Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

# A Irracionalidade e Transcendência do Número $e$

**Getulio de Assis Vasconcelos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
**Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli**

**2013**

512 Vasconcelos, Getulio de Assis
V33li A Irracionalidade e Transcendência do Número $e$/ Getulio de Assis Vasconcelos- Rio Claro: [s.n.], 2013.
39 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Elíris Cristina Rizziolli

1. Álgebra. 2. Teoria dos Números. 3. Números Algébricos. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

# TERMO DE APROVAÇÃO

Getulio de Assis Vasconcelos

A Irracionalidade e Transcendência do Número $e$

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli
Orientadora

Prof. Dr. Aldicio José Miranda
Instituto de Ciências Exatas-UNIFAL-MG

Prof. Dr. Thiago de Melo
Departamento de Matemática-IGCE-UNESP/Rio Claro

**Rio Claro, 28 de Janeiro de 2013**

*Dedicado a minha esposa Anna e a meu filho João Vicente*

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a minha família querida, minha esposa Anna Paula Almeida Vasconcelos e meu filho João Vicente Almeida Vasconcelos pelo incentivo e paciência de suportar a minha ausência em finais de semana e férias para que a conclusão do curso e desse trabalho fossem realizados.

Aos meus pais: Rivair de Assis Vasconcelos e Maria Aparecida Vasconcelos e minha irmã Valéria de Assis Vasconcelos que sempre me incentivaram, principalmente no início, onde eu tinha dúvidas se conseguiria conciliar a vida de trabalhador com a vida de estudante de Pós-Graduação.

A minha sogra Cleuza dos Santos Almeida por sempre rezar muito pelo meu sucesso pessoal e profissional, e pelo meu cunhado Arnaldo Jorge de Almeida Junior por me aconselhar e me orientar devido a sua experiência de Mestre formado na academia e na vida.

Agradecimentos também aos meus colegas de turma do Profmat 2011 da Unesp Rio Claro por compartilhar experiências e conhecimentos ao longo de 2 anos, fundamentais para o meu sucesso acadêmico.

E por último e mais importante, agradeço a Deus, por me dar a oportunidade de nascer e viver nesse mundo e me iluminar em todas as minhas decisões, estas que me fizeram crescer e evoluir na vida.

Obrigado a todos!

*Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática da matemática, nem que mais prejudique e atrapalhe os calculadores, do que as multiplicações, as divisões, as extrações do quadrado e do cubo dos números muito grandes...comecei a considerar em minha mente através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover essas dificuldades.*

John Napier, *Mirifici logarithmorum canonis descriptio(1614)*

# Resumo

Quando John Napier desenvolveu seu estudo sobre logaritmo, ele com certeza não imaginou as implicações futuras de suas descobertas. O número $e$ tem importância estratégica nas aplicações de várias áreas do conhecimento científico. Esse trabalho tem como objetivo apresentar o número $e$ como limite infinito de uma sequência, demonstrar sua existência, irracionalidade e transcendência.

**Palavras-chave:** Álgebra, Teoria dos Números, Números Algébricos.

# Abstract

When John Napier developed his study of logarithm, he certainly did not imagine the future implications of their findings. The number $e$ has strategic importance in applications from various areas of scientific knowledge. This work aims to present the number $e$ as the limit of infinite sequence, demonstrating its existence, irrationality and transcendence.

**Keywords:** Algebra, Number Theory, Algebraic Numbers.

# Sumário

# 1 Introdução

Para apresentarmos a história do número $e$ é preciso emprestar a história de outro objeto importante para a evolução da matemática, a saber, os Logaritmos.

Logaritmo: palavra de origem grega formada de lógos (razão, evolução, discurso) e aritmós (número). Logaritmo significa, literalmente, a evolução de um número. O símbolo *log*, contração de logarithm, é devido ao astrônomo Kepler.

Os logaritmos foram inventados por John Napier (1550-1617). Seu objetivo era obter uma forma menos trabalhosa de fazer cálculos. E, na época, uma multiplicação entre números grandes, por exemplo, era um verdadeiro sacrifício, a ideia era obter o resultado de uma multiplicação através de uma operação mais fácil: a soma.

Neper ou Nepier construiu suas tábuas de logaritmos e publicou um tratado: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Posteriormente, outro matemático, Henry Briggs (1561-1631) sugeriu o uso da base 10, cujas tabelas com a notação *log de N na base 10* é usada até hoje.

E na sequência, depois do logaritmo decimal, ensinava-se logaritmos em outras bases, em especial o famoso *ln x*, significando logaritmos natural ou logaritmo na base $e$, ou ainda, logaritmo neperiano.

Para apresentar o número $e$, vamos supor uma situação bastante hipotética. Imagine que um banco pague juros de 100 por cento ao ano, após esse 1 ano, teríamos o montante de 2 reais para cada 1 real aplicado.

E se os juros fossem creditados semestralmente, ao final de um ano teríamos 2,25 reais. A expressão para esse cálculo é a seguinte:

$$(1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{2})^2 = 2,25$$

Para o crédito trimestral, temos $n$=4 e o resultado é $2,44141$. Ao calcularmos o resultado para o crédito instantâneo, ou seja, n tendendo para infinito, esse limite é um número irracional chamado número $e$ (número de Euler).

Em termos matemáticos:

$$lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$$

$$e = 2,718281828459045235360287471352 66...$$

Quem efetivamente calculou o número $e$ foi Leonhard Euler, e dizem que a designação decorre da inicial do seu sobrenome, mas também existe a versão do que o $e$ se dava à inicial de "exponencial".

Se aquele banco quisesse creditar juros instantâneos à sua aplicação de 1 real, a 100 por cento ao ano, você teria ao final de um ano o valor de 2,718 reais aproximadamente.

Esse número é importante em quase todas as áreas do conhecimento, a função $x \mapsto e^x$, modela fenômenos de vital importância nos mais variados campos da ciência: físico-químicas, biológicas, econômicas, agronômicas, geográficas, médicas, sociais, etc.

Este trabalho foi organizado da seguinte maneira: reservamos o capítulo 1 para esta introdução, o capítulo 2 versa sobre números algébricos e transcendentes, capítulo 3 aborda a existência e irracionalidade de $e$, e dedicamos o capítulo 4 para mostrar sua transcendência. E finalmente no capítulo 5 apresentamos uma aula aplicada ao Ensino Médio envolvendo os elementos tratados nos capítulos anteriores.

# 2 Sobre Números Algébricos e Transcendentes

Para ser possível tratar dos números algébricos primeiramente devemos introduzir definições e propriedades acerca dos números inteiros.

**Definição 2.1.** *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que* **a** ***divide*** **b**, *e escrevemos $a|b$, se existir $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = qa$.*

**Exemplo 2.1.** $a = 2$, $b = 4$; $4 = q2 \Longrightarrow q = 2$.

**Definição 2.2.** *Um número $p \in \mathbb{N}$ e $p \neq 1$, é* ***primo*** *se os únicos números inteiros que o dividem são ele próprio e o 1. Ou seja, $p$ é primo se para todo $b \in \mathbb{N}$ tal que $b|p$, então $b = p$ ou $b = 1$.*

***(b)*** *Um número $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, $p \neq 1$, $p \neq -1$ é* ***primo*** *se os únicos números inteiros que o dividem são $|p|$, $-1$ e $1$.*

**Exemplo 2.2.** $p = 7, \quad b|7 \Longleftrightarrow b = 7$ *ou* $b = 1$.

**Definição 2.3.** *Seja $a \in \mathbb{Z}$. Um número inteiro $b$ é chamado* ***múltiplo*** *de $a$ se $b = aq$, para algum $q \in \mathbb{Z}$.*

**Exemplo 2.3.** $a = 6$, $q = 3$; $\quad b = 6.3 \Longrightarrow b = 18$.

**Definição 2.4.** *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, um número natural $d$ é chamado* ***máximo divisor comum*** *de $a$ e $b$, denotado por $d := m.d.c(a, b)$, se satisfaz as afirmações abaixo:*

***(i)*** *$d|a$ e $d|b$,*

***(ii)*** *se $r \in \mathbb{Z}$,é tal que $r|a$ e $r|b$, então $r|d$.*

**Exemplo 2.4.** $a = 16$, $b = 32$ $m.d.c.(16, 32) = 16 = d$. Pois $16|16$ *e* $16|32$ e além disso se $r|16$ *e* $r|32$ então $r|16$ (por exemplo se $r = 4$, temos que $4|16$, $4|32$ e ainda que $4|16$).

**Observação 2.1.** O $m.d.c(a, 0)$ não existe caso $a$ seja **nulo**. Além disso, assumimos que $m.d.c(a, 0) = 1$, se $a \neq 0$.

**Teorema 2.1.** *(Algoritmo da Divisão). Se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existem (e são únicos) $q, r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < |b|$, tais que,*

$$a = qb + r. \tag{1}$$

*Demonstração.* $(i)$ **Existência.**

Caso $\mathbf{b > 0}$. Consideremos o conjunto dos números múltiplos de $b$ ordenados de acordo com a ordem natural da reta, isto é, o conjunto ..., $-3b$, $-2b$, $-b$, $0$, $b$, $2b$, $3b$, ..., com,

$$... - 3b < -2b < -b < 0 < b < 2b < 3b...$$

Note que disso decorre uma decomposição da reta em intervalos disjuntos da forma

$$[qb, (q+1)b] = \{x \in \mathbb{R} : qb \leq x < (q+1)b\},$$

com $q \in \mathbb{Z}$.

Por exemplo $[-3b, -2b] = [-3b, (-3+1)b]$, $[2b, 3b] = \{x \in \mathbb{R} : 2b \leq x < 3b\}$.

Assim, dado $a \in \mathbb{Z}$, este pertence a apenas um desses intervalos e portanto necessariamente é da forma $a = qb + r$, com $q \in \mathbb{Z}$ e $r \geq 0$. É claro que $r < (q+1)b - qb = b$.

Caso $\mathbf{b < 0}$. Aplicamos o teorema no caso demonstrado em (i) para determinar $q', r \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq r < |b|$ para escrever:

$$a = q'|b| + r. \tag{2}$$

fazendo $q = -q'$, como $|b| = -b$, (pois $b < 0$), obtemos de (2) $a = qb + r$, onde $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < |b|$.

$(ii)$ **Unicidade**.

Resta demonstrar que $q$ e $r$, os quais satisfazem (1) são únicos.

De fato, suponha que $a = qb + r$ e $a = q'b + r_1$, com $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r_1 < |b|$.

Assim,

$$qb + r = q_1 + r_1 \Rightarrow$$

$$r - r_1 = (q_1 - q)b \tag{3}$$

Afirmamos que $r = r_1$.

Com efeito, se $r \neq r_1$, então: $0 < |r_1 - r|$.

Além disso, $|r_1 - r| < b$. Pois, podemos admitir, sem perda de generalidade que $r < r_1$, consequentemente $r_1 - r > 0$ e $|r_1 - r| = r_1 - r$.

Assim, se $r_1 - r = |b|$, então $r_1 = |b| + r$ e portanto $r_1 > |b|$, que é absurdo.

Também, se $r_1 - r > |b|$, então $r_1 > |b| + r > |b|$, gerando novamente o absurdo $r_1 > b$.

Logo pela Lei da Tricotomia,

$$|r_1 - r| = r_1 - r < |b|.$$

Portanto, do acima segue que

$$0 < \ |r_1 - r| \ < \ |b| \tag{4}$$

agora de (3) obtemos,

$$|r_1 - r| = |q_1 - q||b| \tag{5}$$

substituindo (5) em (4), obtemos,

$$0 < |q_1 - q||b| < |b|.$$

Logo, $0 < |q_1 - q| < 1$, o que é um absurdo, pois $|q_1 - q|$ é um número inteiro (pois $q$ *e* $q_1 \in \mathbb{Z}$ e em $\mathbb{Z}$ vale a Lei do Fechamento da Adição).

Portanto $r = r_1$.

Note que essa igualdade combinada com (3) implica $q_1 = q$, já que $0 = (q_1 - q)b$ e $b \neq 0$ por hipótese.

□

**Exemplo 2.5.** $a = 11, b = 5; \quad q = 2 \ \ r = 1 \Longrightarrow 11 = 2.5 + 1.$

**Teorema 2.2.** *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ (pelo menos um deles não nulos) existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + by_0 = d$, onde $d = m.d.c(a, b)$.*

*Demonstração.* Limitando-se ao caso em que $a > 0$ e $b > 0$.

Seja $L = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Evidentemente existem elementos estritamente positivos em L (faça-se, por exemplo, $x = y = 1$). Seja $d$ o menor desses elementos. Mostremos que $d$ é o máximo divisor comum entre $a$ e $b$.

$(i)$ d é obviamente maior que zero;

$(ii)$ Como $d \in L$, então existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ de maneira que $d = ax_0 + by_0$. Aplicando o algorítmo da divisão aos elementos $a$ e $d$:

$$a = dq + r \ \ (0 \leq r < d).$$

Das duas últimas igualdades segue que

$$a = (ax_0 + by_0)q + r$$

ou, ainda

$$r = a(1 - qx_0) + b(-y_0)q$$

o que vem mostrar que $r \in L$. Sendo $r$ positivo e levando em conta a escolha do elemento $d$ a conclusão é que $r = 0$. Daí ficamos com $a = dq$ o que mostra que $d|a$. Analogamente se prova que $d|b$;

$(iii)$ Se $d'|a$ e $d'|b$, como $d = ax_0 + by_0$, então é claro que $d'|d$, e portanto $d = m.d.c(a, b)$. □

**Lema 2.1.** *Sejam $a, x_0, b, y_0, d \in \mathbb{Z}$, se $d|a$ e $d|b$, então $d|(ax_0 + by_0)$.*

*Demonstração.* Como $d|a$ (pela definição 2.1) implica que existe $q \in \mathbb{Z}$, tal que $a = qd$. Também (pela definição 2.1) $d|b$ implica que existe $p \in \mathbb{Z}$, tal que $b = pd$.

Logo,

$$ax_0 + by_0 = qdx_0 + pdy_0 = d(qx_0 + py_0).$$

Observe que $K = (qx_0 + py_0) \in \mathbb{Z}$, (pois vale a lei do fechamento da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$ e $q, x_0, p, y_0 \in \mathbb{Z}$).

Portanto, $ax_0 + by_0 = dK$, $K \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$d|(ax_0 + by_0).$$

□

**Exemplo 2.6.** $2|4$ e $2|6 \Rightarrow 2|(4x_0 + 6y_0)$, $\forall\ x_0,\ y_0\ \in\ \mathbb{Z}$.

**Lema 2.2.** *Seja $r \in \mathbb{N}$ um número primo, e $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $r$ divide o produto $ab$ então $r$ divide $a$ ou $b$.*

*Demonstração.* Se $r|a$, nada temos que provar. Suponhamos que $r$ não divide $a$, ou seja, $r$ e $a$ são primos entre si.

Logo, pelo Teorema 2.2, existem $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ tais que $ax_0 + ry_0 = 1$.

Assim,

$$abx_0 + rby_0 = b. \qquad (I)$$

Como $r|ab$ (por hipótese) e claramente $r|rb$, logo segue que,

$$r|(abx_0 + rby_0).$$

Portanto de $(I)$ segue que $r|b$.

□

**Exemplo 2.7.** 1. $r = 3$, $a = 9$, $b = 5$, temos que $3|9.5$ e também $3|9$.

2. $r = 3$, $a = 9$, $b = 6$, temos que $3|9.6$ e também $3|9$ e $3|6$.

**Proposição 2.1.** *Seja $r \in \mathbb{N}$ um número primo e $a \in \mathbb{Z}$. Se $r|p_n$, então $r|p$.*

*Demonstração.* Esse resultado segue usando o Princípio da Indução Finita.

Queremos mostrar a veracidade da sentença.

$$\mathcal{P}(n): \text{ “ Se } r|p_n, \text{ então } r|p, \forall n \in \mathbb{N}\text{”}.$$

Façamos isso.

Note que, obviamente, $\mathcal{P}(1)$ é válida,

$$\mathcal{P}(1): r|p \Longrightarrow r|p.$$

Além disso, observe que $\mathcal{P}(2)$ também é válida pois se $r|p^2$,e se $r|p.p$, então $r|p$ ou $r|p$, i. é, $r|p$.

**Hipótese de Indução** . Seja $k \in \mathbb{N}$, qualquer.

$$\mathcal{P}(k): \text{“Se } r|p^k, \text{ então } r|p.\text{”}$$

Usando a Hipótese de Indução queremos mostrar que $\mathcal{P}(k+1)$ é válida, ou seja,

$$\text{“Se } r|p^{k+1}, \text{ então } r|p.\text{”}$$

Observe que $r|p^{k+1}$ é o mesmo que $r|p^k.p$.

Agora, de $\mathcal{P}(2)$, segue que $r|p^k$ ou $r|p$.

Por outro lado, temos por Hipótese de Indução que $r|p^k$ implica que $r|p$.

Portanto, $r|p^{k+1}$ implica $r|p$ ou $r|p$, i. é, $r|p$.

□

**Definição 2.5.** *Qualquer solução de uma equação da forma*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0 \quad (1)$$

*onde cada coeficiente* $a_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{0, 1, ..., n-1\}$, *é chamado inteiro algébrico.*

**Exemplo 2.8.** 1. Seja $b \in \mathbb{Z}$, então $b$ é um inteiro algébrico, pois $b$ é solução da equação $x - b = 0$, a qual é do tipo (1), para $n = 1$ e $a_0 = -b$.

2. $\sqrt{7}$ é um inteiro algébrico, já que é solução de $x^2 - 7 = 0$.

3. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ é um inteiro algébrico.

Uma vez que é solução de uma equação do tipo (1).

Abaixo descrevemos como obtê-la. Temos que $x = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, para chegar a uma equação do tipo (1), precisamos aplicar duas quadraturas.

Aplicando a primeira quadratura :

$$x = \sqrt{2+\sqrt{3}} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 \Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Para eliminar o radical que restou, aplicamos outra quadratura:

$$x^2 = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$x^2 - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$(x^2 - 2)^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 3 \Longrightarrow$$

$$x^4 - 4x^2 + 1 = 0.$$

Portanto, $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$, é a equação procurada.

4. Todo número da forma $\sqrt{2n}$, com $n \in \mathbb{N}$, é um inteiro algébrico.

De fato,

$$x = \sqrt{2n} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{2n})^2 \Rightarrow x^2 = 2n \Rightarrow x^2 - 2n = 0,$$

esta última é uma equação do tipo (1), para $n = 1,\ a_0 = -2n$.

5. Para cada $a \in \mathbb{Z}^*$, o número complexo $i\sqrt{a}$ é um inteiro algébrico, pois é solução da equação $x^2 + a = 0$.

**Observação 2.2.** Dos exemplos acima, podemos observar que todos os números Inteiros são Inteiros Algébricos. Também, existem Inteiros Algébricos **Irracionais** e **Complexos**. O Teorema a seguir caracteriza os Inteiros Algébricos **Reais**.

**Teorema 2.3.** *Todo número inteiro algébrico (real) é um número inteiro ou irracional.*

*Demonstração.* Para provar que um inteiro algébrico não pode ser um número racional não inteiro, usaremos o tipo de demonstração indireta, a saber, redução ao absurdo. Suponha por absurdo, que o número racional $x = \frac{p}{q}[(p, q \in \mathbb{Z})$,e $q > 1$ e $(p, q) = 1]$ satisfaça a equação do tipo (1), ou seja:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0.$$

Então,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + ... + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{p^n}{q^n} = -a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - ... - a_1\frac{p}{q} - a_0 \Rightarrow$$

$$p^n = q^n(-a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - ... - a_1\frac{p}{q} - a_0) \Rightarrow$$

$$p^n = (-a_{n-1}p^{n-1}q - ... - a_1pq^{n-1} - a_0q^n) \Rightarrow$$

$$p^n = q(-a_{n-1}p^{n-1} - ... - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}).$$

Considerando,

$$j = (-a_{n-1}p^{n-1} - ... - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}),$$

temos que $j \in \mathbb{Z}$ (pois vale a lei do fechamento, da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}$) e que $p^n = qj$, ou seja, $q|p^n$

Agora, seja $r$ um fator primo de $q$, $r \neq 1$ (observe que se $q$ for primo podemos considerar $p = q$); então $r$ divide $p^n$ e pela Proposição 2.1 isso implica que $r|p$.

Portanto obtemos que, $r|q$ e $r|p$, o que contradiz o fato de $(p, q) = 1$, (o absurdo ocorre quando admitimos $\frac{p}{q}$ como solução da equação do tipo (1)).

□

**Definição 2.6.** ***(a)*** *Qualquer solução de uma equação polinomial da forma*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,\ a_i \in \mathbb{Z},\ \textit{para todo } i \in \{0, ..., n\}$$

*é chamado um* ***número algébrico****. Ou seja, um número $\alpha$ é algébrico quando é possível encontrar uma equação polinomial com coeficientes inteiros, da qual $\alpha$ seja raiz.*

***(b)*** *Um número que não seja algébrico é chamado* ***transcendente****.*

Os números algébricos possuem algumas propriedades de fechamento, as quais são listadas abaixo.

**(i)** *A soma de dois números algébricos é um algébrico;*

**(ii)** *O produto de dois números algébricos é um algébrico;*

**(iii)** *O simétrico $-\alpha$ de um número algébrico $\alpha$ é algébrico;*

**(iv)** *O inverso $\alpha^{-1}$ de um número algébrico $\alpha \neq 0$ é um algébrico.*

No que segue, estamos interessados em mostrar a existência de números transcendentes. Para tal necessitamos de alguns conceitos.

**Definição 2.7.** *Um conjunto $A$ é enumerável se seus elementos podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais. Mais precisamente, $A$ é enumerável se existir uma função bijetiva, (isto é, uma função injetiva e sobrejetiva), $f : \mathbb{N} \to A$.*

**Exemplo 2.9.** **(a)** O conjunto dos números pares positivos é enumerável:

Seja $P = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$, e considere a seguinte função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & P \\ & n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

**(i)** $f$ é injetora, pois:

Suponha que $f(x) = f(y)$. Queremos mostrar que $x = y$. Como

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$$

Portanto $f$, é injetora.

**(ii)** $f$ é sobrejetora, isto é $f(\mathbb{N}) = P$. De fato: - $f(\mathbb{N}) \subset P$ pela definição de imagem.

-$P \subset f(\mathbb{N})$, pois seja $b \in P$, qualquer, então $b = 2n_o$ para algum $n_o \in \mathbb{N}$. Tomando $x = n_0$, temos que $f(x) = f(n_0) = 2n_o = b$, ou seja, $b \in f(\mathbb{N})$, *logo* b=f(x).

Portanto $f$ é sobrejetora.

Logo por (i) e (ii), $f$ é bijetora.

**(b)** O conjunto dos números ímpares positivos é enumerável. Basta considerar a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & I \\ & n & \longmapsto & 2n-1 \end{array}$$

onde $I = 2n-1, n \in \mathbb{N}$.

A demontração pode ser feita de modo análogo ao exemplo (a).

**(c)** O conjunto $\mathbb{Z}$ é enumerável. Observe a correspondência abaixo

$$\begin{array}{ccccccccccc} ..., & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & ... \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ ... & 7, & 5, & 3, & 1, & 2, & 4, & 6, & ... \end{array}$$

Esta correspondência pode ser descrita pela função definida por partes

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & f(n) \end{array}$$

onde

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n > 0 \\ -2n+1, & \text{se } n \leq 0 \end{cases}$$

**(i)** $f$ é injetora, isto é, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, pois:

- se $x, y > 0$, $f(x) = 2x \neq 2y = f(y)$
- se $x, y < 0$, $f(x) = -2x+1 \neq -2y+1 = f(y)$
- se $x > 0$ e $y < 0$, temos que $f(x) = 2x$ e$f(y) = -2y+1$

daí, $f(x) = 2x \neq 2y \neq -2y \neq -2y+1 = f(y)$;

-se $x < 0$ e $y > 0$, idem item anterior;

-se $x = 0$ e $y > 0$ (ou $y = 0$ e $x > 0$), então $f(x) = f(0) = 1$ e $f(y) = 2y$, daí
$f(y) = 2y \neq 1 = f(0) = f(x)$

- se $x = 0$ e $y < 0$ (ou $y = 0$ e $x < 0$), então
$f(x) = f(0) = 1$ e $f(y) = -2y+1$, daí
$f(y) = -2y+1 \neq 1 = f(0) = f(x)$

Portanto, pelos casos considerados acima, $f$ é injetora.

**(ii)** $f$ é sobrejetora, isto é, $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$. De fato,

- $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{N}$ pela definição de imagem;
- $\mathbb{N} \subset f(\mathbb{Z})$, pois:

seja $n \in \mathbb{N}$. Se $n$ é **par**, então $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Logo, tomando $x = k$, temos que

$$n = 2k = f(k) = f(x).$$

Se $n$ é **ímpar**, então $n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$, logo tomando $x = -k$, temos que

$$n = 2k+1 = -2(-k)+1 = f(-k) = f(x) \ \in f(\mathbb{Z})$$

portanto por (i) e (ii), segue que $f$ é sobrejetora.

Logo por (i) e (ii), $f$ é bijetora.

Como $f$ é bijetora, existe $g^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, assim basta tomarmos $f = g^{-1}$

**(d)** O conjunto dos números racionais é enumerável.

Mostremos primeiramente que o conjunto dos números racionais positivos é enumerável.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{1} & \to & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \to & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \to & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \cdots \\
 & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Observe que todos os números da forma $\frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$ aparecem no quadro acima. Se o percorrermos seguindo as flechas temos uma ordenação desse conjunto, a função $f$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^+ \\ & n & \longmapsto & f(n) \end{array}$$

é definida como $f(n) =$ n-ésimo elemento que encontramos seguindo as flechas. Assim, mostramos que o conjunto $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$ é enumerável.

A enumerabilidade de $\mathbb{Q}$ segue do item (i) do próximo Teorema, lembrando que $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$, onde $\mathbb{Q}^- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$.

A seguir demonstramos algumas propriedades sobre conjuntos enumeráveis.

**Teorema 2.4.** ***(i)*** *A união de um conjunto finito e um conjunto enumerável é um conjunto enumerável;*

***(ii)*** *A união de dois conjuntos enumerávis é enumerável;*

***(iii)*** *A união de um número finito de conjuntos enumeráveis é enumerável;*

***(iv)*** *A união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável;*

***(v)*** *A união de um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

*Demonstração.* **(i)** Sejam $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ conjunto finito e $B = \{b_1, b_2, ...\}$ o conjunto enumerável. O conjunto $A \cup B$ é enumerável.

De fato a correspondência biunívoca entre $A \cup B$ e $\mathbb{N}$ será assim:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & ..., & a_n, & b_1, & & b_2, & ... \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & & n & n+1 & & n+2 & \end{array}$$

**(ii)** Sejam $A = \{a_1, a_2, ...\}$ e $B = \{b_1, b_2, ...\}$, dois conjuntos enumeráveis, então $A \cup B$ é enumerável, já que possui a seguinte correspondência biunívoca,

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & a_3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

**(iii)** Sejam $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos enumeráveis, queremos mostrar que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, é enumerável, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Para isso usamos o Princípio de Indução Finita.

(a) $k = 1$ é válida pois $A_1$ é enumerável.

(b) $k = 2$ é válida pelo item (ii).

**Hipótese de Indução:** Suponha que seja válida para $k$, ou seja, se $A_1, A_2, ..., A_k$ são enumeráveis então $A_1 \cup A_k$ é enumerável.

Provemos então que a propriedade é válida para $k + 1$.

$A_1, ..., A_k, A_{k+1}$ são enumeráveis, então

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}$$

é enumerável.

Note que

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1} = (A_1 \cup ... \cup A_k) \cup A_{k+1}$$

Considere $A = (A_1 \cup ... \cup A_k)$, então

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1} = A \cup A_{k+1}.$$

Agora $A$ é enumerável por Hipótese de Indução e $A \cup A_{k+1}$ é enumerável por (a).

Portanto $A_1 \cup ... \cup A_k \cup A_{k+1}$ é enumerável.

Logo pelo Princípio de Indução Finita, (iii) é válida.

**(iv)** Seja $\{A_1, A_2, ..., A_n, ...\}$ um conjunto enumerável onde cada $A_i$ é um conjunto finito, para qualquer $i \in \{1, ..., n, ...\}$.

Queremos mostar que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ...$ é enumerável.

Suponha que $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1l_1}\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2l_2}\}$, e $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nl_n}\}$ Então,

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ... = \{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1l_1}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2l_2}, a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nl_n}, ...\}$$

Defina a seguinte correspondência entre $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ... \subset \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{11}, & ..., & a_{1_{l_1}}, & a_{21}, & ..., & a_{2_{l_2}}, & ..., & a_{n1}, & ..., & a_{n_{ln}}, & ... \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1, & ..., & l_1, & l_1+1, & ..., & l_1+l_2, & ..., & l_1+l_2+...+l_{n-1}+1, & ... & l_{n+1} & ... \end{array}$$

Logo, $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ...$ é enumerável.

**(v)** Seja $\{A_1, A_2, ..., A_n, ...\}$ um conjunto enumerável onde cada $A_i$ é um conjunto enumerável para qualquer $i \in 1, .., n, ....$

Suponha que

$$\begin{array}{c} A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, ...\} \\ A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, ...\} \\ A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...\} \end{array}$$

Disponha os elementos de $A_1, A_2, ..., A_n$ como a tabela

$$\begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & ... \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & ... \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & ... \\ . & . & . & \\ . & . & . & \\ . & . & . & \end{array}$$

Formando flechas como feito em $\mathbb{Q}^+$ definimos $f$ dada por $f(n) = n$-ésimo elemento que encontramos seguindo as flechas. Dessa forma definimos uma correspondência biunívoca entre $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n \cup ...$ e consequentemente provamos que é um conjunto enumerável. □

**Teorema 2.5.** *O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não é enumerável.*

*Demonstração.* Demonstramos que o conjunto dos números reais $x \in [0, 1)$, (isto é, $0 \leq x < 1$) não é enumerável, em virtude da observação acima segue que $\mathbb{R}$ também não é enumerável. Façamos isso, primeiro note que os números $x \in [0, 1)$ tem uma representação decimal da forma

$$0\ a_1\ a_2\ a_3..., \qquad (*).$$

onde $a_j$ é um dos algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ou $9$. Alguns números tem duas representações da forma $(*)$, por exemplo, $\frac{1}{2}$ é igual $0,50...$ ou $0,499...$

Para tais números, escolhemos a representação decimal que termina. Em outras palavras, eliminamos as decimais $(*)$ que a partir de uma certa ordem todos os elementos são 9. Suponhamos que as decimais tipo $(*)$, ou que os números reais no intervalo $[0, 1)$, formam um conjunto enumerável.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... \\ & & \vdots & & ... \end{array} \qquad (**)$$

Agora forme o decimal $0, b_1b_2b_3...$ do seguinte modo: todos os $b_i$'s são diferentes de 0 ou 9 e $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$. É claro que $0, b_1b_2b_3 \ldots \neq 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \ldots$, para todo $n$, pois $b_n \neq a_{nn}$. Logo $0, b_1b_2b_3 \ldots$ não está na tabela $(**)$ o que é um absurdo, já que é um número real entre 0 e 1. □

Com os resultados anteriores provaremos a existência de números transcedentes no seguinte teorema.

**Teorema 2.6.** *Existem números transcendentes.*

*Demonstração.* Dado um polinômio não nulo com coeficientes inteiros com $a_n \neq 0$,

$$P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \qquad (*),$$

definimos sua altura como sendo o número natural

$$|P| = |a_n| + ... + |a_1| + |a_0| + n \qquad (**)$$

O Teorema Fundamental da Álgebra nos diz que $P(x) = 0$, tem exatamente $n$ raízes complexas. Todas, algumas ou nenhuma delas podem ser reais. Agora o número de polinômios do tipo $(*)$ com uma dada altura é apenas um número finito (observe que é para essa afirmação que incluímos a parcela $n$ na definição da altura em $(**)$).

Logo, as raízes de todos os polinômios de uma dada altura formam um conjunto finito, consequentemente o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas formam um conjunto enumerável de conjuntos finitos. (Por exemplo, se $P(x) = 3x^4 - x^3 + x - 5$, então $|P| = |3| + |-1| + |0| + |1| + |-5| + 4$, pelo Teorema Fundamental da Álgebra $P(x)$ possui quatro raízes complexas e com essa altura podem existir até treze polinômios).

Portanto, podemos concluir que o conjunto dos números algébricos reais é enumerável.

Agora, o conjunto dos números reais pode ser considerado como a união do conjunto dos números algébricos reais com o conjunto dos números não-algébricos reais, ou seja, o conjunto dos números reais pode ser considerado como a união do conjunto dos números algébricos reais com o conjunto dos números transcendentes reais. Assim, como o conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável, o conjunto dos transcendentes reais deve ser não enumerável, já que, caso contrário, pelo item (ii) do Teorema 2.4, $\mathbb{R}$ seria enumerável. Consequentemente, existe um conjunto infinito não enumerável de números reais transcendentes. □

# 3 Existência e Irracionalidade do Número $e$

Primeiramente provamos que o número $e$ existe e mais ainda está compreendido entre 2 e 3.

## 3.1 Existência do Número $e$

**Teorema 3.1.** *O* $lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ *existe e está compreendido entre 2 e 3.*

*Demonstração.* Vamos provar que o $lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ existe.

Seja $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$

Qualquer que seja $n$ inteiro e positivo, $(u_n)$ é uma potência de base positiva, portanto, também positiva. Vamos mostrar que $u_n$ é crescente, desenvolvendo o termo geral segundo a fórmula do binômio de Newton:

$$u_n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{n^n}$$

ou ainda

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

temos então:

$$u_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n-1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n-1})(1-\frac{2}{n-1}) + \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{(n-1)!}(1-\frac{1}{n-1})(1-\frac{2}{n-1})\cdots(1-\frac{n-2}{n-1}) = u_{n-1}$$

Conclui-se que $u_n > u_{n-1}$ para $n$ inteiro e positivo qualquer. Logo a sucessão $u_n$ é crescente.

Demonstraremos agora que a sucessão de termo geral $u_n$ é limitada superiormente.

$$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

e como $n! > 2^{n-1}$ para $n \geq 3$ inteiro, temos:

$$u_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3$$

que prova ser 3 maior que qualquer sucessão e, portanto, esta é limitada superiormente. Então a sucessão de termo geral $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ sendo crescente e limitada superiormente tem limite finito.

Vamos provar que $2 \leq lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n < 3$

Sabemos que $u_n < 3$ para todo $n$ inteiro e positivo, portanto

$$lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$$

e

$$u_n = (1 + \frac{1}{n})^n \geq 1 + \frac{1}{1!} = 2$$

□

## 3.2 O Número $e$ é Irracional

Para mostrar a irracionalidade de $e$ fazemos uso de uma interessante caracterização deste, objeto do próximo Lema.

**Lema 3.1.**

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!} + ... \qquad (I)$$

*Demonstração.* Toda função de classe $C^\infty$ pode ser escrita como um polinômio de Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^(n)(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

ou

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^(n)(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

No caso particular de $f(x) = e^x$, em torno da origem (ou seja $x_0 = 0$), temos:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x^2) + ... + \frac{f^(n)(0)}{n!}(x^n) + ... \qquad (II)$$

Sabe-se que $f^(n)(x) = e^x, \ \ \forall n \in 1, 2, ...$, ou seja, $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x$ e assim por diante.

Em particular para $x_0 = 0$ tem-se $f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \ \ \forall \ \ n \in 1, 2, 3...$

Note ainda que $f(0) = e^0 = 1$.

Da observação acima e de (II), segue que $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{q!} + ...$ □

**Teorema 3.2.** *O número e é Irracional*

*Demonstração.* É demonstrado no Lema anterior que:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!} + ... \qquad (I)$$

Suponha que $e$ seja um número racional, isto é, $e$ pode ser escrito da forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$. Suponha ainda que $\frac{p}{q}$ seja a forma irredutível, isto é, $(p, q) = 1$.

De (I), segue que:

$$\frac{p}{q} = (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}) + \frac{1}{(q+1)!} + ... \Longrightarrow$$

$$0 < \frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}) = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + ... =$$

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \tag{II}$$

mas observe que,

$$\frac{1}{(q+1)!} = \frac{1}{(q+1)q!}$$
$$\frac{1}{(q+2)!} = \frac{1}{(q+2)(q+1)q!}$$
$$\frac{1}{(q+3)!} = \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)q!}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$

assim,

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} =$$
$$\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + ... =$$
$$\frac{1}{q!}\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+2)(q+1)}\right) + ... \leq$$
$$\frac{1}{q!}\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3}\right) + ... \tag{III}$$

pois

$$(q+1) < (q+2) < (q+3) < ... \Longrightarrow$$
$$... < \frac{1}{(q+3)} < \frac{1}{(q+2)} < \frac{1}{(q+1)}$$

logo

$$\frac{1}{(q+2)(q+1)} < \frac{1}{(q+1)(q+1)} = \frac{1}{(q+1)^2},$$

$$\frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} < \frac{1}{(q+1)(q+1)(q+1)} = \frac{1}{(q+1)^3},$$

e assim sucessivamente...

Agora, note que

$$\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + ...\right)$$

é a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita

$$\left(\frac{1}{(q+1)}, \frac{1}{(q+1)^2}, \frac{1}{(q+1)^3}, ...\right)$$

cujo primeiro termo é $\left(\frac{1}{(q+1)}\right)$ e a razão é $\left(\frac{1}{(q+1)}\right)$. Logo essa soma é igual a

$$\frac{\frac{1}{(q+1)}}{1-\left(\frac{1}{(q+1)}\right)} = \frac{1}{(q+1)}\frac{(q+1)}{q} = \frac{1}{q}$$

ou seja,

$$\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + ...\right) = \frac{1}{q} \qquad (IV)$$

substituindo (IV) em (III) segue que

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{q}\frac{1}{q!} \qquad (V)$$

substituindo (V) em (II),

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$$

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - ... - \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q} \leq 1$$

Observe que o segundo termo da esquerda para a direita da desigualdade acima é um número inteiro pois, $p, q \in \mathbb{Z}$, valem as leis do fechamento na multiplicação e adição temos:

$$q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - ... - \frac{1}{q!}\right) =$$
$$q!\left(\frac{(q-1)!(p-q)! - q! - ... - 1}{q!}\right) =$$
$$((q-1)!(p-q)! - q! - ... - 1),$$

Mas isso é um absurdo, já que é impossível ter um número inteiro positivo menor que 1.

O absurdo foi supor que $e$ é um número racional. Portanto $e$ é um número irracional.

□

# 4 O Número $e$ é Transcendente

Para demonstrarmos a transcendência do número $e$ precisaremos utilizar os Lemas 4.1 e 4.2 a seguir.

**Lema 4.1.** *Seja $P(x)$ um polinômio de grau $r$. Definimos a função real*

$$F(x) = P(x) + P'(x) + ... + P^r(x)$$

*onde $P^r(x)$ representa a derivada de ordem $r$ de $P$. então*

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}P(x)$$

*Demonstração.*

$$\frac{d}{dx}[e^{-x}F(x)] = \frac{d}{dx}[e^{-x}(P(x) + P'(x) + ... + P^r(x))] =$$

$$-e^{-x}(P(x) + P'(x) + ... + P^r(x)) + e^{-x}(P'(x) + ... + P^r(x) + P^{r+1}(x)) =$$

$$e^{-x}(-P(x) - P'(x) - ... - P^r(x) + P'(x) + ... + P^r(x) + P^{r+1}(x)) =$$
$$e^{-x}(-P(x) + P^{r+1}(x)) =$$
$$-e^{-x}(P(x)) =$$
$$-e^{-x}P(x)$$

□

**Lema 4.2.** *Sejam $F(x)$ e $P(x)$ como no Lema 4.1, então*

$$F(k) - e^kF(0) = -P(k\theta_k)ke^{k(1-\theta_k)},$$

*para todo $k > 0$ e onde $\theta_k$ é um número entre 0 e 1.*

*Demonstração.* Defina a função

$$\begin{array}{rccc} G: & [0,k] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & G(x) = e^{-x.F(x)} \end{array}$$

Note que para $k > 0$, $G$ é contínua em $[0,k]$ e derivável em $]0,k[$ (já que $e^x$ e $F(x)$ têm as mesmas propriedades). Então pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in ]0,k[$ tal que

$$G(k) - G(0) = G'(c).(k-0) \Rightarrow$$

$$e^{-k}F(k) - e^0F(0) = -e^{-c}P(c)k \Rightarrow$$

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -k(e^{-c}P(c)) \qquad (*).$$

Observe que como $c \in ]0,k[,\ \exists\ \theta_k \in ]0,1[,$ tal que

$$c = k\theta_k. \qquad (**)$$

Substituindo $(**)$ em $(*)$ , temos

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -k(e^{-k\theta_k}P(k\theta_k)).$$

Multiplicando ambos os membros por $e^k$, tem-se

$$e^ke^{-k}F(k) - e^kF(0) = -e^kk(e^{-k\theta_k}P(k\theta_k)) \Rightarrow F(k) - e^kF(0) = -P(k\theta_k)ke^{k(1-\theta_k)} = A_k$$

□

**Corolário 4.1.** *Sejam $F(x)$ e $A_k$ definidos nos Lemas 4.1 e 4.2, e suponha que e não seja transcendente, isto é, suponha que e seja algébrico. Então, existem inteiros $c_0, c_1, ..., c_n$ (com $c_o > 0$), tais que $c_ne^n + ... + c_1e + c_0 = 0$, [caso $c_0 < 0$, considere $(-c_n)e^n + ... + (-c_1)e + c_0 = 0 \Rightarrow d_ne^n + ... + d_1e + d_0 = 0$, onde $d_i = (-c_i), \forall\ i \in 0, ..., n$ e $d_0 > 0$], então:*

$$c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n) = c_1A_1 + ... + c_nA_n$$

*Demonstração.* Pelo Lema 4.2, temos que $A_k = F(k) - e^kF(0)$, então para $k \in 1, ..., n$, temos:

$$c_1A_1 + ... + c_nA_n =$$

$$c_1(F(1) - eF(0)) + ... + c_n(F(n) - e^nF(0)) =$$

$$c_1F(1) + ... + c_nF(n) - (c_1eF(0) + ... + c_ne^nF(0)) =$$

$$c_1F(1) + ... + c_nF(n) - [F(0)(c_1e + ... + c_ne^n)] =$$

$$c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n)$$

$$\Rightarrow c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n) = c_1A_1 + ... + c_nA_n$$

□

O objetivo é mostrar que o lado esquerdo dessa igualdade no Corolário 4.1 é um número inteiro não nulo, não divisível por $p$ sendo $p \in \mathbb{Z}$, enquanto o lado direito da igualdade tem módulo menor que 1, caracterizando um absurdo.

Para provarmos o lado esquerdo da igualdade usaremos os Lemas 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8. Já para o lado direito da igualdade usaremos os Lemas 4.9 e 4.10 a seguir.

**Lema 4.3.** *Vamos definir $Q(x)$ uma função polinomial onde:*

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j, a_j \in \mathbb{Z}$$

*$j = 0, ...r$ e $p < r$, então*

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-1)!} a_j x^{j-i}, i \leq r$$

*Demonstração.* Antes façamos alguns exemplos, para $r = 4$.

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{4} a_j x^j = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$Q^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2 x^{2-1} + 3a_3 x^{3-1} + 4a_4 x^{4-1}$$

$$Q^{(2)}(x) = (2-1)2a_2 x^{2-2} + (3-1)3a_a x^{3-2} + (4-1)4a_4 x^{4-2}$$

$$Q^{(3)}(x) = (3-2)(3-1)3a_3 x^{3-3} + (4-2)(4-1)4a_4 x^{4-3}$$

$$Q^{(4)}(x) = (4-3)(4-2)(4-1)4a_4 x^{4-4}$$

Observe que $Q^{(1)}(x)$, onde $j = 1$.

$$\frac{1!}{(1-1)!} = \frac{1!}{0!} = 1$$

$$\frac{2!}{(2-1)!} = 2 \qquad \frac{2!}{(2-1)!} a_2$$

$$\frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = 3 \qquad \frac{3!}{(3-1)!} a_3$$

$$\frac{4!}{(4-1)!} = \frac{4!}{3!} = 4 \qquad \frac{4!}{(4-1)!} a_4$$

Logo podemos escrever

$$Q^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^{4} \frac{j!}{(j-1)!} a_j x^{j-1}$$

Analogamente para $j = 2$ temos

$$Q^{(2)}(x) = \sum_{j=2}^{4} \frac{j!}{(j-2)!} a_j x^{j-2}$$

para $j = 3$ temos

$$Q^{(3)}(x) = \sum_{j=3}^{4} \frac{j!}{(j-3)!} a_j x^{j-3}$$

para $j = 4$ temos

$$Q^{(4)}(x) = \sum_{j=4}^{4} \frac{j!}{(j-4)!} a_j x^{j-4}$$

Provemos por Indução a expressão para $Q^{(i)}(x)$.

Verifiquemos se $Q^{(i)}(x)$ é válida.

$$Q^{(1)}(x) = [Q(x)]' =$$

$$(\sum_{j=0}^{r} a_j x^j)' = (a_0 x^0 + a1_x^1 + ... + ar_x^r)' =$$

$$(a1_x^{1-1} + (2)a_2 x^{2-1} + ... + (r)a_r x^{r-1}) =$$

$$\frac{1!}{(1-1)!} a_1 x^{1-1} + \frac{2!}{(2-1)!} a_2 x^{2-1} + ... + \frac{r!}{(r-1)!} a_r x^{r-1} =$$

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{j!}{(j-1)!} a_j x^{j-1}$$

portanto $Q^{(1)}(x)$ é válida.

**Hipótese de Indução:** suponha que $Q^{(k)}(x)$ é válida.

$$Q^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{r} \frac{j!}{(j-k)!} a_j x^{j-k}$$

Queremos provar que

$$Q^{(k+1)}(x) = \sum_{j=k+1}^{r} \frac{j!}{(j-(k+1))!} a_j x^{j-(k+1)}$$

é válida.

$$Q^{(k+1)}(x) = (Q^k(x))' = (\sum_{j=k}^{r} \frac{j!}{(j-k)!} a_j x_{j-k})' =$$

$$(\frac{k!}{(k-k)!} a_k x^{k-k} + \frac{(k+1)!}{((k+1)-k)!} a_{k+1} x^{(k+1)-k} + ... + \frac{r!}{(r-k)!} a_r x^{r-k})' =$$

$$(k+1-k)\frac{(k+1)!}{((k+1)-k)!} a_{k+1} x^{(k+1)-k-1} + ... + (r-k)\frac{r!}{(r-k)!} a_r x^{r-k-1}$$

Observe que:

$$\frac{(k+1)!}{((k+1)-k)!} = \frac{(k+1)!}{((k+1)-(k+1))!} \tag{I}$$

$$\frac{r!}{(r-k)}\frac{(r-k)}{(r-(k+1))} = \frac{r!}{(r-(k+1))!} \tag{II}$$

$$(r-k)! = (r-k)(r-(k+1))!$$

então

$$= \frac{(k+1)!}{((k+1)-(k+1))!}a_{k+1}x^{(k+1-(k+1))} + ... + \frac{r'}{(r-(k+1))!}a_r x^{(r-(k+1))} =$$

$$\sum_{j=k+1}^{r} \frac{j!}{(j-(k+1))!}a_j x^{j-(k+1)}$$

logo vale a expressão para $Q^{(k+1)}(x)$.

Portanto pelo Princípio de Indução Finita é válida a expressão para $Q^{(i)}(x), i \leq r$ e $r \in \mathbb{N}$.

□

**Lema 4.4.** *Sob o contexto do Lema 4.3,* $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x)$*, para* $i \geq p$*, é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por* $p$*.*

*Demonstração.* Substituindo $Q^{(i)}(x)$ dado no Lema 4.3 , temos que

$$\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(x) = \frac{1}{(p-1)!}\sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-i)!}a_j x^{j-i} =$$

$$\sum_{j=i}^{r} \frac{1}{(p-1)!}\frac{j!}{(j-i)!}a_j x^{j-1}$$

logo o polinômio dado acima possui cada coeficiente dado por: $b_j = \frac{1}{(p-1)!}\frac{j!}{(j-i)!}a_j$. Queremos mostrar que cada $b_j$ é um número inteiro e divisível por $p$, ou seja, queremos mostrar existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que: $b_j = pk$.

Para isso, observe que $\frac{1}{(p-1)!} = \frac{p}{(p)!}$, então: $b_j = \frac{p}{p!}\frac{j!}{(j-i)!}a_j = pa_j\frac{j!}{p!(j-i)!}$.

Considerando $k = a_j\frac{j!}{p!(j-i)!}$ resta mostrar que $k$ é um número inteiro. Como já sabemos por hipótese do Lema 4.3, que $a_j \in \mathbb{Z}$, para mostrar que $k \in \mathbb{Z}$, basta mostrar que $\frac{j!}{(j-i)!}$ é um número inteiro. Veja que como $j \geq p$, segue que $j! \geq p!$, assim $\frac{j!}{p!(j-i)!} = \frac{j(j-1)(j-2)...(p+1)p!}{p!(j-i)!} = \frac{j(j-1)(j-2)...(p+1)}{(j-i)!}$, o qual é obviamente um número inteiro.

□

**Lema 4.5.** *Considere o polinômio definido no Lema 4.1 como* $P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}(1-p)^p...(n-x)^p$. *Então* $P(x)$ *é da forma* $P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_0}{(p-1)!}x^p + ....$

*Demonstração.* Note que

$$(1-x)^p = 1 + p(-x) + ... + p(-x)^{p-1} + (-x)^p$$
$$(2-x)^p = 2^p + p2^{p-1}(-x) + ... + p2(-x)^{p-1} + (-x)^p$$
$$(3-x)^p = 3^p + p3^{p-1}(-x) + ... + p3(-x)^{p-1} + (-x)^P$$
$$\vdots$$
$$(n-x)^p - n^p + pn^{p-1}(-x) + ... + pn(-x)^{p-2} + (-x)^p.$$

Então,

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-2}(1 + p(-x) + ... + (-x)^p).$$

$$(2^p + p2^{p-1}(-x) + ... + (-x)^p).(3^p + p3^{p-2}(-x) + ... + (-x)^p).(n^p + pn^{p-1}(-x) + ... + (-x)^p)$$
$$= \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}(1.2^p3^p...n^p + p(-x)p2^{p-1}(-x) + p3^{p-1}(-x) + ... + pn^{p-1}(-x) + ...)$$
$$\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}((n!)^p + x(-p - p2^{p-1} - p3^{p-1} - ... - pn^{p-1}) + ...) =$$
$$\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}((n!)^p) + xb_0 + ...) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!}x^{p-1} + \frac{b_0x^p}{(p-1)!} + ...$$

onde $b_0 = -p - p2^{p-1} - p3^{p-1} - ... - pn^{p-1}$.

Note que $P^{(i)}(k) = 0;\ \ k = 1, ..., n, i < p,$ pois analisando $P^{(i)}(x)$ para $x = k,\ \ k \in 1, ..., n$ possui termos com sinais alternados, os quais quando agrupados resultam zero. Ainda veja que $P^{(p-1)}(x) = \frac{(n)!}{(p-1)!}(p-1)! + \frac{b_0xp!}{(p-1)!}$+(parcelas com a variável $x$) logo $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p(p-1)! + \frac{b_0xp!}{(p-1)!}$+(parcelas com $x = 0$)$= (n!)^p$
Para $i < p-1$ todas as parcelas de $P^{(i)}(x)$ possuem a variável $x$, logo quando $x = 0$ $P^{(i)}(0) = 0$.

□

**Lema 4.6.** *Se* $d_i,\ \ i = 0, 1, ..., r$ *são inteiros, tais que os* $d_i$*, para* $i \geq 1$ *são divisíveis por* $p$*, e* $d_0$ *não é divisível por* $p$*, então* $\sum_{i=0}^{r} d_i$ *não é divisível por* $p$.

*Demonstração.* Suponha por absurdo que $\sum_{i=0}^{r} d_i$ seja divisível por $p$, ou seja,

$$\{\exists\ \ k \in \mathbb{Z} : \sum_{i=0}^{r} d_i = kp\} \qquad (*)$$

Como cada $d_i$ é divisível por $p$, para $1 \leq i \leq r, \{\exists\ \ k \in \mathbb{Z} : d_i = k_ip, 1 \leq i \leq r.\}$
Assim por (*) e (**), temos que:

$$kp = \sum_{i=0}^{r} d_i = d_0 + d + 1 + ... + d_r = d_0 + (k_1p) + ... + (k_rp) = d_0 + (k_1 + ... + k_r)p$$

$$\Rightarrow d_0 = (kp) - (k_1 + ... + k_r)p = (k - (k_1 + ... + k_r))p$$

Como $L = (k - (k_1 + ... + k_r)) \in \mathbb{Z}$ e $d_0 = Lp$, segue que $d_0$ é divisível por $p$.
O que é um absurdo, pois por hipótese temos que $d_0$ não é divisível por $p$. □

**Lema 4.7.** *$F(k)$ para $k = 1, ..., n$ é um inteiro dvisível por $p$ e $F(0)$ não é divisível por $p$.*

*Demonstração.* Temos que $F(x) = P(x) + P'(x) + ... + P^{(p)}(x)$ então
$F(0) = P(0) + P'(0) + ... + P^{p-2} + (0) + P^{p-1}(0) + P^p(0) = P^{p-1}(0) + P^p(0)$
Observe que $P^p(x) = \dfrac{b_0 p!}{(p-1)!}$+(parcelas com a variável $x$) então $P^p(0) = \dfrac{b_0 p!}{(p-1)!} = b_0 p$.

Assim como sabemos que $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$, segue que, $F(0) = (n!)^p + b_0 p$ o qual não pode ser divisível por $p$, já que se o fosse teríamos que $(n!)^p$ também seria o que é absurdo pois $p > n$ e $p$ é primo.

Agora $F(0) = kp \Rightarrow (n!)^p = kp - b_0 p = p(k - b_0)$
$(n!)^p = (n(n-1)(n-2)...2.1)^p = n^p(n-1)^p(n-2)^p...2^p$, note que nenhum termo deste produto é divisível por $p$,( por exemplo, se $n^p$ o fosse existiria $L \in \mathbb{Z} : n^p = Lp \Rightarrow nn...n = Lp \Rightarrow L = \dfrac{nn...n}{p}$ o qual não é um número inteiro já que $p > n$ e $p$ é primo $(\rightarrow\leftarrow)$).
Mostremos agora que $F(k), k \in 1, ..., n$ é um inteiro divisível por $p$. Sabemos que

$$F(k) = P(k) + P'(k) + ... + P^{(p-1)}(k)P^p(k) = F(k)P^p(k) \qquad (*)$$

Pelo Lema 4.4 $P^p(x)$ é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por $p$. Substituindo $x = k$, $k \in 1, ..., n$ temos que:
$P^p(k)$ é uma soma cuja as parcelas são todas inteiras e divisíveis por $p$, consequentemente $P^p(k)$ é um inteiro divisível por $p$. Portanto por (*) $F(k)$ é divisível por $p$. □

**Lema 4.8.** *Como $0 < c_0 < p$, mostre que $c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n)$ é um inteiro não divisível por p.*

*Demonstração.* Pelo Lema 4.7 temos que $F(k)$ para $k = 1, ..., n$ é um inteiro divisível por $p$ e $F(0)$ é um inteiro não divisível por $p$. Consequentemente como $c_k \in \mathbb{Z}$ $d_k = c_kF(k)$ para $k = 1, ..., n$ é um inteiro divisível por $p$ e $d_0 = c_0F(0)$ é um inteiro não divisível por $p$, já que $0 < c_0 < p$. Logo pelo Lema 4.6 segue que $\sum_{k=0}^{n} d_k$ não é divisível por $p$, mas $\sum_{k=0}^{n} d_k = d_0 + d_1 + ... + d_n = c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n)$.
Portanto $c_0F(0) + c_1F(1) + ... + c_nF(n)$ é um inteiro não divisível por $p$. □

**Lema 4.9.** $|A_k| \leq \dfrac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$, *para* $k \leq n$.

*Demonstração.* Observe que os $A_k$ definidos no Lema 4.2, calculado para o polinômio $P(x)$, definido no Lema 4.5, têm a forma

$$A_k = -ke^{k(1-\theta k)} \frac{1}{(p-1)!}(k\theta_k)^{p-1}(1-k\theta_k)^p ... (n-k\theta_k)^p, 0 < \theta < 1.$$

Então,

$$|A_k| = |-ke^{k(1-\theta k)} \frac{1}{(p-1)!}(k\theta_k)^{p-1}(1-k\theta_k)^p ... (n-k\theta_k)^p| =$$

$$\frac{1}{(p-1)!}|-k||e^{k(1-\theta k)}||(k\theta_k)^{p-1}||(1-k\theta_k)^p|...|(n-k\theta_k)^p| \leq$$

$$\frac{1}{(p-1)!} n e^{n(1-\theta_k)} |n\theta_k|^{p-1} |1-\theta_k|^p ... |n-\theta_k|^p \leq$$

$$\frac{1}{(p-1)!} n e^n n^{p-1} = \frac{e^n n^p}{(p-1)!} \leq \frac{e^p n^p (n!)^p}{(p-1)!}.$$

□

**Lema 4.10.** *Se* $p$ *for um número primo suficiente grande então* $|c_1 A_1 + ... + c_n A_n| < 1$.

*Demonstração.*

$$|c_1 A_1 + ... + c_n A_n| \leq |c_1 A_1| + \cdots + |c_n A_n| \leq |c_1| \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} + \cdots + |c_n| \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} =$$

$$(|c_1| + \cdots + |c_n|) \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$$

Para $p$ um número primo suficientemente grande temos:

$$|c_1 A_1 + ... + c_n A_n| \leq (|c_1| + \cdots + |c_n|) \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} < 1$$

□

**Teorema 4.1.** *O número* $e$ *é transcendente.*

*Demonstração.* Pelo Corolário 4.1 supomos que o número $e$ era algébrico, ou seja,existem inteiros $c_0, c_1, ..., c_n$ (com $c_o > 0$), tais que $c_n e^n + ... + c_1 e + c_0 = 0$, temos que $c_0 F(0) + ... + c_n F(n) = c_1 A_1 + ... + c_n A_n$, e pelo Lema 4.8, segue que $c_0 F(0) + ... + c_n F(n)$ é um número inteiro não divisível por $p$, porém pelo Lema 4.10 temos que nessas mesmas condições que $|c_1 A_1 + ... + c_n A_n| < 1$, o que é absurdo, já que um número inteiro não nulo tem módulo sempre maior ou igual que 1. O absurdo foi supor que $e$ é um número algébrico. □

# 5 Sugestão de Aula para o Ensino Médio

Para a sala de aula, a sugestão é uma abordagem dos tópicos estudados através de exemplos. A saber,

**Exemplo 5.1.** No Capítulo 1 introduzimos a ideia que $lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

onde $e = 2,71828182845904523536028747135266....$

Com o auxílio de uma calculadora, determine, conforme os exemplos a) e b), o valor da expressão $(1+\frac{1}{n})^n$ para os seguintes valores de $n$:

a)$n = 10$

$$(1+\frac{1}{10})^{10} = 2,5937424601$$

b)$n = 100$

$$(1+\frac{1}{100})^{100} = 2,70481382942153$$

c)$n = 1000$
d)$n = 10000$
e)$n = 10^5$
f)$n = 6.10^{20}$
g)$n = (10!)^{10!}$.

**Exemplo 5.2.** Mostre que $\sqrt{3}$ é irracional.

*Demonstração.* Suponhamos por absurdo que $\sqrt{3}$ é um número racional. Logo, existem $p, q \in \mathbb{Z}$, com $q > 1$ e $(p, q) = 1$, tal que $x = \frac{p}{q}$.

Assim:

$$x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(\sqrt{3})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow$$

$$3 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow$$

$$3q^2 = p^2.$$

Segue que $p^2$ é múltiplo de 3. Logo, $p$ é mútiplo de 3. Consequentemente, $p$ pode ser escrito da forma $p = 3a$, para algum $a \in \mathbb{Z}$.

Substituindo $p = 3a$, temos,

$$3q^2 = 9a^2 \Rightarrow$$

$$\frac{3q^2}{3} = \frac{9a^2}{3} \Rightarrow$$
$$q^2 = 3a^2.$$

Logo, $q^2$ é múltiplo de 3, e assim, $q$ é múltiplo de 3.

Portanto, $p$ e $q$ são múltiplos de 3, o que é absurdo, já que por hipótese $p$ e $q$ são primos entre si. □

**Exercício**

Mostre que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$ são números irracionais. (Dica: use o Algoritmo da Divisão)

**Exemplo 5.3.** Usando a definição de Números Algébricos do Capítulo 2, mostre que o número complexo $1 + i$ é algébrico.

*Demonstração.* Temos que encontrar uma equação do tipo $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ com coeficientes inteiros, onde $i + 1$ seja solução. Mas se $1 + i$ é solução, então seu conjugado $1 - i$ também é solução de uma equação do 2º grau. Usando a fórmula da Soma e Produto, temos:

$$(1 + i) + (1 - i) = 2$$

$$(1 + i)(1 - i) = 2$$

consequentemente $1 + i$ e $1 - i$ são soluções da equação $x^2 - 2x + 2 = 0$.

□

**Exercício**

Mostre que os números abaixo são algébricos:

a)$-7/3$
b)$2\sqrt{2}$
c)$3+5i$
d)$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$(número áureo)
e)$\sqrt{\sqrt{2}+3}$.

**Exemplo 5.4.** Mostre que o número real irracional $e$ não é solução de uma equação do 1º grau com coeficientes inteiros.

*Demonstração.* Uma equação do 1º grau pode ser escrita da forma $ax+b=0$, onde $a,b\in\mathbb{Z}$.

Temos que $x=\dfrac{-b}{a}$, como $a$ e $b$ são inteiros, portanto $x$ é um número racional, ou seja, $e$ que é irracional não pode ser solução dessa equação.

□

**Exercício**

Mostre que o número real irracional $e$ não é solução de uma Equação do 2º grau com coeficientes inteiros.

# Referências

[1] FIGUEIREDO, Djairo L. Números Irracionais e Transcedentes - 3. ed. SBM, 2002.

[2] MAOR, Eli e: A História de um Número -Tradução de Jorge Calife - 7. ed. Editora Record, 2012.