



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**DETERMINAÇÃO DOS INVARIANTES
DINÂMICOS E ANÁLISE DA
INFLUÊNCIA DO RUÍDO BRANCO
EM SÉRIES TEMPORAIS REAIS**

Tito Dias Junior

Ilha Solteira - SP

1210001222



222



DETERMINAÇÃO DOS INVARIANTES DINÂMICOS E ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO RUÍDO BRANCO EM SÉRIES TEMPORAIS REAIS

TITO DIAS JÚNIOR

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Ilha Solteira, Março 2000

DETERMINAÇÃO DOS INVARIANTES DINÂMICOS E ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO RUÍDO BRANCO EM SÉRIES TEMPORAIS REAIS

Tito Dias Júnior

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**

Orientador: PROF. DR. EMANUEL ROCHA WOISKI
Co-orientador: PROF. MSC. HERALDO NÉLIO CAMBRAIA

Ilha Solteira, Março de 2000

BCpIS - FEIS - UNESP

Proz. 040/2000-UNESP 10101

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCNICO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	13/9/01
DATA DE SAÍDA	28/9/01
Assinatura	Te. 1222
Assinatura	13/9/00

30502004 ENGA. TÉRMICA



515.352 Dias Jr., Tito

D541 Determinação dos invariantes dinâmicos e análise da influência do ruído branco em séries temporais reais / Tito Dias Junior. -- Ilha Solteira, 2000
xvii, 83p. : il. ; 30cm

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de concentração : Ciências Térmicas, 2000

Orientador: Emanuel Rocha Woiski

Co-orientador: Heraldo Nélío Cambraia

Bibliografia: p. 73-76

1. Sistemas dinâmico
2. Entropia-Kolmogorov-Sinai
3. Atratores-Reconstrução
4. Análise de séries temporais-Processamento de dados
5. Ruído branco-Filtragem
6. Invariantes geométricos



“Determinação dos Invariantes Dinâmicos e Análise da Influência do Ruído Branco em Séries Temporais Reais”

TITO DIAS JÚNIOR

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE

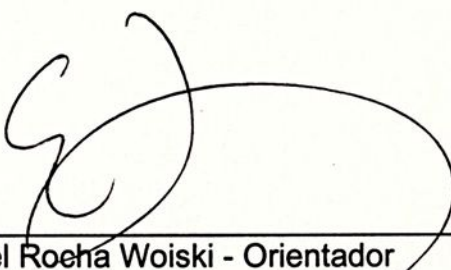
MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM CIÊNCIAS TÉRMICAS E APROVADA EM
SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA



Prof. Dr. André Luiz Seixlack - Coordenador

COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Emanuel Roeha Woiski - Orientador



Prof. Dr. Luiz Fernando Milanez



Prof. Dr. João Antonio Pereira

Ilha Solteira – SP, março de 2000

BCpIS - FEIS - UNESP



AGRADECIMENTOS

Aos meus Pais e Irmãos

À minha Esposa e ao meu filho, que está chegando...

E, em memória,

ao amigo Haji, especialista em gerar ruído e caos.



AGRADECIMENTOS

Durante a realização deste trabalho contamos com a colaboração direta e indireta de muitas pessoas. Agradecemos a todas elas e particularmente:

à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pelo suporte financeiro;

ao Prof. Dr. Emanuel Rocha Woiski, por ter me apresentado à Teoria de Sistemas Dinâmicos, pela amizade e pela orientação sempre paciente e objetiva;

ao Prof. MSc. Heraldo Nélcio Cambraia, pela amizade e sugestões pertinentes;

ao Profs. Drs. João Batista Aparecido e João Antônio Pereira pelas sugestões sempre pertinentes e por estarem sempre prontos a auxiliar quando procurados;

a todos os colegas do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, em especial ao amigo Cláudio Lindquist, pela amizade e pelos dados experimentais;

e, finalmente, a minha esposa, pela leitura atenciosa e pelos conselhos e expressões de calma quando os programas insistiam em não funcionar.



SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	xi
LISTA DE SÍMBOLOS	xii
RESUMO	xvi
ABSTRACT	xvii
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO	2
1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	3
CAPÍTULO 2 SISTEMAS DINÂMICOS	5
2.1 INTRODUÇÃO	5
2.2 ATRATORES ESTRANHOS	6
2.2.1 MAPA LOGÍSTICO	7
2.2.2 SISTEMA DE LORENZ	9
CAPÍTULO 3 CAOS DETERMINÍSTICO	10
3.1 CARACTERIZAÇÃO	10
3.2 EXPOENTES CARACTERÍSTICOS DE LYAPUNOV	10
3.2.1 MÉTODO DE WOLF	16
3.2.2 MÉTODO DE KANTZ	17
3.3 DIMENSÃO DE FRACTAL	18
3.3.1 DIMENSÕES GENERALIZADAS	20
3.3.2 ALGORITMO DE GRASSBERGER-PROCACCIA	21
3.4 ENTROPIA DE KOLMOGOROV-SINAI	23
3.4.1 INFORMAÇÃO E EXPOENTES DE LYAPUNOV	24
3.4.2 PROCESSOS REGULARES, CAÓTICOS E ESTOCÁSTICOS	26
3.4.3 ENTROPIA DE CORRELAÇÃO E O ALGORITMO DE GRASSBERGER-PROCACCIA	27
CAPÍTULO 4 RECONSTRUÇÃO DE ATRATORES	29
4.1 INTRODUÇÃO	29



4.2 PASSO DE RECONSTRUÇÃO	30
4.3 DIMENSÃO DE IMERSÃO	31
CAPÍTULO 5 REDUÇÃO DE RUÍDO	33
5.1 INTRODUÇÃO.....	33
5.2 DECOMPOSIÇÃO DE VALOR SINGULAR	33
5.2.1 DECOMPOSIÇÃO DE VALOR SINGULAR E JANELA DE IMERSÃO.....	35
5.3 MÉTODO NÃO-LINEAR DE ORDEM ZERO	36
5.4 ESTIMATIVA DO NÍVEL DE RUÍDO	37
CAPÍTULO 6 PREDIÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS.....	39
6.1 TÉCNICA GLOBAL	40
6.2 TÉCNICA LOCAL	40
CAPÍTULO 7 ANÁLISE DE SÉRIES ARTIFICIAIS.....	42
7.1 INTRODUÇÃO.....	42
7.2 SÉRIES SEM RUÍDO.....	42
7.2.1 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS DE IMERSÃO	42
7.2.2 DETERMINAÇÃO DOS INVARIANTES DINÂMICOS.....	44
7.2.3 ESTIMATIVA DO DIÂMETRO CARACTERÍSTICO E DO NÍVEL DE RUÍDO.....	47
7.2.4 PREDIÇÃO DAS SÉRIES TEMPORAIS.....	49
7.3 SÉRIES COM RUÍDO.....	53
7.4 REDUÇÃO DE RUÍDO	57
CAPÍTULO 8 ANÁLISE DE SÉRIES REAIS.....	61
8.1 INTRODUÇÃO.....	61
8.2 SÉRIE TEMPORAL PARA $Re = 100$	61
8.3 SÉRIE TEMPORAL PARA $Re = 900$	63
CAPÍTULO 9 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	70
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	73
APÊNDICE A	77
APÊNDICE B	79

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Diagrama de bifurcação para o mapa logístico.....	8
Figura 2.2	Gráfico de primeiro retorno para o mapa logístico ($\mu = 3,8$).	8
Figura 2.3	Atrator de Lorenz ($\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$)	9
Figura 3.1	Expoentes de Lyapunov para o mapa logístico.....	15
Figura 3.2	Expoentes de Lyapunov para o sistema de Lorenz ($\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$).	15
Figura 7.1	Série temporal utilizada na reconstrução do sistema de Lorenz.	43
Figura 7.2	Função de autocorrelação e detalhe do primeiro mínimo local (sistema de Lorenz).....	43
Figura 7.3	Curvas da integral de correlação para o sistema de Lorenz.....	44
Figura 7.4	Integral de correlação para o mapa logístico.	45
Figura 7.5	Maior expoente de Lyapunov para o mapa logístico calculado pelo método de Wolf.....	45
Figura 7.6	Maior expoente de Lyapunov para o mapa logístico (método de Kantz).	46
Figura 7.7	Maior expoente de Lyapunov para o sistema de Lorenz (método de Wolf).....	46
Figura 7.8	Maior expoente de Lyapunov para o sistema de Lorenz (método de Kantz).	47
Figura 7.9	Estimativa do diâmetro característico e do nível de contaminação para o mapa logístico.	48
Figura 7.10	Estimativa do diâmetro característico e do nível de contaminação para o sistema de Lorenz.....	48

Figura 7.11	Erros de predição em função do número de pontos usados para construir o preditor, para o sistema de Lorenz, com $T = 0,9s$	49
Figura 7.12	Erros de predição em função do número de pontos usados para construir o preditor, para o mapa logístico, com $T = 3$	49
Figura 7.13	Erros de predição global e local, em função do tempo de predição para o mapa logístico.....	50
Figura 7.14	Erros de predição local em função do tempo de predição, para o mapa logístico e $N = 125$	51
Figura 7.15	Erros de predição local em função do tempo de predição, para o sistema de Lorenz e $N = 250$	51
Figura 7.16	Erros de predição local de ordem zero e linear em função do tempo de predição, para o sistema de Lorenz e $N = 10000$	52
Figura 7.17	Erros de predição local, de ordem zero e linear, em função do tempo de predição, para o mapa logístico e $N = 10000$. No caso linear constata-se a concordância com as duas leis de escala para faixas de tempo de predição.	53
Figura 7.18	Características do ruído artificial utilizado para contaminar os sinais teóricos.	54
Figura 7.19	Integral de correlação para sinais provenientes do mapa Logístico com vários níveis de Relação Ruído-Sinal.	54
Figura 7.20	Derivadas de primeira e segunda ordem da integral de correlação para o mapa Logístico.	55
Figura 7.21	Integral de correlação para sinais provenientes do sistema de Lorenz com vários níveis de Relação Ruído-Sinal.	55
Figura 7.22	Derivadas de primeira e segunda ordem da integral de correlação para o sistema de Lorenz.	56

Figura 7.23	Maior expoente de Lyapunov para o mapa logístico calculado pelo algoritmo de Kantz, para vários níveis de contaminação.	56
Figura 7.24	Falha do método de decomposição de valor singular para o sistema de Lorenz.	57
Figura 7.25	Falha do método de decomposição de valor singular para o mapa logístico.	58
Figura 7.26	Redução de ruído por decomposição de valor singular.	58
Figura 7.27	Redução de ruído pelo método não-linear de ordem zero.	59
Figura 7.28	Estimativa de níveis de ruído após redução de ruído para o sistema de Lorenz.	59
Figura 7.29	Estimativa de níveis de ruído após redução de ruído para o sistema de Lorenz.	60
Figura 7.30	Estimativa de níveis de ruído após redução de ruído para o sistema de Lorenz.	60
Figura 8.1	Dimensão de Correlação para $Re = 100$	62
Figura 8.2	Entropia de Correlação para $Re = 100$	62
Figura 8.3	Densidade de potência espectral do sinal experimental para $Re = 900$	63
Figura 8.4	Dimensão de Correlação $Re = 900$	64
Figura 8.5	Entropia de Correlação em função da dimensão de imersão para $Re = 900$	64
Figura 8.6	Determinação do maior expoente de Lyapunov pelo método de Wolf et al (1985).	65
Figura 8.7	Determinação do maior expoente de Lyapunov pelo método de Kantz (1994).	65
Figura 8.8	Efeito da redução de ruído no atrator reconstruído para $Re = 900$	66

Figura 8.9	Curva da integral de Correlação para $Re = 900$ antes e após a redução de ruído.....	66
Figura 8.10	Erros de predição local de ordem zero e linear em função do tempo de predição, para $Re = 900$ e $N = 250$	67
Figura 8.11	Erros de predição local de ordem zero e linear em função do tempo de predição, para $Re = 900$ e $N = 2000$	67
Figura 8.12	Erros de predição local de ordem zero e linear em função do tempo de predição, para $Re = 900$ e $N = 10000$	68
Figura 8.13	Erros de predição em função do número de pontos usados para construir o preditor, para $Re = 900$, com $T/\tau = 7$	68

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1	Comparação entre os níveis de ruído estimados e reais para o mapa de Henon (Sivakumar et al, 1999).	37
Tabela 5.2	Comparação entre os níveis de ruído estimados e reais para o mapa logístico.	38
Tabela 5.3	Comparação entre os níveis de ruído estimados e reais para o sistema de Lorenz.	38



LISTA DE SÍMBOLOS

A	conjunto de pontos num espaço Euclidiano
b	parâmetro de controle
B	região compacta
C_1	constante de proporcionalidade
$C(\epsilon)$	integral de correlação
$C_q(\epsilon)$	integral de correlação generalizada de ordem q
d	dimensão de correlação
D_0	dimensão de Hausdorff ou fractal
D_1	dimensão de informação
D_2	dimensão de correlação
D_q	dimensão generalizada de ordem q
DSCI	dependência sensível às condições iniciais
E	erro associado à predição
e	número de Euler
EFS	redução de ruído pelo método não-linear de ordem zero
f	função contínua de classe C^l
$\tilde{f}$	mapa contínuo
F	função de recorrência
g	número de hiper-cubos
h	passo de integração
$(k+l+1)$	dimensão de imersão
$I_g^{(1)}(\epsilon)$	informação de Shannon associada a uma sequência de g hiper-cubos de lado ϵ
$I^{(q)}$	informação generalizada de ordem q
J	operador Jacobiano
k	número de vizinhos
k_1	entropia de Kolmogorov-Sinai
k_2	entropia de correlação
L	comprimento de um segmento
l	índice de contagem

L	taxa de expansão exponencial
M	número de vezes em que se escolhe um vizinho
m	dimensão do espaço de fase; dimensão de imersão
MF	matriz de Floquet
n	posto de uma matriz
N	número de pontos ou iterações
$N(\epsilon)$	número mínimo de hiper-cubos de lado ϵ
N_p	pontos para validação de predição
N_T	número total de pontos ou iterações
p_i	distribuição de probabilidades
p	passo de reconstrução
q	ordem da dimensão e informação generalizadas
r	parâmetro de controle; raio na integral de correlação
r_n	raio de influência do ruído
r_p	grau do polinômio
$\mathfrak{R}$	espaço Euclidiano
Re	número de Reynolds
RRS	relação ruído-sinal
s	componente arbitrária do vetor x
S	matriz diagonal de valores singulares
$S(\epsilon, d, \tau)$	função expansão média
SVD	decomposição de valor singular
t	tempo (s)
T	tempo de predição
u	conjunto de pontos de uma vizinhança
u_i	i -ésimo vetor-coluna de U
U	matriz ortogonal
v	volume
V	matriz coluna-ortogonal
w	vetor m -dimensional
X	coordenada cartesiana
x	vetor m -dimensional
x_{pred}	ponto predito

$X_{N \times m}$	matriz trajetória
$\bar{X}$	parte determinística da matriz de trajetória
Y	coordenada cartesiana
y	vetor unidimensional
Z	coordenada cartesiana
z	vetor unidimensional
∞	infinito

SÍMBOLOS GREGOS

α	atrator estranho
Δ	distância
δ	elemento infinitesimal
Δt	tempo de amostragem
ε	diâmetro de uma hiper-esfera ou vizinhança
ε_0	espaçamento típico entre os pontos de um atrator; nível de contaminação
$\varepsilon_{\max}$	diâmetro característico de um atrator
$\mathfrak{I}$	malha de recobrimento
φ	fluxo de um sistema
Φ	função de autocorrelação
γ	ordem do preditor
Λ	autovalor da matriz de Floquet
λ	expoente de Lyapunov
μ	parâmetro de controle
ω	frequência (Hz)
π_i	projeção sobre a i -ésima coordenada
ζ	argumento da função degrau de Heavside
Π	produtório
$\tilde{\xi}$	vetor de estado
σ_x^2	desvio médio quadrático
σ^2	erro médio quadrático

σ	parâmetro de controle
Σ	somatório
σ_i	valor singular
τ'	intervalo de tempo para o primeiro mínimo local da função de informação mútua
θ	ângulo de abertura
τ	intervalo de tempo
Ξ	matriz de covariância ou de correlação
$\theta(\zeta)$	função degrau de Heavside

RESUMO

A análise dinâmica de sistemas físicos é um importante tema interdisciplinar cujo objetivo consiste, basicamente, na extração de informações qualitativas e quantitativas de processos físicos, através da observação de uma ou mais séries temporais. Uma abordagem alternativa para a análise dinâmica de sistemas físicos dissipativos através da observação de séries temporais emprega a teoria de sistemas dinâmicos. Genericamente, trata-se da determinação do comportamento assintótico de sistemas dissipativos e não-lineares, cujas órbitas evoluem sobre objetos chamados atratores dentro do espaço de fase, este comportamento é determinado através dos invariantes dinâmicos do atrator: *dimensão*, *entropia* e *expoentes de Lyapunov*. Existe na literatura uma série de algoritmos disponíveis para o cálculo destes invariantes a partir da observação de uma única série temporal de um sistema. Em aplicações práticas, o cálculo dos invariantes torna-se complicado, uma vez que séries temporais reais estão invariavelmente contaminadas por ruído. Neste trabalho, realizaram-se a análise da influência do ruído branco na determinação dos invariantes dinâmicos, e o desenvolvimento de procedimentos simples e eficientes, inclusive com uma nova proposta de estimativa de nível de ruído, que possibilitaram a caracterização dinâmica de séries temporais reais. Inicialmente, esta análise foi aplicada a dois sistemas dinâmicos bem conhecidos: o Mapa Logístico e o Sistema de Lorenz, ambos contaminados artificialmente por ruído. Os resultados estão em concordância com a Literatura. Em seguida, analisaram-se dados obtidos, experimentalmente, na esteira do escoamento sobre um cilindro de base retangular a fim de determinar os invariantes dinâmicos e tentar prever o comportamento do atrator reconstruído. Além disso, realizaram-se uma análise crítica e um detalhamento adequado nos procedimentos de predição não-linear de séries caóticas, mostrando a inviabilidade da utilização deste método para a determinação dos invariantes dinâmicos de atratores reconstruídos a partir de séries temporais reais, diferentemente do que é sugerido na literatura.

ABSTRACT

The dynamical analysis of physical systems represents an important inter-disciplinary subject consisting on extracting qualitative and quantitative information of physical process, by means of observation of one or more time series. An alternative approach to the dynamical analysis of dissipative systems employs the theory of dynamical systems. Generically, this is the determination of asymptotic behavior of nonlinear and dissipative systems, which trajectories evolve on objects called attractors into the phase space. This behavior is determined by the evaluation of the dynamical invariants of the attractor: *dimension*, *entropy* and *Lyapunov exponents*. There are on the literature several algorithms to calculate the invariants by using only a time series of a system. In practical applications, however, the calculation of the invariants becomes much more involved, since real-life time series are invariably contaminated by noise. In this work, the influence of white noise on the determination of the dynamical invariants is analyzed and efficient and simple procedures are developed, including a new proposal to estimate the noise level. This has been applied to two well-studied dynamical systems: the Logistic Map and the Lorenz System, both artificially noise contaminated. The results compared well with Literature. Afterwards, data gathered from the wake of the flow past a cylinder has been analyzed in order to evaluate the dynamical invariants and predict the behavior of the reconstructed attractor. A critical analysis with a detailed procedure of nonlinear prediction of chaotic series has been presented. Also the unfeasibility of using this method to the determination of the dynamical invariants of reconstructed attractors from real-life time series has been shown, differently of suggested by Literature.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A análise dinâmica de sistemas físicos é um importante tema interdisciplinar cujo objetivo consiste, basicamente, na extração de informações qualitativas e quantitativas de processos físicos, através da observação de uma ou mais séries temporais.

A abordagem mais comum no tratamento dessa classe de problemas consiste na aplicação de modelos matemáticos e métodos computacionais baseados na teoria de sistemas lineares, onde o conceito de "modos" ajusta-se perfeitamente à principal ferramenta empregada neste tipo de análise – a análise espectral ou de Fourier.

Uma abordagem alternativa para a análise dinâmica de sistemas físicos dissipativos através da observação de séries temporais emprega a teoria de sistemas dinâmicos (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994). Genericamente, trata-se da determinação do comportamento assintótico de sistemas dissipativos e não-lineares, cujas órbitas evoluem sobre objetos chamados atratores dentro do espaço de fase. Geometricamente, atratores são objetos para onde são localmente contraídas todas as trajetórias de um sistema e que têm dimensão menor que a do espaço de fase.

O comportamento assintótico de sistemas dinâmicos dissipativos é determinado através dos invariantes dinâmicos do atrator: *dimensão*, *entropia* e *expoentes de Lyapunov*. A dimensão está associada ao número de graus de liberdade do sistema, a entropia à taxa temporal de produção de informação e os expoentes de Lyapunov à sensibilidade às condições iniciais.

Existe na literatura uma série de algoritmos disponíveis para o cálculo destes invariantes a partir da observação de uma única série temporal de um sistema. Isto é possível graças às contribuições de Takens (1981), e Packard et al. (1980). Takens estabelece, através de um importante teorema, que, para uma quantidade suficientemente grande de pontos *livres de ruído*, é possível produzir um mergulho (*embedding*) do atrator do sistema em um espaço Euclidiano de dimensão superior, tal que neste mergulho serão preservados os invariantes do sistema original. Este teorema representa a base para todos os procedimentos de reconstrução de atratores.

Em aplicações práticas, o cálculo dos invariantes torna-se complicado, uma vez que séries temporais reais estão frequentemente contaminadas por ruído. No desenvolvimento dos algoritmos utilizados neste cálculo, os autores discutiram a influência do ruído artificial nos

resultados, entretanto a identificação do *nível de contaminação*, parâmetro de fundamental importância, não foi tratada, limitando a aplicação a séries temporais artificiais ou reais com níveis de ruído estatisticamente insignificantes.

Desenvolveram-se, então, métodos de redução de ruído (Kostelich e Schreiber, 1993) para possibilitar a análise de séries experimentais. Entretanto, observou-se que a eficiência de vários destes métodos depende também do nível de contaminação. Fez-se, pois, necessário o desenvolvimento de métodos de identificação deste parâmetro.

Shoulten et al (1994) propuseram um método que utiliza uma renormalização da integral de correlação e identifica o nível de contaminação através de um ajuste não-linear por mínimos quadrados. Este método produz valores significativamente subestimados do nível real de ruído, que foi, também, confirmado por Sivakumar et al (1999). No presente trabalho propusemos uma modificação no método de Shoulten que produz resultados ligeiramente super ou subestimados, levando a estimativas mais confiáveis do nível de contaminação.

Entretanto, argumenta-se que o simples conhecimento dos invariantes dinâmicos é insuficiente para a caracterização *quantitativa* dos sistemas dinâmicos e a predição do comportamento destes sistemas a partir de séries temporais apresenta-se assim como uma abordagem mais interessante e ambiciosa. Existe uma série de trabalhos disponíveis na literatura que se propõem a tratar da questão da predição utilizando-se séries temporais artificiais. Em Casdagli (1989) e em Abarbanel et al. (1990) estão citados os mais importantes. Na maioria destes artigos, contudo, não são elucidados os aspectos práticos relacionados aos procedimentos utilizados, bem como não são detalhados devidamente os resultados apresentados. Neste trabalho, em contraste com a literatura, trata-se esta questão, apresentando-se detalhadamente os procedimentos utilizados e os resultados obtidos.

1.1 OBJETIVOS DO TRABALHO

Séries temporais caóticas obtidas em laboratório estão invariavelmente contaminadas com ruído inerente aos processos de medição. Dependendo do nível de contaminação, o cálculo dos invariantes dinâmicos torna-se inviável, uma vez que o comportamento determinístico e assintótico do sistema é mascarado pela presença do ruído, de origem estritamente aleatória.

Este trabalho tem como objetivos principais, a análise da influência do ruído branco na determinação dos invariantes dinâmicos e o desenvolvimento de procedimentos simples e eficientes que possibilitem a caracterização dinâmica de séries temporais reais.



Além disso, objetivam-se a análise crítica e o detalhamento adequado nos procedimentos de predição não-linear de séries caóticas, buscando esclarecer alguns pontos obscuros na literatura.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

A dissertação apresenta-se estruturada em nove capítulos e dois apêndices, organizados e subdivididos da forma descrita a seguir.

Nos capítulos 2 e 3, apresentam-se os conceitos fundamentais da *Teoria de Sistemas Dinâmicos*. No capítulo 2, apresentam-se a definição de atratores estranhos, o mapa logístico e o sistema de Lorenz, sistemas utilizados para a análise de séries artificiais. No capítulo 3, estudam-se os invariantes dinâmicos e os algoritmos mais utilizados para o seu cálculo.

No capítulo 4, define-se a reconstrução de atratores e estabelecem-se critérios para escolha dos parâmetros de reconstrução.

No capítulo 5, estabelece-se o tipo de ruído estudado neste trabalho e analisam-se alguns métodos de redução de ruído. Além disso, propõe-se uma nova metodologia, mais simples e confiável, para a estimativa do nível de ruído.

No capítulo 6, tratam-se de métodos de predição não-linear e da lei de escala associada ao erro de predição produzido por estes métodos.

No capítulo 7, procedeu-se à implementação dos algoritmos descritos nos capítulos anteriores. Para validação, aplicaram-se estes algoritmos a séries oriundas do mapa logístico e do sistema de Lorenz. Os resultados foram comparados com aqueles apresentados na literatura. Simulando-se a situação em que as equações governantes da dinâmica não fossem conhecidas, realizaram-se estudos para determinar o passo de reconstrução e a dimensão de imersão, para proceder-se à reconstrução do espaço de fase a partir das séries "medidas" numericamente. Em seguida, calcularam-se a dimensão de correlação, o maior expoente de Lyapunov, a entropia de correlação e realizaram-se predições locais e global visando detalhamento e comparação dos resultados com a literatura.

Objetivando a aplicação desta análise em séries reais, ruído branco, sinal que possui densidade de potência espectral uniforme, foi produzido numericamente e adicionado, em vários níveis de contaminação, às séries obtidas numericamente. Com estas séries contaminadas procedeu-se ao estudo do efeito do ruído sobre o cálculo dos invariantes e da eficiência de dois métodos de redução de ruído e do método de estimativa de nível de ruído.

No capítulo 8, fez-se uma análise de séries experimentais obtidas em laboratório. As séries foram medidas na esteira do escoamento sobre um cilindro de base retangular. Este tipo de escoamento é classificado como sistema aberto, e a aplicação da teoria de sistemas dinâmicos a dados experimentais provenientes deste tipo de sistemas é escassa na literatura. O parâmetro de controle considerado foi o número de Reynolds (Re) e para as medidas utilizadas neste trabalho o valor deste parâmetro foi 100 e 900.

As conclusões e recomendações foram relacionadas no capítulo 9.

No apêndice A, encontram-se detalhes da metodologia e do aparato experimental para a obtenção das séries temporais reais; e, no apêndice B, apresenta-se o método de solução, com regularização, do problema mínimos quadrados utilizado na predição não-linear de séries temporais.



Capítulo 2

SISTEMAS DINÂMICOS

2.1 INTRODUÇÃO

Considera-se o seguinte sistema dinâmico, composto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \dot{\vec{\xi}} = f(\vec{\xi}, t) \quad (2.1)$$

se a função f , linear ou não-linear, não depende explicitamente de t , então o sistema é dito autônomo. Uma equação diferencial ordinária não-autônoma e de ordem maior que um pode sempre ser reduzida a um sistema de equações diferenciais autônomo, ao custo da introdução de mais variáveis no sistema. O número de variáveis necessárias para descrever este sistema de equações define a dimensão do *espaço de fase*, e a trajetória $\varphi(\vec{\xi}, t)$, formada por todos os estados do sistema, no espaço de fase, é denominada *fluxo*.

No estudo de estabilidade de sistemas lineares e quase lineares *dissipativos*, onde ocorre contração de um elemento de volume, ou fisicamente, perda de energia, a noção clássica de atrator é a de um conjunto para o qual as trajetórias se contraem depois de um tempo suficientemente longo. Consideremos, a seguir, uma definição um pouco mais precisa.

Definição

Uma região compacta B é um atrator de um fluxo $\varphi(\vec{\xi}, t)$ se as hipóteses a seguir são satisfeitas,

- (i) B é invariante segundo φ ;*
- (ii) B tem uma vizinhança contraente;*
- (iii) o fluxo é recorrente, isto é, trajetórias começando em qualquer subconjunto aberto de B voltam a esse subconjunto para valores de t suficientemente longos;*
- (iv) o fluxo não pode ser decomposto, isto é, B não pode ser dividida em duas partes invariantes não triviais.*

2.2 ATRADORES ESTRANHOS

Além dos atratores citados, que apresentam dimensão inteira (zero e um, respectivamente), existem outros que apresentam dimensão fracionária, denominados *atratores estranhos*.

Segundo Ruelle e Takens (1971), um atrator é chamado estranho quando as linhas de fluxo dependem sensitivamente das condições iniciais. Num atrator estranho os pontos inicialmente arbitrariamente próximos estarão exponencialmente separados após um intervalo de tempo suficientemente longo. Por outro lado, num sistema dinâmico dissipativo as soluções geram elementos de volume que se contraem de maneira que a dinâmica tende a uma região limitada no espaço de fases.

A única maneira pela qual soluções únicas podem se contrair numa direção e se expandir em outra, permanecendo numa região finita, é por um processo de dobras na direção de contração. E, uma vez que as trajetórias não se interceptam no espaço de fase, isto exige pelo menos um espaço de fase tridimensional.

A dependência sensível às condições iniciais (DSCI) tem consequências práticas. Uma vez que desvios infinitesimais nas condições iniciais estão sempre presentes, seja devido a imprecisões inerentes ou pela existência de ruído, a posição de uma trajetória dentro de um atrator estranho não é previsível de maneira trivial, podendo apresentar oscilações irregulares. Deve-se ressaltar que o comportamento caótico observado resulta da própria dinâmica determinística do sistema, não sendo produzido por perturbações de origem estocástica.

Atratores estranhos encontrados em sistemas dinâmicos contínuos apresentam estrutura *tipo-Cantor, auto-similaridade e dimensão fractal*.

Um exemplo de conjunto tipo-Cantor pode ser obtido da seguinte maneira: toma-se um segmento de reta de comprimento unitário. Divide-se esse segmento em três partes, removendo-se a parte interna. Cada um dos segmentos que restam sofre o mesmo tipo de divisão. Repetindo-se o processo infinitas vezes, a estrutura converge para o chamado conjunto triádico de Cantor.

Pode-se provar que este conjunto tem uma dimensão não inteira, ou seja, fracionária, também chamada dimensão fractal. Apesar de parecer constituir um conjunto de pontos, existe uma estrutura subjacente, que está entre a reta (dimensão um) e o ponto (dimensão zero), de dimensão fractal 0,6309.



O conjunto triádico de Cantor apresenta, também, auto-similaridade, cada linha é similar ao estágio anterior de construção. Padrões de auto-similaridade aparecem freqüentemente no contexto do caos.

A seguir são apresentados o sistema de Lorenz e o mapa logístico, sistema dinâmico contínuo e mapa¹, respectivamente, que apresentam atratores estranhos. Os valores dos parâmetros de controle correspondentes, foram particularmente escolhidos para facilitar a comparação dos resultados com a literatura. Cumpre notar que todas as figuras foram obtidas resolvendo-se o sistema e iterando-se o mapa com os parâmetros indicados.

2.2.1 Mapa Logístico

O mapa logístico (May, 1976), é um modelo para a dinâmica de populações biológicas, e é dado pela seguinte relação de recorrência,

$$y_{i+1} = \mu y_i (1 - y_i) = F_\mu(y_i) \quad (2.1)$$

Neste modelo, a população na próxima geração (y_{i+1}) é dada pelo produto entre a população atual (y_i) e a taxa de reprodução, que depende da população atual. Este modelo, pertencente à classe dos mapas unimodais, simula o crescimento populacional restrito, por exemplo, à oferta de alimento, pois a medida que a população aumenta muito a taxa de variação diminui, limitando o crescimento populacional.

Este mapa possui um comportamento bastante rico e pode-se observar a complexidade do seu diagrama de bifurcações, que são mudanças qualitativas do comportamento da solução, variando-se o parâmetro de controle μ , iterando-se o mapa várias vezes e plotando-se os pontos de equilíbrio obtidos (Fig. 2.1).

Para $\mu \leq 3$, qualquer população inicial evolui em direção a um ponto de equilíbrio estável, que se encontra na interseção da bissetriz do gráfico de primeiro retorno (Fig. 2.2) e do mapa logístico.

¹ Denomina-se mapa um sistema dinâmico que evolui com o tempo de forma *discreta* e pode ser obtido, por exemplo, pelas interseções entre uma hiper-superfície $n-1$ -dimensional e um fluxo n -dimensional de classe C^1 , transversal a ela. Esta hiper-superfície é denominada seção de Poincaré.

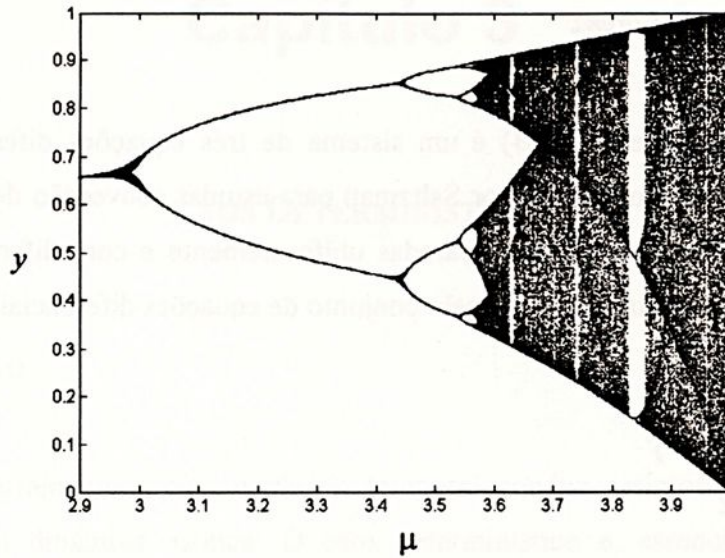


Figura 2.1 Diagrama de bifurcação para o mapa logístico.

Em $\mu = 3$, onde a derivada de $F_\mu(y)$ no ponto de equilíbrio é -1 , ocorre uma bifurcação de duplicação de período, resultando num ciclo limite de período 2. À medida que μ se torna maior, ocorrem novas duplicações de período, resultando numa cascata de bifurcações. Para $\mu > \mu_c = 3,5699\ldots$ (Feigenbaum, 1978), sucedem-se regiões caóticas e periódicas, janelas de periodicidade, podendo-se constatar a existência de atratores com período ímpar. O mapa logístico é limitado superiormente por $\mu_{\max} = 4$ (Devaney, 1992). Neste trabalho, a série oriunda desse mapa foi obtida para $\mu = 3,8$, resultando no atrator mostrado na Fig. 2.2.

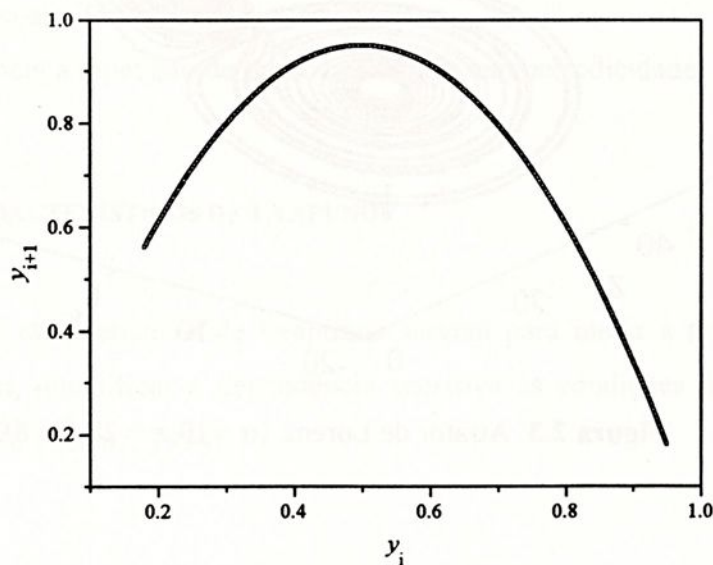


Figura 2.2 Gráfico de primeiro retorno para o mapa logístico ($\mu = 3,8$).

2.2.2 Sistema de Lorenz

O sistema de Lorenz (1963) é um sistema de três equações diferenciais derivado da simplificação de um sistema obtido por Saltzman para estudar convecção de amplitude finita em uma camada de fluido entre placas separadas uniformemente e com diferença de temperatura constante. O sistema resultante é dado pelo conjunto de equações diferenciais a seguir:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ\end{aligned}\tag{2.2}$$

Para obter as soluções numéricas do sistema de Lorenz, utilizaram-se os seguintes valores, presentes na literatura, para os parâmetros do sistema $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$. Além disso, a integração numérica foi efetuada utilizando-se algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem (Press et al., 1996), com passo de integração $h = 1 \times 10^{-4}$, e tempo de amostragem $\Delta t = 3 \times 10^{-3}$ (Fig. 2.3).

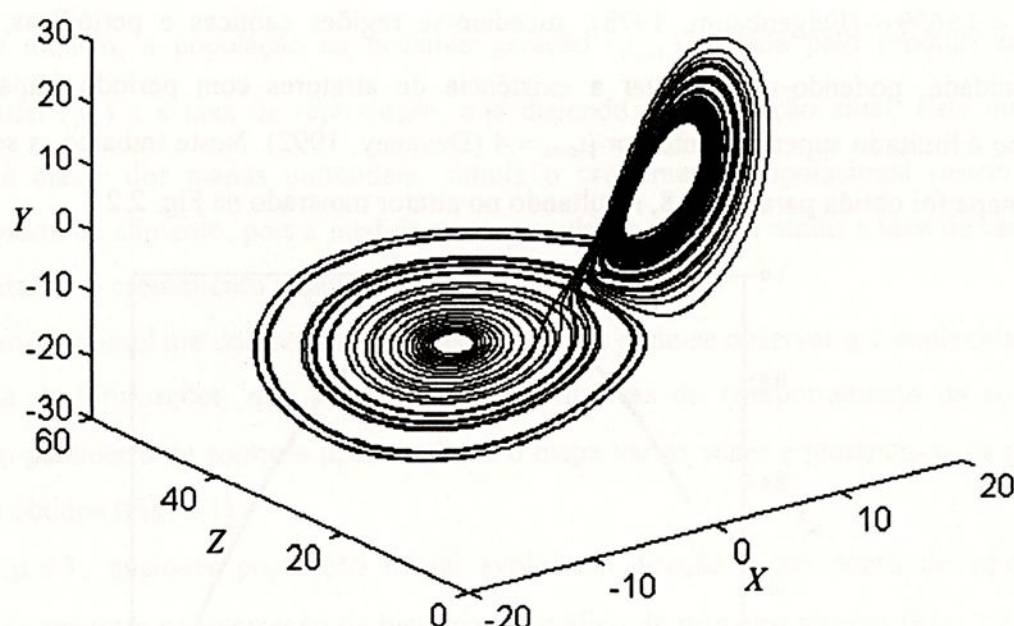


Figura 2.3 Atrator de Lorenz ($\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$).

Capítulo 3

CAOS DETERMINÍSTICO

3.1 CARACTERIZAÇÃO

Sistemas determinísticos cuja evolução temporal conduz assintoticamente a atratores estranhos apresentam dinâmica caótica. O caos determinístico é, essencialmente, devido à dependência sensível às condições iniciais. Esta dependência resulta das não-linearidades presentes no sistema, que amplificam exponencialmente diferenças infinitesimais nas condições iniciais.

Existem algumas características qualitativas do comportamento dos sistemas caóticos determinísticos (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994):

- (i) imprevisibilidade, o conhecimento do estado do sistema durante um tempo arbitrariamente longo não permite dizer, de maneira imediata, sua evolução posterior, entretanto, as oscilações não são completamente arbitrárias;
- (ii) espectro contínuo de frequências, caracterizando um comportamento aperiódico;
- (iii) invariância de escala, significando uma certa estrutura hierárquica com características de auto-similaridade;
- (iv) tendência à repetição de padrões, embora sem periodicidade.

3.2 EXPOENTES CARACTERÍSTICOS DE LYAPUNOV

Os expoentes característicos de Lyapunov servem para medir a taxa de divergência de trajetórias e portanto, quantificar a dependência sensível às condições iniciais (Brown et al. 1991, Wolf et al., 1985 e Kantz, 1994).



Definição

Considera-se um sistema dinâmico contínuo de m equações diferenciais ordinárias. Seja um pequeno hiper-volume esférico, de raio $\varepsilon(x_0)$, de teste de estados iniciais vizinhos w_0 em torno do ponto inicial x_0 , de uma linha de fluxo,

$$|w_0 - x_0| \leq \varepsilon(x_0) \quad (3.1)$$

Com a evolução temporal do sistema, a hiper-esfera deforma-se em um hiper-elipsóide com eixos principais $\varepsilon_l(x_t)$, $l = 1, 2, \dots, m$. Os expoentes de Lyapunov medem o crescimento exponencial dos eixos principais $\varepsilon_l(x_t)$ e são definidos por,

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(x_t)}{\varepsilon(x_0)}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.2)$$

Da Eq. (3.2), pode-se concluir que,

$$\varepsilon_i(x_t) \sim \varepsilon(x_0) e^{\lambda_i t} \quad (3.3)$$

(i) a existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade orbital nas direções associadas;

(ii) para uma solução caótica, a Dependência Sensitiva às Condições Iniciais (DSCI) implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo;

(iii) para uma solução periódica ou quasiperiódica pode-se esperar que deslocamentos na direção perpendicular ao movimento diminuam com o tempo, enquanto que ao longo da trajetória eles não sejam alterados, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial, isto implica em expoentes negativos nas direções perpendiculares ao deslocamento e em expoente nulo ao longo da trajetória.

Num instante t , pode-se escrever o elemento de hiper-volume no espaço de fase como,

$$\delta v(t) = \prod_{i=1}^m \varepsilon_i(x_t) \quad (3.4)$$

Substituindo a Eq. (3.3) em (3.4), tem-se

$$\delta v(t) = \delta v(0) \exp\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i t\right) \quad (3.5)$$

Existem duas situações para as quais o hiper-volume no espaço de fase não se expande:

(i) quando $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$, situação em que $\delta v(t) = \delta v(0)$, e o sistema é conservativo;

(ii) quando $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$, situação em que $\delta v(t) < \delta v(0)$, e o sistema é dissipativo.

Pode-se identificar um atrator pelo sinal dos expoentes de Lyapunov. Por exemplo, consideram-se os sinais dos três expoentes de Lyapunov associados aos atratores possíveis em um espaço de fase tridimensional. Tem-se,

(i) ponto fixo: as trajetórias convergem para um único ponto, portanto todos os expoentes são negativos $(-, -, -)$;

(ii) ciclo limite: as trajetórias convergem, exceto na direção de deslocamento, que corresponde ao expoente nulo $(0, -, -)$;

(iii) toro T^2 : há duas direções de deslocamento $(0, 0, -)$;

(iv) atrator estranho: um dos expoentes deve ser positivo, uma vez que existe DSCI, ao longo da trajetória associa-se um expoente nulo, e, sendo o sistema dissipativo, a desigualdade $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$ deve ser válida, portanto o último expoente deve ser negativo $(+, 0, -)$.

Com o estudo anterior, identificaram-se duas condições para a ocorrência de atratores estranhos em sistemas contínuos:

(i) existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo;

(ii) $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$, garantia de que o sistema seja dissipativo;

Uma outra condição é:

(iii) dimensão do espaço de fase $m \geq 3$.

Para esta última afirmação, supõe-se inicialmente que seja possível a ocorrência de atratores estranhos em sistemas bidimensionais. Um dos expoentes de Lyapunov é necessariamente positivo, uma vez que deve existir DSCI. O expoente correspondente à direção de deslocamento do fluxo deve ser nulo. Então, a soma dos expoentes de Lyapunov seria positiva, que não satisfaz a condição de que o sistema seja dissipativo. Portanto, é necessário que exista uma outra dimensão, para a qual o expoente de Lyapunov associado seja negativo, de modo que satisfaça $\sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$. Logo, deve-se ter pelo menos um espaço de fase tridimensional

para a ocorrência de atratores estranhos. Esta condição não se impõe sobre mapas, entretanto, o sistema contínuo do qual o mapa é derivado deve satisfazê-la.

A definição dos expoentes de Lyapunov para mapas é análoga. Seja o mapa unidimensional,

$$y_{i+1} = F(y_i) \quad (3.6)$$

Sejam dois pontos iniciais y_1 e z_1 , e a distância inicial entre eles,

$$\delta = z_1 - y_1 \quad (3.7)$$

Admite-se que a distância após uma iteração seja

$$\delta' = z_2 - y_2, \quad (3.8)$$

tal que

$$\delta' = e^L \delta \quad (3.9)$$

Então, L mede a expansão exponencial da distância inicial, como resultado de um única iteração.

Pode-se escrever a Eq. (3.8), utilizando-se a Eq. (3.7), como,

$$\delta' = F(y_1 + \delta) - F(y_1) \quad (3.10)$$

E usando as Eqs. (3.9) e (3.10), tem-se

$$|F(y_1 + \delta) - F(y_1)| = |\delta| e^L \quad (3.11)$$

Iterando-se o mapa N vezes, tem-se $|F^N(y_1 + \delta) - F^N(y_1)| = |\delta| e^{NL}$ que pode ser escrita como,

$$L = \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(y_1 + \delta) - F^N(y_1)}{\delta} \right| \quad (3.12)$$

Para eliminar a dependência de L com N e δ , considera-se uma distância inicial infinitesimal e um número infinito de iterações,

$$\lambda(y_1) \equiv L(y_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(y_1 + \delta) - F^N(y_1)}{\delta} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{dF^N(y_1)}{dy_1} \right| \quad (3.13)$$

que é, por definição, o expoente característico de Lyapunov. Pela regra da cadeia, onde $y_i = F^i(y_1)$,

$$\frac{dF^N(y_1)}{dy_1} = \frac{dF(y_N)}{dy_1} \frac{dF(y_{N-1})}{dy_1} \dots \frac{dF(y_1)}{dy_1} \quad (3.14)$$

Substituindo (3.14) em (3.13) tem-se,

$$\lambda(y_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \prod_{i=1}^N \frac{dF(y_i)}{dy_1} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln |F'(y_i)| \quad (3.15)$$

A generalização para m dimensões é imediata. Seja o mapa $x_{i+1} = F(x_i)$, com $x, F \in \mathbb{R}^m$, define-se o espectro de expoentes de Lyapunov como,

$$\lambda_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\Lambda_j^N|, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.16)$$

onde $|\Lambda_j^N|$ são os módulos dos autovalores da matriz de Floquet MF definida por

$$MF = \prod_{i=1}^N J(x_i) \quad (3.17)$$

onde $J(x_i)$ é a matriz jacobiana da função $F(x)$ calculada em cada iterada. E, uma vez que os autovalores dessa matriz são invariantes a mudanças de coordenadas no espaço de fase, os expoentes de Lyapunov também o são.

Na Fig. 3.1, apresentam-se os expoentes de Lyapunov calculados, em função do parâmetro de controle μ , utilizando-se o procedimento anterior, para o mapa logístico. Observa-se que o expoente de Lyapunov é nulo nos pontos de bifurcação, é negativo nas regiões periódicas, inclusive nas janelas de periodicidade, e é positivo nas regiões caóticas, em particular, para $\mu = 3,8$, $\lambda = 0,43$.

Na Fig. 3.2, apresentam-se os três expoentes de Lyapunov calculados para o sistema de Lorenz, com os parâmetros já referidos. Utilizou-se um método sugerido por Wolf et al (1985) para o cálculo a partir das equações diferenciais conhecidas. Este método utiliza como trajetória fiducial, ou de referência, a solução das equações governantes. As trajetórias dos pontos sobre a hiper-superfície de uma hiper-esfera são dadas pela ação das equações governantes linearizadas sobre pontos infinitesimalmente distanciados da trajetória fiducial.

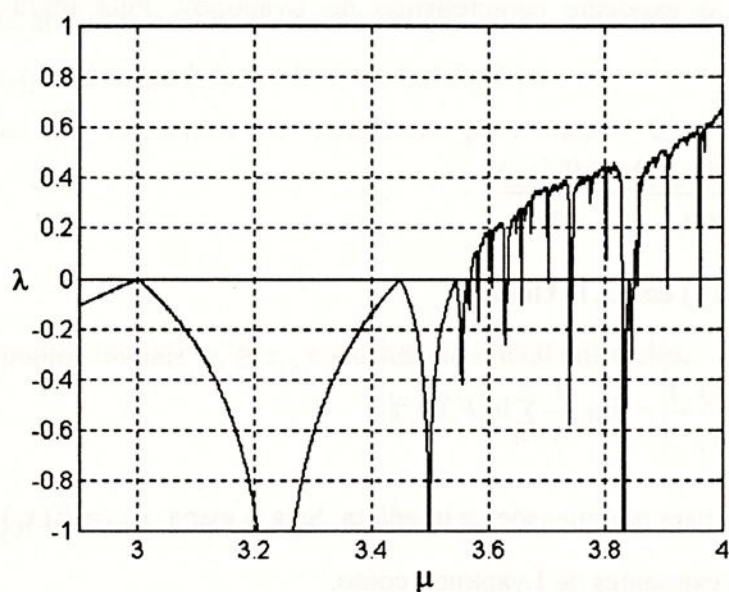


Figura 3.1 Expoentes de Lyapunov para o mapa logístico.

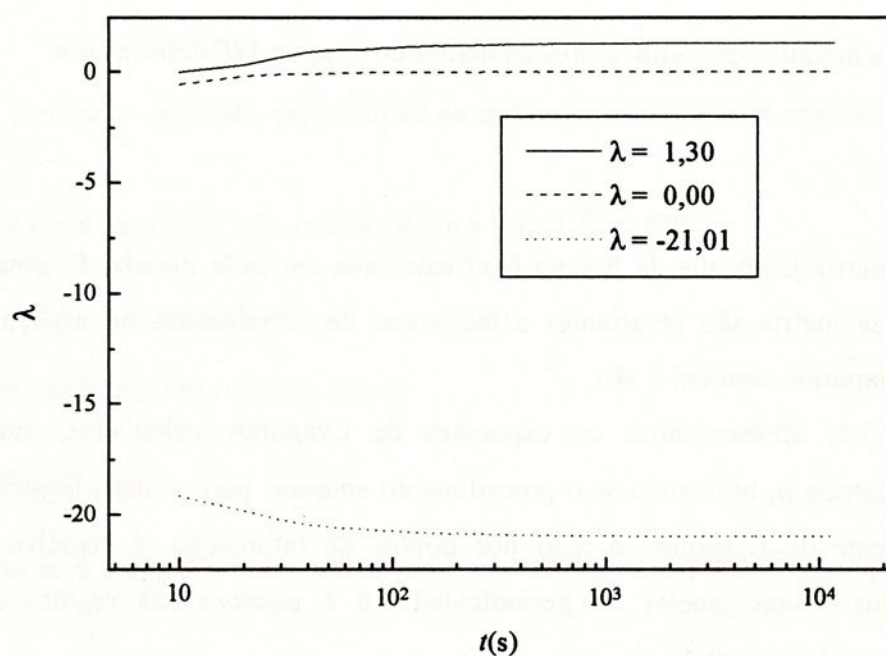


Figura 3.2 Expoentes de Lyapunov para o sistema de Lorenz ($\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$).

3.2.1 Método de Wolf

O método proposto por Wolf et al (1985) é uma adaptação de métodos propostos para o cálculo dos expoentes de Lyapunov quando as equações governantes são conhecidas. Trata-se de um método que possibilita a estimativa dos expoentes de Lyapunov não-negativos de um atrator a partir de uma série experimental. Neste trabalho, estamos interessados somente no maior expoente de Lyapunov, correspondendo ao primeiro estágio do algoritmo, que será explicado sucintamente.

Considera-se uma trajetória fiducial no atrator reconstruído $\{x_0, x_1, \dots\}$. Localiza-se o vizinho mais próximo do primeiro ponto desta trajetória (w_0) e denota-se a distância entre estes dois pontos por $L(t_0) < \varepsilon$, onde ε é o diâmetro de uma vizinhança. Acompanha-se a evolução temporal destes pontos até que, num tempo posterior t_1 , a distância inicial tenha evoluído para $L'(t_0) > \varepsilon$. Substitui-se w_0 , por um novo vizinho mais próximo de x_1 , que esteja na direção de $L'(t_0)$, tal que $L(t_1) < \varepsilon$. Segue-se este processo até todos os pontos da trajetória tenham sido percorridos. O maior expoente de Lyapunov é obtido pela média ao longo da trajetória,

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^{M-1} \log_2 \frac{L'(t_i)}{L(t_i)} \quad (3.18)$$

onde M é o número total de vezes em que se escolheu um novo vizinho.

No limite de um número infinito de pontos na série temporal e na ausência de ruído é sempre possível escolher um novo vizinho que esteja na direção de $L'(t_{i-1})$. Contudo, na prática isto não é possível, e procura-se um novo ponto mais próximo de x_i que esteja dentro de um cone de altura ε , cujo eixo de simetria coincida com o segmento $L'(t_{i-1})$, e com ângulo de abertura $\theta = \pi/9$. Se não for encontrado um ponto dentro desse cone, aumenta-se o ângulo de abertura até encontrar-se um vizinho. Além disso, para sinais com ruído é importante que não se escolha vizinhos mais próximos que a amplitude do ruído, uma vez que, isto poderia distorcer o resultado da estimativa do expoente. Frequentemente, não se conhece esta amplitude e um método para sua estimativa torna-se necessário. No capítulo 5 será apresentado um método simples baseado no algoritmo para o cálculo da dimensão de correlação.

3.2.2 Método de Kantz

Um método muito simples para cálculo do maior expoente de Lyapunov de um atrator estranho foi desenvolvido por Kantz (1994). O algoritmo utiliza propriedades estatísticas da taxa de divergência local de trajetórias próximas.

Considera-se a representação de uma série temporal como uma trajetória no espaço de fase m -dimensional e assume-se que x'_i seja o retorno de um ponto previamente visitado em x_i . Então, pode-se considerar a distância $\Delta_0 = x_i - x'_i$ como uma pequena perturbação, que cresce exponencialmente com o tempo. A evolução temporal de Δ_0 pode ser observada da série temporal $\Delta_l = x_{i+l} - x'_{i+l}$, e se $|\Delta_l| \sim \Delta_0 e^{\lambda l}$, então λ é o maior expoente de Lyapunov, na prática, entretanto, existem flutuações devido, entre outras causas, à presença de ruído. Baseando-se nisso, pode-se então derivar uma estimativa consistente e robusta para o maior expoente de Lyapunov,

$$S(\epsilon, m, \tau) = \left\langle \ln \left(\frac{1}{|u_i|} \sum_{x_i \in u_i} |s_{i+\tau} - s'_{i+\tau}| \right) \right\rangle \quad (3.19)$$

onde u_i é um conjunto formado por todos os pontos que se encontram dentro de uma vizinhança de x_i de raio ϵ , e s é uma coordenada do vetor x . Se $S(\epsilon, m, \tau)$, função expansão média, exhibe crescimento linear com inclinação constante para m crescente e para um intervalo razoável de ϵ , então esta inclinação é considerada uma estimativa para o maior expoente de Lyapunov ($\lambda_{\max}$).

Além dos parâmetros de imersão, que serão tratados no capítulo 4, o diâmetro ϵ da vizinhança é de fundamental importância neste método. Quanto menor, maior é o intervalo de linearidade da curva representada por $S(\tau)$, se este intervalo existir. Obviamente, número finito de pontos e ruído estabelecem um limite inferior para ϵ , que é da ordem da amplitude do ruído. O problema então passa à determinação da amplitude do ruído, que será abordada no capítulo 5.

3.3 DIMENSÃO FRACTAL

Seja um conjunto de pontos A num espaço de dimensão m . Recubra-se esses pontos com hiper-cubos de lado ε . Define-se a dimensão de Hausdorff ou fractal (Girault, 1991) como,

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad (3.18)$$

onde $N(\varepsilon)$ é o número mínimo de hiper-cubos de lado ε necessário para cobrir todo o conjunto de pontos A , ou seja, $N(\varepsilon)$ varia segundo ε^{-D_0} para $\varepsilon \rightarrow 0$.

A definição recupera o conceito euclidiano de dimensão inteira e permite sua generalização para conjuntos mais complexos. Se A é composto por um conjunto finito de pontos, $N(\varepsilon)$ é constante para $\varepsilon \rightarrow 0$; como $\log(1/\varepsilon) \rightarrow \infty$ nesse limite, tem-se $D_0 = 0$; para um segmento de comprimento L , $N(\varepsilon) \sim L\varepsilon^{-1}$ e portanto $D_0 = 1$; para uma superfície, $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2}$ para $\varepsilon \rightarrow 0$ e $D_0 = 2$. Já para o conjunto triádico de Cantor, $N(\varepsilon) \sim 2^n$ para $\varepsilon \rightarrow 0$, enquanto $\varepsilon \sim 1/3^n$. Então, pela definição, tem-se

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0,63 \quad (3.19)$$

A definição precisa de dimensão de Hausdorff exige que $N(\varepsilon)$ seja o número mínimo de caixas de lado ε necessário para recobrir o atrator, ou seja, há de se escolher o modo particular pelo qual se dividirá o espaço de fase em caixas. Caso não se proceda a uma otimização, pode-se obter valores diferentes para $N(\varepsilon)$. Na prática essa otimização é inexequível na maioria dos casos, tendo-se, então, que se calcular $N(\varepsilon)$, numericamente, como o número de caixas com pelo menos um ponto do atrator, dividindo-se arbitrariamente o espaço de fase em caixas de lado ε . A dimensão calculada desta forma é chamada de *capacidade* e é uma boa aproximação para a dimensão de Hausdorff.

Os algoritmos numéricos disponíveis para o cálculo da capacidade fazem uso direto da definição e são chamados algoritmos de *contagem de caixas*. Nesses algoritmos divide-se a região do espaço de fase ocupada pelo atrator em caixas de lado ε ; itera-se o sistema N vezes ($\sim 10^6$) e contam-se quantas destas caixas têm pelo menos um ponto do atrator, $N(\varepsilon)$. O cálculo deve ser repetido para diversos valores de ε . D_0 é dada pela inclinação do gráfico $\log N(\varepsilon) \times \log(1/\varepsilon)$.

Programas para algoritmos de contagem de caixas exigem em geral bastante memória e consomem razoável tempo de processamento, pois, à medida que ϵ diminui, $N(\epsilon)$ converge muito lentamente. Mesmo utilizando-se algoritmos sofisticados de contagem de caixas, em geral o procedimento torna-se impraticável para dimensões maiores que dois.

Além do método de contagem de caixas, existem outras propostas numéricas para o cálculo da dimensão fractal. No método de contagem de caixas mantém-se o tamanho das caixas fixo e vê-se de que modo a densidade em cada caixa varia ao longo do atrator. Na proposta do *método dos vizinhos próximos*, recobre-se também o atrator com caixas, mas essas caixas são definidas de modo a conter sempre o mesmo número de pontos. A dimensão fractal é então obtida pelo estudo da variação do *raio* dos aglomerados ao longo do atrator (Badii e Politi, 1984).

Nem sempre é possível estabelecer-se com segurança a região do gráfico $\log N(\epsilon) \times \log(1/\epsilon)$ que deve ser considerada na regressão linear para a determinação de D_0 . Muitas vezes, o valor da inclinação da reta ajustada depende do intervalo considerado do parâmetro ϵ e as flutuações observadas são, geralmente, maiores que os erros sugeridos pela regressão linear.

Tais flutuações são intrínsecas aos atratores e refletem o fato dessas estruturas serem mais complexas que o esperado e a invariância de escala não ser exata. Elas ocorrem em sistemas com múltiplas lei de escala ou sistemas onde a lacunaridade é grande. A noção de lacunaridade está relacionada com o grau de invariância translacional de um conjunto fractal e permite distinguir conjuntos com a mesma dimensão fractal, mas com diferentes texturas. Conjuntos com vazios de vários tamanhos são muito lacunares, enquanto que conjuntos com espaços vazios de mesmo tamanho tem lacunaridade próxima de um.

As flutuações intrínsecas devem ser consideradas no cálculo do erro associado à dimensão fractal. Deve-se calcular a dimensão para diferentes intervalos de ϵ . A média dos valores obtidos e o grau de dispersão dos resultados em torno dela fornecem valores mais realistas para D_0 e seu erro.

A escolha do intervalo de valores de ϵ que será usado na regressão linear pode ser feita estudando-se a chamada derivada local. Se os pontos estão realmente sobre uma reta, a derivada terá o mesmo valor para qualquer ponto (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994).

3.3.1 Dimensões Generalizadas

Muitos fractais não são homogêneos em sua invariância de escala, algumas regiões do atrator são mais densas e são visitadas com maior frequência e o conceito de dimensão fractal não é suficiente para caracterizar toda a riqueza de estrutura. Deve-se, então, considerar outros momentos da distribuição estatística dos pontos sobre o atrator (Hentschel e Procaccia, 1983).

Deseja-se estudar como a distribuição de probabilidades p_i , de se ter um ponto na i -ésima caixa de lado ϵ , varia ao longo do atrator à medida que $\epsilon \rightarrow 0$. Define-se p_i , como,

$$p_i = p_i(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad (3.20)$$

onde N é o número total de pontos e N_i é o número de pontos na caixa i . Definem-se as dimensões generalizadas de Renyi como,

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q}{\log_2 \epsilon} \quad (q \in \mathbb{R}, q \neq 1) \quad (3.21)$$

Essa definição tem uma relação direta com a informação generalizada de Renyi de ordem q ,

$$D_q = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I^{(q)}(p)}{\log_2 \epsilon} \quad (3.22)$$

onde

$$I^{(q)}(p) = \frac{1}{q-1} \log_2 \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q \quad (q \in \mathbb{R}, q \neq 1) \quad (3.23)$$

é a informação generalizada de Renyi de ordem q . Baseando-se na definição, pode-se obter uma interpretação para as dimensões generalizadas. Considerando os casos mais simples, para $q = 0$,

$$\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^0 = N(\epsilon) \quad (3.24)$$

e

$$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \quad (3.25)$$

é a dimensão fractal. Note-se que na definição de dimensão, a base utilizada é irrelevante, uma vez que ela é dada pelo quociente de dois logaritmos.

Para $q = 1$, o limite $I^{(q \rightarrow 1)}(p)$ vale $-\sum p_i \log_2 p_i$, e

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i \log p_i}{\log(1/\epsilon)} \quad (3.26)$$

que é chamada dimensão de informação.

Para $q = 2$, tem-se,

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2}{\log(1/\epsilon)} \quad (3.27)$$

que é chamada dimensão de correlação.

Pode-se demonstrar que,

$$D_q \leq D_{q'}, \text{ se } q > q', \quad q \in \mathbb{R} \quad (3.28)$$

ou seja, $D_0 \geq D_1 \geq D_2 \geq \dots$, a igualdade vale se o atrator é homogêneo e sua auto-similaridade pode ser completamente descrita por uma única regra.

A diferença entre as infinitas dimensões generalizadas mede o grau de não-homogeneidade do atrator. Quando essa diferença ocorre diz-se que o atrator é multifractal. Quando $q \rightarrow \infty$, as regiões mais densas do atrator são realçadas. E quando $q \rightarrow -\infty$, realçam-se as regiões mais rarefeitas.

3.3.2 Algoritmo de Grassberger-Procaccia

A dimensão de correlação é muito utilizada atualmente, devido à facilidade de cálculo proporcionada pelo algoritmo desenvolvido por Grassberger e Procaccia (1983).

Observe-se que $\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2$ é a probabilidade de que dois pontos do atrator estejam dentro de uma mesma caixa de lado ϵ . A idéia de Grassberger e Procaccia é aproximá-la pela probabilidade de que dois pontos do atrator estejam separados por uma distância menor que ϵ , ou seja,

$$\sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^2 \cong \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \theta[\epsilon - |x_i - x_j|] \equiv C(\epsilon) \quad (3.29)$$

onde $C(\epsilon)$ é denominada integral de correlação, x_i é o vetor associado ao i -ésimo ponto do atrator, é a $\theta(\zeta)$ função degrau de Heavside,

$$\theta(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \zeta > 0 \\ 1/2 & \text{se } \zeta = 0 \\ 0 & \text{se } \zeta < 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

e N é o número total de pontos no atrator. A dimensão de correlação é calculada como,

$$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (3.31)$$

ou seja, D_2 (ou d) é a inclinação de uma reta definida pelo gráfico $\log C(\epsilon) \times \log \epsilon$, para ϵ pequeno.

O algoritmo de Grassberger-Procaccia é mais fácil de implementar que os algoritmos de contagem de caixas e permite o cálculo da dimensão de sistemas multidimensionais, entretanto, existem limitações quanto ao número necessário de pontos na série para esse cálculo (Eckmann e Ruelle, 1992). De acordo com a Eq. (3.28), $D_2 \leq D_0$, na maior parte dos casos, $D_2 \sim D_0$, e esse algoritmo fornece um limite inferior e um valor aproximado para a dimensão fractal.

É possível calcular-se D_q através de uma generalização desse algoritmo, estendendo-se a definição da integral de correlação,

$$C_q(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \left[\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \theta(\epsilon - |x_i - x_j|) \right]^{q-1} \right\}^{1/(q-1)} \quad (3.32)$$

As dimensões generalizadas são dadas, então, por

$$D_q \sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C_q(\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (3.33)$$

3.4 ENTROPIA DE KOLMOGOROV-SINAI

Definição

Considere-se um atrator no espaço de fase. Recubra-se este atrator com hiper-cubos de lado ε . Seja uma sequência de g hiper-cubos $i_1, i_2, \dots, i_g$ e seja $p(i_1, i_2, \dots, i_g)$ a probabilidade de que o sistema se encontre sucessivamente nos hiper-cubos $i_1, i_2, \dots, i_g$ em intervalos de tempos regulares τ . Segundo Shannon (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994), a informação associada à sequência de g hiper-cubos é proporcional a

$$I_g^{(1)}(\varepsilon) = - \sum_{i_1, i_2, \dots, i_g} p(i_1, i_2, \dots, i_g) \ln p(i_1, i_2, \dots, i_g) \quad (3.34)$$

Trata-se também da informação necessária para localizar o sistema em uma trajetória especial $i_1^*, i_2^*, \dots, i_g^*$ com precisão ε , quando se conhece a priori, apenas as probabilidades $p(i_1, i_2, \dots, i_g)$. Então $I_{g+1}^{(1)}(\varepsilon) - I_g^{(1)}(\varepsilon)$ é a informação adicional necessária para predizer em qual cubo i_{g+1}^* o sistema estará, sabendo-se que ele esteve em $i_1^*, i_2^*, \dots, i_g^*$ antes. Consequentemente, $I_{g+1}^{(1)}(\varepsilon) - I_g^{(1)}(\varepsilon)$ mede a perda de informação do observador (e a conseqüente geração de informação no sistema) entre o tempo $g\tau$ e $(g+1)\tau$.

A entropia *métrica* ou de *Kolmogorov-Sinai* é definida como a taxa média de criação de informação no sistema,

$$k_1 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{1}{g\tau} I_g^{(1)}(\varepsilon) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{1}{g\tau} \sum_{i_1, \dots, i_g} p(i_1, \dots, i_g) \ln p(i_1, \dots, i_g) \quad (3.35)$$

Para mapas ($\tau = 1$) o limite $\tau \rightarrow 0$ é omitido.

A definição de Shannon para informação não é a única possível. Seja a distribuição de probabilidades $\{p_1, p_2, \dots, p_g\}$, correspondendo às probabilidades associadas a g diferentes configurações do sistema. Para essa distribuição de probabilidades definem-se as informações generalizadas de Renyi de ordem q por

$$I^{(q)}(p_1, p_2, \dots, p_g) = \frac{1}{1-q} \log_2 \sum_{i=1}^g p_i^q, \quad q \in \mathbb{R}, \quad q \neq 1 \quad (3.36)$$

As informações $I^{(q)}$ são generalizações da informação de Shannon. De fato, é possível mostrar-se que

$$\lim_{q \rightarrow 1} I^{(q)} = I^{(1)} \quad (3.37)$$

As informações generalizadas de Renyi de ordem q permitem a definição de dimensões generalizadas que são facilmente acessíveis em situações experimentais. Além disso, $I^{(2)}$ fornece a entropia de correlação que é um limite inferior para a entropia de Kolmogorov-Sinai.

3.4.1 Informação e Expoentes de Lyapunov

Seja uma região do espaço de fase recoberta por uma malha $\mathfrak{I}$. Quanto mais fina esta malha, melhor se pode especificar a posição de um ponto x_0 nessa região. Seja $I^{(1)}$ o número de especificações necessárias para localizar o ponto x_0 em função do número N de sub-regiões de $\mathfrak{I}$. Quando se tem uma única sub-região, o ponto só pode estar lá, não havendo necessidade de nenhuma especificação adicional, $I^{(1)} = 0$. Para $N = 2^1$, basta uma especificação, $I^{(1)} = 1$, em uma ou na outra sub-região. Para $N = 2^2$, tem-se $I^{(1)} = 2$. Generalizando, tem-se $N = 2^n$, logo $I^{(1)} = n$, então,

$$I^{(1)} = \log_2 N \quad (3.38)$$

que é a definição de Boltzmann para a entropia. Quanto maior o número de sub-regiões maior será o número de especificações necessárias para encontrar o ponto x_0 e maior a informação gerada no sistema pela malha $\mathfrak{I}$.

A informação $I^{(1)}$ ligada ao conhecimento da posição x_0 é dada, segundo Shannon, por

$$I^{(1)} = -\sum_{i=0}^N p_i \log_2 p_i \quad (3.39)$$

se a malha tem N sub-regiões iguais, então, $p_i = 1/N$ e recupera-se o resultado da Eq. (3.38).

Comparando-se as Eqs. (3.34) e (3.39) vê-se que a diferença é a base do logaritmo. Rigorosamente, a definição da informação de Shannon utiliza base dois, assim a Eq. (3.34) fornece uma quantidade proporcional à informação de Shannon. Entretanto, geralmente, se está interessado na taxa com que a informação varia quando o tamanho das sub-regiões diminui, e, nesse caso, a base utilizada é irrelevante.

Do caso discreto passa-se para o sistema contínuo. Seja Δx_i um elemento de comprimento e ε uma unidade de comprimento, com $\varepsilon \ll \Delta x_i$. Então, $\Delta x_i = N\varepsilon$, onde N é o número de sub-regiões.

A informação que se obtém através da especificação de um ponto em Δx_i usando a unidade ε é dada por,

$$I_i^{(1)} = \log_2 N = \log_2 \frac{\Delta x_i}{\varepsilon} \quad (3.40)$$

Admite-se que Δx_i corresponda à distância entre dois pontos no espaço de fases de um sistema dinâmico no instante t . Seja $\Delta x_i(0)$ o valor inicial dessa distância. Tem-se, então,

$$\Delta x_i(t) = \Delta x_i(0)e^{\lambda_i t} \quad (3.41)$$

onde λ_i é o expoente de Lyapunov associado à dinâmica. Substituindo a última equação em (3.39) resulta,

$$I^{(1)} = \log_2 \frac{\Delta x_i(0)e^{\lambda_i t}}{\varepsilon} \quad (3.42)$$

e portanto,

$$\frac{dI_i^{(1)}}{dt} \propto \lambda_i \quad (3.43)$$

Consequentemente, quando existe pelo menos um expoente de Lyapunov positivo num sistema dinâmico produz-se informação no sistema. Portanto, é natural que a quantidade $\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$ esteja relacionada com a taxa de produção de informação no sistema, que é a entropia de Kolmogorov-Sinai. Ruelle estabeleceu a desigualdade $k_1 \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$, e Pesin demonstrou que satisfeitas certas condições, a igualdade é válida, $k_1 = \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$.

3.4.2 Processos regulares, caóticos e estocásticos

Considera-se a evolução de dois pontos inicialmente próximos no espaço de fase. Admite-se que tais pontos estejam sujeitos, em momentos diferentes, a uma dinâmica *regular*, *caótica* e *estocástica* (ou *aleatória*), sendo que neste último caso, a evolução temporal não é determinística.

Num processo *regular* pontos inicialmente próximos continuam assim ao longo da trajetória produzida pela dinâmica associada. Nenhuma informação adicional é produzida no sistema. Deve-se, portanto, esperar uma entropia associada nula, $k_{1,regular} = 0$.

Num processo *estocástico*, ao contrário, pontos inicialmente próximos são distribuídos com igual probabilidade para qualquer nova posição consistente com os vínculos do sistema. Existe, portanto, geração de informação infinita no sistema, $k_{1,estocástico} \rightarrow \infty$.

Em processos *caóticos*, devido à DSCI, pontos inicialmente adjacentes separam-se exponencialmente com a evolução temporal. Existe geração de informação no sistema e a entropia é finita e positiva, $0 < k_1 \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$. A existência de entropia de Kolmogorov-Sinai positiva e finita é condição suficiente para a existência de caos determinístico.

Uma outra distinção importante entre esses processos é a dimensão da dinâmica assintótica para tempos suficientemente longos.

Para processos *regulares* e *caóticos* a dimensão dos atratores é sempre menor que a dimensão do espaço de fase. No caso de processos *estocásticos*, não existem atratores e a dinâmica ocupa todas as dimensões do espaço de fase. Além disso, para processos *regulares* a dimensão é sempre inteira, e em processos *caóticos* são encontradas dimensões fracionárias para sistemas contínuos, e dimensões inteiras ou fracionárias em mapas.

3.4.3 Entropia de Correlação e o Algoritmo de Grassberger-Procaccia

Uma vez que um valor positivo e finito para a entropia métrica é condição suficiente para a ocorrência de caos determinístico, interessa-se em buscar uma estimativa para este invariante. O cálculo direto da entropia métrica, assim como o da dimensão fractal, faz uso de algoritmos de contagem de caixas, o que se faz, então, é calcular a entropia de correlação, pois sabe-se que ela é um limite inferior para a entropia métrica (Fiedler-Ferrara e Prado, 1994).

A entropia de correlação, utilizando-se a Eq. (3.36) com $q = 2$, é dada por

$$k_2 = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{\ln \sum_i p_i^2}{\Delta T} \quad (3.44)$$

e como,

$$k_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{I^{(2)}(\epsilon, \Delta T)}{\Delta T} \quad (3.45)$$

e utilizando a aproximação de Grassberger-Procaccia, $\ln \sum_i p_i^2 \sim C(\epsilon)$, temos

$$I^{(2)}(\epsilon, \Delta T) \sim k_2(\epsilon) \Delta T \sim -\ln C(\epsilon, \Delta T) \quad (3.46)$$

onde $\Delta T = g\tau$. O parâmetro τ , o intervalo tempo utilizado para observar o sistema, pode ser interpretado como o passo de reconstrução. Nesse caso, $g = m$, já que $b\tau$ é o intervalo de tempo

durante o qual se observa o sistema, com a finalidade de proceder-se à reconstrução, pode-se, então, escrever $C(\epsilon, \Delta T) = C_m(\epsilon)$.

A entropia corresponde à taxa média de criação de informação no sistema, então k_2 pode ser determinada a partir da subtração das informações de ordem dois entre os instantes $g\tau$ e $(g+1)\tau$,

$$I^{(2)}(\epsilon, (g+1)\tau) - I^{(2)}(\epsilon, g\tau) = \tau k_2(\epsilon) \sim \ln \frac{C_m(\epsilon)}{C_{m+1}(\epsilon)} \quad (3.47)$$

onde $\epsilon \rightarrow 0$ e $m \rightarrow \infty$. Para estimar-se k_2 calcula-se o valor médio da Eq. (3.47) para diversos valores de ϵ na região de linearidade das curvas $\log_2 C(\epsilon) \times \log_2 \epsilon$. À medida que m cresce esse valor converge para k_2 . Cumpre ressaltar que esta estimativa está sujeita às mesmas limitações do cálculo da dimensão de correlação.

Capítulo 4

RECONSTRUÇÃO DE ATRADORES

4.1 INTRODUÇÃO

Para analisarem-se as propriedades de um atrator associado a uma série temporal com comportamento caótico determinístico é necessário efetuar-se a reconstrução de tal atrator num espaço de fase conveniente. Uma idéia para isso foi sugerida por Packard et al. (1980). Os autores mostram que para um atrator do modelo de Rössler, o espaço de fase $y, \dot{y}, \ddot{y}$ conduz às mesmas informações que o espaço real y_1, y_2, y_3 das variáveis do modelo. Entretanto, o cálculo das derivadas amplifica os erros experimentais e o algoritmo se torna pouco prático para sinais experimentais, principalmente se o número de variáveis independentes for grande.

Esses problemas são evitados utilizando-se um procedimento proposto por Takens (1981). Ele demonstrou que se $\dot{\tilde{\xi}} = f(\tilde{\xi})$ gera um fluxo d -dimensional, então,

$$x(t) = \{s_j(t), s_j(t+p), \dots, s_j(t+[d-1]p)\} \quad (4.1)$$

onde s_j é uma componente arbitrária de x , p é o *passo de reconstrução* (atraso temporal) e m é a *dimensão de imersão*, fornece um espaço de imersão contínuo para esse fluxo e as propriedades métricas em ambos os espaços são as mesmas, isto é, as trajetórias nos dois espaços são topologicamente equivalentes.

Esse método, também chamado método dos atrasos temporais, permite a reconstrução do atrator, embora o atrator reconstruído não seja idêntico ao original, ou seja, a dimensão do espaço de fase reconstruído não é necessariamente igual à dimensão do espaço de fase real dos vetores $\tilde{\xi}$ que representam a dinâmica do sistema físico.

4.2 PASSO DE RECONSTRUÇÃO

Takens demonstrou que para um número infinito de pontos e na ausência de ruído a escolha do passo de reconstrução é na maioria dos casos arbitrária. Entretanto, as séries temporais experimentais são finitas, e invariavelmente contaminadas com ruído externo. Nessa situação a reconstrução depende da escolha correta do passo. Se o passo for muito pequeno, $s(t)$ e $s(t+p)$ terão praticamente o mesmo valor. Como consequência o atrator com dimensão maior que dois reconstruído em uma dimensão de imersão igual a dois ficará comprimido em torno da diagonal, uma vez que apresentará dependência linear entre x_1 e x_2 , fato que não ocorre nos componentes reais. Por outro lado, como a trajetória real está restrita a um volume finito do espaço de fases, o passo não pode ser muito grande, sob pena dos vetores reconstruídos serem completamente não correlacionados, cobrindo todo o espaço de fases.

O mais simples dos critérios de escolha do passo correto, e também o mais difundido, sugere que se use um passo da ordem do tempo de autocorrelação do sinal, que é definido por

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{e} \Phi(0) \quad (4.2)$$

onde

$$\Phi(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i s_{i+t} \quad (4.3)$$

é a função de autocorrelação. Uma variação deste critério, também bastante difundida, é a escolha de um passo da ordem de 1/10 do ponto onde ocorre o primeiro mínimo local da função de autocorrelação.

O critério proposto por Fraser e Swinney (1986), mais sistemático, baseia-se na teoria de informação. Segundo este método, ao escolher-se o passo $p \sim \tau'$, onde τ' é o intervalo de tempo que minimiza a informação mútua contida em vetores vizinhos ao longo de sua evolução, pode-se garantir a reconstrução de vetores com menor nível de informação redundante (linearmente independentes, mas ainda correlacionados). Embora este método seja tido como o mais confiável, sua implementação é problemática; ele reduz bastante o número de pontos disponíveis para a análise da série temporal, sendo portanto inadequado para séries com poucos pontos ($\sim 10^4$). O método é também mais difícil de implementar-se numericamente, consumindo um tempo significativamente maior de computação. Na maioria dos casos esse método não fornece valores substancialmente diferentes do tempo de autocorrelação.

Na prática, é normalmente necessária experimentação numérica antes de se obter o passo adequado à reconstrução de um sinal experimental. Deve-se ter em mente que os resultados almejados, expoentes de Lyapunov, dimensão de correlação, etc., a serem obtidos a partir do atrator reconstruído, não podem ser afetados por pequenas alterações no passo escolhido.

4.3 DIMENSÃO DE IMERSÃO

Demonstra-se que uma variedade² contínua de dimensão de Hausdorff D_0 deve ser imersa num espaço euclidiano de dimensão m maior ou igual a $2D_0 + 1$; caso contrário o atrator aparecerá dobrado sobre si mesmo como numa projeção e pontos originalmente distantes tornam-se próximos e a distribuição da medida invariante associada ao atrator reconstruído é distorcida. Muitas vezes, porém, dependendo das características do atrator, uma reconstrução num espaço de dimensão menor que $2D_0 + 1$ já é suficiente para revelar toda sua estrutura métrica (Casdagli et al, 1991).

Do ponto de vista numérico, é praticamente equivalente proceder-se à reconstrução de vetores de dimensões de imersão altas ou baixas. Entretanto, a medida que m cresce, diminui o número total de vetores passíveis de reconstrução a partir de um mesmo conjunto de dados. Porém, os diversos algoritmos disponíveis para o cálculo dos invariantes dinâmicos e outras grandezas relevantes, tornam-se significativamente mais complicados e consomem maior tempo de processamento quando aplicados a espaços de dimensão alta.

Como não se sabe inicialmente qual a dimensão de Hausdorff do atrator associado a uma série de dados experimentais, experimentação e bom senso são necessários ao interpretar-se os resultados obtidos.

Em alguns algoritmos, deve-se reconstruir o atrator sucessivamente em espaços de imersão de dimensões crescentes, tal que a comparação dos resultados obtidos em cada uma dessas dimensões de imersão permitirá concluir sobre os valores finais das grandezas sendo calculadas.

Para sistemas com uma ou duas dimensões, a inspeção visual continua sendo o método mais conveniente para a escolha da dimensão de imersão. No entanto, foram feitas algumas tentativas de formalizar métodos adequados para estimar a dimensão de imersão mínima

² Um conjunto A é definido como uma variedade se cada ponto de A possui uma vizinhança aberta que tem uma bijeção contínua para um conjunto aberto em um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^m$, para algum m (Schutz, 1980).



necessária à reconstrução de um atrator. Uma dessas tentativas é conhecida pelos nomes de *processo de Karhunen-Loeve*, *análise de fatores*, *análise da componente principal* ou *decomposição de valor singular*, e consiste em realizar uma transformação de coordenadas, passando das coordenadas originais usadas para reconstruir o atrator para um sistema de coordenadas no qual as variáveis de estado possuam a mínima interdependência. Para isso, diagonaliza-se a matriz de covariância ou de correlação,

$$\Xi_{ij} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N s_i(t_k) s_j(t_k), \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (4.4)$$

que é uma matriz simétrica com elementos reais, portanto, pode ser diagonalizada por meio de uma transformação unitária $\Xi = USU^{-1}$, onde S é uma matriz diagonal. Os elementos da diagonal de S são os autovalores de Ξ e as colunas de U são seus autovetores normalizados. Essa transformação de variáveis leva o atrator para uma representação onde as variáveis de estado são estatisticamente independentes.

Os autovalores da matriz de covariância podem ser calculados numericamente e a dimensão de imersão do atrator reconstruído é estimada pela contagem dos autovalores não nulos. Problemas de precisão nos cálculos numéricos e ruído nos dados experimentais podem tornar todos os autovalores não nulos (Broomhead e King, 1986). Em Cambraia (1997), um limiar inferior para os autovalores foi estabelecido para efetuar a remoção de ruído gaussiano, obtendo-se resultados satisfatórios.

Existe também um outro método sugerido por Kennel et al. (1992) que propõe, como método para determinar a dimensão de imersão mínima, contar-se o número de falsos vizinhos para cada um dos pontos do atrator. Falsos vizinhos são pontos que se afastam à medida que se aumenta a dimensão de imersão, no processo de reconstrução. Quando o número de falsos vizinhos cai a zero, o atrator terá sido suficientemente desdobrado, e é possível identificar a menor dimensão de imersão capaz de representá-lo adequadamente.

Capítulo 5

REDUÇÃO DE RUÍDO

5.1 INTRODUÇÃO

Os algoritmos estudados anteriormente foram aplicados a sinais teóricos, entretanto, séries experimentais estão freqüentemente contaminadas por ruído. O termo ruído é geralmente subjetivo e depende de um critério para a sua definição. Neste trabalho, como em Sivakumar et al (1999), ruído é considerado um processo estocástico, cuja geração de informação é assintoticamente infinita no sistema, não havendo, portanto, atratores, o que faz com que os pontos visitem todo o espaço de fases reconstruído com igual probabilidade qualquer que seja a dimensão de imersão.

Alguns exemplos característicos da influência de ruído em sistemas dinâmicos são: (1) quebra de auto-similaridade do atrator; (2) trajetórias arbitrariamente próximas divergem difusivamente em vez de exponencialmente.

Existem dois tipos de ruído, o ruído de medição e o ruído dinâmico. O ruído de medição refere-se à contaminação das medidas por erros causados por fontes independentes da dinâmica, pode ser causado, por exemplo, pelos processos de medição.

O ruído dinâmico é causado por um processo de retroalimentação, onde a propagação de pequenas variações nos parâmetros do sistema levam a flutuações que não são específicas ao modelo do sistema. Atualmente, não existem técnicas disponíveis para a remoção deste tipo de ruído, e discute-se se ele deve ser removido. Neste trabalho, estudar-se-á a redução do ruído de medição.

5.2 DECOMPOSIÇÃO DE VALOR SINGULAR

Dada uma série temporal experimental com intervalo de amostragem constante, $s(\tau_i)$, $i = 1, \dots, N_T$, o processo de reconstrução pelo método dos atrasos temporais resultará em

uma seqüência de $N = N_T - (m - 1)$ vetores $\{x_i \in \mathfrak{R}^m \mid i = 1, \dots, N\}$ no espaço de imersão de dimensão m . Esta seqüência pode ser usada para construir uma matriz $X_{N \times m}$,

$$X_{N \times m} = N^{-1/2} \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_N^T \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

onde $N^{-1/2}$ é uma normalização conveniente. Esta matriz é chamada *Matriz de trajetória* ou *Matriz de mergulho*.

O teorema da decomposição de valor singular estabelece que uma matriz $X_{N \times m}$, $N \geq m$, pode ser decomposta na seguinte forma,

$$X_{N \times m} = V_{N \times m} S_{m \times m} U_{m \times m}^T \quad (5.2)$$

onde, V é coluna-ortogonal, U é ortogonal e S é diagonal. Os elementos da matriz S são chamados valores singulares, são não negativos e por convenção são amostrados em ordem decrescente ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_m \geq 0$). Se a matriz $X_{N \times m}$ tem posto n , $n < m$, então,

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n > \sigma_{n+1} = \dots = \sigma_m = 0. \quad (5.3)$$

Esta decomposição fornece uma base ortogonal para a imagem e para o núcleo da matriz $X_{N \times m}$, permitindo, através do números de valores singulares, determinar o posto desta matriz. Entretanto, para séries longas (N grande), o processo de diagonalização pode ser numericamente inviável. Para evitar este problema trabalha-se com a matriz de covariância,

$$\Xi = X^T X = U S V^T V S U^T = U S^2 U^T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i x_i^T \quad (5.3)$$

que é uma matriz $m \times m$ real e simétrica, e portanto pode ser diagonalizada, onde S^2 é a matriz diagonal e os seus elementos $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \sigma_m^2 \geq 0$ são as variâncias correspondentes às respectivas direções principais definidas pela base formada pelos vetores-coluna de U . A projeção da matriz de trajetória sobre esta base não altera a dimensão do sistema.

Na ausência de ruído, se para algum i , $\sigma_i = 0$, então a trajetória reconstruída pelo procedimento de imersão não visita aquela direção principal, e o posto da matriz é igual ao número de autovalores não nulos, fornecendo a dimensão mínima de reconstrução do atrator.

A presença de ruído torna todos os valores singulares da matriz de trajetória não nulos, logo, a trajetória reconstruída parece explorar completamente o espaço de imersão m -dimensional. Entretanto, autovalores consecutivos, relacionados à componente determinística do sinal, possuem razão exponencial entre si. No caso de ruído branco, existe uma constante não-nula somada aos autovalores, identificando-se um patamar inferior referente ao espaço nulo da matriz de trajetória, deste modo, a parte determinística dessa matriz pode ser obtida por,

$$\bar{X} = \sum_{\sigma_i > \text{ruído}} (Xu_i)u_i^T \quad (5.4)$$

onde u_i é o i -ésimo vetor-coluna de U . Então, $\bar{X}$ é uma matriz $N \times m$, cuja j -ésima linha é dada por $[x_j^T u_1 \quad x_j^T u_2 \quad \dots \quad x_j^T u_m]$.

5.2.1 Decomposição de Valor Singular e Janela de Imersão

A obtenção de êxito na utilização da decomposição de valor singular aplicada à reconstrução de Takens, seja buscando redução de ruído ou dimensão mínima de imersão, requer um estudo cuidadoso dos parâmetros envolvidos na reconstrução, dimensão de imersão (m) e passo de reconstrução (p).

Segundo Broomhead e King (1986), o comportamento dos autovalores depende somente da chamada janela de imersão, dada por $(m-1)p$ multiplicado pelo tempo de amostragem, e não destes parâmetros separadamente. No seu trabalho, Broomhead e King utilizaram o inverso da frequência limitante de banda, que é a frequência no espectro de Fourier a partir da qual não exista outra com potência maior, como a largura da janela de imersão. Entretanto, a determinação desta frequência apresenta problemas práticos.

Em outros termos, mas em um contexto similar, Fraser e Swinney (1986) utilizaram o primeiro mínimo local da função de informação mútua. Albano et al (1988) realizaram vários testes utilizando este critério para escolha da janela, e concluíram que este não é um critério confiável, levando-se em conta problemas técnicos relacionados à estimativa da informação mútua. Albano et al sugeriram que a utilização de janelas da ordem de duas a três vezes o tempo de autocorrelação proporcionam melhor redução de ruído e uma estimativa confiável para a dimensão mínima de imersão.

Contudo, sinais que apresentam tempo de autocorrelação muito curtos, tais como sinais oriundos de mapas, inviabilizam a utilização da decomposição singular, uma vez que geram janelas excessivamente estreitas, impossibilitando a imersão em um espaço de dimensão maior que a dimensão de Hausdorff do atrator. Por outro lado, sinais com tempo de autocorrelação muito longo também inviabilizam este método, pois, em geral, não é possível se obter séries experimentais muito longas.

5.3 MÉTODO NÃO-LINEAR DE ORDEM ZERO

Em 1993, Schreiber propôs um método de redução de ruído bastante simples e robusto, adequado para lidar com trajetórias contaminadas com altos níveis de ruído. Ele se referiu a este método como *extremely simple nonlinear noise-reduction method*, e neste trabalho ele será referido como ESF (*extremely simple filter*). A seguir, apresenta-se o algoritmo proposto:

Seja uma série temporal contaminada por ruído, a qual é composta pela parte do sinal sem ruído e pelo ruído adicionado. A idéia do método proposto é substituir cada medida da série temporal pelo valor médio desta coordenada sobre alguns pontos escolhidos adequadamente numa dada vizinhança. Estes vizinhos são definidos no espaço de fase reconstruído pelo método dos atrasos temporais. Para definir-se a vizinhança, fixam-se os inteiros positivos k e l , obtendo-se vetores de imersão $(k+l+1)$ -dimensionais, levando-se em conta valores passados e futuros na série temporal

$$x_i = (s_{i-k}, \dots, s_{i+l}) \quad (5.5)$$

Em seguida, escolhe-se o raio ε da vizinhança e para cada x_i encontra-se o conjunto $u_{i,\varepsilon}$ de todos os vizinhos x_j para os quais

$$\sup\{|s_{j-k} - s_{i-k}|, \dots, |s_{j+l} - s_{i+l}|\} \equiv \|x_j - x_i\|_{\sup} < \varepsilon \quad (5.6)$$

Substitui-se, então, a coordenada "atual" x_i pelo seu valor médio na vizinhança $u_{i,\varepsilon}$,

$$x_i^{\text{corr}} = \frac{1}{|u_{i,\varepsilon}|} \sum_{x_j \in u_{i,\varepsilon}} x_j \quad (5.7)$$

De acordo com este procedimento, somente a coordenada central é corrigida, uma vez que somente ela é otimamente controlada pelo "passado" e pelo "futuro". Os valores corrigidos

são usados para reconstruir o espaço de fase e o procedimento é repetido, variando-se o raio da vizinhança. Se a raiz quadrada do valor quadrático médio da correção é tomado como o raio da nova vizinhança, a cada passo de iteração, este raio decresce exponencialmente até que nenhum vizinho seja encontrado e nenhuma correção seja feita. Schreiber (1993b) sugere que, conhecido o nível de ruído, utilize-se raio de vizinhança da ordem de três vezes este nível.

5.4 ESTIMATIVA DO NÍVEL DE RUÍDO

Como foi explicado anteriormente, a dimensão de correlação é obtida através do cálculo da inclinação, na região de linearidade, da curva $\log_2 C(\epsilon) \times \log_2 \epsilon$. Quando se analisa sinais experimentais, que estão contaminados por ruído, esta curva apresenta duas regiões de linearidade. Uma região com a inclinação da dimensão de correlação do sistema determinístico e outra com a inclinação da dimensão de imersão utilizada no processo de reconstrução.

Schreiber (1993a) e Sivakumar et al (1999) utilizaram esta característica para renormalizar a integral de correlação e determinar a região de influência do ruído através da relação

$$C(r) = \left[\frac{r - r_n}{1 - r_n} \right]^{D_2}, \quad r_n \leq r \leq 1$$

(5.8)

onde r é o raio ϵ e r_n é o raio de influência do ruído (amplitude) normalizados pelo diâmetro do atrator ϵ_{max} . Por definição, r_n é a relação entre a amplitude do ruído e a amplitude do sinal, que é equivalente à relação entre os valores médios quadráticos do ruído e do sinal, chamada Relação Ruído-Sinal (RRS), dada em porcentagem neste trabalho.

No trabalho de Sivakumar et al (1999), os parâmetros r_n e D_2 foram determinados através do método de ajuste não-linear de mínimos quadrados. Este método de ajuste aplicado a séries oriundas do mapa de Henon com ruído branco adicionado produziu níveis de ruído subestimados, o que não é grave, uma vez que procura-se pela ordem de grandeza da RRS.

Tabela 5.1 Comparação entre os níveis de ruído estimados e reais para o mapa de Henon (Sivakumar et al, 1999).

Nível real (%)	Nível estimado (%)	Real/Estimado
4	1,1	3,64
8	4,1	1,95
16	9,0	1,78

Neste trabalho, baseados na mesma característica de duas regiões de linearidade da curva $\log_2 C(\epsilon) \times \log_2 \epsilon$, sugerimos um método de determinação de r_n (RRS) muito mais barato computacionalmente.

O método consiste-se em estudar-se as derivadas de primeira e segunda ordem dessa curva. Em geral, devido à quantidade finita de pontos, a região de linearidade fica entre outras duas regiões com inclinação variável. Portanto, a derivada de primeira ordem dessa curva apresenta um intervalo de valor constante (onde a derivada de segunda ordem é nula) entre dois intervalos de valores variáveis (onde a derivada de segunda ordem apresenta mínimos locais).

Sugerimos, então, que $\epsilon_{\max}$ seja o ponto onde a derivada de segunda ordem apresenta um mínimo local na região de maiores escalas e o raio de influência do ruído seja o próximo mínimo local buscado na direção de $\log_2 \epsilon$ decrescente, assim determina-se facilmente o parâmetro RRS.

Testamos este método de busca para o mapa logístico e o sistema de Lorenz com níveis de contaminação de 1, 5 e 10%. Obtivemos valores ligeiramente superestimados ou subestimados, em contraste com o método anterior, que obteve níveis subestimados em até um terço do valor real, como pode-se observar comparando-se as Tabs. 5.1, 5.2 e 5.3, acreditamos que os erros de estimativa presentes em nossos resultados sejam devidos ao pouco refinamento na discretização da escala de $\log_2 \epsilon$, que tem um passo de variação de 0,5. A obtenção dos valores das Tabs. 5.2 e 5.3 está devidamente detalhada no capítulo 7.

Tabela 5.2 Comparação entre os níveis de ruído estimados e reais para o mapa logístico.

Nível real (%)	Nível estimado (%)	Real/Estimado
1	1,1	0,9
5	4,4	1,14
10	8,8	1,14

Tabela 5.3 Comparação entre os níveis de ruído estimados e reais para o sistema de Lorenz.

Nível real (%)	Nível estimado (%)	Real/Estimado
1	1,1	0,9
5	6,25	0,8
10	12,5	0,8

Capítulo 6

PREDIÇÃO DE SÉRIES TEMPORAIS

Seja $\tilde{f}: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$ um mapa contínuo com um atrator estranho α , seja $x_j = \tilde{f}^j(x_0)$, $1 \leq j \leq \infty$ uma sequência típica de iteradas de $\tilde{f}$ em α . O problema de predição dessa sequência consiste em construir um mapa contínuo $f_N: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}^m$ usando somente um número finito de iteradas x_j , $1 \leq j \leq N$, onde $x_{j+1} = f_N(x_j)$, $1 \leq j \leq N-1$. Para $m > 1$, esse problema resulta em ajustar m funções suaves ou hiper-superfícies $\pi_i f_N: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$ aos pontos $(x_j, \pi_i x_{j+1})$, $1 \leq j \leq N-1$ para $i = 1, \dots, m$, onde π_i denota a projeção sobre a i -ésima coordenada (Casdagli, 1989).

Para verificar a performance dos modelos preditivos procede-se do seguinte modo. A partir de um dado sistema gera-se uma série de $N + N_p$ pontos, e consideram-se os N primeiros pontos para gerar o modelo (*pontos de predição*) e os N_p posteriores para sua validação. Uma estimativa do erro associado à predição (E) é dado pelo erro médio quadrático,

$$\sigma^2(f_N) = \frac{1}{N_p} \sum_{j=N}^{N+N_p-1} [x_{j+1} - f_N(x_j)]^2 \quad (6.1)$$

normalizado pelo desvio médio quadrático da série, calculado por

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} (x_j - \bar{x})^2 \quad (6.2)$$

sendo

$$E(f_N) = \sigma(f_N) / \sigma_x \quad (6.3)$$

6.1 Técnica Global

Neste método (Casdagli, 1989), as funções coordenadas $\pi_i f_N : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$, $i = 1, \dots, m$ são escolhidas de funções base padrão. Por exemplo, um preditor polinomial é um polinômio em m dimensões de grau r_p . Os parâmetros livres do polinômio são determinados de modo a minimizar,

$$\sum_{j=1}^{N-1} (\pi_i x_{j+1} - \pi_i f_N(x_j))^2 \quad (6.4)$$

Este é um problema de mínimos quadrados linear, que pode ser resolvido, por exemplo, pelo método das equações normais ou pelo método da decomposição de valores singulares, utilizando regularização.

6.2 Técnica Local

Enquanto o preditor global é construído ajustando-se simultaneamente todos os pontos da série ao preditor, para construir o preditor local, o gráfico de $\pi_i f_N$ é construído por um conjunto de preditores locais, que são construídos a partir de alguns pontos e seus vizinhos mais próximos. Seguindo procedimentos presentes na literatura (Farmer e Sidorowich, 1987), descreve-se a seguir o procedimento matemático.

Se o valor de $\pi_i f_N$ é requerido em um ponto x , os k vizinhos mais próximos de x são encontrados, e um polinômio de grau r_p (r_p pequeno) é ajustado a esses pontos pelo método dos mínimos quadrados, com k no mínimo igual a $(m + r_p)! / m! r_p!$, para que o problema de mínimos quadrados tenha solução. Na prática, escolhendo k muito maior que este número pode-se aumentar o erro associado ao preditor. Neste trabalho, utilizou-se este método com predição de ordem zero e linear.

O método de predição local de *ordem zero* consiste em localizar o vizinho mais próximo $x(k)$ de $x_{pred}(i)$, e aproximar o ponto a ser predito pela próxima iteração deste vizinho, ou seja,

$$x_{pred}(i+1) = x(k+1) \quad (6.5)$$

O método de predição local *linear* consiste em localizar os k vizinhos mais próximos ($x^k(j)$) de $x_{pred}(i)$, e ajustar uma reta por mínimos quadrados aos pares ($x^k(j), x^k(j+1)$). O ponto a ser predito é calculado utilizando-se esta reta, ou seja,

$$x_{pred}(i+1) = a + bx_{pred}(i) \quad (6.6)$$

Se os k vizinhos mais próximos de $x_{pred}(i)$ são muito próximos entre si, eles o são, também, de $x_{pred}(i)$, então $x_{pred}(i) \approx x^k(j)$, e a reta se reduz a

$$x_{pred}(i+1) \approx a + bx^k(j) = x^k(j+1) \quad (6.7)$$

deste modo, a predição linear se aproxima da predição de ordem zero à medida que $x^k(j)$ se aproximam entre si. E aumentando-se o número de pontos utilizados na predição, aumenta-se densidade “populacional” do atrator, aumentando, consequentemente, a probabilidade de se ter vizinhos muito próximos entre si.

O problema teórico fundamental deste método é estabelecer propriedades de ordem de convergência para $E(f_N)$, chamadas de *leis de escala*. Diz-se que um preditor f_N é de ordem γ , se $E(f_N) = \mathcal{O}(N^{-\gamma/D_1})$, para $N \rightarrow \infty$, onde D_1 é a dimensão de informação do atrator.

A qualidade da aproximação local depende de parâmetros do problema, tais como o número de pontos utilizados na predição N , a dimensão do atrator D_1 , a entropia métrica k_1 , a relação ruído-sinal RRS, e o tempo de predição T . Para $E \ll 1$, se o espaçamento típico entre os pontos ($\varepsilon_0 = \mathcal{O}(N^{-1/D_1})$) for menor que RRS, o erro de predição será limitado pelo ruído e proporcional a $e^{k_1 T}$, caso contrário será limitado pelo número de pontos e proporcional a N^{-1/D_1} .

Segundo Casdagli (1989), se $\tilde{f}$ é duas vezes diferenciável e f_N é construída utilizando-se técnica de interpolação linear local, então $E(f_N) = \mathcal{O}(\varepsilon_0^2)$ quando $N \rightarrow \infty$. E como $\varepsilon_0 = \mathcal{O}(N^{-1/D_1})$, isto leva à conjectura,

$$E \approx C_1 e^{(r_p+1)k_1 T} N^{-(r_p+1)/D_1} \quad (6.8)$$

Na prática, esta lei de escala pode não valer exatamente, pois é provável que existam flutuações nos termos $x_{j+1} - f_N(x_j)$ devido ao espaçamento irregular dos pontos x_j .

Capítulo 7

ANÁLISE DE SÉRIES ARTIFICIAIS

7.1 INTRODUÇÃO

Nesta etapa do trabalho, procedeu-se à implementação dos algoritmos descritos nos capítulos anteriores. Para validação, aplicaram-se estes algoritmos a séries oriundas do mapa logístico e do sistema de Lorenz, com os referidos parâmetros. Os resultados foram comparados com aqueles apresentados na literatura.

Simulando-se a situação em que as equações governantes da dinâmica não fossem conhecidas, realizaram-se estudos para determinar o passo de reconstrução e a dimensão de imersão, para proceder-se à reconstrução do espaço de fase a partir das séries "medidas" numericamente. Em seguida, calcularam-se a dimensão de correlação, o maior expoente de Lyapunov, a entropia de correlação e realizaram-se previsões locais e global visando o detalhamento e a comparação dos resultados com a literatura.

Objetivando a aplicação desta análise em séries reais, ruído branco foi produzido numericamente e adicionado, em vários níveis de contaminação, às séries obtidas numericamente. Com estas séries contaminadas procedeu-se ao estudo do efeito do ruído sobre o cálculo dos invariantes e da eficiência de dois métodos de redução de ruído, sugeriu-se, ainda, um método confiável e simplificado de estimativa de níveis de ruído em sinais experimentais.

7.2 SÉRIES SEM RUÍDO

7.2.1 Determinação dos Parâmetros de Imersão

Na Fig. 7.1 mostra-se a série temporal obtida da ordenada X da solução do sistema de Lorenz e na Fig. 7.2, a correspondente função de autocorrelação, ressaltando o detalhe do primeiro mínimo local ($t/\Delta t = 110$). Escolheu-se o passo de reconstrução correspondente a $1/10$ do primeiro mínimo local ($p = 11$), para o sistema de Lorenz.

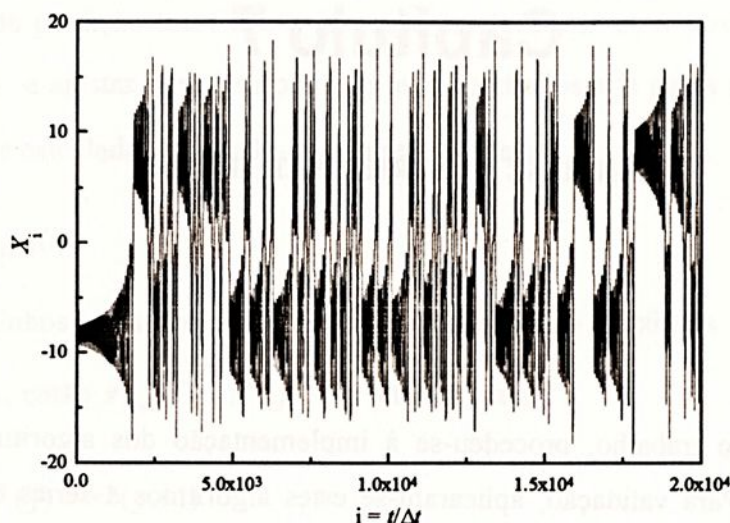


Figura 7.1 Série temporal utilizada na reconstrução do sistema de Lorenz.

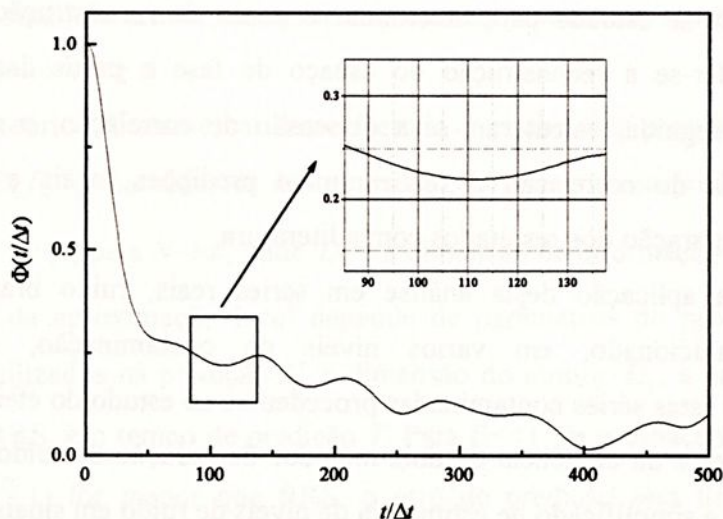


Figura 7.2 Função de autocorrelação e detalhe do primeiro mínimo local (sistema de Lorenz).

A função de autocorrelação para o mapa logístico possui um mínimo local na primeira iteração e a utilização do mesmo critério de escolha do passo para este mapa produz um passo de 0,1. Entretanto, o mapa evolui de forma discreta e a utilização deste valor para o passo de reconstrução é impossível. Isto mostra que este critério é inadequado para sinais pouco autocorrelacionados e sobretudo para mapas. Neste trabalho, escolheu-se $p = 1$ para o mapa logístico.

A dimensão de imersão mínima, para cada série, foi determinada utilizando-se o método da decomposição de valor singular da matriz de variância, construída com alta dimensão de imersão e janela de imersão igual a três vezes o tempo de autocorrelação. Utilizou-se o critério

sugerido por Albano et al (1988) para escolha dos valores não-nulos ($\sigma_i / \sum_i \sigma_i > 10^{-4}$). Escolheu-se a dimensão de imersão mínima $m = 7$ para o sistema de Lorenz. Para o mapa logístico este método também é inadequado, uma vez que a determinação da largura da janela de imersão depende da função de autocorrelação. Neste trabalho, escolheu-se $m = 2$ para o mapa logístico, a justificativa para isto está na próxima seção.

7.2.2 Determinação dos Invariantes Dinâmicos

Na Fig. 7.3 mostram-se curvas da integral de correlação para o sistema de Lorenz, calculadas pelo algoritmo de Grassberger-Procaccia utilizando-se uma série com 20000 pontos. Para o cálculo das dimensões procedeu-se a um ajuste linear por mínimos quadrados na região de linearidade da curva $\log_2 C(\epsilon) \times \log_2 \epsilon$. Pode-se observar curvas calculadas a partir de reconstruções com dimensões de imersão crescentes, considerou-se que $m = 4$ foi suficiente para representar adequadamente o atrator original, uma vez que a dimensão de correlação convergiu. Entretanto a dimensão de imersão utilizada nos cálculos posteriores foi $m = 5$.

Na Fig. 7.4, mostra-se o mesmo cálculo para o mapa logístico utilizando-se uma série com 10000 pontos, a convergência ocorreu para $m = 2$, sendo esta a dimensão de imersão utilizada nos cálculos posteriores. As dimensões de correlação calculadas apresentaram boa concordância com a literatura (Grassberger e Procaccia, 1983).

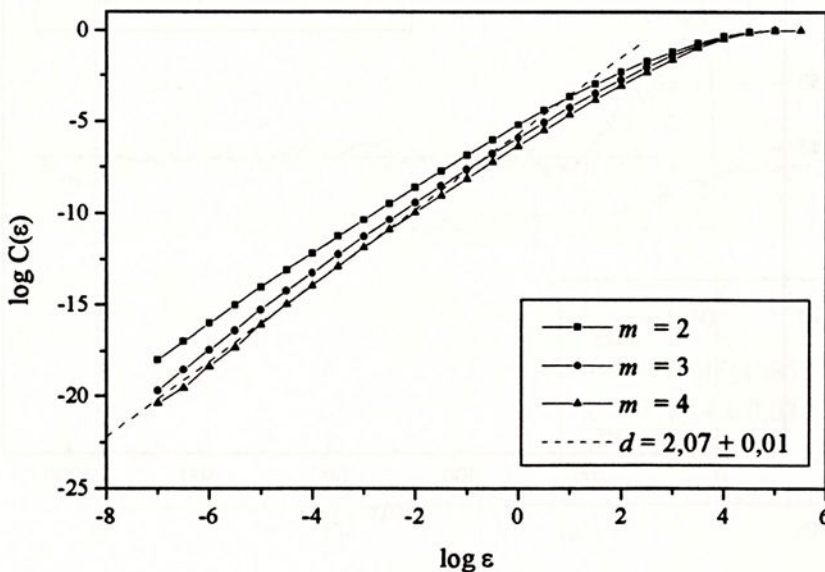


Figura 7.3 Curvas da integral de correlação para o sistema de Lorenz.

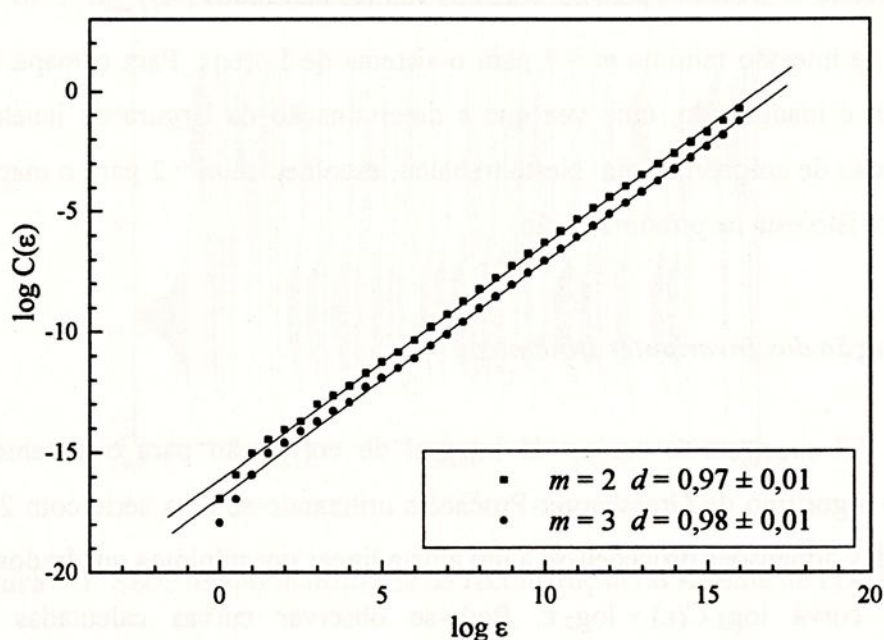


Figura 7.4 Integral de correlação para o mapa logístico.

Nas Figs. 7.5 e 7.6 apresentam-se os resultados para o maior expoente de Lyapunov do mapa logístico, enquanto nas Figs. 7.7 e 7.8 apresentam-se estes resultados para o sistema de Lorenz, calculados pelo método de Wolf (1985) e de Kantz (1994).

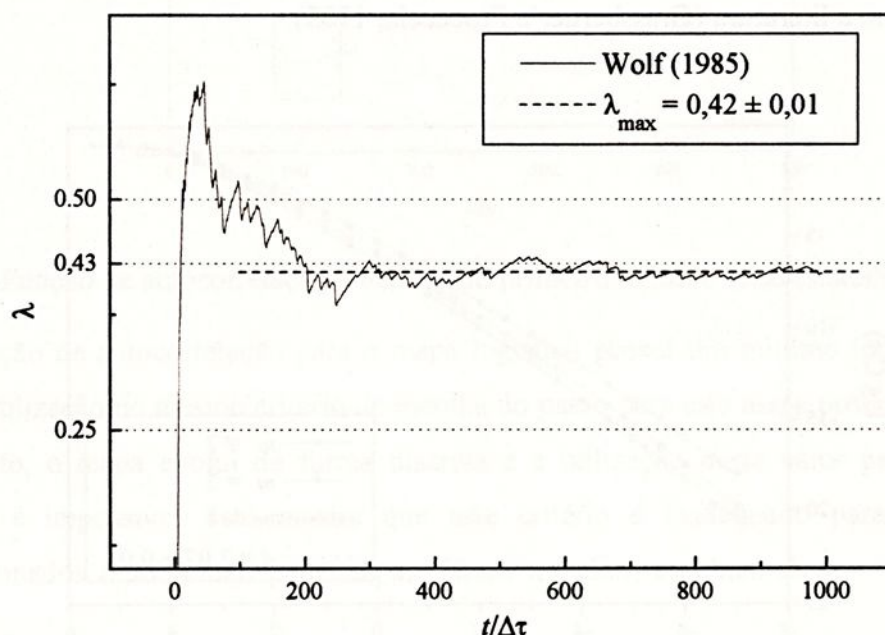


Figura 7.5 Maior expoente de Lyapunov para o mapa logístico calculado pelo método de Wolf.

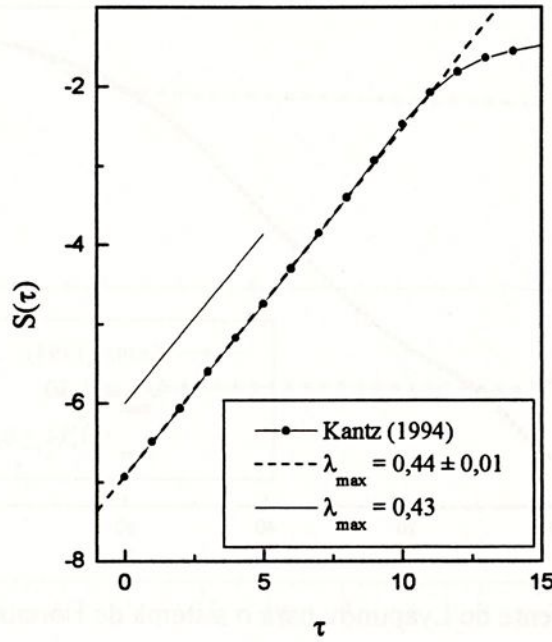


Figura 7.6 Maior expoente de Lyapunov para o mapa logístico (método de Kantz).

Considera-se que os resultados obtidos através da reconstrução da série temporal e aplicação dos algoritmos estão em concordância com o valores obtidos através do conhecimento das equações governantes, 0,43 para o mapa logístico e 1,30 para o sistema de Lorenz.

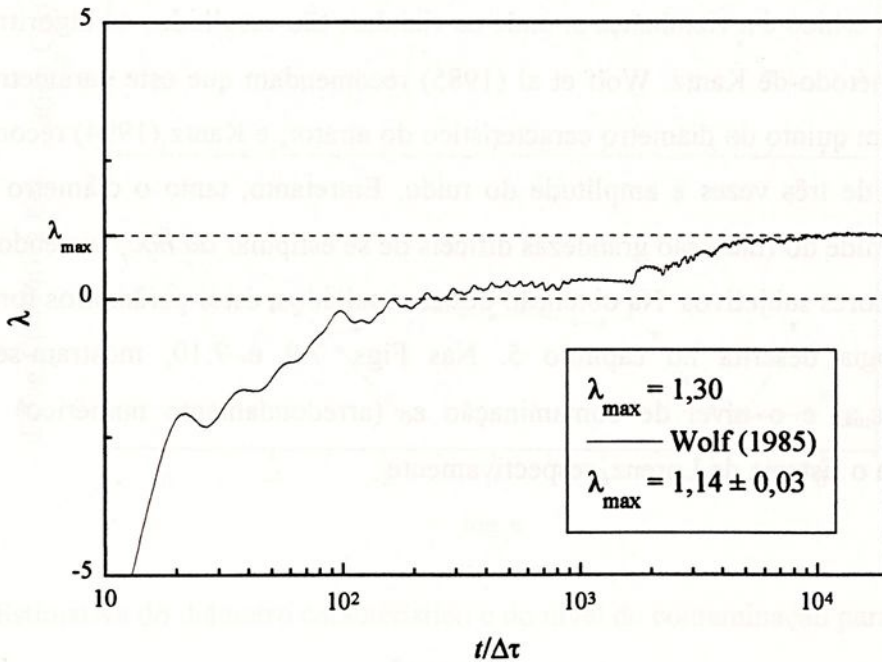


Figura 7.7 Maior expoente de Lyapunov para o sistema de Lorenz (método de Wolf).

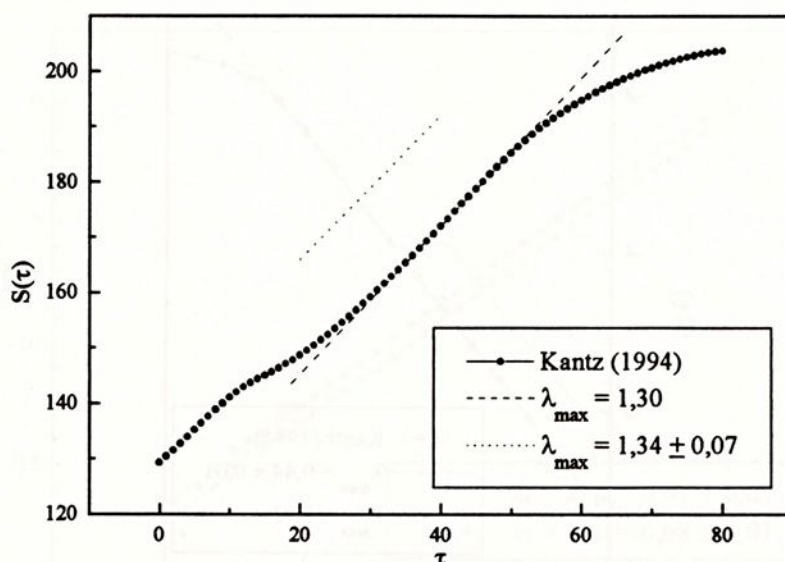


Figura 7.8 Maior expoente de Lyapunov para o sistema de Lorenz (método de Kantz).

7.2.3 Estimativa do Diâmetro Característico e do Nível de Ruído

Como mencionado no capítulo 3, na utilização dos algoritmos para o cálculo dos invariantes dinâmicos é necessário estipular-se determinados parâmetros, visando lidar com número finito de pontos, e eventualmente, com a presença de ruído. Nos dois algoritmos, o parâmetro mais crítico é a vizinhança ϵ , onde os vizinhos são escolhidos no algoritmo de Wolf, e mediados no método de Kantz. Wolf et al (1985) recomendam que este parâmetro esteja entre um décimo e um quinto do diâmetro característico do atrator, e Kantz (1994) recomenda que ele seja da ordem de três vezes a amplitude do ruído. Entretanto, tanto o diâmetro característico quanto a amplitude do ruído são grandezas difíceis de se estipular *ad hoc*, correndo-se o risco de tomarem-se valores subjetivos. Na obtenção destes resultados, estes parâmetros foram estimados pela metodologia descrita no capítulo 5. Nas Figs. 7.9 e 7.10, mostram-se o diâmetro característico $\epsilon_{\max}$ e o nível de contaminação ϵ_0 (arredondamento numérico) para o mapa logístico e para o sistema de Lorenz, respectivamente.

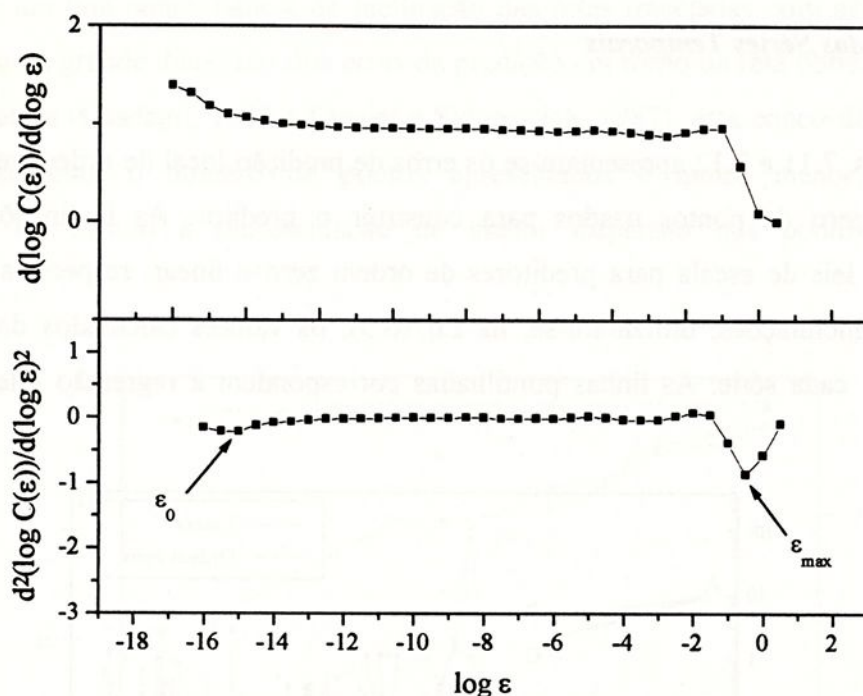


Figura 7.9 Estimativa do diâmetro característico e do nível de contaminação para o mapa logístico.

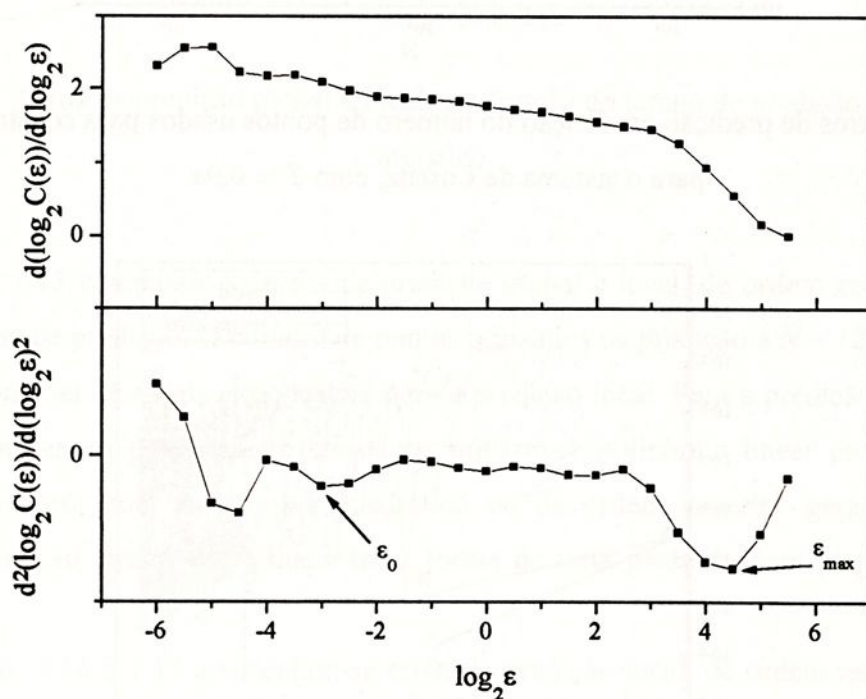


Figura 7.10 Estimativa do diâmetro característico e do nível de contaminação para o sistema de Lorenz.

7.2.4 Predição das Séries Temporais

Nas Figs. 7.11 e 7.12 apresentam-se os erros de predição local de ordem zero e linear em função do número de pontos usados para construir o preditor. As inclinações AB e AC representam as leis de escala para preditores de ordem zero e linear, respectivamente. Para o cálculo destas inclinações, utilizaram-se, na Eq. (6.5), os valores calculados da dimensão de correlação para cada série. As linhas pontilhadas correspondem à regressão linear dos pontos calculados.

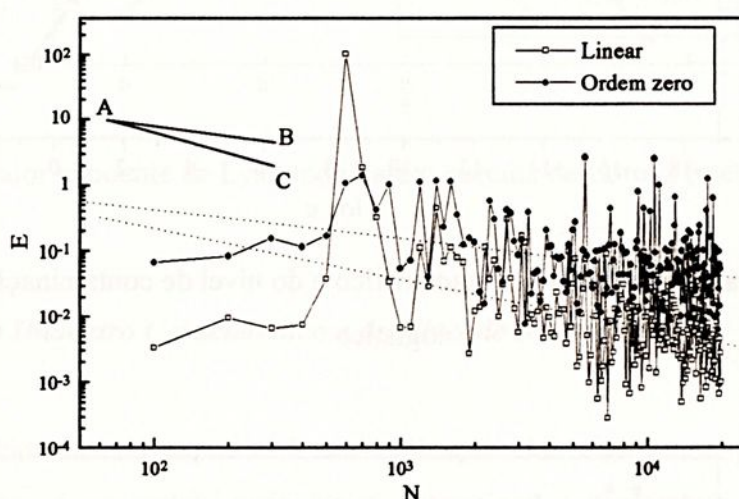


Figura 7.11 Erros de predição em função do número de pontos usados para construir o preditor, para o sistema de Lorenz, com $T = 0,9s$.

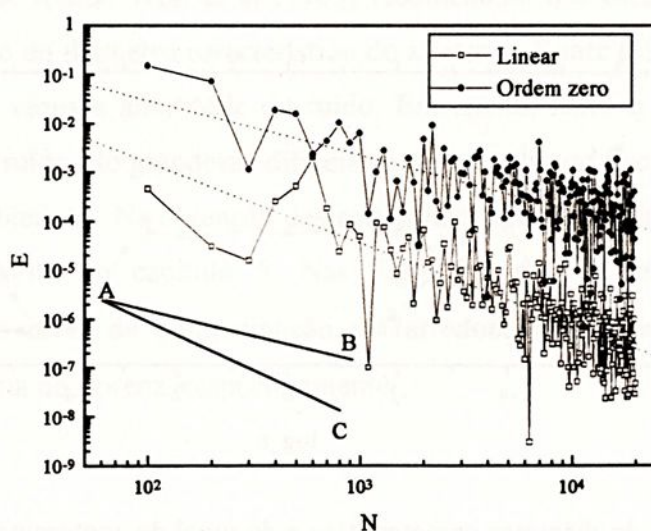


Figura 7.12 Erros de predição em função do número de pontos usados para construir o preditor, para o mapa logístico, com $T = 3$.

Nota-se uma boa concordância da inclinação das retas tracejadas com as leis de escala, embora exista uma grande dispersão dos erros de predição em torno da reta obtida por regressão linear. Na literatura (Casdagli, 1989 e Farmer e Sidorowich, 1987), esta concordância também é observada, entretanto, o número de pontos apresentados é muito menor, o que pode aparentemente ter levado à representação de menor dispersão dos pontos nos gráficos apresentados.

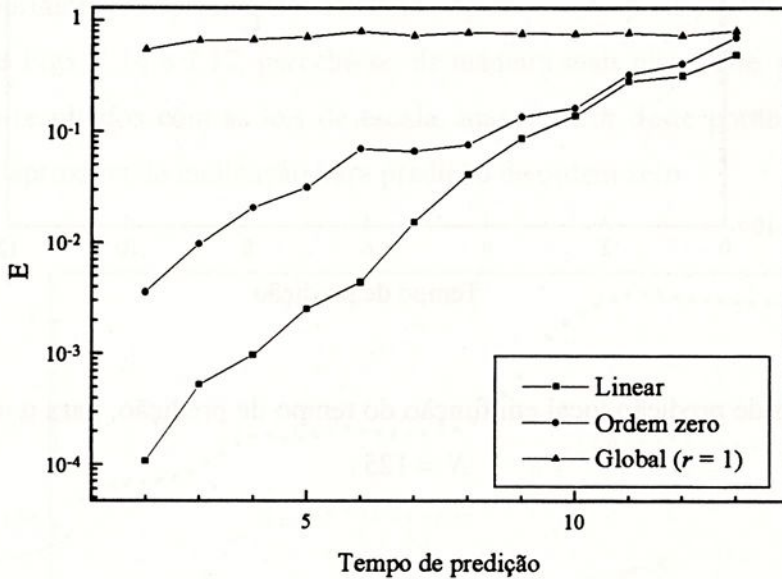


Figura 7.13 Erros de predição global e local, em função do tempo de predição para o mapa logístico.

Na Fig. 7.13 comparam-se erros de predição global e local, de ordem zero e linear, em função do tempo de predição. O número de pontos utilizados na predição é $N = 125$. Percebe-se a existência de uma lei de escala exponencial para a predição local. Para a predição global, o erro de predição permanece praticamente constante, utilizou-se polinômio linear para exemplificar este comportamento, pois polinômios quadrático ou de ordem superior geram erros muito pequenos, devido ao atrator deste mapa ter a forma de uma parábola com pequena dispersão (Fig. 2.1).

Nas Figs. 7.14 a 7.17 apresentam-se erros de predição local, de ordem zero e linear, em função do tempo de predição, para diferentes valores de N .

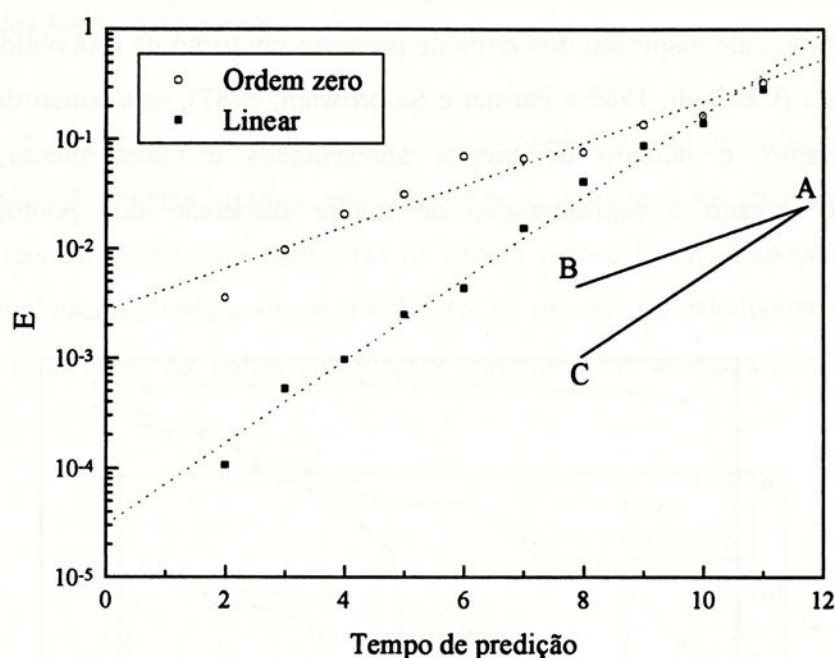


Figura 7.14: Erros de predição local em função do tempo de predição, para o mapa logístico e $N = 125$.

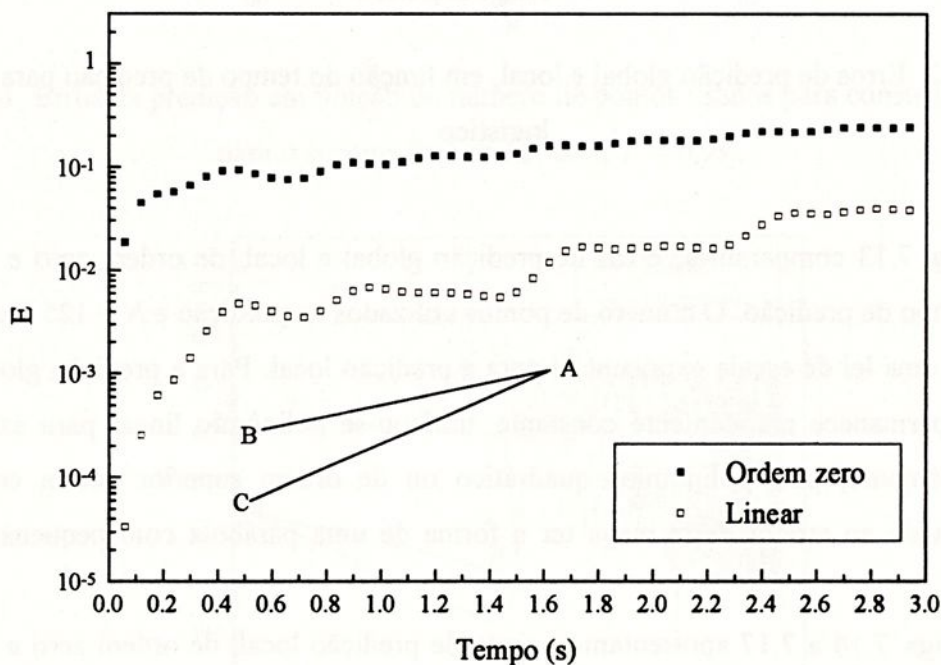


Figura 7.15: Erros de predição local em função do tempo de predição, para o sistema de Lorenz e $N = 250$.

Na Fig. 7.14, nota-se a concordância da inclinação das retas ajustadas com as leis de escala calculadas a partir da Eq. (6.5), com $k_1 = 0,43$. Na Fig. 7.15, pode-se perceber diferença entre as inclinações para predição de ordem zero e linear, entretanto, estas inclinações não estão em concordância com a lei de escala esperada. Na Fig. 7.16, os mesmos dados são apresentados para $N = 10000$. Neste caso, não se percebe a diferença nas inclinações após $T \approx 0,8$ s, sendo que a inclinação da curva para predição linear se aproxima da inclinação para predição de ordem zero. Um comportamento semelhante também aparece na predição do mapa logístico. Comparando-se as Figs. 7.14 e 7.17, percebe-se, de maneira mais clara, que, para $T \leq 8$ s, existe concordância dos resultados com as leis de escala, mas a partir deste ponto, a inclinação para predição linear se aproxima da inclinação para predição de ordem zero.

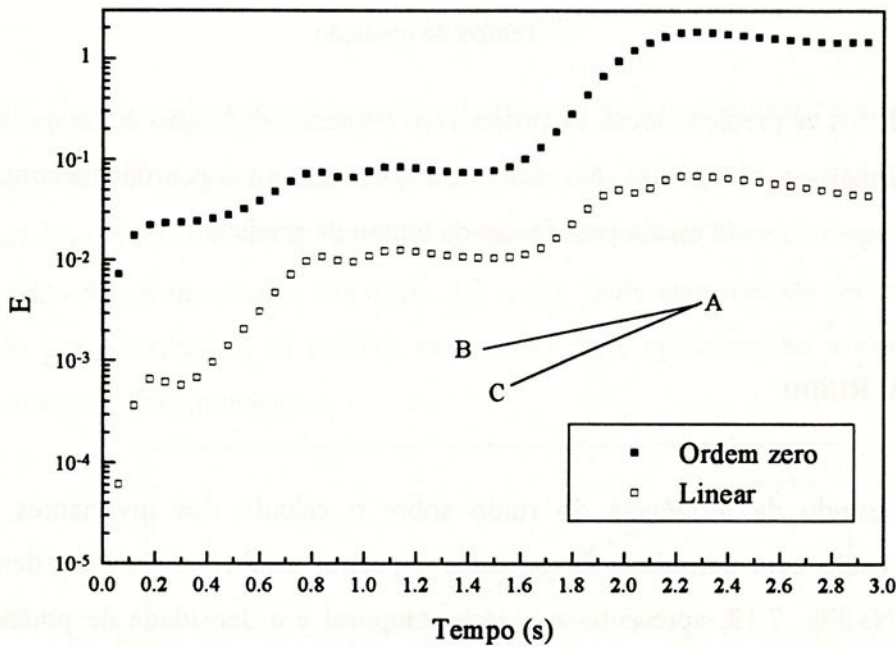


Figura 7.16: Erros de predição local de ordem zero e linear em função do tempo de predição, para o sistema de Lorenz e $N = 10000$.

Na literatura, não se menciona este comportamento, e além disso, não fica claro qual o número de pontos (N) utilizados nas predições. Acredita-se que este comportamento seja um artefato do método de predição local linear utilizado.

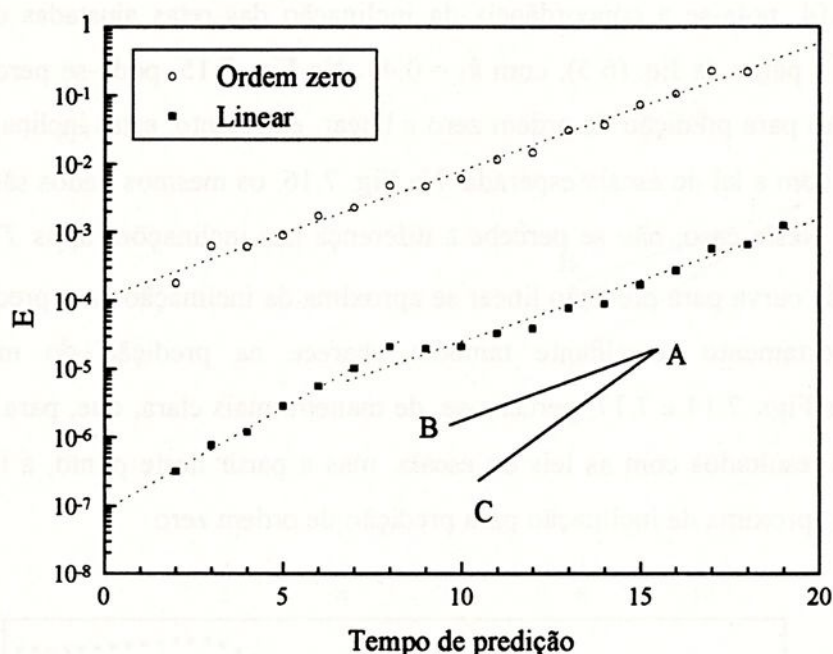


Figura 7.17 Erros de predição local, de ordem zero e linear, em função do tempo de predição, para o mapa logístico e $N = 10000$. No caso linear constata-se a concordância com as duas leis de escala para faixas de tempo de predição.

7.3 SÉRIES COM RUÍDO

Para o estudo da influência do ruído sobre o cálculo dos invariantes, produziu-se artificialmente ruído com densidade de potência espectral uniforme, também denominado de *ruído branco*. Na Fig. 7.18, apresenta-se a série temporal e a densidade de potência espectral para o ruído branco. Esta série foi adicionada às séries temporais para o sistema de Lorenz e para o mapa logístico em três níveis de contaminação. O nível de contaminação é calculado pela raiz quadrada da relação entre os valores médios quadráticos do ruído e do sinal, e expresso em porcentagem. Os níveis de contaminação utilizados neste estudo foram 1, 5 e 10%.

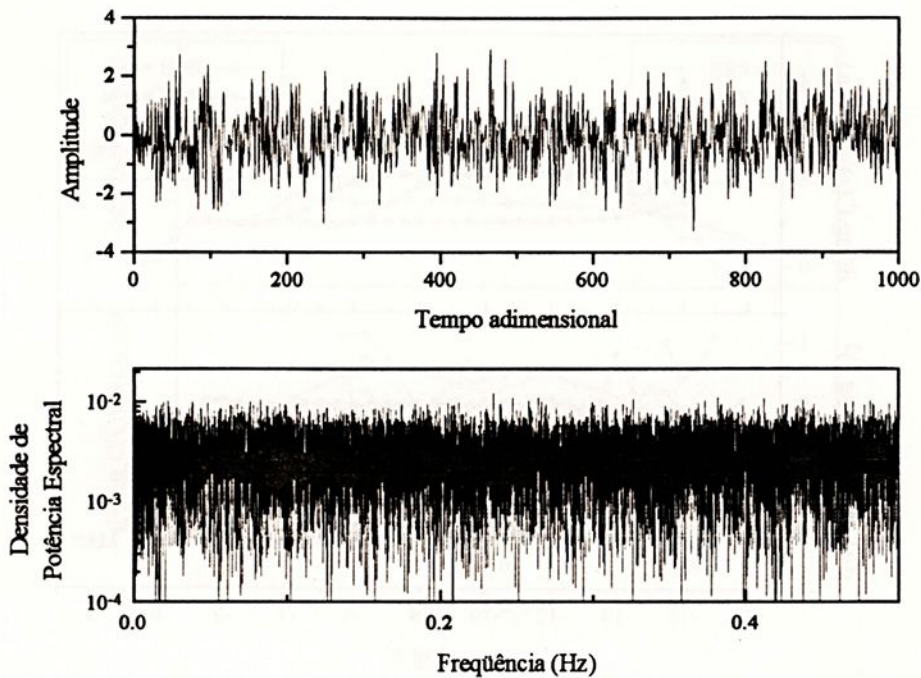


Figura 7.18 Características do ruído artificial utilizado para contaminar os sinais teóricos.

Na Fig. 7.19 e 7.20, apresentam-se as estimativas do nível de contaminação para o mapa logístico e, nas Figs. 7.21 e 7.22, as estimativas para o sistema de Lorenz, respectivamente. Os resultados obtidos foram mostrados nas Tabs. 5.2 e 5.3, onde este método foi comparado com outro sugerido por Shoulten et al (1994), mostrando mais aproximação e confiabilidade na estimativa do nível de contaminação.

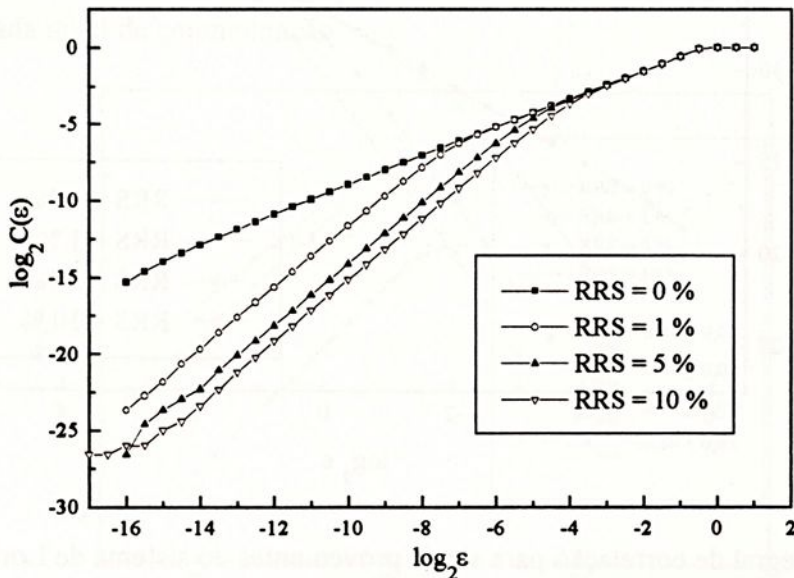


Figura 7.19 Integral de correlação para sinais provenientes do mapa Logístico com vários níveis de Relação Ruído-Sinal.

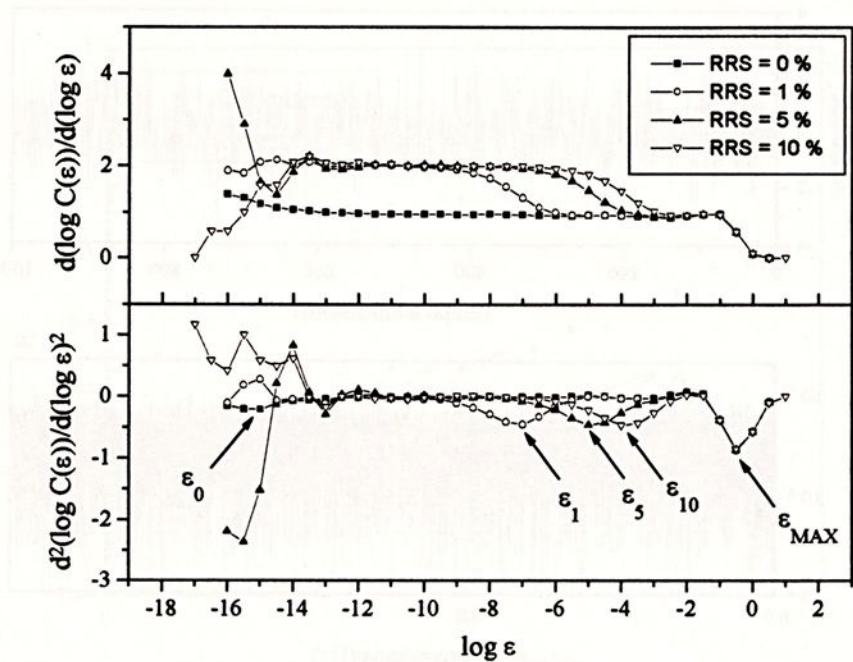


Figura 7.20 Derivadas de primeira e segunda ordem da integral de correlação para o mapa Logístico.

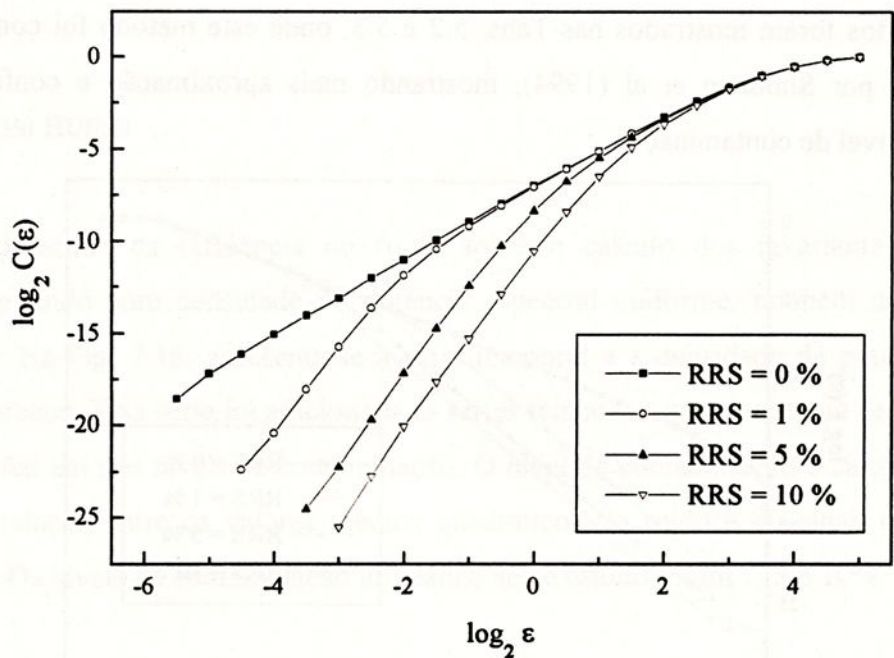


Figura 7.21 Integral de correlação para sinais provenientes do sistema de Lorenz com vários níveis de Relação Ruído-Sinal.

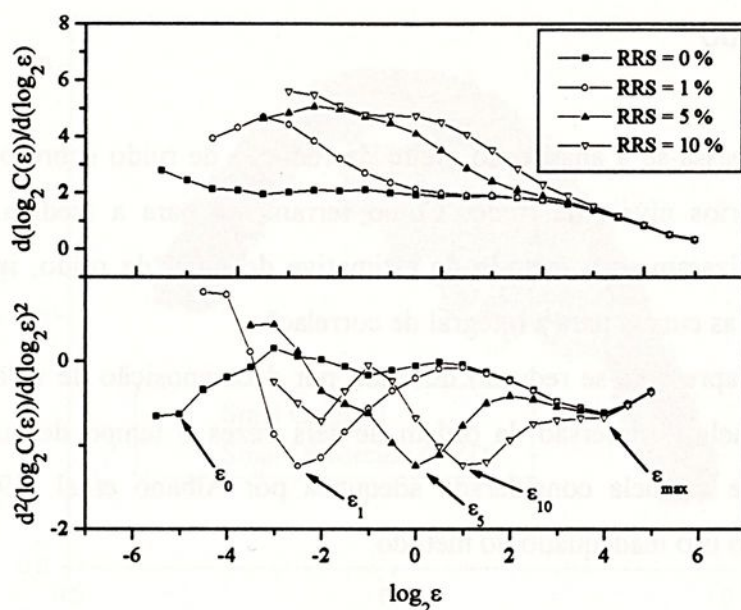


Figura 7.22 Derivadas de primeira e segunda ordem da integral de correlação para o sistema de Lorenz.

Para demonstrar a robustez do algoritmo de Kantz para o cálculo do maior expoente de Lyapunov, calculou-se este invariante para o mapa logístico com vários níveis de contaminação. Os resultados são apresentados na Fig. 7.23, observa-se que o algoritmo calcula expoentes aceitáveis para níveis de contaminação de até 5%, utilizando-se vizinhanças ϵ da ordem de duas a três vezes a estimativa da amplitude de contaminação ϵ_0 , obtida, pelo algoritmo sugerido no capítulo 5, para cada nível de contaminação.

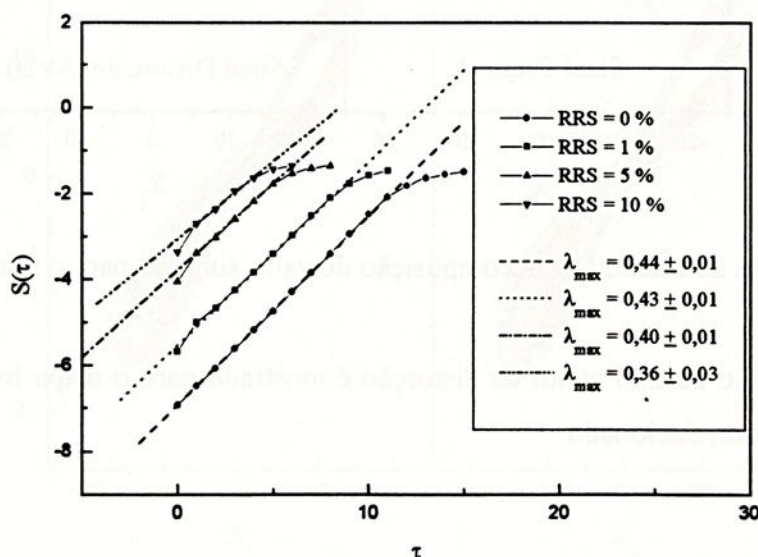


Figura 7.23 Maior expoente de Lyapunov para o mapa logístico calculado pelo algoritmo de Kantz, para vários níveis de contaminação.

7.4 REDUÇÃO DE RUÍDO

Nesta seção, passa-se à análise do efeito da redução de ruído sobre os sinais artificiais contaminados por vários níveis de ruído. Como ferramenta para a medida da eficiência da redução de ruído utilizaram-se o método de estimativa de nível de ruído, inspeção visual do atrator reconstruído e as curvas para a integral de correlação.

Na Fig. 7.24, apresenta-se redução de ruído por decomposição de valor singular (SVD) utilizando-se uma janela de imersão da ordem de seis vezes o tempo de autocorrelação, três vezes mais larga que a janela considerada adequada por Albano et al (1988). É notável a distorção causada pelo uso inadequado do método.

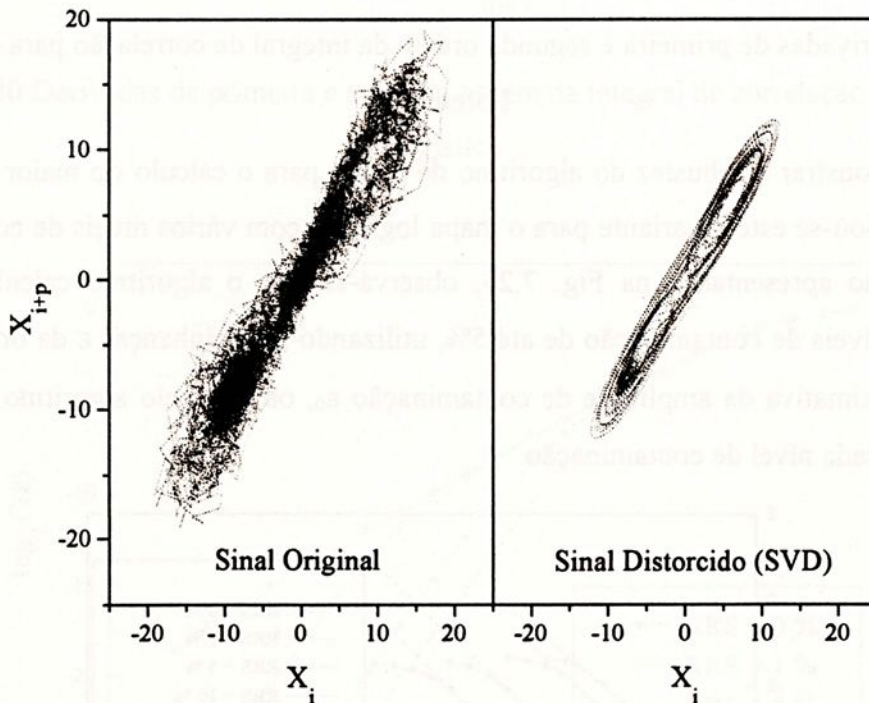


Figura 7.24 Falha do método de decomposição de valor singular para o sistema de Lorenz.

Na Fig. 7.25, o mesmo efeito de distorção é mostrado para o mapa logístico, devido ao sinal ser pouco autocorrelacionado.

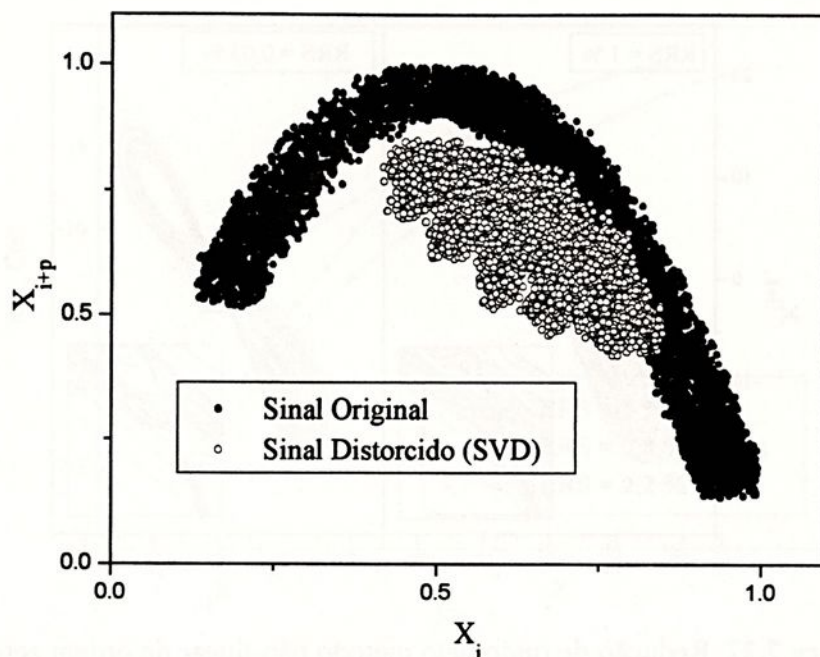


Figura 7.25 Falha do método de decomposição de valor singular para o mapa logístico.

Nas Figs. 7.26 e 7.27, mostra-se qualitativamente o efeito de suavização, para o atrator de Lorenz contaminado com nível de ruído de 1%, ao utilizar-se o método de decomposição de valor singular (SVD) e método não-linear de ordem zero (ESF), respectivamente.

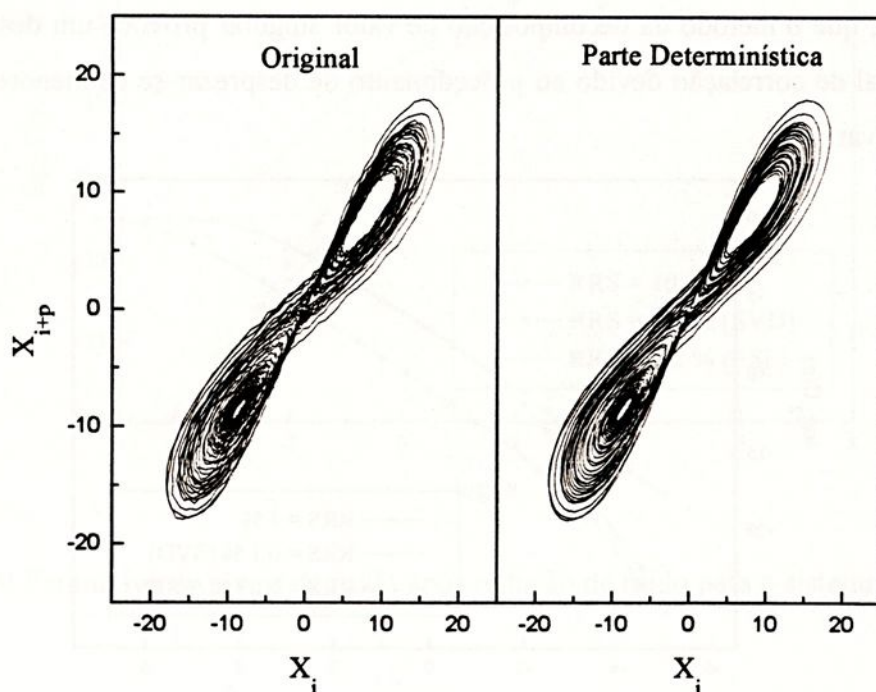


Figura 7.26 Redução de ruído por decomposição de valor singular.

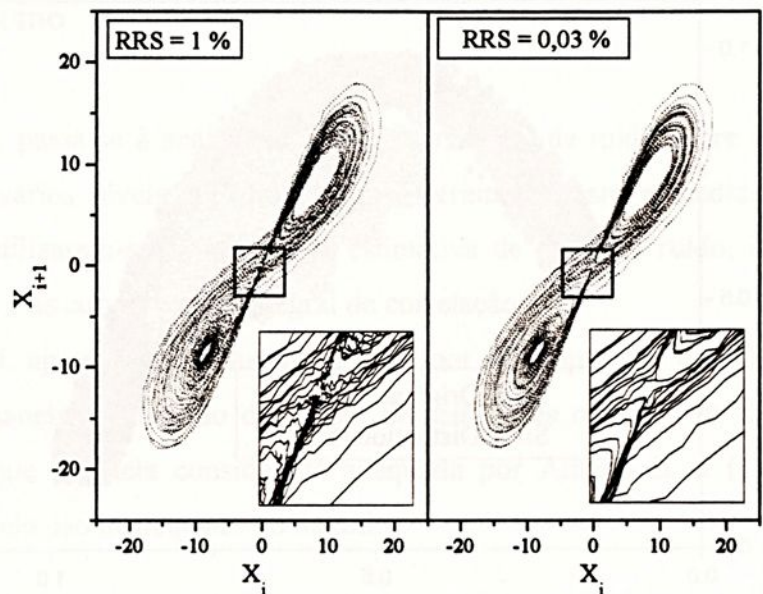


Figura 7.27 Redução de ruído pelo método não-linear de ordem zero.

Nas Figs. 7.28 a 7.30, mostram-se os efeitos dos métodos de redução de ruído sobre a curva da integral de correlação. Pode-se notar nestas figuras, as duas regiões de linearidades das curvas da integral de correlação mencionadas no capítulo 5. Além disso, percebe-se que a região de linearidade referente a dimensão do atrator de Lorenz aumenta após os processos de redução de ruído, mostrando que, de fato, estes métodos diminuem o alcance da influência do ruído. Nota-se , ainda, que o método da decomposição de valor singular provoca um deslocamento na curva da integral de correlação devido ao procedimento de desprezar-se os menores autovalores da matriz de covariância.

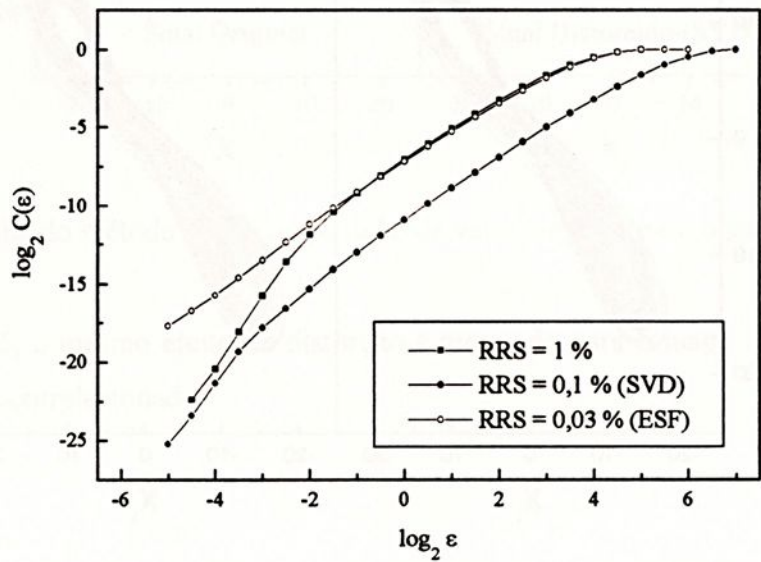


Figura 7.28 Estimativa de níveis de ruído após redução de ruído para o sistema de Lorenz.

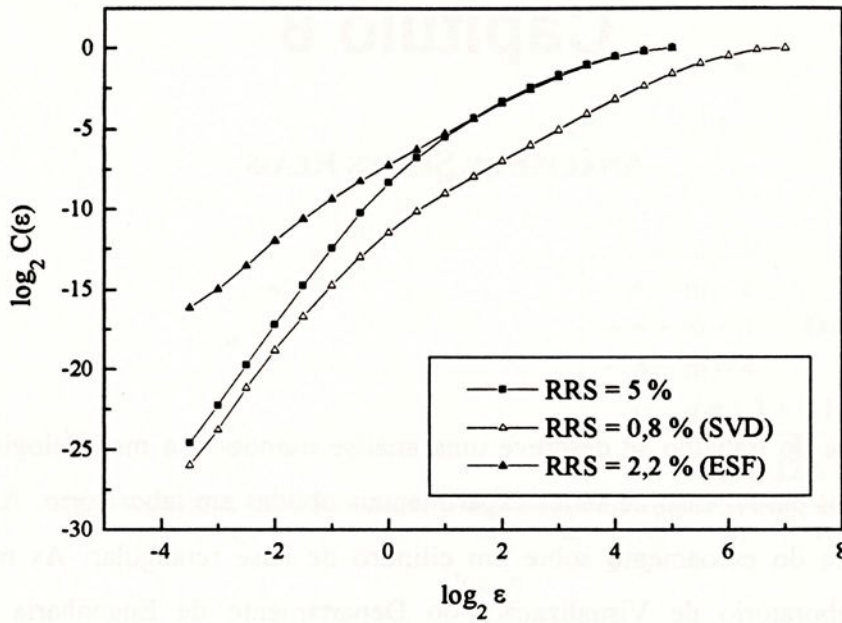


Figura 7.29 Estimativa de níveis de ruído após redução de ruído para o sistema de Lorenz.

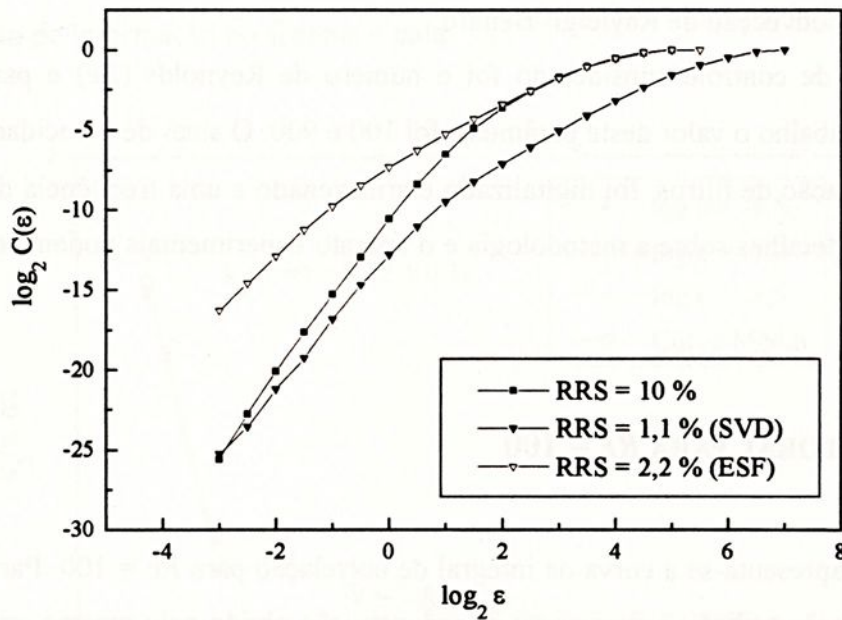


Figura 7.30 Estimativa de níveis de ruído após redução de ruído para o sistema de Lorenz.

Capítulo 8

ANÁLISE DE SÉRIES REAIS

8.1 INTRODUÇÃO

Nesta parte do trabalho se descreve uma análise usando-se a metodologia descrita nos capítulos anteriores para o caso de séries experimentais obtidas em laboratório. As séries foram medidas na esteira do escoamento sobre um cilindro de base retangular. As medidas foram realizadas no Laboratório de Visualização, do Departamento de Engenharia Mecânica da FEIS/UNESP. Este tipo de escoamento é classificado como sistema aberto, e a aplicação da teoria de sistemas dinâmicos a dados experimentais provenientes deste tipo de sistemas é escassa na literatura (Williams-Stuber e Gharib, 1990 e Dias-Jr et al, 1999), em contraste com a quantidade de estudos realizados para escoamentos fechados, como por exemplo, escoamento de Taylor-Couette e convecção de Rayleigh-Bénard.

O parâmetro de controle considerado foi o número de Reynolds (Re) e para as medidas utilizadas neste trabalho o valor deste parâmetro foi 100 e 900. O sinal de velocidade, com 2×10^4 pontos, sem utilização de filtros, foi digitalizado e armazenado a uma frequência de amostragem de 1kHz. Alguns detalhes sobre a metodologia e o aparato experimentais podem ser encontrados no Apêndice A.

8.2 SÉRIE TEMPORAL PARA $Re = 100$

Na Fig. 8.1, apresenta-se a curva da integral de correlação para $Re = 100$. Para o cálculo da integral de correlação utilizou-se um passo de reconstrução obtido pelo mesmo critério utilizado para o sistema de Lorenz, obtendo-se $p = 37$. As dimensões de correlação calculadas para $m \geq 4$ convergiram para $d = 1,1 \pm 0,1$, evidenciando o caráter periódico já conhecido do sinal. O alto valor para a estimativa do erro no cálculo da dimensão deve-se sobretudo ao nível de ruído presente no sinal, estimado em 12,5%.

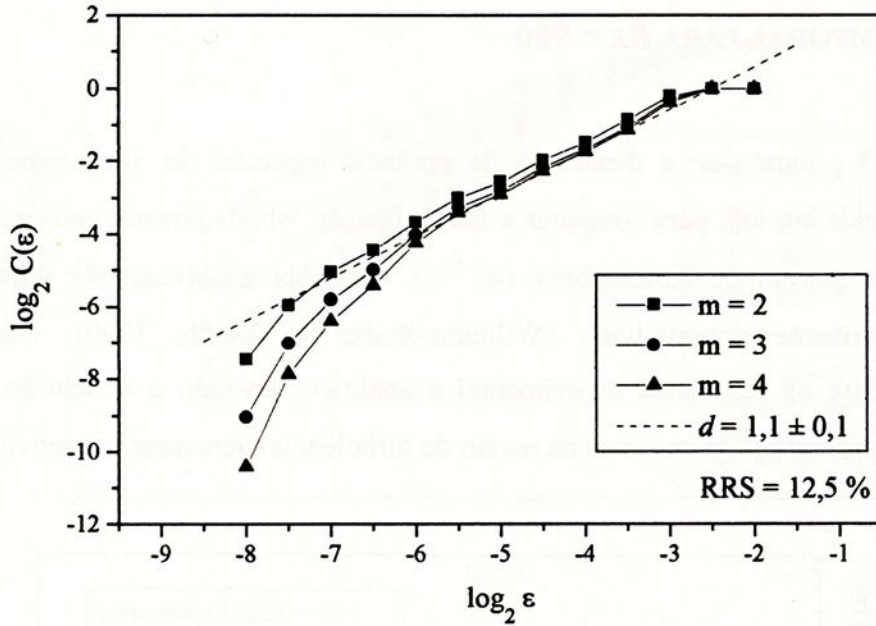


Figura 8.1 Dimensão de Correlação para $Re = 100$.

Na Fig. 8.2, apresenta-se a estimativa para a entropia de correlação para $Re = 100$, evidenciando o caráter periódico do sinal, uma vez que no comportamento periódico a taxa média de criação de informação no sistema é nula.

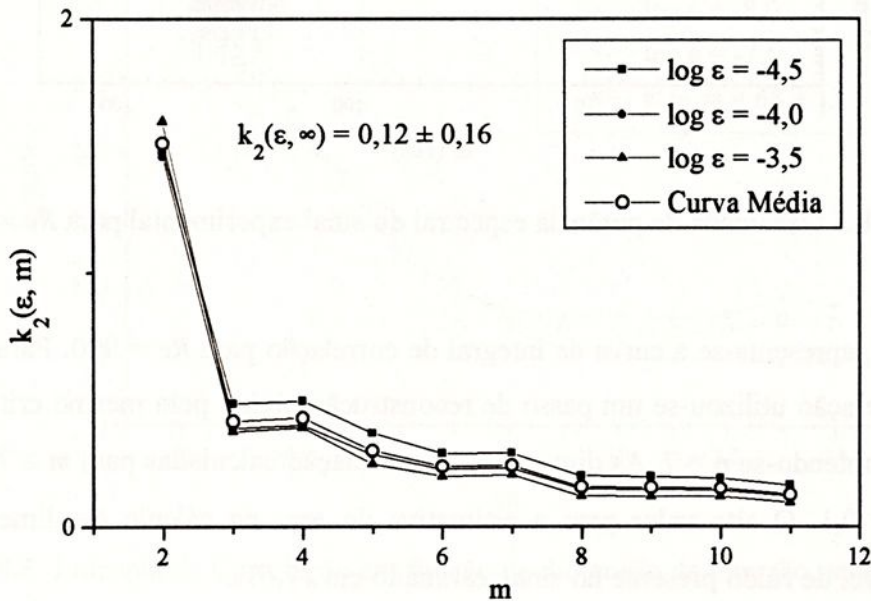


Figura 8.2 Entropia de Correlação para $Re = 100$.

8.3 SÉRIE TEMPORAL PARA $Re = 900$

Na Fig. 8.3, mostra-se a densidade de potência espectral do sinal experimental para $Re = 900$ em escala log-log, para comparar a sua inclinação, obtida por mínimos quadrados, com a inclinação da cascata de Kolmogorov ($\omega^{-5/3}$), deduzida analiticamente para escoamento turbulento plenamente desenvolvido (Williams-Stuber e Gharib, 1990). Observa-se boa concordância entre os resultados experimental e analítico, levando à conclusão de que para $Re = 900$, o escoamento já se encontra na região de turbulência plenamente desenvolvida.

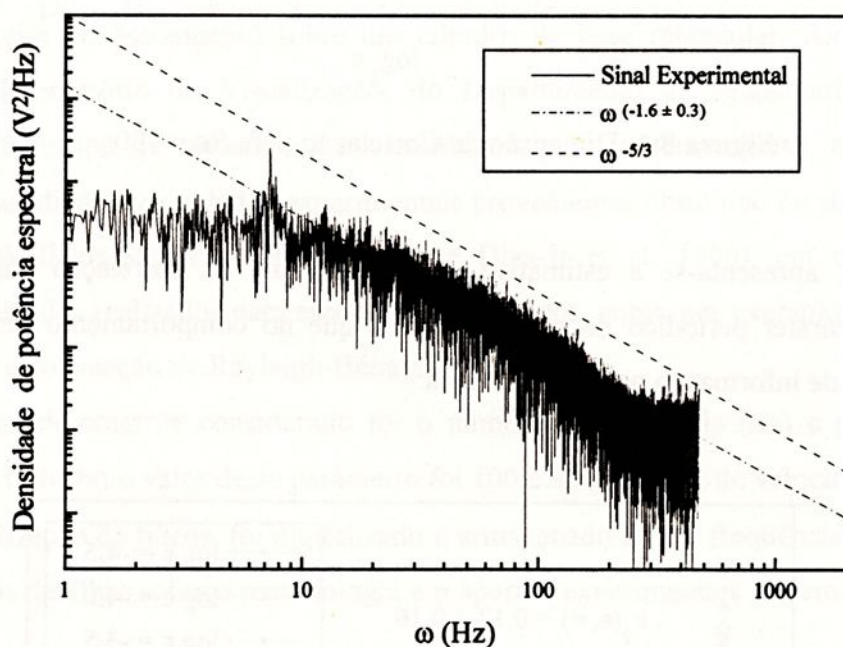


Figura 8.3 Densidade de potência espectral do sinal experimental para $Re = 900$.

Na Fig. 8.4, apresenta-se a curva da integral de correlação para $Re = 900$. Para o cálculo da integral de correlação utilizou-se um passo de reconstrução obtido pelo mesmo critério utilizado para $Re = 100$, obtendo-se $p = 7$. As dimensões de correlação calculadas para $m \geq 7$ convergiram para $d = 2,8 \pm 0,1$. O alto valor para a estimativa do erro no cálculo da dimensão deve-se sobretudo ao nível de ruído presente no sinal, estimado em 17,6%.

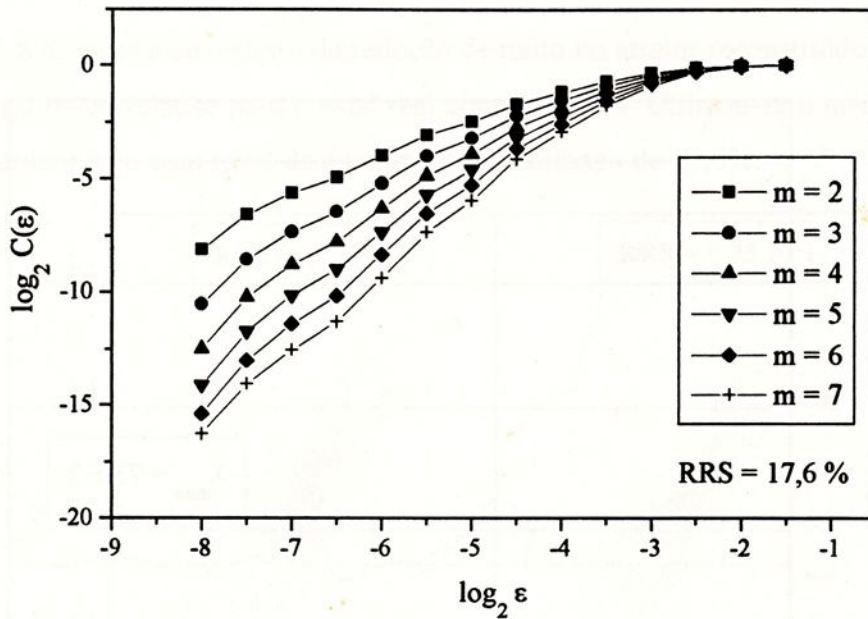


Figura 8.4 Dimensão de Correlação $Re = 900$.

Na Fig. 8.5, apresenta-se a estimativa para a entropia de correlação para $Re = 900$, evidenciando o caráter caótico do sinal, uma vez que entropia de correlação positiva é condição suficiente para existência de caos determinístico.

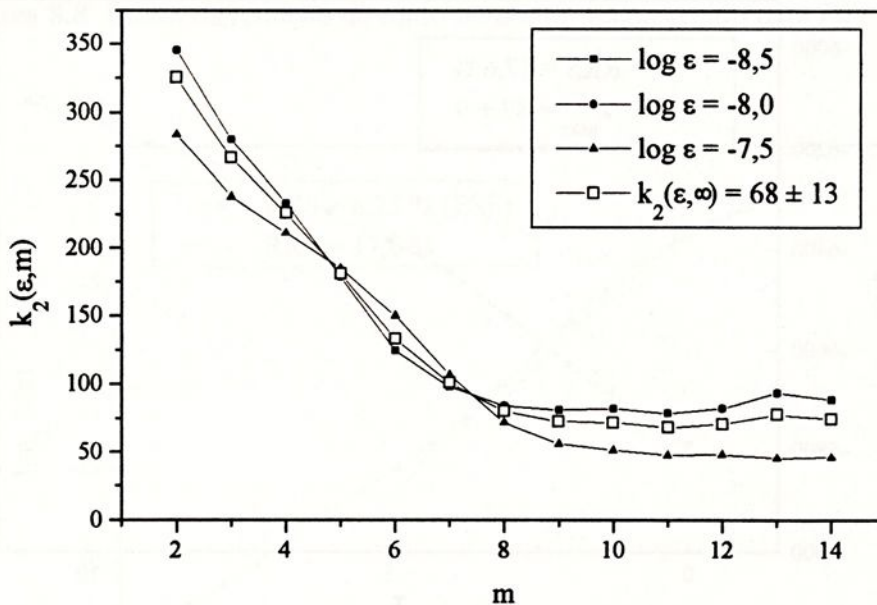


Figura 8.5 Entropia de Correlação em função da dimensão de imersão para $Re = 900$.

O valor estimado para a entropia de correlação é consistente com aqueles obtidos pelo cálculo do maior expoente de Lyapunov mostrados nas Fig. 8.6 e 8.7.

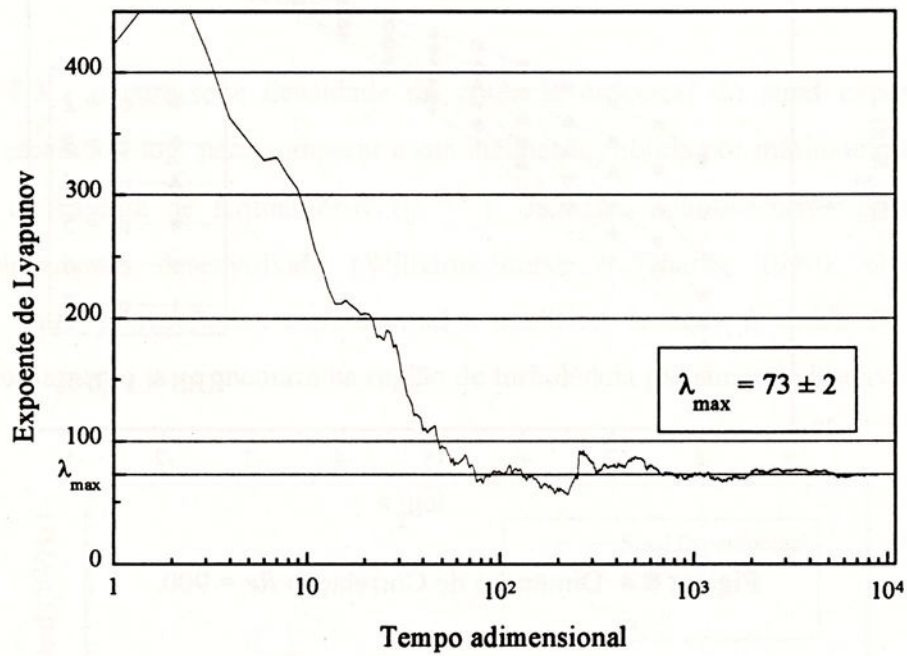


Figura 8.6 Determinação do maior expoente de Lyapunov pelo método de Wolf et al (1985).

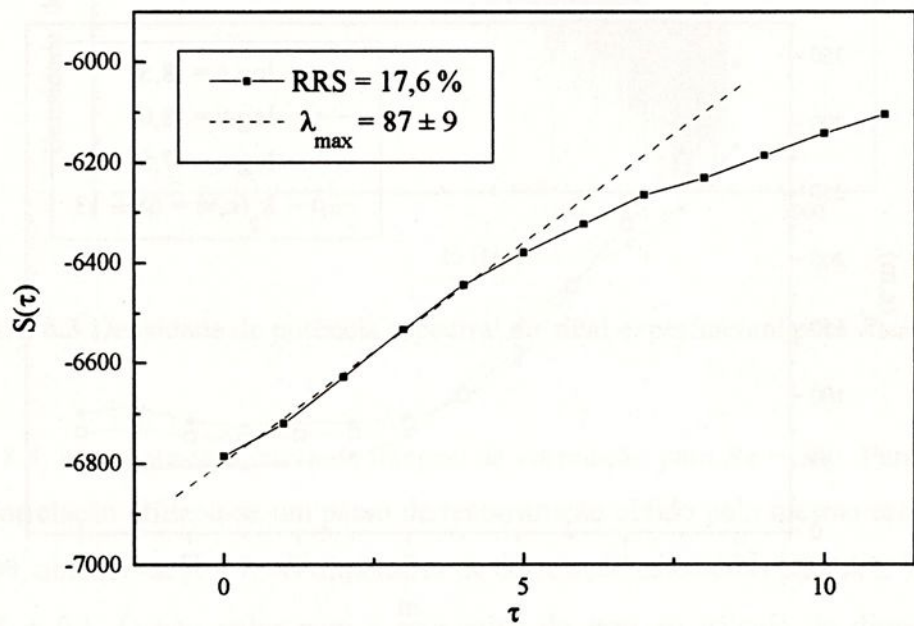


Figura 8.7 Determinação do maior expoente de Lyapunov pelo método de Kantz (1994).

Na Fig. 8.8, mostra-se o efeito da redução de ruído no atrator reconstruído e na Fig. 8.9, a curva da integral de correlação para o sinal real com $Re = 900$. Utilizou-se o método de redução não-linear de ordem zero com nível de contaminação estimado de 17,6%.

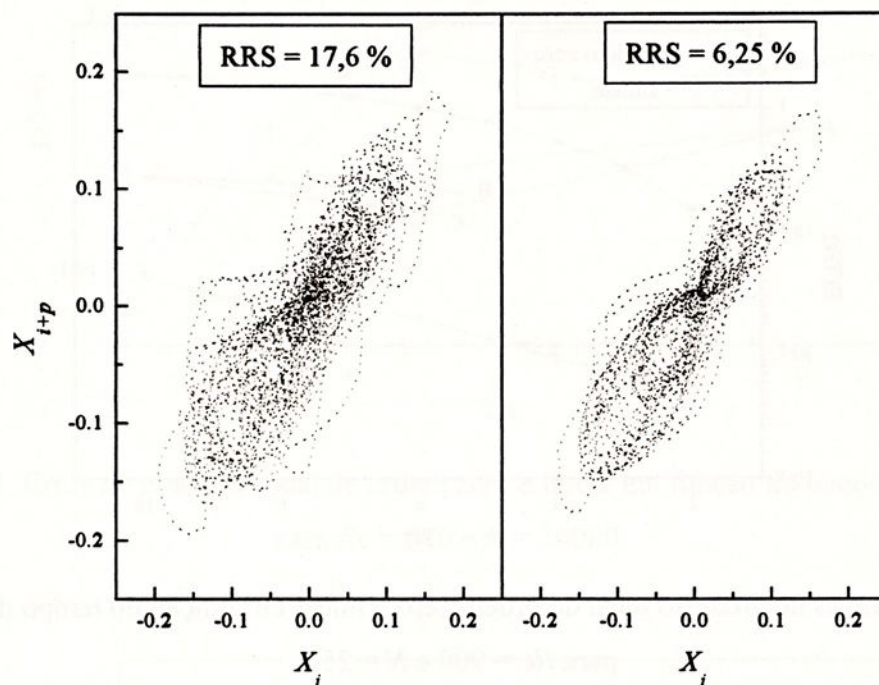


Figura 8.8 Efeito da redução de ruído no atrator reconstruído para $Re = 900$.

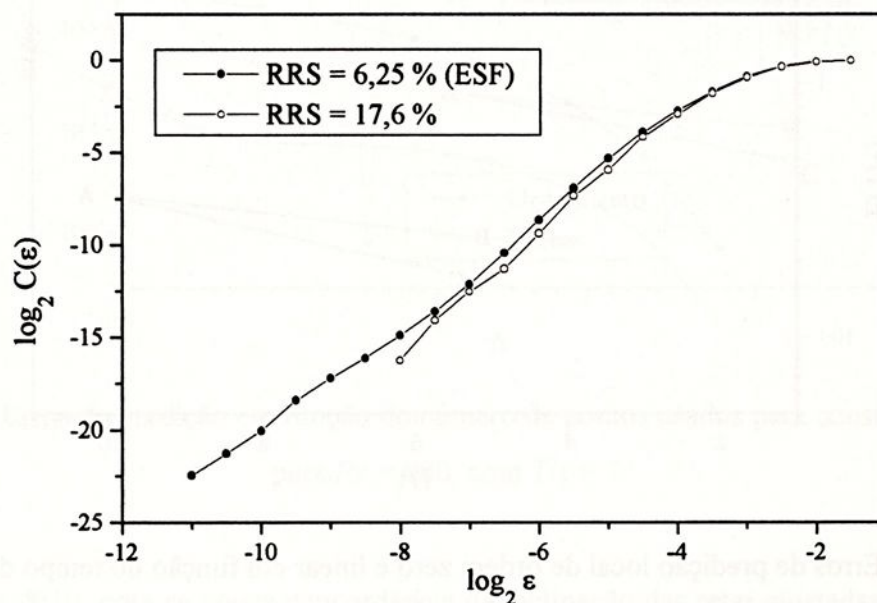


Figura 8.9 Curva da integral de Correlação para $Re = 900$ antes e após a redução de ruído.

Nas Figs. 8.10 a 8.12 apresentam-se erros de predição local, de ordem zero e linear, em função do tempo de predição, para diferentes valores de N .

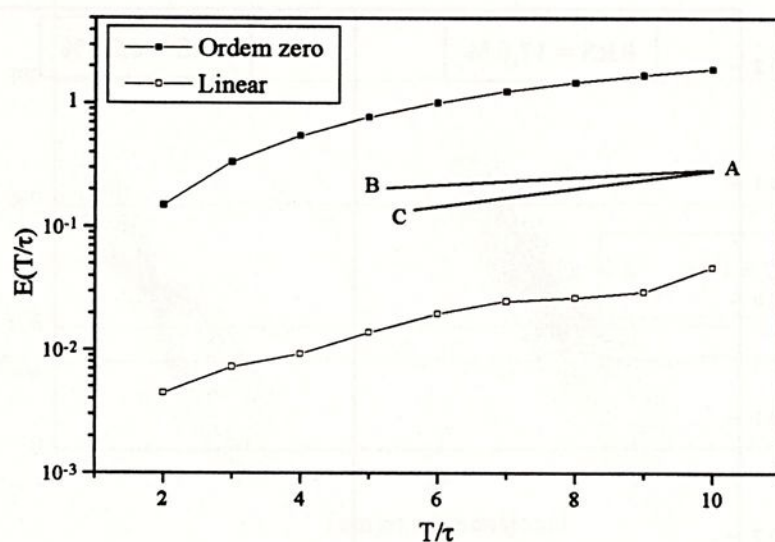


Figura 8.10 Erros de predição local de ordem zero e linear em função do tempo de predição, para $Re = 900$ e $N = 250$.

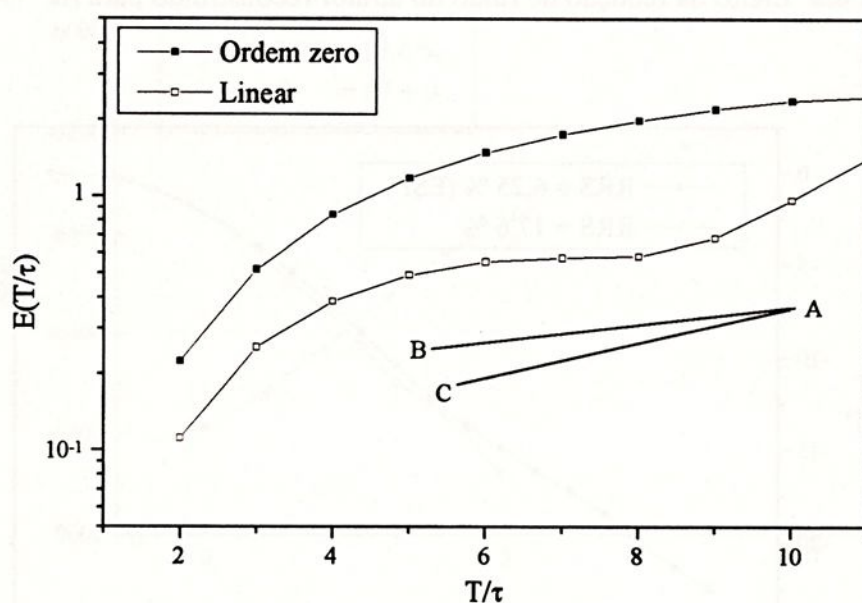


Figura 8.11 Erros de predição local de ordem zero e linear em função do tempo de predição, para $Re = 900$ e $N = 2000$.

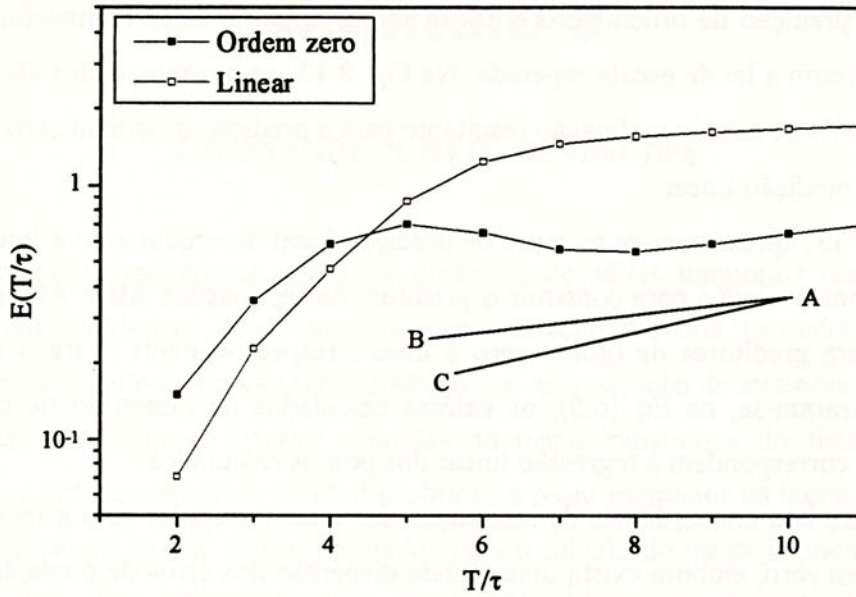


Figura 8.12 Erros de predição local de ordem zero e linear em função do tempo de predição, para $Re = 900$ e $N = 10000$.

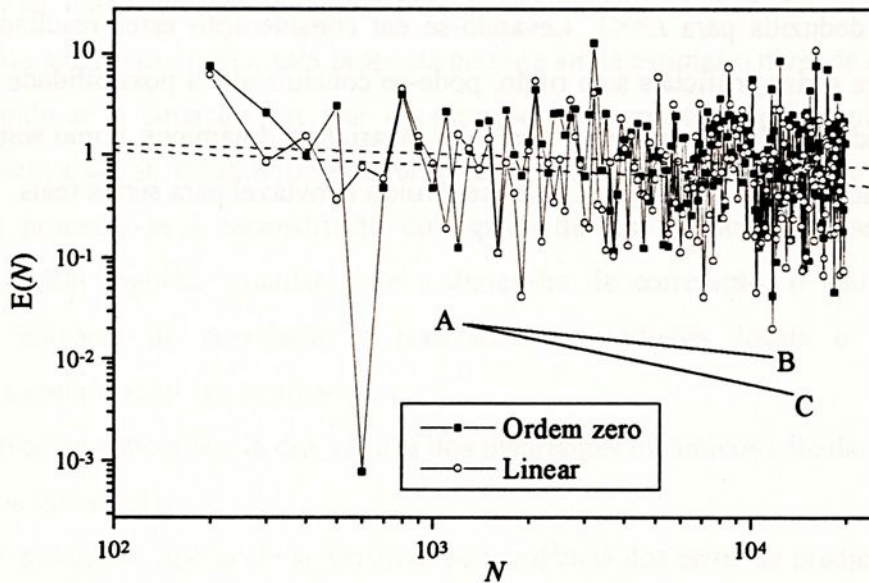


Figura 8.13 Erros de predição em função do número de pontos usados para construir o preditor, para $Re = 900$, com $T/\tau = 7$.

Na Fig. 8.10, nota-se pouca concordância da inclinação das retas ajustadas com as leis de escala calculadas a partir da Eq. (6.5), com $k_1 = 68$, nota-se ainda que as curvas apresentam aproximadamente a mesma inclinação. Na Fig. 8.11, pode-se perceber diferença entre as

inclinações para predição de ordem zero e linear, muito embora, estas inclinações não estejam em concordância com a lei de escala esperada. Na Fig. 8.12, os mesmos dados são apresentados para $N = 10000$. Neste caso, a inclinação resultante para a predição de ordem zero é maior que a resultante para a predição linear.

Na Fig. 8.13, apresentam-se os erros de predição local de ordem zero e linear em função do número de pontos usados para construir o preditor. As inclinações AB e AC representam as leis de escala para preditores de ordem zero e linear, respectivamente. Para o cálculo destas inclinações, utilizaram-se, na Eq. (6.5), os valores calculados da dimensão de correlação. As linhas tracejadas correspondem à regressão linear dos pontos calculados.

Nota-se uma boa concordância da inclinação das retas tracejadas com a lei de escala para predição de ordem zero, embora exista uma grande dispersão dos erros de predição em torno da reta obtida por regressão linear.

Este comportamento em desacordo com a lei de escala sugerida por Farmer e Sidorowich (1988) é explicado pela baixa capacidade de predição dos métodos. Os erros obtidos na predição do sinal real ($Re = 900$) foram da ordem de 10^{-1} , que estão fora da faixa da lei de escala, uma vez que ela foi deduzida para $E \ll 1$. Levando-se em consideração estes resultados e aqueles apresentados para séries artificiais sem ruído, pode-se concluir que a possibilidade de utilização deste tipo de predição e lei de escala para calcular invariantes dinâmicos, como sugerido para os autores, é de pouca confiabilidade para séries sem ruído e inviável para séries reais.

Capítulo 9

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste trabalho, realizou-se a análise dinâmica de séries temporais reais utilizando-se *Teoria de Sistemas Dinâmicos*. Para isso, após a apresentação da teoria, procedeu-se a um estudo de algoritmos para cálculo dos invariantes dinâmicos e reconstrução de atratores. Para validação, aplicaram-se estes algoritmos a séries oriundas do mapa logístico e do sistema de Lorenz. Verificou-se concordância entre os resultados obtidos e os apresentados na literatura.

Observou-se que os algoritmos utilizados para o cálculo do maior expoente de Lyapunov possuem parâmetros cujos valores oferecem grandes dificuldades em sua avaliação. Este é o caso do diâmetro característico e da vizinhança. Isto leva à conclusão de que um método de estimativa confiável destes parâmetros é necessário para sistematizar-se o procedimento de cálculo deste invariante dinâmico.

Propôs-se, então, uma metodologia para as estimativas do diâmetro característico e da vizinhança. Para sinais com ruído, esta proposta permite ainda estimar o nível de contaminação.

Simulando-se a situação em que as equações governantes da dinâmica não fossem conhecidas, realizaram-se estudos para determinar o passo de reconstrução e a dimensão de imersão, para proceder-se à reconstrução do espaço de fase a partir das séries "medidas" numericamente. Em seguida, calcularam-se a dimensão de correlação, o maior expoente de Lyapunov, a entropia de correlação e realizaram-se previsões locais e global visando detalhamento e comparação dos resultados.

Encontrou-se concordância dos valores dos invariantes dinâmicos calculados com aqueles apresentados na literatura.

Para as previsões, apesar de se verificar concordância dos erros de previsão com a lei de escala, constata-se uma grande dispersão destes valores em torno da reta obtida por regressão linear. Na literatura (Casdagli, 1989 e Farmer e Sidorowich, 1987), a concordância também é observada, entretanto, o número de pontos apresentados é muito menor, o que pode aparentemente ter levado à representação de menor dispersão dos pontos nos gráficos apresentados por estes autores. Além disso, à medida que se aumenta o número de pontos utilizados na previsão, aumentando-se, portanto, a densidade populacional de vizinhos, percebe-

se que os comportamentos das curvas do erro em função do tempo de predição, para a predição linear e de ordem zero, se aproximam entre si.

Objetivando a aplicação desta análise em séries reais, ruído branco foi produzido numericamente e adicionado, em vários níveis de contaminação, às séries obtidas numericamente. Com estas séries contaminadas procedeu-se ao estudo do efeito do ruído sobre o cálculo dos invariantes e da eficiência de dois métodos de redução de ruído e do método de estimativa de nível de ruído.

A metodologia descrita neste trabalho é mais simples que a proposta em Shoulten et al (1994) e, além disso, ela permite uma estimativa confiável dos parâmetros, proporcionando valores aceitáveis para o expoente de Lyapunov mesmo para séries com nível de ruído de até 5%.

Uma vez que, utilizando-se estimativas dos parâmetros mais próximas dos valores reais, conseguem-se valores aceitáveis para os invariantes dinâmicos, a redução de ruído não se justifica para níveis de contaminação de até 5%.

Em seguida, analisaram-se duas séries reais obtidas de medidas de velocidade na esteira do escoamento sobre um cilindro de base retangular, com número de Reynolds 100 e 900.

Realizaram-se então predições linear e de ordem zero para estas séries e concluiu-se que é inviável a utilização dos métodos de predição não-linear discutidos para a determinação dos invariantes dinâmicos de atratores reconstruídos a partir de séries temporais reais, como sugerido na literatura. Isto é devido, principalmente, à baixa capacidade de predição dos métodos propostos em Farmer e Sidorowich (1987) e Casdagli (1989), gerando erros de predição fora da região de validade ($E \ll 1$) da lei de escala, que proporcionaria um meio de estimarem-se os invariantes.

Os invariantes dinâmicos calculados para estas séries temporais reais foram consistentes. Para $Re = 100$, obtiveram-se entropia e dimensão de correlação, aproximadamente, nula e unitária, respectivamente. Estes resultados estão em acordo com os esperados para um ciclo limite, obtido da reconstrução do atrator de um sinal periódico, tal como na literatura (Okajima, 1982) para este regime de escoamento ($Re = 100$). Para $Re = 900$, obtiveram-se entropia de correlação positiva e a dimensão de correlação obtida apresentou convergência para dimensões de imersão crescentes. Além disso, o maior expoente de Lyapunov calculado pelos métodos de Wolf e de Kantz foram coerentes entre si, e em concordância com a entropia de correlação, demonstrando o comportamento caótico do sistema neste regime de escoamento ($Re = 900$).

Conclui-se, então, que a análise de séries temporais reais utilizando-se Teoria de Sistemas Dinâmicos apresenta-se como uma alternativa viável, principalmente quando tratam-se de séries obtidas de sistemas não-lineares aperiódicos, os quais a análise espectral não consegue diferenciar de sinais aleatórios.

Dada à confiabilidade e à coerência no cálculo dos invariantes dinâmicos proporcionadas pela melhor estimativa dos parâmetros no cálculo do maior expoente de Lyapunov, sugere-se a realização de trabalhos utilizando-se este invariante, e possivelmente a dimensão de correlação, como parâmetros a serem inspecionados em sistemas de controle automático e manutenção preditiva. Entretanto, para que a utilização destes invariantes seja eficiente, salienta-se a necessidade de se melhorar as condições computacionais para sua determinação.

Além do aumento da capacidade de processamento que certamente será obtida pela melhoria do equipamento computacional, sugere-se a realização de novos trabalhos de pesquisa, sejam eles buscando-se a otimização dos algoritmos existentes, bem como também o desenvolvimento de novos algoritmos, até mesmo capazes de estimar os invariantes a partir de séries mais curtas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abarbanel, H. D., Brown, R., Kadtke, J.B., 1990, "Prediction in Chaotic Nonlinear Systems: Methods for Time Series with Broadband Fourier Spectra", *Physical Review A*, Vol. 41, No. 4, pp. 1782-1807.
- Albano, A. M., Muench, J., Schwartz, C., Mees, A.I., Rapp, P.E., 1988, "Singular-value Decomposition and the Grassberger-Procaccia Algorithm", *Physical Review A*, Vol. 38, No. 6, pp. 3017-3026.
- Badii, R., Politi, A., 1984, "Hausdorff Dimension and Uniformity Factor of Strange Attractors", *Physical Review Letters*, Vol. 52, pp. 1661-1673.
- Broomhead, D. S., King, G. P., 1986, "Extracting Quantitative Dynamics from Experimental Data", *Physica D*, Vol. 20, pp. 217-236.
- Brown, R., Bryant, P., Abarbanel, H.D.I., 1991, "Computing the Lyapunov Spectrum of a Dynamical System from an Observed Time Series", *Physical Review A*, Vol. 43, No. 6, pp. 2787-2806.
- Cambráia, H. N., 1997, "Noise Reduction in Time Series by Using Singular Value Decomposition", XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 1997, Bauru, SP, Anais..., Bauru, CDROM.
- Casdagli, M., Eubank, S., Farmer, J.D., Gibson, J., 1991, "State Space Reconstruction in the Presense of Noise", *Physica D*, Vol. 51, pp. 52-98.
- Casdagli, M., 1989, "Nonlinear Prediction of Chaotic Time Series", *Physica D*, Vol. 35, pp. 335-356.
- Devaney, R. L., 1992, "A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment", 1ª Ed., Reading: Addison-Wesley, 302p.
- Dias-Jr, T., Lindquist, C., Cambráia, H.N., Woiski, E.R., 1999, "Predicting the Behavior of the Wake of a Rectangular Cylinder from Experimental Chaotic Time Series", XV Congresso

- Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia, SP, Anais..., 1999, Águas de Lindóia, CDROM.
- Eckmann, J-P., Ruelle, D., 1992, "Fundamental Limitations for Estimating Dimensions and Lyapunov Exponents in Dynamical Systems", *Physica D*, Vol. 56, pp. 185-187.
- Farmer, J. D., Sidorowich, J. J., 1987, "Predicting Chaotic Time Series", *Physical Review Letters*, Vol. 59, No. 8, pp. 845-848.
- Feigenbaum, M. J., 1978, "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations", *J. Stat. Phys.*, Vol. 19, pp. 25-52.
- Fiedler-Ferrara, N. E., Prado, C. P. C., 1994, "Caos: uma Introdução", 1ª Ed., São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 402p.
- Fraser, A. M., Swinney, H. L., 1986, "Independent Coordinates for Strange Attractors from Mutual Information", *Physical Review A*, Vol. 33, No. 2, pp. 1134-1140.
- Girault, P., 1991, "Attractors and Dimensions". In: *Fractals, Non-integral Dimensions and Applications*, 1ª Ed., Chinchester: John Wiley & Sons, 249p.
- Grassberger, P., Procaccia, I., 1983, "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", *Physica D*, Vol. 9, pp. 189-208.
- Hentschel, H. G. E., Procaccia, I., 1983, "The Infinite Number of Generalized Dimensions of Fractals and Strange Attractors", *Physica D*, Vol. 8, pp. 435-444.
- Kantz, H., 1994, "A Robust Method to Estimate the Maximal Lyapunov Exponent of a Time Series", *Physics Letters A*, Vol. 185, pp. 77-87.
- Kennel, M. B., Brown, R., Abarbanel, H. D. I., 1992, "Determining Dimension for Phase-Space Reconstruction Using a Geometrical Construction", *Physical Review A*, Vol. 45, pp. 3403-3415.
- Kostelich, E. J., Schreiber, T., 1993, "Noise Reduction in Chaotic Time-series Data: A Survey of Common Methods", *Physical Review E*, Vol. 48, No.3, pp. 1752-1763.

- Lorenz, E. N., 1963, "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of Atmospheric Sciences*, Vol. 20, pp. 130-141.
- May, R., 1976, "Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics", *Nature*, Vol. 261, pp. 459-467.
- Okajima, A., 1982, "Strouhal numbers of rectangular cylinders", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 123, pp. 379-398.
- Packard, N. H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D., Shaw, R.S., 1980, "Geometry from Time Series", *Physical Review Letters*, Vol. 45, pp. 721-719.
- Press, W. H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1996, "Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing", 2^a Ed., Cambridge: Cambridge Press, 933p.
- Ruelle, D., Takens. F., 1971, "On the Nature of Turbulence", *Commun. Math. Phys.*, Vol. 20, pp. 167-192.
- Schreiber, T., 1993a, "Determination of the Noise Level of Chaotic Time Series", *Physical Review E*, Vol. 48, No. 1, pp. R13-R16.
- Schreiber, T., 1993b, "Extremely Simple Nonlinear Noise Reduction Method", *Physical Review E*, Vol. 47, No. 4, pp. 2401-2404.
- Schutz, B. F., 1980, "Geometrical Methods of Mathematical Physics", 1^a Ed., Cambridge: Cambridge Press, 250p.
- Shoulten, J. C., Takens, F., van den Bleek, C. M., 1994, "Estimation of the Dimension of a Noisy Attractor", *Physical Review E*, Vol. 50, No. 3, pp. 1851-1861.
- Sivakumar, B., Phoon, K.-K., Liong, S.-Y., Liaw, C.-Y., 1999, "A Systematic Approach to Noise Reduction in Chaotic Hydrological Time Series", *Journal of Hydrology*, Vol. 219, pp. 103-135.
- Takens, F., 1981, "Detecting Strange Attractors in Turbulence". In: *Dynamical Systems and Turbulence*, *Lectures notes in Math.* 898, Springer, pp. 366.

- Vieira, E.D.R., 1997, "Estudo Qualitativo e Quantitativo de Escoamentos ao Redor de Corpos Não-Aerodinâmicos Utilizando-se Técnicas de Visualização em Meio Hidrodinâmico", Tese de doutorado, ITA - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 200p.
- Williams-Stuber, K., Gharib, M., 1990, "Transition from Order to Chaos in the Wake of an Airfoil", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 213, pp. 29-57.
- Wolf, A., Swift, B., Swinney, H. L., Vastano, J. A., 1985, "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", *Physica D*, Vol. 16, pp. 285-317.

Apêndice A

SÉRIES EXPERIMENTAIS

A.1 TÚNEL HIDRODINÂMICO

Os dados experimentais foram cedidos pelo pós-graduando Cláudio Lindquist, e foram obtidos em experimentos realizados em um túnel hidrodinâmico de circuito aberto, com dimensões da seção de teste 146 x 146 x 500 mm.

O túnel hidrodinâmico foi utilizado no modo contínuo de operação. Neste modo, com a bomba centrífuga em operação, as válvulas da entrada e da saída foram ajustadas de modo a manter constante o nível de água no reservatório superior. Este modo permite a condução de testes de longa duração, velocidade constante e nível de perturbação residual de menos de 1% (Vieira, 1997).

A.2 MODELO DE TESTE

Os testes foram realizados com um cilindro retangular com dimensões nominais $3 \times 6 \times 146\text{mm}$ ($W \times H \times L$). O modelo foi usinado e polido de modo a garantir boa qualidade dimensional, arestas agudas e superfícies lisas. O modelo foi fixado firmemente na parede posterior da seção de teste com ângulo de incidência nulo, isto é, com a menor face voltada para cima.

A.3 METODOLOGIA EXPERIMENTAL

Para medidas instantâneas de velocidade, foi utilizado um anemômetro a temperatura constante Dantec® StreamLine modelo 90N10, utilizando um módulo CTA 90C10 e uma sonda de filme quente modelo 55R11, conectados a um sistema de aquisição de dados. O anemômetro foi controlado através um aplicativo StreamWare versão 1.11, fornecido pelo fabricante.

A sonda, instalada em um suporte em L modelo 55H22, foi introduzida na seção de teste através de um orifício em uma parede lateral e colocada na esteira do escoamento sobre o cilindro. O suporte foi fixado em um dispositivo de posicionamento, e a distância da sonda ao

modelo de teste foi ajustada para aproximadamente 5H abaixo e 2H lateralmente.

O sinal de velocidade, sem utilização de filtros, foi digitalizado e armazenado a uma frequência de amostragem de 1kHz. Uma série típica medida tinha 2×10^4 .

A.4 PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

O número adimensional que exerce uma grande influência sobre o escoamento em torno de corpos cilíndricos é o número de Reynolds, definido como

$$Re = \frac{VW}{\nu} \quad (\text{A.1})$$

onde V é a velocidade do escoamento livre, W é a dimensão característica do cilindro na direção do escoamento e ν é a viscosidade cinemática do fluido. A velocidade do escoamento livre foi medida com um medidor eletromagnético. A viscosidade cinemática foi calculada a partir de uma expressão empírica, dada como uma função da temperatura. A incerteza associada ao número de Reynolds foi estimada em torno de 5%.

A razão de forma, dada pela relação entre a altura e a largura da seção transversal retangular, foi dois. A razão de aspecto do cilindro, definida como a relação entre o seu comprimento e o diâmetro característico, foi 24. A razão de bloqueio geométrico, dada pela relação entre a área frontal do cilindro e a área da seção transversal, foi 4,9%, tal que nenhum procedimento de correção foi necessário.



Apêndice B

REGULARIZAÇÃO DE MÍNIMOS QUADRADOS

B.1 FUNÇÃO MÉRITO E MÍNIMOS QUADRADOS

Suponha-se que estejamos ajustando N pontos $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ a um modelo que é uma combinação linear de M funções (polinomial, senos, etc.), com M parâmetros ajustáveis $a_k, k = 1, \dots, M$. A forma genérica deste tipo de modelo é,

$$y(x) = \sum_{k=1}^M a_k X_k(x) \quad (\text{B.1})$$

onde $X_1(x), X_2(x), \dots, X_M(x)$ são funções arbitrárias de x , chamadas funções base. Note que as funções $X_k(x)$ podem ser funções não-lineares de x . Definindo-se uma função mérito, a ser minimizada, como,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - \sum_{k=1}^M a_k X_k(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (\text{B.2})$$

onde σ_i é o erro conhecido da medida do i -ésimo ponto. Se os erros de medição não são conhecidos, σ_i podem ser ajustados para o valor constante $\sigma_i = 1$.

Procuram-se, então, os parâmetros que minimizam a função mérito. Existem vários métodos disponíveis para minimizar essa função, dois dos quais são particularmente importantes: Método das equações normais e método da decomposição de valor singular (Press et al, 1996).

Antes de estudarmos os métodos de minimização, é necessário estabelecer-se algumas notações. Seja A uma matriz com $N \times M$ componentes, construída a partir de M funções base avaliadas nas N abscissas x_i , e de N erros de medida σ_i ,

$$A_{ij} = \frac{X_j(x_i)}{\sigma_i} \quad (\text{B.3})$$

Em geral, essa matriz tem mais linhas que colunas, $N \geq M$, uma vez que necessita-se de mais pontos que parâmetros do modelo a serem determinados.

Definem-se, também, o vetor $\vec{b}$ com N componentes por,

$$b_i = \frac{y_i}{\sigma_i} \quad (\text{B.4})$$

e o vetor $\vec{a}$, cujos componentes são os parâmetros a serem determinados.

B.2 MÉTODO DAS EQUAÇÕES NORMAIS

O mínimo da Eq. (2) ocorre quando a derivada de χ^2 em relação a todos os M parâmetros a_k é nula. Esta condição gera as M equações,

$$0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left[y_i - \sum_{j=1}^M a_j X_j(x_i) \right] X_k(x_i), \quad k = 1, \dots, M \quad (\text{B.5})$$

trocando a ordem dos somatórios, pode-se escrever a equação matricial,

$$\sum_{j=1}^M \alpha_{kj} a_j = \beta_k \quad (\text{B.6})$$

onde

$$\alpha_{jk} = \sum_{i=1}^N \frac{X_j(x_i) X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \text{ ou, equivalentemente,}$$

$$[\alpha] = A^T A \quad (\text{B.7})$$

e

$$\beta_k = \sum_{i=1}^N \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \text{ ou, equivalentemente,}$$

$$[\beta] = A^T \vec{b} \quad (\text{B.8})$$

As equações (B.5) e (B.6) são chamadas equações normais do problema de mínimos quadrados. Elas podem ser resolvidas por qualquer método de solução de sistemas lineares.

A matriz inversa $C_{jk} \equiv [\alpha]_{jk}^{-1}$ é fortemente relacionada às prováveis incertezas dos parâmetros estimados $\vec{a}$. Para estimar estas incertezas, considera-se, a partir das Eqs. (B.6) e (B.8),

$$a_j = \sum_{k=1}^M [\alpha]_{jk}^{-1} \beta_k = \sum_{k=1}^M C_{jk} \left[\sum_{i=1}^N \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \right] \quad (\text{B.9})$$

e a variância associada ao parâmetro estimado a_j pode ser determinada a partir da equação,

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \left(\frac{\partial a_j}{\partial y_i} \right)^2 \quad (\text{B.10})$$

Note que α_{jk} é independente de y_i , tal que,

$$\frac{\partial a_j}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^M C_{jk} X_k(x_i) / \sigma_i^2 \quad (\text{B.11})$$

Consequentemente, tem-se que

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M C_{jk} C_{jl} \left[\sum_{i=1}^N \frac{X_k(x_i) X_l(x_i)}{\sigma_i^2} \right] \quad (\text{B.12})$$

O último termo é a matriz $[\alpha]$, e uma vez que $[C]$ é a matriz inversa de $[\alpha]$, a equação anterior se reduz a,

$$\sigma^2(a_j) = C_{jj} \quad (\text{B.13})$$

Então, conclui-se que os elementos da diagonal de $[C]$ são as variâncias dos parâmetros ajustados $\vec{a}$, e os elementos restantes, C_{jk} , são as covariâncias entre os elementos a_j e a_k .

B.3 MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE VALOR SINGULAR

Em algumas aplicações, as equações normais são perfeitamente adequadas aos problemas de mínimos quadrados lineares. Entretanto, em muitos casos, em geral quando os dados a serem ajustados estão contaminados por ruído, as equações normais são singulares, e não se pode encontrar a solução dessas equações. A decomposição de valor singular supera este problema utilizando uma função mérito modificada, e resolvendo-se o sistema resultante da minimização pela decomposição da matriz de coeficientes inversa em três matrizes, duas ortogonais e uma diagonal de valores singulares.

$$A^{-1} = V[\text{diag}(1/\omega_i)]U^T \quad (\text{B.14})$$

onde U e V denotam as matrizes ortogonais e ω_i os valores singulares obtidos da decomposição de valor singular da matriz A^{-1} .

Considerando-se a mesma notação utilizada para as equações normais, pode-se escrever a função mérito a ser minimizada, como,

$$\chi^2 = |A\vec{a} - \vec{b}|^2 \quad (\text{B.15})$$

A solução do sistema resultante da minimização, pela decomposição de valor singular, é dada pela equação,

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^M \left(\frac{U_{(i)} \vec{b}}{\omega_i} \right) V_{(i)} \quad (\text{B.16})$$

onde $U_{(i)}$, $i=1, \dots, M$ denotam as colunas da matriz ortogonal U , $V_{(i)}$, $i=1, \dots, M$ denotam as colunas da matriz ortogonal V e ω_i os valores singulares obtidos da decomposição de valor singular da matriz A .

As variâncias dos parâmetros estimados a_j são dadas por,

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{\omega_i^2} [V_{(i)}]_j^2 = \sum_{i=1}^M \left(\frac{V_{ji}}{\omega_i} \right)^2 \quad (\text{B.17})$$

Este método de solução baseado na decomposição de valor singular permite identificar combinações lineares de variáveis que não contribuem para a minimização da função mérito. Para estas variáveis os valores singulares são nulos ou relativamente pequenos, provocando instabilidades nos parâmetros calculados. A regularização consiste em desconsiderar-se estas variáveis, reajustando-se os parâmetros correspondentes a estes autovalores para zero. O reajuste destes valores reduz significativamente o erro nos coeficientes estimados, enquanto aumenta desprezivelmente o valor da função mérito.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dem.feis.unesp.br

