TD-02/92

DENIS DALMAZI

FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO EM CORDAS E SUPERCORDAS NÃO CRÍTICAS

146

São Paulo, 26/03/92.

Tese de Doutoramento
realizada sob a orientação
de Maria Cristina B. Abdalla
e Abraham H. Zimermam no
Instituto de Física Teórica
da UNESP.

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
282
BIBLIOTECA

MCBAbdalla

J. A. Hadayél-Neto

São Paulo

IFT/TE
D-28

1992

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer primeiramente aos meus orientadores Maria Cristina B. Abdalla e Abraham H. Zimermam pela orientação e principalmente pela confiança em mim depositada. Agradeço também aos meus colaboradores Elcio Abdalla ,M.C.B. Abdalla e Koji Harada com os quais muito aprendi e tive a rara oportunidade de participar no desenvolvimento de um trabalho interessante numa àrea altamente competitiva da física atualmente.

Eu sou grato, pela hospitalidade, ao Instituto de Física Teórica da Unesp e ao II. Institut Fuer Theoretische Physik da Universidade de Hamburgo (Alemanha).

Pelo apoio financeiro na fase final do doutoramento agradeço à FAPESP e nas fases inicial e intermediária agradeço ao DAAD (Deutscher Akademischer Austauschdienst) e à CAPES que conjuntamente através de uma bolsa Sandwich tornaram possível a minha estada na Alemanha, onde estive sob a supervisão de H. Nicolai.

Resumo

Nesta tese nós descrevemos recentes avanços na formulação no contínuo de teorias (super)conformes com carga central $c_m \leq 1$ ($\hat{c}_m \leq 1$) acopladas a (super)gravi tação bidimensional. São apresentados também novos resultados relativos a cálculos não perturbativos de funções de correlação de operadores taquiônicos (caso bosônico) e operadores de vértice no setor de Neveu-Schwarz (caso supersimétrico) nas teorias acima citadas quando formuladas em superfícies esféricas. Sempre que possível os resultados são comparados com aqueles obtidos na versão discretizada de tais teorias, ou seja, modelos de matrizes.

Abstract

In this thesis we describe recent progresses in the continuum approach to two dimensional quantum (super)gravity coupled to (super)conformal theories with central charge $c_m \leq 1$ ($\hat{c}_m \leq 1$). We also present new results concerning non perturbative calculations of correlation functions of tachyon operators (bosonic case) and vertex operators in the Neveu-Schwarz sector (supersymmetric case) in the above quoted theories when formulated on surfaces of spherical topology. The results are compared to the ones obtained in the discrete approach, i.e., matrix models whenever possible.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

I-Introdução 1

CAPÍTULO II - GRAVITAÇÃO INDUZIDA EM DUAS DIMENSÕES

II-1- Introdução 4

II-2- O gauge do cone de luz 8

II-3- O gauge conforme 15

CAPÍTULO III - FUNCÕES DE CORRELAÇÃO BOSÔNICAS

III-1- Introdução 22

III-2- A função de 3-pontos 27

III-3- A função de 3-pontos com (n,m) cargas de blindagem 39

III-4- A função de N-pontos com (n,m) cargas de blindagem 44

CAPÍTULO IV - FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO SUPERSIMÉTRICAS

IV-1- A função de 3-pontos supersimétrica 48

IV-2- A função de 3-pontos com (n,m) cargas de blindagem 53

IV-3- A função de N-pontos com (n,m) cargas de blindagem 58

CAPÍTULO V

V- Comentários Finais e Conclusão 61

LITERATURA 65

I- INTRODUÇÃO

Uma das teorias mais interessantes das últimas décadas da física de partículas elementares é a chamada teoria de cordas (e supercordas) que era conhecida nas décadas de 60 e 70 como teoria de modelos duais . Encarada como uma teoria unificada de partículas elementares onde a ação era proporcional a área varrida pela corda imersa no espaço-tempo, essa teoria foi estudada com algum entusiasmo até o início da década de 80. O principal problema de tais teorias era o aparecimento de partículas não físicas no seu espectro, como táquions, e a existência de uma dimensão crítica ($D = 26$) onde a teoria poderia ser quantizada consistentemente. Na tentativa de resolução de tais problemas a teoria foi completamente reformulada na década de 80. O principal ingrediente desta reformulação foi o trabalho inspirador de A.M. Polyakov[1] que introduziu uma métrica bidimensional g_{ab} que descreve a geometria da superfície $\mathcal{M}$ varrida pela corda. Com essa introdução aparece, além da esperada invariância por reparametrizações da superfície $\mathcal{M}$, a chamada invariância de Weyl, a nível clássico. A métrica g_{ab} desempenha um papel auxiliar e é eliminada através de suas equações de movimento levando a equivalência com a antiga formulação (a nível clássico) onde a ação era proporcional a área da superfície $\mathcal{M}$. Entretanto a nível quântico Polyakov mostra em [1] que a simetria de Weyl é quebrada na integral de trajetória e com isso um dos três graus de liberdade da métrica g_{ab} se torna dinâmico e sua dinâmica é governada no gauge conforme pela chamada ação de Liouville. Para $D = 26$ a invariância de Weyl é restaurada e a métrica é totalmente eliminada (corda crítica). Segundo Polyakov, para entendermos o que acontece para $D < 26$ (corda não crítica)[1)] é preciso estudar a quantização da teoria de Liouville . O objeto de estudo desta tese está inserido neste contexto. Infelizmente tal quantização se mostrou extremamente complicada especialmete por duas razões. Primeiro, na ação de Liouville existe uma interação exponencial no campo de Liouville (ϕ) presente no termo cosmológico ($e^{\alpha\phi}$) e a expansão perturbativa para α pequeno aparentemente não converge . O outro problema é que a medida da integral de trajetória $[\mathcal{D}\phi]_g$ não é invariante por translações em ϕ como normalmente se esperaria. Por estas razões, apesar de algum progresso[5,6] o mesmo Polyakov decide deixar de lado o gauge conforme, que ele havia utilizado em [1] para obter a ação

[1)] Para $D > 26$ a teoria não é unitária.

de Liouville , e parte para o chamado gauge do cone de luz que será descrito na seção 2 do capítulo II desta tese.

No gauge do cone de luz Polyakov e colaboradores[2,3,4] conseguem calcular de forma não perturbativa quantidade físicas como dimensões conformes de campos primários modificadas pela ação do campo gravitacional. A comparação com resultados obtidos via simulação numérica de certos modelos estatísticos é perfeita. Entretanto em contrapartida ao gauge conforme, os resultados obtidos no cone de luz são válidos apenas para superfícies $\mathcal{M}$ de geometria esférica (gênero nulo) .

Com o intuito de reproduzir os resultados de Polyakov no gauge conforme, que permite uma generalização imediata para outras superfícies de gênero maior, há dois anos atrás, F.David[7] e J.Distler em colaboração com H.Kawai[8] reformularam o esquema do gauge conforme . Com o uso de uma medida $[\mathcal{D}\phi]_{\hat{g}}$ invariante por translações em ϕ esses autores conseguiram de fato reproduzir os resultados de [2,3,4] para a esfera e generalizá-los para superfícies de Riemann de gênero arbitrário. A formulação de [7,8] é descrita na seção 3 do capítulo II. Na formulação de [7,8] todavia, o termo cosmológico não é tratado de forma adequada. Embora tal tratamento não tenha sido nescessário para o cálculo dos expoentes críticos já obtidos no cone de luz, se quiséssemos resultados mais precisos, como funções de correlação de operadores físicos, uma compreensão mais profunda da importância do termo cosmológico seria indispensável. Essa compreensão só viria com o trabalho de Goulian e Li[9] e outros autores[10,11,12] através da chamada técnica do modo zero. Nela o modo zero ϕ_0 do campo de Liouville é integrado fazendo com que o termo cosmológico caia da ação para o integrando da integral de trajetória e através da continuação para valores não inteiros de um certo parâmetro s (vide capítulo III) os autores acima obtiveram funções de correlação de operadores primários em teorias conformes com carga central $c_m \leq 1$ em interação com a gravitação bidimensional em superfícies esféricas.

No capítulo IV apresentamos os resultados que obtivemos[13,14] para teorias supersimétricas com $\hat{c}_m \leq 1$ (ou $c_m \leq \frac{3}{2}$) no cálculo de funções de correlação de operadores de vértice (no setor de Neveu-Schwarz) , também em superfícies esféricas. Tais cálculos generalizam os resultados bosônicos de Goulian e Li e outros autores e constituem a parte mais importante desta tese. No capítulo V temos vários comentários e conclussões sobre os resultados apresentados.

Como comentário final é importante esclarecer ao leitor que o material apresentado nesta tese se restringe a apenas dois métodos (cone de luz e conforme) utilizados no estudo de teorias (super)conformes acopladas a (super)gravitação bidimensional. Existem atualmente outros métodos até mais poderosos utilizados em tal estudo. Dentre eles se destacam os modelos de matrizes que oferecem soluções não perturbativas (com relação a constante de acoplamento da corda) para funções de correlação de operadores primários em teorias bosônicas com $c_m \leq 1$ que são válidos para superfícies de gênero arbitrário. No capítulo III desta tese tais resultados serão simplesmente copiados da literatura para efeito de comparação com os métodos utilizados aqui. Existe atualmente uma vasta literatura sobre modelos de matrizes onde recomenda-se especialmente os artigos de revisão [15] e [16].

Uma outra limitação desta tese é que estaremos interessados apenas no acoplamento a gravitação (por razões que ficarão claras no decorrer da leitura) de teorias conforme com carga central $c_m \leq 1$ ($\hat{c}_m \leq 1$) pouco será dito sobre a região de acoplamento forte $1 < c_m < 25 (1 < \hat{c}_m < 9)$. Para cálculos análogos aos realizados aqui na região $25 \leq c_m < 26$ (no caso bosônico) ao leitor é sugerida a leitura de [17].

CAPÍTULO II - GRAVITAÇÃO INDUZIDA EM DUAS DIMENSÕES

II-1-Introdução

Há cerca de dez anos atrás A.M.Polyakov num trabalho[1] extremamente inspirado (e inspirador) obteve a ação efetiva da gravitação (e supergravitação) em duas dimensões via integral de trajetória, revelando a relação entre a anomalia de Weyl e a dimensão crítica $D = 26$ (ou $D = 10$ no caso fermiônico) da teoria de cordas.

No trabalho original de Polyakov as coordenadas da corda $(X^\mu, \mu = 0, 1, \cdots, D-1)$ são acopladas a gravitação bidimensional, representada pela métrica g_{ab}, como D campos escalares:

$$S_M(g, X) = -\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{M}} d^2z\sqrt{g}X^\mu \Box X_\mu \quad , \tag{2.1.1}$$

onde $\Box$ representa o laplaciano sobre campos esclares em $\mathcal{M}$:

$$\Box = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a\sqrt{g}g^{ab}\partial_b \tag{2.1.2}$$

A função de partição da gravitação em duas dimensões é obtida através da soma sobre diferentes topologias da função de partição da topologia fixa:

$$\mathcal{Z} = \sum_{h=0}^{\infty}\int[\mathcal{D}g_{ab}]e^{-\frac{\lambda}{8\pi}\int_{\mathcal{M}}\sqrt{g}R+\mu_0\int_{\mathcal{M}}\sqrt{g}-\Gamma_{eff}} \quad . \tag{2.1.3}$$

onde h representa o gênero da superfície $\mathcal{M}$, λ é a constante de acoplamento da corda, μ_0 é a constante cosmológica nua e Γ_{eff} é a ação efetiva da gravitação induzida pela matéria representada por S_M.

Note que a ação de Einstein em duas dimensões é topológica:

$$\frac{1}{8\pi}\int_{\mathcal{M}} d^2z\sqrt{g}R = 1 - h \tag{2.1.4}$$

Consequentemente $\mathcal{Z}$ em (2.1.3) pode ser observada como uma expansão em loops onde h determina o número de loops e e^λ faz o papel da constante de Planck.

O maior mérito de Polyakov foi o cálculo explícito de Γ_{eff} indicada abaixo:

$$e^{-\Gamma_{eff}} = \int[\mathcal{D}X^\mu]_g e^{-S_M(g,X)} \quad . \tag{2.1.5}$$

O principal ingrediente do cálculo do lado direito de (2.1.5) é o requisito de invariância por reparametrizações . A medida invariante por reparametriazações $[\mathcal{D}X^\mu]_g$ é definida por:

$$\int [\mathcal{D}\delta X]_g e^{-\|\delta X\|^2} = 1 \quad , \tag{2.1.6}$$

com

$$\|\delta X\|^2 = \int d^2\sigma \sqrt{g} \delta X^\mu \delta X_\mu \quad . \tag{2.1.7}$$

O cálculo em [1] foi realizado no gauge conforme:

$$g_{ab} = e^\phi \hat{g}_{ab}(\tau_i) \tag{2.1.8}$$

onde $\hat{g}_{ab}$ é a chamada métrica fiducial e é função apenas dos parâmetros modulares τ_i da superfície $\mathcal{M}$. O campo ϕ é chamado inicialmente de grau de liberdade de Weyl. Note que S_M além de ser invariante por reparametrizações de $\mathcal{M}$ é também invariante sob tranformações de Weyl caracterizadas pelo parâmetro $\alpha_w(z)$:

$$\delta^w g_{ab} = \alpha_w g_{ab} \quad , \quad \delta^w X^\mu = 0 \quad . \tag{2.1.9}$$

No gauge conforme, (2.1.9) equivale a uma translação em ϕ. Nesse gauge reescrevemos (2.1.5) como:

$$e^{-\Gamma_{eff}(\hat{g},\phi)} = \int [\mathcal{D}b]_{e^\phi \hat{g}} [\mathcal{D}c]_{e^\phi \hat{g}} [\mathcal{D}X^\mu]_{e^\phi \hat{g}} e^{-S_M(\hat{g},X) - S_{gh}(\hat{g},b,c)} \tag{2.1.10}$$

Onde S_{gh} é a ação de Faddeev-Popov para os fantasmas (c^a) e antifantasmas (b^a) introduzidos na fixação de gauge e integrados acima com medidas invariantes por reparametrizações a exemplo de X^μ. Perceba que devido a invariância de Weyl de S_M e S_{gh} o fator de Weyl ϕ desaparece em tais termos. A observação fundamental de Polyakov é que as medidas acima, embora invariantes por reparametrizações , não são invariantes por Weyl, fazendo-se $\phi \to \phi + \delta\phi$ em (2.1.10) obtemos uma eq. diferencial para Γ_{eff}. Calculando a variação das medidas com um regulador invariante por reparametrizações obtemos:

$$\frac{\delta \Gamma_{eff}}{\delta \phi} = -\frac{(D-26)}{48\pi} \int d^2z \sqrt{g} [\hat{R} - \hat{\Box}\phi - \mu e^\phi] \quad , \tag{2.1.11}$$

Integrando, temos o resultado final obtido por Polyakov:

$$\Gamma_{eff}[e^\phi \hat{g}] = \frac{(D-26)}{48\pi} \int d^2z \sqrt{\hat{g}} \left[\frac{1}{2}\phi \hat{\Box} \phi - \hat{R}\phi + \mu e^\phi \right] \quad . \tag{2.1.12}$$

O coeficiente de (2.1.11) ou (2.1.12) está associado a carga central da álgebra do tensor de energia momento de $S_M + Sgh$, ou seja, no caso geral de matéria com carga central c_m teríamos c_m ao invés de D nas expressões acima, o que será usado daqui em diante. A ação em (2.1.12) é a ação de Liouville com ϕ o campo de Liouville . Integrando o campo de Liouville com uma medida invariante por reparametrizações obtemos uma ação efetiva para a métrica fiducial $\hat{g}_{ab}$. Para uma topologia fixa temos (usando $[\mathcal{D}g_{ab}]_g = [\mathcal{D}\hat{g}_{ab}]_g[\mathcal{D}\phi]_g$):

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}\hat{g}_{ab}]_g e^{-\Gamma'_{eff}(\hat{g})} \tag{2.1.13}$$

$$e^{-\Gamma'_{eff}(\hat{g})} = \int [\mathcal{D}\phi]_{g=e^{\phi}\hat{g}} e^{-\Gamma_{eff}[\hat{g},\phi]} \tag{2.1.14}$$

Antes de prosseguirmos observe que a medida $[\mathcal{D}\phi]_g$ acima é induzida a partir de $[\mathcal{D}g_{ab}]_g$ no gauge conforme como segue. Analogamente a (2.1.6) e (2.1.7) temos:

$$\|\delta g\|^2 = \int d^2z\sqrt{g}(g^{ac}g^{bd} + ag^{ab}g^{cd})\delta g_{ab}\delta g_{cd} \quad , \tag{2.1.15}$$

onde a é uma constante positiva. A definição acima no gauge conforme (2.1.8) induz a medida $[\mathcal{D}\phi]_{e^{\phi}\hat{g}}$ de (2.1.4):

$$\|\delta g\|^2 = \int d^2z\sqrt{\hat{g}}e^{\phi}(\delta\phi)^2 \quad . \tag{2.1.16}$$

A medida acima é invariante sob:

$$\begin{aligned} \phi &\to \phi - \sigma \\ \hat{g}_{ab} &\to e^{\sigma}\hat{g}_{ab} \quad . \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Aplicando em (2.1.14) com auxílio da fórmula:

$$\sqrt{g}R(g) = \sqrt{\hat{g}}[\hat{R}(\hat{g}) - \hat{\Box}\sigma] \quad , \tag{2.1.18}$$

onde $g_{ab} = e^{\sigma}\hat{g}_{ab}$, obtemos:

$$\Gamma'_{eff}(e^{\sigma}\hat{g}_{ab}) = \frac{(26 - c_m)}{48\pi}\int d^2z\sqrt{\hat{g}}\left[\frac{1}{2}\sigma\hat{\Box}\sigma - \hat{R}\sigma\right] \quad . \tag{2.1.19}$$

Comparando com (2.1.12), com c_m no lugar de D e $\mu = 0$, vemos que a ação de Liouville (2.1.12) está associada com a carga central $26 - c_m$ contrária a carga central $c_m - 26$ da matéria e fantasmas. Ou seja, a carga central total da matéria acoplada a gravitação

é nula. Esse ponto é extremamente importante como veremos no decorrer desta tese e simplesmente significa que a teoria total da gravitação e matéria ,quando quantizada, não é anômala.

Para discutirmos a ação induzida Γ_{eff} no gauge do cone de luz (próxima seção) seria importante deduzi-la de forma independente de gauge. Definindo o tensor energia momento da gravitação (T_{ab}) como:

$$T^{ab} = -\frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta\Gamma_{eff}}{\delta g_{ab}} \tag{2.1.20}$$

é fácil ver (usando (2.1.18)) que a equação diferencial (2.1.11) é equivalente a anomalia do traço do tensor energia momento:

$$T^a_a = \frac{(c_m - 26)}{24\pi}R(g = e^{\phi}\hat{g}) \quad . \tag{2.1.21}$$

Já que não existem anomalias de reparametrizações na nossa teoria podemos desfazer as reparametrizações que nos trouxeram de uma métrica genérica g_{ab} ao gauge conforme (2.1.8) sem problemas, ou seja, admitiremos que a equação da anomalia acima vale para qualquer g_{ab}. Não é difícil de se convencer (usando (2.1.18)) que a ação covariante por reparametrizações e que satisfaz (2.1.21) acima é não local e dada por:

$$\Gamma_{eff}(g) = \frac{c_m - 26}{96\pi}\int d^2z\sqrt{g}(R\Box^{-1}R + 2\mu) \quad . \tag{2.1.22}$$

A equação acima se reduz evidentemente a (2.1.12) no gauge conforme e será o ponto de partida das análises da próxima seção .

Em busca de uma dedução mais rigorosa de alguns resultados desta seção o leitor pode consultar, p.ex., [18,19].

II-2- O gauge do cone de luz

Como visto na seção anterior, a quantização de gravitação induzida em duas dimensões corresponde no gauge conforme a quantização da ação de Liouville . Entretanto esse é um problema difícil principalmente pelo fato de possuirmos uma interação exponencial (o termo cosmológico) e também pela forma complexa da medida $[\mathcal{D}\phi]_{e^{\phi}\hat{g}}$ que não é invariante translacional, como já vimos. Tais dificuldades levaram Polyakov e colaboradores[2,3] a introduzir o chamado gauge do cone de luz. Nesse gauge Polyakov descobriu uma simetria $SL(2,\Re)$ Kac-Moody que lhe permitiu resolver a teoria exatamente e calcular alguns expoentes críticos de teorias conformes com $c_m \leq 1$ acopladas a graviação . Nesta seção apresentaremos de forma suscinta os progressos feitos por Polyakov e colaboradores no cone de luz. Os tralhos originais desses autores apresentam os resultados de forma não linear o que dificulta sua leitura, por isso seguiremos outro trabalho[20] onde sutilezas de [2,3] foram parcialmente esclarecidas.

Começaremos com um estudo clássico das eqs. de movimento, que no caso de gravitação correspondem ao anulamento das compontentes do tensor energia momento. É conveniente obtermos primeiramente a partir da ação induzida covariante da seção anterior (2.1.22) o tensor energia momento covariante independente da fixação de gauge. Um longo cálculo leva a[20,21] :

$$T^{ab} = -\frac{k_0}{8\pi}[2\nabla^a\nabla^b(\Box^{-1}R) - \nabla^a(\Box^{-1}R)\nabla^b(\Box^{-1}R) - g^{ab}(2R - \frac{1}{2}\nabla_c(\Box^{-1}R)\nabla^c(\Box^{-1}R) - \mu)] \tag{2.2.1}$$

onde

$$k_0 = \frac{c_m - 26}{6} \quad . \tag{2.2.2}$$

No caso de uma superfície $\mathcal{M}$ planar com métrica minkowiskiana ($\hat{g}_{ab} = \eta_{ab} = (+.-)$) podemos introduzir coordenadas de cone de luz ($x^{\pm} = x^0 \pm x^1$) e fixar o gauge do cone de luz de Polyakov:

$$d^2s = h_{++}(dx^+)^2 + 2(dx^+dx^-) \tag{2.2.3}$$

onde

$$h_{++} = \frac{\partial_+ f}{\partial_- f} \tag{2.2.4}$$

No gauge acima temos de (2.1.22) :

$$\Gamma_{eff} = \frac{k_0}{8\pi} \int d^2x \left[\frac{(\partial_-^2 f)^2 \partial_+ f}{(\partial_- f)^3} - \frac{\partial_-^2 f \partial_- \partial_+ f}{(\partial_- f)^2} \right] \tag{2.2.5}$$

$$T_{--} = \frac{1}{4} T^{++} = \frac{1}{2} \frac{\delta \Gamma_{eff}}{\delta h_{++}} = -\frac{k_0}{3\pi} \{f, x^-\} \quad , \tag{2.2.6}$$

onde $\{f, x^-\}$ é a derivada de Schwarz:

$$\{f, x^-\} = \frac{\partial_-^3 f}{\partial_- f} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial_-^2 f}{\partial_- f} \right)^2 \quad . \tag{2.2.7}$$

Note que através da introdução da parametrização de h_{++} em função da variável f em (2.2.4) foi possível se obter uma forma local para Γ_{eff} (em função de f) o que para uma função genérica h_{++} não é válido.

No cone de luz o único grau de liberdade é h_{++} cuja equação de movimento é (vide (2.2.6)):

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta h_{++}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{f, x^-\} = 0 \quad . \tag{2.2.8}$$

A equação de movimento acima é invariante, como observado em [20], por transformações $SL(2, \Re)$ que dependem de x^+ :

$$\{f, x^-\} = \left\{ \frac{A(x^+) f + B(x^+)}{C(x^+) f + D(x^+)}, x^- \right\} = 0 \quad , \tag{2.2.9}$$

com $AD - BC = 1$.

Devido a simetria $SL(2, \Re)$ demonstra-se que a solução mais geral de (2.2.8) é dada por :

$$f(x^+, x^-) = \frac{a(x^+) x^- + b(x^+)}{c(x^+) x^- + d(x^+)} \tag{2.2.10}$$

com $ad - cb = 1$. De onde temos (por brevidade $h = h_{++}$ no que segue) :

$$h = \frac{\partial_+ f}{\partial_- f} = r(x^+) + s(x^+) x^- + t(x^+)(x^-)^2 \tag{2.2.11}$$

onde

$$\begin{aligned} r &= d\partial_+ b - b\partial_+ d \\ s &= d\partial_+ a - a\partial_+ d + c\partial_+ b - b\partial_+ c \\ t &= c\partial_+ a - a\partial_+ c \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

O fato de resolvermos completamente a teoria clássica em função de r, s, t indica que essas funções podem nos ajudar na solução da teoria quântica. Para isso tentaremos deduzir identidades de W-T envolvendo primeiramente , seguindo Polyakov, funções de correlação de h e campos primários da matéria representados por ϕ (não confundir com o campo de Liouville das outras seções). Através dessas identidades a interpretação de r, s, t se tornará clara. Com esse fim, notemos que segundo uma variação δf temos de (2.2.5):

$$\delta\Gamma_{eff} = \frac{k_0}{4\pi}\int d^2x \left(\frac{\partial_-^3 h}{\partial_- f}\right)\delta f \quad . \tag{2.2.13}$$

Essa expressão nos sugere reparametrizações (quirais) : $x^- \to x^- - \epsilon^-, x^+ \to x^+$, ou seja,

$$\delta f = \epsilon^- \partial_- f \tag{2.2.14}$$

o que implica:

$$\delta h = (\partial_- h - h\partial_- + \partial_+)\epsilon^- \tag{2.2.14b}$$

Admitindo que na matéria existam campos primários ϕ, de peso λ_0, que se transformam sob as reparametrizações acima da seguinte forma,

$$\delta\phi = \epsilon^-\partial_-\phi + \lambda_0(\partial_-\epsilon^-)\phi, \tag{2.2.15}$$

se efetuarmos tal reparametrização na função de correlação $\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle$, supondo que a medida $\mathcal{D}f$ herdada de $[\mathcal{D}g_{ab}]_g$ seja invariante, usando (2.2.13) teremos:

$$\begin{aligned} &\frac{ik_0}{4\pi}\langle\left(\int d^2x\partial_-^3 h\epsilon^-\right)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle \quad + \\ &+\sum_{i=1}^{n}\langle\phi(x_1)\cdots(\epsilon^-\partial_-\phi + \lambda_0\partial_-\epsilon^-\phi)(x_i)\cdots\phi(x_n)\rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

onde o fator i veio da função de partição ($e^{i\Gamma_{eff}}$).

Derivando a expressão acima com relação a $\epsilon(y)$ e usando

$$\delta^2(x) = \frac{1}{4i\pi}\partial_-^3\left(\frac{(x^-)^2}{x^+}\right) \tag{2.2.17}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \langle\tilde{h}(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle = &\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(y^- - x_j^-)^2}{y^+ - x_j^+}\frac{\partial}{\partial x_j^-} - 2\lambda_0\frac{y^- - x_j^-}{y^+ - x_j^+}\right) \\ &\times\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

com $\tilde{h} = k_0 h$.

Introduzindo os geradores l_j^a abaixo

$$
\begin{aligned}
l_j^+ &= (x_j^-)^2 \frac{\partial}{\partial x_j^-} + 2\lambda_0 x_j^- \\
l_j^0 &= x_j^- \frac{\partial}{\partial x_j^-} + \lambda_0 \\
l_j^- &= \frac{\partial}{\partial x_j^-} \quad ,
\end{aligned}
\tag{2.2.19}
$$

que satisfazem uma álgebra $SL(2,\Re)$:

$$
\begin{aligned}
[l^+, l^-] &= -2l^0 \\
[l^0, l^\pm] &= \pm l^\pm
\end{aligned}
\tag{2.2.20}
$$

vemos que (2.2.18) pode ser escrita na forma de identidades de W-T que aparecem em modelos de WZNW :

$$
\langle j^a(y)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{l_j^a}{y^+ - x_j^+}\langle\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\rangle. \tag{2.2.21}
$$

Se definirmos as correntes j^a através da expressão abaixo

$$
\tilde{h}(y) = j^+(y^+) - 2j^0(y^+)y^- + j^-(y^+)(y^-)^2. \tag{2.2.22}
$$

De forma análoga a (2.2.18) podemos obter:

$$
\begin{aligned}
\langle\tilde{h}(y)\tilde{h}(x_1)\cdots\tilde{h}(x_n)\rangle = &\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(y^- - x_j^-)^2}{y^+ - x_j^+}\frac{\partial}{\partial x_j^-} + 2\frac{y^- - x_j^-}{y^+ - x_j^+}\right)\langle\tilde{h}(x_1)\cdots\tilde{h}(x_n)\rangle \\
&+ k_0 \sum_{j=1}^{n} \frac{(y^- - x_j^-)^2}{(y^+ - x_j^+)^2}\langle\tilde{h}(x_1)\cdots\cancel{\tilde{h}(x_j)}\cdots\tilde{h}(x_n)\rangle
\end{aligned}
\tag{2.2.23}
$$

e consequentemente

$$
\begin{aligned}
\langle j^a(y)j^{b_1}(x_1)\cdots j^{b_n}(x_n)\rangle = &\frac{k_0}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\eta^{ab_j}}{(y^+ - x_j^+)^2}\langle j^{b_1}(x_1)\cdots\cancel{j^{b_j}(x_j)}\cdots j^{b_n}(x_n)\rangle \\
&+ \sum_{j=1}^{n}\frac{f^{ab_j}{}_{c_j}}{(y^+ - x_j^+)}\langle j^{b_1}(x_1)\cdots j^{c_j}(x_j)\cdots j^{b_n}(x_n)\rangle
\end{aligned}
\tag{2.2.24}
$$

onde $\eta^{+-} = \eta^{-+} = 2, \eta^{00} = -1$ e $f^{ab}{}_c$ são as constantes de estrutura do $SL(2,\Re)$.

As expressões (2.2.22) e (2.2.24) confirmam a interpretação dos coeficientes r, s, t de h como relacionados a correntes $j^a(x^+)$ que geram uma simetria Kac-Moody $SL(2,\Re)$ com extensão central k_0 . O próximo passo consiste em calcular renormalizações de parâmetros físicos como a extensão central k_0 e dimensões conformes λ_0. Para isso KPZ[13] estudam as reparametrizações da métrica g_{ab} do gauge do cone de luz (2.2.3) que preservam a forma desse gauge, ou seja, de

$$g_{ab}(x) = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a}\frac{\partial x'^d}{\partial x^b} g'_{cd}(x')$$

com $g_{+-}(x) = g'_{+-}(x') = 1$ e $g_{--}(x) = g'_{--}(x') = 0$, temos infinitesimalmente as simetrias residuais do cone de luz :

$$\begin{aligned} x'^+ &= x^+ + \epsilon(x^+) \\ x'^- &= x^- + \eta(x^+) \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

e sobre h:

$$\delta h = (\partial_+ + \partial_- h - h\partial_-)(\eta - x^-\partial_+\epsilon + \epsilon h) \tag{2.2.26}$$

A partir de δh obtemos de (2.2.22) as transformações das correntes δj^a e com ajuda da álgebra de correntes (2.2.24) podemos determinar os geradores das transformações residuais associadas aos parâmetros ϵ e η acima, encontramos respectivamente (vide detalhes em [20,21,23]):

$$\begin{aligned} Q_\epsilon &= T^N_{++} = T_{++} - 2hT_{+-} \\ &= \frac{\eta_{ab}\colon j^a j^b\colon}{k+2} + \partial_+ j^0 - \partial_+ j^- x^- \\ Q_\eta &= j^- = T_{+-} \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

onde k corresponde a extensão central (renormalizada) da álgebra de correntes (2.2.24). Novamente através da álgebra de correntes (2.2.24) podemos obter a expansão a curtas distâncias de T^N_{++} e T_{+-} :

$$\begin{aligned} T^N_{++}(x)T^N_{++}(x') =& \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{3k}{(k+2)} - 6k\right)}{(x'^+ - x^+)^4} + \frac{2T^N_{++}(x')}{(x^+ - x'^+)^2} \\ &+ \frac{\partial_+ T^N_{++}}{x^+ - x'^+} - \frac{x^- - x'^-}{x^+ - x'^+}\left(\frac{2\partial T^N_{++}}{(x^+ - x'^+)} + \partial_+\partial_- T^N_{++}\right) \\ &+ \cdots \\ T^N_{++}(x)T_{+-}(x') =& \frac{2T_{+-}(x')}{(x^+ - x'^+)^2} + \frac{\partial_+ T_{+-}}{x^+ - x'^+} + \cdots \\ T_{+-}(x)T_{+-}(x') =& 0 + \cdots \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

Onde as reticências representam termos não singulares.

A invariância dos estados físicos, na teoria quântica, sob as transformações residuais geradas por Q_ϵ e Q_η pode ser consistentemente implementada na teoria total de gravitação e matéria através dos vínculos $T^N_{++}(\text{total}) = T_{+-}(\text{total}) = 0$ se a carga central total for nula. Observando que (vide [2,22]) a contribuição dos fantasmas no cone de luz é -28 e não -26 como no gauge conforme e que $c_{grav} = \frac{3k}{(k+2)} - 6k$ (vide (2.2.28)) temos:

$$c_T = c_m - 28 + \frac{3k}{(k+2)} - 6k = 0 \tag{2.2.29}$$

de onde temos duas soluções :

$$k + 2 = \frac{1}{12}(c_m - 13 \pm \sqrt{(c_m - 1)(c_m - 25)}), \tag{2.2.30}$$

como k_0 no limite semiclássico ($c_m \to -\infty$) é dado por $\frac{c_m}{6}$ (vide (2.2.2)) para que haja concordância com k acima no mesmo limite devemos escolher o sinal positivo em (2.2.30).

Além de obterem a carga central renormalizada k , KPZ[2,3] também obtiveram pesos conformes renormalizados pela ação da gravitação :

$$\lambda - \lambda_0 = -\frac{\lambda(\lambda - 1)}{k + 2} \tag{2.2.31}$$

bem como a susceptibilidade (γ) da corda, que determina o comportamento da função de partição com relação a área A da superfície $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{Z}(A) \propto A^{\gamma - 3} dA. \tag{2.2.32}$$

onde :

$$\gamma = -k - 1 \tag{2.2.33}$$

A concordância (vide [3]) com expoentes críticos obtidos em modelos discretos definidos em redes aleatórias (que simulam a gravitação) é perfeita.

Na próxima seção veremos como reproduzir tais resultados acima no gauge conforme. Antes dissso três comentários:

1) Das expressões acima vemos que na região $1 \leq c_m \leq 25$ expoentes críticos se tornam complexos o que assinala uma transição de fase no sistema. A região acima é chamada

de região de acoplamento forte da gravitação e praticamente nada se sabe sobre ela. Nos capítulos III e IV nos restringiremos a teorias que se situam abaixo da barreira $c_m = 1$, isto é, $c_m \leq 1$.

2) Note que a introdução de coordenadas de cone de luz foi possível ao assumirmos que $\mathcal{M}$ era uma superfície localmente plana (do tipo Minkowisky) por esta razão os resultados de KPZ são válidos apenas para a esfera, vista como projeção estereográfica do plano. Não se sabe como generalizar os cálculos de KPZ para outras superfícies de Riemann. Essa é a maior motivação para a próxima seção onde resultados de expoentes críticos via gauge conforme (definível em qualquer superfície de Riemann) serão obtidos para superfícies mais gerais.

3) Os cálculos desta seção foram generalizados para o caso supersimétrico em [24] e no último trabalho de [3].

II-3 O gauge conforme

Na primeira seção deste capítulo vimos que a função de partição de uma teoria conforme de carga central c_m acoplada a gravitação no gauge conforme é dada por (para uma topologia fixa) :

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}\hat{g}_{ab}(\tau_i)]_g [\mathcal{D}\phi]_g [\mathcal{D}X]_g [\mathcal{D}b\mathcal{D}c]_g e^{-S_M(X,\hat{g})-S_{gh}(\hat{g},b,c)+\mu_0 \int \sqrt{\hat{g}}e^{\phi}} \tag{2.3.1}$$

As medidas são definidas com $g_{ab} = e^{\phi}\hat{g}_{ab}$.

Já havíamos visto que a medida $[\mathcal{D}\phi]_g$ não é invariante por translações em ϕ devido ao fator $\sqrt{g} = \sqrt{\hat{g}}e^{\phi}$. Esse é um dos principais problemas na quantização da teoria acima, que foi resolvido apenas recentemente em [7,8]. Esses autores, sem demonstração , assumem que a passagem da medida $[\mathcal{D}\phi]_g$ para $[\mathcal{D}\phi]_{\hat{g}}$ definida abaixo (analogamente para os demais campos) :

$$\|\delta\phi\|^2 = \int d^2x\sqrt{\hat{g}}(\delta\phi)^2, \tag{2.3.2}$$

é feita através de um jacobiano J, ou seja:

$$[\mathcal{D}\phi]_g[\mathcal{D}X]_g[\mathcal{D}b\mathcal{D}c]_g = [\mathcal{D}\phi]_{\hat{g}}[\mathcal{D}X]_{\hat{g}}[\mathcal{D}b\mathcal{D}c]_{\hat{g}} J. \tag{2.3.3}$$

com o seguinte ansatz[2]:

$$J = e^{-S_L} \quad ,$$

$$S_L(\phi,\hat{g}) = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\sqrt{\hat{g}}\left[\hat{g}^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - Q\hat{R}\phi + 4\mu e^{\alpha\phi}\right]. \tag{2.3.5}$$

Em [7,8] a constante Q é determinada a partir do anulamento da carga central total. Com $\mu = 0$ em (3.1.5) temos uma teoria conforme com tensor energia momento T^L_{zz} :

$$T^L_{zz} = -\frac{1}{2}:\partial_z\phi\partial_z\phi: -\frac{Q}{2}\partial_z^2\phi \tag{2.3.6}$$

e carga central $c_L = 1 + 3Q^2$. Portanto :

$$c_T = 1 + 3Q^2 + c_m - 26 = 0$$

---

[2] Poderíamos ter também um coeficiente arbitrário na frente do termo cinético, mas após uma redefinição de ϕ voltaríamos a um ansatz com dois parâmetros livres apenas.

implica[3)]

$$Q = \sqrt{\frac{25-c}{3}} \tag{2.3.7}$$

A constante α é fixada impondo-se que $e^{\alpha\phi}$ seja um operador conforme $(1,1)$. Com o tensor energia momento (2.3.6) temos:

$$\Delta(e^{\alpha\phi}) = -\frac{1}{2}\alpha(Q+\alpha) = 1 \tag{2.3.8}$$

$$\alpha_{\pm} = -\frac{Q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{Q^2-8} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(\sqrt{25-c_m} \mp \sqrt{1-c_m}) \tag{2.3.9}$$

De forma análoga ao caso da carga central renormalizada (k) da álgebra $SL(2,\Re)$ Kac-Moody do cone de luz, veremos posteriormente que para obtermos concordância com resultados semiclássicos $(c_m \to -\infty)$ é preciso que tomemos a solução α_+ de (2.3.9).

Neste ponto é importante comentar que as constantes Q e α_+ de (2.3.7) e (2.3.9) já haviam sido determinadas há muito tempo atrás em [5,6] embora a relação com a definição da medida da integral de trajetória não fosse conhecida. Em [5,6] Q e α foram determinados utilizando-se quantização canônica e tratando o termo cosmológico como perturbação usando o seguinte ansatz para o tensor energia momento:

$$T^L_{zz} = -\frac{1}{2}:\partial_z\phi\partial_z\phi: -\frac{Q}{2}\partial_z^2\phi + \mu:e^{\alpha\phi}: \tag{2.3.10}$$

Impondo-se que a álgebra do tensor energia momento total formado por T^L_{zz}, T^M_{zz}, e T^{gh}_{zz} se feche com carga central total nula obtem-se em [5,6] exatamente (2.3.7) e (2.3.9). Apesar de tais progressos parciais, somente com o trabalho recente de [7,8] foi possível calcular quantidades físicas como expoentes críticos como veremos a seguir.

Segundo [7,8] a integral de trajetória da matéria com carga central c_m em interação com gravitação no gauge conforme pode ser escrita como (para topologia fixa):

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}\mu]_{\hat{g}} e^{-(S_L+S_M+S_{gh})} \tag{2.3.11}$$

onde S_L é dada em (2.3.5) com Q e α de (2.3.7) e (2.3.9) e a medida $[\mathcal{D}\mu]_{\hat{g}}$ inclui, além dos campos de matéria e dos fantasmas, o campo de Liouville . Essa medida, como vimos anteriormente, é invariante translacional em ϕ e é definida com relação a métrica fiducial $\hat{g}_{ab}(\tau_i)$.

---

3) A escolha de sinal é irrelevante.

Tendo definido a função de partição (2.3.11) podemos introduzir a função de partição para área fixa ($\mathcal{Z}(A)$) com o intuito de calcularmos alguns expoentes críticos e comparar com resultados obtidos no cone de luz :

$$\mathcal{Z} = \int_0^\infty dA e^{-\mu A} \mathcal{Z}(A) \tag{2.3.12}$$

$$\mathcal{Z}(A) = \int [\mathcal{D}\mu]_{\hat{g}} e^{-S_L(\mu=0)-S_M-S_{gh}} \delta\left(\int e^{\alpha\phi}\sqrt{\hat{g}}d^2x - A\right) \tag{2.3.13}$$

e efetuando uma translação $\phi \to \phi + \frac{\rho}{\alpha_+}$ apenas o argumento da função delta e o termo proporcional a curvatura $\hat{R}$ de $S_L(\mu = 0)$ serão modificados já que ρ é uma constante. Assim temos :

$$\begin{aligned} S_L &\to S_L - \frac{Q}{\alpha_+}(1-h) \\ \delta\left(\int d^2x\sqrt{\hat{g}}e^{\alpha\phi} - A\right) &\to e^{-\rho}\delta\left(\int d^2x\sqrt{\hat{g}}e^{\alpha\phi} - e^{-\rho}A\right). \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

Portanto

$$\mathcal{Z}(A) = e^{\left(\frac{Q}{\alpha_+}(1-h)-1\right)\rho}\mathcal{Z}\left(e^{-\rho}A\right) \quad , \tag{2.3.15}$$

ou seja,

$$\mathcal{Z}(A) \sim A^{\gamma-3} \tag{2.3.16}$$

de onde temos a susceptibilidade γ :

$$\gamma = 2 + (1-h)\frac{Q}{\alpha_+} \tag{2.3.17}$$

$$= \frac{(1-h)}{12}[c_m - 25 - \sqrt{(25-c_m)(1-c_m)}] \quad + \quad 2 \tag{2.3.18}$$

O resultado acima concorda com o obtido por KPZ (vide seção anterior) para a esfera ($h = 0$). Com a identificação :

$$\frac{1}{k+2} = -\frac{\alpha_+^2}{2} \tag{2.3.19}$$

Além disso (2.3.18) generaliza resultados de KPZ para superfícies de Riemann de gênero superior. Poderíamos igualmente calcular dimensões conformes renormalizadas (vide [8]) e confirmar (2.2.31) de KPZ. Distler e Kawai em [8] efetuam esse cálculo definindo a função de correlação de um certo operador primário Φ de dimensão conforme Δ_0 (e sem spin) através de:

$$\langle\Phi\rangle = \int [\mathcal{D}\mu]_{\hat{g}} e^{-(S_L+S_M+S_{gh})}\left(\int_{\mathcal{M}} d^2x\sqrt{\hat{g}}e^{\beta\phi}\Phi\right). \tag{2.3.20}$$

Ou seja, o campo de matéria Φ deve ser vestido por $e^{\beta\phi}$ e integrado sobre a superfície $\mathcal{M}$. O vestimento β é fixado impondo-se que o integrando seja um operador conforme $(1,1)$ para garantirmos invariância da função de correlação sob transformações geradas pelo tensor energia momento. Com o tensor energia momento (2.3.6) isso implica em:

$$\Delta(e^{\beta\phi}\Phi) = \Delta_0 - \frac{1}{2}\beta(Q+\beta) = 1 \tag{2.3.21}$$

$$\beta_\pm = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{25-c_m} \mp \sqrt{1-c_m+24\Delta_0}\right) \tag{2.3.22}$$

ou ainda

$$\beta_\pm = -\frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{1-c_m+24\Delta_0}{12}} \tag{2.3.23}$$

O esquema descrito acima será utilizado nos capítulos III e IV no cálculo de funções de correlação para teorias com $c_m \leq 1$ acopladas ao campo de Liouville . Antes de iniciarmos tais cálculos devemos fazer alguns comentários referentes ao uso dos resultados desta seção posteriormente:

1) Sobre a validade do esquema de DDK para $\mu \neq 0$.

No trabalho original de [7,8] admite-se de fato que a constante cosmológica é nula ($\mu = 0$) de outra forma os cálculos realizados com T^L_{zz} de (2.3.6) na determinação de Q e α_+ não se justificam. Na melhor das hipóteses podemos dizer que a formulação de DDK[7,8] vale perturbativamente no termo cosmológico $\mu e^{\alpha_+\phi}$. De fato o ponto principal da formulação de DDK é a hipótese feita sobre o jacobiano da passagem de $[\mathcal{D}\mu]_g$ para $[\mathcal{D}\mu]_{\hat{g}}$ (vide ansatz (2.3.5)). Embora tal jacobiano tenha sido calculado explicitamente em [25] existe uma ambiguidade na escolha da regularização , esse problema foi resolvido em [26] onde é demonstrado, perturbativamente em α_+, que a quantização da gravitação com $[\mathcal{D}\mu]_g$ é equivalente a quantização com $[\mathcal{D}\mu]_{\hat{g}}$. De qualquer forma a formulação de DDK para $\mu \neq 0$ não está sobre uma base totalmente sólida embora reproduza os expoentes críticos encontrados por Polyakov no gauge do cone de luz. Somente com o advento da técnica do modo zero no cálculo preciso de funções de correlação (capítulos III e IV) é que saberemos como trabalhar com o termo cosmológico de forma não perturbativa. Ou seja, podemos dizer que DDK resolveram um dos problemas fundamentais da quantização de Liouville , aquele referente à medida. O outro problema, referente ao tratamento adequado

do termo cosmológico é resolvido como veremos nos próximos capítulos através do modo zero ϕ_0 do campo de Liouville .

2) **Generalização Supersimétrica**

Em [27] generaliza-se o esquema de DDK para o caso supersimétrico . A diferença básica é que onde tinhamos operadores $(1,1)$ passaremos a ter operadores $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e com supercampos no lugar de campos fixamos analogamente o coeficiente (Q) do supercampo de curvatura $\hat{Y}$ (vide capítulo V) e α_+ do supertermo cosmológico como,

$$Q = \sqrt{\frac{9-\hat{c}_m}{2}} \tag{2.3.24}$$

$$\alpha_+ = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{9-\hat{c}_m} - \sqrt{1-\hat{c}_m}\right) \quad , \tag{2.3.25}$$

onde

$$c_m = \frac{3}{2}\hat{c}_m. \tag{2.3.26}$$

3) **Interpretação Espaço-tempo da Corda não Crítica**

Considerando a matéria como composta de d campos escalares $X^\mu, \mu = 0,1,\cdots,d-1$, acabamos de aprender que a função de partição dessa teoria em interação com gravitação no gauge conforme é dada por:

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}\phi]_{\hat{g}}[\mathcal{D}X]_{\hat{g}}[\mathcal{D}b\mathcal{D}c]_{\hat{g}} e^{-S-S_{gh}} \tag{2.3.27}$$

com

$$S = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\sqrt{\hat{g}}\left[\hat{g}^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}\hat{g}^{ab} - Q\hat{R}\phi + 4\mu e^{\alpha\phi}\right] \tag{2.3.28}$$

onde Q e α_+ são dados em (2.3.7) e (2.3.9) com d no lugar de c_m. No esquema de DDK a medida do campo de Liouville tem a mesma forma (translacionalmente invariante) das medidas dos d campos de matéria X^μ. Isso nos sugere[28] reescrever a função partição $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z} = \int [\mathcal{D}X^i]_{\hat{g}} e^{-S(X^i,\hat{g})-S_{gh}} \tag{2.3.29}$$

onde

$$S(\phi,\hat{g}) = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\sqrt{\hat{g}}\left[\hat{g}^{ab}\partial_a X^i \partial_b X^j G_{ij} + \hat{R}\Phi(X^i) + T(X^i)\right] \tag{2.3.30}$$

com $X^i = (\phi, X^\mu), i = 0, 1, \cdots d$, e $G_{00} = 1, G_{0\mu} = 0$, $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ além de:

$$\begin{aligned} \Phi(X^i) &= -Q\phi \\ T(X^i) &= 4\mu e^{\alpha_+ \phi} \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

Isso significa que uma corda imersa num espaço-tempo d-dimensional com métrica $\eta_{\mu\nu}$ em interação com gravitação tem a mesma forma de uma corda imersa num espaço-tempo D-dimensional ($D = d+1$) de métrica G_{ij} acima e onde o dilaton Φ e o táquion T possuem os valores de fundo (Background) não triviais acima. Para que essa semelhança formal se torne uma equivalência quântica é nescessário demonstrar que os valores de fundo de G_{ij}, Φ, T são compatíveis com a invariância conforme (função beta nula) que é de fato o requisito que determina os possíveis espaços-tempo onde a corda pode ser consistentemente imersa. Entretanto isso não é difícil de demonstrar no caso em questão já que os dois primeiros termos de (2.3.30) foram determinados justamente através desse requisito, ou seja, carga central total nula. A presença do táquion T acima não quebra a simetria conforme do resto da ação , pois α_+ foi determinado para que $T(X^i)$ tenha a dimensão conforme correta. Portanto temos uma interpretação consistente no espaço-tempo D-dimensional, que aliás será de grande utilidade na interpretação dos resultados obtidos nos capítulos III e IV para funções de correlação de operadores de vértice. Estaremos interessados em operadores que representam táquions (no caso bosônico) e possuem a seguinte forma:

$$T(k) = e^{ikX + \beta\phi} \tag{2.3.32}$$

A interpretação espaço-tempo será especialmente útil no caso $c_m = d = 1$ onde temos equivalentemente uma corda bidimensional ($D = 2$). O termo táquion nesse caso não é muito adequado já que o operador acima não possui massa em $D = 2$. Para verificar isso basta reescrever a equação que determina o vestimento $\beta(k)$ acima (para que $T(k)$ seja $(1,1)$) numa forma[4)] covariante:

$$\Delta(T(k)) = \frac{k^2}{2} - \frac{1}{2}\beta(\beta + Q) = 1$$

ou

$$\left(\beta + \frac{Q}{2}\right)^2 - k^2 = \frac{Q^2}{4} - 2,$$

[4)] É conhecido que a parte linear da equação de movimento do táquion é equivalente a equação que define seu peso conforme.

onde

$$Q^2 = \frac{25-d}{3}$$

assim sendo temos

$$E^2 - k^2 = \frac{2-D}{12} = 0 \quad (\text{se} \quad D = 2), \quad -2(\text{se} \quad D = 26), \tag{2.3.33}$$

com

$$E = \beta + \frac{Q}{2}. \tag{2.3.34}$$

A equação (2.3.33) acima nada mais é do que a equação de Klein-Gordon para uma partícula escalar no espaço D-dimensional e de massa $m^2 = \frac{D-2}{12}$. De qualquer forma continuaremos a chamar $T(k)$ de táquion mesmo para $D = 2$ seguindo a nomenclatura da literatura.

Nos capítulos seguintes usaremos como base o esquema do gauge conforme apresentado nesta seção para o cálculo de funções de correlação .

CAPÍTULO III - FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO BOSÔNICAS

III-1-Introdução

Neste capítulo estaremos interessados no cálculo de funções de correlação em teorias conformes bosônicas conformalmente acopladas à gravitação em duas dimensões . Tais cálculos tem sido efetuados recentemente[29,30,31] na formulação discreta via modelos de matrizes nos casos em que a carga central da matéria (c_m) satisfaz: $c_m \leq 1$. Na formulação discreta os cálculos são efetuados de maneira exata (no limite do contínuo) levando a resultados extremamente elegantes e qualitativamente reveladores (para uma revisão de tais resultados no caso $c_m = 1$ vide [15]).

Seria desejável que os resultados dos modelos de matrizes fossem reproduzidos no contínuo. Como vimos no capítulo anterior, o gauge do cone de luz não parece muito promissor para esse tipo de cálculo devido a ausência de uma formulação no espaço bidimensional euclideano e o problema da não localidade que dificulta os cálculos, resta portanto o gauge conforme que na formulção de DDK se demonstrou útil no cálculo de expoentes críticos. Entretanto é importante salientar que em DDK nenhuma informação relevante sobre a interação da teoria de Liouville , representada pelo termo cosmológico , foi utilizada. Os expoentes críticos foram obtidos apenas levando-se em conta a invariância translacional da medida $[\mathcal{D}\phi]_{\hat{g}}$.

Para resultados mais precisos como funções de correlação de operadores físicos seria nescessário tratar o termo cosmológico com mais cuidado. Todavia, como vimos no capítulo anterior, esse é um problema reconhecidamente difícil na quantização da teoria de Liouville que, apesar de esforços, tinha resistido por vários anos sem uma solução adequada. Ou seja, não se conhecia nenhuma maneira de se calcular funções de correlação em teoria de Liouville de forma não perturbativa e que levasse em conta o termo cosmológico , até que Goulian e Li[9] desenvolveram tal técnica que os possibilitou calcular funções de 3,2 e 0-pontos em certos modelos mínimos unitários ($c_m < 1$) acoplados conformalmente a gravitação em duas dimensões e como explicaremos neste capítulo os resultados concordam plenamente com aqueles obtidos via modelos de matrizes .

Um dos ingredientes fundamentais no trabalho revolucionário de Goulian e Li é a integração no modo zero (ϕ_0) do campo de Liouville . A importância de tal integração

havia sido notada anteriormente por Gupta, Trivedi e Wise[32] que utilizaram tal técnica para obter de forma não perturbativa funções de partição para área fixa ($\mathcal{Z}(A)$) em teorias conformes acopladas a gravitação em duas dimensões para certos valores "mágicos" da carga central c_m. A seguir explicaremos em detalhe a referência [32] como introdução ao trabalho de Goulian e Li.

Os autores de [32] utilizaram o formalismo de DDK onde a função de partição total da matéria e gravitação no caso, p.ex., da esfera é:

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{V_{SL(2,\mathbb{C})}} \int [\mathcal{D}\phi][\mathcal{D}X] e^{-(S_L(\phi,\hat{g})+S_M(X,\hat{g})+S_{gh})} \quad . \tag{3.1.1}$$

Segundo DDK temos:

$$S_L = \frac{1}{2\pi} \int d^2w \sqrt{\hat{g}} [\sqrt{\hat{g}}^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{Q}{4} \hat{R}\phi + 2\mu e^{\alpha_+ \phi}],$$

onde Q e α_+ são funções de c_m (vide capítulo III). Note que S_M representa a ação da matéria com carga central $c_m \leq 1$ representada por X.

Para ilustrarmos a técnica do modo zero analisaremos apenas a função de partição de Liouville $\mathcal{Z}_L$:

$$\mathcal{Z}_L = \frac{1}{V_{SL(2,\mathbb{C})}} \int [\mathcal{D}\phi]_{\hat{g}} e^{-S_L} \tag{3.1.2}$$

$$\mathcal{Z}_L = \frac{1}{V_{SL(2,\mathbb{C})}} \int_0^\infty dA e^{-\frac{\mu}{\pi}A} \mathcal{Z}_L(A) \tag{3.1.3}$$

$$\mathcal{Z}_L(A) = \int [\mathcal{D}\phi]_{\hat{g}} \delta \left(\int d^2w \sqrt{\hat{g}} e^{\alpha_+ \phi} - A \right) e^{\frac{1}{2\pi} \int d^2w \sqrt{\hat{g}} [\phi \hat{\Box} \phi + \frac{Q}{4} \hat{R}\phi]} \tag{3.1.4}$$

A grande idéia, embora pobremente explorada em [32] foi decompor o campo de Liouville no modo zero (ϕ_0) do laplaciano $\hat{\Box}$ (que no caso da esfera é simplesmente uma constante) e nos modos ortogonais $\tilde{\phi}$:

$$\phi = \phi_0 + \tilde{\phi} \quad , \quad \int d^2w \sqrt{\hat{g}} \tilde{\phi} = 0 \tag{3.1.5}$$

A ortogonalidade de $\tilde{\phi}$ e ϕ_0 indica que a medida fatoriza:

$$[\mathcal{D}\phi]_{\hat{g}} = [\mathcal{D}\tilde{\phi}]_{\hat{g}} \times d\phi_0$$

e temos:

$$\mathcal{Z}_L(A) = \int [\mathcal{D}\tilde{\phi}]_{\hat{g}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi_0 \delta\left(e^{\alpha_+\phi_0}\int d^2w\sqrt{\hat{g}}e^{\alpha_+\tilde{\phi}} - A\right) e^{Q(1-h)\phi_0} e^{\frac{1}{2\pi}\int d^2w\sqrt{\hat{g}}[\tilde{\phi}\hat{\Box}\tilde{\phi}+\frac{Q}{4}\hat{R}\tilde{\phi}]}$$

onde usamos

$$\frac{1}{8\pi}\int d^2w\sqrt{\hat{g}}\hat{R} = 1 - h = 1 \quad \text{(para a esfera)} \tag{3.1.6}$$

Integrando sobre ϕ_0 obtemos:

$$\mathcal{Z}_L(A) = \frac{A^{\frac{Q}{\alpha_+}-1}}{\alpha_+}\int [\mathcal{D}\tilde{\phi}]_{\hat{g}} \left(\int d^2w\sqrt{\hat{g}}e^{\alpha_+\tilde{\phi}}\right)^{-\frac{Q}{\alpha_+}} e^{\frac{1}{2\pi}\int d^2w\sqrt{\hat{g}}[\tilde{\phi}\hat{\Box}\tilde{\phi}+\frac{Q}{4}\hat{R}\tilde{\phi}]} \tag{3.1.7}$$

Daqui em diante usaremos ϕ em vez de $\tilde{\phi}$ por brevidade. Assim temos a função de partição total:

$$\mathcal{Z}_L = \frac{1}{V_{SL(2,\mathbb{C})}}\int_0^\infty dA A^{\frac{Q}{\alpha_+}-1} e^{-\frac{\mu}{\pi}A} \langle (\int d^2w\sqrt{\hat{g}}e^{\alpha_+\phi})^{-\frac{Q}{\alpha_+}}\rangle_0 \quad , \tag{3.1.8}$$

onde $\langle \quad \rangle_0$ significa que o valor esperado é calculado considerando que a constante cosmológica seja zero, ($\mu = 0$). Note que $\mathcal{Z}_L$ pode ainda ser reescrita. Usando

$$\left(\frac{\mu}{\pi}\right)^{-\frac{Q}{\alpha_+}}\Gamma\left(\frac{Q}{\alpha_+}\right) = \int_0^\infty dA A^{\frac{Q}{\alpha_+}-1} e^{-\frac{\mu}{\pi}A} \quad , \tag{3.1.9}$$

temos

$$\mathcal{Z}_L = \frac{\left(\frac{\mu}{\pi}\right)^{-\frac{Q}{\alpha_+}}\Gamma\left(\frac{Q}{\alpha_+}\right)}{V_{SL(2,\mathbb{C})}}\langle (\int d^2w\sqrt{\hat{g}}e^{\alpha_+\phi})^{-\frac{Q}{\alpha_+}}\rangle_0 \quad , \tag{3.1.10}$$

Acima vemos que a integração no modo zero ϕ_0 equivale a baixar a interação (termo cosmológico) para o integrando da integral de trajetória, ou seja o cálculo da função de 0-pontos (função de partição) para a teoria com interação ($\mu \neq 0$) equivale a função de $\frac{-Q}{\alpha_+}$ pontos para a teoria livre ($\mu = 0$). Esse raciocínio entretanto só faz sentido no caso em que $\frac{-Q}{\alpha_+}$ é um inteiro não negativo (n):

$$-Q/\alpha_+ = n \quad . \tag{3.1.11}$$

Como Q e α_+ são funções de c_m isso nos leva a valores mágicos de c_m[32] :

$$c_m = \frac{6n^2 + 25(1-n)}{(1-n)} \quad , \tag{3.1.12}$$

É justamente neste ponto do cálculo que a integração no modo zero parece ser inútil pois segundo (3.1.10) embora o valor esperado seja calculável para tais valores de c_m, temos singularidades através de $\Gamma(-n)$. Foi por esta razão que os autores de [32] adotaram a atitude conservadora de calcular apenas $\mathcal{Z}_L(A)$, que (vide (3.1.7)) não contém tais singularidades, pois o fator $\Gamma(-n)$ não aparece. Usando propagadores livres, já que $\mu = 0$,

$$\langle \phi(w_i)\phi(w_j)\rangle = \ln|w_i - w_j|^{-2} \quad , \tag{3.1.13}$$

temos

$$\mathcal{Z}_L(A) = \frac{A^{-n-1}}{\alpha_+ V_{SL(2,\mathbb{C})}} \prod_{i=1}^{n} \int d^2 w_i \prod_{i<j} |w_i - w_j|^{-2\alpha_+^2} \quad . \tag{3.1.14}$$

Note que o resultado acima já representa um avanço em relação ao de DDK e KPZ[3] que tinham apenas uma relação de proporcionalidade entre $\mathcal{Z}_L(A)$ e a área A . Em (3.1.14) temos uma expressão fechada para $\mathcal{Z}_L(A)$ e em princípio calculável. O grande avanço entretanto só apareceria com o cálculo de Goulian e Li[9] que, decidiram enfrentar a singularidade presente no fator $\Gamma(-n)$. De fato não é difícil entender a origem e o significado de tal singularidade. Introduzindo um cut-off ($\lambda \to 0$) para pequenas áreas em (3.1.9) temos :

$$\mu^n \Gamma(-n) \sim \int_\lambda^\infty dA A^{-n-1} e^{\mu A} \quad . \tag{3.1.15}$$

Supondo $\mu > 0$ podemos calcular o termo mais divergente da integral (3.1.15) e o termo independente do cut-off λ :

$$\mu^n \Gamma(-n) \sim \begin{cases} -\ln\lambda - \ln\mu \quad , & n = 0 \\ \frac{\lambda^{-n}}{n} + (-)^{n+1}\frac{\mu^n}{n!}\ln\mu \quad , & n = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{3.1.16}$$

Como a expressão acima é bem definida para λ finito concluimos que as superfícies de pequenas áreas são a origem da singularidade em $\Gamma(-n)$, que é clássica em essência. De acordo com a função delta em (3.1.14) pequenas áreas equivalem a $\phi \to \infty$ (lembre que $\alpha_+ < 0$) e essas configurações são exatamente as que minimizam a ação de Liouville (assumindo $\mu > 0$) e dão a maior contribuição para a integral de trajetória. Por serem de origem clássica essas singularidades já haviam sido detectadas em cálculos semiclássicos[33].

A característica mais importante de tais singularidades é que o termo independente do cut-off em (3.1.16) é universal e poderia , p. ex., ser obtido através de um cut-off ($\epsilon \to 0$) na carga central :

$$\mu^{n+\epsilon}\Gamma(-n+\epsilon) \sim (-)^{n+1}\frac{\mu^n}{n!}\frac{1}{\epsilon} + (-)^{n+1}\frac{\mu^n}{n!}\ln\mu \quad . \tag{3.1.17}$$

A universalidade da parte finita sugere que a singularidade implícita em $\mu^n\Gamma(-n)$ seja desprezada e que apenas a parte finita tenha conteúdo físico. Como veremos na próxima seção essa interpretação (corroborada também por resultados de modelos de matrizes) levou a um grande desenvolvimento do estudo de funções de correlação em Liouville .

III-2 - A função de 3-pontos

Antes de descrevermos o trabalho inspirador de Goulian e Li é importante comentar que mesmo antes destes , Bershadsky e Klebanov[34] inspirados por [32] haviam calculado a função de partição no torus no caso de um boson compactificado num círculo de raio R acoplado a gravitação em duas dimensões via Liouville e conseguiram reproduzir até mesmo a dependência da função de partição com R obtida anteriormente via modelos de matrizes . Eles usaram a técnica do modo zero. No torus ($h = 1$) a ação de Einstein é nula e se refizermos os cálculos da seção anterior deduziremos que $n = 0$ e como já vimos: $\mu^{-n}\Gamma(-n) \sim \frac{1}{\epsilon} - \ln\mu, (\epsilon \to 0)$. Em [34] o termo singular foi desprezado, isto é, assume-se $\mu^{-n}\Gamma(-n) \sim -\ln\mu$. O sucesso do cálculo de Bershadsky e Klebanov certamente inspirou Goulian e Li que estavam interessados no cálculo de funções de correlação em modelos mínimos unitários ($c_m = 1 - \frac{6}{q(q+1)}$) acoplados a gravitação e cujo trabalho será descrito abaixo.

Como vimos no capítulo II, ao calcularmos funções de correlação de operadores físicos, aqui denotados $\mathcal{O}_{r_i r_i'}$, no formalismo de DDK utilizado em [34], cada operador $\mathcal{O}_{r_i r_i'}$ da matéria deve ser integrado na superfície bidimensional em questão e vestido pelo campo de Liouville , ou seja, estaremos interessados nas seguintes funções de correlação :

$$\left\langle \prod_{i=1}^{N} \int d^2 z_i \sqrt{\hat{g}} \mathcal{O}_{r_i r_i'} e^{\beta_i \phi(z_i)} \right\rangle_{S_L + S_M} = \prod_{i=1}^{N} \int d^2 z_i \sqrt{\hat{g}} \langle \mathcal{O}_{r_i r_i'} \rangle_{S_M} \langle e^{\beta_i \phi(z_i)} \rangle_{S_L} \quad . \tag{3.2.1}$$

Onde as contribuições da matéria e da gravitação são calculadas separadamente. O vestimento β_i é determinado impondo-se que $\mathcal{O}_{r_i r_i'} e^{\beta_i \phi(z_i)}$ seja um operador de dimensão conforme $\Delta = 1$. Se $h_{ii'}$ é a dimensão de $\mathcal{O}_{r_i r_i'}$ temos:

$$\Delta(\mathcal{O}_{r_i r_i'} e^{\beta_i \phi(z_i)}) = h_{ii'} - \frac{\beta_i}{2}(\beta_i - Q) = 1 \quad . \tag{3.2.2}$$

A contribuição da gravitação na função de correlação (3.2.1) é a mais difícil de ser calculada:

$$\left\langle \prod_{i=1}^{N} e^{\beta_i \phi(z_i)} \right\rangle_{S_L} = \int [\mathcal{D}_{\hat{g}} \phi] e^{\frac{1}{2\pi} \int d^2 w \sqrt{\hat{g}} [\hat{g}^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \frac{Q}{4} \hat{R} \phi - 2\mu e^{\alpha + \phi}]} \prod_{i=1}^{N} e^{\beta_i \phi(z_i)} \tag{3.2.3}$$

Neste ponto Goulian e Li utilizam a técnica do modo zero. Note que não é nescessário introduzir a noção de função de partição para áreas fixas para efetuarmos a integração no modo zero, com a decomposição $\phi = \tilde{\phi} + \phi_0$ somos levados a integral abaixo :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi_0 e^{\phi_0\left(\sum_{i=1}^{N}\beta_i + Q(1-h)\right) - e^{\alpha_+\phi_0}\left(\frac{\mu}{\pi}\int d^2w\sqrt{\hat{g}}e^{\alpha_+\tilde{\phi}}\right)} = \frac{\Gamma(-s)}{\alpha_+}\left(\frac{\mu}{\pi}\int d^2w\sqrt{\hat{g}}e^{\alpha_+\tilde{\phi}}\right)^s \tag{3.2.4}$$

onde

$$s = -\frac{1}{\alpha_+}\left(\sum_{i=1}^{N}\beta_i + Q(1-h)\right) \tag{3.2.5a}$$

No caso da esfera ($h = 0$) estudado em [9] temos (chamando $\tilde{\phi}$ de ϕ por conveniência):

$$\left\langle \prod_{i=1}^{N} e^{\beta_i\phi(z_i)} \right\rangle_{S_L} = (\frac{\mu}{\pi})^s \frac{\Gamma(-s)}{\alpha_+}\int [\mathcal{D}\phi]_{\hat{g}} e^{-S_L(\mu=0)}[\int d^2w\sqrt{\hat{g}}e^{\alpha_+\phi}]^s \prod_{i=1}^{N} e^{\beta_i\phi(z_i)} \tag{3.2.6}$$

com

$$s = -\frac{1}{\alpha_+}\left(\sum_{i=1}^{N}\beta_i + Q\right) \quad . \tag{3.2.5b}$$

Note que com $N = 0$ obtemos o resultado (3.1.10) da seção anterior para a função de partição na esfera $\mathcal{Z}_L$ (a divisão por $V_{SL(2,\mathbb{C})}$ é assumida em (3.2.6) acima).

A atitude de Goulian e Li frente a expressão (3.2.6) acima foi de fundamental importância. Ao invés de lamentarem a singularidade representada por $\Gamma(-s)$ como em [32] e se restringirem a funções de correlação para áreas fixas eles decidiram, talvez inspirados pelo trabalho de Bershadsky e Klebanov[34] (citado em [9]), esquecer momentaneamente da existência da singularidade e levar o cálculo adiante. Assumindo que s seja um inteiro não negativo Goulian e Li usam o propagador livre (3.1.13) no cálculo do valor esperado acima e depois continuam o resultado final da função de correlação para um valor complexo arbitrário de s. Embora não haja razões para que essa continuação funcione à priori veremos à posteriori que os resultados concordam com aqueles obtidos via modelos de matrizes .

O primeiro passo no cálculo da função de correlação acima é fixarmos a simetria[5)] SL(2,$\mathbb{C}$) residual do gauge conforme através por exemplo da escolha de gauge $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$ que elimina três integrais em z_i. Para a função de 3-pontos após efetuarmos as contrações pertinentes temos:

[5)] No gauge conforme na esfera os fantasmas formam um sistema conforme por si só e desacoplam do resto. Por isso serão desprezados nesta tese.

$$\langle A_{r_1} A_{r_2} A_{r_3} \rangle = \left\langle \prod_{i=1}^{3} \mathcal{O}_{r_i r_i'} \right\rangle_{S_M} (\frac{\mu}{\pi})^s \frac{\Gamma(-s)}{\alpha_+} \prod_{i=1}^{s} \int d^2 w_i |w_i|^{2\alpha} |1 - w_i|^{2\beta} \prod_{i<j} |w_i - w_j|^{4\rho} \tag{3.2.7}$$

onde

$$A_{r_i} = \mathcal{O}_{r_i r_i'} e^{\beta_i \phi(z_i)} \quad , \quad \alpha = -\alpha_+ \beta_1 \, , \, \beta = -\alpha_+ \beta_2 \, , \, \rho = \alpha_+^2 / 2 \tag{3.2.8}$$

Felizmente as s integrais interrelacionadas acima foram calculadas por Dotesenko e Fatteev[35], de onde Goulian and Li obtiveram o resultado abaixo :

$$\begin{aligned} \langle A_{r_1} A_{r_2} A_{r_3} \rangle = & \left\langle \prod_{i=1}^{3} \mathcal{O}_{r_i r_i'} \right\rangle_{S_M} (\frac{\mu}{\pi})^s \frac{\Gamma(-s)}{\alpha_+} \Gamma(s+1) [\Delta(1-\rho)]^s \prod_{i=1}^{s} \Delta(i\rho) \\ & \times \prod_{i=0}^{s-1} \Delta(1+\alpha+i\rho) \Delta(1+\beta+i\rho) \Delta(-1-\alpha-\beta-(s-1+i)\rho) \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

onde $\Delta(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x)$.

Observe que no caso de funções de N-pontos com $N > 3$ ainda teríamos $N-3$ integrais sobre $d^2 z_i (i = 4, \cdots, N)$ e tais integrais juntamente com as s integrais em $d^2 w_i$ resultariam em $s + N - 3$ integrais acopladas que não saberíamos calcular diretamente, por esta razão Goulian e Li se restringem a $N = 3$.

A expressão (3.2.9) é totalmente geral e vale para quaisquer teorias com carga central $c_m \leq 1$ e quaisquer operadores primários $\mathcal{O}_{r_i r_i'}$ de peso conforme $h_{ii'}$ tal que os vestimentos β_i satisfaçam (3.2.2) entretanto para facilitar comparações com modelos de matrizes Goulian e Li se restringem a modelos mínimos unitários com $c_m < 1$:

$$c_m = 1 - \frac{6}{q(q-1)} \quad , \quad q = 1, 2, \cdots \tag{3.2.10}$$

e a operadores na diagonal da tabela de Kac ($r_i = r_i'$) com dimensão :

$$\Delta(\mathcal{O}_{r_i r_i'}) = h_{ii} - \frac{r_i^2 - 1}{4q(q+1)} \quad . \tag{3.2.11}$$

Com o valor de Q como função da carga central c_m dado por DDK

$$Q = \sqrt{\frac{25 - c_m}{3}} = \frac{2(2q+1)}{\sqrt{2q(q+1)}} \quad . \tag{3.2.12}$$

fixamos β_i

$$\beta_i = \frac{r_i - 2q - 1}{\sqrt{2q(q+1)}} \quad . \tag{3.2.13}$$

Consequentemente[6]:

$$\langle A_{r_1} A_{r_2} A_{r_3} \rangle = \left\langle \prod_{i=1}^{3} \mathcal{O}_{r_i r_i'} \right\rangle \frac{\mu^s \Gamma(-s)\Gamma(s+1)}{\alpha_+} [\Delta(1-\rho)]^s$$
$$\times \prod_{i=1}^{s} \Delta(i\rho) \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{3} \Delta(r_j + \rho(r_j + i)) \tag{3.2.14}$$

com (utilizando a definição de s (3.2.5-b)):

$$\rho = -\frac{\alpha_+^2}{2} = -\frac{q}{q+1} = -\frac{(r_1 + r_2 + r_3 - 1)}{2s + 1 + r_1 + r_2 + r_3} \quad . \tag{3.2.15}$$

A expressão (3.2.15) indica que s é um número racional qualquer não nescessáriamente inteiro e que portanto a função de 3-pontos como está não faz sentido devido às produtórias. Ou de outra maneira podemos dizer que q em (3.2.15) ainda não pode ser admitido com um inteiro o que só poderá ser feito após a continuação de (3.2.14) para valores arbitrários de s.

Em [9] a função de 3-pontos (3.2.14) foi continuada para valores não inteiros de s através de identidades envolvendo funções Γ , como:

$$\Gamma(nx) = (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} n^{nx-\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(x + \frac{k}{n}) \quad , \tag{3.2.16}$$

onde o lado direito vale somente para valores inteiros de n e o lado esquerdo para qualquer valor de n. Desta forma, Goulian and Li estenderam $\langle A_{r_1} A_{r_2} A_{r_3} \rangle$ para quaisquer valores de s. Para obter a contribuição da matéria $\langle \prod_{i=1}^{3} \mathcal{O}_{r_i r_i} \rangle$, de uma forma fácil, eles se restringiram a valores especiais de r_i que satisfazem:

$$r_1 + r_2 + r_3 = 2q - 1 \quad . \tag{3.2.17}$$

Além disto, para evitar diferenças na normalização dos operadores A_{r_i} e da medida na integral funcional com relação aos modelos de matrizes Goulian e Li calcularam razões de funções de correlação , obtendo:

$$\frac{\langle A_{r_1} A_{r_2} A_{r_3} \rangle^2 \mathcal{Z}}{\langle A_{r_1} A_{r_1} \rangle \langle A_{r_2} A_{r_2} \rangle \langle A_{r_3} A_{r_3} \rangle} = \frac{r_1 r_2 r_3}{(q+1)(2q+1)} \quad . \tag{3.2.18}$$

---

6) Perceba que nosso ρ corresponde a $-\rho'$ de [9].

Note que funções de zero, um e dois pontos podem ser calculadas partindo da função de 3-pontos integrando na constante cosmológica μ, uma vez que o operador A_{r_i} se reduz ao termo cosmológico $e^{\alpha+\phi}$, no limite $r_i \to 1$, pois $\beta_i(r_i \to 1) \to \alpha_+$. Desta forma temos por exemplo:

$$\langle A_{r_1} A_{r_2} A_1 \rangle = \frac{\partial}{\partial \mu} \langle A_{r_1} A_{r_2} \rangle \tag{3.2.19}$$

$$\langle A_1 A_1 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \mathcal{Z} \quad . \tag{3.2.20}$$

Para fazer a integral em μ assumimos que as funções de 2 e 3 pontos sejam funções de alguma potência de μ, isto é evidente uma vez que se use a técnica do modo zero. Desta forma, Goulian and Li obtiveram, por exemplo, para a função de partição [7] ($\rho' = 1/\rho$):

$$\mathcal{Z} = \frac{\rho^3 \Delta(\rho^{-1})\Delta(\rho)}{(\rho-1)(\rho+1)} \left[\mu \Delta(-\rho)\right]^{1-\rho^{-1}} \tag{3.2.21}$$

ou como função de q

$$\mathcal{Z} = \frac{q^2}{(q+1)(2q+1)} q \Delta\left(-\frac{q}{q+1}\right) \Delta\left(\frac{-(q+1)}{q}\right) \left[\mu \Delta\left(\frac{q}{q+1}\right)\right]^{2+\frac{1}{q}} \tag{3.2.22}$$

Agora comparamos estes resultados com os obtidos via modelos matriciais[29]

$$\begin{aligned} \langle A_{r_1} A_{r_2} A_{r_3} \rangle_{MM} &= \frac{2 r_1 r_2 r_3}{q} \left[\frac{\mu}{q+1}\right]^{\frac{(r_1+r_2+r_3-1)}{2q}-1} \\ \langle A_r A_r \rangle_{MM} &= 2r \left[\frac{\mu}{q+1}\right]^{r/q} \\ \mathcal{Z}_{MM} &= \frac{2q^2}{(q+1)(2q+1)} \left[\frac{\mu}{q+1}\right]^{2+\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Se consideramos as razões (3.2.18), o acordo entre os resultados no discreto e no contínuo é completo. Já numa comparação direta entre as amplitudes somente a dependência na constante cosmológica é a mesma, como podemos ver comparando, p.ex., as funções (3.2.22) e (3.2.23). Portanto podemos atribuir as diferenças encontradas entre o discreto e o contínuo às normalizações do operador A_k e da medida na integral de caminho. Veremos mais sobre isto na próxima seção .

---

[7] Note que o cálculo de $\mathcal{Z}$ não depende do vínculo (3.2.17)

Seguindo o método bem sucedido de Goulian e Li, outros trabalhos apareceram[10,11] e continuam aparecendo[13,14,36,37]. Em [11] Dotsenko generalizou os resultados de [9] para modelos não mínimos com carga central $c_m = 1 - 12\alpha_0^2$ e operadores $(r_i \neq r'_i)$ fora da diagonal da tabela de Kac

$$\mathcal{O}_{rr'} = e^{i\alpha_{rr'}X} \quad , \tag{3.2.24}$$

onde X é um campo escalar livre representando a matéria na representação de gás de Coulomb e

$$\alpha_{rr'} = \frac{(1-r)}{2}d_- + \frac{(1-r')}{2}d_+ \quad , \tag{3.2.25}$$

com $d_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{2+\alpha_0^2}$ $, \alpha_0 > 0$, e

$$\Delta(\mathcal{O}_{rr'}) = \frac{1}{2}(\alpha_{rr'}^2 - 2\alpha_0\alpha_{rr'}) \quad . \tag{3.2.26}$$

É fácil de verificar que o caso analisado por Goulian and Li é recuperado por $\alpha_0 = [2q(q+1)]^{-1/2}$ e $r = r'$. Dotsenko evitou o vínculo (3.2.17), introduzindo cargas de blindagem no setor de matéria, obtendo[11]:

$$\frac{\langle A_{r_1r'_1}A_{r_2r'_2}A_{r_3r'_3}\rangle^2\mathcal{Z}}{\langle A_{r_1r'_1}\rangle\langle A_{r_2r'_2}\rangle\langle A_{r_3r'_3}\rangle} = \frac{(r'_1+r_1\rho')(r'_2+r_2\rho')(r'_3+r_3\rho')}{(1+\rho')(1-\rho')(-\rho')} \quad . \tag{3.2.27}$$

O resultado acima não foi obtido ainda via modelos de matrizes quando $r_i \neq r'_i$ portanto não podemos compará-los, mas de qualquer maneira recuperamos o resultado de Goulian and Li para $r_i = r'_i$ e $\rho' = (q+1)/q$. Um outro aspecto importante da ref. [11] é que Dotsenko incluiu na ação de Liouville um termo cosmológico com α_- em vez de α_+, além do termo cosmológico usual, ou seja,

$$S_L^{int} = \int d^2w\sqrt{\hat{g}}[\mu e^{\alpha_+\phi} + (a(\mu))^\rho e^{\alpha_-\phi}] \quad , \tag{3.2.28}$$

onde a forma funcional de $a(\mu)$ não é importante . Tratando os dois termos cosmológicos acima de forma análoga à cargas de blindagem em modelos mínimos numa representação de Feigin-Fuchs[42] Dotsenko obteve além do primeiro termo cosmológico usual elevado a potência s, o segundo termo elevado a potência $\bar{s}$. Com este artefato e a inclusão de cargas de blindagem no setor da matéria, s e $\bar{s}$ tornam-se de fato inteiros entretanto $\bar{s}$ resulta

num inteiro negativo e produtórias como por exemplo $P(\bar{s}) = \prod_{i=1}^{\bar{s}} f(i)$ são formalmente continuadas para valores negativos de $\bar{s}$ como segue:

$$P(\bar{s}) = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} f(i)}{\prod_{i=\bar{s}+1}^{\infty} f(i)} \tag{3.2.29}$$

$$\text{Para} \quad \bar{s} = -n \quad , \quad P(-n) = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} f(i)}{\prod_{i=1-n}^{\infty} f(i)} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{1}{f(-i)} \quad . \tag{3.2.30}$$

Embora tal truque esteja longe de ser justificado a partir de primeiros princípios (como o truque usado em [9]) o resultado final para razões de funções de correlação parece não depender dos detalhes da continuação em s ou $\bar{s}$, voltaremos a comentar esse problema mais adiante.

Dos trabalhos já citados sobre a aplicação da técnica do modo zero provavelmente o mais completo e claro é o de Di Francesco e Kutasov[12] que calcularam funções de N-pontos (N arbitrário) de operadores taquiônicos (T_{k_i}) para matéria bosônica na formulação de gás de Coulomb com carga central $c_m = 1 - 12\alpha_0^2$ em interação com a gravitação em superfícies esféricas, ou seja:

$$\langle T_{k_1} \cdots T_{k_N} \rangle = \left\langle \prod_{j=1}^{N} \int d^2 z_j \sqrt{\hat{g}} e^{ik_j X(z_j) + \beta(k_j)\phi(z_j)} \right\rangle_S \tag{3.2.31}$$

com o operador taquiônico

$$T_k = \int d^2 z \sqrt{\hat{g}} e^{ikX + \beta\phi} \tag{3.2.32}$$

e

$$\begin{aligned} S &= S_L + S_M \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2 w \sqrt{\hat{g}} [\hat{g}^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{Q}{4} \hat{R} \phi + 2\mu e^{\alpha + \phi} + \hat{g}^{ab} \partial_a X \partial_b X + \frac{i\alpha_0}{2} \hat{R} X] \end{aligned} \tag{3.2.33}$$

Na formulação de DDK temos

$$Q = \sqrt{\frac{25 - c}{3}} = 2\sqrt{2 + \alpha_0^2} \tag{3.2.34}$$

$$\alpha_\pm = -\frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{25 - c_m} \mp \sqrt{1 - c_m}) = -\frac{Q}{2} \pm |\alpha_0| \quad , \tag{3.2.35}$$

$$\alpha_+ \alpha_- = 2 \quad . \tag{3.2.36}$$

O vestimento $\beta(k)$ é fixado como antes:

$$\Delta(e^{ik_j X + \beta_j \phi}) = \frac{k_j(k_j - 2\alpha_0)}{2} - \frac{\beta_j(\beta_j - Q)}{2} = 1 \quad , \tag{3.2.37}$$

e consequentemente[8]:

$$\beta_j = \beta(k_j) = -\frac{Q}{2} + |k_j - \alpha_0| \quad . \tag{3.2.38}$$

Antes de proseguir no cálculo propriamente dito, nós observamos que existem no mínimo três razões para utilizarmos os operadores taquiônicos (3.2.32). A primeira é que a interpretação de tais operadores do ponto de vista do espaço-tempo bidimensional (ϕ, X) é sugestiva , como vimos no capítulo anterior, e esperamos que as amplitudes resultantes também possam ser interpretadas desse ponto de vista, como de fato ocorrerá. A segunda razão para o uso de operadores taquiônicos é que esperamos que nossos resultados sejam válidos para o caso $c_m = 1$ onde não há restrições sobre os valores dos momentos k_j.

A última razão para calcularmos funções de correlação de operadores taquiônicos é que a qualquer momento podemos reobter os resultados de Dotsenko (e consequentemente de [9]) fixando $k_i = \alpha_{r_i r_i'}$ (vide (3.2.24)), e incluindo cargas de blindagem no setor de matéria como faremos na próxima seção . Definida a motivação podemos passar para o cálculo propriamente dito.

Primeiramente note que a parte garavitacional $(e^{\beta_j \phi})$ do operador taquiônico é a mesma (como função de ϕ) do operador A_r usado em [9], após a integração sobre o modo zero e fixação de gauge $(z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty)$ temos para a função de 3-pontos taquiônica:

$$\langle T_{k_1} T_{k_2} T_{k_3} \rangle = 2\pi\delta(\sum_{i=1}^{3} k_i - 2\alpha_0)\mathcal{A}_3(k_1, k_2, k_3) \tag{3.2.39}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 = & \left\langle e^{ik_1 X(0)} e^{ik_2 X(1)} e^{ik_3 X(\infty)} \right\rangle_{S_M} \frac{(\mu)^s}{\alpha_+} \Gamma(-s)\Gamma(s+1)[\Delta(1-\rho)]^s \\ & \times \prod_{i=1}^{s} \Delta(i\rho) \prod_{i=0}^{s-1} \Delta(1+\alpha+i\rho)\Delta(1+\beta+i\rho)\Delta(-1-\alpha-\beta-(s-1+i)\rho) \end{aligned} \tag{3.2.40}$$

Compare com (3.2.9).

A lei de conservação dos momentos k_i :

$$\sum_{i=1}^{3} k_i = 2\alpha_0 \tag{3.2.41}$$

---

[8] A solução de (3.2.37) foi escolhida tal que $E = \beta + \frac{}{2} > 0$, pois operadores com $E \leq 0$ não correspondem a perturbações locais[3338] da superfície bidimensional da corda e provavelmente não existem.

é obtida através da integração sobre o modo zero X_0 da matéria. As quantidades α, β, ρ e s estão definidas em (3.2.8) e (3.2.5-b). Observe que na formulação de gás de Coulomb empregada aqui a contribuição da matéria $\langle \quad \rangle_{S_M}$ acima é trivial (uma constante), pois $X(z)$ é um campo livre:

$$\langle X(z)X(w)\rangle_0 = \ln|z-w|^{-2} \tag{3.2.42}$$

e $X(\infty) = 0$. Dessa forma assumindo que essa constante seja 1 temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 = & \frac{(\mu)^s}{\alpha_+}\Gamma(-s)\Gamma(s+1)[\Delta(1-\rho)]^s \prod_{i=1}^{s} \Delta(i\rho) \\ & \times \prod_{i=0}^{s-1} \Delta(1+\alpha+i\rho)\Delta(1+\beta+i\rho)\Delta(-1-\alpha-\beta-(s-1+i)\rho) \end{aligned} \tag{3.2.43}$$

Evidentemente a expressão (3.2.40) só faz sentido para valores inteiros de s. Em [12] Di Francesco e Kutasov continuam $\mathcal{A}_3$ para valores não inteiros de s de forma diferente de [11] e [9] como mostraremos a seguir. Observemos que o vestimento $\beta(k)$ (vide (3.2.38)) nos sugere a escolha de uma cinemática que deve ser consistente com a conservação dos momentos (3.2.41), por exemplo:

$$k_1\,,\, k_3 \geq \alpha_0 \quad , \quad k_2 < \alpha_0 \quad . \tag{3.2.44}$$

Com essa cinemática, usando a definição de s e a lei de conservação dos momentos eliminamos β:

$$\beta = \begin{cases} \rho(1-s) & , \quad \alpha_0 > 0 \\ -1-\rho & , \quad \alpha_0 < 0 \end{cases} \tag{3.2.45}$$

De volta em (3.2.43) vemos que $\Delta(1+\beta+i\rho)$ para $i = s-1$ se torna $\Delta(1) = \frac{1}{\Gamma(0)} \sim 0$. Portanto no caso $\alpha_0 \geq 0$ a amplitude é nula.

Para $\alpha_0 \leq 0$ temos (absorvendo um fator $\frac{1}{\alpha_+}$ na definição da medida da integral de trajetória)após a eliminação de β:

$$\mathcal{A}_3 = [\mu\Delta(-\rho)]^s\Delta(-s)\Delta(\rho-\alpha)\Delta(1+\alpha+(s-1)\rho) \quad . \tag{3.2.46}$$

Note agora que a expressão acima pode ser definida para valores não inteiros de s. Entretanto uma das características mais importantes do resultado acima é que ele revela que a amplitude está fatorizada, para notarmos a fatorização da amplitude é nescessário reescreve-la usando as fórmulas cinemáticas abaixo:

$$\frac{1}{2}(\beta_1^2 - k_1^2) = \rho - \alpha$$
$$\frac{1}{2}(\beta_2^2 - k_2^2) = 1 + \alpha(s-1)\rho \tag{3.2.47}$$
$$\frac{1}{2}(\beta_3^2 - k_3^2) = -s$$

Assim:

$$\mathcal{A}_3 = [\mu\Delta(-\rho)]^s \prod_{j=1}^{3} \Delta\left(\frac{1}{2}(\beta_j^2 - k_j^2)\right) \quad . \tag{3.2.48}$$

Agora comentaremos algumas características qualitativas do resultado acima: Observe primeiramente que no limite de momento nulo ($k_j \to 0$) temos $\beta_j \to \alpha_+$ (e $\frac{1}{2}\beta_j^2 = -\rho$) o que significa que o operador taquiônico se reduz ao termo cosmológico , vide (3.2.32). Portanto para s inteiro positivo podemos interpretar a amplitude obtida como uma função de correlação de $3+s$ táquions onde s táquions possuem momento k_j nulo ,i.e.:

$$\mathcal{A}_3 = \mu^s \langle (T_0)^s T_{k_1} T_{k_2} T_{k_3} \rangle_{\mu=0} = \mu^s \prod_{j=1}^{s+3} \Delta(\frac{1}{2}(\beta_j^2 - k_j^2)) \quad . \tag{3.2.49}$$

Dessa forma podemos entender o aparecimento do fator $[\Delta(-\rho)]^s$ em $\mathcal{A}_3$.

A expressão (3.2.49) sugere a seguinte renormalização [12]:

$$T_k \to \frac{\tilde{T}_k}{\Delta(\frac{1}{2}(\beta_k^2 - k^2))} \quad . \tag{3.2.50}$$

Para os s termos cosmológicos a renormalização acima pode ser absorvida pela constante cosmológica :

$$\mu \to \frac{\tilde{\mu}}{\Delta(-\rho)} \tag{3.2.51}$$

assim teríamos o resultado renormalizado extremamente simples abaixo:

$$\tilde{\mathcal{A}}_3 = \langle \tilde{T}_{k_1} \tilde{T}_{k_2} \tilde{T}_{k_3} \rangle_{\tilde{\mu}} = (\tilde{\mu})^s \quad . \tag{3.2.52}$$

Conjectura-se[15,38] que o resultado acima é fruto das simetrias da corda bidimensional (interpretando ϕ como uma coordenada do espaço-tempo onde a corda está imersa).

Antes de compararmos o resultado obtido com modelos de matrizes é importante comentar os diferentes resultados que obtivemos para diferentes sinais de α_0 . Do ponto de vista físico esperaríamos uma amplitude função da carga central da matéria ($c_m =$

$1-12{\alpha_0}^2$) portanto seria natural obtermos um resultado independente do sinal de α_0 . De fato, embora tenhamos obtido (3.2.48) apenas para $\alpha_0 < 0$ (e na região cineática (3.2.44)) e para $\alpha_0 > 0$ uma amplitude nula, o resultado fisicamente correto , independente do sinal de α_0, para valores quaisquer de k_i é de fato (3.2.48) com β_j dado em (3.2.38). O fato de termos obtido uma amplitude nula para $\alpha_0 > 0$ é simples decorrência da não convergência[38] da representação integral nesse caso. Note que o integrando de (3.2.7) é definido positivo e a integral estende-se sobre todo o plano complexo (que é a projeção estereográfica da esfera) dessa forma a única maneira de entendermos um resultado nulo é atribui-lo a não convergência da integral, isso está embutido nos fatores $\Delta(x)$ que aparecem no resultado. Para $\alpha_0 < 0$ verificamos que existe uma região de convergência não nula, por esta razão obtivemos um resultado não trivial.

Agora podemos comparar (3.2.48) com resultados já conhecidos. Para $c_m < 1$, os modelos mínimos requerem em geral a introdução de cargas de blindagem no setor de matéria, como o fez Dotsenko em [11], por esta razão esse caso será analisado na próxima seção . No caso $c_m = 1(\alpha_0 = 0)$, em função da constante cosmológica renormalizada $\tilde{\mu}$, usando a definição de β_j e s temos de (3.2.48):

$$\mathcal{A}_3 = (\tilde{\mu})^{\sum_{i=1}^{3} \frac{|k_i|}{\sqrt{2}} - 1} \prod_{j=1}^{3} \Delta(1-\sqrt{2}|k_j|) \quad . \tag{3.2.53}$$

O resultado acima concorda plenamente com o obtido via modelos de matrizes [15,30,31] transcrito abaixo :

$$\mathcal{A}_3^{MM} = \left\langle \prod_{i=1}^{3} T_{k_i}^{MM} \right\rangle = (\mu_{MM})^{\sum_{i=1}^{3} \frac{|k_i|}{\sqrt{2}} - 1} \prod_{j=1}^{3} \Gamma(1-\sqrt{2}|k_j|) \quad , \tag{3.2.54}$$

se fizermos a identificação

$$\begin{aligned} \mu_{MM} &= \tilde{\mu} \\ \frac{T_k^{MM}}{\Gamma(\sqrt{2}|k|)} &= T_k \end{aligned} \tag{3.2.55}$$

Observe que $\rho(c_m = 1) = -1$ assim $\Delta(-\rho) = \frac{1}{\Gamma(0)} \sim 0$ consequentemente a amplitude dada em (3.2.48) como função de μ seria nula (para s inteiro positivo) por isso identifica-se μ_{MM} com $\tilde{\mu}$ e não com μ. Como explicado em [33] a amplitude é nula para $c_m = 1$, pois nesse caso o termo cosmológico usual $\mu e^{-\sqrt{2}\phi}$ não existe, tendo portanto funções de correlação nulas isso significa que funções de correlação de $\frac{\tilde{\mu}}{\Delta(-\rho)} e^{\alpha+\phi}$ são equivalentes

(para $\alpha_0 \to 0$) a funções de correlação de $\tilde{\mu}\phi e^{-\sqrt{2}\phi}$ que é supostamente o termo cosmológico correto no caso $c_m = 1, (\alpha_0 = 0)$. A identificação entre T_k e T_k^{MM} acima para $k = 0$ é análoga a identificação entre μ_{MM} e $\tilde{\mu}$, e para $k \neq 0$ não requer maiores cuidados podendo ser entendida pelo fato de termos integrais como (3.2.7) que possuem uma região de convergência finita o que torna natural os fatores $\Delta(x)$ no lugar de $\Gamma(x)$ que aparecem nos resultados via modelos de matrizes . Esse problema de convergência não tem, aparentemente análogo nos modelos de matrizes.

Para concluir esta seção podemos dizer que o trabalho de Di Francesco e Kutasov[12] reproduz no contínuo, pelo menos para $c_m = 1$, resultados obtidos via modelos de matrizes. A característica mais importante de $\mathcal{A}_3$ é a sua fatorização e o aparecimento dos estados com momento $\sqrt{2}k$ tomando valores inteiros , representados por pólos em (3.2.53). Tais estados foram descobertos através de modelos de matrizes[30] (vide pólos em $\mathcal{A}_3^{MM}$) e já haviam sido observados também no contínuo em [39] para $s = 0$ e em [40] via BRST. O cálculo em [12] é entretanto mais direto que [40] e mais geral que o da referência [39] sendo válido para qualquer s.

O papel dos infinitos estados discretos acima ainda è objeto de intensa pesquisa na literatura[38,39,40,41].

III-3- A função de 3-pontos com (n,m) cargas de blindagem

Na última seção calculamos a função de correlação na esféra de três táquions na gravitação acoplada a matéria conforme com carga central $c_m = 1 - 12{\alpha_0}^2$ para valores arbitrários de α_0 e dos momentos k_j sujeitos à lei de conservação $\sum k_i = 2\alpha_0$. Relaxando essa lei de conservação poderíamos calcular funções de correlação mais gerais. Isso seria especialmente útil no nosso caso devido às relações obtidas entre funções de correlação através de derivações (ou integrações) na constante cosmológica μ . Por exemplo, com a lei de consevação acima seria impossível para valores de $\alpha_0 \neq 0 (c_m \neq 1)$ tomar $k_i \to 0 (i = 1,2,3)$ para calcularmos a função de partição $\mathcal{Z}$ a partir da função de 3-pontos, usando a fórmula abaixo:

$$\frac{\partial^3 \mathcal{Z}}{\partial \mu} = \mathcal{A}_3(0,0,0) \tag{3.3.1}$$

A modificação na lei de conservação dos momentos é feita introduzindo-se as chamadas cargas de blindagem $V_\pm$ no setor de matéria

$$V_\pm = e^{id_\pm X} \tag{3.3.2}$$

com $d_\pm$ tais que $V_\pm$ correspondam a operadores conformes $(1,1)$, ou seja, no nosso caso:

$$\frac{1}{2} d(d - 2\alpha_0) = 1 \quad , \quad d_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2 + 2} \quad . \tag{3.3.3}$$

Os operadores $V_\pm$ podem ser introduzidos diretamente[35] na ação da matéria que passa a ser:

$$S_M^\lambda = \frac{1}{2\pi} \int d^2w \sqrt{\hat{g}} [\hat{g}^{ab} \partial_a X \partial_b X + i \frac{\alpha_0 \hat{R}}{2} X + \lambda_+ e^{id_+ X} + \lambda_- e^{id_- X}] \quad . \tag{3.3.4}$$

Ao calcularmos a função de 3-pontos com a ação acima expandiremos $e^{-S_M^\lambda}$ em λ_+ e λ_- e a integração sobre o modo zero da matéria leva a uma nova lei de conservação que é satisfeita apenas pelo termo com n cargas V_+ e m cargas V_- da expansão em λ_+ e λ_- :

$$\begin{aligned} \langle T_{k_1} T_{k_2} T_{k_3} \rangle_{S_L + S_M^\lambda} &= \lambda_+^n \lambda_-^m \left\langle T_{k_1} T_{k_2} T_{k_3} \left(\frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} \int d^2 t_i \sqrt{\hat{g}} e^{id_+ X(t_i)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{m} \int d^2 r_i \sqrt{\hat{g}} e^{id_- X(r_i)} \right) \right\rangle_{S_L + S_M} \\ &= 2\pi \delta(\sum_{i=1}^{3} k_i + n d_+ + m d_- - 2\alpha_0) \mathcal{A}_3^{nm}(k_1, k_2, k_3) \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

com a nova lei de conservação abaixo determinando[9] n e m :

$$\sum_{i=1}^{3} k_i + nd_+ + md_- - 2\alpha_0 = 0 \tag{3.3.6}$$

Como a parte gravitacional não foi alterada em relação ao caso $n = m = 0$ obtemos $\mathcal{A}_3^{nm}$ novamente através da integração sobre o modo zero ϕ_0 assumindo inicialmente que s seja um inteiro positivo e fixando o gauge $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$. A única diferença é que as contrações envolvendo a matéria $X(z)$ agora sobrevivem devido a presença das n, m integrais sobre as cargas de blindagem . Utilizando ainda $d_+d_- = -\alpha_+\alpha_- = -2$ temos :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3^{nm}(k_1,k_2,k_3) = \frac{\lambda_+^n\lambda_-^m}{n!m!}\left(\frac{\Gamma(-s)}{-\alpha_+}\right)\left(\frac{\mu}{\pi}\right)^s \prod_{i=1}^{n}\int d^2t_i|t_i|^{2\tilde{\alpha}}|1-t_i|^{2\tilde{\beta}}\prod_{i<j=1}^{n}|t_i-t_j|^{4\tilde{\rho}} \\ \times\prod_{i=1}^{m}\int d^2r_i|r_i|^{2\tilde{\alpha}'}|1-r_i|^{2\tilde{\beta}'}\prod_{i<j}^{m}|r_i-r_j|^{4\tilde{\rho}'} \\ \times\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}|t_i-r_j|^{-4}\prod_{i=1}^{s}\int d^2z_i|z_i|^{2\alpha}|1-z_i|^{2\beta}\prod_{i<j}^{s}|z_i-z_j|^{4\rho}\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

onde

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} = d_+k_1 \quad , \quad \tilde{\beta} = d_+k_2 \quad , \quad \tilde{\rho} = \frac{1}{2}d_+^2 \\ \tilde{\alpha}' = d_-k_1 \quad , \quad \tilde{\beta}' = d_-k_2 \quad , \quad \tilde{\rho}' = \frac{1}{2}d_-^2\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

A definição de s e demais fórmulas cinemática da seção anterior continuam válidas.

As s integrais sobre w_i correspondem a fórmula (B-9) de [35] como já vimos anteriormente. As $n+m$ integrais da matéria correspondem a fórmula (B-10) também de [35]. Dessa forma, da referência [35] temos (absorvendo um fator $\frac{\pi^{n+m}}{\alpha_+}$ na definição da medida):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3^{nm} = \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^s\Gamma(-s)\Gamma(s+1)\lambda_+^n\lambda_-^m\pi^s\tilde{\rho}^{-4nm}[\Delta(1-\tilde{\rho})]^n[\Delta(1-\tilde{\rho}')]^m\prod_{i=1}^{m}\Delta(i\tilde{\rho}'-n)\prod_{i=1}^{n}\Delta(i\tilde{\rho}) \\ \times\prod_{i=0}^{m-1}\Delta(1-n+\tilde{\alpha}'+i\tilde{\rho}')\Delta(1-n+\tilde{\beta}'+i\tilde{\rho}')\Delta(-1+n-\tilde{\alpha}'-\tilde{\beta}'-(n-1+i)\tilde{\rho}') \\ \times\prod_{i=0}^{n-1}\Delta(1+\tilde{\alpha}+i\tilde{\rho})\Delta(1+\tilde{\beta}+i\tilde{\rho})\Delta(-1+2m-\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}-(n-1+i)\tilde{\rho}) \\ \times[\Delta(1-\rho)]^s\prod_{i=1}^{s}\Delta(i\rho)\prod_{i=0}^{s-1}\Delta(1+\alpha+i\rho)\Delta(1+\beta+i\rho)\Delta(-1-\alpha-\beta-(s-1+i)\rho)\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

---

[9] Admite-se que d_+ e d_- sejam incomensuráveis[35] para que nd_+ não seja cancelado por md_-.

Usando a mesma cinemática da última seção ($k_1, k_3 \geq \alpha_0, k_2 \leq \alpha_0$) e a nova lei de conservação (3.3.6) eliminamos $\beta, \tilde{\beta}$, e $\tilde{\beta}'$:

$$\beta, \tilde{\beta}, \tilde{\beta}' = \begin{cases} \rho(m+1-s)+n \quad , \quad n\rho^{-1}+m-s-1 \quad , \quad n+\rho(m-s-1) \quad , \quad \alpha_0 > 0 \\ -1-m-(s+n)\rho \quad , \quad m-1+(s+n)\rho \quad , \quad s+n+\rho^{-1}(m-1), \quad \alpha_0 < 0 \end{cases} \tag{3.3.10}$$

com $(\tilde{\rho}, \tilde{\rho}') = (-\rho, -\rho^{-1})$ para $\alpha_0 \leq 0$, e $(-\rho^{-1}, -\rho)$ para $\alpha_0 \geq 0$, não é difícil ver que as amplitudes acima são não triviais (como na seção anterior) para $\alpha_0 < 0$. Nesse caso temos ainda:

$$\tilde{\alpha} = \alpha - 2\rho \quad , \quad \tilde{\alpha}' = -2 - \rho\alpha \quad . \tag{3.3.11}$$

Com a eliminação das variáveis acima e alguma álgebra (alguns detalhes aparecem em [14]) envolvendo propriedades de funções Γ para combinar a contribuição da matéria e da gravitação em (3.3.9) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3^{nm} &= [\mu\Delta(-\rho)]^s \left[\lambda_-\Delta(\rho^{-1})\right]^m [\lambda_+\Delta(\rho)]^n \\ &\times \Delta(\rho-\alpha)\Delta(\rho(s-n+1)+\alpha-m+1)\Delta(-m\rho^{-1}-(s+n)) \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

ou na forma fatorizada

$$\mathcal{A}_3^{nm} = [\mu\Delta(-\rho)]^s \left[\lambda_-\Delta(\rho^{-1})\right]^m [\lambda_+\Delta(\rho)]^n \prod_{i=1}^{3} \Delta\left(\frac{1}{2}(\beta_i^2 - k_i^2)\right) \quad . \tag{3.3.13}$$

Compare com (3.2.48).

Os fatores $\left[\Delta(\rho^{-1})\right]^m [\Delta(\rho)]^n$ que aparecem acima podem se interpretados de forma análoga ao fator $[\Delta(-\rho)]^s$ que já havia aparecido em $\mathcal{A}_3$ da seção anterior. Ou seja, como cada carga de blindagem $V_+(V_-)$ tem o papel de um operador taquiônico $T_{k=-\alpha_+}(T_{k=\alpha_-})$, o resultado acima nos sugere uma função de $(s+n+m)$-táquions:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3^{nm} &= \mu^s \frac{\lambda_+^n \lambda_-^m}{n!m!} \left\langle (T_0)^s (T_{d_+})^n (T_{d_-})^m T_{k_1} T_{k_2} T_{k_3} \right\rangle \\ &= \mu^s \left(\frac{\lambda_+^n \lambda_-^m}{n!m!}\right) \prod_{j=1}^{s+n+m+3} \Delta\left(\frac{1}{2}(\beta_j^2 - k_j^2)\right) \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

ou em função de quantidades renormalizadas

$$\tilde{\mathcal{A}}_3^{nm} = \left\langle \tilde{T}_{k_1} \tilde{T}_{k_2} \tilde{T}_{k_3} (\tilde{V}_+)^n (\tilde{V}_-)^m \right\rangle_{\tilde{\mu}} = (\tilde{\mu})^s \quad , \tag{3.3.15}$$

onde $\tilde{\mu}$ e $\tilde{T}_{k_j}$ são definidos como na seção anterior e a renormalização das cargas de blindagem é absorvida em $\lambda_\pm$ com a identificação :

$$\lambda_\pm = \frac{1}{\Delta\left(-\frac{1}{2}d_\pm^2\right)} \quad . \tag{3.3.16}$$

Como no caso anterior, embora (3.3.13) tenha sido obtida para $\alpha_0 < 0$ e na região cinemática (3.2.44), admitiremos que o resultado possa ser continuado naturalmente para todo o espaço dos momentos e seja válido para qualquer sinal de α_0, assumindo portanto a forma final abaixo:

$$\mathcal{A}_3^{nm} = [\mu\Delta(-\rho)]^s\,[\lambda_-\Delta(-\tilde{\rho}')]^m\,[\lambda_+\Delta(-\tilde{\rho})]^n \prod_{i=1}^{3}\Delta\left(\frac{1}{2}(\beta_i^2 - k_i^2)\right) \quad , \tag{3.3.17}$$

onde $\tilde{\rho} = 1/2(d_+)^2 \quad , \tilde{\rho}' = \tilde{\rho}^{-1}$ e β_i são dados em (3.2.38).

A nova lei de conservação dos momentos que pode ser reescrita ($2\alpha_0 = d_+ + d_-$):

$$\sum_{i=1}^{3} k_i = (1-n)d_+ + (1-m)d_- \tag{3.3.18}$$

nos permite calcular a função de partição :

$$\frac{\partial^3 \mathcal{Z}}{\partial\mu} = \mathcal{A}_3^{11}(k_i \to 0) \tag{3.3.19}$$

de onde temos

$$\mathcal{Z} = \lambda_+\Delta(-\tilde{\rho})\lambda_-\Delta(-\tilde{\rho}')\frac{\rho^3[\mu\Delta(-\rho)]^{1-\rho^{-1}}}{(\rho-1)(\rho+1)} \tag{3.3.20}$$

Compare com (3.2.21).

Para calcularmos razões de amplitudes e compararmos com os resultados obtidos por Dotsenko (3.2.27), nescessitamos da função de dois pontos

$$\mathcal{A}_3^{\tilde{n}\tilde{m}}(k_1, k_2, k_3 \to 0) = \frac{\partial}{\partial\mu}\mathcal{A}_2^{\tilde{n}\tilde{m}}(k_1, k_2) \quad . \tag{3.3.21}$$

Observe que estamos analisando o caso de modelos mínimos, onde os momentos assumem valores discretos

$$k_i = \frac{(1-r_i)}{2}d_+ + \frac{(1-r_i')}{2}d_- \tag{3.3.22}$$

usando (3.3.18) temos :

$$n = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} r_i - 1\right)$$
$$m = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} r'_i - 1\right) \tag{3.3.23}$$

e $\tilde{n}$ e $\tilde{m}$ são obtidos das fórmulas acima para n e m quando $r'_3 = r_3 = 1$. Assim obtemos de $\mathcal{A}_3^{\tilde{n}\tilde{m}}$:

$$\mathcal{A}_2^{\tilde{n}\tilde{m}}(k_1,k_2) = \frac{[\mu\Delta(-\rho)]^{\rho^{-1}\left(\frac{\alpha_+}{2}\sum_{i=1}^{2}\beta_i+\rho-1\right)}}{\rho^{-1}\left(\frac{\alpha_+}{2}\sum_{i=1}^{2}\beta_i+\rho-1\right)}[\lambda_-\Delta(-\tilde{\rho}')]^{\tilde{m}}[\lambda_+\Delta(-\tilde{\rho})]^{\tilde{n}}\prod_{i=1}^{2}\Delta\left(\frac{1}{2}(\beta_i^2-k_i^2)\right) \tag{3.3.24}$$

e calculando a razão R temos:

$$R = \frac{(\mathcal{A}_3^{nm}(k_1,k_2,k_3))^2\mathcal{Z}}{\mathcal{A}_2^{\tilde{n}_1\tilde{m}_1}(k_1,k_1)\mathcal{A}_2^{\tilde{n}_2\tilde{m}_2}(k_2,k_2)\mathcal{A}_2^{\tilde{n}_3\tilde{m}_3}(k_3,k_3)} = \frac{\prod_{i=1}^{3}(\alpha_+\beta_i+\rho-1)}{(\rho-1)(1+\rho)} \quad . \tag{3.3.25}$$

Usando a fórmula para os vestimentos β_i dada em (3.2.38) teremos exatamente o resultado de Dotsenko (3.2.27), que concorda com resultados de modelos de matrizes e de Goulian e Li nos casos em que a comparação é possível, isto é, $r_i = r'_i$, e generaliza estes para $r_i \neq r'_i$. A concordância entre todos esses resultados indica que de fato, embora a continuação para valores não inteiros de s não tenha qualquer justificativa rigorosa em nenhum destes trabalhos, os resultados parecem não depender dos detalhes de tal procedimento que é diferente em cada um dos trabalhos já citados. É importante salientar (vide [43]) que os resultados desta seção (obtidos originalmente em [12,14,43]) concordam com os de Goulian e Li[9] e com os obtidos via modelos de matrizes[44]. A concordância se dá a menos das conhecidas regras de fusão para modelos mínimos ($c_m < 1$). Espera-se, como no caso sem gravitação [35,42], que esse problema possa ser resolvido a partir do estudo de fatorização da função de 4-pontos (com cargas de blindagem).

Na próxima seção serão revisados os resultados que obtivemos em [14], onde os cálculos desta seção foram generalizados para a função de N-pontos ($N \geq 4$) com n, m cargas de blindagem.

III-4- A função de N-pontos com (n,m) cargas de blindagem

Nesta seção apresentaremos os cálculos de [14] para a função de N-pontos ($N \geq 4$) com um número arbitrário de cargas de blindagem que, generalizam os resultados obtidos em [12] para o caso que inclui cargas de blilndagem no setor de matéria.

A ação total é a mesma da seção anterior ($S_L + S_M^\lambda$). Usando a técnica do modo zero obtemos:

$$\langle T_{k_1} \cdots T_{k_N} \rangle_{S_L + S_M^\lambda} = 2\pi\delta\left(\sum_{i=1}^{N} k_i + nd_+ + md_- - 2\alpha_0\right) \mathcal{A}_N^{nm}(k_1 \cdots k_N) \tag{3.4.1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N^{nm} = \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^s \frac{\lambda_+^n}{n!}\frac{\lambda_-^m}{m!}\Gamma(-s) \prod_{i=1}^{N}\int d^2\tilde{z}_i \prod_{j=1}^{n}\int d^2 t_j \prod_{k=1}^{m}\int d^2 r_k \prod_{l=1}^{s}\int d^2 z_l \\ \times \prod_{l=1}^{s}\left\langle e^{ik_i X(\tilde{z}_i)} e^{id_+ X(t_j)} e^{id_- X(r_k)}\right\rangle_{S_M} \left\langle e^{\beta_i \phi(\tilde{z}_i)} e^{\alpha_+ \phi(z_l)}\right\rangle_{\mu=0} \quad , \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

Onde,

$$s = -\frac{1}{\alpha_+}\left(Q + \sum_{i=1}^{N}\beta_i\right) \quad . \tag{3.4.3}$$

Fixando o mesmo gauge da seção anterior e efetuando as contrações obtemos:

$$\mathcal{A}_n^{nm} = \frac{\lambda_+^n}{n!}\frac{\lambda_-^m}{m!}\mu^s\Gamma(-s) I_N^{nm} \tag{3.4.4}$$

com a seguinte integral

$$\begin{aligned} I_N^{nm} = & \int \prod_{j=4}^{N} d^2\tilde{z}_j |\tilde{z}_j|^{2\alpha'_j} |1-\tilde{z}_j|^{2\beta'_j} \prod_{i<j=4}^{N} |\tilde{z}_i - \tilde{z}_j|^{4\rho'_{ij}} \\ & \times \int \prod_{i=1}^{s} d^2 z_i |z_i|^{2\alpha} |1-z_i|^{2\beta} \prod_{i<j=1}^{s} |z_i - z_j|^{4\rho} \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=4}^{N} |z_i - \tilde{z}_j|^{2p_j} \\ & \times \prod_{i=1}^{n} d^2 t_i |t_i|^{2\tilde{\alpha}} |1-t_i|^{2\tilde{\beta}} \prod_{i<j}^{n} |t_i - t_j|^{4\tilde{\rho}} \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=4}^{N} |\tilde{z}_j - t_i|^{2\tilde{\alpha}_j} \\ & \times \int \prod_{i=1}^{m} d^2 r_i |r_i|^{2\tilde{\alpha}'} |1-r_i|^{2\tilde{\beta}'} \prod_{i<j=1}^{m} |r_i - r_j|^{4\tilde{\rho}'} \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=4}^{N} |\tilde{z}_j - r_i|^{2\tilde{\alpha}'_j} \\ & \times \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} |t_i - r_j|^{-4} \quad , \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Onde além dos parâmetros $\alpha, \beta, \rho, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\rho}, \tilde{\alpha}', \tilde{\beta}', \tilde{\rho}'$ já definidos, temos:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= k_1 k_j - \beta_1 \beta_j \quad , \quad \tilde{\alpha}_j = d_+ k_j \\ \beta_j &= k_2 k_j - \beta_2 \beta_j \quad , \quad \tilde{\alpha}'_j = d_- k_j \\ \rho_{lj} &= \frac{1}{2}(k_l k_j - \beta_l \beta_j) \quad , \quad p_j = -\alpha_+ \beta_j \quad . \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

com $4 \leq j, l \leq N$.

Infelizmente a integral I_N^{nm} não pode ser colocada na forma (B-9) ou (B-10) de [35] e não sabemos como calcula-la em geral (nem mesmo no caso $n = m = 0$). Entretanto notemos que ela possui um conjunto de simetrias: A integral I_N^{nm} é invariante por translações ($x_i \to 1 - x_i$) das variáveis integradas, se concomitantemente tivermos $\alpha \leftrightarrow \beta, \alpha'_j \leftrightarrow \beta'_j, \tilde{\alpha} \leftrightarrow \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}' \leftrightarrow \tilde{\beta}'$. Analogamente teremos simetria por inversão ($x_i \to \frac{1}{x_i}$) se ao mesmo tempo:

$$\begin{aligned} \alpha &\to -2 - \alpha - \beta - 2\rho(s-1) - \sum_{j=4}^{N} p_j \\ \tilde{\alpha} &\to -2 - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta} - 2\tilde{\rho}(n-1) + 4m \\ \tilde{\alpha}' &\to -2 - \tilde{\alpha}' - \tilde{\beta}' - \tilde{\rho}'(m-1) + 2n \\ \alpha'_j &\to -2 - \alpha'_0 - \beta'_0 - 2 \sum_{\substack{l=4 \\ (j<l)}}^{N} \rho'_{jl} - n\tilde{\alpha}_j - m\tilde{\alpha}'_j \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Essas simetrias SL(2,$\mathbb{C}$) residuais ainda não nos permitem um cálculo de I_N^{nm}. Seria importante conhecermos seu comportamento assintótico como função dos parâmetros que a definem. Usando uma técnica desenvolvida por Dotsenko e Fatteev[35,42] (vide [14]) é possível obtermos o comportamento de I_N^{nm} para $\alpha \to \infty$ (ou $\beta \to \infty$), que é polinomial, p.ex.:

$$I_N^{nm}(\alpha \to \infty) = \alpha^a \quad , \tag{3.4.8}$$

onde

$$\begin{aligned} a = &-2(N-3+s+n+m) - 2s\beta - 2\rho s(s-1) - 2s\sum_{4}^{N} p_j - 2\sum_{4}^{N} \beta'_j - 4\sum_{i<j=4}^{N} \rho'_{ij} \\ &- 2n\sum_{j=4}^{N} \tilde{\alpha}_j - 2m\sum_{4}^{N} \tilde{\alpha}'_j - 2n\tilde{\beta} - \tilde{\rho}n(n-1) - 2m\tilde{\beta}' - \tilde{\rho}'m(m-1) + 4nm \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

As expressões (3.4.7) e (3.4.9) acima são ainda complicadas demais e não há muita esperança de utilizá-las no cálculo de I_N^{nm}. Neste ponto é conveniente lembrar que mesmo no caso simples de $\mathcal{A}_3^{n=m=0}$ (seção III-2) o resultado da integral (3.2.39) se simplificou consideravelmente para o produto $\prod_{i=1}^{3}\Delta(\frac{1}{2}(\beta_i^2-k_i^2))$ após a eliminação de β como função de s e ρ através de relações cinemáticas. No caso em questão podemos eliminar a maioria dos parâmetros de I_N^{nm} como função das variáveis independentes α,β,ρ,s e p_j(para $4\leq j\leq N-1$). Após essa eliminação as simetrias por translação e inversão implicam respectivamente[14]:

$$\begin{aligned} I_N^{nm}(\alpha,\beta,p_j,\rho) &= I_N^{nm}(\beta,\alpha,p_j,\rho) \\ I_N^{nm}(\alpha,\beta,p_j,\rho) &= I_N^{nm}(m-1-P-\alpha-\beta+\rho(N+n-1-s),\beta,p_j,\rho) \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

onde $P=\sum_4^{N-1}p_j$ e admitimos, novamente, $\alpha_0<0$ na região cinemática

$$k_1,k_2,\cdots,k_{N-1}\geq\alpha_0 \quad , \quad k_N<\alpha_0 \quad . \tag{3.4.11}$$

Com isso (3.4.8) e (3.4.9) se simplificam para:

$$I_N^{nm}(\alpha\to\infty)=\alpha^{2\beta+2\rho(s-N-n+3)+2P-2m} \tag{3.4.12}$$

Com base no resultado obtido em [12] para $n=m=0$ propomos em [14] o seguinte ansatz:

$$\mathcal{A}_N^{nm}=f_N^{nm}(\rho,p_j)\Delta(\rho-\alpha)\Delta(\rho-\beta)\Delta(1-m+P+\alpha+\beta+\rho(s+2-N-n)) \tag{3.4.13}$$

$$\mathcal{A}_N^{nm}=f_N^{nm}(\rho,p_j)\prod_{j=1}^{3}\Delta\left(\frac{1}{2}(\beta_j^2-k_j^2)\right) \tag{3.4.14}$$

onde f_N^{nm} será determinada a seguir .

O ansatz proposto possui as simetrias (3.4.10) e o comportamento assintótico (3.4.12) que pode ser checado com o uso da fórmula: $\Delta(x+B)\sim x^{2B-1}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(-x)}$ que é válida para $x\to\infty$. A função f_N^{nm} pode ser determinada a partir da função de 3-pontos $\mathcal{A}_3^{nm}$ dada em (3.3.12) e da expressão abaixo:

$$\mathcal{A}_N^{nm}(k_1,k_2,k_j\to 0,k_N)=(-\pi)^{N-3}\frac{\partial}{\partial\mu}^{N-3}\mathcal{A}_3^{nm}(k_1,k_2,k_N) \quad , \quad 3\leq j\leq N-1 \tag{3.4.15}$$

Assim temos o resultado[14] para $\mathcal{A}_N^{nm}$ na região cinemática (3.4.11) para $\alpha_0<0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N^{nm} &= (s+N-3)(s+N-4)\cdots(s+1)\left[\mu\Delta(-\rho)\right]^s \\ &\quad\times\left[\Delta(\rho^{-1})\right]^m\left[\Delta(\rho)\right]^n\prod_{j=1}^{N}\Delta\left(\frac{1}{2}(\beta_j^2-k_j^2)\right) \quad , \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

ou

$$\mathcal{A}_N^{nm} = \left(\frac{\partial^{N-3}}{\partial\mu}\mu^{s+N-3}\right)[\Delta(-\rho)]^s\,[\Delta(\rho^{-1})]^m\,[\Delta(\rho)]^n\prod_{j=1}^{N}\Delta\left(\frac{1}{2}(\beta_j^2-k_j^2)\right) \quad , \qquad (3.4.17)$$

O resultado acima concorda com o obtido por Di Francesco e Kutasov em [12] para $\mathcal{A}_N^{n=m=0}$ que, por sua vez, na região cinemática (3.4.11), está de acordo com resultados obtidos em [44], também por Di Francesco e Kutasov, via técnicas KdV (que estão intimamente relacionadas a modelos de matrizes) vide também apêndice A de [38]. A validade do resultado (3.4.17) em outras regiões cinemáticas será discutida no final da tese no capítulo V.

No próximo capítulo passaremos ao caso supersimétrico calculado originalmente em [13,14].

CAPÍTULO IV - FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO SUPERSIMÉTRICAS

IV-1- A função de 3-pontos supersimétrica

Esta seção é paralela a seção III-2 e nela calcularemos a função de correlação de três operadores de vértice em supergravidade bidimensional acoplada a uma teoria superconforme com carga central $c_m = \frac{3}{2}\hat{c}, (\hat{c} = 1 - 8\alpha_0{}^2)$. As motivações e a técnica são as mesmas do caso bosônico, acrescentando-se a estas a utilidade de tais resultados no desenvolvimento de modelos de supermatrizes.

Os resultados desta seção foram obtidos em [13] onde utilizamos a formulação de Distler, Hlousek e Kawai[27] na qual a medida (vide capítulo II) é invariante por translações e a ação total é escrita como:

$$\begin{aligned} S =& S_{SL} + S_M \\ S_{SL} =& \frac{1}{4\pi}\int d^2\mathbf{z}\hat{E}\left(\frac{1}{2}\hat{D}_\alpha\Phi_{SL}\hat{D}^\alpha\Phi_{SL} - Q\hat{Y}\Phi_{SL} - 4i\mu e^{\alpha_+\Phi_{SL}}\right) \quad , \\ S_M =& \frac{1}{4\pi}\int d^2\mathbf{z}\hat{E}\left(\frac{1}{2}\hat{D}_\alpha\Phi_M\hat{D}^\alpha\Phi_M + 2i\alpha_0\hat{Y}\Phi_M\right) \quad , \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

onde $\Phi_{SL} = \phi + \theta\psi + \bar{\theta}\bar{\psi} + \theta\bar{\theta}F$, é o supercampo de Liouville e $\Phi_M = X + \theta\zeta + \bar{\theta}\bar{\zeta} + \theta\bar{\theta}G$ é o super campo de matéria. Note que $\hat{Y}$ é o supercampo de curvatura e ,

$$d^2\mathbf{z}_i = d^2z_i d\theta_i d\bar{\theta}_i \quad , \tag{4.1.2}$$

e ainda $\hat{D}_\alpha$ é a derivada covariante supersimétrica com $\hat{E}$ sendo o determinante do superzweibein.

As constantes Q e $\alpha_\pm$ são funções de carga central c_m (vide capítulo II):

$$Q = 2\sqrt{1+\alpha_0^2} \quad , \tag{4.1.3}$$

$$\alpha_\pm = -\frac{Q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{Q^2-4} = -\frac{Q}{2} \pm |\alpha_0| \quad , \quad \alpha_+\alpha_- = 1 \quad . \tag{4.1.4}$$

O operador de vértice no setor de Neveu-Schwarz é dado por:

$$\Psi_{NS}(\mathbf{z}_i, k_i) = d^2\mathbf{z}_i\hat{E}e^{ik\Phi_M(\mathbf{z}_i)}e^{\beta(k)\Phi_{SL}(\mathbf{z}_i)} \tag{4.1.5}$$

Segundo [27] o vestimento $\beta(k)$ é determinado impondo-se que o operador a direita de $d^2\mathbf{z}_i$ tenha a correta dimensão conforme, no caso, devido a presença de $(d\theta, d\overline{\theta})$ que possuem dimensão $(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ devemos ter um operador de dimensão $(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ para compensar a dimensão $(-1,-1)$ de d^2z_i. Assim temos a relação de dispersão abaixo, que por sinal tem a mesma forma do caso bosônico (escolhendo $E > 0$ como antes):

$$E = \beta + \frac{Q}{2} = |k - \alpha_0| \quad . \tag{4.1.6}$$

A interação exponencial em S_{SL} nos permite utilizar a técnica do modo zero novamente. Integrando em ϕ_0 e X_0 temos:

$$\left\langle \prod_{i=1}^{3} \int \Psi_{NS}(\tilde{\mathbf{z}}_i, k_i) \right\rangle_S = 2\pi\delta\left(\sum_{i=1}^{3} k_i - 2\alpha_0\right) \mathcal{A}_3(k_1, k_2, k_3) \quad ,$$

$$\mathcal{A}_3(k_1, k_2, k_3) = \Gamma(-s)(\frac{i\mu}{\pi})^s \left\langle \int \prod_{i=1}^{3} d^2\tilde{\mathbf{z}}_i e^{ik_i\Phi_M(\tilde{\mathbf{z}}_i)} e^{\beta_i\Phi_{SL}(\tilde{\mathbf{z}}_i)} \left(\int d^2\mathbf{z} e^{\alpha_+\Phi_{SL}(\mathbf{z})}\right)^s \right\rangle_0 \tag{4.1.8a}$$

O valor esperado $\langle \quad \rangle_0$ é calculado com $\mu = 0$ e como no caso bosônico:

$$s = -\frac{1}{\alpha_+}\left(Q + \sum_{i=1}^{3} \beta_i\right) \tag{4.1.8b}$$

Em componentes temos:

$$\int d^2\tilde{\mathbf{z}}_i e^{ik_i\Phi_M(\tilde{\mathbf{z}}_i) + \beta_i\Phi_{SL}(\tilde{\mathbf{z}}_i)} = \int d^2\tilde{\mathbf{z}}_i [(\beta_i^2\overline{\psi}\psi(\tilde{z}_i) - k_i^2\overline{\zeta}\zeta(\tilde{z}_i) + ik_iG + \beta_iF)\overline{\tilde{\theta}}_i\tilde{\theta}_i$$
$$+ \tilde{\theta}_i(\beta_i\psi(\tilde{z}_i) + ik_i\zeta(\tilde{z}_i)) + h.c.] e^{ik_iX + \beta_i\phi} \tag{4.1.9}$$

$$\int d^2\mathbf{z}_i e^{\alpha_+\Phi_{SL}} = \int d^2\tilde{z}_i e^{\alpha_+\phi(\tilde{z}_i)}(\alpha_+^2\overline{\psi}\psi(\tilde{z}_i) + \alpha_+F(\tilde{z}_i)) \tag{4.1.10}$$

$$S(\mu = 0) = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\sqrt{\hat{g}}[\partial\phi\overline{\partial}\phi - \frac{Q}{4}\hat{R}\phi - \psi\overline{\partial}\psi - \overline{\psi}\partial\overline{\psi} + F^2$$
$$+ \partial X\overline{\partial}X + \frac{i\alpha_0}{2}\hat{R}X - \zeta\partial\zeta - \overline{\zeta}\partial\overline{\zeta} + G^2] \quad . \tag{4.1.11}$$

Os campos auxiliares F e G aparecem acima de forma trivial, o que significa que seus propagadores são altamente divergentes:

$$\langle F(z_i)F(z_j)\rangle = \langle G(z_i)G(z_j)\rangle \sim \delta^2(z_i - z_j) \quad . \tag{4.1.12}$$

Levando em conta a contração de outros campos em (4.1.8), p.ex ,$\langle e^{a\phi(z_i)}e^{b\phi(z_j)}\rangle \sim |z_i - z_j|^{-2ab}$, vemos, que se mantivermos os campos auxiliares, teremos na função de correlação (4.1.8) expressões singulares como $\delta^2(z_i - z_j)|z_i - z_j|^{-2ab}$. Esse problema já era conhecido em supercordas[45] e no nosso caso será circundado desprezando-se tais campos, isto é, $F = G = 0$, que é a saída comum. Para um tratamento mais rigoroso desse problema vide [45]. Alternativamente podemos dizer que os cálculos são feitos numa região onde $ab < 0$ tal que $\delta^2(x)|x|^{-2ab} = 0$ e depois continuamos o resultado para outras regiões do espaço dos momentos.

O próximo passo consiste na fixação da simetria residual $OSP(2,1)$ do gauge superconforme. Além dos geradores do $SL(2,\Re)$, $L_{\pm 1}, L_0$ temos dois geradores fermiônicos (vide[14]) $Q_{\pm\frac{1}{2}}$ que nos permitem fixar 3 coordenadas bosônicas $\tilde{z}_i$ e duas fermiônicas $\tilde{\theta}_i$, escolheremos o gauge:

$$\tilde{z}_1 = 0 \quad , \quad \tilde{z}_2 = 1 \quad , \quad \tilde{z}_3 = \infty \quad , \quad \tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_3 = 0 \quad . \tag{4.1.13}$$

Evidentemente devemos fixar $\tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_3 = 0$ em (4.1.9) antes da integração . Portanto, após a integração na variável $\tilde{\theta}_1$ restante, com o uso de propagadores livres para ϕ e X temos de (4.1.8):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(k_1,k_2,k_3) = \Gamma(-s)(\frac{i\mu}{\pi})^s \alpha_+^{2s}\beta_1^2 \prod_{i=1}^{s}\int d^2z_i|z_i|^{2\alpha}|1-z_i|^{2\beta}\prod_{i<j}^{s}|z_i-z_j|^{4\rho} \\ \times\left\langle \overline{\psi}\psi(0)\prod_{i=1}^{s}\overline{\psi}\psi(z_i)\right\rangle_0 \quad ,\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Compare com (3.2.7). Os parâmetros α, β e ρ estão definidos em (3.2.8).

Para s par a expressão acima é nula devido a simetria $\psi \to -\psi$ (ou $\overline{\psi} \to -\overline{\psi}$) da ação $S(\mu = 0)$ em (4.1.11). Portanto assumiremos daqui em diante que s é ímpar:

$$s = 2l + 1 \quad , \quad l = 0, 1, 2, \cdots \quad . \tag{4.1.15}$$

Usando o propagador livre dos fermions (vide $S(\mu = 0)$) temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3(k_1,k_2,k_3) = \Gamma(-s)\frac{1}{\alpha_+^2}\left(\frac{i\alpha_+\mu}{\pi}\right)^s \alpha^2(-1)^{\frac{s+1}{2}}s!! \\ \times\prod_{i=1}^{s}\int d^2z_i|z_i|^{2\alpha}|1-z_i|^{2\beta}\prod_{i<j=1}^{s}|z_i-z_j|^{4\rho}\prod_{i=1}^{\frac{s-1}{2}}|z_{2i-1}-z_{2i}|^{-2}|z_s|^{-2} \quad .\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

A integral (4.1.16) corresponde a generalização supersimétrica de (B-9) de Dotsenko e Fatteev[35] e ao escrevermos [13] seu resultado ainda [10)] não era conhecido na literatura. Em [13], atraves de uma série de ansätze compatíveis com as simetrias e o comportamento assintótico ($\alpha, \beta \to \infty$) da integral (vide detalhes em [13]) obtivemos o resultado que segue e que se mostrou correto à posteriori :

$$\mathcal{A}(k_1,k_2,k_3) = \Gamma(-s)\frac{\Gamma(s+1)}{\alpha_+^2}\left(\frac{\alpha_+^2\mu}{2}\right)^{2l+1}\left[\Delta(\frac{1}{2}-\rho)\right]^{2l+1}\prod_{i=1}^{l}\Delta(2i\rho)$$
$$\times\prod_{i=1}^{l}\Delta(\frac{1}{2}+(2i+1)\rho)\prod_{i=0}^{l}\Delta(1+\alpha+2i\rho)\Delta(1+\beta+2i\rho)\Delta(-\alpha-\beta+(2i-4l)\rho)$$
$$\times\prod_{i=1}^{l}\Delta(\frac{1}{2}+\alpha+(2i-1)\rho)\Delta(\frac{1}{2}+\beta+(2i-1)\rho)\Delta(-\frac{1}{2}-\alpha-\beta+(2i-4l-1)\rho) \tag{4.1.17}$$

Como no caso bosônico a expressão acima se simplifica consideravelmente após a eliminação de β, para $k_1, k_3 \geq \alpha_0, k_2 \leq \alpha_0$

$$\beta = \begin{cases} \rho(1-s) & (\alpha_0 > 0) \\ -\frac{1}{2}-\rho s & (\alpha_0 < 0) \end{cases} . \tag{4.1.18}$$

Também como no caso bosônico, teremos um resultado não trivial para $\mathcal{A}_3$ apenas quando $\alpha_0 < 0$:

$$\mathcal{A}_3(k_1,k_2,k_3) = \left[\mu\Delta\left(\frac{1}{2}-\rho\right)\right]^s\Delta\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)\Delta\left(1+\alpha-(s-1)\rho\right)\Delta\left(\frac{1}{2}-\alpha+\rho\right) \tag{4.1.19}$$

$$\mathcal{A}_3(k_1,k_2,k_3) = \left[\mu\Delta\left(\frac{1}{2}-\rho\right)\right]^s\prod_{j=1}^{3}\Delta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\beta_j^2-k_j^2)\right) \tag{4.1.20}$$

Como $\frac{\beta_j{}^2}{2} = -\frac{\rho}{2}$ para $k_j = 0$, vemos que a analogia com o caso bosônico (vide (3.2.48)) é completa e o fator $\Delta(\frac{1}{2}-\rho)$ no lugar de $\Delta(-\rho)$ pode ser entendido pelo fato de que o caso limite $\hat{c} = 1$ no exemplo supersimétrico corresponde a $\rho = -\frac{1}{2}$ o que implica numa função de 3-pontos nula quando s é um inteiro positivo, enquanto que no caso bosônico a barreira começa em $c = 1$ o que implica $\rho = -1$ onde a amplitude se torna nula.

---

10) Recentemente os cálculos de [35,42] foram generalizados para o caso de teorias superconformes $N = 1$ em [46].

Em analogia ao caso bosônico definiremos a constante cosmológica renormalizada $\tilde{\mu}$ e vértices renormalizados Ψ_{NS}:

$$\mu \rightarrow \frac{\tilde{\mu}}{\Delta\left(\frac{1}{2}-\rho\right)} \quad , \quad \Psi_{NS}(k_j) \rightarrow \frac{\tilde{\Psi}_{NS}(k_j)}{\Delta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[\beta_j^2-k_j^2]\right)} \quad , \tag{4.1.21}$$

assim obtemos o mesmo resultado renormalizado que no caso bosonico:

$$\tilde{\mathcal{A}}_3(k_1,k_2,k_3) = (\tilde{\mu})^s \quad . \tag{4.1.22}$$

Embora não existam ainda modelos de supermatrizes bem desenvolvidos , alguns resultados recentes da literatura a esse respeito[47] corroboram a estreita relação entre o caso bosônico e o supersimétrico, mas a relação exata entre tais resultados da literatura e o acima obtido no contínuo ainda não é clara. Para uma futura comparação com modelos de supermatrizes damos abaixo o resultado da amplitude para $\hat{c}=1(c_m=\frac{3}{2}),(\alpha_0\rightarrow 0)$:

$$\mathcal{A}_3(\hat{c}=1) = (\tilde{\mu})^{(\sum_{i=1}^{3}|k_i|-1)}\prod_{i=1}^{3}\Delta(1-|k_i|) \quad . \tag{4.1.23}$$

Compare com (3.2.53).

Na próxima seção incluiremos um número arbitrário de cargas de blindagem na função de correlação supersimétrica.

IV-2 A função de 3-pontos com (n,m) cargas de blindagem (Caso Supersimétrico)

Como no caso bosônico é nescessário em geral incluir cargas de blindagem no setor de supermatéria (n cargas V_+ e m cargas V_-) para o estudo de modelos mínimos acoplados a supergravitação em duas dimensões . As cargas $V_\pm$ são definidas como operadores de vértice que não nescessitam de vestimento ($\beta_i = 0$), ou seja,

$$V_\pm = e^{id_\pm \phi_M} \tag{4.2.1}$$

$$\text{com} \quad \frac{1}{2}d(d-2\alpha_0) = \frac{1}{2} \tag{4.2.2}$$

$$d_\pm = \alpha_0 \pm \sqrt{\alpha_0^2+1} \quad . \tag{4.2.3}$$

Na formulação de supergás de Coulomb[48] as cargas $V_\pm$ podem ser introduzidas diretamente na ação S_M como em (3.3.4). Após integração sobre os modos zero da matéria (X_0) e de Liouville ϕ_0:

$$\left\langle \prod_{i=1}^{3} \int \Psi_{NS}(\tilde{\mathbf{z}}_i, k_i) \right\rangle_{S_M^\lambda + S_{SL}} = 2\pi\delta(\sum_{i=1}^{3} k_i + (n-1)d_+ + (m-1)d_-)\mathcal{A}_3^{nm}(k_1,k_2,k_3) \tag{4.2.4}$$

$$\mathcal{A}_3^{nm}(k_1,k_2,k_3) = \frac{\lambda_+^n \lambda_-^m}{n!m!}\Gamma(-s)(\frac{i\mu}{\pi})^s \left\langle \prod_{i=1}^{n} \int d^2\mathbf{t}_i e^{id_+\Phi_M(\mathbf{t}_i)} \prod_{i=1}^{m} \int d^2\mathbf{r}_i e^{id_-\Phi_M(\mathbf{r}_i)} \right.$$

$$\left. \times \int \prod_{i=1}^{3} d^2\tilde{\mathbf{z}}_i e^{ik_i\Phi_M(\tilde{\mathbf{z}}_i)+\beta_i\Phi_{SL}(\tilde{\mathbf{z}}_i)} \left(\int d^2\mathbf{z} e^{\alpha_+\Phi_{SL}(\mathbf{z})}\right)^s \right\rangle_0 , \tag{4.2.5}$$

Fixando o gauge (4.1.13) e integrando sobre as variáveis grassmannianas restantes (com todos campos auxiliares desprezados) temos[14]:

$$\mathcal{A}_3^{nm}(k_1,k_2,k_3) = \Gamma(-s)\left(\frac{i\mu\alpha_+^2}{\pi}\right)^s \frac{(-d_+^2)^n}{n!}\frac{(-d_-^2)^m}{m!}\lambda_+^n\lambda_-^m$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \int d^2t_i |t_i|^{2\tilde{\alpha}}|1-t_i|^{2\tilde{\beta}} \prod_{i<j=1}^{n} |t_i - t_j|^{2\overline{\rho}}$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} \int d^2r_i |r_i|^{2\tilde{\alpha}'}|1-r_i|^{2\tilde{\beta}'} \prod_{i<j=1}^{m} |r_i - r_j|^{2\overline{\rho}'} \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} |t_i - r_j|^{-2}$$

$$\times \prod_{i=1}^{s} \int d^2z_i |z_i|^{2\alpha}|1-z_i|^{2\beta} \prod_{i<j=1}^{s} |z_i - z_j|^{4\rho}$$

$$\times \left\langle (\beta_1^2\overline{\psi}\psi(0) - k_1^2\overline{\zeta}\zeta(0)) \prod_{i=1}^{n}\overline{\zeta}\zeta(t_i) \prod_{i=1}^{m}\overline{\xi}\xi(r_i) \prod_{i=1}^{s}\overline{\psi}\psi(\tilde{z}_i) \right\rangle_0 \tag{4.2.6}$$

Os parâmetros acima já foram definidos na seção III-3, (3.3.8), com excessão de:

$$\begin{aligned} \overline{\rho} &= d_+^2 \\ \overline{\rho}' &= d_-^2 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Note que agora temos $|t_i - r_j|^{-2}$ ao invés de $|t_i - r_j|^{-4}$ do caso bosônico, pois agora $d_+d_- = -\alpha_+\alpha_- = -1$ ao invés de $d_+d_- = 2$ do caso bosônico. Isso é decorrência do fator 1 na definição de Q em (4.1.3) em oposição ao fator 2 do caso bosônico (vide (3.3.34)).

Como o valor esperado de um número ímpar de operadores $\overline{\xi}\xi$ ou $\overline{\psi}\psi$ é nulo vemos que a amplitude acima só será não nula em dois casos: $n+m$ par e s ímpar ou $n+m$ ímpar e s par. Daqui em diante nos concentraremos no primeiro caso (veja comentário no final da seção) onde:

$$\mathcal{A}_3^{nm}(k_1,k_2,k_3) = \Gamma(-s)\left(\frac{i\mu\alpha_+^2}{\pi}\right)^s \frac{(-\lambda_+ d_+^2)^n}{n!}\frac{(-\lambda_- d_-^2)^m}{m!} I_M^{nm} I_G^s \tag{4.2.8}$$

$$\begin{aligned} I_M^{nm} &= \prod_{i=1}^{n}\int d^2t_i|t_i|^{2\tilde{\alpha}}|1-t_i|^{2\tilde{\beta}}\prod_{i<j}^{n}|t_i-t_j|^{2\tilde{\rho}} \\ &\times \prod_{i=1}^{m}\int d^2r_i|r_i|^{2\tilde{\alpha}'}|1-r_i|^{2\tilde{\beta}'}\prod_{i<j}^{m}|r_i-r_j|^{2\tilde{\rho}'}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}|t_i-r_j|^{-2} \\ &\times \left\langle \prod_{i=1}^{n}\overline{\zeta}\zeta(t_i)\prod_{i=1}^{m}\overline{\zeta}\zeta(r_i)\right\rangle_0 \quad , \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

e I_G^s corresponde a integral (4.1.6) da seção anterior.

Como no caso de I_G^s da seção anterior, ao escrevermos [14] não se conhecia na literatura o resultado da integral I_M^{nm} que corresponde a generalização supersimétrica de (B-10) de Dotsenko e Fatteev[35] que viria a ser calculada posteriormente em [46]. Por essa razão tivemos que obtê-la com base no seu comportamento assintótico ($\alpha \to \infty$) e suas simetrias (vide apêndice A de [14] para detalhes) e na sua relação com integrais já calculadas em [13].

Antes de apreciarmos o resultado final para $\mathcal{A}_3^{nm}$ seria instrutivo apresentarmos seu resultado parcial obtido após a eliminação dos parâmetros de I_M^{nm} e I_G^s como função de α, β e ρ através de (válido para $\alpha_0 < 0$):

$$\begin{aligned} (\beta,\tilde{\beta},\beta') &= \left(-\frac{1}{2}-\frac{m}{2}-(n+s)\rho, -\beta-1, \frac{n+s}{2}+\frac{\rho^{-1}\alpha}{2}\right) \\ (\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}') &= \left(\alpha-2\rho, -1+\frac{\rho^{-1}\alpha}{2}\right) \\ (\overline{\rho},\overline{\rho}') &= \left(-2\rho, -\frac{\rho^{-1}}{2}\right) \quad . \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Substituindo em $\mathcal{A}_3^{nm}$ temos[14] :

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_3^{nm}(k_1,k_2,k_3)\\
&= \Gamma(-s)\Gamma(s+1)\left(\frac{i\mu}{\pi}\right)^s \alpha_+^{2(s-1)}(2\rho)^{n-m}(-)^{\frac{n+m+s-1}{2}}\frac{\pi^{s+n+m}}{2^{m+n+s-1}}\rho^{-2mn}\\
&\times\left[\lambda_+\Delta(\frac{1}{2}+\rho)\right]^n\left[\lambda_-\Delta(\frac{1}{2}+\frac{\rho^{-1}}{4})\right]^m\\
&\times\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\Delta(-2i\rho)\Delta(\frac{1}{2}+\rho(1-2i))\prod_{i=1}^{\frac{m}{2}}\Delta(-\frac{n}{2}-\frac{i\rho^{-1}}{2})\Delta\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{2}\right)\rho^{-1}\right)\\
&\times\prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\Delta\left(\frac{1}{2}+\frac{m}{2}+\rho(n+s-2i)\right)\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\Delta\left(\frac{m}{2}+\rho(n+s+1-2i)\right)\\
&\times\prod_{i=0}^{\frac{m}{2}-1}\Delta\left(1+\frac{s}{2}-\frac{\rho^{-1}}{2}(i+\frac{1}{2}-\frac{n}{2})\right)\prod_{i=1}^{\frac{m}{2}}\Delta\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}-\frac{\rho^{-1}}{2}(i-\frac{m}{2})\right)\\
&\times\left[\Delta(\frac{1}{2}-\rho)\right]^s\prod_{i=1}^{\frac{s-1}{2}}\Delta(2i\rho)\prod_{i=0}^{\frac{s-1}{2}}\Delta\left(\frac{1}{2}+(2i+1)\rho\right)\\
&\times\prod_{i=0}^{\frac{s-1}{2}}\Delta(\frac{1}{2}-\frac{m}{2}+(2i-n-s)\rho)\prod_{i=1}^{\frac{s-1}{2}}\Delta(-\frac{m}{2}+(2i-1-n-s)\rho)\\
&\times\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\Delta(\frac{1}{2}+\alpha-\rho(2i+1))\Delta(\frac{1}{2}+\frac{m}{2}-\alpha-\rho(s-n-2+2i))\\
&\times\prod_{i=0}^{\frac{s-1}{2}}\Delta(\frac{m}{2}+\frac{1}{2}-\alpha+(2i-s+n+2)\rho)\prod_{i=1}^{\frac{s-1}{2}}\Delta(\frac{1}{2}+\alpha+(2i-1)\rho)\\
&\times\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\Delta(\frac{m}{2}-\alpha-\rho(2i-n+s-1))\Delta(1+\alpha-2i\rho)\\
&\times\prod_{i=0}^{\frac{s-1}{2}}\Delta(1+\alpha+2i\rho)\prod_{i=1}^{\frac{s-1}{2}}\Delta(\frac{m}{2}-\alpha+(2i-s+n+1)\rho)\\
&\times\prod_{i=1}^{\frac{m}{2}}\Delta(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{\rho^{-1}}{2}(i+\alpha-\frac{m}{2}))\Delta(-\frac{n}{2}-\frac{\rho^{-1}}{2}(i-1-\alpha))\\
&\times\prod_{i=1}^{\frac{m}{2}}\Delta(-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\rho^{-1}}{2}(i-\alpha-\frac{1}{2}))\Delta(1-\frac{s}{2}-\frac{\rho^{-1}}{2}(i-\frac{(m+1)}{2}+\alpha))
\end{aligned}
\tag{4.2.11}
$$

Após um longo e tedioso cálculo combinando as produtórias da matéria com as da

gravitação através do uso de propriedades de funções Γ obtemos o resultado surpreendentemente simples embora já esperado baseado na nossa experiência com os casos anteriores:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3^{nm}(k_1,k_2,k_3) &= \left[\mu\Delta(\frac{1}{2}-\rho)\right]^s \left[\lambda_-\Delta(\frac{1}{2}+\frac{\rho^{-1}}{4})\right]^m \left[\lambda_+\Delta(\frac{1}{2}+\rho)\right]^n \\
&\times \Delta\left(\rho-\alpha+\frac{1}{2}\right)\Delta\left(\frac{1}{2}-\frac{n+s}{2}-\frac{m\rho^{-1}}{4}\right)\Delta(1-\frac{m}{2}+\alpha+(s-n-1)\rho) \\
&= \left[\mu\Delta\left(\frac{1}{2}-\rho\right)\right]^s \left[\lambda_-\Delta\left(\frac{1}{2}+\frac{\rho^{-1}}{4}\right)\right]^m \left[\lambda_+\Delta\left(\frac{1}{2}+\rho\right)\right]^n \\
&\times \prod_{i=1}^{3}\Delta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\beta_i^2-k_i^2)\right)
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Lembrando que para $V_+(V_-)$ temos $k_i = d_+(d_-) = -\alpha_+(\alpha_-)$ para $\alpha_0 < 0$ com o vestimento β_i correspondente nulo, vemos que os fatores $\Delta(\frac{1}{2}+\rho)$ e $\Delta(\frac{1}{2}+\frac{\rho^{-1}}{4})$ acima tem a forma $\Delta(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\beta_i^2-k_i^2))$ e novamente o resultado é similar a uma função de $(s+n+m+3)$-pontos com valores especiais dos momentos para os $s+n+m$ primeiros vértices.

Integrando o resultado acima com relação a μ com $k_3 = 0$ obtemos a função de 2-pontos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2^{\tilde{n}\tilde{m}}(k_1,k_2) &= \frac{[\mu\Delta(\frac{1}{2}-\rho)]^{-\alpha-(|k_1-\alpha_0|+|k_2-\alpha_0|)}}{-\alpha_-(|k_1-\alpha_0|+|k_2-\alpha_0|)} \\
&\times \left[\lambda_+\Delta(\frac{1}{2}+\rho)\right]^{\tilde{n}} \left[\lambda_-\Delta(\frac{1}{2}+\frac{\rho^{-1}}{4})\right]^{\tilde{n}} \prod_{i=1}^{2}\Delta\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\beta_i^2-k_i^2)\right) \quad .
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Onde $\tilde{n}$ e $\tilde{m}$ são tais que a lei de conservação abaixo com $k_3 = 0$ seja satisfeita:

$$k_1 + k_2 = (1-\tilde{n})d_+ + (1-\tilde{m})d_- \quad . \tag{4.2.14}$$

Integrando $\mathcal{A}_2^{\tilde{n}\tilde{m}}$ duas vezes com relação a μ e tomando $k_1 = k_2 = 0$ (o que implica $\tilde{n} = \tilde{m} = 1$) obtemos a função de partição :

$$\mathcal{Z} = \frac{[\mu\Delta(\frac{1}{2}-\rho)]^{1-\frac{\rho^{-1}}{2}}}{(2\rho-1)(2\rho+1)}(2\rho)^3\left[\lambda_+\Delta(\frac{1}{2}+\rho)\right]\left[\lambda_-\Delta(\frac{1}{2}+\frac{\rho^{-1}}{4})\right] \quad . \tag{4.2.15}$$

Calculando a razão R :

$$R = \frac{(\mathcal{A}_3^{nm}(k_1,k_2,k_3))^2\mathcal{Z}}{\mathcal{A}_2^{\tilde{n}_1\tilde{m}_1}(k_1,k_1)\mathcal{A}_2^{\tilde{n}_2\tilde{m}_2}(k_2,k_2)\mathcal{A}_2^{\tilde{n}_3\tilde{m}_3}(k_3,k_3)} = \frac{-8\alpha_-^3(\prod_{i=1}^3|k_i-\alpha_0|)(2\rho)^3}{(2\rho-1)(2\rho+1)} \quad . \tag{4.2.16}$$

No caso de modelos mínimos temos:

$$k_i = \frac{(1-r_i')}{2}d_- + \frac{(1-r_i)}{2}d_+ \qquad (4.2.17),$$

usando ainda que $\alpha_0 = \frac{(d_+ + d_-)}{2}$ temos numa região cinemática genérica:

$$R = \frac{(2\alpha_+)^3 \prod_{i=1}^{3} |r_i d_+ + r_i' d_-|}{(2\rho-1)(2\rho+1)} \quad . \qquad (4.2.18)$$

Compare com (3.3.25).

O resultado acima concorda com o obtido em [37] para modelos mínimos unitários com a escolha $\alpha_0 > 0$ onde[11] $d_+ = -\alpha_-, d_- = \alpha_+ = -\sqrt{\frac{q}{(q+2)}}$ e $\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{q(q+2)}}$.

Para operadores diagonais ($r_i = r_i'$) temos :

$$R = \frac{(2\rho+1)^2}{(2\rho-1)} r_1 r_2 r_3 \quad . \qquad (4.2.19)$$

Essa expressão concorda com a obtida em [49] levando-se em conta que a nossa definição de ρ corresponde a $-(2\rho)^{-1}$ daquela referência.

Embora em [37] seja usada uma continuação em s similar à de [9] que é em princípio diferente da continuação de [49] e da que usamos em [14], vemos que , como no caso bosônico, resultados físicos não dependem de tais detalhes.

11) Em [37] aparece $q^2 R$ em vez de R, o fator q^2 é certamente um erro de impressão .

IV-3 A função de N-pontos com (n,m) cargas de blindagem

(Caso Supersimétrico)

Nesta seção generalizaremos os càlculos das seções anteriores para o caso de N-pontos ($N \geq 4$) com cargas de blindagem no setor de matéria[14]. Esta seção é totalmente paralela a seção III-4 que corresponde ao caso bosônico.

Após integração sobre os modos zero da matéria e de Liouville temos:

$$\langle \prod_{i=1}^{N} \Psi_{NS}(\tilde{\mathbf{z}}_i) \rangle_{S_{SL}+S_M^{\lambda}} = 2\pi\delta(\sum_{i=1}^{N} k_i + nd_+ + md_- - 2\alpha_0)\mathcal{A}_N^{nm} \tag{4.3.1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_N^{nm}(k_1,\cdots,k_N) = \frac{(\lambda_+)^n}{n!}\frac{(\lambda_-)^m}{m!}\frac{\Gamma(-s)}{-\alpha_+}\left(\frac{i\mu}{\pi}\right)^s \Bigg\langle \prod_{i=1}^{N}\int d^2\tilde{\mathbf{z}}_i e^{ik_i\Phi_M(\tilde{\mathbf{z}}_i)+\beta_i\Phi_{SL}(\tilde{\mathbf{z}}_i)} \\ \times \prod_{i=1}^{n}\int d^2\mathbf{t}_i e^{id_+\Phi_M(\tilde{\mathbf{t}}_i)} \prod_{j=1}^{m}\int d^2\mathbf{r}_j e^{id_-\Phi_M(\tilde{\mathbf{r}}_j)} \prod_{j=1}^{s}\int d^2\mathbf{z}_j e^{i\alpha_+\Phi_{SL}(\tilde{\mathbf{z}}_i)}\Bigg\rangle_0 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

onde

$$s = -\frac{1}{\alpha_+}(\sum_{i=1}^{N}\beta_i + Q) \tag{4.3.3}$$

Usando os propagadores livres nas contrações acima e fixando o memo gauge (4.1.13) das

seções anteriores obtemos em componentes:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_N^{nm} &= \Gamma(-s)\left(-\frac{\pi}{2}\right)^3\left(\frac{i\mu\alpha_+^2}{\pi}\right)^s\frac{(-\lambda_+d_+^2)^n}{n!}\frac{(-\lambda_-d_-^2)^m}{m!} \\
&\times\prod_{j=4}^{N}\int d^2\tilde{z}_j\prod_{i=1}^{n}\int d^2t_i\prod_{i=1}^{m}\int d^2r_i\prod_{i=1}^{s}d^2z_i|z_i|^{2\alpha}|1-z_i|^{2\beta} \\
&\times\prod_{i<j=1}^{s}|z_i-z_j|^{4\rho}\prod_{i=1}^{s}\prod_{j=4}^{N}|z_i-\tilde{z}_j|^{2p_j} \\
&\prod_{j=4}^{N}|\tilde{z}_j|^{2\alpha_j}|1-\tilde{z}_j|^{2\beta_j}\prod_{j<l=4}^{N}|\tilde{z}_j-\tilde{z}_l|^{4\rho_{jl}} \\
&\times\prod_{i=1}^{n}|t_i|^{2\tilde{\alpha}}|1-t_i|^{2\tilde{\beta}}\prod_{i<j}^{n}|t_i-t_j|^{2\tilde{\rho}}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}|t_i-r_j|^{-2} \\
&\times\prod_{i=1}^{m}|r_i|^{2\tilde{\alpha}'}|1-r_i|^{2\tilde{\beta}'}\prod_{i<j}^{m}|r_i-r_j|^{2\tilde{\rho}'}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=4}^{N}|t_i-\tilde{z}_j|^{2\tilde{\alpha}_j}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=4}^{N}|r_i-\tilde{z}_j|^{2\tilde{\alpha}'_j} \\
&\times\Bigg\langle(\beta_1^2\overline{\psi}\psi(0))-k_1^2\overline{\xi}\xi(0))\prod_{j=4}^{N}(\beta_j^2\overline{\psi}\psi(\tilde{z}_j)-k_j^2\overline{\xi}\xi(\tilde{z}_j)) \\
&\times\prod_{i=1}^{n}\overline{\xi}\xi(t_i)\prod_{i=1}^{m}\overline{\xi}\xi(r_i)\prod_{i=1}^{s}\overline{\psi}\psi(z_i)\Bigg\rangle_0
\end{aligned}
\tag{4.3.4}
$$

Os parâmetros acima são definidos como anteriormente (vide (3.4.6)). Existem agora várias possibilidades para N, s, n e m tais que a amplitude acima seja não nula. Poderíamos neste ponto do cálculo simplesmente para cada uma dessas possibilidades obter a integral e no final somá-las. Entretanto notando que o papel dos vários termos em $\langle\ \rangle_0$ acima é simplesmente o de tornar o resultado final simétrico com relação ao intercâmbio dos momentos k_j e das cargas de blindagem, achamos que é mais facíl sugerir um ansatz para o resultado final do que para cada caso separadamente. Como no caso bosônico devemos usar a cinemática para eliminarmos os parâmetros de (4.3.4) em função de $\alpha, \beta, \rho, s, p_j (4 \leq j \leq N-1)$ antes de propormos a solução da integral. Após tal eliminação (vide [14]) as simetrias por translação e inversão de (4.3.4) se traduzem respectivamente em:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_N^{nm}(\alpha,\beta,\rho,p_j) &= \mathcal{A}_N^{nm}(\beta,\alpha,\rho,p_j) \\
\mathcal{A}_N^{nm}(\alpha,\beta,\rho,p_j) &= \mathcal{A}_N^{nm}(-\alpha-\beta+\frac{(m-1)}{2}-P+\rho(N+n-s-1),\beta,\rho,p_j)
\end{aligned}
\tag{4.3.5}
$$

onde $P = \sum_{j=4}^{N-1} p_j$. Note que a eliminação referida só foi possível após a escolha de uma região cinemática, que por sinal é a mesma do caso bosônico, $k_1, k_2, \cdots k_{N-1} \geq \alpha_0, k_N \leq \alpha_0 \leq 0$.

O comportamento assintótico é dado por:

$$\mathcal{A}_N^{nm}(\alpha \to \infty) \sim \alpha^{1-m+2\beta+2\rho(s-N-n+3)+2P} \tag{4.3.6}$$

Todos requisitos acima são satisfeitos pelo ansatz abaixo:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_N^{nm} &= f_N^{nm}(\rho, p_j)\Delta(\frac{1}{2}+\rho-\alpha)\Delta(\frac{1}{2}+\rho-\beta)\Delta(1-\frac{m}{2}+P+\alpha+\beta+\rho(2+s-n-N)) \\ &= f_N^{nm}(\rho, p_j)\prod_{i=1}^{3}\Delta(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\beta_i^2-k_i^2))\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Com ajuda de (3.4.15) que também é válida no caso supersimétrico podemos determinar f_N^{nm} e finalmente:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_N^{nm} = &\left[-\lambda_+\Delta(\frac{1}{2}+\rho)\right]^n\left[\lambda_-\Delta(\frac{1}{2}+\rho)\right]^m\prod_{i=1}^{N}\Delta(\frac{1}{2}(1+\beta_i^2-k_i^2)) \\ &\times(s+N-3)(s+N-4)\cdots(s+1)\left[\mu\Delta(\frac{1}{2}-\rho)\right]^s\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

E a amplitude renormalizada fica:

$$\tilde{\mathcal{A}}_N^{nm} = \frac{\partial^{N-3}}{\partial_{\tilde{\mu}}}[\tilde{\mu}]^{s+N-3} \tag{4.3.9}$$

Os resultados (4.3.8) e (4.3.9) são completamente paralelos ao caso bosônico (3.4.16) e (3.4.17). Essa semelhança é um pouco surpreendente já que em geral a supersimetria diminui consideravelmente o grau de divergência (pelo menos perturbativamente) das teorias onde ela é implementada.

É importante salientar que o paralelelismo entre os casos supersimétrico e bosônico já havia sido notado na literatura anteriormente no ponto de vista discreto[47], embora a relação exata entre [47] e nossos resultados ainda não seja clara e mereça um estudo mais profundo.

CAPÍTULO V - COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÃO

Antes de tirarmos conclusões sobre os resultados apresentados nesta tese é oportuno fazer os seguintes comentários sobre a validade dos mesmos:

1) A técnica do modo zero exige que o parâmetro s seja continuado para valores não inteiros e isso pode ser feito de pelo menos três maneiras diferentes segundo os distintos procedimentos de Goulian e Li[9], de Dotsenko[11], ou ainda de Di Francesco e Kutasov[12]. Embora nenhum dos três seja justificável à priori, uma comparação entre estes e modelos de matrizes, pelo menos no que se refere a razões de funções de correlação , revela que além de concordarem entre si concordam também com os resultados dos modelos de matrizes. Portanto, resultados físicos aparentemente não dependem dos detalhes da continuação do parâmetro s que seria, de outra forma, passível de críticas.

2) Na continuação do parâmetro s preferimos utilizar a técnica de Di Francesco e Kutasov[12] por ser mais simples tecnicamente e porque os cálculos em [12] também são válidos para o caso limite $\hat{c}_m = 1$. Seguindo essa técnica tivemos que escolher uma região cinemática específica para o cálculo. Surge então a questão da validade dos resultados obtidos nesta tese fora da região cinemática escolhida. De fato a escolha cinemática que fizemos é a única, compatível com a lei de conservação dos momentos, que nos permite obter um resultado não trivial (não nulo) para as amplitudes. Outras escolhas não possuem utilidade para nós por nos levarem a uma região de não convergência da representação integral das amplitudes ou a uma região onde s não poderia assumir qualquer valor inteiro o que evidentemente seria imcompatível com a continuação que foi feita. Entretanto o fato de não sermos capazes em princípio de calcular as amplitudes para todo o espaço dos momentos não significa que elas não possam ser continuadas para fora da região cinemática assumida. O problema da continuação para outras regiões cinemáticas é não trivial (diferente da (super)corda crítica), pois não há nenhuma razão para esperarmos que as amplitudes finais sejam analíticas já que os resultados devem depender de s e dos vestimentos $\beta(k)$ que por sua vez apresentam cortes para $k = \alpha_0$, isso significa que uma continuação analítica (como é feito no caso crítico $D = 26$(D=10)) está descartada. Não obstante, Di Francesco e Kutasov desenvolvem em [38] um procedimento de continuação no espaço dos momentos que

é baseado na interpretação espaço-tempo da teoria como uma (super)corda bidimensional. Embora não seja totalmente justificável a partir de primeiros princípios, tal procedimento leva sistematicamente a resultados de acordo com os obtidos via modelos de matrizes onde o problema de continuação não existe. Usando-se tal técnica mostra-se, p.ex., que a continuação da função de 3-pontos é trivial, ou seja, o resultado obtido nesta tese é facilmente extendido para um valor genérico dos momentos se utilizarmos a fórmula genérica do vestimento $\beta(k)$, no lugar da específica utilizada na região cinemática escolhida. Para a função de N-pontos ($N \geq 4$) tanto bosônica como supersimétrica, o problema é mais complicado e a extensão não é trivial o que significa que os resultados obtidos nesta tese (para $N \geq 4$) são corretos apenas na região cinemática onde foram calculados, o que aliás já é suficiente para uma comparação com modelos de matrizes ou possíveis modelos de supermatrizes (no caso específico da função de 4-pontos, usando a técnica de [38] apresentamos em [13] o resultado já estendido para todo o espaço dos momentos).

Após esses comentários podemos partir para algumas conclusões .

Os principais resultados desta tese são as amplitudes fermiônicas descritas no capítulo IV e o resultado qualitativo mais importante sendo a sua extrema semelhança com o caso bosônico (capítulo III). A razão de tal semelhança ainda não é clara para nós e merece uma análise futura. É importante salientar apenas que tal semelhança já havia sido sentida anteriormente no discreto em [47] , embora modelos discretos de supergravitação em duas dimensões ainda estejam numa fase inicial de desenvolvimento. Por esta razão , infelizmente, ainda não foi possível comparar nossos resultados com resultados via modelos de supermatrizes e esperamos que as amplitudes obtidas em [13,14] sirvam como pontos de comparação no desenvolvimento de tais modelos. A comparação entre nossos resultados[13,14] e os de [37,38,49] também obtidos no contínuo , é totalmente positiva de qualquer forma.

Com relação aos resultados das amplitudes bosônicas (capítulo III) e a comparação com aqueles obtidos via modelo de matrizes podemos fazer os seguintes comentários:

Primeiramente notemos que para $c_m = 1$ a concordância é completa , não somente para a função de 3-pontos, como discutido explicitamente em III-2, como também para o caso geral de N-pontos (vide [15]). Já no caso dos modelos mínimos com $c_m < 1$ a comparação é totalmente positiva apenas para razões de funções de correlação . Separadamente as

amplitudes no discreto e no contínuo possuem diferenças. Na literatura atribui-se tais diferenças às normalizações dos operadores de vértice e da medida da integral de trajetória que são diferentes no discreto e no contínuo e são canceladas nas razões comparadas. Essa explicação não é todavia satisfatória já que no caso $c_m = 1$ a concordância é perfeita. É importante ressaltar que se admitissemos a forma renormalizada das amplitudes, ou seja,

$$\tilde{\mathcal{A}}_N = \frac{\partial^{N-3}}{\partial_{\tilde{\mu}}} [\tilde{\mu}]^{s+N-3}$$

ao calcularmos razões de funções de correlação obteríamos exatamente os mesmos resultados dos modelos de matrizes. Isso significa que os fatores $\Delta(\frac{1}{2}(\beta_j^2 - k_j^2))$ se cancelam em tais razões e ao compararmos razões de amplitudes estamos apenas checando a dependência das amplitudes com relação a constante cosmológica . De fato, como visto na seção III-2, as amplitudes obtidas através de modelos de matrizes são finitas. Isso significa que, embora relacionados as renormalizações dos operadores de vértices, os fatores $\Delta(\frac{1}{2}(\beta_j^2 - k_j^2))$ não tem uma interpretação clara no caso $c_m < 1$, ao contrário do caso limite $c_m = 1$ onde tais fatores podem ser reescritos como $\Delta(1 - \sqrt{2}|k_j|)$ e tais singularidades são de fato observadas em modelos de matrizes. A interpretação de tais singularidades para $c_m < 1$ é um problema em aberto e talvez seja simplesmente um artefato da representação de gás de Coulomb utilizada no cálculo (vide comentário em [38]).

Outro ponto de discordância (para $c_m < 1$) é o aparente desaparecimento das chamadas regras de fusão na função de 3-pontos no contínuo ($\mathcal{A}_3^{nm}$). Até o momento não se sabe ao certo porque tais regras são observadas no discreto no caso de modelos mínimos mas aparentemente são canceladas ao ligarmos o campo de Liouville . É possível que as amplitudes ($\mathcal{A}_N^{nm}, N \geq 4$) obtidas na seção III-4 possam ser úteis na resolução desse problema (vide recentes discussões em [43,38,50]).

Apesar de todos esses pontos ainda em aberto podemos concluir que a técnica do modo zero tem se mostrado extremamente interessante e em alguns casos até mais poderosa no cálculo de funções de correlação do que os conhecidos modelos de matrizes. Alguns exemplos de superioridade de tal técnica foram apresentados nesta tese como o caso supersimétrico do capítulo IV. Até mesmo no caso bosônico de gravitação acoplada a modelos mínimos vimos que foi possível obter razões de funções de correlação de operadores primários $\mathcal{O}_{rr'}$ associados a momentos $k_i = \frac{1}{2}((1 - r_i)d_+ + (1 - r_i')d_-)$ mesmo para $r_i \neq r_i'$

(não diagonais) enquanto que modelos de matrizes até agora só fornecem resultados de tais razões no caso diagonal $r_i = r'_i$.

Existem vários exemplos nos quais a técnica do modo zero poderá ser aplicada no futuro como o caso de superfícies de gênero superior como o torus, onde por enquanto no contínuo, somente a função de partição [34] foi calculada. Nesses casos entretanto os modelos de matrizes, após a descoberta do chamado "double scalling limit", tem se mostrado extremamente poderosos e dificilmente obteremos alguma informação nova relevante vinda do contínuo. Já no interessante caso supersimétrico[51] $N = 2$ a aplicação da técnica do modo zero é mais promissora e pode revelar de forma conclusiva a existência ou não de uma transição de fase[52] para $\hat{c}_m = 1$ nesse modelo. Outra aplicação relevante seria a extensão dos resultados do capítulo IV obtidos no setor de Neveu-Sschwarz para o setor de Ramond. Essas e outras aplicações bem como uma interpretação mais precisa dos resultados descritos nesta tese são objetos de estudo atualmente.

LITERATURA

[1] A.M.Polyakov,Phys.Lett. **B103** (1981)207,211.

[2] A.M.Polyakov,Mod.Phys.Lett. **A2** (1987)893.
A.M.Polyakov em Les Houches XLIX 19888 , "Fields Strings, and Critical Phenomena, editado por E. Brézin e J. Zinn-Justin (Elsevier 1989).

[3] V.Knizhinik,A.M.Polyakov e A.B.Zamolodchikov,Mod.Phys.Lett. **A3** (19888)819.

[4] A.M.Polyakov,A.Zamolodchikov,Mod.Phys.Lett **A3** (1988)1213.

[5] T.Curtright e C.B.Thorn,Phys.Rev.Lett. **48** (1982) 1309.

[6] J-L.Gervais e A.Neveu, Nucl.Phys. **B209** (1982)125.
ídem , Nucl.Phys. **B224** (1983) 329.
E.D'Hoker e R.Jackiw Phys.Rev **D26** (1982)3517.

[7] F.David, Mod.Phys.Lett **A3** (1988)1651.

[8] J.Distler,H.Kawai,Nucl.Phys. **B321** (1988)509.

[9] M.Goulian and M.Li, Phys.Rev.Lett. **66**(1991)2051.

[10] N.Sakai e Y.Tanii,Prog.Theor.Phys. **86** (1991)547
Y.Kitazawa,Phys.Lett **B265** (1991)262.

[11] Vl.Dotsenko,Mod.Phys.Lett. **A6** (1991) 3601.

[12] P.Di Francesco e D.Kutasov,Phys.Lett **B261** (1991)385.

[13] E.Abdalla,M.C.B.Abdalla,D.Dalmazi e K.Harada, -IFT/Prep. 029/91 (1991), a ser publicado no Phys. Rev. Lett.

[14] Idem , IFT-Unesp-preprint-IFT-P.042/91(1991).

[15] I.R.Klebanov-Princeton Univ. preprint-PUPT-1271.

[16] Y.Lozano e J.L.Mañes , Univ.de Barcelona-preprint-UB-ECM- PF 3/91.

[17] J.G.Russo, Stanford Univ. preprint-SU-ITP-895.

[18] O.Alvarez ,Nucl.Phys. **B216** (1983) 125.

[19] D.Friedan em Les Houches seção XXXIX-1982,editado por J-B. Zuber e R.Stora.

[20] A.H.Chanseddine e M. Reuter,Nucl.Phys. **B317**(1989)757.

[21] K.Harada , comunicação pessoal.

[22] U.Danielsson, Nucl.Phys. **B328** (1989)292.

[23] R.Stora,Seminário no IFUSP-1991.

[24] E.Abdalla,M.C.B.Abdalla e A Zadra,Mod.Phys.Lett.**A4** (1989)849.

[25] M.Mavromatos e J.Miramontes Mod.Phys.Lett. **A4** (1989) 1849.
E.D'Hoker e P.S.Kurzepa,Mod.Phys.Lett. **A5** (1990) 1411.

[26] E.D'Hoker,Mod.Phys.Lett **A6** (1991) 745.

[27] J.Distler,Z.Hlousek e H.Kawai, Int.J.of Mod. Phys. **A5** (1990) 391.

[28] J.Polchinski, Nucl.Phys. **B346** (1990)253 e referências.

[29] E.Brèzin e V.A.Kazakov,Phys.Lett. **B236** (1990) 144.
M.Douglas e S.Shenker,Nucl.Phys. **B335** (1990)635.
D.Gross e A.A.Migdal,Phys.Rev.Lett. **64** (1990)127.

[30] D.Gross,I.Klebanov e M.J.Newman,Nucl.Phys **B350** (1991)621.

[31] G.Moore,Yale e Rutgers preprints YCTP-P8-91,RU-91-12.

[32] A.Gupta,S.P.Trivedi e M.Wise,Nucl.Phys. **B340** (1990)475.

[33] N.Seiberg,Rutgers preprint RU-90-29,(1990).

[34] M.Bershadsky e I.Klebanov, Phys.Rev.Lett.**65** (1990)3088.

[35] Vl.Dotsenko e V.Fatteev,Nucl.Phys. **B251** (1985) 691.

[36] K.Aoki e E.D'Hoker,UCLA-preprint-/91/TEP 32 (1991).

[37] Idem, UCLA-preprint-/91/TEP/33 (1991).

[38] P.Di Francesco e D.Kutasov-Princeton preprint,PUPT-1276.

[39] A.M.Polyakov,Mod.Phys.Lett. **A6** (1991)635.

[40] B.Lian e G.Zuckerman Phys.Lett. **B254** (1991) 417.
P.Bouwknegt e colaboradores-CERN-TH 6162/91-preprint.

[41] I.Klebanov e A.M.Polyakov,Princeton preprint PUPT-1281 (1991).

[42] Vl.Dotsenko e V.Fatteev,Nucl.Phys. **B240**[FS12 (1984)312.]

[43] Vl.Dotsenko,PARIS VI-preprint PAR-LEPTHE 91-52 (1991).

[44] P.Di Francesco e D.Kutasov,Nucl.Phys. **B342** (1990)589.

[45] M.Green e N.Seiberg, Nucl.Phys. **B299** (1988)559.

[46] L.Alvarez-Gaume e Ph.Zhaugg-CERN-preprint TH 6242/91.

[47] L.Alvarez-Gaume e J.L.Mañes,Mod.Phys.Lett. **A6** (1991)2039.
P.Di Francesco,J.Distler e D.Kutasov,Mod.Phys.Lett. **A5** (1990)2135.

[48] M.Bershadsky,V.Knizhnik e A.Teitelman,Phys.Lett.**B151** (1985) 31.

[49] L.Alvarez-Gaume e Ph.Zaugg, Phys.Lett. **B272** (1991)81.

[50] L.Alvarez-Gaume e colaboradores,CERN-preprint-TH 6142/91(1991).

[51] H.Ooguri e C.Vafa, Nucl.Phys. **B361**(1991)469.

[52] I.Antoniadis,C.Bachas e C.Kounnas, Phys.Lett. **B242**(1990)185, vide também ref. 27.