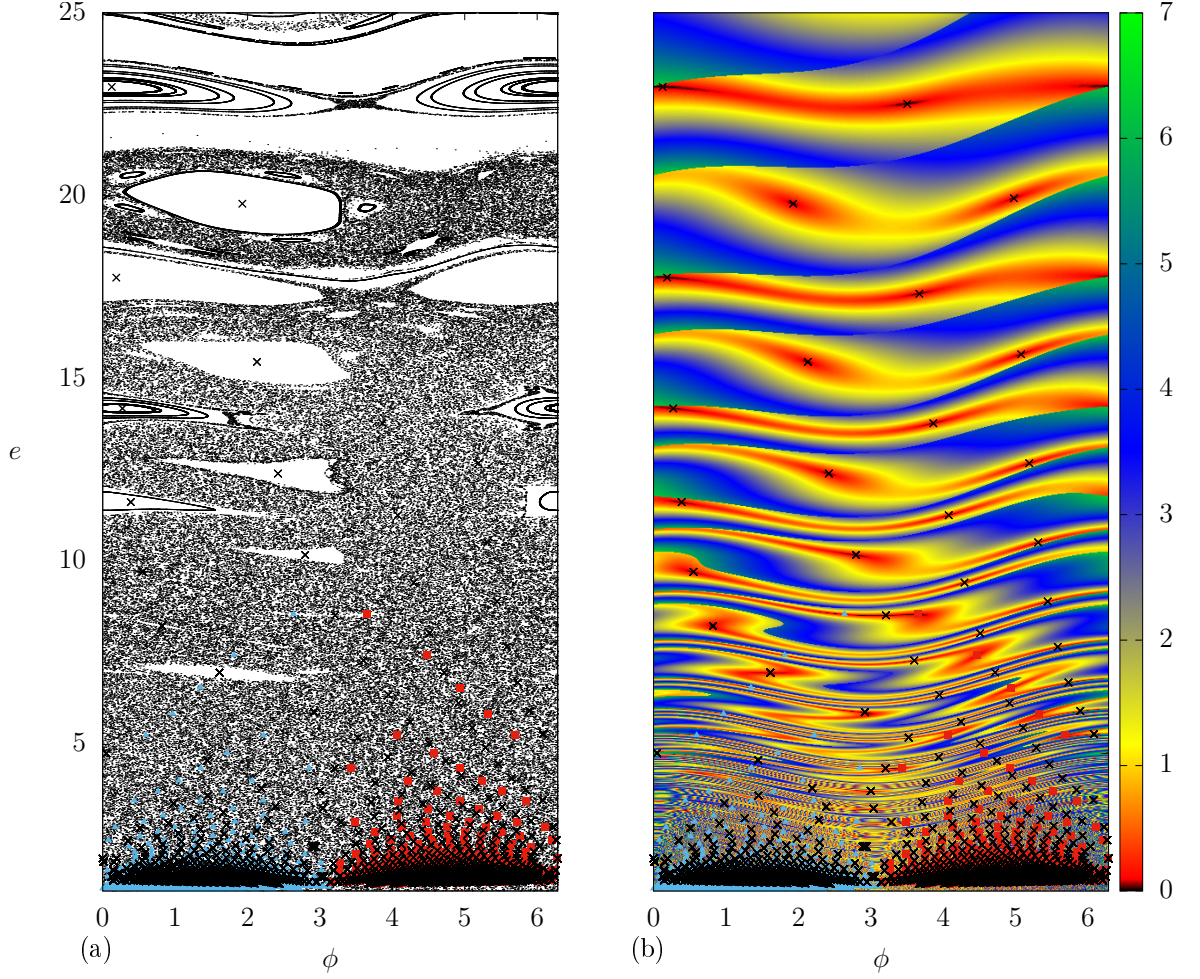


Figura 2.6: Em (a) temos o espaço de fase do mapeamento para $N_c = 33$, $r = 1$ e $\delta = 0,5$. Em (b) temos o plot do observável $d(e, \phi)$, onde pintamos de preto os valores tais que $d(e, \phi) \rightarrow 0$. Em (a) e (b), temos os plots dos pontos fixos dos tipos P_1 e P_2 encontrados analiticamente através das equações dos pontos fixos de primeira ordem.

$$e^* = \delta \cos(\phi^*) + \left(\frac{\pi N_c}{k\pi - \phi^*} \right)^2. \quad (2.25)$$

Fazendo $\phi_{n+1} = \phi^* + m2\pi$ na segunda sentença da equação (2.12) e substituindo (2.19) no lugar $\Delta\phi_a$ e (2.15) no lugar de $\Delta\phi_b$ também na segunda sentença da equação (2.12), teremos

$$1 - e^* + \left(\frac{\pi N_c r}{\pi(m - k) + \phi^*} \right)^2 = 0. \quad (2.26)$$

Para finalizar, vamos substituir o valor de e^* encontrado na equação (2.25), na equação (2.26), encontrando

$$1 + \left(\frac{\pi N_c r}{\pi(m-k) + \phi^*} \right)^2 - \delta \cos(\phi^*) - \left(\frac{\pi N_c}{k\pi - \phi^*} \right)^2 = 0. \quad (2.27)$$

Notemos que a equação (2.27) é transcendental, portanto só pode ser resolvida de forma numérica.

Na figura 2.6 podemos fazer uma observação muito interessante em relação aos pontos fixos. Em (a), temos um espaço de fase do mapeamento gerado para $N_c = 33$, $r = 1$ e $\delta = 0,5$. Em (b), usamos o observável $d(e, \phi)$, que é definido como

$$d(e, \phi) = \sqrt{(\phi_{n+1} - \phi_n)^2 + (e_{n+1} - e_n)^2}. \quad (2.28)$$

onde $\phi_{n+1} \equiv \phi_n \pmod{2\pi}$. Para gerarmos a figura 2.6(b), criamos uma grade de 1000×1000 , gerando 10^6 condições iniciais diferentes, com $e \in [1, 25]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$. Iteramos, cada uma dessas condições iniciais (ϕ_n, e_n) , apenas uma vez, encontrando o par (ϕ_{n+1}, e_{n+1}) correspondente a cada uma dessas condições iniciais e calculamos $d(e, \phi)$. Feito isso, usamos a cor preta para representar as condições iniciais tais que $d(\phi, e) \rightarrow 0$, ou seja, os pontos fixos de primeira ordem do mapeamento. Notemos que a coluna de cores da figura 2.6(b) representa o valor de $d(\phi, e)$, sendo assim, as cores na parte inferior, representam condições iniciais que se evoluíram para uma posição próxima, e as cores mais acima, as condições iniciais que se evoluíram para uma posição mais distante. A vantagem de usarmos esse método é que podemos visualizar pontos fixos que não podem ser vistos apenas observando os espaço de fase.

Para termos uma confirmação de que o método usado para encontrar os pontos fixos da figura 2.6(b) é robusto, encontramos novamente esses pontos fixos, porém através das equações analíticas para os pontos fixos do tipo P_1 , que estão destacados nas cores azul e vermelho, sendo P'_1 na cor azul e P''_1 na cor vermelha, e os pontos fixos do tipo P_2 que estão destacados na cor preta. Podemos ver que elas sobrepuseram perfeitamente os pontos fixos encontrados numericamente. Notemos ainda que fica fácil observar na figura 2.6(a) os pontos fixos elípticos que ficam dentro das ilhas de estabilidade.

2.5 Dispersão de Primeira Ordem Para o Modelo

Nesta seção estudaremos a dispersão de primeira ordem das condições iniciais após uma única iteração, ou seja, onde a fase ϕ_1 se encontrará após uma única iteração ao retirarmos da equação (2.12) a função $\phi \pmod{2\pi}$. Em outras palavras, vamos estudar onde ϕ_1 se encontrará após iterarmos (ϕ_0, e_0) uma única vez. Para essa análise, vamos definir para este mapeamento a função

$$\nu = \frac{\phi_{n+1}}{2\pi}, \quad (2.29)$$

onde $\nu \in \mathbb{R}$.

Pela equação (2.29), temos que, se $0 < \nu \leq 1$, ϕ_n se encontra no intervalo de $(0, 2\pi]$, se $1 < \nu \leq 2$, ϕ_n se encontra no intervalo de $]2\pi, 4\pi]$, se $2 < \nu \leq 3$, ϕ_n se encontra no intervalo de $]4\pi, 6\pi]$, e assim sucessivamente.

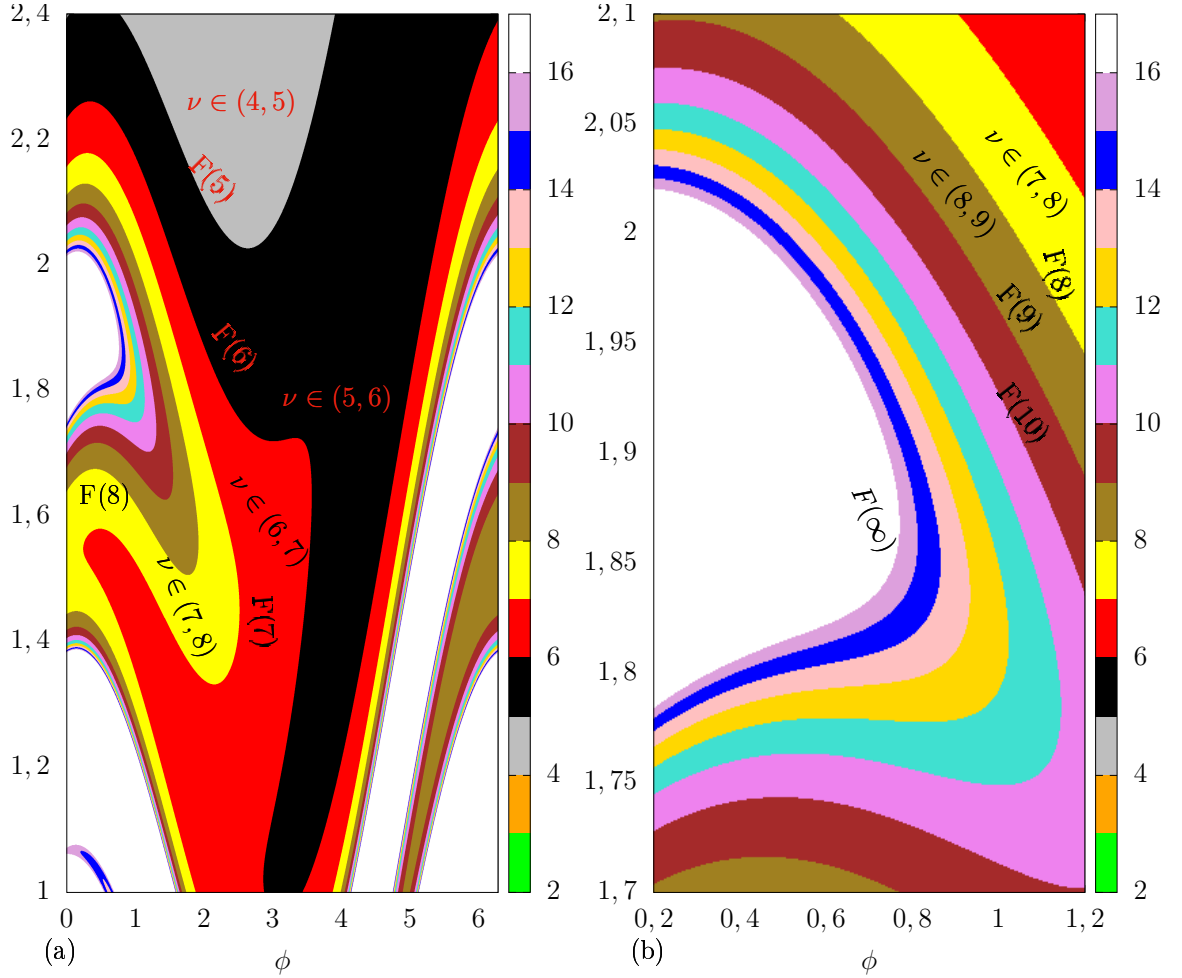


Figura 2.7: Dispersão de primeira ordem do poço de potencial para $r = 1$, $N_c = 3$ e $\delta = 0,5$.

Podemos ver na figura 2.7(a) o comportamento da dispersão de primeira ordem para esse modelo. Na cor cinza mostram as condições iniciais que forneceram $\nu \in (4, 5)$, em preto as condições iniciais que forneceram $\nu \in (5, 6)$, em vermelho as condições iniciais que forneceram $\nu \in (6, 7)$, em amarelo as condições iniciais que forneceram $\nu \in (7, 8)$, e assim sucessivamente. Devemos chamar a atenção para a região em branco, que é a região onde temos $\nu \rightarrow \infty$. Os dados numéricos sugerem que, as condições iniciais que se encontram nessa região fornecem reflexões múltiplas e trataremos delas logo adiante com mais detalhes. A figura 2.7(b) mostra uma ampliação da região próxima de onde temos $\nu \rightarrow \infty$. Para construir a figura 2.7, utilizamos uma grade de 2000×2000 sendo 2000

valores diferentes de e no intervalo de $[1, 2, 4]$ e 2000 valores de ϕ no intervalo de $[0, 2\pi]$ gerando um total de 4×10^6 de condições iniciais que foram iteradas apenas uma vez.

Analisando a figura 2.7 podemos observar que a região de cor cinza que mostra os valores de $\nu \in (4, 5)$ faz fronteira com a região de cor preta que mostra a região onde $\nu \in (5, 6)$. Então podemos perceber que existe uma linha que separa as regiões cinza e preta, que é a linha onde $\nu = 5$. De forma análoga, podemos concluir que a linha que separa as regiões vermelha e amarela é a linha onde $\nu = 7$, que é fronteira das regiões onde $\nu \in (6, 7)$ que é a região vermelha e onde $\nu \in (7, 8)$ que é a região amarela. Sendo assim, fica claro que existe uma curva de separação entre cada cor, que é obtida quando ν é inteiro.

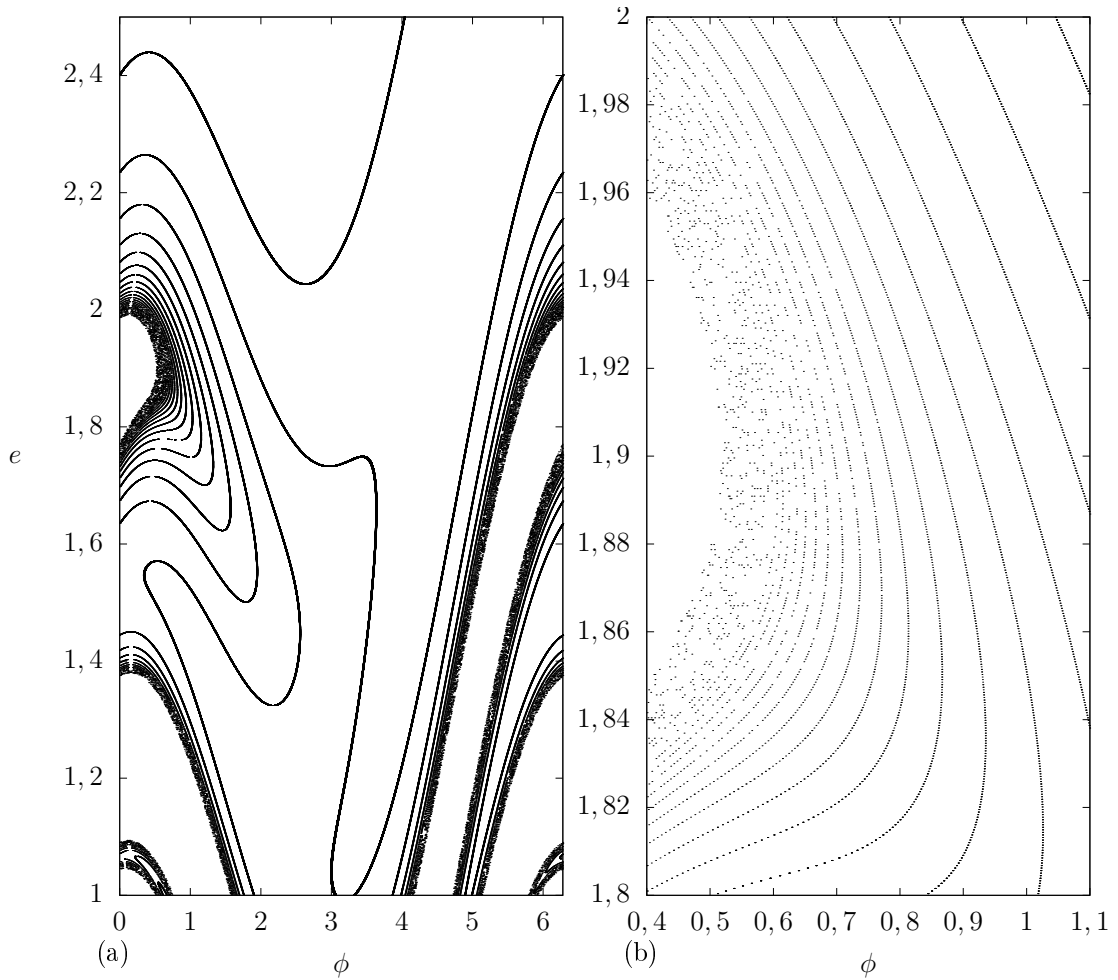


Figura 2.8: Curvas que separam as regiões coloridas da figura 2.7. Em (a) temos as curvas que separam as cores da figura 2.7(a) em (b) a ampliação de (a) para $e \in [1.8, 2]$ e $\phi \in [0.4, 1.1]$.

A figura 2.8 mostra as curvas que separam as regiões coloridas da figura 2.7. Podemos perceber que, se sobrepor as figuras 2.7(a) e 2.8(a), as curvas da figura 2.8(a) ficarão localizadas exatamente na divisão das cores da figura 2.7(a). A figura 2.8(b), mostra uma ampliação da figura 2.8(a) para $e \in [1.8, 2]$ e $\phi \in [0.4, 1.1]$, onde podemos ver com

mais detalhes as curvas para valores inteiros de ν próximo da região onde $\nu \rightarrow \infty$. Para construirmos essa figura, substituímos a segunda sentença da equação (2.12) na equação (2.29), encontrando a equação

$$F(\nu) = \phi_n + i\Delta\phi_a + \Delta\phi_b - 2\nu\pi, \quad (2.30)$$

onde resolvemos $F(\nu) = 0$ para cada valor de ν . Na simulação numérica, usamos uma grade de 50.000 valor de e e 50.000 valores de ϕ totalizando $2,5 \times 10^9$ condições iniciais para 100 valores diferentes de ν , ou seja, geramos 100 curvas diferentes.

2.6 As Reflexões Múltiplas

Nesta seção, estudaremos as condições iniciais que fornecem as reflexões múltiplas, ou seja, as condições iniciais que fazem com que a partícula fique aprisionada dentro do poço por algum tempo, o que implica em $i > 1$. Para que possamos separar a região onde temos as reflexões múltiplas, precisamos ter $\nu \rightarrow \infty$. Observando as equações (2.29) e (2.12), notamos que para $\nu \rightarrow \infty$, é necessário que $\phi_{n+1} \rightarrow \infty$. Para que isso aconteça, temos duas opções na segunda linha da equação (2.12), onde uma é $\Delta\phi_a \rightarrow \infty$ e a outra é $\Delta\phi_b \rightarrow \infty$. Podemos observar na equação (2.15) que, se $e_{n+1} \rightarrow 1$, teremos $\Delta\phi_b \rightarrow \infty$. Então, na primeira linha da equação (2.12), podemos fazer $e_{n+1} = 1$ e encontrar a equação

$$G(i) = e_n - 1 + \delta[\cos(\phi_n + i\Delta\phi_a) - \cos(\phi_n)]. \quad (2.31)$$

onde $G(i) = 0$.

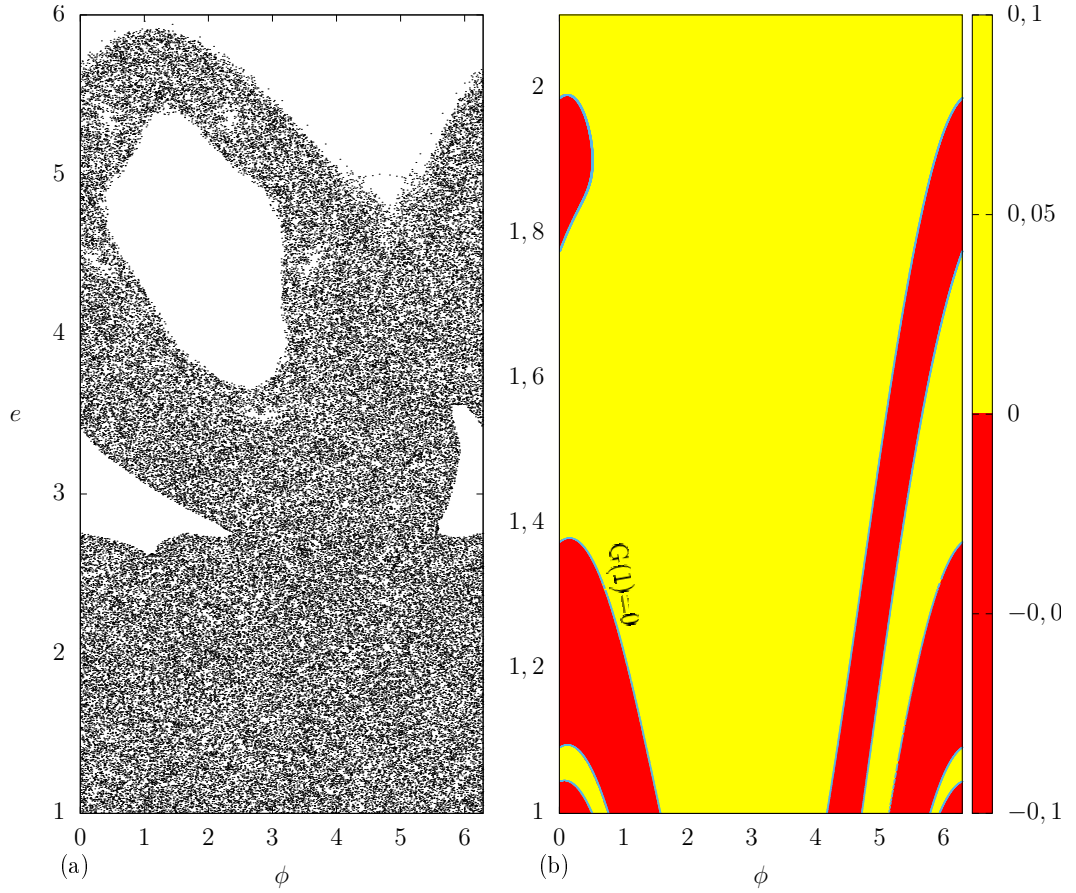


Figura 2.9: Em(a) temos o espaço de fase gerado com $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$. Em(b) temos, na cor vermelha, a região onde ocorrem as reflexões múltiplas, na cor amarela, a região onde não ocorrem as reflexões múltiplas. Em cor preta mostra as curvas que separam essas duas regiões.

A figura 2.9(b) mostra as regiões onde acontecem as reflexões múltiplas. Comparando a figura 2.9(b) com a figura 2.7, podemos observar que a parte amarela da figura 2.9(b) é a mesma onde se encontra a parte colorida da figura 2.7, ou seja, região onde não ocorrem as reflexões múltiplas. A parte vermelha da figura 2.9(b) é a mesma onde se encontra a parte branca da figura 2.7, que é a região onde ocorrem as reflexões múltiplas. Na figura 2.9(a) temos um espaço de fase para o modelo usando os parâmetros de controle $r = 1$, $N_c = 3$ e $\delta = 0,5$. Plotamos também, na figura 2.9(b), a curva que separa as duas regiões, ou seja a curva $G(1) = 0$. Como podemos ver, ela sobrepõe perfeitamente na divisão das duas regiões. Para $G(1) > 0$, temos a região onde não ocorrem as reflexões múltiplas e, para $G(1) < 0$, temos a região onde ocorrem as reflexões múltiplas.

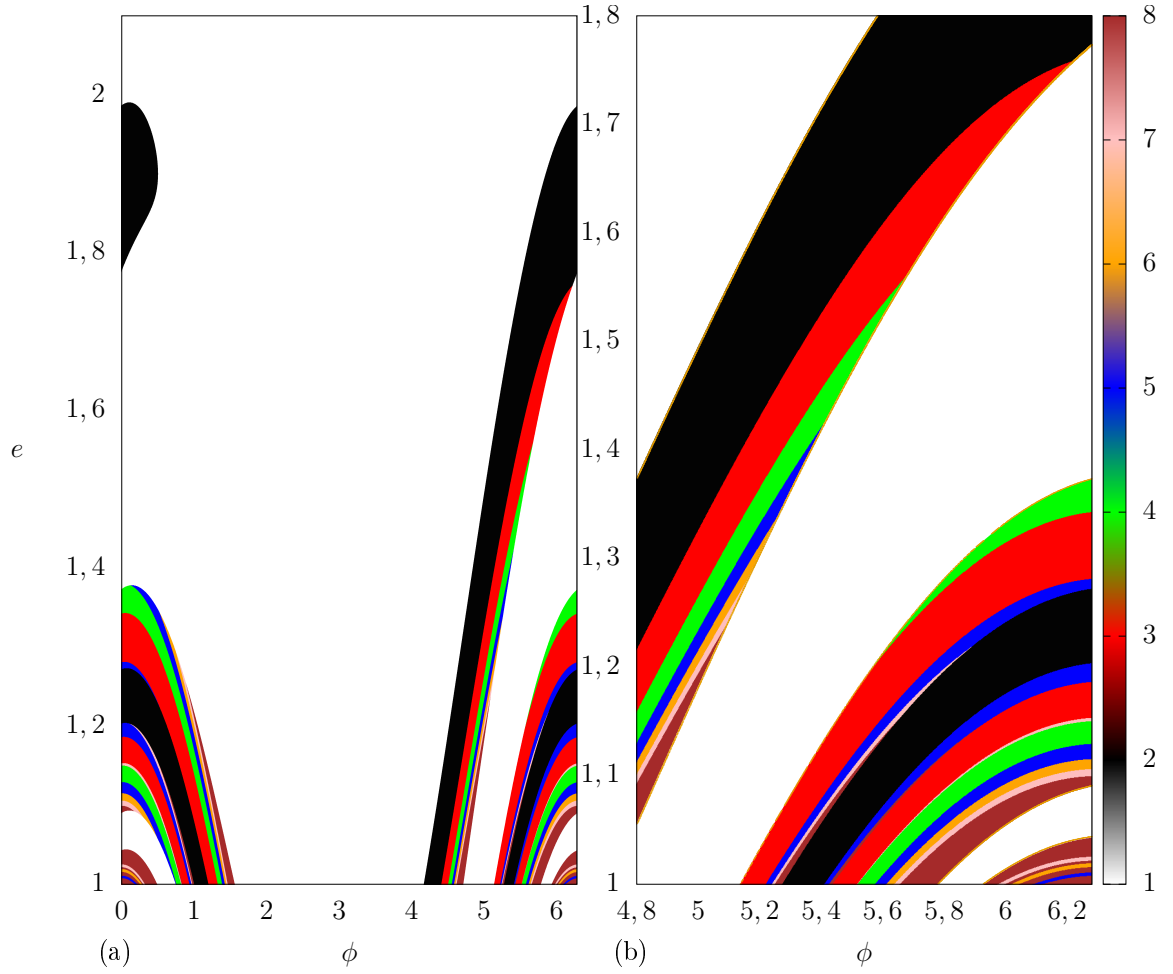


Figura 2.10: Análise da região onde ocorrem as reflexões múltiplas. Em (a), usamos $\phi \in [0, 2\pi]$ e $e \in [1, 2]$. Em (b) mostramos uma ampliação de (a) no intervalo $\phi \in [4, 8]$ e $e \in [1, 1.8]$ para destacar melhor a divisão das cores.

Agora vamos fazer um estudo da região das reflexões múltiplas, ou seja, a região que está pintada de vermelho na figura 2.9(b). Nosso objetivo é encontrar as condições iniciais que fornecem uma reflexão múltipla, duas reflexões múltiplas, três reflexões múltiplas e assim sucessivamente. Esse estudo está retratado na figura 2.10(a). Nesta figura, mostramos em cor branca as regiões onde não ocorre reflexões múltiplas e nas regiões coloridas temos as reflexões múltiplas. Na região de reflexões múltiplas, pintamos de preto a região onde se encontram as condições iniciais que fornecem apenas uma reflexão múltipla, de vermelho as que tem duas reflexões múltiplas, de verde as condições iniciais com três reflexões múltiplas, de azul as que tem quatro reflexões múltiplas, e assim sucessivamente. Observamos ainda que as regiões de cor preta estão entre as curvas $G(1) = 0$ e $G(2) = 0$, as de cor vermelha entre as curvas $G(2) = 0$ e $G(3) = 0$, as de cor verde entre as curvas $G(3) = 0$ e $G(4) = 0$, as de cor azul entre as curvas $G(4) = 0$ e $G(5) = 0$, e assim sucessivamente.

2.7 Número de Reflexões Múltiplas em Função do Parâmetro N_c .

Nesta seção, estudaremos o número de reflexões múltiplas em função do parâmetro de controle N_c . Já vimos que esse parâmetro é dado por $N_c = \frac{w}{(2\pi)(a/\sqrt{2V_0/m})}$ e fica fácil percebermos que, de acordo com a expressão esse parâmetro, é diretamente proporcional à frequência w e inversamente proporcional à largura do poço. Então, a variação do parâmetro N_c altera, expressivamente, a dinâmica deste modelo.

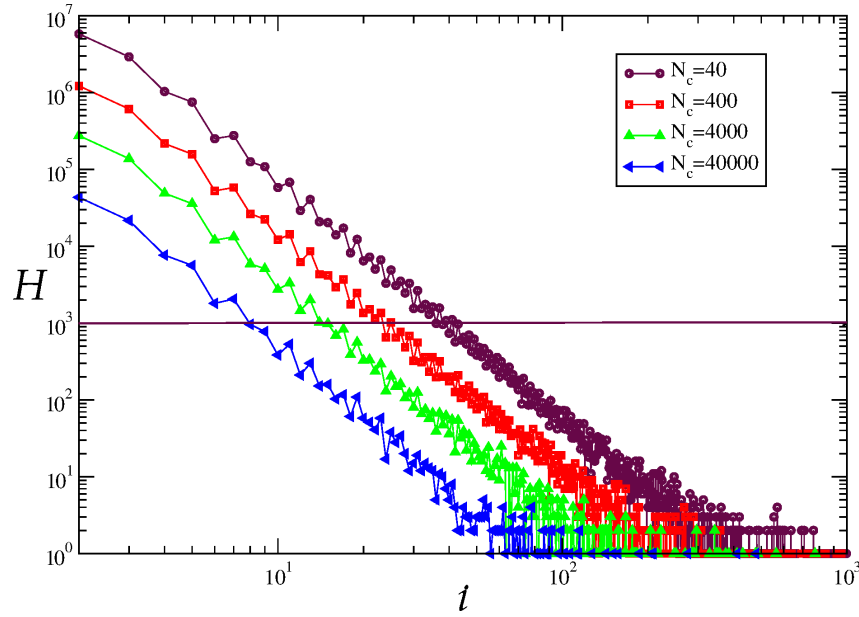


Figura 2.11: Histograma do número de reflexões múltiplas para quatro valores diferentes de N_c . Usamos $r = 1$ e $\delta = 0,5$.

Na figura 2.11 temos um histograma do número de reflexões múltiplas para quatro valores diferentes de N_c . Para construirmos essa figura, iteramos uma condição inicial dada no mar de caos 10^8 vezes e contamos quantas vezes uma certa quantidade de reflexões múltiplas aconteceu. Podemos observar que, à medida que o valor de N_c aumenta, o gráfico se desloca para esquerda. Para facilitar a compreensão, traçamos uma linha horizontal em 10^3 , e observando essa linha, podemos notar que o número reflexões múltiplas que aconteceram 10^3 vezes diminui quando N_c aumenta, mostrando um comportamento típico de escala.

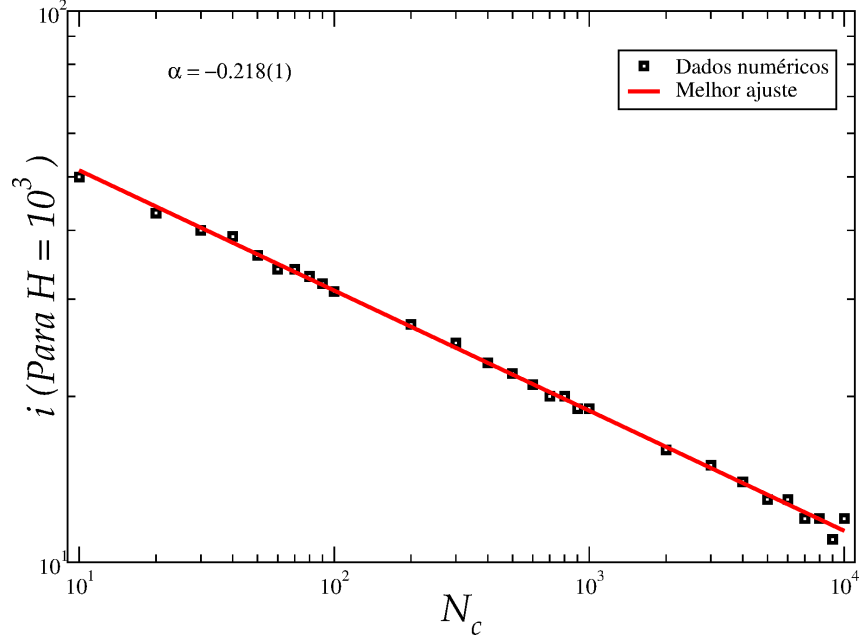


Figura 2.12: Ajuste em lei do potência do decaimento de número reflexões múltiplas em função de N_c para $H = 10^3$.

A figura 2.12, mostra o comportamento do número de reflexões múltiplas em função de N_c . Um ajuste em lei de potência para o decaimento, fornece um expoente $\alpha = -0,218(1)$.

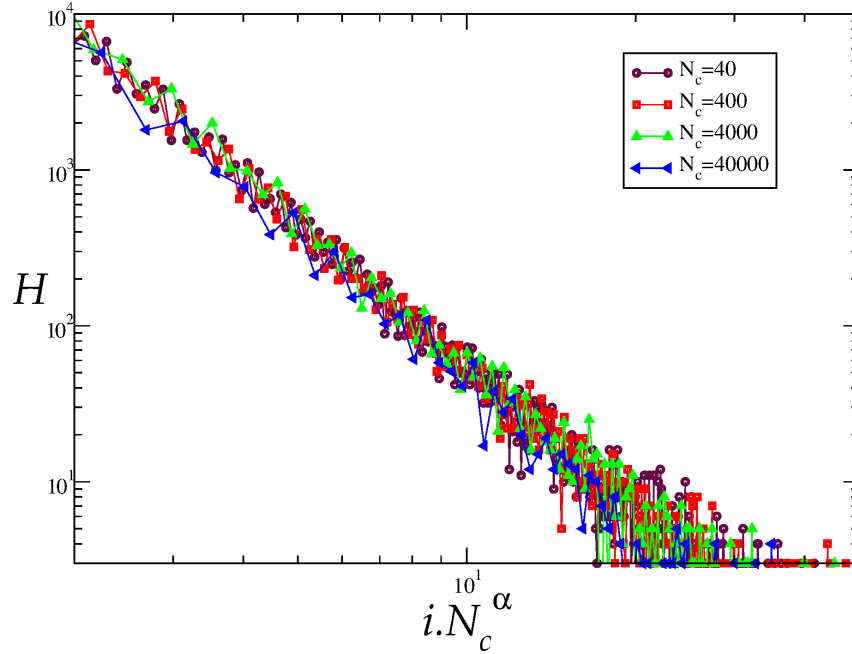


Figura 2.13: Sobreposição das curvas do histograma do número de reflexões múltiplas em função de N_c , confirmando a invariância de escala.

Encontrado o ajuste da figura 2.11, aplicamos uma reescala apropriada no eixo das abscissas fazendo $i \rightarrow iN_c^\alpha$ para cada uma das curvas de N_c , unindo todos os gráficos da figura em um único gráfico universal, confirmando invariância de escala em função de N_c , como mostra a figura 2.13.

Capítulo 3

O modelo do poço de potencial com nova seção de Poincaré

Neste capítulo apresentaremos o modelo do poço de potencial com o fundo oscilante dependente periodicamente do tempo com uma nova seção de Poincaré e uma nova estrutura. Mostraremos, de forma detalhada, o procedimento usado para encontrar o mapeamento para o mesmo e, além disso, apresentaremos e discutiremos o espaço de fase para o modelo em questão.

3.1 O Modelo do Poço Potencial com o Fundo Dependente Periodicamente do Tempo com Nova Seção de Poincaré

O modelo do poço de potencial que vamos apresentar agora, surgiu a partir do modelo do poço de potencial com o fundo oscilante apresentado no capítulo anterior. Propomos esse modelo pelo fato dele apresentar um espaço de fase com pontos fixos simétricos, o que facilitou nossas investigações, uma vez que apresentou resultados mais fáceis se serem compreendidos. Essa nova proposta do modelo do poço de potencial com o fundo oscilante é dado pela figura 3.1

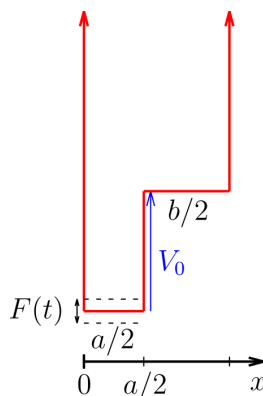


Figura 3.1: Modelo do poço de potencial assimétrico com o fundo oscilante.

Nessa nova versão, o potencial é dado por

$$V(x, t) = \begin{cases} \infty & \text{se } x \leq 0 \text{ ou } x \geq \frac{a+b}{2} \\ V_0 & \text{se } \frac{a}{2} < x \leq \frac{b}{2} \\ V_1 \cos(wt) & \text{se } 0 < x < \left(\frac{a}{2}\right) \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde a , b , V_0 , V_1 e w são constantes, sendo w a frequência de oscilação do fundo do poço que se move periodicamente no tempo com a função $F(t) = V_1 \cos(wt)$. Podemos observar que uma partícula de massa m confinada ao interior do poço da figura 3.1 pode estar submetida a diferentes potenciais, dependendo da posição onde se encontra. Isso implica em ganhos ou perdas de energia cinética.

Para encontrarmos o mapeamento para o modelo, vamos considerar uma partícula de massa m , iniciando sua dinâmica em $x = \frac{a+b}{2}$, com uma energia $E_n > V_0$ em um instante inicial $t = t_n$, com uma velocidade inicial v_0 e, conseqüentemente, com uma energia cinética que denominaremos de K_0 .

Ao dar início a dinâmica do sistema, a partícula viaja da direita para a esquerda com velocidade $v_0 = \sqrt{2K_0/m}$ e energia cinética $K_0 = E_n - V_0$. O tempo gasto para que a partícula viaje de $x = \frac{a+b}{2}$ até $\frac{a}{2}$, ou seja, a distância $\frac{b}{2}$, é dado por $\Delta t_b = \frac{b}{2v_0}$.

Ao alcançar a posição $x = \frac{a}{2}$, a partícula adentra o poço, sofrendo uma variação brusca da velocidade uma vez que teremos uma mudança de potencial e a energia E_n permanece constante. Dentro do poço, terá uma nova energia cinética K_a e uma nova velocidade v_a , onde $v_a = \sqrt{2K_a/m}$, logo teremos que

$$K_a = E_n - V_1 \cos[\omega(t_n + \Delta t_b)]. \quad (3.2)$$

A partícula viajará a distância a com velocidade v_a , alcançando o potencial infinito em $x = 0$ e será refletida para a direita com a mesma velocidade, uma vez que o sistema não sofre a influência de forças externas. Ao alcançar novamente a posição $x = \frac{a}{2}$, em um tempo $\Delta t_a = \frac{a}{v_a}$, a energia mecânica E_a da partícula será dada por

$$E_a = K_a + V_1 \cos[\omega(t_n + \Delta t_b + \Delta t_a)]. \quad (3.3)$$

Neste ponto, se $E_a \leq V_0$, a partícula é refletida para $x = 0$ ficando confinada dentro do poço até que a partícula tenha energia suficiente para sair do poço, ou seja, a partícula ficará confinada até que $E_a > V_0$. Dessa forma, a partícula escapará do poço quando

$$E_a = K_a + V_1 \cos[\omega(t_n + \Delta t_b + i\Delta t_a)] > V_0, \quad (3.4)$$

onde i é o menor inteiro que faz com que a equação acima seja verdadeira.

Ao sair do poço, a partícula novamente sofrerá uma variação abrupta na velocidade, pois, mudará o potencial e a energia E_a permanecerá constante. Agora, a partícula

viaja a distância $\frac{b}{2}$ até alcançar a posição $x = \frac{a+b}{2}$, ponto onde fixamos nossa seção de Poincaré, com uma energia cinética K_b e velocidade constante $v_b = \sqrt{2K_b/m}$. Nesta parte da dinâmica, $K_b = E_a - V_0$ e $\Delta t'_b = \frac{b}{2v_b}$, onde $\Delta t'_b$ é o tempo necessário para a partícula percorrer a distância $\frac{b}{2}$, após ter saído do poço. Desse modo, temos que a energia $E_{n+1} = E_a$. Então, substituindo a equação (3.2) na (3.3) temos que

$$E_{n+1} = E_n - V_1 \cos[\omega(t_n + \Delta t_b)] + V_1 \cos[\omega(t_n + \Delta t_b + i\Delta t_a)]. \quad (3.5)$$

Além disso, temos que

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_b + i\Delta t_a + \Delta t'_b. \quad (3.6)$$

Da forma em que escrevemos o mapeamento do sistema até agora, temos um grande número de parâmetros de controle. Com o objetivo de diminuir esse número e usarmos variáveis adimensionais. Vamos fazer, também para esse novo modelo, algumas mudanças de variáveis. Primeiramente, vamos definir $e = \frac{E}{V_0}$ como sendo uma energia adimensional e $\phi = \omega t$ o tempo em função no número de oscilações do fundo do poço. Vamos definir também as seguintes razões: $r = \frac{a}{b}$, $\delta = \frac{V_1}{V_0}$ e $N_c = \frac{\omega a}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{2V_0}}$. É importante observarmos que devemos ter $0 < \delta < 1$, pois caso δ seja um valor maior que 1, não teremos mais um poço de potencial oscilante, já que o poço alcançará um potencial maior que V_0 . Como já foi visto, o valor de N_c fornece o número de oscilações do fundo do poço em um tempo $t = a\sqrt{\frac{m}{2V_0}}$, que é o tempo necessário para a partícula atravessar a distância $\frac{a}{2}$ com energia cinética igual a V_0 . Agora, esse tempo é encontrado através da razão da distância $\frac{a}{2}$, pela velocidade $v = \sqrt{\frac{2V_0}{m}}$.

Dividindo a equação (3.5) por V_0 e multiplicando a equação (3.6) por ω teremos

$$\frac{E_{n+1}}{V_0} = \frac{E_n}{V_0} - \frac{V_1 \cos[(\omega t_n + \omega \Delta t_b)]}{V_0} + \frac{V_1 \cos[(\omega t_n + \omega \Delta t_b + i\omega \Delta t_a)]}{V_0}, \quad (3.7)$$

e

$$\omega t_{n+1} = \omega t_n + \omega \Delta t_b + i\omega \Delta t_a + \omega \Delta t'_b. \quad (3.8)$$

Aplicando as mudanças de variáveis propostas nas equações (3.7) e (3.8) teremos

$$e_{n+1} = e_n - \delta \cos[(\phi_n + \Delta \phi_b)] + \delta \cos[(\phi_n + \Delta \phi_b + i\Delta \phi_a)], \quad (3.9)$$

e

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta \phi_b + i\Delta \phi_a + \Delta \phi'_b. \quad (3.10)$$

Agora, precisamos encontrar as expressões de $\Delta \phi_b$, $\Delta \phi_a$ e $\Delta \phi'_b$. Podemos encontrar a expressão de ϕ_b por meio do seguinte processo: sabendo-se que $\Delta t_b = \frac{b}{2v_0}$, que $v_0 = \sqrt{\frac{2K_0}{m}}$

e que $K_0 = E_n - V_0$, podemos multiplicar toda equação de Δt_b por ω e substituir nela as equações de v_0 e K_0 . Usando novamente as mudanças de variáveis que propomos, chegaremos em $\Delta\phi_b = \frac{\omega b}{2} \sqrt{\frac{m}{2(E_n - V_0)}}$. Multiplicando e dividindo essa última equação por πa e dividindo o numerador e o denominador da fração dentro do radical por V_0 , poderemos encontrar embutida nela a equação de N_c , concluindo que $\Delta\phi_b = \frac{r N_c \pi}{\sqrt{e_n - 1}}$. De forma análoga, podemos encontrar as expressões de $\Delta\phi_a$ e $\Delta\phi'_b$, concluindo que o mapeamento do modelo é dado por

$$T : \begin{cases} e_{n+1} = e_n - \delta \cos[(\phi_n + \Delta\phi_b)] + \delta \cos[(\phi_n + \Delta\phi_b + i\Delta\phi_a)] \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \Delta\phi_b + i\Delta\phi_a + \Delta\phi'_b \quad \text{mod } 2\pi \end{cases}, \quad (3.11)$$

onde i o menor inteiro tal que $e_{n+1} > 1$. As variáveis auxiliares são dados por

$$\Delta\phi_b = \frac{r N_c \pi}{\sqrt{e_n - 1}}, \quad (3.12)$$

$$\Delta\phi_a = \frac{2\pi N_c \pi}{\sqrt{e_n - \delta \cos(\phi_n + \Delta\phi_b)}} \quad (3.13)$$

e

$$\Delta\phi'_b = \frac{r N_c \pi}{\sqrt{e_{n+1} - 1}}. \quad (3.14)$$

3.2 Espaços de Fase do Modelo

Usando o mapeamento encontrado na seção anterior, construímos os espaços de fase para essa nova proposta de seção de Poincaré para modelo do poço de potencial. As figuras 3.2, 3.3 e 3.4 mostram os espaços de fase para o modelo em questão, bem como o comportamento da estrutura dos mesmos em função da variação dos parâmetros de controle r , N_c e δ . Ao analisarmos a mudança estrutural causada por essa variação, usamos como referência o espaço de fase gerado com valores de $r = 1$, $N_c = 3$ e $\delta = 0,5$, que estará sempre na parte central da figura.

Podemos observar que, de modo geral, os espaços de fase são simétricos em relação a $\phi = \pi$ e são do tipo misto, uma vez que apresentam uma região caótica, ilhas estabilidade e curvas invariantes, sendo algumas do tipo *spanning*. Nestes espaços de fase, os mares de caos são limitados pela primeira curva invariante do tipo *spanning*. Temos também um número grande de ilhas de estabilidade e, dentro de cada uma delas, há um ponto fixo do tipo elíptico.

Na figura 3.2, mostramos três casos de espaços de fase do modelo onde mantemos fixos os valores dos parâmetros de controle $N_c = 3$ e $\delta = 0,5$, usando três o valores diferentes para r , sendo $r = 0,65$ para figura 3.2 (a), $r = 1$ para a figura 3.2 (b) e $r = 1,35$ para figura 3.2 (c). Podemos observar que os espaços de fase são simétricos para os três valores de r . Também podemos notar, de forma clara, que temos nos três

casos uma grande ilha de estabilidade com centro em $\phi = \pi$. Nota-se que, para um valor ligeiramente menor do parâmetro r , temos um espaço de fase com um número maior de curvas invariantes e um mar caótico um pouco menor. Temos também um deslocamento para baixo, ou seja, uma diminuição do valor de energia do ponto fixo elíptico que se encontra no centro da grande ilha de estabilidade, além de uma redução do tamanho da mesma. Ao aumentarmos ligeiramente o valor de r , temos um efeito contrário, o mar caótico se torna maior. Observamos a diminuição do número de ilhas de estabilidade e, além disso, podemos ver que a grande ilha foi deslocada para cima e teve seu tamanho aumentado. O deslocamento vertical dessa ilha poderá ser matematicamente compreendido ainda nessa seção quando mostraremos que a energia de um ponto fixo é dada em função de r .

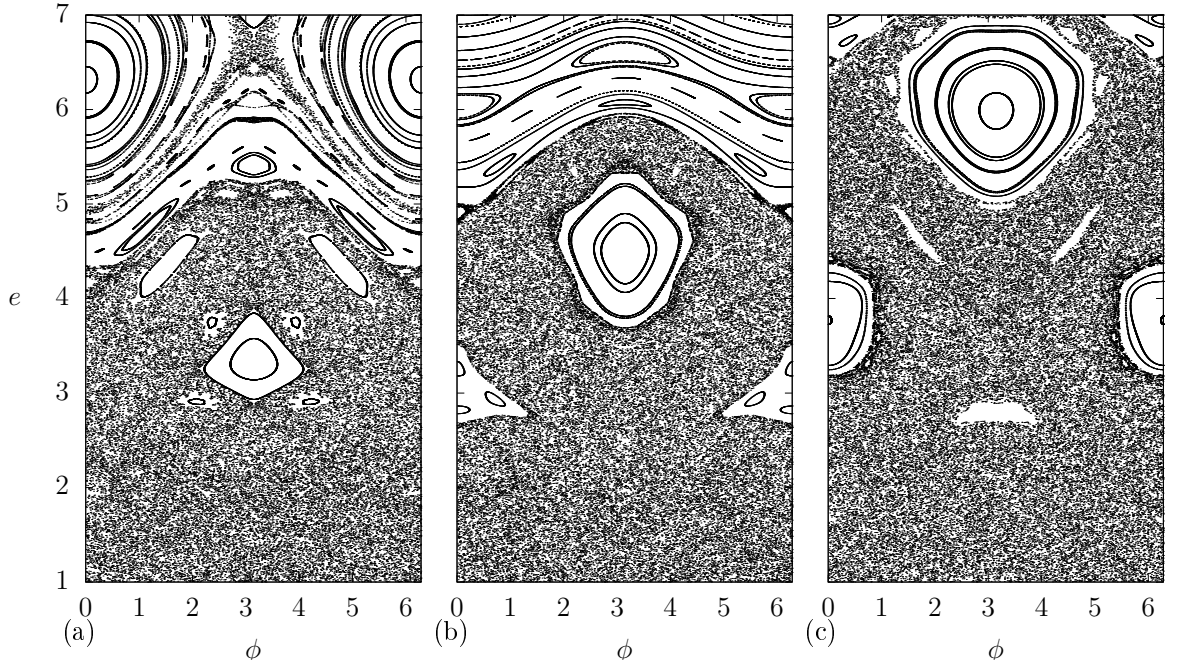


Figura 3.2: Espaços de fase do poço de potencial assimétrico com $N_c = 3$ e $\delta = 0,5$ em (a), (b) e (c), $r = 0,65$ para (a), $r = 1$ para (b) e $r = 1,35$ para (c).

Na figura 3.3 temos novamente três espaços de fase, onde mantemos os valores dos parâmetros $r = 1$ e $\delta = 0,5$ para os três casos, e alteramos o valor de N_c usando $N_c = 2,3$ para figura 3.3(a), $N_c = 3$ para figura 3.3(b) e $N_c = 3,7$ para a figura 3.3(c). Embora os espaços de fase tenham estruturas bem diferentes do que vimos no caso da variação de r , podemos tirar conclusões semelhantes em relação aos efeitos causados pela variação do parâmetro de controle N_c . Ao diminuirmos o valor de N_c , novamente temos uma redução no tamanho do mar de caos e um aumento no número de curvas invariantes. Percebemos também que a grande ilha de estabilidade mais uma vez foi deslocada para baixo. Fazendo o contrário, tivemos um aumento da região caótica e uma diminuição no número de curvas invariantes. A grande ilha de estabilidade foi deslocada para cima, de forma semelhante ao que aconteceu quando variamos o valor de r . A explicação para a variação vertical

da posição dessa ilha é a mesma do caso anterior, o valor da energia para esse ponto fixo também é dada em função de N_c , como veremos logo adiante. Além disso, podemos observar que a simetria em relação a linha $\phi = \pi$ foi mantida.

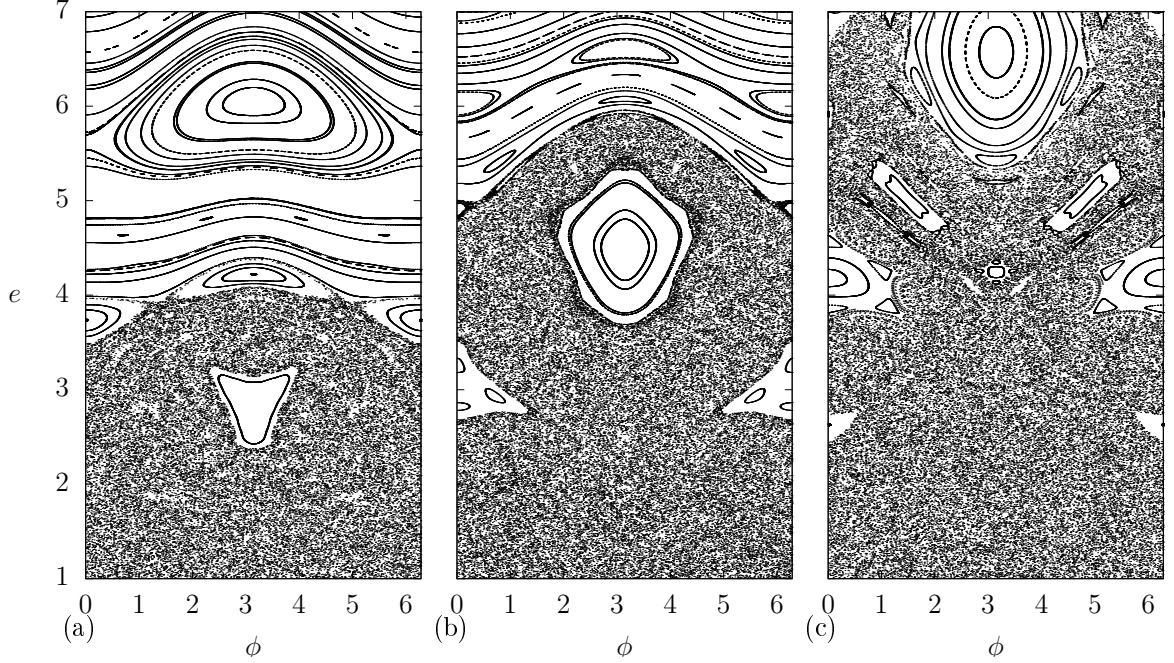


Figura 3.3: Espaços de fase do poço de potencial assimétrico com $r = 1$ e $\delta = 0,5$ para (a), (b) e (c), e $N_c = 2,3$ para (a), $N_c = 3$ para (b) e $N_c = 3,7$ para (c).

Para finalizar a análise da estrutura do espaço de fase em relação a alteração dos parâmetros de controle, analisaremos o comportamento da estrutura do espaço de fase com a variação do parâmetro δ . Para isso, na figura 3.4 mostramos os espaços de fase com os parâmetros $r = 1$ e $N_c = 3$ constantes para os três casos e alteramos δ usando os valores $\delta = 0,1$ para a figura 3.4(a), $\delta = 0,5$ para a figura 3.4(b) e $\delta = 0,9$ para a figura 3.4(c). Para valores menores de δ , mais uma vez temos uma elevação no número de curvas invariantes e uma região caótica menor. Elevando esse valor, temos menos curvas invariantes e uma região caótica maior. A simetria em relação a linha $\phi = \pi$ se manteve mais uma vez.

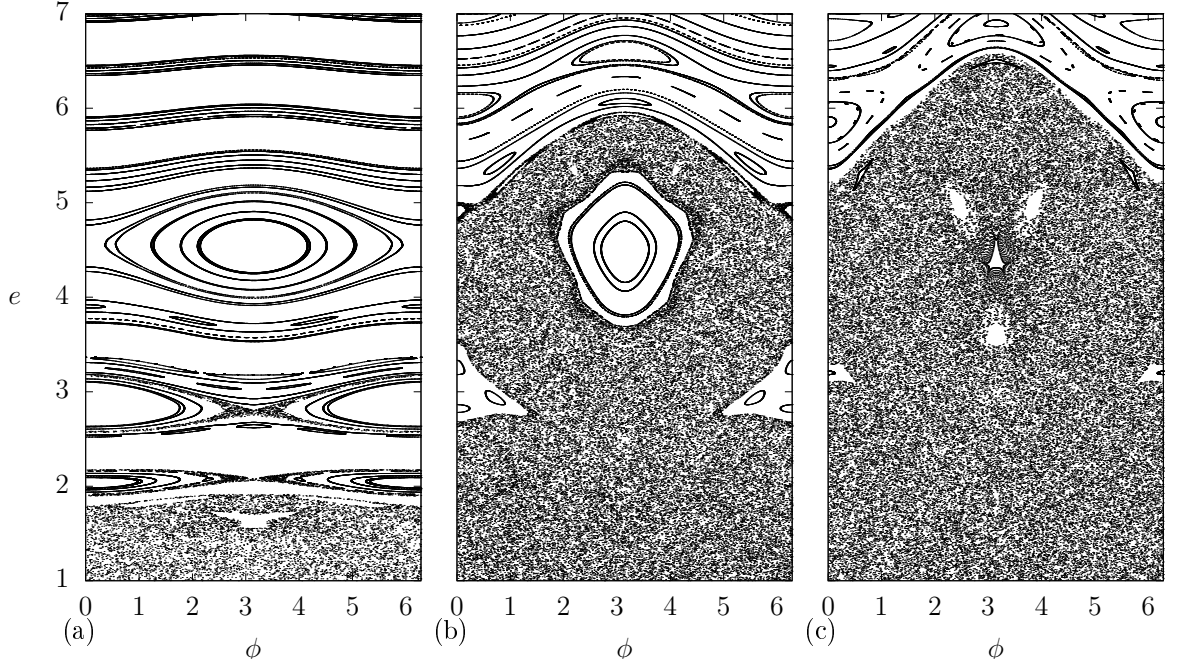


Figura 3.4: Espaços de fase do poço de potencial assimétrico com $r = 1$ e $N_c = 0,5$ para (a), (b) e (c) e $\delta = 0,1$ para (a), $\delta = 0,5$ para (b) e $\delta = 0,9$ para (c).

O grande diferencial do comportamento com a variação de δ em relação as variações dos parâmetros r e N_c é que o valor da energia do ponto fixo da grande ilha de estabilidade não varia. Podemos ver que nos três casos temos o mesmo valor de energia e fase para o ponto fixo elíptico localizando no centro desta ilha. Veremos logo adiante que isso acontece porque o valor da energia do ponto fixo independe do valor de δ .

3.3 Os Pontos Fixos

Para encontrarmos os pontos fixos, vamos usar a equação (3.11) onde usaremos a definição $\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi m$ e $e_{n+1} = e_n = e^*$, onde m é um número inteiro. Denotaremos um ponto fixo por (ϕ^*, e^*) . Resolvendo a equação $e_{n+1} = e_n = e^*$, teremos

$$\cos(\phi_n + \Delta\phi_b) = \cos(\phi_n + \Delta\phi_b + i\Delta\phi_a), \quad (3.15)$$

onde deveremos considerar duas possibilidades de soluções: (i) $i\Delta\phi_a = 2k\pi$ e (ii) $i\Delta\phi_a = 2k\pi - 2(\phi^* + \Delta\phi_b)$.

Pelo caso (i), onde $i\Delta\phi_a = 2k\pi$, temos através das equações (3.11), (3.12) e (3.14) que

$$e^* = 1 + \left(\frac{N_c r}{m - k} \right)^2. \quad (3.16)$$

Agora, pela equação (3.13) podemos encontrar

$$\phi^* = \arccos \left\{ \frac{1}{\delta} \left[e^* - \left(\frac{N_c}{k} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\pi N_c r}{\sqrt{e^* - 1}}, \quad (3.17)$$

ou

$$\phi^* = 2\pi - \arccos \left\{ \frac{1}{\delta} \left[e^* - \left(\frac{N_c}{k} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\pi N_c r}{\sqrt{e^* - 1}}. \quad (3.18)$$

Denotaremos por $A(k, m)$, o par ordenado que nos fornecerá pontos fixos (ϕ^*, e^*) de período 1 obtido analiticamente através das equações (3.16) e (3.17). Usaremos a notação $A^*(k, m)$ o par ordenado que nos fornecerá os pontos fixos (ϕ^*, e^*) obtidos pelas equações (3.16) e (3.18).

Agora, no caso (ii), onde $i\Delta\phi_a = 2k\pi - 2(\phi^* + \Delta\phi_b)$ usamos novamente as equações (3.11), (3.12) e (3.14) e obtemos que

$$\phi^* = \pi(k - m). \quad (3.19)$$

Aplicando o resultado encontrado na equação (3.19) na equação (3.13) encontramos

$$e^* - \delta \cos[\pi(k - m) + \Delta\phi_b] - \left(\frac{\pi N_c}{\pi m - \Delta\phi_b} \right)^2 = 0. \quad (3.20)$$

Vamos denominar por $N(k, m)$ os pontos fixos de período 1 obtidos através das equações (3.19) e (3.20).

Através da equação (3.16), podemos compreender os deslocamentos da grande ilha de estabilidade dos espaços de fase mostrados nas figuras 3.2, 3.3 e 3.4. Como podemos ver claramente, a energia do ponto fixo depende de r e N_c , portanto ao variarmos esses parâmetros, temos o deslocamento da ilha propriamente dita.

As figuras 3.5(a) e 3.5(b) mostram uma observação muito interessante, pois nela podemos ver todos os pontos fixos de primeira ordem encontrados pelas equações (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20) de forma numérica, inclusive aqueles que não podem ser observados apenas olhando diretamente para o espaço de fase. Na construção dessa figura, usamos a grandeza denotada por ∇ , de

$$\nabla = \sqrt{(\phi_{n+1} - \phi_n)^2 + (e_{n+1} - e_n)^2}, \quad (3.21)$$

onde ϕ_{n+1} é mod 2π . Foi considerada uma grade de (2000 por 2000), ou seja, 2000 valores diferentes de ϕ (eixo horizontal) e 2000 valores diferentes de e (eixo vertical), totalizando 4×10^6 condições iniciais. Essas condições iniciais foram iteradas apenas uma vez a partir de (ϕ_n, e_n) , obtendo (ϕ_{n+1}, e_{n+1}) , onde ∇ representa a distância entre cada uma das condições iniciais e o ponto gerado pela iteração de cada uma dessas condições iniciais.

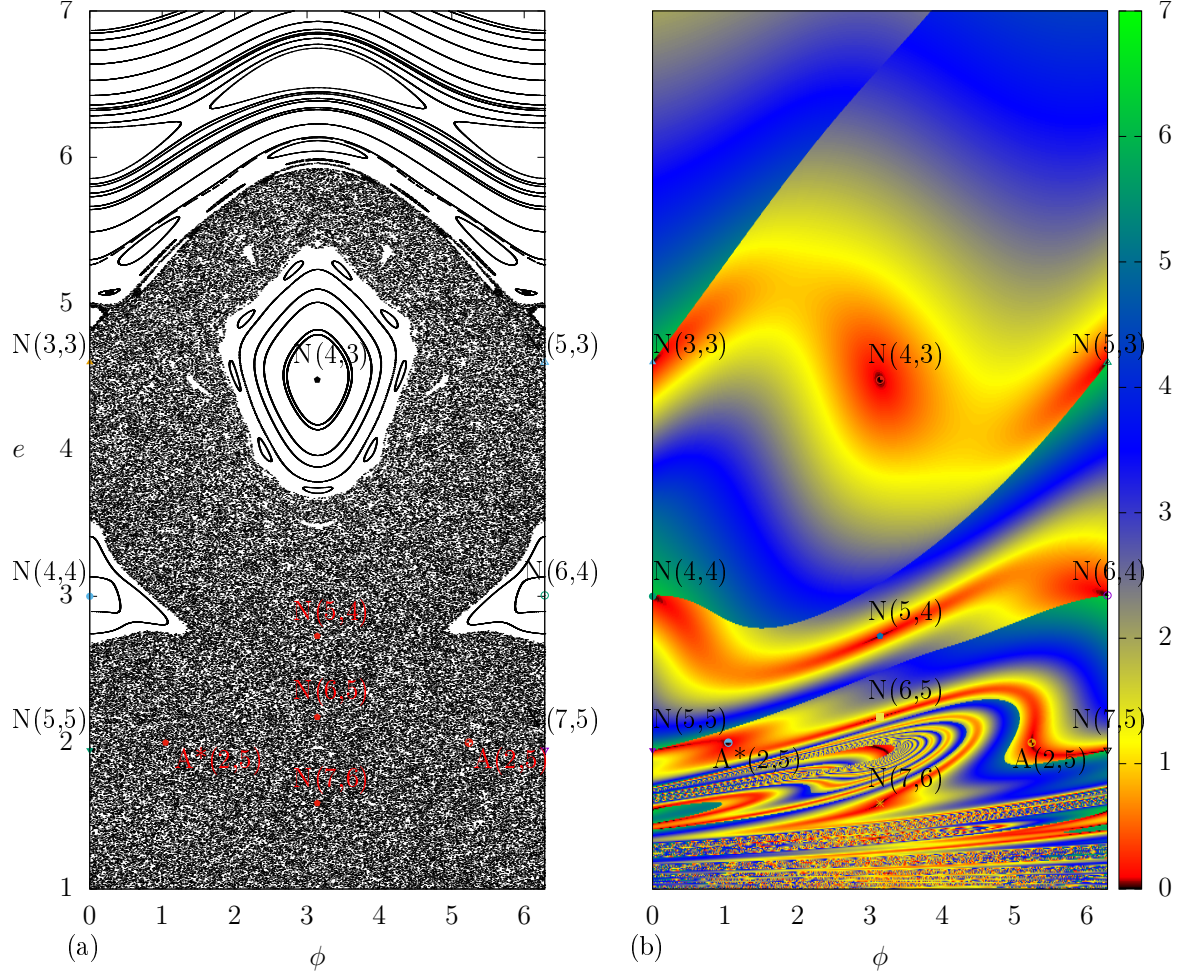


Figura 3.5: Em (a) mostramos um espaço de fase do modelo para $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$, em (b) mostramos o comportamento de ∇ . Nesta figura temos os pontos fixos de primeira ordem dados pela equações (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) e (3.20), encontrados numericamente.

Na figura 3.5 podemos fazer uma comparação entre um espaço de fase onde vemos facilmente os pontos fixos do tipo $N(k, m)$ (vale lembrar que os pontos fixos dos tipos $A(K, m)$ e $A^*(k, m)$ também estão no espaço de fase mas não podem ser visualizados apenas olhando para espaço de fase) com pontos fixos encontrados numericamente. Na figura 3.5(a), podemos ver os pontos fixos de período 1 do tipo $N(k, m)$. Na reta $\phi = 0$ temos os pontos fixos $N(3, 3)$, $N(4, 4)$ e $N(5, 5)$. Na reta $\phi = 2\pi$ temos os pontos fixos $N(7, 5)$, $N(6, 4)$ e $N(5, 3)$, e na reta $\phi = \pi$ temos os pontos $N(7, 6)$, $N(6, 5)$, $N(5, 4)$ e $N(4, 3)$. Além desses pontos fixos, temos dois pontos pontos fixos, sendo um do tipo $A(k, m)$ e outro do tipo $A^*(k, m)$ que se encontram imersos no mar de caos e não podem ser vistos apenas olhando o espaço de fase, no caso eles são $A(2, 5)$ e $A^*(2, 5)$. A figura 3.5(b), mostra todos esses pontos fixos encontrados de forma numérica. Para isso, pintamos de preto os condições iniciais tais que $\nabla \rightarrow 0$.

3.4 Dispersão de Primeira Ordem

Vamos agora, estudar como fica a dispersão da fase após a primeira iteração, ou seja, onde a fase se encontrará no eixo ϕ depois da primeira iteração quando a função *mod* não é aplicada. Porém, é importante lembrar que a função $\text{mod } 2\pi$ na expressão da fase na equação (3.11), faz com que a fase seja sempre reduzida ao intervalo $[0, 2\pi]$, mesmo assumindo um valor maior que 2π . Para isso, vamos definir a grandeza σ , que vamos usar para estudar como a fase se dispersará ao longo eixo ϕ . Definiremos σ como

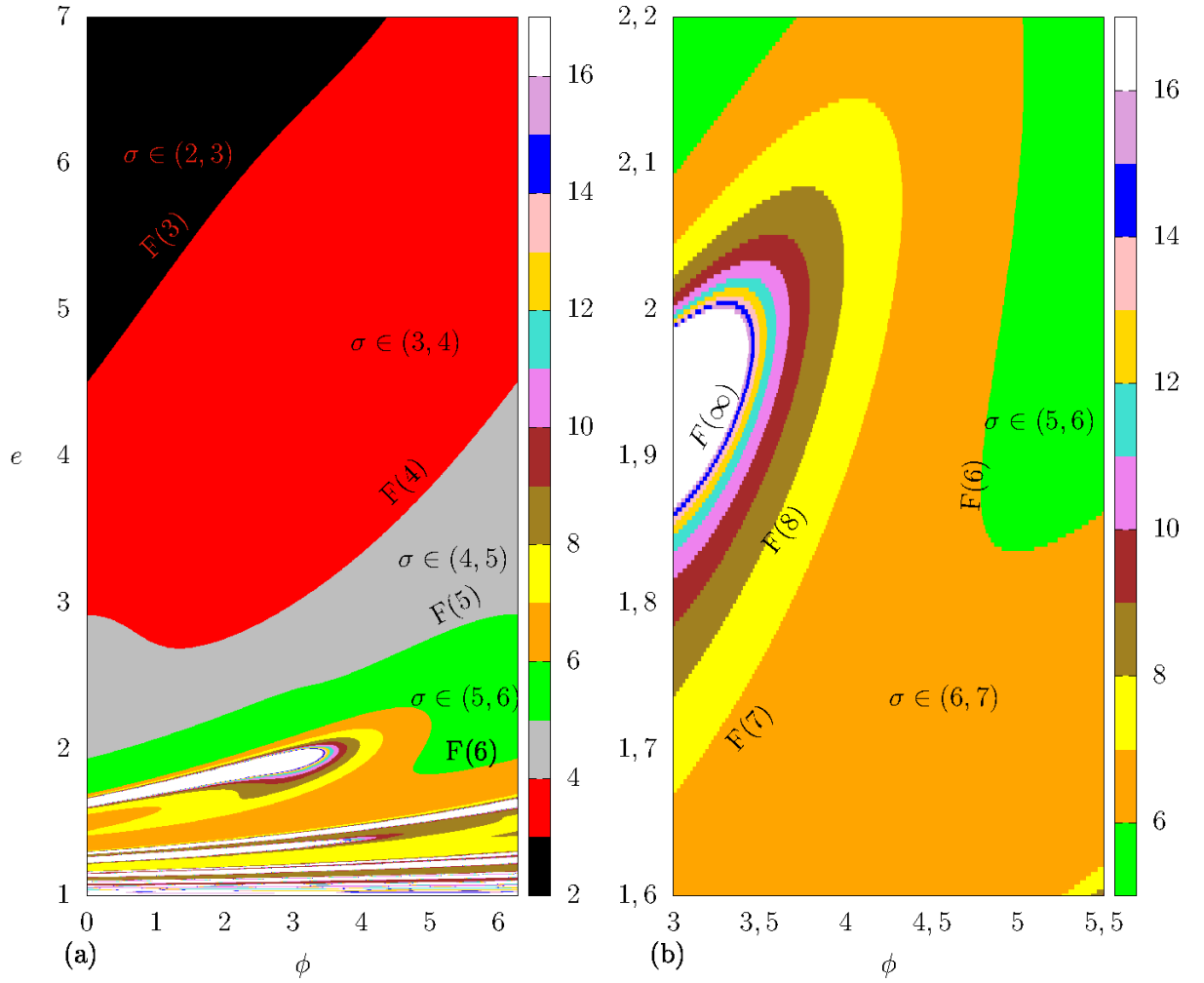


Figura 3.6: Dispersão das condições iniciais após a primeira iteração. Em (a) temos o estudo da dispersão de primeira ordem para $\phi \in [0, 2\pi]$ e $e \in [1, 7]$. Em (b) temos esse estudo para $\phi \in [3, 5, 5]$ e $e \in [1, 6, 2, 2]$, mostrando com mais detalhes as divisões das cores próximo de $F(\infty)$.

$$\sigma = \frac{\phi_{n+1}}{2\pi}, \quad (3.22)$$

onde $\sigma \in \mathbb{R}$.

A figura 3.6(a) mostra o comportamento da dispersão das condições iniciais, após a primeira iteração, de acordo com os valores de σ . Pintamos de preto a região tais que as

condições iniciais (ϕ_n, e_n) nos fornecem $\sigma \in (2, 3)$, de vermelho a região que nos fornece $\sigma \in (3, 4)$, de cinza a região que nos fornece $\sigma \in (4, 5)$, e assim sucessivamente. Uma região que precisamos destacar, é a região que está pintada de branco, uma vez que essa é a região onde $i > 1$, ou seja, a região onde ocorrem as reflexões múltiplas. Faremos um estudo mais aprofundado dessa região nas próximas seções. Na figura 3.6(b) temos uma ampliação da região onde $\sigma \rightarrow \infty$, nela podemos observar com maiores detalhes essa aproximação da região de reflexões múltiplas, uma vez que os dados numéricos sugerem que para $\sigma \rightarrow \infty$ temos curva que separa a região de reflexões múltiplas da região reflexões simples. Para gerarmos essa figura, construímos uma grade de 2000×2000 sendo 2000 valores diferentes de e no intervalo de $[1, 7]$ e 2000 valores de ϕ no intervalo de $[0, 2\pi]$ gerando um total de 4×10^6 de condições iniciais que foram iteradas apenas uma vez.

Ainda observando a figura 3.6, podemos notar, de maneira clara, que existem curvas que separam as regiões coloridas. Como já vimos, a região preta é gerada pelas condições iniciais que fornecem $\sigma \in [2, 3)$ e a região vermelha é gerada pelas condições iniciais que fornecem $\sigma \in [3, 4)$. Então, não é difícil percebermos que a linha que separa essas duas cores é dada para $\sigma = 3$. De forma análoga, podemos perceber que a linha que separa a cor vermelha da cinza é dada por $\sigma = 4$, a que separa a cinza da verde por $\sigma = 5$, e assim sucessivamente. Substituindo a equação (3.11) na equação (3.22) chegamos na equação

$$F(\sigma) = \phi_n - 2\pi\sigma + \Delta\phi_b + i\Delta\phi_a + \Delta\phi'_b, \quad (3.23)$$

onde devemos encontrar $F(\sigma) = 0$ para que tenhamos as curvas para cada valor de σ , ou seja, para $\sigma = 3$, encontramos a curva que separa as cores preta e vermelha, para $\sigma = 4$ encontramos a curva que separa as cores vermelha e cinza, para $\sigma = 5$ a curva que separa as cores cinza e verde, e assim sucessivamente. Essas linhas podem ser observadas de forma mais clara na figura 3.7. Na figura 3.7(a), podemos observar as linhas que separam as cores da figura 3.6 (b), e na figura 3.7(b), temos uma ampliação da área onde ocorre as reflexões múltiplas.

Podemos notar que a medida que os valores de σ aumentam, tendendo ao infinito, temos uma aglomeração das curvas que se acumulam ao se aproximarem da região onde acontecem as reflexões múltiplas. A borda dessa região é encontrada quando temos $F(\infty)$.

Tal aglomeração pode ser vista claramente na figura 3.7 (a), e de forma mais detalhada na 3.7(b), onde temos uma ampliação da parte central da figura 3.7(a) e podemos visualizar algumas linhas para valores inteiros de σ mais próximas de $F(\infty)$. Para gerarmos a figura 3.7, construímos uma grade de 70.000 por 70.000, ou seja, 70.000 valores diferentes de e no intervalo de $[1, 7]$ e 70.000 valores de ϕ no intervalo de $[0, 2\pi]$ gerando um total de $4,9 \times 10^9$ condições iniciais que foram iteradas apenas uma vez, usando para σ os valores de 1 à 100.

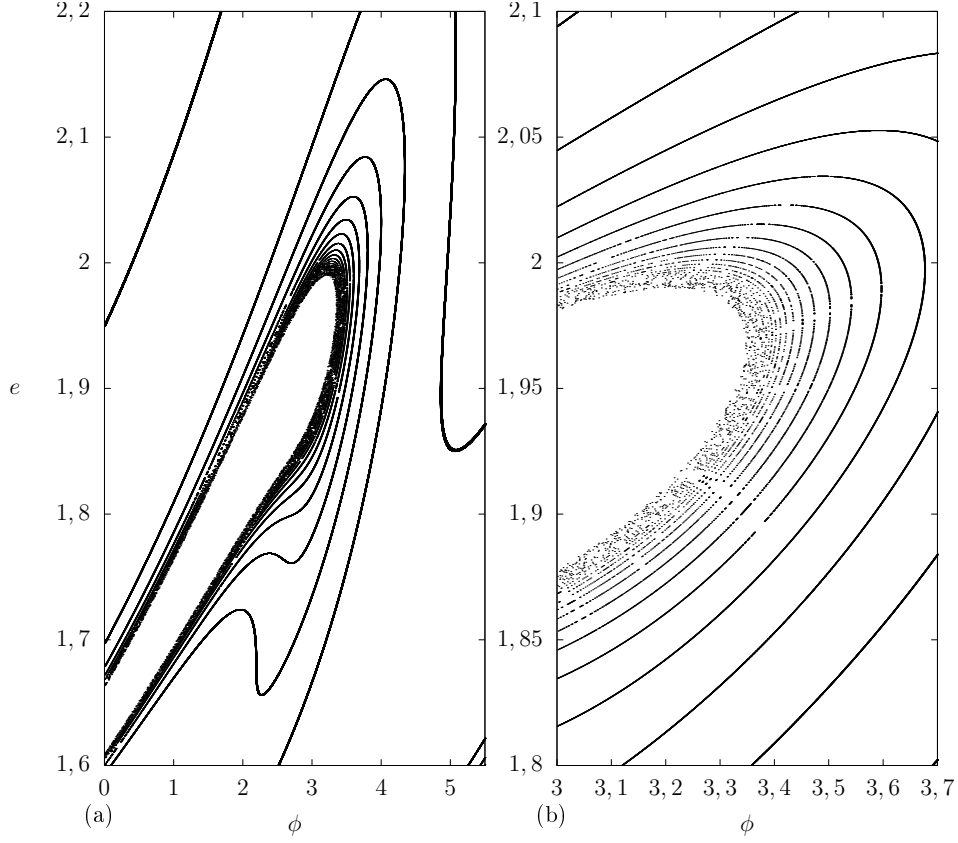


Figura 3.7: Nesta figura mostramos as linhas para valores inteiros de σ . Em (a), temos uma analogia da com a figura 3.6(b), destacando as linhas que separam as cores. Em (b) uma ampliação da parte central da figura(a), mostrando mais detalhes da aglomeração das linhas quando $\sigma \rightarrow \infty$

3.5 As Reflexões Múltiplas

Para que reflexões múltiplas ocorram, ou seja, $i > 1$, é necessário que $\sigma \rightarrow \infty$. Analisando as equações (3.11) e (3.22) concluímos que para isso acontecer, temos as seguintes opções: $\Delta\phi_b \rightarrow \infty$, $\Delta\phi_a \rightarrow \infty$ ou $\Delta\phi'_b \rightarrow \infty$. A primeira opção, $\Delta\phi_b \rightarrow \infty$ não seria viável, pois pela equação (3.12) é necessário que $e_n \rightarrow 1$, porém, dessa forma a partícula nunca escaparia do poço. A segunda opção, $\Delta\phi_a \rightarrow \infty$, também não seria viável pelo mesmo motivo, de acordo com a equação (3.13). Além disso, é matematicamente impossível para o denominador desta equação ser zero, uma vez que temos $e_n > 1$ e como já foi dito, é necessário que $0 < \delta < 1$. Então, só nos resta a terceira opção, $\Delta\phi'_b \rightarrow \infty$, que é a única que tem sentido físico e matemático. Pela equação (3.14), pode-se concluir que $\Delta\phi'_b \rightarrow \infty$ quando $e_{n+1} \rightarrow 1$, para isso, usamos a equação (3.11), fazendo $e_{n+1} = 1$. Assim, podemos definir a equação

$$G(i) = e_n - 1 - \delta \cos[(\phi_n + \Delta\phi_b)] + \delta \cos[(\phi_n + \Delta\phi_b + i\Delta\phi_a)]. \quad (3.24)$$

Através da equação (3.24) podemos encontrar a separação de duas regiões importantes,

sendo elas: (i) a região de reflexões simples e (ii), a região de reflexões múltiplas, na qual pretendemos aprofundar nossos estudos. Para encontrarmos a curva que separa essas duas regiões, precisamos resolver a equação $G(1) = 0$, essa é a mesma curva que encontramos numericamente quando temos $F(\infty)$. Na figura 3.8(b), podemos ver de forma clara, essas duas regiões: de vermelho a região de reflexões múltiplas e de amarelo é a região de reflexões simples, bem como a curva que separa essas duas regiões.

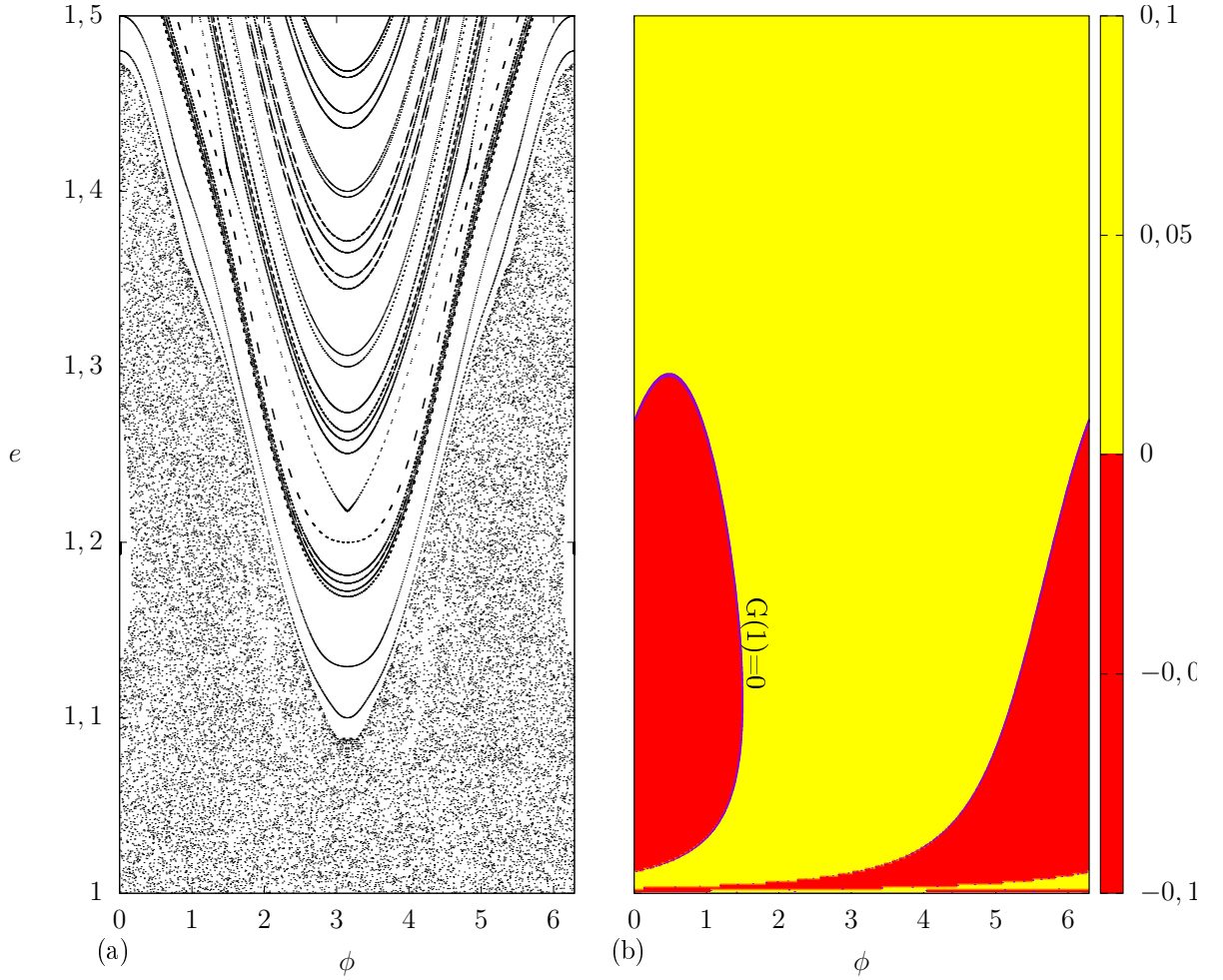


Figura 3.8: Em (a) temos um espaço de fase gerado com os parâmetros de controle $N_c = 0,1$, $r = 1$ e $\delta = 0,5$. Em (b) temos em vermelho a região de reflexões múltiplas e em amarelo a região de reflexões simples. A figura (b) foi gerada com os mesmos parâmetros de controle da figura (a).

Agora vamos trabalhar de forma um pouco mais detalhada a região de reflexões sucessivas. Na figura 3.8(a), temos um espaço de fase do modelo para $N_c = 0,1$, $r = 1$ e $\delta = 0,5$. Podemos observar um espaço de fase bem diferente dos que foram gerados nas figuras 3.2, 3.3 e 3.4, pois tem um valor de N_c bem menor. Neste caso, temos um espaço de fase com um mar caótico bem reduzido, algumas curvas de estabilidade e também podemos observar várias curvas invariantes do tipo *spanning*. Assim como anteriormente, a figura 3.8(b) destaca a região de reflexões múltiplas, ou seja, região onde $i > 1$ que no

caso está colorida de vermelho. Para encontrarmos a linha que separa as duas regiões, construímos uma grade usando 1000 valores de ϕ e também 1000 valores de e_0 igualmente espaçados no espaço de fase, totalizando 10^6 condições iniciais e calculamos $G(1)$ através da equação (3.24) e salvamos os valores tais que $G(1) = 0$. Esses pontos nos dão a curva que separa a região de reflexões simples da região de reflexões múltiplas.

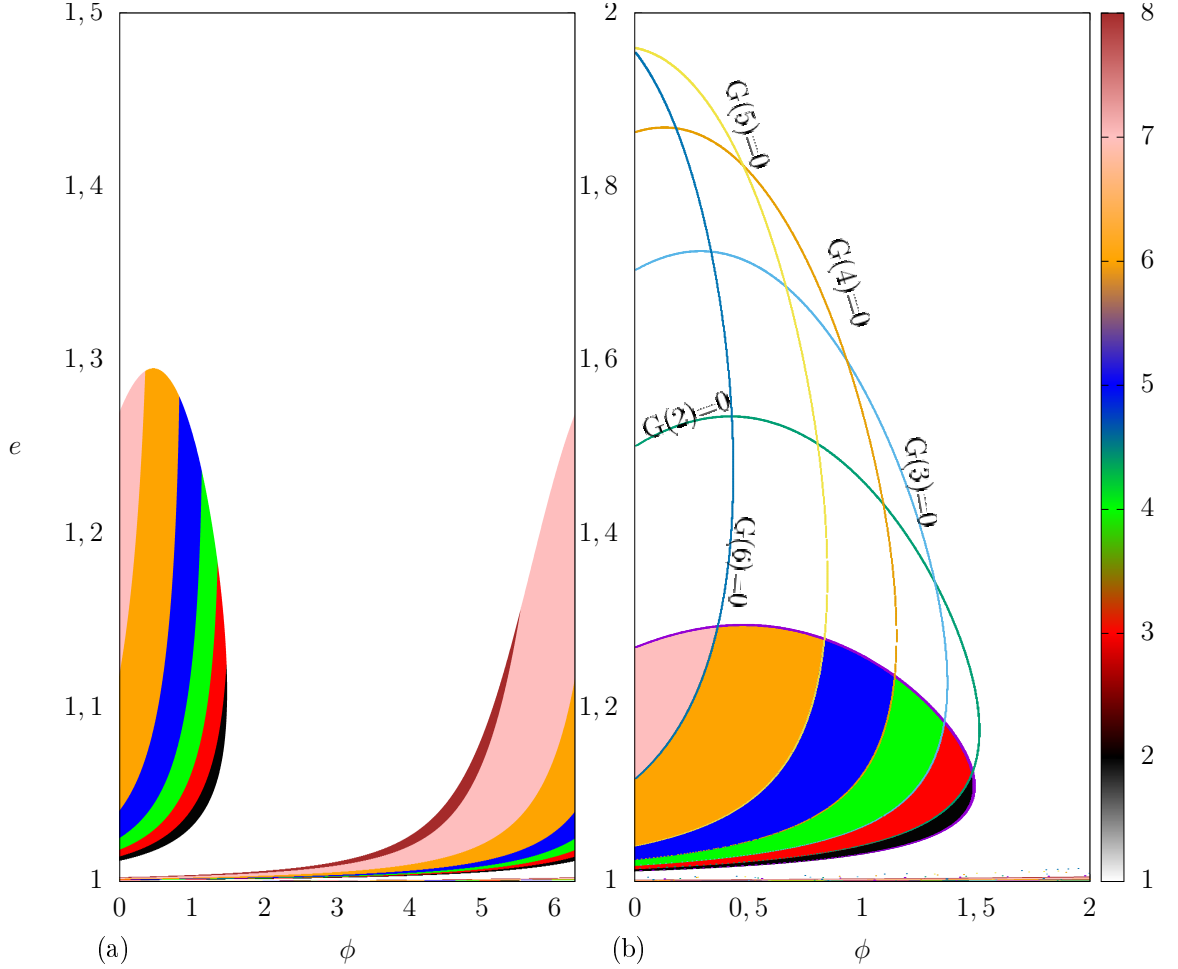


Figura 3.9: Estudo detalhado no número de reflexões múltiplas dentro da região onde $G(1) < 0$ feito através da equação (3.24). Em (a) temos as regiões separadas por cores de acordo com o número de reflexões e em (b) temos uma ampliação de (a), e as curvas que separam as regiões coloridas.

Agora, vamos dar uma atenção especial onde $i > 1$, ou seja, a região de reflexões múltiplas. A figura 3.9(a) mostra um estudo da quantidade de reflexões múltiplas dentro da região onde $G(1) > 0$. A região de cor preta que fica entre as curvas $G(1) = 0$ e $G(2) = 0$, nos fornece as condições iniciais que levam à reflexões múltiplas. A região em de vermelho entre as curvas $G(2) = 0$ e $G(3) = 0$ nos mostra as condições iniciais com duas reflexões múltiplas. Na região verde, que está entre as curva $G(3) = 0$ e $G(4) = 0$, temos as condições iniciais com três reflexões múltiplas. Na azul, entre as curvas $G(4) = 0$ e $G(5) = 0$, as condições com quatro reflexões múltiplas. Na região de cor bege, que está

localizada entre as curvas $G(5) = 0$ e $G(6) = 0$, as condições iniciais com cinco reflexões múltiplas. Assim sucessivamente. A figura 3.9(b) mostra uma ampliação da região de reflexões múltiplas, bem como as linhas que separam as regiões de acordo com o número de reflexões.

3.6 Alguns Estudos em Relação ao Parâmetro N_c

Nesta seção, faremos alguns estudos que mostram consequências das alterações no parâmetro de controle N_c . Primeiramente, vamos falar sobre o que ocorre com a área da região de reflexões múltiplas quando alteramos o valor de N_c e depois vamos refazer, para este modelo, o estudo feito para o modelo do capítulo anterior, sobre o número de reflexões múltiplas quando alteramos o valor de N_c .

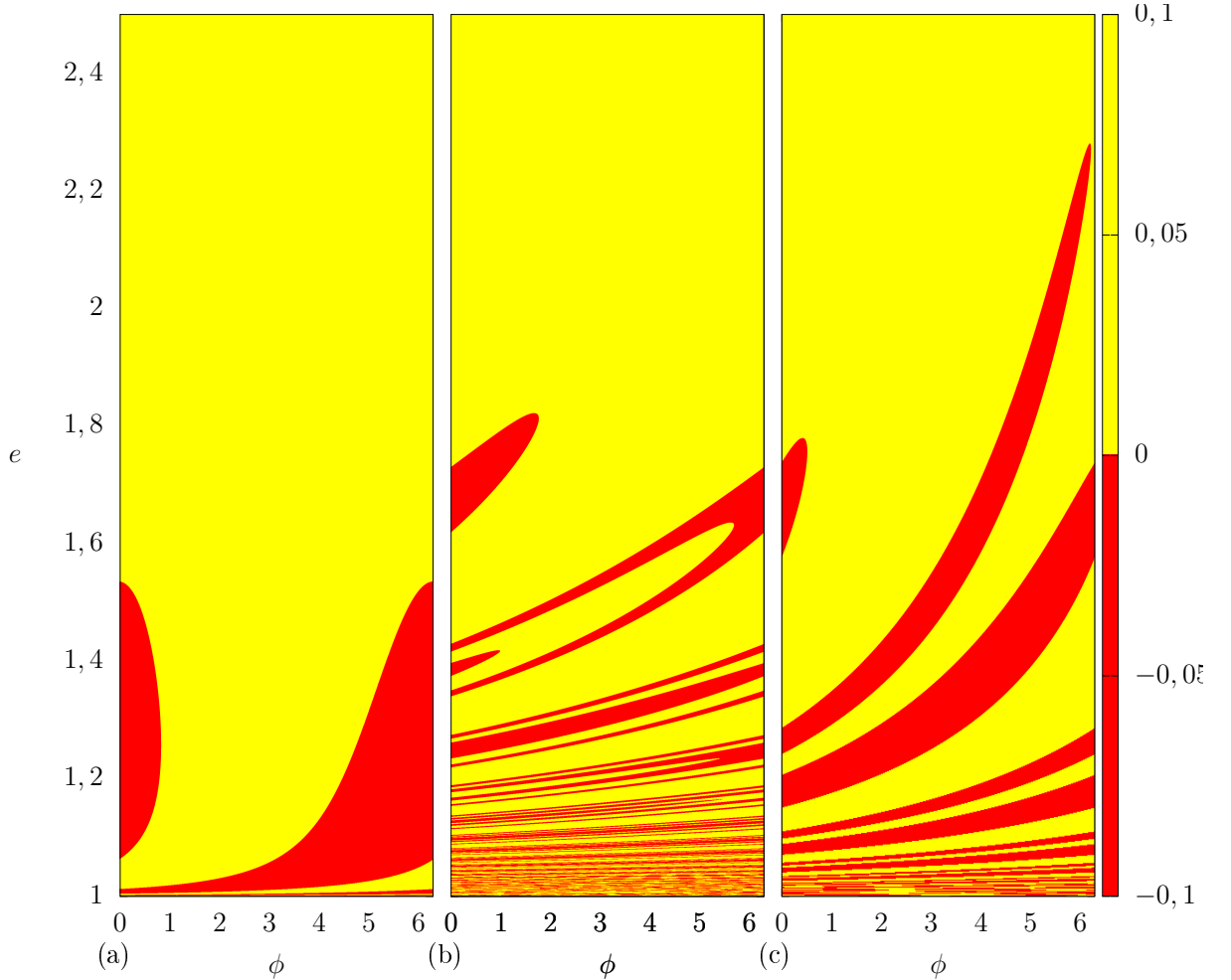


Figura 3.10: Análise da região de reflexões múltiplas para $N_c = 0,2$ em (a), $N_c = 0,5$ em (b) e $N_c = 1$ em (c), com $r = 1$ e $\delta = 0,5$ nas três figuras.

Para darmos início ao estudo da área da região de reflexões múltiplas em função de N_c , refizemos o mesmo *plot* da figura 3.8(b) para vários valores de N_c . Na figura 3.10

fizemos esses *plots* para os valores $N_c = 0, 2$, $N_c = 0,5$ e $N_c = 1$, mantendo constantes os valores de $r = 1$ e $\delta = 0,5$. Já na figura 3.11, temos os *plots* para $N_c = 5$, $N_c = 10$ e $N_c = 50$.

Podemos perceber claramente que, com o aumento do valor do parâmetro N_c , as curvas se tornam bem mais complexas. Notemos que a região de reflexões múltiplas vai se estendendo a longo do espaço de fase a medida que aumentamos o valor de N_c . Podemos observar também que a deformação da área onde ($i > 1$) é bastante rápida com o aumento do valor desse parâmetro de controle, mas está sempre abaixo do valor de 2,4 para a energia e . Já foi mostrado anteriormente que, na figura 3.3, uma pequena variação no valor do parâmetro N_c provoca um grande aumento no tamanho do mar de caos no espaço de fase.

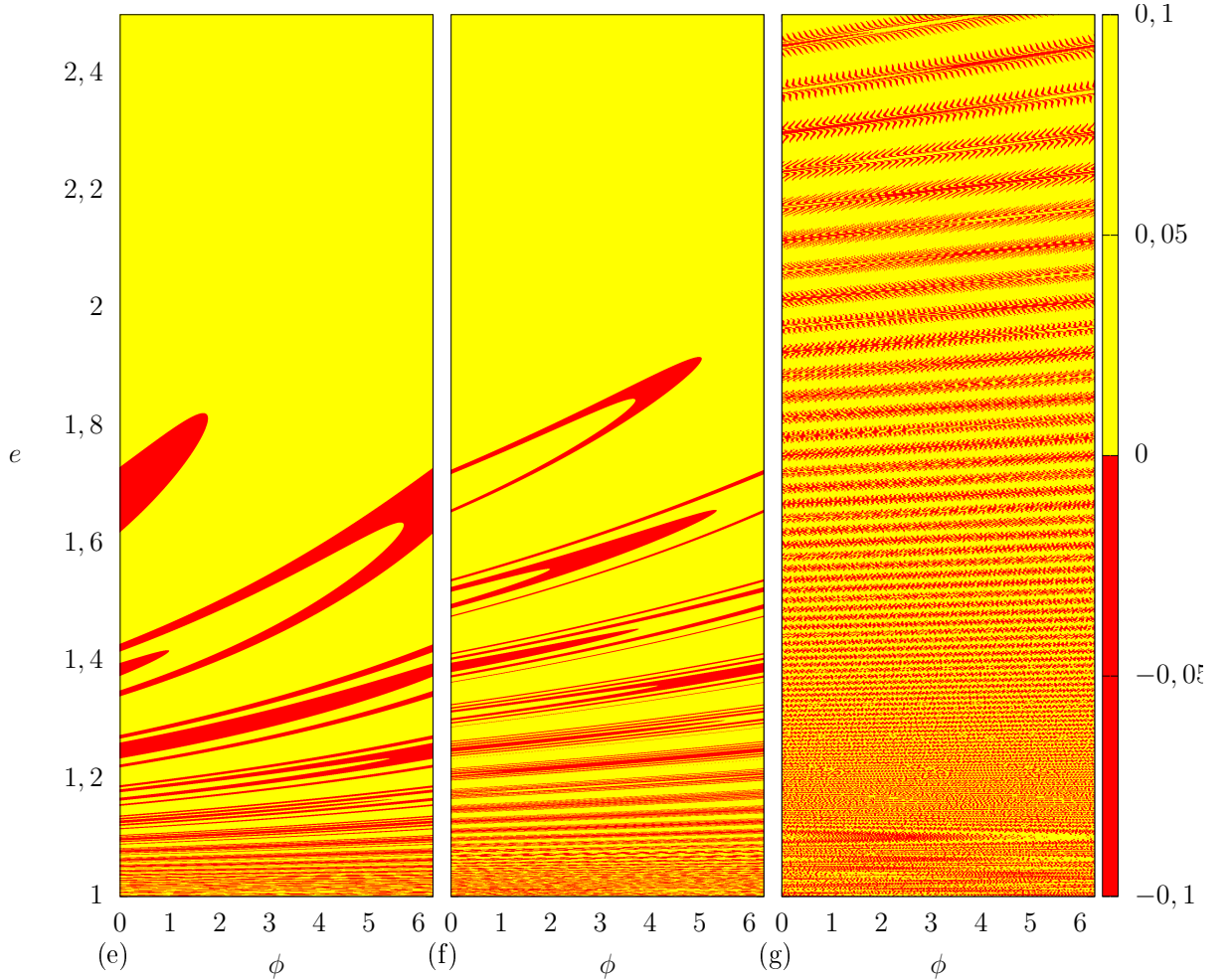


Figura 3.11: Análise da região de reflexões múltiplas para $N_c = 5$ em (a), $N_c = 10$ em (b) e $N_c = 50$ em(c), com $r = 1$ e $\delta = 0,5$ nas três figuras.

Mostraremos agora um estudo feito sobre a área ocupada pelas condições iniciais que produzem reflexões múltiplas, ou seja, queríamos saber se ao alterarmos o valor de N_c e a região onde ($i > 0$) ser distorcida, a área ocupada pelas condições iniciais que geram reflexões múltiplas sofre variações de valores. Para isso, computamos a área ocupada pe-

las condições iniciais, com $i > 1$, usando o seguinte procedimento: tomamos uma grade de $M \times M$ condições iniciais com $\phi \in (0, 2\pi)$ e $e_0 \in (1, 2, 5)$. Para cada combinação (ϕ_0, e_0) , verificamos o número de reflexões múltiplas i para uma única iteração, e então, acumulamos em um histograma H . Dessa forma, nosso histograma conta o número de condições iniciais que começam na região onde $i > 1$, ou seja, a região de reflexões múltiplas. Esse procedimento nos permite medir, de uma forma indireta, a área ocupada por i , ou seja, quanto maior o valor de H , maior será o valor da área. Na figura 3.12 mostramos esse histograma para três valores diferentes de M . Como podemos ver, quanto maior o valor de M , mais o histograma se desloca para a direita mostrando o aumento da área. Naquela figura também mostramos um ajuste em lei de potência, onde encontramos um decaimento ϵ próximo de -3.

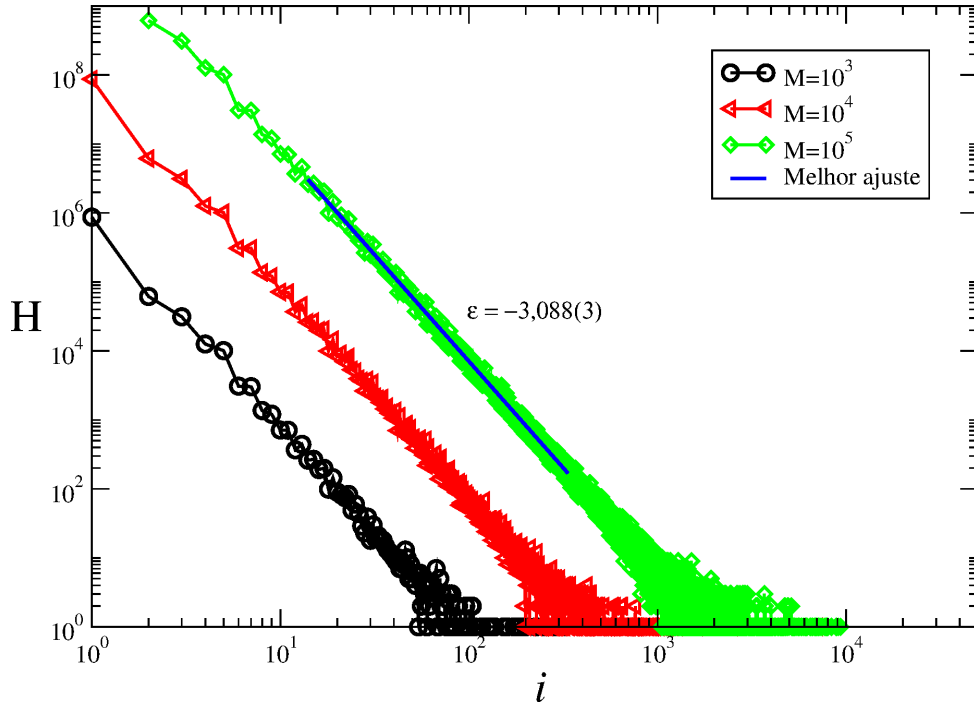


Figura 3.12: Histograma H em função do número de reflexões múltiplas i para diferentes valores de M com $N_c = 3$, $r = 1$ e $\delta = 0,5$.

A figura 3.13 mostra o resultado obtido quando aplicamos uma reescala no eixo vertical, onde fizemos $H \rightarrow H/M^2$ e todas as curvas com diferentes valores de M foram sobrepostas com o mesmo decaimento $\epsilon = -3$. Isso mostra que H é invariante de escala em função de M , ou seja, independente do valor de M , sempre poderemos sobrepor as curvas em uma única curva universal.

Na figura 3.14 temos um histograma usando um valor constante para $M = 10^5$ e quatro valores diferentes de N_c , sendo eles $N_c = 1$, $N_c = 10^1$, $N_c = 10^2$ e $N_c = 10^3$. Esta figura mostra claramente que a mudança nos valores desse parâmetro de controle não interfere no posicionamento da curva no gráfico. Isso mostra que a área ocupada pela região, onde $i > 1$, não muda com a alteração de N_c . Sendo assim, podemos concluir que

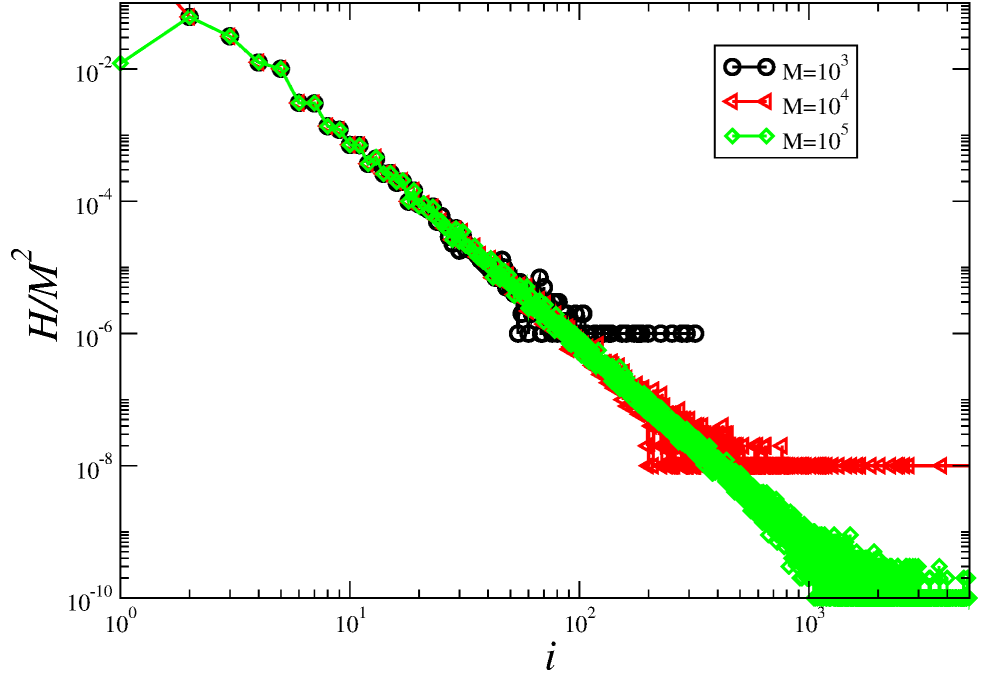


Figura 3.13: Histograma H em função de i usando uma reescala no eixo vertical dada por $H \rightarrow H/M^2$, onde todas as curva são sobrepostas resultando em comportamento universal em uma única curva mostrando a invariância de escala.

nas figuras 3.10 e 3.11 a região de cor vermelha se expande ou contrai no espaço da fase com a variação de N_c , mas a área de cor vermelha é sempre constante.

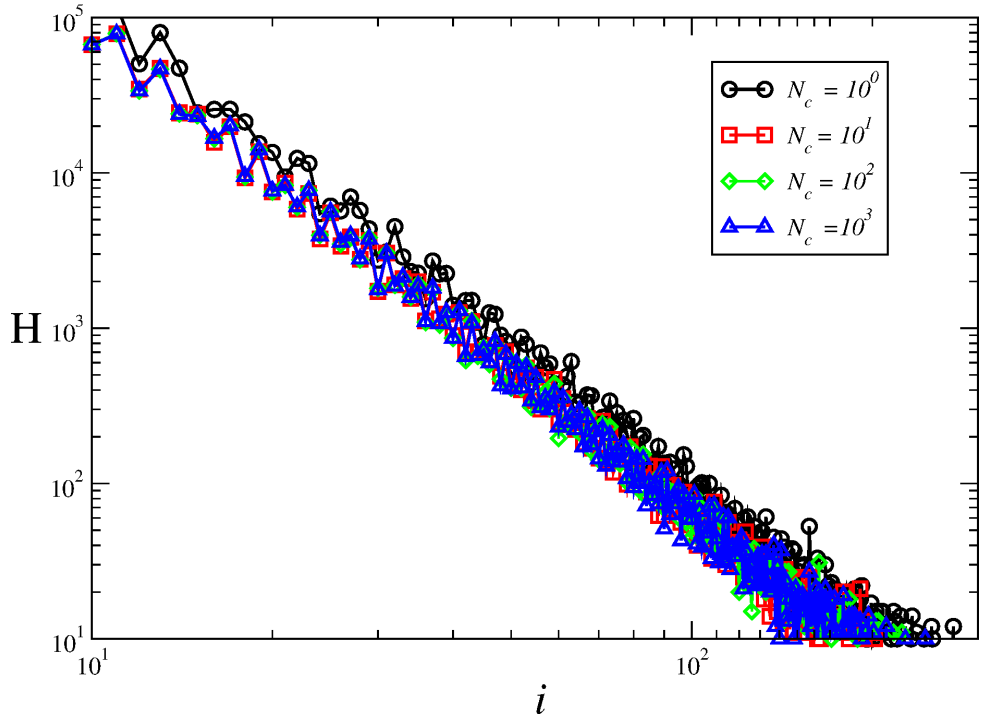


Figura 3.14: Histograma H em função de i para vários valores de N_c , mostrando que as mudanças nos valores de N_c não interferem na área ocupada pela condições iniciais na região onde $i > 1$.

Agora, vamos fazer para esse modelo o mesmo estudo feito na seção 2.7, quando estudamos o número de reflexões múltiplas em função do parâmetro de controle N_c para o modelo tradicional do poço de potencial. O objetivo era verificar se o expoente de decaimento seria o mesmo e se também encontraríamos um comportamento de escala.

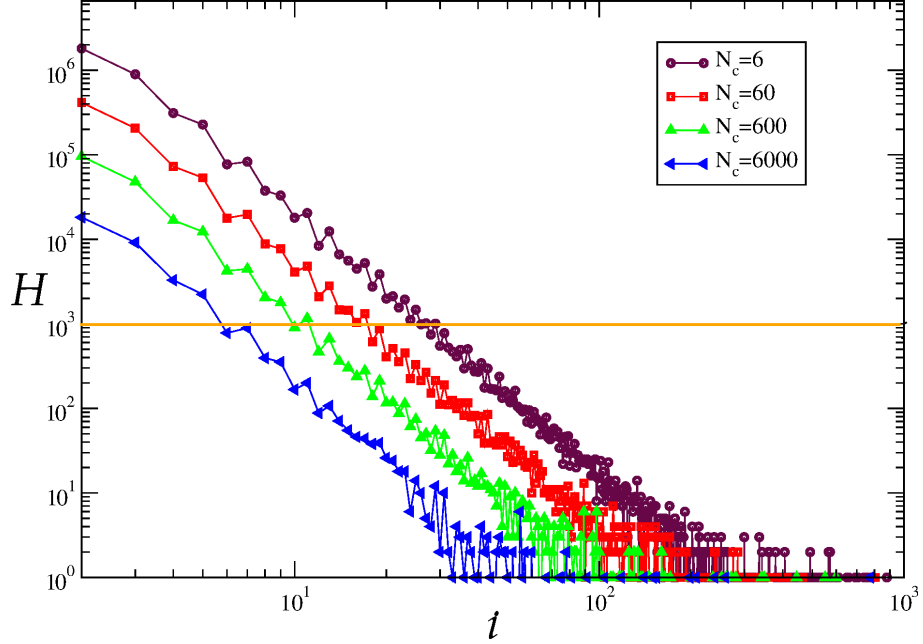


Figura 3.15: Histograma no número de reflexões múltiplas no poço de potencial assimétrico para quatro valores diferentes de N_c . Usamos $r = 1$ e $\delta = 0,5$

De maneira análoga ao que já havia sido feito, escolhemos uma condição inicial no mar de caos e iteramos 10^8 vezes, onde contamos quantas vezes um certo número de reflexões múltiplas ocorria. Com esses dados, construímos o histograma da figura 3.15 para quatro valores diferentes de N_c . Mais uma vez, podemos notar que, a medida que os valores desse parâmetro aumentam, o gráfico é deslocado, sugerindo um comportamento de escala. Para melhor compreensão, traçamos uma linha horizontal em $H = 10^3$, ficando fácil percebermos que o número reflexões múltiplas que ocorrem 10^3 vezes fica menor a medida que N_c aumenta.

A figura 3.16, mostra um ajuste em lei de potência para o decaimento do número de reflexões múltiplas em função do parâmetro N_c para esse caso. Para esse ajuste, encontramos um expoente $\alpha = -0,216(5)$, que se aproxima de forma satisfatória do valor encontrado na seção 2.7 que foi $\alpha = -0,21802(1)$.

Com o ajuste da figura 3.16, aplicamos uma reescala apropriada ao eixo das abscissas, fazendo $i \rightarrow iN_c^\alpha$ para cada um dos valores de N_c , unindo todos os gráficos da figura 3.15 em um único gráfico universal, confirmando invariância de escala em função de N_c , como mostra a figura 3.17.

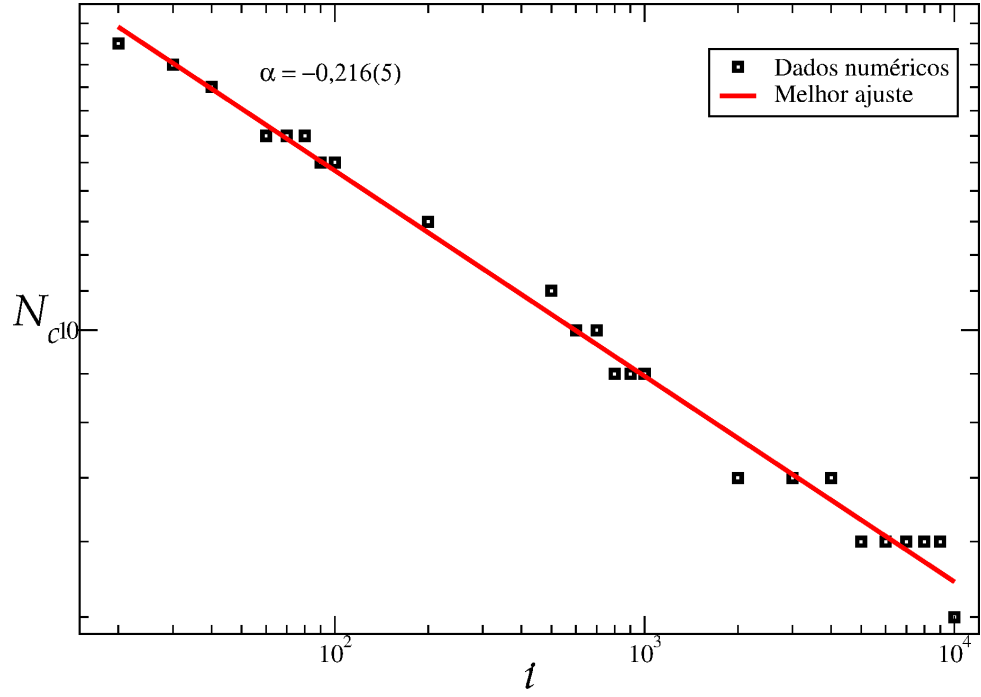


Figura 3.16: Ajuste em lei do potência do decaimento de número reflexões múltiplas em função de N_c para $H = 10^3$ para o poço de potencial assimétrico.

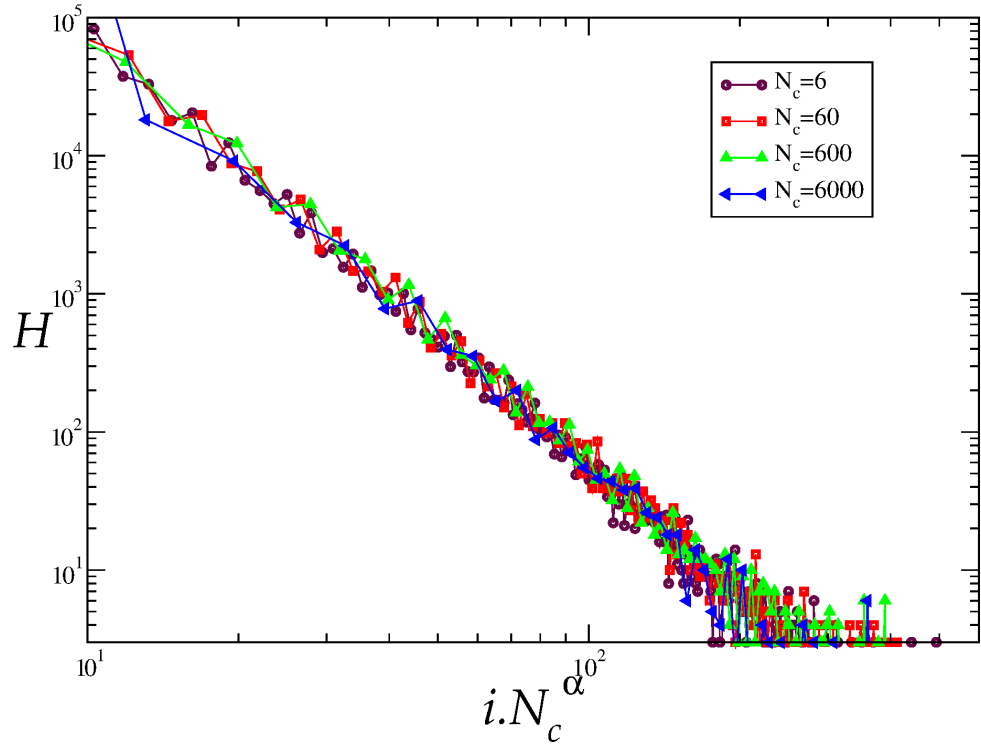


Figura 3.17: Sobreposição das curvas do histograma de frequência do número de reflexões múltiplas em função de N_c , confirmando a invariância de escala.

3.7 Estruturas de Auto-Similaridade

Nesta seção, mostraremos algumas estruturas interessantes que surgem ao analisar o plano e_0e_1 . Analisaremos o comportamento dessas estruturas quando variamos os valores dos parâmetros N_c e δ , e do número de reflexões múltiplas i . Para realizarmos esses estudos, mais uma vez, usamos uma grade de $M \times M$ condições iniciais diferentes onde $\phi_0 \in (0, 2\pi)$ e a energia $e_0 \in (1, 5)$. Para cada condição inicial (ϕ_0, e_0) , encontramos um correspondente e_1 após uma única iteração, onde usamos $M = 10^4$, ou seja, 10^8 condições iniciais. Para obtermos melhores resultados, consideremos a densidade de pontos, onde contamos a quantidade de pontos que visitam uma caixa da grade 1000×1000 de intervalos igualmente espaçados no plano e_1e_0 quando iteramos as $M \times M$ condições iniciais. Para facilitar nosso estudo, definimos a quantidade ξ como sendo o logaritmo do número Σ , que é o número de trajetórias que visitam uma caixa.

$$\xi = \log(\Sigma). \quad (3.25)$$

O uso do logaritmo, tem o objetivo de reduzir os valores de números muito elevados de contagem.

Na figura 3.18 podemos ver o plot no plano e_1e_0 para N_c valendo 3 e 5 e na figura 3.19 para N_c valendo 10 e 50. Para as duas figuras, usamos $r = 1$ e $\delta = 0,5$. Em ambas as figuras foi possível observar um comportamento cada vez mais complexo a medida que o valor de N_c é aumentado. Ainda é preciso extrair mais detalhes do comportamento.

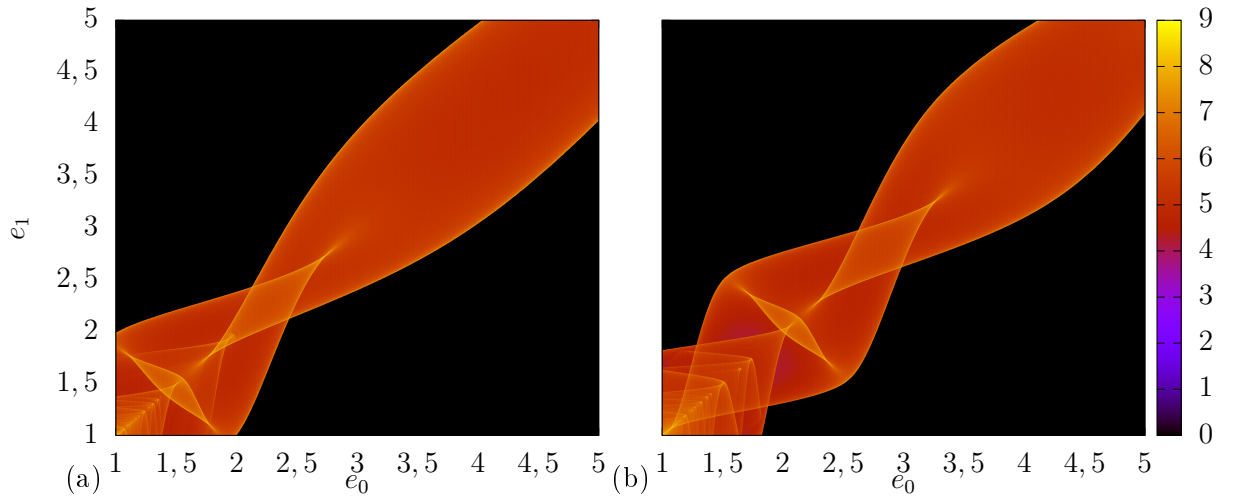


Figura 3.18: Densidade de pontos no plano e_0e_1 , onde as cores representam o número ξ dado pela equação (3.25). Foram usados $N_c = 3$ para (a) e $N_c = 5$ para (b). Os outros parâmetros foram mantidos fixos com $r = 1$ e $\delta = 0,5$.

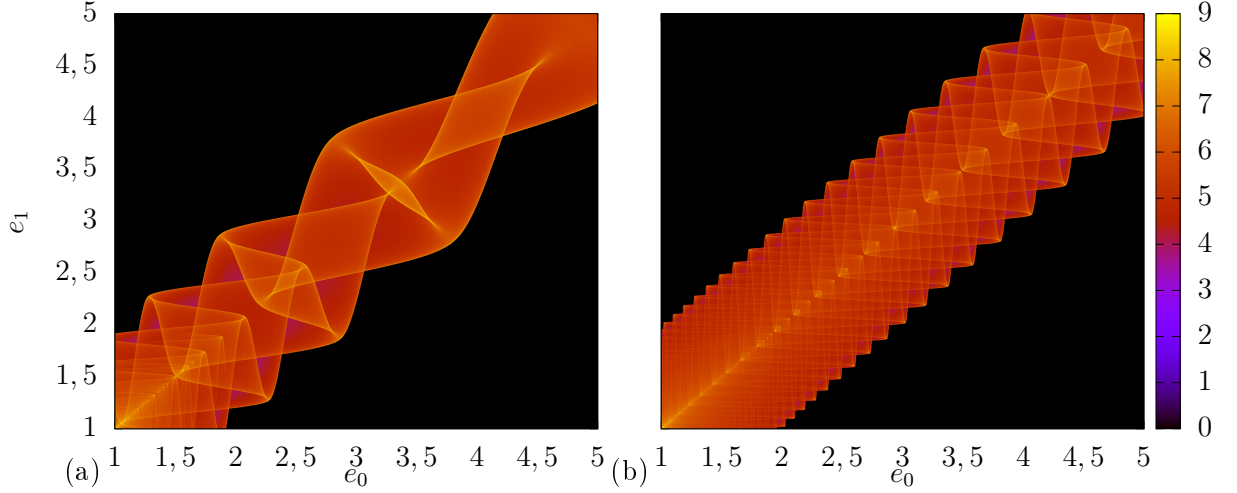


Figura 3.19: Densidade de pontos no plano $e_0 e_1$, onde as cores representam a número ξ dado pela equação (3.25). Foram usados $N_c = 10$ para (a) e $N_c = 50$ para (b). Os outros parâmetros foram mantidos fixos com $r = 1$ e $\delta = 0,5$.

Em nossas simulações, notamos que ao alterar os valores do parâmetro δ , a largura da estrutura que encontramos no plano $e_0 e_1$ também se altera, ou seja, quando aumenta o valor de δ , a largura da estrutura também aumentava e vice-versa. Esse comportamento está ilustrado na figura 3.20, onde temos o plot dessa estrutura para $\delta = 0,2$ na figura 3.20(a), $\delta = 0,4$ na figura 3.20(b), $\delta = 0,7$ na figura 3.20(c) e $\delta = 1$ na figura 3.20(d), mantendo fixos os valores de $N_c = 5$ e $r = 1$. Diante desse comportamento, decidimos investigar a existência de uma relação matemática entre o valor de δ e a largura dessa estrutura. Traçamos a reta $e_1 = e_0$ e, através dela, notamos que a estrutura é simétrica em relação à essa reta. Após isso, traçamos duas retas paralelas a reta $e_1 = e_0$, tangenciando a estrutura em seus pontos mais externos. Analisando os pontos em que essas retas tangentes interceptavam os eixos coordenados do plano $e_0 e_1$, percebemos que a paralela inferior a $e_1 = e_0$ interceptava o eixo e_0 em sempre em $1 + 2\delta$ e a paralela superior interceptava o eixo e_1 sempre em $1 + 2\delta$, ou seja, as duas retas paralelas cortavam os eixos coordenados à uma distância 2δ do ponto $(1, 1)$, como podemos ver na figura 3.21, que é uma ampliação da figura 3.20(c). Nesta figura, chamamos de r_2 a reta $e_1 = e_0$, e de r_1 e r_3 as retas que tangenciam a estrutura e são paralelas à reta $e_1 = e_0$.

Traçamos um segmento de reta l unindo os pontos de interseção das retas que tangenciam as estruturas com os eixos coordenados do plano $e_1 e_0$. Notemos que esse segmento de reta tem a mesma medida da largura máxima da estrutura, como podemos ver no segmento de reta sobre a reta r_4 . Então, podemos aplicar, no triângulo retângulo isósceles que foi formado, o Teorema de Pitágoras e concluir que

$$l = 2\delta\sqrt{2} \quad (3.26)$$

A explicação matemática para essa relação é dada pela primeira sentença da equação (3.11). Nessa equação podemos notar que o maior valor que $\cos(\phi_n + \Delta\phi_b + i\Delta\phi_a)$ pode

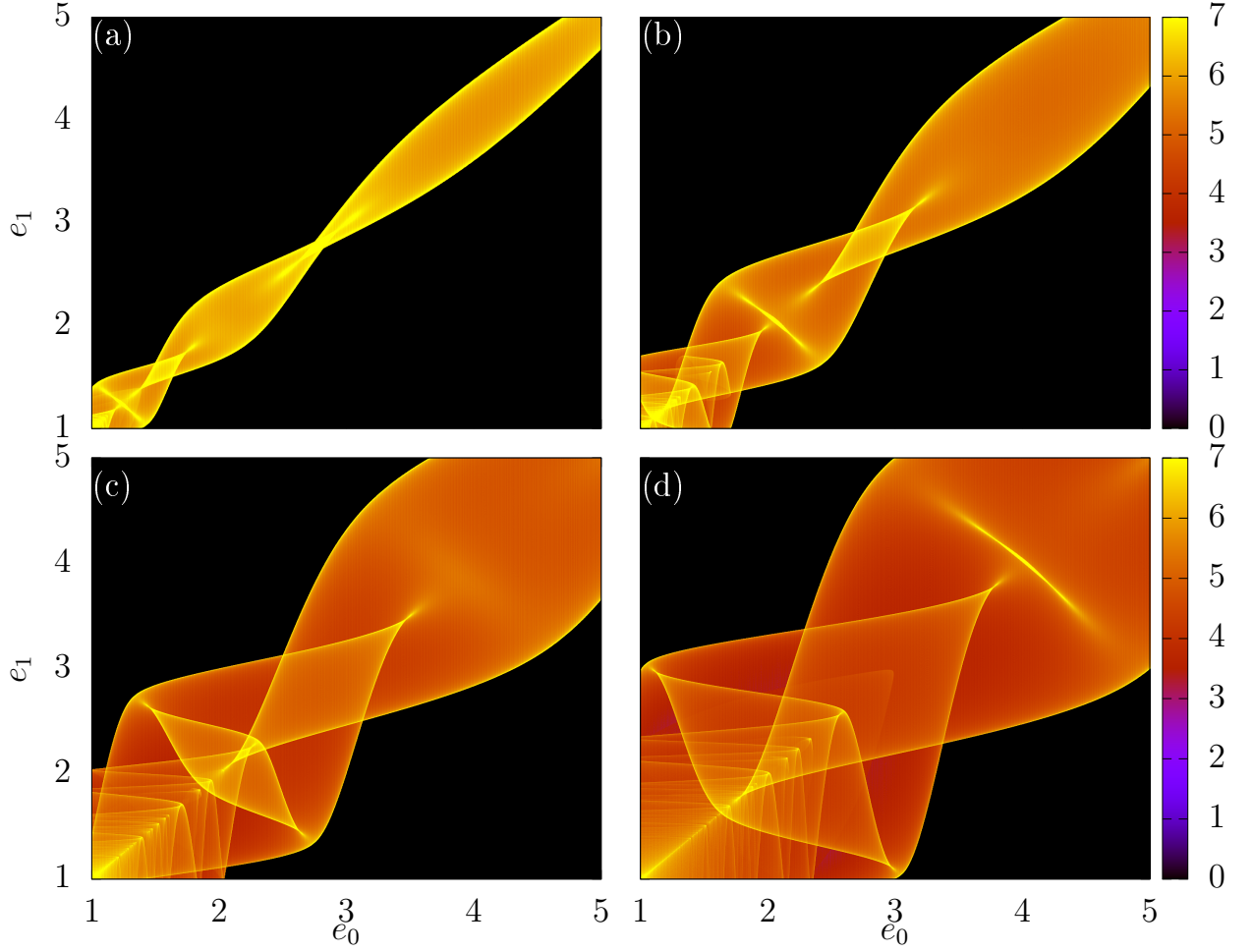


Figura 3.20: Densidade de pontos no plano e_0e_1 onde os pontos coloridos mostram os valores de ξ dados pela equação (3.25). Usamos $\delta = 0, 2$ em (a), $\delta = 0, 4$ em (b), $\delta = 0, 7$ em (c) e $\delta = 1$ em (d). Os outros parâmetros de controle permaneceram fixos com $r = 1$ e $N_c = 0, 5$.

assumir é 1 e o maior valor que $-\cos(\phi_n + \Delta\phi_b)$ pode assumir também é 1. Quando isso acontece, temos o Δe_{max} , que é a maior diferença entre dois valores de energia consecutivos que é dado por

$$\Delta e_{max} = e_{n+1} - e_n = 2\delta, \quad (3.27)$$

onde Δe_{max} é exatamente a distância do ponto $(1, 1)$, aos pontos em que as retas tangentes às estruturas cortam os eixos coordenados do plano e_0e_1 .

Vamos agora destacar um estudo onde buscamos encontrar estruturas de auto-similaridade no plano e_0e_1 . Para isso, ampliamos uma pequena parte da figura 3.20(a), onde consideramos $e_0 \in (1, 1, 4)$ e $e_1 \in (1, 1, 4)$.

Os resultados das observações feitas na ampliação da figura 3.20(a) estão nas figuras 3.22, 3.23 e 3.24. Nós esperávamos encontrar nestas figuras, estruturas que apresentassem auto-similaridade, como foi encontrado na referência [41], onde este mesmo estudo

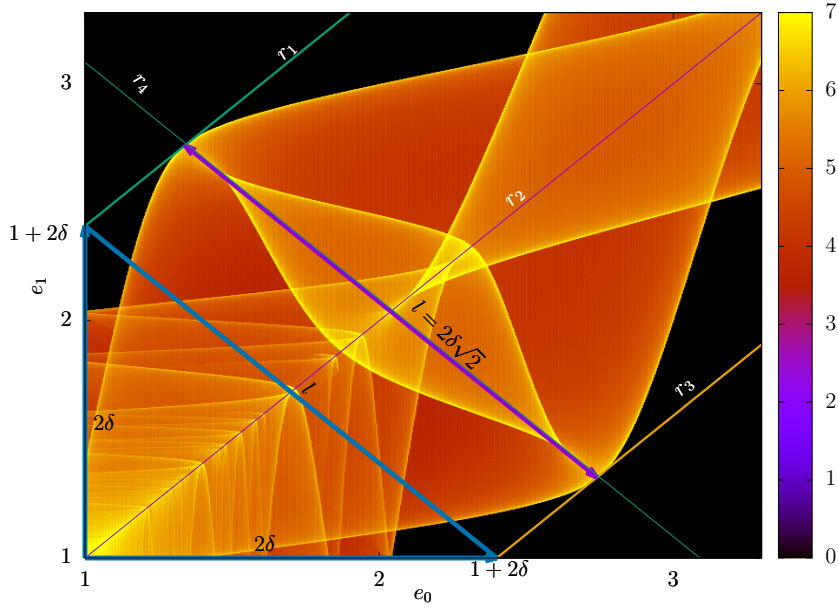


Figura 3.21: Densidade de pontos e_0e_1 onde as cores mostram os valores de ξ dados pela equação (3.25). Usamos $r = 1$, $N_c = 0,5$ and (d) $\delta = 0,7$.

foi aplicado em uma barreira de potencial, porém isso não aconteceu, pois encontramos estruturas mais complexas. Em nossa investigação, geramos essas figuras para vários valores de i . Na figura 3.22(a) temos uma figura gerada para todos os valores de i . Na figura 3.22(b) temos as estruturas para $i = 1$, ou seja, o caso onde não temos reflexões múltiplas. Na figura 3.23(a), temos o caso para $i = 2$, ou seja, apenas uma reflexão sucessiva, que mostra uma única estrutura que parece ser uma ampliação da estrutura encontrada na figura 3.22(b). Na 3.23(b), temos a figura encontrada para $i = 3$, onde temos duas reflexões múltiplas e podemos observar duas estruturas. Já na figura 3.24(a), observamos duas estruturas, sendo uma semelhante a das outras figuras e uma incompleta. Na 3.24(b), observamos cinco estruturas. Podemos observar que a medida que aumentamos o valor de i , o número de estruturas também aumenta, e a figura se assemelha com a figura 3.22(a). Estruturas semelhantes a essas já foram encontradas em para outros mapeamentos. Como exemplos, podemos citar o modelo de Fermi-Ulam, o bilhar côncavo [63, 64] e na barreira de potencial dependente do tempo [41].

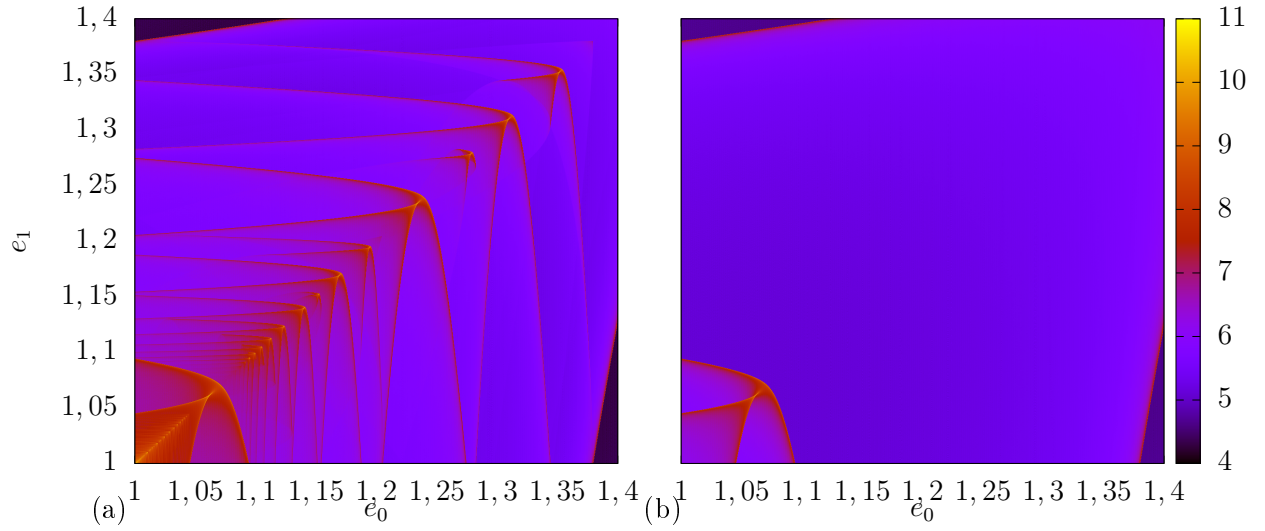


Figura 3.22: Densidade de pontos no plano e_0e_1 com $e_0 \in (1, 1, 4)$ e $e_1 \in (1, 1, 4)$. Em (a) temos uma cenário para todo valor de i e em (b) para $i = 1$.

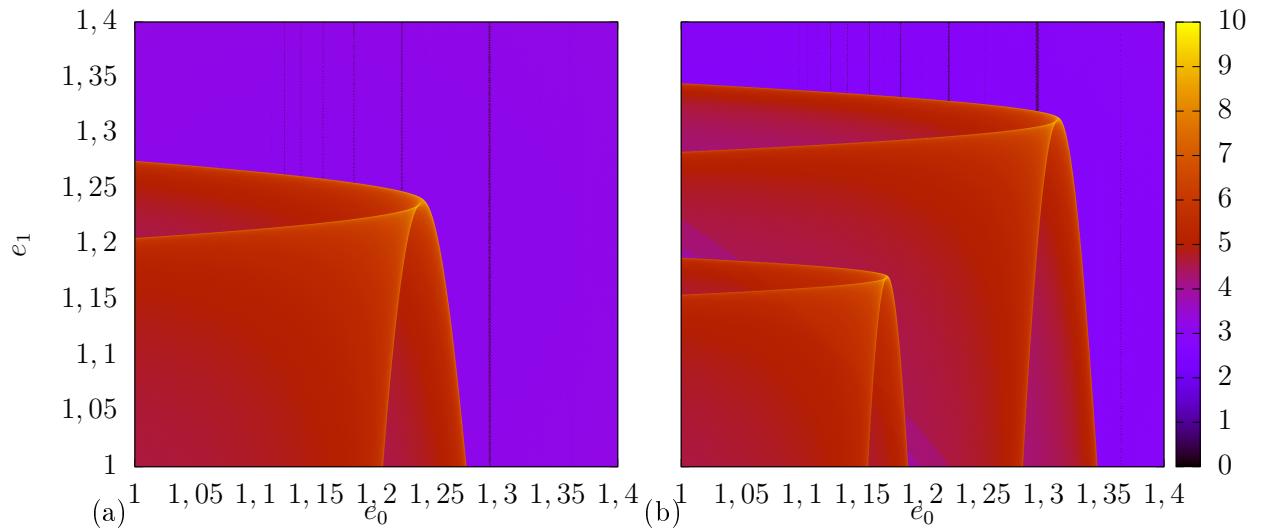


Figura 3.23: Densidade de pontos no plano e_0e_1 com $e_0 \in (1, 1, 4)$ e $e_1 \in (1, 1, 4)$. Em (a) temos o cenário para $i = 2$ e em (b) para $i = 3$.

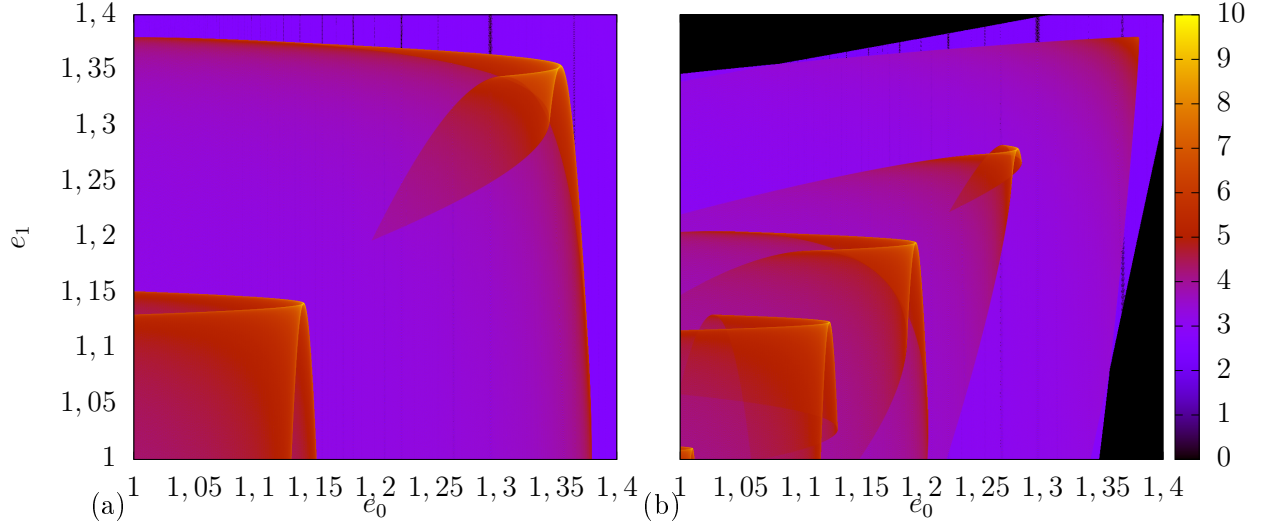


Figura 3.24: Densidade de pontos no plano e_0e_1 com $e_0 \in (1, 1, 4)$ e $e_1 \in (1, 1, 4)$. Em (a) temos o cenário para $i = 4$ e em (b) para $i = 5$.

3.8 Propriedades Dinâmicas Para a Nova Proposta do Poço de Potencial

Nesta seção discutiremos algumas propriedades dinâmicas importantes para a nova versão do poço de potencial, onde encontraremos os elementos da matriz jacobiana, o determinante dessa matriz e o expoente de Lyapunov para o modelo.

3.8.1 A Matriz Jacobiana e seu Determinante

Como já vimos neste capítulo, as equações do mapeamento para a nova versão do modelo são dadas pelas equações (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14). De posse dessas equações, podemos encontrar os elementos da matriz jacobiana J , onde

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial e_{(n+1)}}{\partial e_n} & \frac{\partial e_{(n+1)}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{(n+1)}}{\partial e_n} & \frac{\partial \phi_{(n+1)}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Calculando cada um dos elementos dessa matriz encontramos

$$\frac{\partial e_{(n+1)}}{\partial e_n} = 1 - \delta \sin(\phi_n + \Delta\phi_b + i\Delta_a) \left(\frac{\Delta\phi_b}{\Delta e_n} + \frac{i\Delta\phi_a}{\Delta e_n} \right) + \delta \sin(\phi_n + \Delta\phi_b) \left(\frac{\Delta\phi_b}{\Delta e_n} \right), \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial e_{(n+1)}}{\partial \phi_n} = -\delta \sin(\phi_n + \Delta\phi_b + i\Delta_a) \left(1 + \frac{i\Delta\phi_a}{\Delta\phi_n} \right) + \delta \sin(\phi_n + \Delta\phi_b), \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \phi_{(n+1)}}{\partial e_n} = \frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial e_n} + \frac{i \partial \Delta \phi_a}{\partial e_n} + \frac{\partial \Delta \phi'_b}{\partial e_n} \quad (3.31)$$

e

$$\frac{\partial \phi_{(n+1)}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{i \partial \Delta \phi_a}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \Delta \phi'_b}{\partial \phi_n}. \quad (3.32)$$

As derivadas parciais auxiliares que aparecem nas equações (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32) são dada por

$$\frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial e_n} = -\frac{\pi N_c}{(e_n - \delta \cos(\phi_n + \Delta \phi_b))^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \delta \sin(\phi_n + \Delta \phi_b) \frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial e_n} \right), \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \Delta \phi_a}{\partial \phi_n} = -\frac{\pi N_c \delta \sin(\phi_n + \Delta \phi_b)}{(e_n - \delta \cos(\phi_n + \Delta \phi_b))^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial e_n} = -\frac{\pi N_c r}{2(e_n - 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \Delta \phi_b}{\partial \phi_n} = 0, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \Delta \phi'_b}{\partial e_n} = -\frac{\pi N_c r}{2(e_{n+1} - 1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial e_n}, \quad (3.37)$$

e

$$\frac{\partial \Delta \phi'_b}{\partial \phi_n} = -\frac{\pi N_c r}{2(e_{n+1} - 1)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial e_{n+1}}{\partial \phi_n}. \quad (3.38)$$

Através dos elementos das matriz da matriz jacobiana, encontramos o determinante $\det[J]$ que é dado por

$$\det[J] = \frac{\partial e_{(n+1)}}{\partial e_n} \frac{\partial \phi_{(n+1)}}{\partial \phi_n} - \frac{\partial e_{(n+1)}}{\partial \phi_n} \frac{\partial \phi_{(n+1)}}{\partial e_n}, \quad (3.39)$$

obtendo que

$$\det[J] = 1, \quad (3.40)$$

Esse resultado é muito importante, pois mostra que esse mapeamento obedece ao teorema de Liouville, o que garante que o sistema é conservativo e não possui atratores. Sendo assim a área do espaço de fase é preservada.

3.8.2 O Expoente de Lyapunov

Encontramos também os expoentes de Lyapunov em função do número de iterações para nosso caso. Este também é um importante resultado, uma vez que o esse expoente é

um um indicador de caos. Como sabemos, em sistema bidimensional temos dois expoentes de Lyapunov, e que, se pelo menos um desses expoentes for positivo temos a presença caos. Além disso, em sistemas conservativos bidimensionais temos dois expoentes de Lyapunov simétricos. Então, como esperávamos, ao construir um gráfico do expoente de Lyapunov para o nosso modelo, obtivemos dois expoentes simétricos, pois o sistema é conservativo.

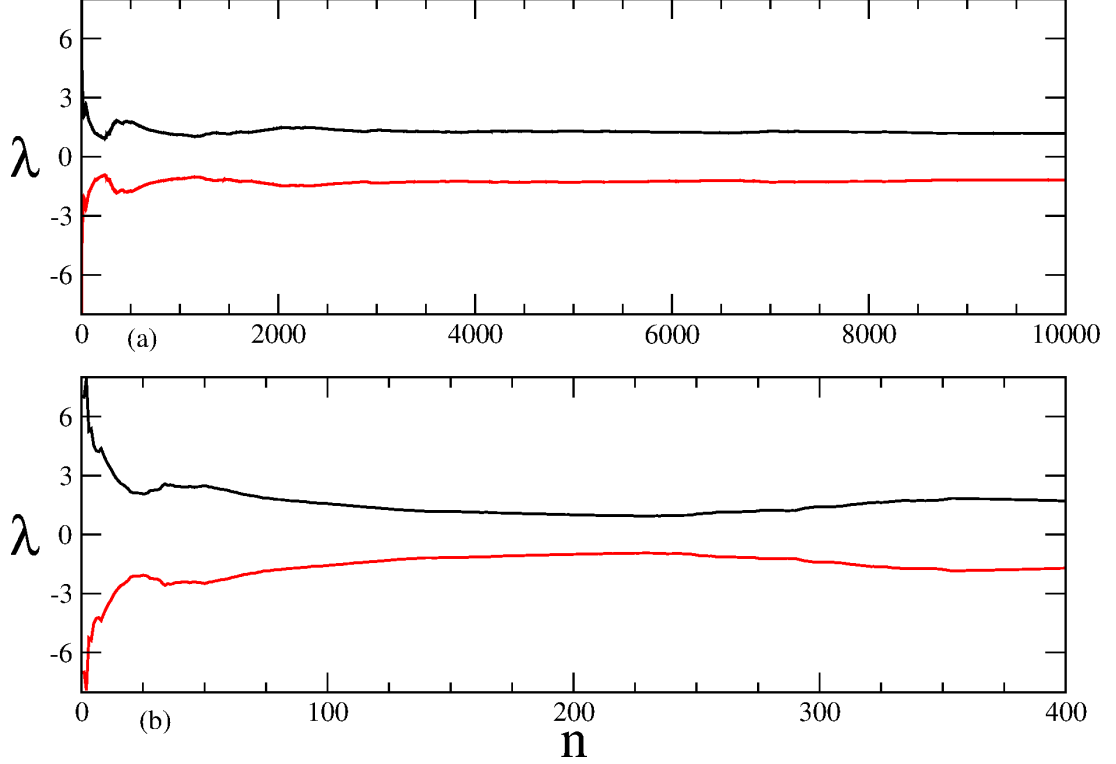


Figura 3.25: Em (a) temos o expoente de Lyapunov em função do número de iterações para $N_c = 3$, $r = 1$ e $\delta = 0,5$. Em (b) temos a ampliação da parte inicial de (a).

Na figura 3.25(a), temos os expoentes de Lyapunov para o nosso modelo para os parâmetros de controle $N_c = 3$, $r = 1$ e $\delta = 0,5$. Como esperado, temos dois expoentes de Lyapunov simétricos, o que torna mais robusta afirmação de que o sistema é conservativo. Na figura 3.25(b), temos uma ampliação da parte inicial de 3.25(a), onde podemos observar com mais detalhes a simetria dos dois expoentes de Lyapunov. Construímos essa figura a partir da expressão do expoentes de Lyapunov para mapeamentos bidimensionais da por

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_n^{(j)}| \quad (3.41)$$

com $j = 1, 2$, em que $\Lambda_n^{(j)}$ são os autovalores da matriz jacobiana $M = \prod_{i=1}^n J_i(V_i, \phi_i) = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1$.

Capítulo 4

Stickiness Através do Expoente de Lyapunov a Tempo Finito

Neste Capítulo consideramos o modelo do poço de potencial discutido no capítulo 3 e nas equações (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) com o objetivo de investigar comportamentos de *stickiness* de uma condição inicial ao longo da órbita no espaço de através do Expoente de Lyapunov a Tempo Finito. Também discutiremos o comportamento de stickiness em função do tempo finito n .

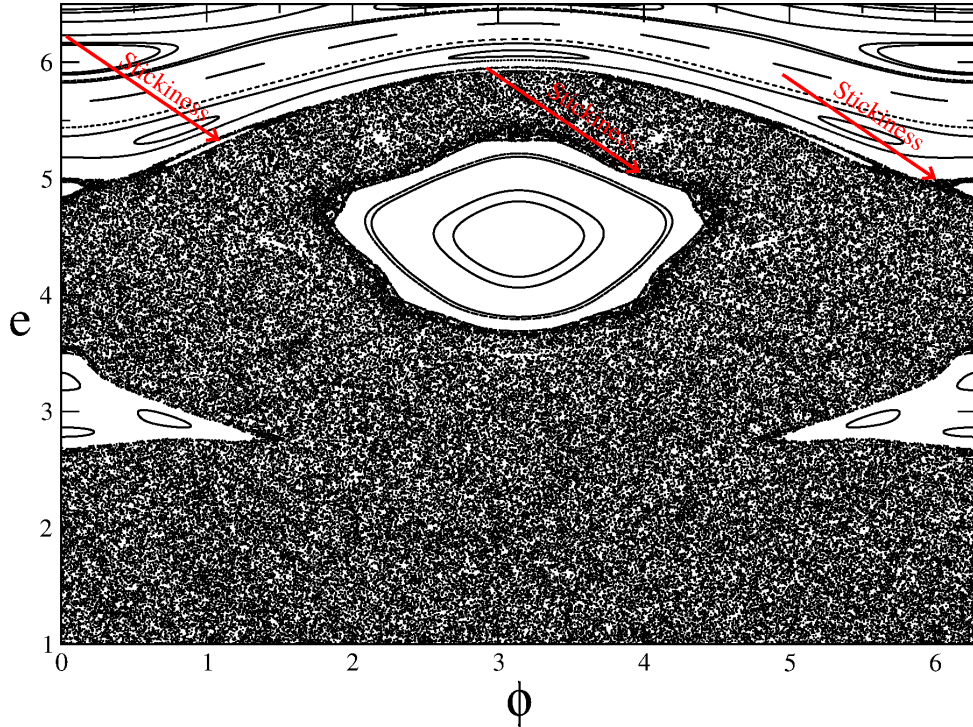


Figura 4.1: Espaço de e vs ϕ para os parâmetros de controle $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$.

Em vários modelos de sistemas dinâmicos, uma condição inicial que se evolui ao longo

de uma órbita pode, em algum momento ficar presa por algum tempo em uma região do espaço de em movimento regular e depois escapar dessa região indo para regiões caóticas. Quando isso acontece dizemos que o sistema apresenta comportamento de *stickiness*.

Durante o desenvolvimento do nosso trabalho percebemos nas figuras dos espaços de indícios de que o sistema apresentava comportamentos de *stickiness*. Na figura 4.1, temos um espaço de para os parâmetros de controle $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$, onde as setas vermelhas mostram algumas regiões mais escuras, sinalizando que durante sua evolução uma órbita ficou presa em movimento regular durante um certo tempo. Então decidimos usar o expoente de Lyapunov a tempo finito (FTLE) para investigar comportamentos de *stickiness* em nosso modelo.

4.0.1 O Expoente de Lyapunov a Tempo Finito (FTLE)

Agora mostraremos o gráfico do FTLE e como ele foi usado para encontrar as regiões de *stickiness* no espaço de .

Para construirmos o gráfico do FTLE com um tempo finito n , procedemos da seguinte forma: Consideramos os expoentes de Lyapunov definidos pela equação (3.41) e calculamos a média do expoente de lyapunov das n primeiras iterações registrando o valor de n e da média calculada. Depois calculamos o valor da média das n próximas iterações, registrando o valor da nova média e o valor de $2n$. Em seguida calculamos a média das n próximas iterações e registramos o valor da nova média e o valor $3n$, e assim sucessivamente.

Ao analisarmos um gráfico do FTLE, temos como objetivo encontrar regiões onde o FTLE é próximo de zero, pois uma órbita apresenta comportamento de *stickiness* para valores FTLE próximos de zero.

A figura 4.2(a) considerando $n = 100$ e 10^7 iterações. Os parâmetros de controle usados foram $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$. Analisando essa figura, vemos densidade de pontos onde observamos, inicialmente, apenas uma linha vertical branca mostrando um intervalo de iterações em que o FTLE é próximo de zero, o que sugere um intervalo da evolução da condição inicial que apresenta *stickiness*. Aquele intervalo corresponde a $6,53 \times 10^6$ iterações, o que podemos considerar um longo tempo de aprisionamento. Fazendo uma ampliação da região R1 da figura 4.2(a), obtemos a figura 4.2(b), onde podemos observar duas outras regiões onde o FTLE fica próximo de zero. A primeira a esquerda onde temos aproximadamente $1,78 \times 10^6$ iterações e outra um pouco menor à direita com, $2,53 \times 10^5$ iterações. Ampliando a região R2 da figura 4.2(b), encontramos figura 4.2(c), onde encontramos cinco regiões onde o FTLE é próximo de zero. Um ao centro com aproximadamente $7,5 \times 10^4$ iterações e outros quatro menores, com aproximadamente $2,5 \times 10^4$ iterações.

Da mesma forma que escolhemos a região R1 na figura 4.2(a) e ampliamos para en-

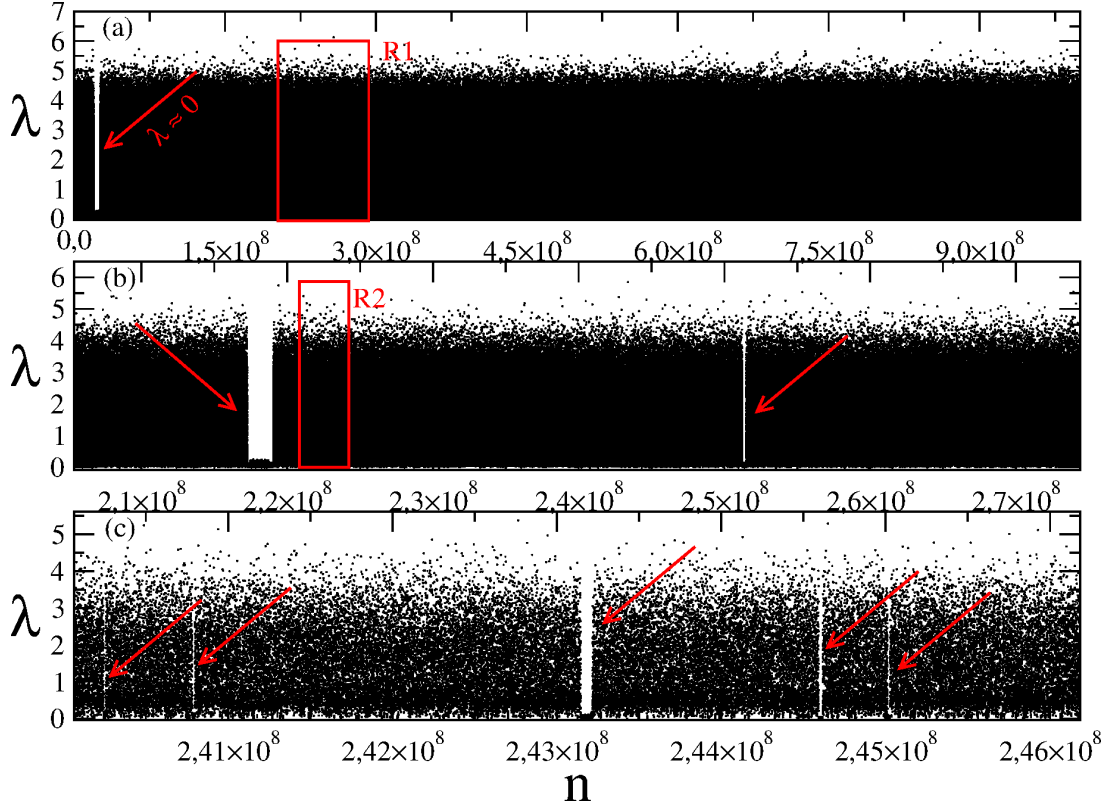


Figura 4.2: Em (a) temos o gráfico do FTLE com $n = 100$ e 10^7 iterações. Em (b) temos a ampliação da região R1 e em (c) temos a ampliação da região R2. As setas vermelhas destacam onde o FTLE é próximo de zero. Nós usamos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$.

contrar as figuras 4.2(b) e (c), poderíamos ter escolhido outra região em 4.2(a) e ter encontrado outras regiões que também apresentam comportamento de *stickiness*. Isso indica que em na evolução de uma condição inicial, podemos encontrar vários intervalos que apresentam *stickiness*. Sendo assim, comportamentos de *stickiness* pode estar imersos em um mar de caos e não ser facilmente detectados.

Encontrados os intervalos onde o FTLE é próximo de zero, nós plotamos os espaços de usando os pares ordenado (ϕ, e) para os valores de n que apresentam FTLE próximo de zero, como mostramos na figura 4.3, onde usamos os parâmetros $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 30$. Na figura 4.3(a) vemos que os valores de FTLE são próximos de zero para $n \approx 1,1226 \times 10^8$ à $n \approx 1,1241 \times 10^8$, o que corresponde à aproximadamente 1.5×10^6 iterações. A figura 4.3(c) mostra o espaço de plotado usando os pares ordenados (ϕ, e) que correspondem ao FTLE que estão dentro do intervalo mostrado na figura 4.3(a). Nesta figura, podemos ver com facilidade as regiões de *stickiness* nas extremidades direita e esquerda da figura. A figura 4.3(b) mostra um intervalo de aproximadamente $1,683 \times 10^5$ iterações, que vai de $n \approx 3,25926 \times 10^7$ à $n \approx 3,27609 \times 10^7$. Na figura 4.3(d), temos o espaço de plotado com os pares ordenados (ϕ, e) que correspondem aos FTLE que estão dentro do intervalos mostrado na figura 4.3(b).

Na figura 4.4 plotamos o espaço de para $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 60$, em função do

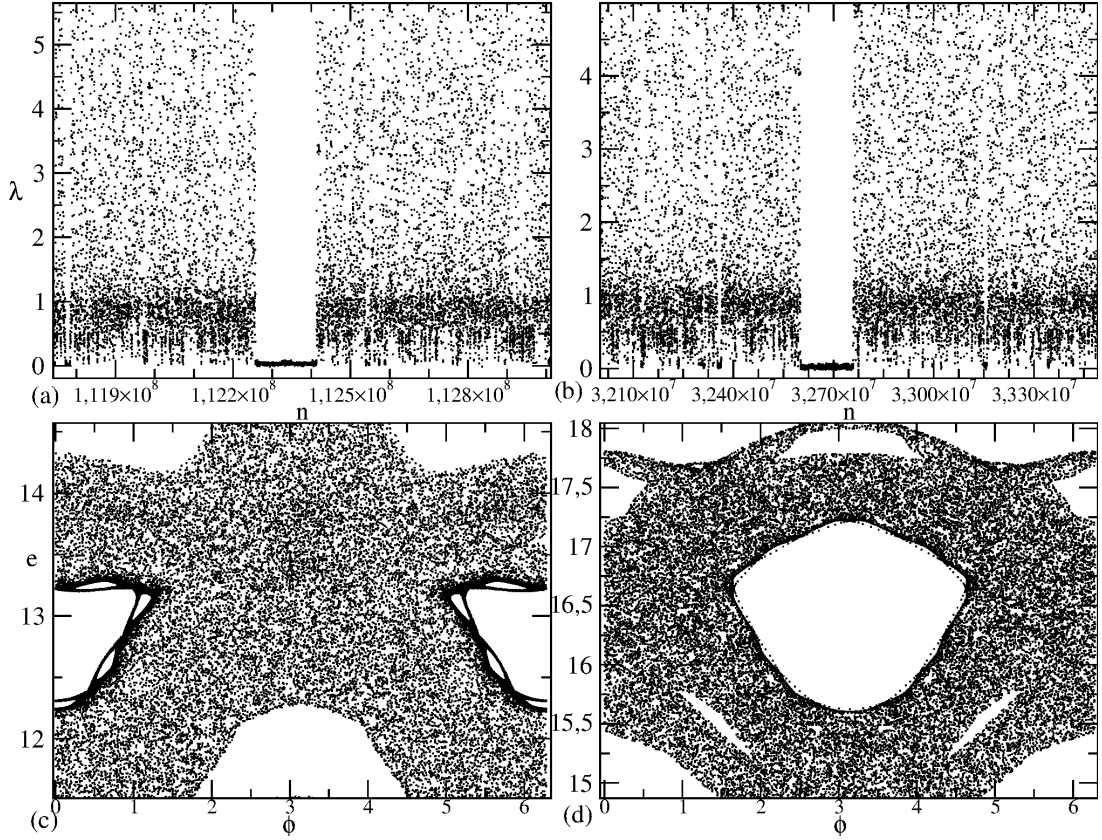


Figura 4.3: Em (a) mostramos o intervalo de $n \approx 1,1226 \times 10^8$ à $n \approx 1,1241 \times 10^8$, onde o valor de FTLE próximo de zero e em (c) temos o *stickiness* do espaço de referente à (a). Em (b) mostramos que o FTLE é próximos de zero para o intervalo de $n \approx 3,25926 \times 10^7$ à $n \approx 3,27609 \times 10^7$. Em (c) temos o *stickiness* no espaço de referente a figura (b). Nós consideramos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 30$.

número de iterações, para um intervalo onde o FTLE é próximo de zero. Esse intervalo vai de $n \approx 6,49975 \times 10^8$ à $n \approx 6,50518 \times 10^8$ tendo $4,43 \times 10^5$ iterações. O objetivo da figura 4.4 é analisar o comportamento da órbita dentro deste intervalo. Vemos que no início do intervalo de $n \approx 6,49975 \times 10^8$ até $n \approx 6,50518 \times 10^8$, a órbita preenche a parte superior do espaço de fase, que é destacado com a cor roxa. Depois permanece por um algum tempo na parte inferior e na sequência fica aprisionada em regiões que apresentam comportamento de *stickiness* que estão destacadas cor amarela.

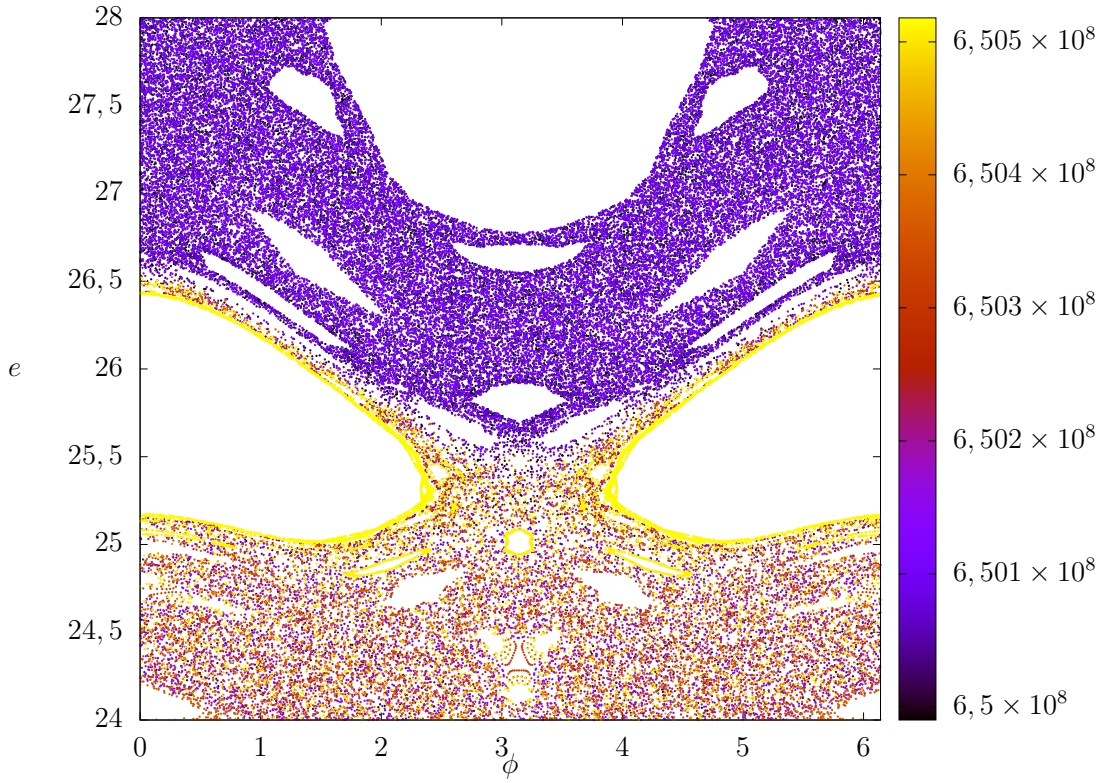


Figura 4.4: Espaço de parâmetro em função do número de iterações para $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 60$. Mostramos o comportamento das interações no intervalo de $n \approx 6,49975 \times 10^8$ até $n \approx 6,50518 \times 10^8$, onde o valor de FTLE é próximo de zero e observamos o comportamento de *stickiness*.

4.1 Histogramas

Agora mostraremos alguns histogramas do FTLE para vários valores o tempo finito n e discutiremos alguns resultados observados.

4.1.1 Histogramas do FTLE

Na figura 4.5, mostramos vários histogramas do FTLE para $r = 1$, $\delta = 0,5$, $N_c = 30$ e diferentes valores de n . Observamos que para valores menores de n , o histograma apresenta apenas um pico em destaque e outro se iniciando para valores de FTLE próximos de zero. Observamos também que os valores de λ alcançam valores próximos de 10 para baixos valores de n e valores menores para valores maiores de n . Com o aumento do valor de n , podemos observar que são exibidos três picos, um bem próximo de zero, outro próximo de $\lambda = 0,5$ e outro próximo de $\lambda = 1$. Notamos que, com o aumento de n , o pico que fica próximo de 0,5, entre os outros dois picos, se destaca cada vez mais, superando o

terceiro pico para $n \approx 185$, e a frequência de altos valores de FTLE se torna mais baixa. Como podemos ver, para $n = 10$ os maiores valores de FTLE são próximos de 10, e para $n = 200$, os maiores valores de FTLE são próximos de 7,4. Em outras palavras, com o aumento do tempo finito, temos uma maior frequência de FTLE com valores baixos e uma menor frequência do FTLE com valores altos. Desse modo podemos dizer que para maiores valores de n , temos um número maior de regiões com comportamento de *stickiness*.

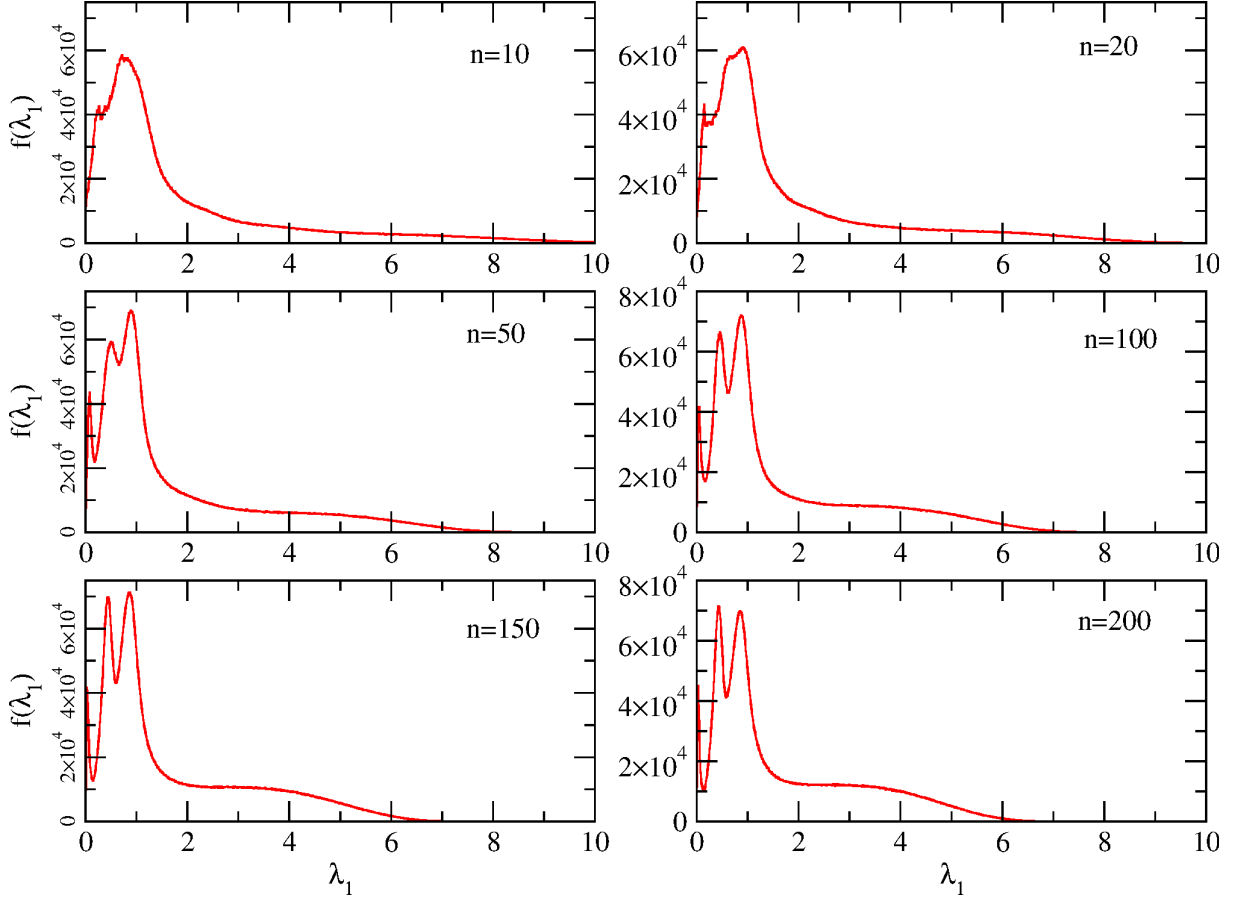


Figura 4.5: Histogramas do FTLE para vários valores n com $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 30$.

Para uma melhor análise do comportamento dos histogramas em função do aumento de n , plotamos histogramas para vários valores de n em mesmo plano, como mostramos na figura 4.6.

Nesta figura, observamos que o vale entre o primeiro e o segundo pico se torna cada vez mais profundo na medida que o valor de n se torna mais alto. Observamos também que o segundo pico sempre aumenta com o crescimento do valor de n . Outra observação importante que tivemos, foi que todos os histogramas tendem a passar por dois pontos comuns a todos eles. Isso acontece quando os valores de FTLE estão próximos de 0,32 ou 0,7. Observando a figura 4.6 e tomando como referência os dois pontos onde os histogramas tendem a se encontrarem, plotamos três espaços de para três intervalos diferentes de FTLE, como mostra a figura 4.7.

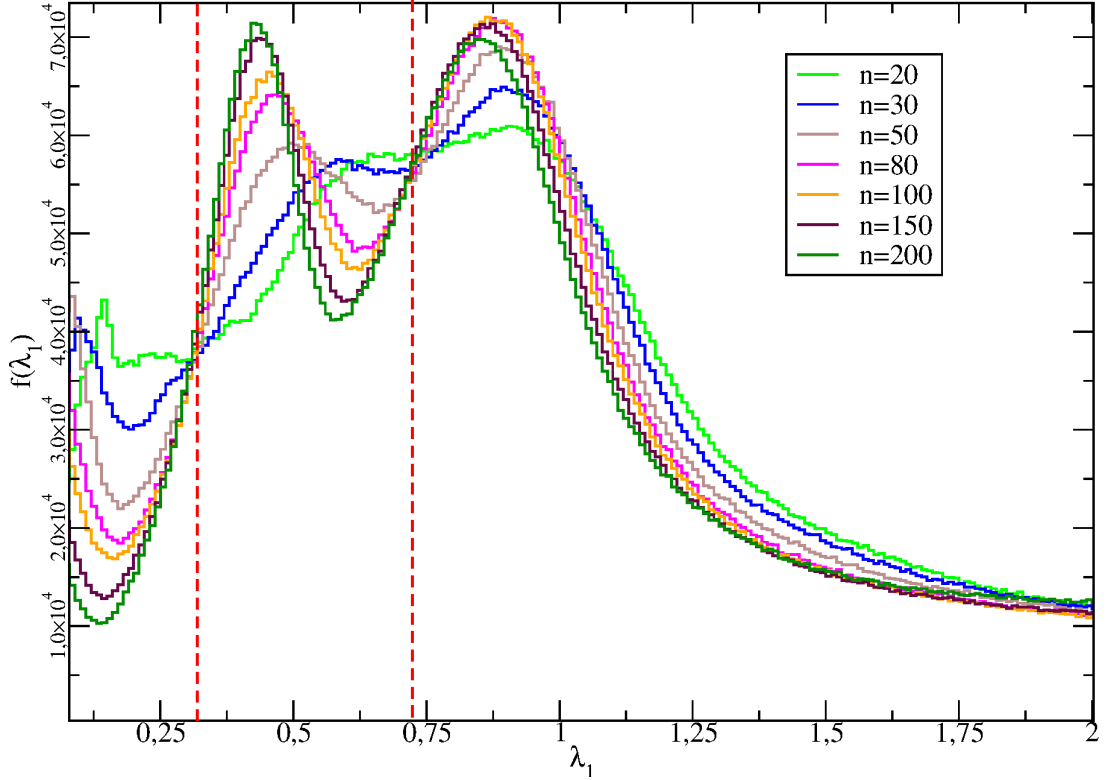


Figura 4.6: Histograma do FTLE para vários valores do tempo finito n com $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 30$.

Na figura 4.7, plotamos espaços de fase usando três intervalos diferentes para valores do FTLE. Na figura 4.7(a), plotamos os pares ordenados (e, ϕ) tais que $0 < \text{FTLE} < 0,32$, na figura 4.7(b), plotamos os pares ordenados (e, ϕ) tais que $0,32 < \text{FTLE} < 0,7$ e na figura 4.7(c), os pares (e, ϕ) tais que $0,7 < \text{FTLE} < 1,8$. Na figura 4.7(a), onde usamos valores mais baixos de FTLE, obtemos um espaço de fase com grande número de regiões que apresentam *stickiness* e consequentemente uma quantidade menor de caos, embora que, na sua totalidade, a órbita continua sendo caótica. Na figura 4.7(b), com o aumento dos valores de FTLE, os pares (e, ϕ) fornecem um espaço de fase com menos regiões de *stickiness* e uma região caótica mais densa, entretanto, existem regiões com comportamentos de *stickiness* camufladas na região caótica. Na figura 4.7(c), os valores de FTLE são maiores que os valores usados na figura 4.7(b) o que torna mais difícil encontrar regiões com comportamento de *stickiness* apenas olhando para o espaço de fase, já que essas regiões ficam camufladas no mar de caos. Outra importante observação da figura 4.7(c) está na parte superior do espaço de fase, para valores de energia maiores que $e = 25$. Esta parte do espaço de fase não é preenchida para valores de FTLE maiores que 0.669. Devido a isso, ao construir essa figura, usamos os pares ordenados (e, ϕ) tais que $0,7 < \text{FTLE} < 1,8$.

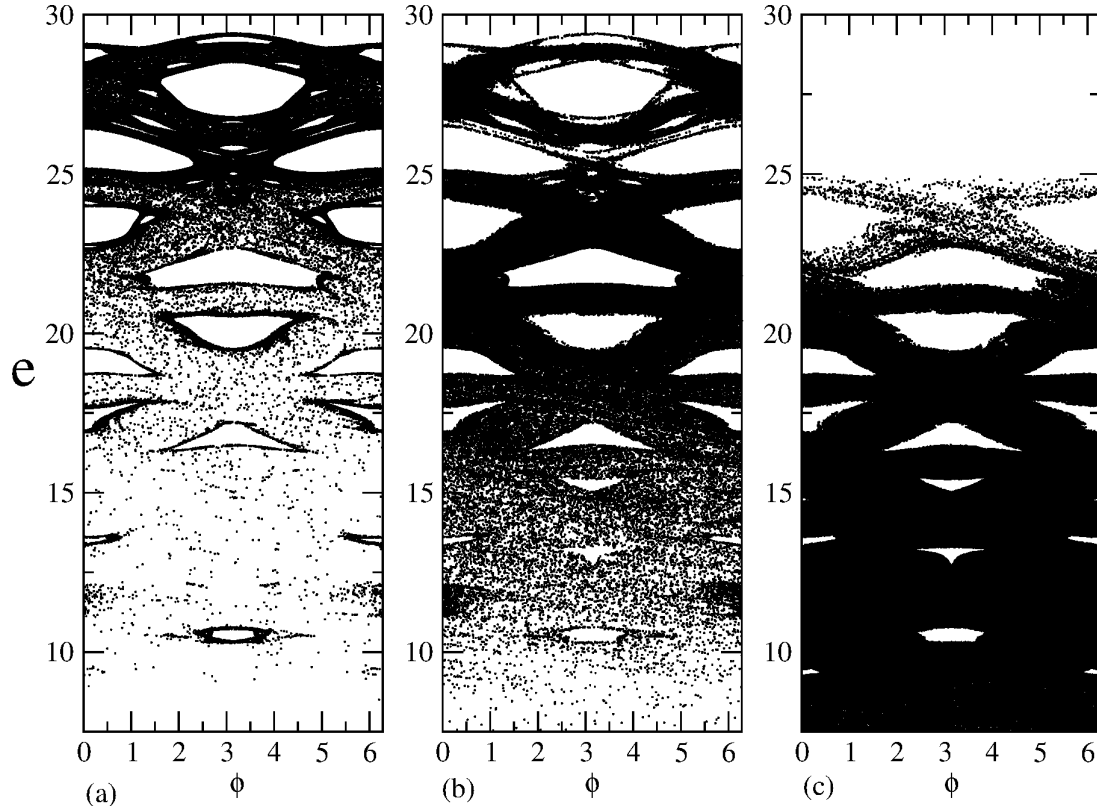


Figura 4.7: Espaço de fase para três intervalos diferentes de FTLE com tempo finito 100 para $N_c = 60$, $r = 0,5$ e $\delta = 0,5$.

Com o objetivo de encontrar mais regiões que apresentassem comportamento de *stickiness* no espaço de , reduzimos o primeiro intervalo dos valores de FTLE para $0,0 < \text{FTLE} < 0,07$, onde o centro deste intervalo é o primeiro pico do histograma para $n = 100$.

Na figura 4.8, temos um espaço de fase que mostra um grande número de regiões que contém comportamento de *stickiness*. Podemos notar uma grande região em branco, que na figura 4.7 estava preenchida pelo caos, principalmente nos itens (b) e (c).

Observando a figura 4.8, todas as regiões do espaço de fase que apresentam regularidade para $0 < \text{FTLE} < 0,07$ podem ser vistas apenas olhando para o espaço de fase. Entretanto, existem regiões que parecem apresentar um caos local, pois são regiões escuras e inicialmente não apresentam regularidades. Como exemplo, destacamos três regiões da figura 4.8.

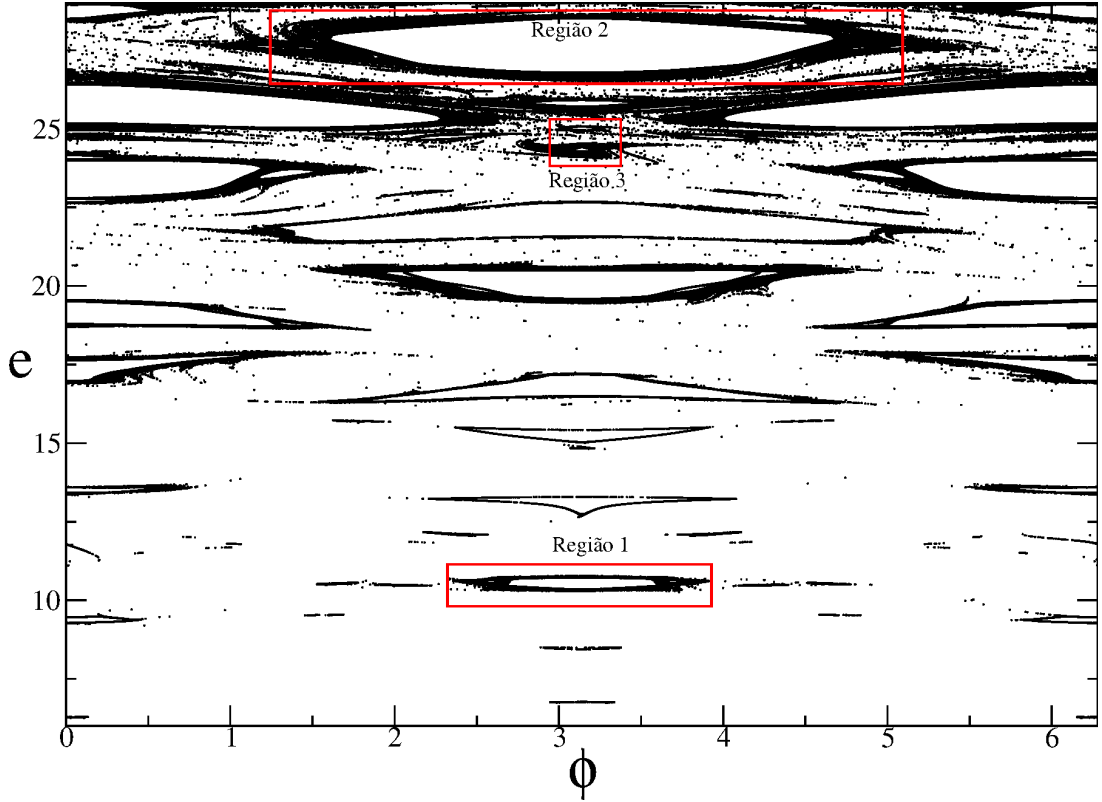


Figura 4.8: Espaço de fase para um intervalo mais curto centrado no primeiro pico do histograma FTLE com tempo finito $100 N_c = 60$, $r = 0,5$ e $\delta = 0,5$.

Fazendo ampliações dessas regiões, observamos que elas ainda apresentam regularidades muito interessantes, como podemos ver na figura 4.9. A figura 4.9(a) mostra a ampliação da região 1, que está na área de baixa energia da figura 4.8, onde podemos ver uma estrutura simétrica formada por uma ilha de regularidade principal, cercada por cinco outras ilhas secundárias, sendo essas ilhas secundárias cercadas por cinco outras ilhas. Na figura 4.9(b), temos a ampliação da região 2 localizada na área de alta energia na figura 4.8, nela vemos uma ilha principal cercada por quatro aglomerados de ilhas formados por quatro ilhas, e na parte superior direita apenas uma ilha um pouco maior.

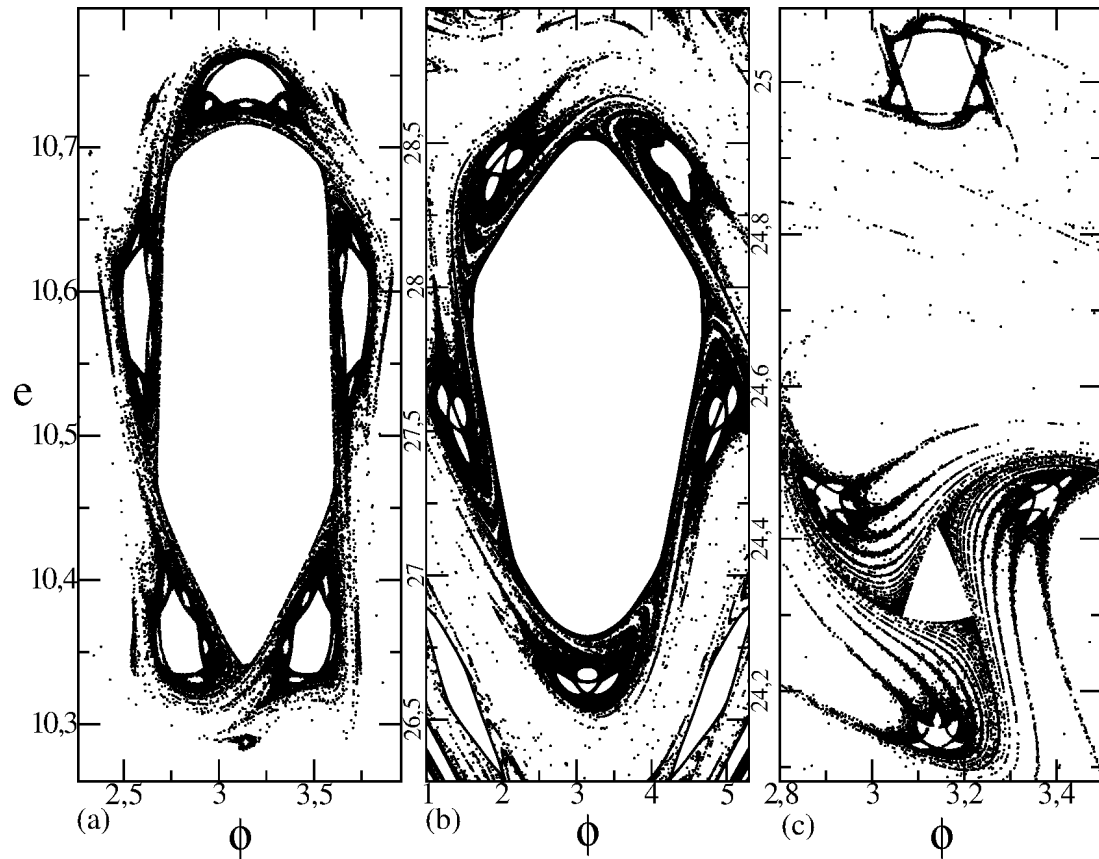


Figura 4.9: Em (a) temos a amplificação da região 1 da figura 4.8, em (b) da região 2 e em (c) da região 3 da mesma figura.

A figura 4.9(c), mostra a ampliação da região 3 que fica um pouco abaixo da região 2 da figura 4.8. Nesta figura, observamos duas estruturas interessantes que apresentam *stickiness*. Uma na parte superior da figura, onde temos uma estrutura de período seis semelhante com uma estrela. A outra na parte inferior, onde temos uma estrutura de multiplicidade três que exibe um tipo de ilha triangular ao centro, cercada por três aglomerados de seis ilha da um.

Capítulo 5

Stickiness Via Recorrência Dinâmica

Neste capítulo mostraremos como usamos um segundo método através do qual encontramos trajetórias de *stickiness*. Com o uso da taxa de recorrência dinâmica encontramos condições iniciais que apresentam comportamento de *stickiness* em sua trajetória.

5.1 Recorrência Dinâmica

Recorrência é uma importante propriedade de sistemas dinâmicos. Definimos matematicamente uma recorrência dinâmica, se em um tempo t_j , uma dada trajetória $\varphi(t)$ que retorna a vizinhança dinâmica de um estado prévio $\varphi(t_i)$, com $t_i < t_j$. Considerando uma distância máxima ϵ , sendo ϵ um parâmetro de recorrência, é possível escrever uma matriz binária conhecida como matriz de recorrência ou *Recurrence Matrix* (RM), composta por elementos $R_{i,j}$ dados por

$$R_{i,j}(\epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|\varphi(t_i) - \varphi(t_j)\| < \epsilon \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.1)$$

onde $\|\cdot\|$ é uma distância adequada no espaço de fase do sistema e i, j são índices temporais. Cada elemento 1 de RM representa uma recorrência da trajetória analisada, o que significa que $\varphi(t_i)$ e $\varphi(t_j)$ estão dinamicamente perto um do outro [54]. É importante ressaltar que, neste caso, a trajetória $\varphi(t)$ visita a mesma região (com tolerância ϵ) do espaço de fase da dinâmica nos instantes t_i e t_j .

Existem dois parâmetros importantes para essas análises de recorrências dinâmicas, são eles: Número máximo de iteração N , que também pode ser chamado de tempo de integração do sistema, e a distância máxima de recorrência ϵ , também chamado de *recurrence threshold*. É importante lembrar que a RM é de tamanho (N^2) , em que os índices $i, j \in [0, N]$ e cada elemento não nulo aparece devido ao parâmetro ϵ , conforme equação (5.1).

Na prática, dada uma condição inicial (x_0, y_0) , sua evolução até o tempo N , usando o

sistema de equações dinâmicas do modelo em estudo, será a trajetória $\varphi(x, y; t)$ analisada pela *RM*. Assim, é importante lembrar que a *RM* depende da condição inicial escolhida para evolução dinâmica, ou seja, diferentes condições iniciais podem apresentar evoluções completamente distintas, produzindo diferentes *RM*s.

A representação visual da *RM* é conhecido como gráfico de recorrência ou *Recurrence Plot (RP)*. Usualmente, o *RP* representa uma entrada nula por um pixel branco e entradas com valor 1 por pixels coloridos. Assim, baseado na trajetória, os gráficos de recorrência podem ser completamente diferentes. Além disso, o *RP* pode apresentar diferentes comportamentos para a mesma trajetória. Uma órbita caótica em espaços de fase mistos, por exemplo, pode produzir um *RP* com distintos padrões ao longo de sua evolução, podendo retratar comportamentos caóticos ou com uma certa regularidade, os quais dependem das regiões visitadas no espaço de fase.

A figura 5.1 mostra quatro diferentes *plots* de recorrência para quatro diferentes condições iniciais para o modelo do poço de potencial que estamos estudando. Na figura 5.1(a), temos um espaço de fase normalizado do modelo do poço de potencial, onde estão destacadas duas orbitas regulares que estão nas cores magenta e azul, e outras duas órbitas caóticas nas cores verde e vermelho. A órbita regular na cor magenta se encontra em uma região mais central do espaço de fase e a outra na cor azul, nas laterais do espaço de fase. As órbitas caóticas, retratadas pelas cores verde e vermelha, estão por todo o mar caótico do espaço de fase. Na figura 5.1(b) temos o *plot* de recorrência para cada uma dessas órbitas. Podemos observar que os *plots* de recorrência que representam as órbitas regulares (órbitas que apresentam um grande número de recorrências) apresentam padrões que também são regulares, exibindo estruturas com tendem a apresentar retas com inclinação de 45° . Notemos também que os *plots* de recorrência que representam as trajetórias caóticas apresentam apenas uma reta diagonal, que significa $i = j$, e alguns poucos pontos onde acontecem as poucas recorrências da evolução das mesmas.

Uma vez que computamos trajetórias que queremos estudar, encontrando sua matriz de recorrência e o *plot* de recorrência, existem vários métodos para quantificar diferentes aspectos relacionados aos *RPs*. Essas são as análises de quantificação de recorrência, ou *Recurrence Quantification Analysis (RQA)* [55]. Em nosso trabalho, utilizamos a taxa de recorrência, ou *Recurrence Rate (RR)*, que fornece a porcentagem de eventos recorrentes em uma certa evolução, ou seja, quantos elementos não nulos existem na *RM*, ou ainda, quantos pixels coloridos existem no *RP*. Matematicamente, é uma média na *RM* dada por

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{i,j}. \quad (5.2)$$

Como podemos notar, *RR* depende do número de iterações N , então pode-se dizer $RR = RR(N)$. Analisando (5.2), podemos concluir que *RR* será relativamente alta quanto uma

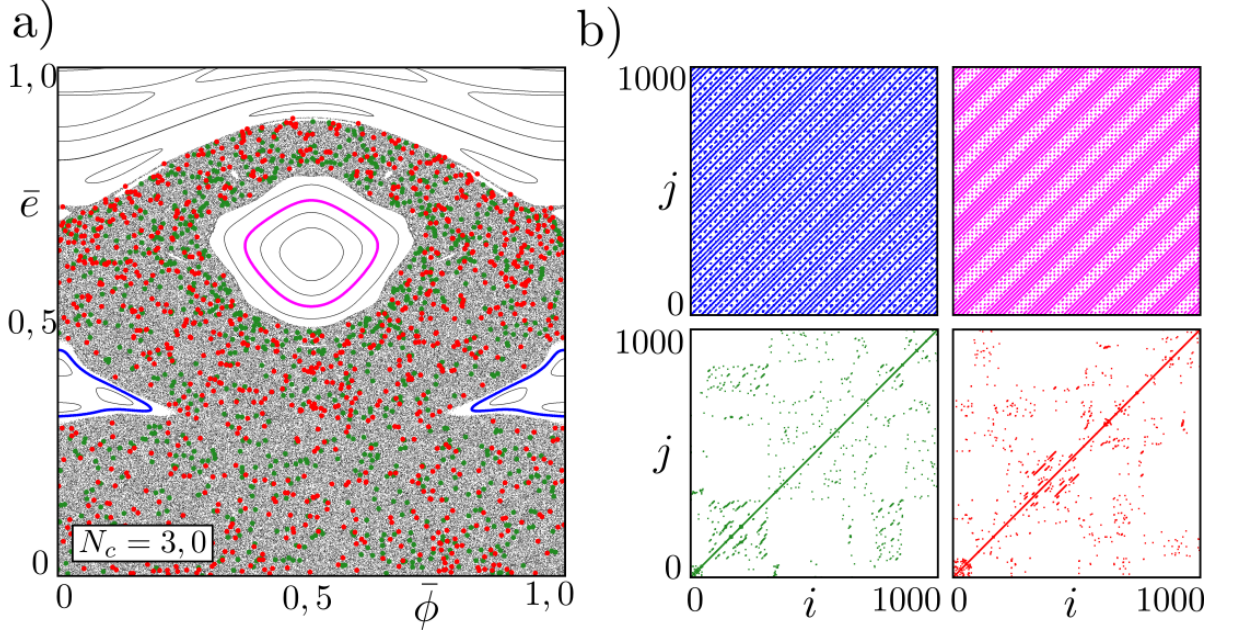


Figura 5.1: Em (a) temos o espaço de fase normalizado para o nosso modelo onde usamos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3$. Em (b) temos os *plots* de recorrência para as órbitas destacadas em (a), onde usamos $\epsilon = 0,01$.

trajetória caótica apresentar muitas recorrências em um intervalo $[0, N]$.

O valor de RR é um valor muito importante para nosso trabalho, pois através dele podemos encontrar condições iniciais que apresentam comportamento de *stickiness*, que são aquelas condições de iniciais que apresentam um valor de RR alto.

Para encontrarmos condições iniciais que apresentam comportamentos de *stickiness* para o modelo do poço de potencial estudado neste trabalho, nós procedemos da seguinte forma: Escolhemos um *ensemble* de M condições iniciais do espaço de fase localizadas no mar de caos, onde fixamos o valor da energia e_0 e dividimos o intervalo de $[0, 2\pi]$ em M partes iguais, tendo M condições iniciais em uma linha horizontal no mar de caótico. Então evoluímos cada uma dessas condições iniciais N vezes através do mapeamento da dinâmica do modelo, dado pela equação (3.11). Daí calculamos o valor de RR para cada uma dessas condições iniciais através da equação (5.2), considerando o parâmetro ϵ . Feito isso, obtemos o *plot* de recorrência da evolução das condições iniciais, onde podemos identificar as condições iniciais que possuem alto valor de RR , que são as condições iniciais que esperamos apresentar comportamento de *stickiness*. Identificadas as condições iniciais com alto valor de RR , evoluímos as mesmas N vezes para que possamos encontrar o comportamento de *stickiness* dessas condições iniciais. Aplicamos esse procedimento em nosso modelo mantendo constante os parâmetros de controle $r = 1$ e $\alpha = 0,5$ e usando três valores diferentes do parâmetro N_c , com mostraremos a seguir.

Na figura 5.2, temos o *plot* da taxa de recorrência para um *ensemble* de condições iniciais para nosso modelo e o espaço da fase associando os parâmetros de controle $r = 1$, $\alpha = 0,5$ e $N_c = 2,5$. Na figura 5.2(a), mostramos os valores computados de RR para cada

uma das trajetórias encontradas através do ensemble, considerando $\epsilon = 0,01$. O ensemble E , é formado por uma linha horizontal de $M = 10^3$ condições iniciais uniformemente distribuídas, com $e_0 = 1,10$ e $\phi_0 \in [0, 2\pi]$. Ou seja, temos 10^3 trajetórias caóticas evoluídas até $N = 10^4$ iterações, iniciadas com a mesma energia e_0 , mas em diferentes pontos da fase ϕ_0 . Os picos da distribuição de $RR(\phi_0)$ fornecem as coordenadas exatas para trajetórias com alto índice de recorrência (candidatas ao fenômeno de stickiness). Indicamos, em particular, o ponto $\phi_0 = \phi_0^* = 5,0893800988154263$ em que temos o maior valor de RR , com $RR(\phi_0^*) = 1,93\%$.

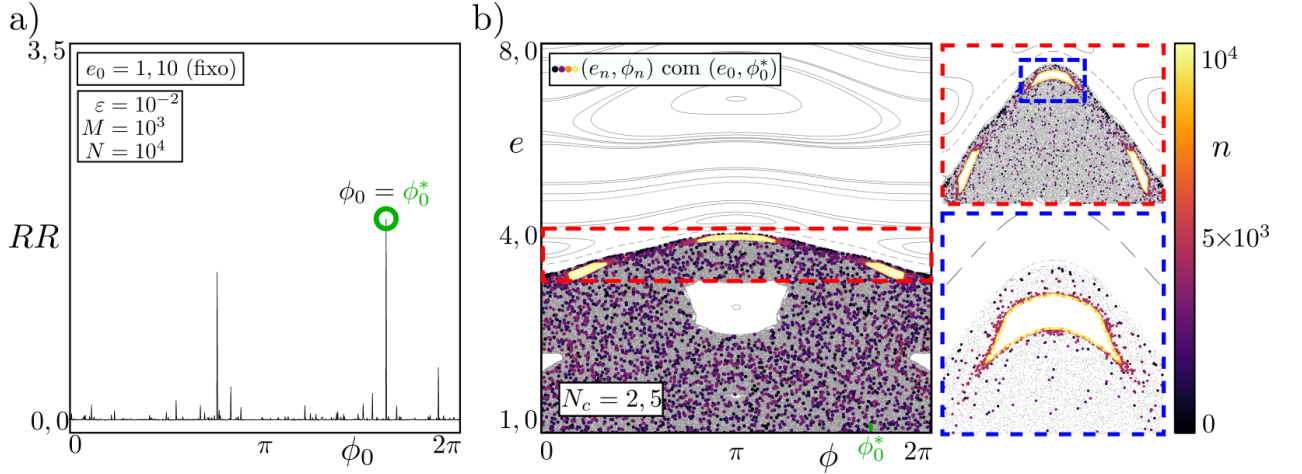


Figura 5.2: Em (a) temos a taxa de recorrência considerando $M = 10^3$ condições iniciais, variando ϕ_0 e mantendo fixo $e_0 = 1,10$. O maior valor de RR é relativo à condição inicial ϕ_0^* destacada em verde. Em (b) temos um espaço de fase que destaca a evolução da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) encontrada em (a) e sucessivas ampliações das regiões que apresentam *stickiness*. Usamos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 2,5$

Já na figura 5.2(b) mostramos o espaço de fase com a trajetória (e_n, ϕ_n) onde usamos a condição inicial em (e_0, ϕ_0^*) . Podemos observar a evolução dinâmica dessa órbita pela escala de cores, onde cores mais quentes são relacionadas as partes intermediária e final da evolução. Notamos que, inicialmente, a órbita passeia pela região caótica do espaço de fase, mas após algum tempo (por volta de 3000 iterações), essa trajetória fica aprisionada ao redor de pequenas ilhas de estabilidade que compõe a camada mais superior (destacada em amarelo) do espaço de fase. Nas sucessivas ampliações das regiões em amarelo, mostramos com mais detalhes o comportamento de *stickiness* dessa evolução.

Na figura 5.3 temos a série temporal para condição inicial (e_0, ϕ_0^*) encontrada na figura 5.2 e o *plot* de recorrência da mesma. A figura 5.3(a), mostra a série temporal para a condição inicial $(1,10, 5,0893800988154263)$, que é a condição inicial com maior taxa de recorrência encontrada para o parâmetro $N_c = 2,5$. Notemos que a escala de cores usada nessa figura é a mesma usada na figura 5.2(b) e os valores de energia e_0 da região de *stickiness* também são exatamente os mesmos da região ampliada. Podemos observar que a trajetória se inicia de forma caótica, passa por uma pequena região de estabilidade,

retorna ao caos, passa por outra região de estabilidade menor que a primeira, passa novamente pelo caos e finalmente entra na região de *stickiness*. A figura 5.3(b) temos o *plot* de recorrência que retrata o comportamento mostrado nos em 5.3(a) considerando somente as primeiras 5000 iterações.

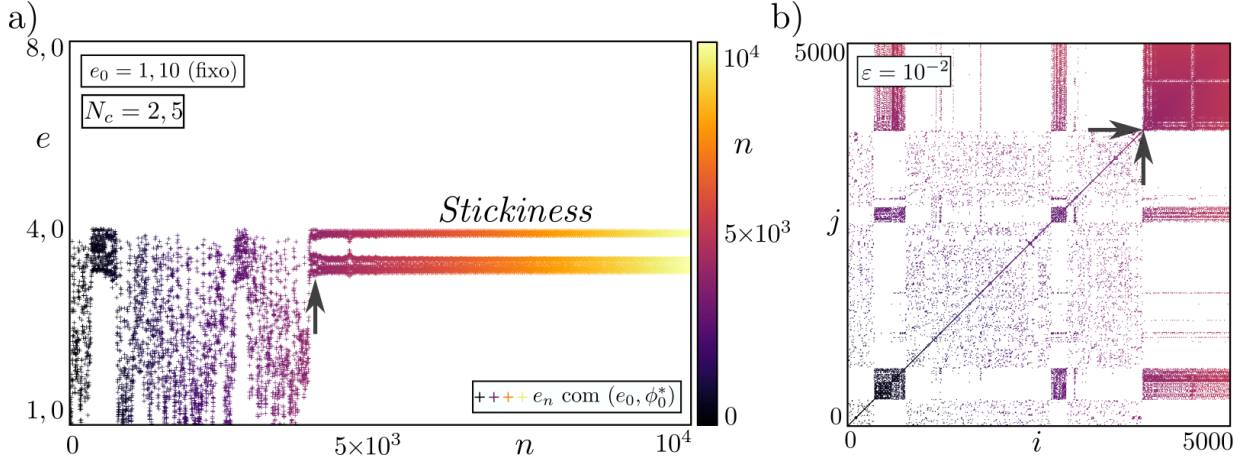


Figura 5.3: Em (a) temos a série temporal da órbita da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) , encontrada na figura 5.2 (a). Em (b) temos o *plot* de recorrência dessa mesma órbita. Usamos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 2,5$

As figuras 5.4 e 5.5 mostram um estudo análogo ao estudo feito para as figuras 5.2 e 5.3, mas agora para $N_c = 3,0$. Para computarmos as *RR* mostradas na figura 5.4(a), usamos o mesmo *ensemble* de condições iniciais, formado por uma linha horizontal de $M = 10^3$ condições iniciais uniformemente distribuídas, com $e_0 = 1,10$ e $\phi_0 \in [0, 2\pi]$. Dessa forma, novamente temos 10^3 trajetórias caóticas evoluídas até $N = 10^4$ iterações, iniciadas com a mesma energia e_0 . Como podemos ver, para $N_c = 3,0$, temos um número maior de picos de recorrência, o que indica que temos um maior número de condições iniciais que apresentam comportamento de *stickiness*. Neste caso, a fase que apresentou a maior taxa de recorrência foi $\phi_0 = \phi_0^* = 3,7384952577718811$ com $RR(\phi_0^*) = 2,44\%$. O espaço de fase apresentado da figura 5.4(b), onde usamos a condição inicial $(1,10, 3,7384952577718811)$ mostra a região com portamento de *stickiness* que procurávamos com a evolução da mesma. Temos também sucessivas ampliações da região de *stickiness*, mostrando com mais detalhes a concentração de pontos coloridos. Analisando a paleta de cores da figura 5.4(b), vemos que a órbita é inicialmente representada pelas cores mais escuras onde temos um comportamento caótico, mas logo a órbita apresenta comportamento de *stickiness*, sendo representado pelas cores mais quentes.

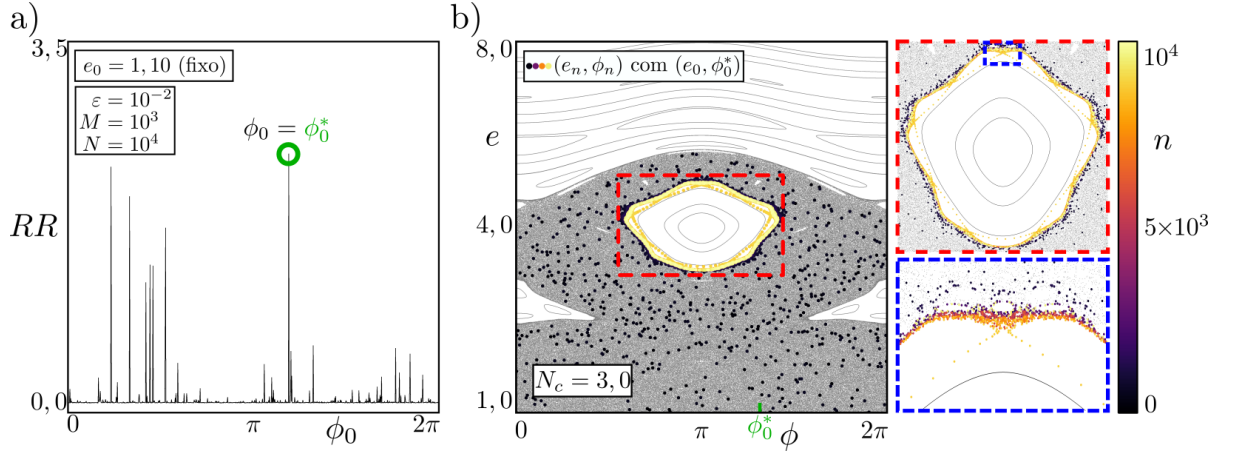


Figura 5.4: Em (a) temos a taxa de recorrência considerando $M = 10^3$ condições iniciais, variando ϕ_0 e mantendo fixo $e_0 = 1, 10$. O maior valor de RR é relativo à condição inicial ϕ_0^* destacada em verde. Em (b) temos um espaço de fase que destaca a evolução da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) encontrada em (a) e sucessivas ampliações das regiões que apresentam *stickiness*. Usamos $r = 1$, $\delta = 0, 5$ e $N_c = 3, 0$.

A figura 5.5 mostra a série temporal da energia para a condição inicial (e_0, ϕ_0^*) encontrada na figura 5.4(a). Note que usamos a mesma escala de cores da figura 5.4(b) e além disso, a energia da região de *stickiness* é mesma da região destacada na figura 5.4(b). Vemos que a órbita passa rapidamente por uma região caótica e logo entra na região com comportamento de *stickiness*. A figura 5.5(b), mostra o *plot* de recorrência referente a figura 5.5(a), onde podemos ver uma pequena região com poucas recorrências e logo uma grande região que apresenta um grande número de recorrências que consequentemente representa a região de *stickiness*.

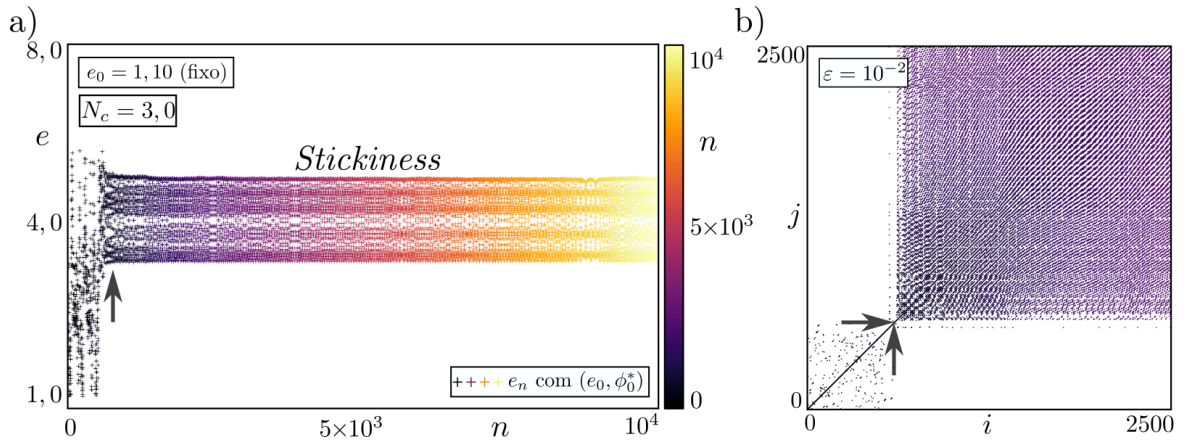


Figura 5.5: Em (a) temos a série temporal da órbita da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) , encontrada na figura 5.4 (a). Em (b) temos o *plot* de recorrência dessa mesma órbita. Usamos $r = 1, 0$, $\delta = 0, 5$ e $N_c = 3, 0$.

Nas figuras 5.6 e 5.7 temos um mesmo estudo feito anteriormente, agora usando os parâmetros $r = 1$, $\delta = 0, 5$ e $N_c = 3, 5$, o mesmo *ensemble* de condições iniciais e mesmo número de iterações. No gráfico da taxa de recorrência dado para figura 5.6(a), também

apresenta um elevado número de picos de recorrência, porém, de modo geral, são menores que os picos apresentados na figura 5.4(a). Agora, a fase que apresentou a maior taxa de recorrência foi $\phi_0 = \phi_0^* = 2,5007077522574921$ com $RR(\phi_0^*) = 1.80\%$. O espaço de fase apresentado da figura 5.6(b), onde usamos a condição inicial $(1, 10, 2,5007077522574921)$ mostra a região com portamento de *stickiness*, que agora se encontra em uma região de mais alta energia. As ampliações mostram com mais detalhes a concentração de pontos coloridos localizados na região de *stickiness*. Analisando a paleta de cores da figura 5.6(b), vemos que a órbita se inicia com comportamento caótico representado pelas cores mais escuras e posteriormente assume comportamento regular, sendo este representado pelas cores mais quentes.

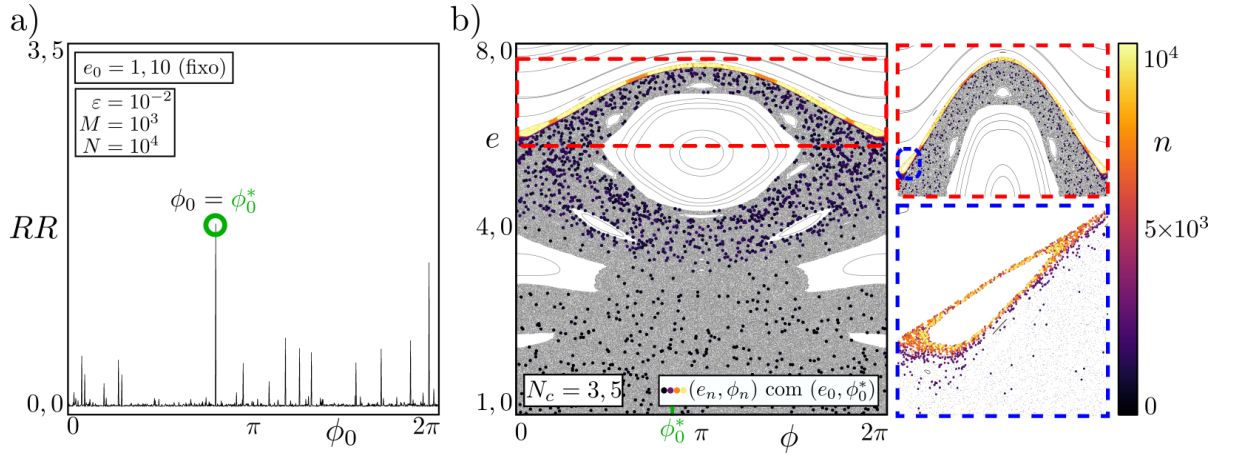


Figura 5.6: Em (a) temos a taxa de recorrência considerando $M = 10^3$ condições iniciais, variando ϕ_0 e mantendo fixo $e_0 = 1, 10$. O maior valor de RR é relativo à condição inicial ϕ_0^* destacada em verde. Em (b) temos um espaço de fase que destaca a evolução da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) encontrada em (a) e sucessivas ampliações das regiões que apresentam *stickiness*. Usamos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3, 5$.

A figura 5.7 mostra a série temporal da energia para a condição inicial (e_0, ϕ_0^*) , encontrada na figura 5.6(a). Foi usada a mesma escala de cores da figura 5.6(b) e a energia da região de *stickiness* é mesma da região destacada nesta mesma figura. Podemos observar que neste caso a órbita demora um pouco mais para entrar na região de *stickiness*, passando por uma região apresenta uma menor quantidade de *stickiness* e caos. A figura 5.5(b), mostra o plot de recorrência referente a figura 5.5(a), onde podemos ver uma pequena região com algumas recorrências antes de chegar na região que apresenta um grande número de recorrências, que consequentemente representa a região de *stickiness*.

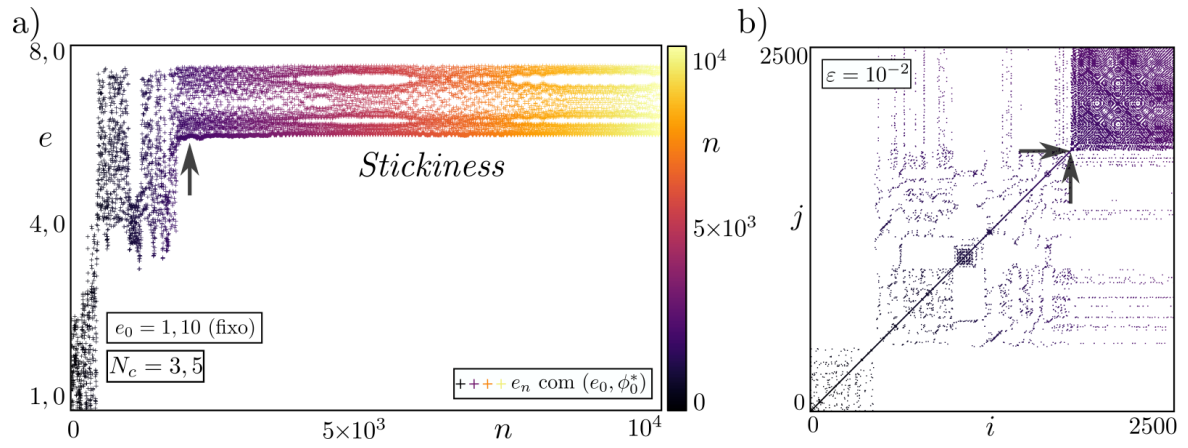


Figura 5.7: Em (a) temos a série temporal da órbita da condição inicial (e_0, ϕ_0^*) , encontrada na figura 5.4 (a). Em (b) temos o *plot* de recorrência dessa mesma órbita. Usamos $r = 1$, $\delta = 0,5$ e $N_c = 3,5$.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, revisamos o estudo do modelo do poço de potencial em sua versão tradicional, para o qual encontramos seu mapeamento de forma detalhada. Encontramos o espaço de fase para o mesmo e analisamos o efeito causado ao alterarmos os parâmetros de controle. Obtivemos os pontos fixos de primeira ordem de forma analítica e confirmamos os mesmos de forma numérica através da grandeza $d(e, \phi)$, que fornece a distância entre a condição inicial e as coordenadas encontradas após a primeira iteração. Fizemos o estudo da dispersão de primeira ordem, onde foi possível encontrar a região de colisões múltiplas. Dentro da região de colisões múltiplas, encontramos as sub-regiões que acordo com o número de vezes que elas acontecem. Construímos um histograma do número de colisões múltiplas em função do parâmetro de controle N_c , e mostramos que o número de colisões múltiplas é invariante de escala em relação ao parâmetro de controle.

Posteriormente, apresentamos uma nova proposta para a seção de Poincaré do poço de potencial dependente do tempo, para a qual encontramos o mapeamento detalhadamente. Plotamos os espaços de fase e estudamos os efeitos provocados com a alteração dos valores dos parâmetros de controle. Encontramos as equações dos pontos fixos e plotamos os mesmos através de suas equações. Esses pontos fixos também foram plotados numericamente, confirmando a eficiência dos métodos usados. Estudamos a dispersão de primeira ordem, encontrando a região de colisões simples e a região de colisões múltiplas, onde encontramos as sub-regiões de acordo com número de colisões múltiplas. Mostramos que, ao alterarmos os valores do parâmetro de controle N_c , causamos uma modificação no formato da área de colisões múltiplas, mas o valor da mesma permanece constante. Repetimos, para a nova abordagem do modelo, o estudo feito para o modelo anterior sobre o número de colisões múltiplas e encontramos um expoente de decaimento muito próximo ao encontrado para o modelo anterior quando alteramos o parâmetro de controle N_c . Estudamos as estruturas de auto-similaridade, encontradas ao plotarmos o plano e_0e_1 . Vimos que a largura das estruturas é dada pela por $l = 2\delta\sqrt{2}$ e que elas não apresentam estruturas auto-similares como as encontradas em [41] para a barreira de potencial. Estudamos algumas propriedades dinâmicas do modelo, onde pudemos comprovar que o

sistema é conservativo. Investigamos o comportamento de *stickiness* para uma trajetória através do FTLE e construímos histogramas que mostram com o tempo finito pode influenciar neste comportamento. Finalmente estudamos trajetórias com possuem stickiness através da recorrência dinâmica.

Como perspectivas, pretendemos propor um novo modelo com características híbridas, ou seja, um modelo que apresenta ao mesmo tempo características do poço de potencial e da barreira de potencial, pois terá o fundo oscilante e a parte superior também oscilante. Pretendemos fazer para esse modelo, estudos semelhantes aos que foram feitos para o poço de potencial, encontrando o mapeamento e pontos fixos, estudando a dispersão, região de colisões múltiplas, número de colisões múltiplas, estruturas de auto-similaridade e comportamento de *stickiness* para trajetórias desse sistema.

Bibliografia

- [1] R. L. Devaney, A First Course in Chaotic Dynamical Systems, London: *Chapman e Hall/CRC*, 2020.
- [2] G. Galilei, Siderus Nuncius: *O mensageiro das estrelas*, São Paulo: SciELO Brasil, 2010.
- [3] I. Newton, *Newtons principia: mathematical principles of natural philosophy*, University of California Press: Los Angeles: 1990.
- [4] H. Poincaré e R. Magini, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, *Il Nuovo Cimento (1895-1900)*, **10**, 128–130, 1899.
- [5] G. D. Birkhoff, On the periodic motions of dynamical systems, *Acta Mathematica*, **50**, 359-379, 1927.
- [6] L. A. Bunimovich, On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards, *Communications in Mathematical Physics* **65**, 295-312, 1979.
- [7] A. Kolmogorov, On preservation of conditionally periodic motions under a small change in the hamiltonian function, in *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **98**, 527-530, 1954.
- [8] S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bulletin of the American mathematical Society*, **37**, 747-817, 1967.
- [9] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the atmospheric sciences*, **20**, 130-141, 1963.
- [10] M. J. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *Journal of statistical physics*, **19**, 25-52, 1978.
- [11] J. L. Kaplan e J. A. Yorke, Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of lorenz, *Communications in Mathematical Physics*, **67**, 93-108, 1979.
- [12] B. V. Chirikov, A universal instability of many-dimensional oscillator systems, *Physics reports*, **52**, 263-379, 1979.

- [13] R. M. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, **261**, 459-467, 1976.
- [14] T. Jackson e A. Radunskaya, Applications of Dynamical Systems in Biology e Medicine, *Springer*, USA, 2015.
- [15] S. Strogatz, M. Friedman, A. J. Mallinckrodt, S. McKay, et al., Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering, *Computers in Physics*, **8**, 532-532, 1994.
- [16] N. Fiedler-Ferrara e C. C. do Prado, *Caos: uma introdução*: Edgar Blucher, 1994.
- [17] E. D. Leonel, P. V. McClintock, e J. K. L. da Silva, Fermi-ulam accelerator model under scaling analysis, *Physical Review Letters*, **93** 014101, 2004.
- [18] E. Fermi. *Physical Review*, **75**, 1169-1174, 1949.
- [19] D. G. Ladeira e J. k. L. da Silva, Time-dependent properties of a simplified Fermi-Ulam accelerator model, *Physical Review E*, **73**, 026201, 2006.
- [20] D. R. da Costa, M. R. Silva, E. D. Leonel e J. A. Méndez-Bermúdez, Statistical description of multiple collisions in the Fermi-Ulam model, *Phys. Lett. A*, **383**, 3080-3087, 2019.
- [21] S. Ulam. "On some statistical properties of dynamical systems," in Proceedings of the Fourth Berkley Symposium on Mathematics, Statistics, and Probability, *California University Press*, **3**, 315-320, 1961.
- [22] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, R. H. Cohen, Fermi acceleration revisited, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **1**, 281-305, 1980.
- [23] D. R. da Costa, C. P. Dettmann, J. A. de Oliveira, e E. D. Leonel, Dynamics of classical particles in oval or elliptic billiards with a dispersing mechanism, *Chaos*, **25**, 033109, 2015.
- [24] J. Koiller, R. Markarian, S. P. Carvalho e S. O. Kamphorst, Static and time-dependent perturbations of the classical elliptical billiard, *Journal of Statistical Physics*, **83**, 127-143, 1996.
- [25] L. G. Akinshin e A. Loskutov, Dynamical properties of some two-dimensional billiards with perturbed boundaries, *Physical Ideas of Russia*, **2**, 67-86, 1997.
- [26] A. Loskutov e A. Ryabov, Particle dynamics in timedependent stadiumlike billiards, *J. Stat. Phys.*, **108**, 995-1014, 2002.

- [27] G. A. Luna-Acosta, Hydrogenic impurities in superlattices with parabolic quantum well potentials, *Solid State Communications*, **55**, 5-8, 1985.
- [28] E. D. Leonel, C. M. Kuwana, M. Yoshida e J. A. de Oliveira, Chaotic diffusion for particles moving in a time dependent potential well *Physics Letters A*, **384**, 126737, 2020.
- [29] J. O. Hirschfelder e K. T. Tang, Quantum mechanical streamlines. IV. Collision of two spheres with square potential wells or barriers, *The Journal of Chemical Physics* **65**, 470, 1976.
- [30] R. Otto, J. Ma, A. W. Ray, J.S. Daluz, J. Li, H. Guo e R. E. Continetti, Imaging Dynamics on the $F + H_2O \rightarrow HF + OH$ Potential Energy Surfaces from Wells to Barriers, *Science*, **343**, 396-399, 2014.
- [31] B. Pal, D. Dutta, e S. Poria, Complex dynamics of a particle in an oscillating potential field, *Pramana - J. Phys.* **89**, 1-14, 2017.
- [32] D. R. da Costa, C. P. Dettmann, e E. D. Leonel, Escape of particles in a time-dependent potential well, *Phys. Rev. E*, **83**, 066211, 2011.
- [33] G. Sulyok, K. Durstberger-Rennhofer, e J. Summhammer, Photon exchange and entanglement formation during transmission through a rectangular quantum barrier, *Phys. Lett. A* **379**, 1699-1704, 2015.
- [34] F. R. N. Koch, F. Lenz, C. Petri, F. K. Diakonov, e P. Schmelcher, Dynamical trapping and chaotic scattering of the harmonically driven barrier, *Phys. Rev. E*, **78**, 056204, 2008.
- [35] G. A. Luna-Acosta, G. Orellana-Rivadeneira, A. Mendoza-Galvan e C. Jung, Chaotic classical scattering and dynamics in oscillating 1-D potential wells, *Chaos Solitons Fractals*, **12**, 349-363, 2001.
- [36] A. J. Lichtenberg, Regular and chaotic dynamics, *Springer*, **143**, 170-179, 1992.
- [37] C. Manchein, R. M. da Silva e M. W. Beims, Proliferation of stability in phase and parameter spaces of nonlinear systems, *Chaos*, **27**, 081101, 2017.
- [38] D. Sornette, Discrete scale invariance and complex dimensions, *Physics Reports* **297**, 239-270, 1998.
- [39] J. Krug, Origins of scale invariance in growth processes, *Advances in Physics*, **46**, 139-282, 1997.

- [40] D. R. Costa, M. R. Silva, J. A. Oliveira e E. D. Leonel, Scaling dynamics for a particle in a time-dependent potential well, *Physica A*, **391**, 3607-3615, 2012.
- [41] D. R. da Costa, J. A Méndez-Bermúdez e E. D. Leonel, Scaling and self-similarity for the dynamics of a particle confined to an asymmetric time-dependent potential well, *Phys. Rev. E*, **99**, 0122012, 2019.
- [42] G. Contopoulos, Orbits in highly perturbed dynamical systems. 111. Nonperiodic orbits, *Astronomical Journal* **76**, 147-156, 1971.
- [43] R. B. Shirts, e W. P. Reinhardt, Approximate constants of motion for classically chaotic vibrational dynamics: Vague tori, semiclassical quantization, and classical intramolecular energy flow, *The Journal of Chemical Physics*, **77**, 5204-5217, 1982.
- [44] C.F.F. Karney, Long-time correlations in the stochastic regime, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **8**, 360-380, 1983.
- [45] C. R. Menyuk, Effect of a transition between regular and stochastic electron motion on the evolution of an obliquely propagating Langmuir wave, *The Physics of Fluids*, **26**, 705-723, 1983.
- [46] C. R. Menyuk, Particle motion in the field of a modulated wave, *Physical Review A*, **31**, 3282-3290, 1985.
- [47] G. M. Zaslavsky, Dynamical traps, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **168**, 292-304, 2002.
- [48] J. D. Hanson, J. R. Cary, e J. D. Meiss, Algebraic decay in self-similar Markov chains, *Journal of statistical physics*, **39**, 327-345, 1985.
- [49] L. Kuznetsov, e G. M. Zaslavsky, Scaling invariance of the homoclinic tangle, *Physical Review E*, **66**, 046212, 2002.
- [50] S. Denisov, J. Klafter, M. Urbakh, DC currents in Hamiltonian systems by Lévy flights, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **170**, 131-142, 2002.
- [51] E. Ott, Chaos in dynamical systems, *Cambridge university press*, USA, 2002.
- [52] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky e J. Klafter, Strange kinetics, *Nature*, **363**, 31-37, 1993.
- [53] M. S. Santos, M. Mugnaine, J. D. Szezech Jr, A. M. Batista, I. L. Caldas e R. L. Viana. Using rotation number to detect sticky orbits in Hamiltonian systems, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **29**, 043125, 2019.

- [54] M. S. Palmero, I. L. Caldas e I. M. Sokolov, Finite-time recurrence analysis of chaotic trajectories in Hamiltonian systems, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **32**, 113144, 2022.
- [55] N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel e J. Kurths, Recurrence plots for the analysis of complex systems, *Physics Reports*, **438**, 237-329, 2007.
- [56] J. D. Szezech Jr, S. R. Lopes e R. L. Viana, Finite-time Lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable Hamiltonian systems, *Physics Letters A*, **335**, 394-401, 2005.
- [57] S. Dawson, C. Grebogi, T. Sauer e J. A. Yorke, Obstructions to shadowing when a Lyapunov exponent fluctuates about zero, *Physical review letters*, **73**, 1927-1930, 1994.
- [58] G. M. Zaslavsky, Hamiltonian chaos and fractional dynamics, *Oxford University Press*, USA, 2005.
- [59] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney e J. A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D: nonlinear phenomena*, **16**, 285-317, 1985.
- [60] A. J. Lichtenberg e M. A. Lieberman, Regular and chaotic dynamics, *Springer Science and Business Media*, **38**, 2013.
- [61] H. Goldstein, C. Poole e J. Safko, Classical Mechanics, *Addison-Wesley*, **3**, USA, 1969.
- [62] X. Leoncini e G. M. Zaslavsky, Jets, stickiness, and anomalous transport, *Physical Review E*, **65**, 046216-046234 (2002) 046216.
- [63] J. A. Mendez-Bermudez, G. A. Luna-Acosta, P. Seba e K. N. Pichugin, Understanding quantum scattering properties in terms of purely classical dynamics: Two-dimensional open chaotic billiards, *Phys. Rev. E*, **66**, 046207, 2002.
- [64] S. Félix e V. Pagneux, *Wave Motion*, **41**, 339-355, 2005.