



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JULIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS
EXATAS



Trabalho de Conclusão de Curso
Curso de Graduação em Física

Astronomia dinâmica e aplicação para ressonâncias entre pequenos satélites de Saturno

Ana Julia Mendes Pereira dos Santos

Nelson Callegari Jr.

Rio Claro-SP
2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

Ana Julia Mendes Pereira dos Santos

Astronomia dinâmica e aplicação para ressonâncias entre pequenos satélites de Saturno

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, para obtenção do grau
de Bacharel em Física.

Rio Claro - SP

2024

D724a

dos Santos, Ana Julia Mendes Pereira

Astronomia dinâmica e aplicação para ressonâncias entre pequenos satélites de Saturno / Ana Julia Mendes Pereira dos Santos. -- Rio Claro, 2024

52 p. : tabs., fotos

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Nelson Callegari Jr.

1. Dinâmica Orbital. 2. Pan-Prometheus. 3. Ressonância Orbital. 4. Mimas-Anthe. 5. Saturno. I. Título.

Ana Julia Mendes Pereira dos Santos

Astronomia dinâmica e aplicação para ressonâncias entre pequenos satélites de Saturno

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho, para obtenção do grau de
Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Professor Doutor Nelson Callegari Jr. (orientador)

Professor Doutor Lucas Fuhikawa Santos

Professor Doutor Luiz Antonio Barreiro

Rio Claro, 19 de Novembro de 2024.

Assinatura do(a) aluno(a)

assinatura do(a) orientador(a)

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de expressar minha gratidão ao meu orientador, Nelson Callegari Jr., pela orientação, apoio e incentivo durante todo o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço também ao Demetrio Ceccatto, que sempre esteve disposto a me ajudar a rodar os códigos e fornecer imagens sempre que eu precisei. Sua colaboração foi extremamente valiosa.

Aos meus amigos Lucas, Isabella, Gabriel e Leonardo, cujo apoio acadêmico e amizade foram muito importantes para mim. Também agradeço minha melhor amiga Isabella Rock'n'Roll, meus web-amigos Sophia e Daniel, e minha prima Bruna por estarem sempre ao meu lado e me oferecerem apoio emocional e momentos de leveza.

Não posso deixar de agradecer aos meus pais, pois sem o apoio e a sustentação deles, eu não conseguiria ter chegado até aqui. O amor e a dedicação deles foram essenciais em cada etapa da minha pequena trajetória.

Por fim, agradeço à UNESP por proporcionar um campus excelente, que contribuiu para meu aprendizado e desenvolvimento pessoal.

Resumo

O estudo da ressonância orbital entre corpos celestes é fundamental para compreender a dinâmica dos sistemas planetários. A exploração do sistema de satélites de Saturno, facilitada por missões como a Cassini, revelou diversos novos satélites, destacando a necessidade de examinar suas interações. Entre essas descobertas, certas luas exibem configurações orbitais exóticas influenciadas por suas interações com luas vizinhas e pela forma achatada de Saturno. O par Pan-Prometheus está em uma quase-ressonância orbital 16:15; no entanto, são poucas as investigações aprofundadas dadas na literatura, com base em dinâmica orbital e técnicas modernas de análise sobre esta ressonância, exceto em trabalhos observacionais. Este trabalho tem como propósito, primeiramente, estudar trabalhos sobre ressonâncias orbitais e, em seguida, focar em aplicar estes conhecimentos para pares de pequenos satélites de Saturno. Para alcançar esse objetivo, foram realizadas integrações numéricas das equações de movimento para um sistema de N satélites sob influência dos principais termos do potencial de Saturno e de seu campo gravitacional não central, levando em conta cinco satélites, e incluindo os coeficientes J_2 e J_4 . Os resultados apresentados são uma revisão do trabalho de Callegari e Yokoyama (2020) para o par Mimas-Anthe, e a análise do par em quase-ressonância Pan-Prometheus. Além disso, é apresentada também a integração a longo prazo da órbita de Anthe, exibindo como o fato deste satélite estar preso numa ressonância de Corrotação faz com que sua órbita seja mais estável.

Palavras-chave: *Ressonância orbital, Satélites de Saturno, Mecânica Celeste, Pan-Prometheus, Mimas-Anthe.*

Abstract

The study of orbital resonance among celestial bodies is fundamental for understanding the dynamics of planetary systems. The exploration of Saturn's satellite system, facilitated by missions such as Cassini, has revealed numerous new moons, highlighting the necessity to examine their interactions. Among these discoveries, certain moons exhibit exotic orbital configurations influenced by their interactions with neighboring moons and the oblate shape of Saturn. The Pan-Prometheus pair is in a near-resonance of 16:15; however, there are few in-depth investigations available in the literature based on orbital dynamics and modern analytical techniques regarding this resonance, aside from observational studies. This work aims, first, to review literature on orbital resonances and subsequently to apply this knowledge to pairs of small Saturnian satellites. To achieve this goal, numerical integrations of the equations of motion for an N-body satellite system were performed, considering the main terms of Saturn's potential and its non-central gravitational field, including five satellites and the J2 and J4 coefficients. The results presented are a review of the work by Callegari and Yokoyama (2020) on the Mimas-Anthe pair, along with the analysis of the near-resonance of Pan-Prometheus. Additionally, a long-term integration of Anthe's orbit is presented, demonstrating how its capture in a corotation resonance leads to greater orbital stability.

Keywords: *Orbital resonance, Saturnian satellites, Celestial mechanics, Pan-Prometheus, Mimas-Anthe*

Lista de Figuras

1	Montagem de vistas da espaçonave Cassini da NASA, mostra três das pequenas luas dos anéis de Saturno: Atlas, Daphnis e Pan, na mesma escala. Imagem de Atlas obtida em 12/04/2017, Pan obtida em 07/03/2017 e Daphnis obtida em 16/01/2017. Crédito da imagem: NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute. [18]	14
2	(a) Representação de órbitas elípticas com diferentes valores de excentricidade (e) ao redor de um ponto focal central (em preto). A órbita verde, com $e=0$, exemplifica uma trajetória circular, onde a distância ao foco permanece constante. A órbita azul, com $e=0.5$, demonstra uma elipse moderadamente alongada, indicando variação na distância focal entre o periastro e o apoastro. A órbita roxa, com $e=0.9$, mostra uma elipse altamente excêntrica. (b) Diagrama dos elementos orbitais, o plano orbital (amarelo) cruza um plano de referência (cinza); a interseção é chamada de linha dos nós. O corpo de referência e o ponto vernal definem uma direção de referência e, juntamente com o plano de referência, formam um sistema de referência. Créditos: [13].	15
3	Diagrama com alguns dos elementos orbitais como semi eixo maior (a), semi eixo menor (b) e longitude do pericentro (ϖ). Créditos: [15]. Imagem 2.5, p. 27]	16
4	Diagrama esquemático do problema de três corpos. O diagrama representa três massas m , m' e m_c , as quais interagem gravitacionalmente entre si. O é um ponto de referência fixo no espaço. As setas indicam os vetores de posição relativos entre as massas, como $\vec{R}$, $\vec{R}'$, $\vec{r}$ e $\vec{r}'$. O vetor $\vec{R}$ indica a posição de m em relação a O , enquanto $\vec{R}'$ representa a posição de m' também em relação a O . Os vetores $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ são as posições de m e m' em relação à massa central m_c , que serve como um ponto de referência para o sistema. Créditos: [5]. Imagem 3.1, p. 11]	17
5	Sistema de dois corpos em ressonância 2:1, orbitando um corpo central, em uma configuração estável. Se T_e é o período do corpo externo então: (a) $t = 0$, (b) $t = 1/4 T_e$, (c) $t = 1/2 T_e$, (d) $t = 3/4 T_e$, e (e) $t = T_e$. Créditos: [15]. Imagem 8.1]	24
6	Sistema de dois corpos em ressonância 2:1, orbitando um corpo central, em uma configuração instável. Se T_e é o período do corpo externo então: (a) $t = 0$, (b) $t = 1/4 T_e$, (c) $t = 1/2 T_e$, (d) $t = 3/4 T_e$, e (e) $t = T_e$. Créditos: [15]. Imagem 8.2]	24

7	Diagrama esquemático de encontros ressonantes entre um objeto de pequena massa em uma órbita interna e elíptica e um objeto massivo em uma órbita externa e circular. (a) Encontros em quatro pontos diferentes de conjunção, identificados como A, B, C e D. A linha pontilhada denota o eixo maior do objeto interno. As setas indicam as direções para as quais cada conjunção deve estar se movendo; a conjunção estável ocorre no pericentro da órbita. (b) Diagrama apenas da conjunção A mostrando as forças radiais (r) e tangenciais (t) agindo sobre o objeto interno imediatamente antes (F_r e F_t) e após (F'_r e F'_t) a conjunção. Créditos: [15]. Imagem 8.5]	27
8	Imagem capturada pela sonda Cassini em 29 de outubro de 2004 dos anéis de Saturno, desde o anel F externo até as estruturas internas do anel D. Créditos: NASA/JPL/Space Science Institute. [17]	28
9	(a) IPS para o semi-eixo maior do satélite Anthe, espectro construído com base em amplitudes superiores a 5% da maior amplitude obtida para cada espectro de potência individual. Cada órbita individual foi integrada por 172,25 anos com intervalo de 0,06 dia [4]. Imagem original de Callegari e Yokoyama (2020) [4]. (b) Mesmo gráfico que a figura 12a porém com a linha verde tracejada indicando o valor do semi-eixo maior de Anthe ($a=198130,5$ km).	29
10	(a) Mapa Dinâmico para Anthe (Fig. 7 de Callegari e Yokoyama (2020) [4]). As regiões representadas por C indicam a região para a ressonância de corotação e L a região para a ressonância Lindblad. Imagem original de Callegari e Yokoyama (2020) [4]. (b) Mapa Dinâmico do satélite Pan, a estrela demonstra a posição atual do satélite, e C o local onde pode ser observada ressonância 16:15 com Prometheus. Imagem original cedida por Ceccatto [6]	30
11	Imagem de baixa resolução obtida pela sonda Voyager 2 do anel F de Saturno, com Pandora e Prometheus orbitando em cada lado, mostrando exemplos de satélites pastores de anéis estreitos. Créditos: NASA/JPL. [16]. Fig. 10.17]	31
12	A imagem capturada pela sonda Cassini mostra a região do Anel A de Saturno, conhecida como Falha de Encke. O movimento da lua Pan através dessa lacuna induz ondas na borda do anel. Créditos: NASA/JPL/Space Science Institute. [16]	32

13	Imagem capturada pela sonda Cassini em 3 de julho de 2008 mostra o arco de material orbitando junto com Anthe. A lua é visível movendo-se para baixo e para a direita na imagem. A maior parte do material do arco está à frente de Anthe em sua órbita, mas sua posição relativa ao arco oscila com o tempo devido a ressonância com Mimas. Créditos: NASA/JPL/Space Science Institute.[19]	33
14	Imagem de Mimas e Anthe proveniente de "Astrometry and dynamics of Anthe (S/2007 S 4), a new satellite of Saturn"[7], foi registrada em 30 de maio de 2007 às 04:02:02.511, com uma duração de exposição de 15s. . . .	34
15	Representação de Saturno, seus anéis e as órbitas de seus satélites para na data 26 de Agosto de 2024. Figura elaborada no site <i>Horizons</i> . (Acesso em 26/08/2024)	35
16	Representação de Saturno, seus anéis e as órbitas de seus satélites para na data 03 de Novembro de 2024. Figura elaborada no site <i>Horizons</i> . (Acesso em 03/11/2024)	36
17	Variação temporal dos ângulos críticos expressos na Tabela 4, ângulos ϕ_1 , ϕ_2 . Para valores iniciais de $a=0,0027$ e $e=198130$	37
18	Variação temporal dos ângulos críticos expressos na Tabela 4, ângulos ϕ_3 , ϕ_4 , ϕ_5 , ϕ_6 , ϕ_7 , ϕ_8 , ϕ_9 , ϕ_{10} , ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{13} e ϕ_{14} respectivamente.	38
19	(a) Mapa Dinâmico de Anthe, similar à Fig.10 porém com os pontos identificando o local de análise. Azul: $e=0,024$ $a=198155$, Rosa: $e=0,04$ $a=198145$, Vermelho $e=0,027$ $a=198155$ (b) Variação temporal dos ângulos ϕ_1 e ϕ_2 para os diferentes pontos mostrados no mapa a esquerda.	39
20	Evolução temporal dos elementos orbitais (a)Excentricidade (b)Semi-eixo maior (c)Argumento do pericentro e (d)Longitude do nodo ascendente . . .	39
21	Variação temporal dos ângulos críticos expressos na Tabela 4, ângulos ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , ϕ_5 , ϕ_6 , ϕ_7 , ϕ_8 , ϕ_9 , ϕ_{10} , ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{13} e ϕ_{14} respectivamente. Para valores de $a=134263,6$ Km; $e_0=0,005053$	40
22	Variação temporal dos ângulos críticos expressos na Tabela 4, ângulos ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , ϕ_5 , ϕ_6 , ϕ_7 , ϕ_8 , ϕ_9 , ϕ_{10} , ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{13} e ϕ_{14} respectivamente. Para valores de $a=134230,5$ Km; $e_0=0,005053$	41
23	Evolução temporal durante 10 mil dias do semi-eixo maior de Pan para os valores iniciais $a=134263,6$ e $e=0,00503$	41
24	Evolução temporal durante 10 mil dias da excentricidade de Pan para os valores iniciais $a=134263,6$ e $e=0,00503$	42
25	Evolução temporal durante 60 mil dias da excentricidade de Pan para os valores iniciais $a=134263,6$ e $e=0,00503$	42
26	Mapa Dinâmico com o ponto verde sendo $e=0,02$ e $a=198125$, e o ponto roxo sendo $e=0,02$ e $a=198150$	43

27	Evolução temporal do semi-eixo maior e da excentricidade para o ponto de cor verde no mapa da Fig.26 ao longo de 20 milhões de dias.	43
28	Evolução temporal do semi-eixo maior e da excentricidade para o ponto de cor roxa no mapa da Fig.26 ao longo de 20 milhões de dias.	44
29	Evolução temporal do semi-eixo maior e da excentricidade para o ponto de cor roxa no mapa da Fig.26 ao longo de 20 milhões de dias.	44

Lista de Tabelas

1	Propriedades físicas de alguns pequenos satélites do sistema de Saturno [24]	13
2	Tabela com os valores de harmônicos sazonais (J_2 e J_4) de Mercúrio, Vênus, Terra e Marte. [15].	22
3	Tabela com os valores de harmônicos sazonais (J_2 e J_4) de Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. [15].	22
4	Expansão do argumento da função perturbadora para uma ressonância de primeira ordem, sendo o subíndice i para o satélite interno e e para o satélite externo.	26
5	Constantes físicas de Saturno, a massa e o raio foram adquiridos pela plataforma <i>Horizons</i> e os harmônicos sazonais em [12, Jacobson et al. (2006)]	35
6	Elementos osculadores para os satélites Pan, Prometheus, Atlas, Pandora e Janus no dia 01/01/2000, valores obtidos a partir do <i>Horizons</i> , exceto as massas que foram obtidas em [24, Thomas e Helfenstein (2020)].	35
7	Elementos osculadores para os satélites Anthe, Mimas, Enceladus e Tethys no dia 01/01/2016, valores obtidos a partir do <i>Horizons</i>	36
8	Elementos osculadores para os satélites Dione, Rhea e Titan no dia 01/01/2016, valores obtidos a partir do <i>Horizons</i>	36

Sumário

1	Introdução	13
2	Método de Pesquisa	15
2.1	Elementos osculadores	15
2.2	Problema Geral de 3 corpos	17
2.3	Abordagem Hamiltoniana	18
2.4	Função Perturbadora	20
2.5	Equações de movimento	23
2.6	Ressonância	23
2.7	Espectro Individual de Potências	28
3	Resultados	31
3.1	Par Pan-Prometheus	31
3.2	Par Mimas-Anthe	32
3.3	Ângulos Críticos	36
3.4	Estabilidade	42
4	Conclusão	45
	Referências	46
A	Transformada Rápida de Fourier	48

1 Introdução

O sistema de satélites de Saturno é vasto e diversificado, com corpos cujos raios variam desde pouco menos de 5 km até cerca de 2500 km. A missão Cassini, lançada pela NASA no ano de 1997, chegou à órbita de Saturno em 2004 e desempenhou um papel fundamental na exploração deste sistema, sendo essencial para a identificação e análise de pequenos satélites de Saturno, como os da Fig. 1. Equipado com câmeras de alta sensibilidade, o Cassini Imaging Subsystem (ISS) [22] superou as capacidades das sondas Voyager, permitindo a descoberta dos menores satélites desse sistema observados até então.

Entre as descobertas, destacam-se satélites como Daphnis, que orbita dentro da divisão Keeler, Prometheus e Pandora, que atuam como pastores do anel F, Pan, que também orbita dentro de uma das falhas do anel, Atlas, Janus, Epimeteu, Aegaeon, Methone, Anthe, Pallene, entre outros. Todos esses satélites sofrem algum tipo de perturbação devido ao campo gravitacional não central de Saturno, além também da influência dos satélites maiores a seu redor, e suas órbitas exibem variações quase periódicas, influenciadas por estas interações mútuas.

As interações entre os satélites têm como consequência, em alguns casos, ressonâncias orbitais [3] [4] que ocorrem quando há uma relação de comensurabilidade entre os períodos orbitais de dois ou mais satélites. Além das ressonâncias, outros fenômenos como a libração e as forças de maré são importantes para a dinâmica dos satélites. A libração refere-se a oscilações na orientação ou forma da órbita de um satélite, geralmente causadas por interações gravitacionais, enquanto as forças de maré são causadas pelas variações na atração gravitacional de Saturno sobre diferentes partes de um satélite, resultando em aquecimento interno e possíveis deformações na estrutura do satélite. As propriedades físicas de alguns destes satélites são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1: Propriedades físicas de alguns pequenos satélites do sistema de Saturno [24]

Satélite	Massa (g)	Raio médio (km)	$\rho(kmm^{-3})$
Pan	$0.430e+19 \pm 0.22e+18$	13.7 ± 0.3	400 ± 31
Daphnis	$0.680e+17 \pm 0.17e+17$	3.9 ± 0.5	276 ± 144
Atlas	$0.575e+19 \pm 0.11e+18$	14.9 ± 0.2	412 ± 19
Prometheus	$0.150e+21 \pm 0.90e+18$	42.8 ± 0.7	460 ± 21
Epimetheus	$0.526e+21 \pm 0.14e+18$	58.6 ± 0.3	625 ± 8
Janus	$0.190e+22 \pm 0.45e+18$	89.0 ± 0.5	642 ± 10
Aegaeon	$0.782e+14 \pm 0.30e+14$	0.33 ± 0.06	539 ± 140
Methone	$0.392e+16 \pm 0.10e+16$	1.45 ± 0.03	307 ± 30

Entre os pequenos satélites de Saturno, Pan e Prometeu desempenham papéis importantes na estrutura e dinâmica dos anéis do planeta. Pan foi descoberto em 1990 e orbita dentro da Divisão de Encke no anel A de Saturno [23]. Com um raio de cerca de 14 km, Pan é pequeno e sua órbita é perturbada por satélites maiores como Prometheus, um saté-

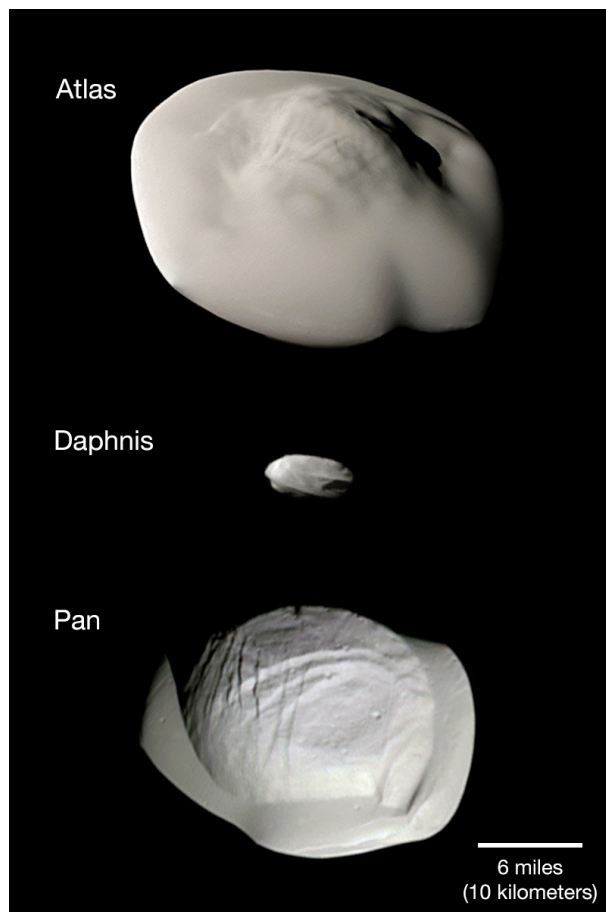


Figura 1: Montagem de vistas da espaçonave Cassini da NASA, mostra três das pequenas luas dos anéis de Saturno: Atlas, Daphnis e Pan, na mesma escala. Imagem de Atlas obtida em 12/04/2017, Pan obtida em 07/03/2017 e Daphnis obtida em 16/01/2017. Crédito da imagem: NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute. [18]

lite com 42 km de raio e pastor do anel F de Saturno, sendo satélites pastores aqueles que confinam estes anéis através de interações gravitacionais. As interações gravitacionais de Prometeu com o anel F criam estruturas complexas, como torções e aglomerados, que são observadas em imagens detalhadas capturadas pela missão Cassini. A hipótese de que Pan e Prometeu possam estar em ressonância é apoiada por observações que mostram variações periódicas em suas órbitas. Sendo ressonância uma perturbação que contribuiu com variações periódicas no semieixo maior dos corpos.

O objetivo deste trabalho será estudar a dinâmica orbital do par Pan-Prometheus e do par Mimas-Anthe, sendo na seção 2 apresentado o desenvolvimento teórico das equações de movimento, abrangendo os princípios fundamentais da mecânica orbital aplicados ao estudo de satélites. Além disso, serão descritas as ferramentas numéricas utilizadas, a seção 3 fornecerá uma análise detalhada dos satélites que serão estudados assim como os resultados encontrados com os métodos acima descritos, com uma interpretação dos dados e a verificação da consistência dos modelos utilizados, e por fim a conclusão com a caracterização das órbitas estudadas e possível ressonância observada.

2 Método de Pesquisa

2.1 Elementos osculadores

Kepler publicou suas duas primeiras leis a respeito do movimento dos corpos celestes no ano de 1609 [1], desde então muitos avanços aconteceram, dentre eles a forma de representarmos a órbita de objetos celestes.

Existem parâmetros essenciais para que uma órbita seja traçada corretamente, esses parâmetros são chamados de elementos orbitais. Em três dimensões, são necessários 6 elementos orbitais para a descrição dessa órbita, são eles:

- a - semi eixo maior: Metade do eixo maior de uma elipse [3];
- e - excentricidade: Formato da elipse [16a], $0 \leq e < 1$ sendo o mais próximo de 1 uma órbita mais alongada;
- i - inclinação: Inclinação vertical da elipse em relação ao plano de referência;

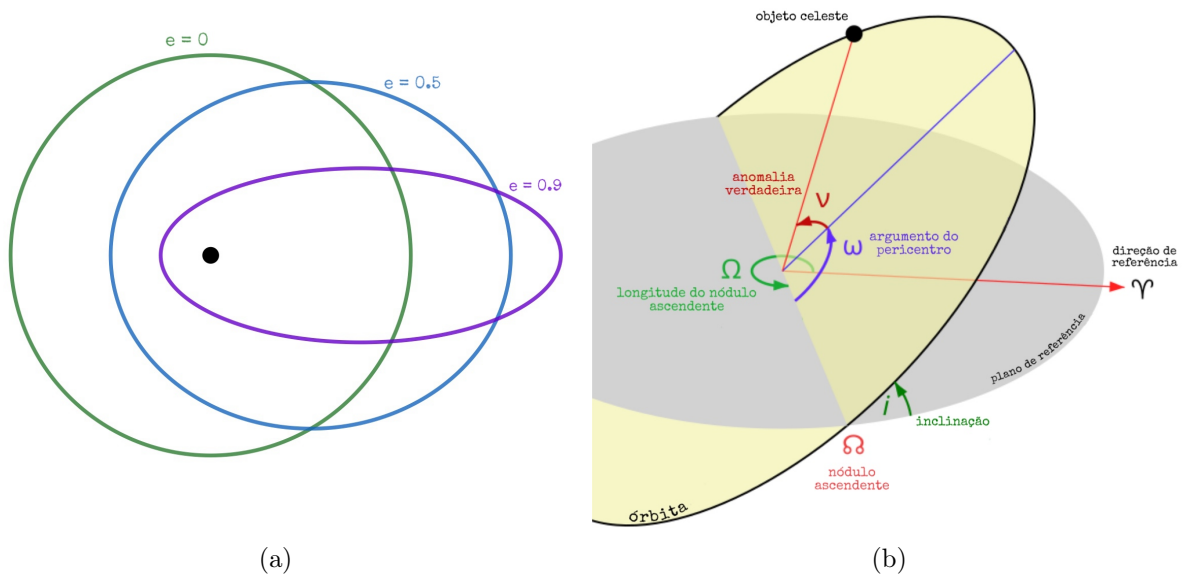


Figura 2: **(a)** Representação de órbitas elípticas com diferentes valores de excentricidade (e) ao redor de um ponto focal central (em preto). A órbita verde, com $e=0$, exemplifica uma trajetória circular, onde a distância ao foco permanece constante. A órbita azul, com $e=0.5$, demonstra uma elipse moderadamente alongada, indicando variação na distância focal entre o periastro e o apoastro. A órbita roxa, com $e=0.9$, mostra uma elipse altamente excêntrica. **(b)** Diagrama dos elementos orbitais, o plano orbital (amarelo) cruza um plano de referência (cinza); a interseção é chamada de linha dos nós. O corpo de referência e o ponto vernal definem uma direção de referência e, juntamente com o plano de referência, formam um sistema de referência. Créditos: [13].

¹Johannes Kepler (1571–1630) foi um astrônomo e matemático alemão, conhecido por formular as três leis do movimento planetário que descrevem órbitas de corpos celestes: (1) órbitas são elipses com o corpo de maior massa em um dos focos (por exemplo, a órbita da Terra é elíptica com o Sol em um dos focos); (2) um corpo orbitando o outro percorre áreas iguais em tempos iguais; e (3) o quadrado do período orbital de um corpo é proporcional ao cubo da distância média entre ele e o corpo central.

- Ω - longitude do nó ascendente: Orienta horizontalmente o nó ascendente da elipse (onde a órbita cruza o plano de referência de sul para norte em relação ao ponto vernal do sistema de referência);
- ω - argumento do pericentro: Define a orientação da elipse no plano orbital, sendo um ângulo medido desde o nó ascendente até o pericentro;
- ν - anomalia verdadeira: Define a posição do corpo orbitante ao longo da elipse em um momento específico, medido a partir do pericentro da órbita.

Podemos também combinar alguns desses parâmetros, nos fornecendo outros:

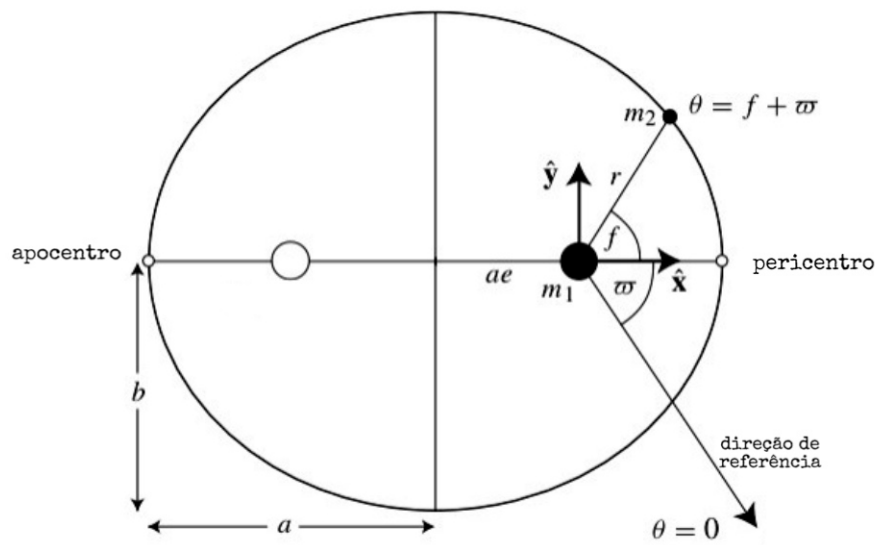


Figura 3: Diagrama com alguns dos elementos orbitais como semi eixo maior (a), semi eixo menor (b) e longitude do pericentro (ϖ). Créditos: [15] Imagem 2.5, p. 27]

- M - anomalia média - $M(t) = \frac{2\pi(t-T)}{P}$ (neste caso o corpo está se movendo a uma velocidade constante de $2\pi/P$)
- ϖ - longitude do pericentro- $\varpi = \Omega + \omega$
- θ - argumento da latitude - $\theta = \omega + \nu$
- f - longitude verdadeira - $f = \Omega + \theta = \Omega + \omega + \nu = \varpi + \nu$
- λ - longitude média - $\lambda = \Omega + \omega + M = \varpi + M$

Corpos celestes estão em órbita devido principalmente à interação gravitacional entre eles e o corpo que orbitam; justamente devido a essas interações, os elementos orbitais são perturbados.

2.2 Problema Geral de 3 corpos

Tratando de um problema gravitacional entre 3 corpos, pode-se exemplificar o problema com o diagrama (Fig. 4), onde $\vec{R}_c$, $\vec{R}$ e $\vec{R}'$ são os vetores posição, e O é a origem inercial do sistema. m_c , m e m' são a massa central, massa secundária interna e massa secundária externa, respectivamente. Podemos ainda traçar os vetores $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ das massas secundárias com relação à massa central.

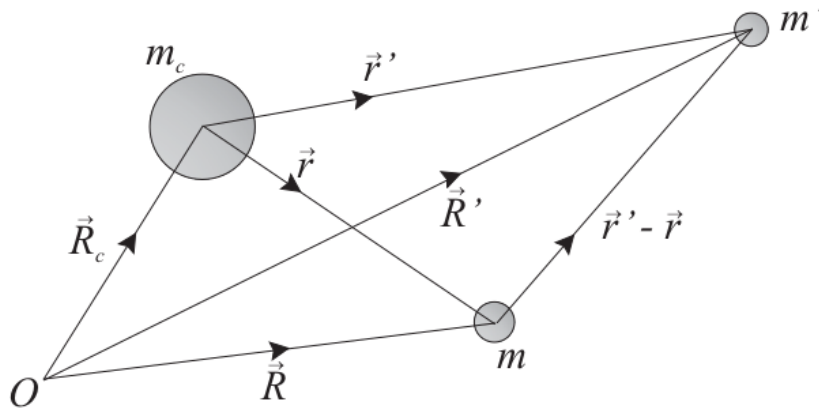


Figura 4: Diagrama esquemático do problema de três corpos. O diagrama representa três massas m , m' e m_c , as quais interagem gravitacionalmente entre si. O é um ponto de referência fixo no espaço. As setas indicam os vetores de posição relativos entre as massas, como $\vec{R}$, $\vec{R}'$, $\vec{r}$ e $\vec{r}'$. O vetor $\vec{R}$ indica a posição de m em relação a O , enquanto $\vec{R}'$ representa a posição de m' também em relação a O . Os vetores $\vec{r}$ e $\vec{r}'$ são as posições de m e m' em relação à massa central m_c , que serve como um ponto de referência para o sistema. Créditos: [5, Imagem 3.1, p. 11]

Das leis de movimento e de gravitação de Newton, obtemos as equações de movimento, destas três massas em um sistema de referência inercial:

$$m_c \ddot{\vec{R}}_c = Gm_c m \frac{\vec{r}}{r^3} + Gm_c m' \frac{\vec{r}'}{r'^3} \quad (1)$$

$$m \ddot{\vec{R}} = Gmm' \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} - Gmm_c \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2)$$

$$m' \ddot{\vec{R}}' = Gm'm \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - Gm'm_c \frac{\vec{r}'}{r'^3} \quad (3)$$

sendo $G = 6,67384 \pm 0,00080 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ a constante gravitacional.

Além disso, as acelerações das massas secundárias relativas à primária são dadas por:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} - \ddot{\vec{R}}_c \quad (4)$$

$$\ddot{\vec{r}'} = \ddot{\vec{R}}' - \ddot{\vec{R}}_c \quad (5)$$

combinando as equações acima, temos as equações de movimento relativo:

$$\ddot{\vec{r}} + G(m_c + m) \frac{\vec{r}}{r^3} = Gm' \left(\frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right) \quad (6)$$

$$\ddot{\vec{r}'} + G(m_c + m') \frac{\vec{r}'}{r'^3} = Gm \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} - \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \quad (7)$$

2.3 Abordagem Hamiltoniana

Uma forma mais intuitiva para a descrição de órbitas faz uso da mecânica Hamiltoniana.

Na notação Lagrangiana é preciso sabermos os graus de liberdade de um sistema e sua função é definida como $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ com velocidade $\dot{\vec{q}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{q}$. Sendo $L = T - V =$ *energia cinética - energia potencial*. Com essa definição, podemos escrever a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (8)$$

adicionando o termo do momento, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, (8) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt} p = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (9)$$

Vamos eliminar as velocidades generalizadas $\dot{\vec{q}}$ utilizando uma transformação de Legendre para reformular $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ sem a presença das velocidades generalizadas. O resultado dessa transformação é a função Hamiltoniana:

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \quad (10)$$

na qual todas as ocorrências de $\dot{\vec{q}}$ são substituídas por $\vec{q}$ e $\vec{p}$.

As equações de movimento de Hamilton são definidas por:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (11)$$

Aplicando a mecânica Hamiltoniana ao sistema de n-corpos, podemos interpretá-lo como um problema de $(N + 1)$ corpos, temos que o Hamiltoniano deste é a soma de sua energia cinética e potencial:

$$H = T + V = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N m_i \dot{\vec{R}}_i^2 - G \sum_{i=0}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (12)$$

m_i e m_j são as massas dos corpos, $\Delta_{ij} = |\vec{R}_i - \vec{R}_j|$ o vetor posição, e G a constante gravitacional. Para reduzir essa equação para $3n$ graus de liberdade, pode-se utilizar a

redução de Poincaré [9].

A redução de Poincaré foi utilizada neste contexto para simplificar o sistema dinâmico de n-corpos e reduzir o número de variáveis necessárias para descrever o problema.

Para esta redução, as variáveis de posição são $\vec{R}_i - \vec{R}_0$ e o momento será o momento linear $m_i \dot{\vec{R}}_i$. Este sistema é de N+1 corpos e terá dois pares de variáveis definidas como:

$$\vec{r}_i = R_i - R_0 \quad \vec{p}_i = m_i \dot{\vec{R}}_i \quad r_0 = R_0 \quad \vec{p}_0 = \sum_{i=1}^N m_i \quad (13)$$

com (i=1, 2, ..., N) e sendo $\vec{r}_i$ e $\vec{p}_i$ variáveis canônicas [2].

Podemos reescrever a Hamiltoniana da eq. (12) como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{m_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{m_0} + \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{m_0} - \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{p}_i}{m_0} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j}{m_0} \quad (14)$$

e

$$V = -G \sum_{i=1}^N \frac{m_0 m_i}{r_i} - G \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \quad (15)$$

com $p_i = |\vec{p}_i|$ e $r_i = |\vec{r}_i| = |\Delta_{0i}|$

Além disso, podemos ignorar a variável $\vec{r}_0$, consequentemente $\vec{p}_0$ é uma constante que será considerada igual a zero. As equações resultantes são:

$$\dot{\vec{r}}_0 = 0 \quad \dot{\vec{p}}_0 = \text{grad}_{\vec{p}_0} H = \frac{\vec{p}_0}{m_0} - \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i}{m_0} \quad (16)$$

e

$$H_{final} = H - \frac{1}{2} \frac{p_0^2}{m_0} + \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{p}_i}{m_0} \quad (17)$$

Então, o resultado final da Hamiltoniana reduzida é: $H = H_0 + H_1$, onde:

$$H_0 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2\mu_i \beta_i} - \frac{\mu_i \beta_i}{r_i} \right) \quad (18)$$

$$H_1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \left(-\frac{G m_i m_j}{\Delta_{ij}} + \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j}{m_0} \right) \quad (19)$$

e

$$\mu_i = G(m_0 + m_i) \quad \text{e} \quad \beta_i = \frac{m_0 m_i}{m_0 + m_i}. \quad (20)$$

sendo m_0 a massa do corpo central.

²Variáveis canônicas são pares de variáveis (q_i, p_i) na mecânica Hamiltoniana, onde q_i são coordenadas generalizadas e p_i seus momentos conjugados. Esses pares satisfazem as relações de Poisson, essenciais para descrever a dinâmica do sistema.

2.4 Função Perturbadora

Relembrando as equações [6](#) e [7](#) podemos reescrevê-las como gradientes de funções escalares:

$$\ddot{\vec{r}} = \nabla(\mathcal{V} + \mathcal{R}); \quad \ddot{\vec{r}'} = \nabla'(\mathcal{V}' + \mathcal{R}') \quad (21)$$

onde

$$\mathcal{V} = G \frac{m_c + m}{r}; \quad \mathcal{V}' = G \frac{m_c + m'}{r'} \quad (22)$$

Já os termos $\mathcal{R}$ definem a **função perturbadora**:

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} - \mu' \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \quad (23)$$

para a massa secundária interna, em que $\mu = Gm$ e $n^2 a^3 = g(m_c + m)$.

$$\mathcal{R}' = \frac{\mu}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \mu \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \quad (24)$$

para a massa secundária externa, em que $\mu' = Gm'$ e $n'^2 a'^3 = g(m_c + m')$.

Podemos expandir essas equações utilizando Polinômios de Legendre [5](#), sendo:

$$\mathcal{R} = \frac{\mu'}{r'} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{r^l}{r'^l} P_l(\cos\psi) \quad (25)$$

$$\mathcal{R} = \frac{\mu}{r'} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{r^l}{r'^l} P_l(\cos\psi) + \mu \frac{r}{r'^2} \cos\psi - \mu \frac{r'}{r^2} \cos\psi + \frac{\mu}{r'} \quad (26)$$

Para determinar a forma explícita das expansões das funções perturbadoras, vamos considerar o caso onde as órbitas das duas massas m e m' estão no mesmo plano, podemos escrever então o ângulo ψ como a diferença entre as longitudes verdadeiras.

$$\psi = (\nu' + \varpi') - (\nu + \varpi) \quad (27)$$

A expansão detalhada do $\cos(\psi)$ pode ser encontrada em [5](#) Seção 3.2]

Definindo uma constante α como a razão entre os semi-eixos maiores (a) das massas m e m' , ou seja,

$$\alpha = \frac{a}{a'} < 1 \quad (28)$$

a expressão da função perturbadora é:

$$\mathcal{R} = \frac{\mu}{r'} \sum_{l=2}^{\infty} \alpha^l \left(\frac{a'}{r'}\right)^{l+1} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\psi) \quad (29)$$

Considerando os termos de $l=2$, e expandindo $\frac{r}{a}$ e $\frac{a'}{r'}$ conforme [15, Seção 2.5]:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 \approx 1 - 2e \cos M + \left(\frac{1}{2}\right)e^2(3 - 2\cos M) \quad (30)$$

$$\left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \approx 1 - 3e' \cos M' + \left(\frac{3}{2}\right)e'^2(1 - 3\cos 2M') \quad (31)$$

Temos então a forma expandida da função perturbadora:

$$\mathcal{R} = \frac{\mu' \alpha^2}{2a'} (-1 + 3\cos^2 \psi) \left(1 - 2e \cdot \cos M + \frac{1}{2}e^2(3 - 2\cos M)\right)^2 \quad (32)$$

$$\times \left(1 + \frac{3}{2}e'^2(1 + 6\cos M) + 3e' \cos M'\right)^3$$

$$\mathcal{R}' = \frac{\mu' \alpha^2}{2a'} (-1 + 3\cos^2 \psi) \left(1 - 2e \cos M + \frac{1}{2}e^2(3 - 2\cos M)\right)^2 \quad (33)$$

$$\times \left(1 + \frac{3}{2}e'^2(1 + 6\cos M) + 3e' \cos M'\right)^3 + \mu \frac{r}{r'^2} \cos \psi - \mu \frac{r'}{r^2} \cos \psi + \frac{\mu}{r'}$$

Outras formas de expansão da função perturbadora são exemplificadas em [5, Seções 3.3, 3.4 e 3.5] e [15, Cap. 6].

As equações de Lagrange para a variação dos elementos orbitais levando em consideração a função perturbadora [15, Seção 6.8] são:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \quad (34)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \quad (35)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}(1 - \sqrt{1-e^2})}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \quad (36)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \quad (37)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \quad (38)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\tan \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \right) - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \quad (39)$$

Efeito do achatamento de Saturno

Foi desenvolvido nas subseções anteriores a função perturbadora experimentada por uma massa em órbita devido ao efeito gravitacional de outro corpo. Pode-se pensar nela como os termos no potencial, portanto as equações (34) - (39) são válidas também para casos em que a função perturbadora resulta de um objeto central não esférico, ou seja, ligeiramente achatado.

Quando tratam-se de planetas reais, estes não são perfeitamente esféricos, logo, qualquer análise do movimento de satélites planetários precisa considerar os termos que descrevem a distribuição de massa não pontual no potencial gravitacional do planeta. A

partir da teoria do potencial, pode-se mostrar que o potencial gravitacional que o satélite experimenta devido este planeta pode ser expresso como:

$$V = -\frac{Gm}{r} \left[1 - \sum_{i=2}^{\infty} J_i (R_p/r)^i P_i(\sin\alpha) \right] \quad (40)$$

sendo (r, ϕ, α) distância radial, longitude e latitude respectivamente, as coordenadas do satélite cujo ponto central é o centro do planeta, e m a massa do planeta e R_p o raio dele.

Além disso, na equação temos os Polinômios de Legendre $(P_i(\sin\alpha))$, e coeficientes adimensionais (J_i) que caracterizam o tamanho do componente não esférico do potencial, estes são chamados **harmônicos sazonais** se $i = \text{par}$.

Tabela 2: Tabela com os valores de harmônicos sazonais (J_2 e J_4) de Mercúrio, Vênus, Terra e Marte. [15].

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte
$J_2(\cdot 10^{-6})$	60	4	1083	1960
$J_4(\cdot 10^{-6})$		2	-2	-19

Tabela 3: Tabela com os valores de harmônicos sazonais (J_2 e J_4) de Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. [15].

	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
$J_2(\cdot 10^{-6})$	14736	16298	3343	3411
$J_4(\cdot 10^{-6})$	-587	-915	-29	-35

Para simplificar o problema, assumimos que todos os coeficientes J_3, J_5 , etc são desprezíveis pois são valores pequenos. A função perturbadora levando em consideração os harmônicos sazonais [15, Seção 6.11] é dada por:

$$\mathcal{R} = -\frac{Gm}{r} \left[J_2 \left(\frac{R_p}{r} \right)^2 P_2(\sin\alpha) + J_4 \left(\frac{R_p}{r} \right)^4 P_4(\sin\alpha) \right] \quad (41)$$

onde:

$$P_2(\sin\alpha) = \left(\frac{1}{2} \right) (3\sin^2\alpha - 1) \quad (42)$$

$$P_4(\sin\alpha) = \left(\frac{1}{8} \right) (35\sin^4\alpha - 30\sin^2\alpha + 3) \quad (43)$$

Essa distribuição de massa não esférica exemplificada matematicamente pelos harmônicos sazonais afeta os elementos orbitais da órbita de um corpo celeste, alguns dos efeitos mais comuns são a precessão do nó ascendente e precessão do argumento do pericentro:

$$\dot{\Omega} = -n \left[\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{27}{8} J_2^2 \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 - \frac{15}{4} J_4 \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 \right] \quad (44)$$

$$\dot{\omega} = +n \left[\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_p}{a} \right)^2 - \frac{9}{8} J_2^2 \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 - \frac{15}{4} J_4 \left(\frac{R_p}{a} \right)^4 \right] \quad (45)$$

Sendo n o movimento médio (*mean motion*), este representa a taxa média angular com que um corpo orbita outro corpo central em uma órbita elíptica e é definido como $n = \sqrt{\frac{Gm}{a^3}}$ ou $n = \frac{2\pi}{T}$.

2.5 Equações de movimento

Consideraremos os desenvolvimentos da Seção 2.3 e 2.4 para definirmos as equações exatas de movimento. Para cada um dos satélites, as equações de movimento são [3]:

$$\frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r_i}; \quad i = 1, \dots, N \quad (46)$$

sendo $(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ calculados a partir dos elementos orbitais, e para o cálculo do valor absoluto de $\vec{p}_i$ calcula-se a velocidade inicial $\frac{d\vec{r}_i}{dt}$, resolvendo três conjuntos $N \times N$ de equações lineares para p_{ix}, p_{iy} e p_{iz} , obtém-se $\vec{p}_i$.

Agora olhando para o movimento de N satélites orbitando um planeta de massa m_0 um pouco achatado, a Hamiltoniana do sistema será dada por:

$$H = H_0 + H_1 + H_j \quad (47)$$

Na equação acima H_0 representa o movimento Kepleriano de cada satélite, H_1 as interações entre os satélites e H_j a perturbação na órbita devido o achatamento do corpo central.

$$H_0 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\vec{p}_i|^2}{2\beta_i} - \frac{\mu_i \beta_i}{|\vec{r}_i|} \right) \quad (48)$$

$$H_1 = \sum_{0 < i < j} \left(-\frac{Gm_i m_j}{\Delta_{ij}} + \frac{\vec{p}_i \vec{p}_j}{m_0} \right) \quad (49)$$

$$H_j = -\sum_{i=1}^N \frac{\mu_i \beta_i}{|\vec{r}_i|} \left[-\sum_{l=2}^{\infty} J_l \left(\frac{r_p}{|\vec{r}_i|} \right)^l P_l(\sin(\alpha_i)) \right] \quad (50)$$

onde β_i e μ_i foram definidos na equação [20].

2.6 Ressonância

A ressonância orbital é um fenômeno de grande relevância na dinâmica de sistemas planetários, sendo observada entre planetas ou satélites. Esse fenômeno ocorre quando corpos celestes possuem uma razão entre seus períodos que resulta em interações gravitacionais periódicas que podem afetar a estabilidade e a configuração do sistema ao longo do tempo.

Os períodos em ressonância podem ser de rotação e orbital, como no caso do acoplamento spin-órbita, por exemplo, do sistema Lua-Terra onde a Lua tem um período

orbital igual ao seu período de rotação, resultando na Lua mantendo sempre uma face voltada para a Terra. As ressonâncias também podem ocorrer entre períodos orbitais de dois ou mais corpos, como no acoplamento órbita-órbita. No sistema de Saturno, essas ressonâncias desempenham um papel crucial na distribuição das órbitas e nas interações gravitacionais entre os satélites e o planeta.

Para compreender a dinâmica desses pequenos satélites, é fundamental analisar as ressonâncias orbitais que ocorrem entre eles. Considerando dois corpos em uma ressonância 2:1 ao redor de um planeta como Saturno, em que todos os movimentos estão no mesmo plano orbital que o planeta Fig.(5).

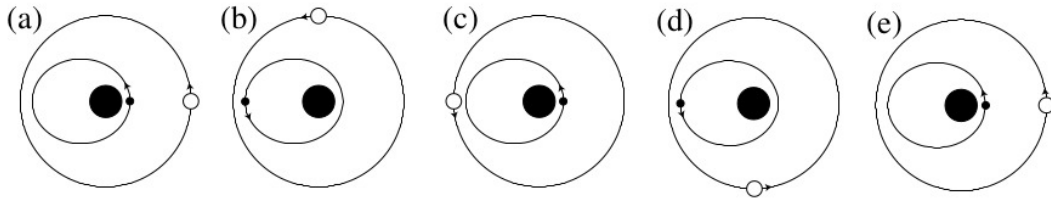


Figura 5: Sistema de dois corpos em ressonância 2:1, orbitando um corpo central, em uma configuração estável. Se T_e é o período do corpo externo então: (a) $t = 0$, (b) $t = 1/4 T_e$, (c) $t = 1/2 T_e$, (d) $t = 3/4 T_e$, e (e) $t = T_e$. Créditos: [15, Imagem 8.1]

Neste caso temos a configuração desse sistema em momentos t diferentes, sendo $t=0$ (Fig5a) com o satélite interno (círculo preto) em seu pericentro, $t=1/4$ (Fig5b) o interno está em apocentro e o externo completou $1/4$ de sua órbita e assim por diante, como mostrado nas posições da figura.

Para este sistema o corpo interno realiza dois períodos para cada um período do externo, além disso é possível notar que os corpos não se aproximam realmente, embora a aproximação mais próxima entre as duas órbitas ocorra no apocentro do corpo interno ($t=1/4$) o externo não está realmente próximo a ele, portanto, embora haja potencial para aproximações e grandes perturbações, estas são evitadas pelo mecanismo de ressonância, sendo este um exemplo de configuração estável.

Se o sistema começar em $t=0$ como na figura (6) em conjuntura no apocentro do corpo interno, assim teríamos uma configuração instável devido aos encontros muito próximos entre os corpos.

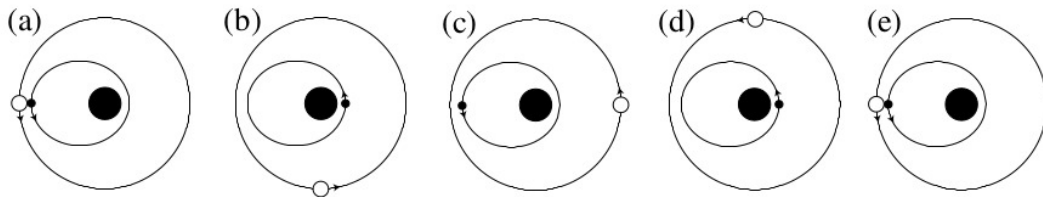


Figura 6: Sistema de dois corpos em ressonância 2:1, orbitando um corpo central, em uma configuração instável. Se T_e é o período do corpo externo então: (a) $t = 0$, (b) $t = 1/4 T_e$, (c) $t = 1/2 T_e$, (d) $t = 3/4 T_e$, e (e) $t = T_e$. Créditos: [15, Imagem 8.2]

Para um caso geral, podemos examinar a geometria da ressonância com:

$$\frac{n'}{n} = \frac{p}{p+q} \quad (51)$$

em que n e n' são os movimentos médios do satélite interior e exterior, respectivamente, orbitando um planeta central em uma órbita circular e coplanar, e p e q são números inteiros.

Se os dois satélites estão em conjunção em $t=0$, a próxima aproximação irá acontecer em:

$$nt - n't = 2\pi \quad (52)$$

com o período de aproximações sucessivas sendo:

$$T_{con} = \frac{2\pi}{n - n'} \quad (53)$$

como $p(n - n') = qn'$:

$$T_{con} = \frac{p}{q} \frac{2\pi}{n'} = \frac{p}{q} T' = \frac{p+q}{q} T \quad (54)$$

$$qT_{con} = pT' = (p+q)T \quad (55)$$

Para $q = 1$, cada satélite completa um número inteiro de órbitas entre conjunções sucessivas, e toda conjunção ocorre no mesmo ponto da órbita do satélite externo. Se $q = 2$, então apenas cada segunda conjunção será neste mesmo ponto, e assim por diante.

Além disso, a condição de ressonância é dada por:

$$(p+q)n' - pn - q\dot{\omega} = 0 \quad (56)$$

e podemos reescrever eq.(51) como:

$$\frac{n' - \dot{\omega}'}{n - \dot{\omega}} = \frac{p}{p+q} \quad (57)$$

sendo $n' - \dot{\omega}'$ e $n - \dot{\omega}$ o valor de movimento relativo. Sabendo a relação de ressonância eq.(55) então o argumento ressonante será:

$$\phi = (p+q)\lambda' - p\lambda - q\varpi' \quad (58)$$

Para ressonâncias em que a conjunção ocorre sempre na mesma longitude, seja no pericentro ou apocentro, a força tangencial experimentada pelo corpo interno imediatamente antes da conjunção é igual e oposta à força tangencial experimentada imediatamente após a conjunção (Fig.7).

No caso de uma ressonância de primeira ordem onde $p+1 : p$ o argumento do cosseno (ϕ_n) da função perturbadora é [15]:

Tabela 4: Expansão do argumento da função perturbadora para uma ressonância de primeira ordem, sendo o subíndice i para o satélite interno e e para o satélite externo.

ϕ_n	Argumento do cosseno
1	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i - \varpi_i$
2	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i - \varpi_e$
3	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i - \varpi_e - 2\varpi_i$
4	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_e - 2\Omega_e - \varpi_i$
5	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_i - 2\Omega_i$
6	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_e - 2\Omega_i$
7	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_e - \Omega_e + \Omega_i$
8	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_i + \Omega_e - \Omega_i$
9	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_e + \Omega_e - \Omega_i$
10	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_i - \Omega_e + \Omega_i$
11	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_e + \Omega_e - \Omega_e - \Omega_i$
12	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_i - 2\Omega_i$
13	$(p+1)\lambda_e - p\lambda_i + \varpi_e - 2\Omega_i$
14	$(p+1)\lambda_e - \varpi_e - 2\Omega_e$

A depender do ponto de conjunção, os resultados serão diferentes, na figura (7) é mostrado diversos momentos de aproximação e é presumido que a longitude do pericentro do objeto interno é fixa e a relação de ressonância implica que as conjunções ocorrerão no mesmo ponto se não houver interação gravitacional entre os objetos.

Se as conjunções ocorrem exatamente no pericentro ou apocentro, a força tangencial experimentada pelo corpo interno imediatamente antes da conjunção é igual e oposta à força tangencial experimentada imediatamente após esta.

Para o caso de conjunção no ponto A, sendo este o mais próximo do pericentro, os dois satélites estão se afastando um do outro em suas órbitas, a força tangencial que o corpo interno sente antes da conjunção é um pouco maior do que a que ele sente depois da conjunção, portanto ocorre um aumento no momento angular do objeto interno, fazendo com que a velocidade angular média do objeto interno diminua, o que significa que as próximas conjunções ocorrerão mais próximas do pericentro. Se a conjunção ocorrer um pouco depois do pericentro, como no ponto B, o efeito será o oposto do descrito acima, com perda de momento angular e aumento da velocidade angular média, mas ainda assim movendo a conjunção para mais perto do periastro.

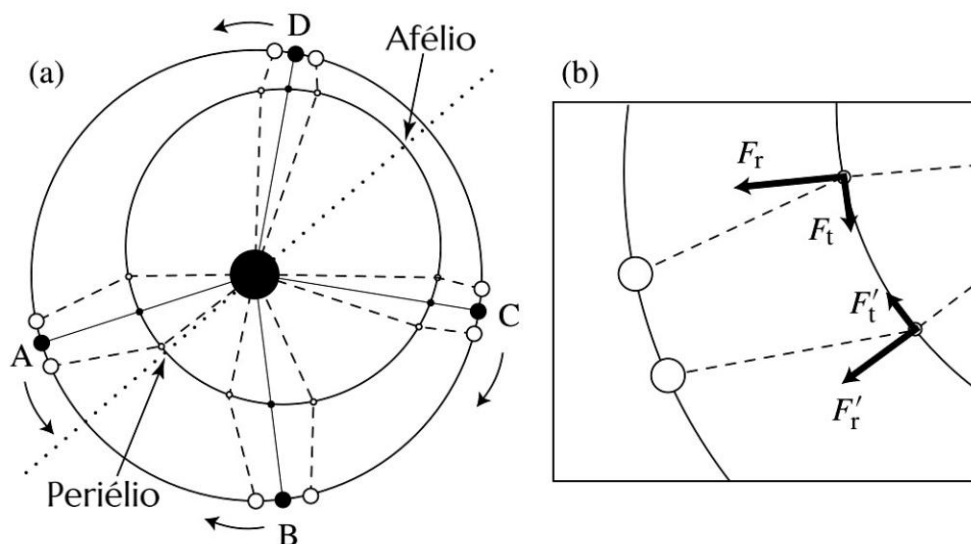


Figura 7: Diagrama esquemático de encontros ressonantes entre um objeto de pequena massa em uma órbita interna e elíptica e um objeto massivo em uma órbita externa e circular. (a) Encontros em quatro pontos diferentes de conjunção, identificados como A, B, C e D. A linha pontilhada denota o eixo maior do objeto interno. As setas indicam as direções para as quais cada conjunção deve estar se movendo; a conjunção estável ocorre no pericentro da órbita. (b) Diagrama apenas da conjunção A mostrando as forças radiais (r) e tangenciais (t) agindo sobre o objeto interno imediatamente antes (F_r e F_t) e após (F'_r e F'_t) a conjunção. Créditos: [15, Imagem 8.5]

Para conjunções perto do apocentro (pontos C e D), haveria novamente uma tendência de aproximar a conjunção do pericentro. Assim, existe uma tendência em todos os pontos de encontro assimétricos de aproximar as conjunções do pericentro da órbita, isto pode ser considerado como a configuração de equilíbrio estável do sistema, enquanto a conjunção no apocentro é a configuração instável.

Como observado na figura (7) as conjunções entre os satélites ressonantes podem acontecer em diversas posições em torno do equilíbrio, e neste caso temos uma libração. Podemos definir também o período de libração, sendo este o tempo necessário para que uma oscilação ao redor de uma posição média em uma ressonância orbital complete um ciclo. Em sistemas onde dois corpos estão em ressonância, a diferença de fase entre eles oscila ao longo do tempo, e o período de libração mede o tempo para que essa oscilação complete um ciclo.

Quando o sistema está próximo de uma comensurabilidade³, mas com as conjunções podendo ocorrer em qualquer ponto da órbita, o sistema é dito estar em quase-ressonância.

Saturno possui uma grande variedade de ressonâncias orbitais como Mimas-Tethys 4:2, Enceladus-Dione 2:1, Mimas-Anthe 11:10, entre outros. Essa dinâmica orbital ressonante também é visível na configuração dos anéis de Saturno (Fig 8), a maior parte da estrutura no anel A pode ser explicada pelos efeitos ressonantes dos pequenos satélites Pandora,

³Comensurabilidade é a relação entre os períodos orbitais de dois corpos celestes, indicando que esses períodos estão em uma razão simples, como 2:1 ou 3:2.

Prometeu e Janus, que orbitam além do sistema principal de anéis. A lacuna chamada de Falha de Encke no anel A também pode ser entendida em termos do efeito gravitacional do pequeno satélite Pan que atua "limpando" esta área.

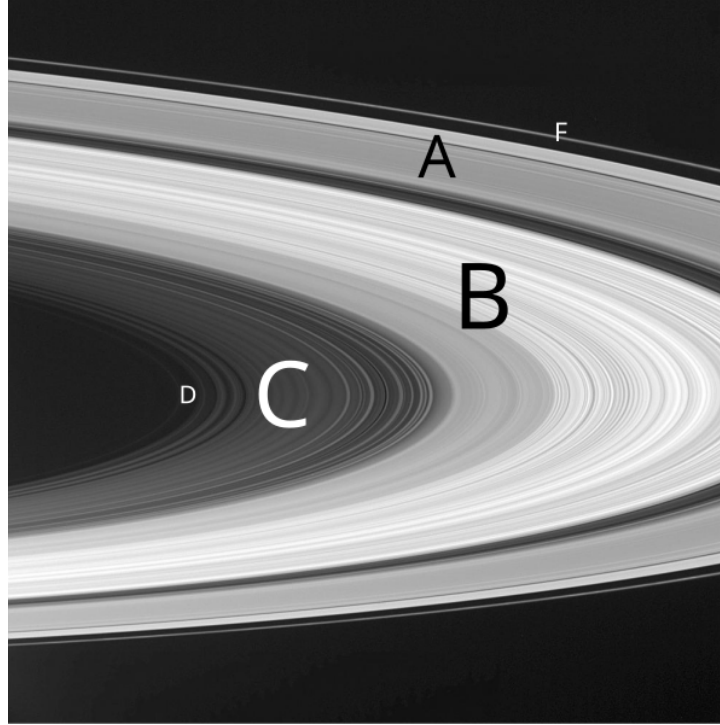


Figura 8: Imagem capturada pela sonda Cassini em 29 de outubro de 2004 dos anéis de Saturno, desde o anel F externo até as estruturas internas do anel D. Créditos: NASA/JPL/Space Science Institute. [17]

2.7 Espectro Individual de Potências

Pode-se expressar a variação dos elementos orbitais como:

$$el.(t) = \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} e^{2\pi i \vec{k} \vec{f} t} \quad (59)$$

sendo $el.$ qualquer elemento orbital dependente do tempo, $\vec{f}$ uma frequência de componentes independentes do movimento, A_k a amplitude, k um vetor inteiro. A soma será composta por poucos termos devido ao fato de A_k diminuir rapidamente com $|k|$.

Nota-se que essa oscilação é periódica, sendo possível então analisar os elementos orbitais por suas frequências. Um espectro de potências é gerado via Transformada Rápida de Fourier [Apêndice 1] e será caracterizado por um número contável de frequências e picos, sendo estas frequências fundamentais, ou harmônicas formadas a partir da combinação linear das frequências fundamentais. Para uma órbita regular, haverá poucos picos no espectro, já uma órbita caótica terá muitos picos de forma não periódica.

Com esses espectros de potência podemos criar um Espectro Individual de Potências (IPS - Individual Power Spectrum) [1], [4] e [2]. O IPS é gerado através da Transformada

Rápida de Fourier (FFT), que analisa a distribuição das frequências em elementos orbitais como o semieixo maior, a excentricidade e a inclinação orbital. Esses elementos são estudados para uma partícula de teste, levando em consideração um valor inicial específico para o semieixo maior, que é um parâmetro livre na análise.

As simulações numéricas são feitas variando esse semieixo maior inicial, enquanto outros elementos orbitais e os corpos principais do sistema permanecem fixos. Cada linha desses espectros individuais, com amplitude espectral maior que uma certa porcentagem pré-definida, geralmente 5%, fornece a maior amplitude espectral observada no espectro que será considerada como relevante para criação do mapa IPS.

Tomaremos como exemplo o satélite Anthe que está em uma ressonância orbital de 11:10 com Mimas [4]. Como descrito acima, o Espectro Individual de Potências (Individual Power Spectra – IPS) é uma ferramenta para análise espectral que analisa o espectro obtido por Transformada Rápida de Fourier (Apendicê A) para algum elemento orbital, sendo possível então determinar as regiões em que a órbita tem movimento regular ou irregular. No exemplo da figura (9) temos um clone do satélite Anthe (como descrito no trabalho de Callegari e Yokoyama (2020) [4]), no eixo X temos o semi-eixo maior osculador (em km) e o eixo Y o período (em dias).

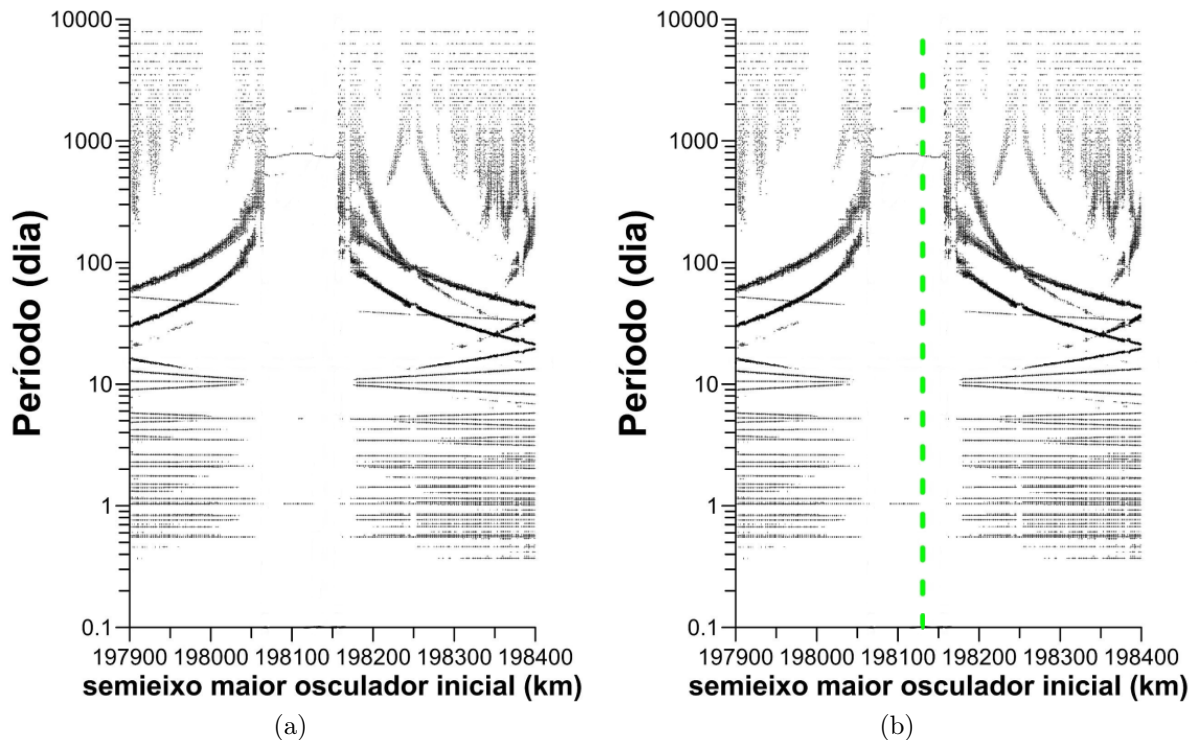


Figura 9: (a) IPS para o semi-eixo maior do satélite Anthe, espectro construído com base em amplitudes superiores a 5% da maior amplitude obtida para cada espectro de potência individual. Cada órbita individual foi integrada por 172,25 anos com intervalo de 0,06 dia [4]. Imagem original de Callegari e Yokoyama (2020) [4]. (b) Mesmo gráfico que a figura 12a porém com a linha verde tracejada indicando o valor do semi-eixo maior de Anthe ($a=198130,5$ km).

Podemos dividir essa imagem em duas regiões, a debaixo com predominância de linhas horizontais que esta associada as perturbações dos harmônicos sazonais e é uma região que não possui interesse físico e mantida apenas por completude do gráfico, e a região acima que está associada a movimentos onde há uma maior regularidade orbital, livre das perturbações do J_2 e J_4 , isso significa que as órbitas individuais nesta região apresentam um comportamento mais estável com um número reduzido de picos no espectro.

Por fim a parte mais importante do gráfico do IPS é essa região no meio da imagem, $198068km < a_0 < 198157km$ que não apresenta muitos pontos, sendo esta a região onde as órbitas possuem um baixo número de picos, sendo esta a região na qual as órbitas individuais apresentam-se regulares. E é nesta região que encontramos o período associado à ressonância 11:10 de movimentos médios Anthe-Mimas[4].

Pode-se construir ainda um Mapa Dinâmico aara investigar a natureza dos movimentos orbitais. Este método permite explorar o espaço de fase em função da excentricidade e semieixo maior, adicionando o índice espectral N podemos descrever o número de picos significativos no espectro de Fourier.

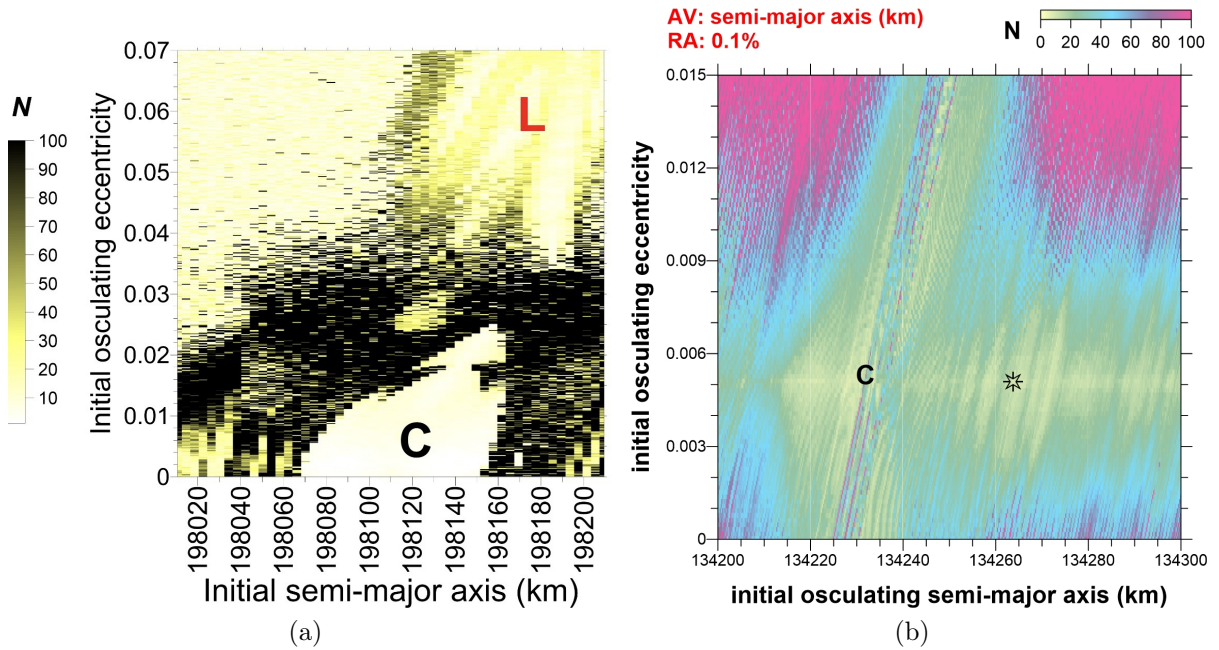


Figura 10: (a) Mapa Dinâmico para Anthe (Fig. 7 de Callegari e Yokoyama (2020) [4]). As regiões representadas por C indicam a região para a ressonância de corotação e L a região para a ressonância Lindblad. Imagem original de Callegari e Yokoyama (2020) [4]. (b) Mapa Dinâmico do satélite Pan, a estrela demonstra a posição atual do satélite, e C o local onde pode ser observada ressonancia 16:15 com Prometheus. Imagem original cedida por Ceccatto [6]

Nota-se no mapa de Anthe (Fig. 10a) que existem duas regiões principais de ressonância: a ressonância de corotação (C) e a ressonância de Lindblad (L). Essas regiões representam diferentes comportamentos nas interações gravitacionais entre Anthe e Mimas.

A ressonância de corrotação ocorre quando as conjunções entre o satélite perturbador (neste caso, Mimas) e o satélite perturbado (Anthe) acontecem ao redor de uma linha que passa pelo pericentro de Mimas, o ponto de sua órbita onde ele está mais próximo de Saturno. Já a ressonância de Lindblad ocorre ao redor de uma linha que passa pelo pericentro de Anthe.

A cada condição inicial, associamos o valor de N , determinado pela contagem de picos que excedem uma amplitude de referência previamente definida. Como mencionado anteriormente, este valor de N (picos no espectro) indica o grau de caoticidade da órbita: valores baixos de N (representados por cores claras) indicam órbitas regulares, enquanto valores altos de N (cores escuras) correspondem a órbitas caóticas, que apresentam um número elevado de picos no espectro, refletindo a presença de múltiplas frequências.

3 Resultados

3.1 Par Pan-Prometheus

A teoria de satélites pastores foi proposta em 1979 [14] e sugere que algumas faixas dos anéis de planetas são mantidos em seus lugares por pares de pequenos planetas cujos torques seculares⁴ equilibram o torque do anel. Exemplos de satélites pastores no sistema de anéis de Saturno são Prometheus e Pandora que pastoreiam o anel F (Fig. 11).

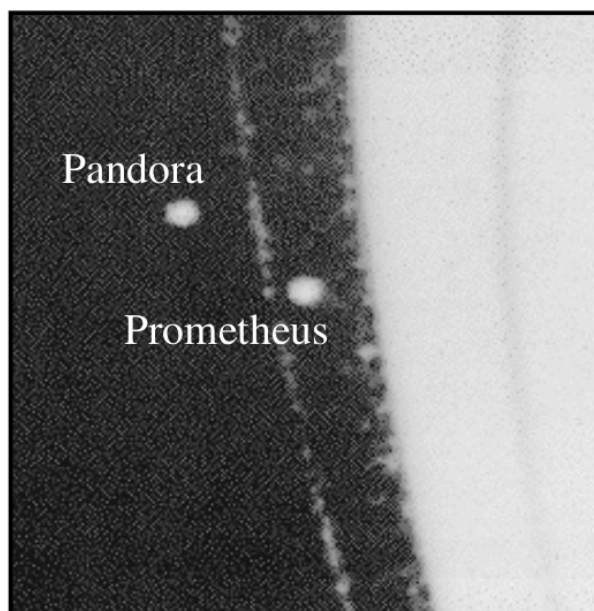


Figura 11: Imagem de baixa resolução obtida pela sonda Voyager 2 do anel F de Saturno, com Pandora e Prometheus orbitando em cada lado, mostrando exemplos de satélites pastores de anéis estreitos. Créditos: NASA/JPL. [16, Fig. 10.17]

⁴O termo "secular" refere-se a variações que ocorrem de maneira lenta e contínua ao longo de grandes períodos de tempo. Um torque secular é uma força constante que, ao ser aplicada ao longo do tempo, causa mudanças graduais no movimento ou na rotação de um corpo celeste.

O anel de Saturno possui diversas camadas (Fig. 8) e além disso existem algumas "falhas" dentro dele, espaços em que não existem os detritos que formam o anel, criando-se assim "buracos" no anel. O pequeno satélite Pan orbita Saturno dentro de uma destas falhas e é provavelmente o motivo que ela existe [8], esta é chamada Falha de Encke e está localizada na faixa A do anel (Fig. 12).

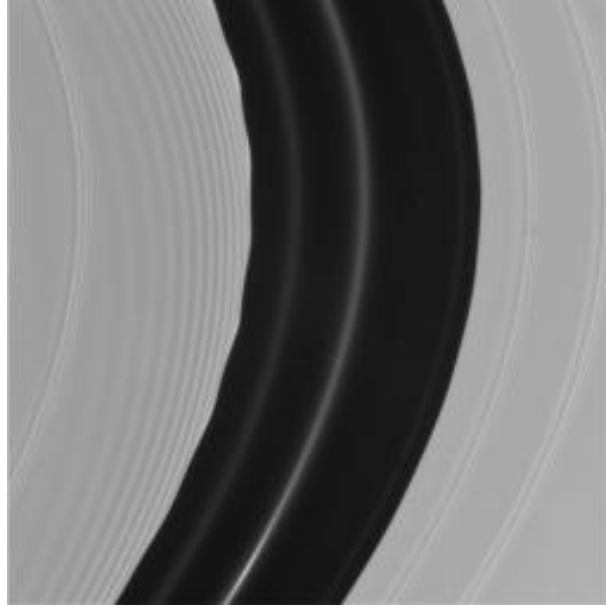


Figura 12: A imagem capturada pela sonda Cassini mostra a região do Anel A de Saturno, conhecida como Falha de Encke. O movimento da lua Pan através dessa lacuna induz ondas na borda do anel. Créditos: NASA/JPL/Space Science Institute. [16]

Segundo o trabalho de [23, Spitale et al.(2006)] ao determinar a órbita de Pan foi observada uma **quase** ressonância 16:15 com Prometheus cujo período de libração é de 108 dias e cujo argumento é:

$$\phi = 16\lambda_{Pro} - 15\lambda_{Pan} - \varpi_{Pro} \quad (60)$$

3.2 Par Mimas-Anthe

Descoberto pela equipe de imagem da missão Cassini em 2007, Anthe tem um raio médio de aproximadamente 0,5 km e orbita Saturno a uma distância de cerca de 197.700 km, entre as órbitas de Mimas e Enceladus. Esse pequeno satélite, juntamente com Methone [2] e Pallene, está em uma configuração dinâmica, sendo fortemente perturbado por Mimas.

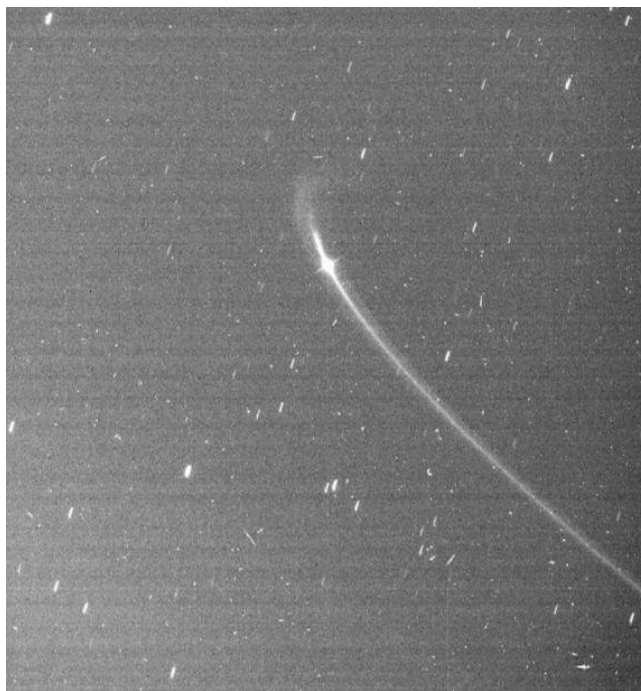


Figura 13: Imagem capturada pela sonda Cassini em 3 de julho de 2008 mostra o arco de material orbitando junto com Anthe. A lua é visível movendo-se para baixo e para a direita na imagem. A maior parte do material do arco está à frente de Anthe em sua órbita, mas sua posição relativa ao arco oscila com o tempo devido a ressonância com Mimas. Créditos: NASA/JPL/Space Science Institute.[19]

Esse arco de material Fig. (13) que orbita junto com Anthe representa uma concentração de partículas que se estende por cerca de 20 graus de longitude, aproximadamente 5,5% da órbita de Anthe. Micrometeoroides impactando Anthe são a fonte provável dessas partículas, que formam um arco estreito [11] mantido em posição devido à ressonância com Mimas. À medida que Anthe se move, ele oscila para frente e para trás em relação ao arco, uma consequência da interação gravitacional com Mimas, que, por sua maior massa, exerce uma forte influência sobre os pequenos satélites na mesma região orbital.

Mimas tem um efeito gravitacional considerável sobre Anthe, com seu diâmetro médio de 198 km e densidade predominantemente composta de gelo Mimas foi descoberto em 17 de setembro de 1789 pelo astrônomo inglês William Herschel que conseguiu identificar Mimas como um ponto pequeno e distante ao redor de Saturno.

Por muitos anos, observadores aqui na Terra só conseguiam ver Mimas como um ponto indistinto, sem detalhes. Isso permaneceu assim até a década de 1980, quando as sondas Voyager I e II passaram por Saturno e capturaram as primeiras imagens mais detalhadas de Mimas, depois das Voyager, a missão Cassini fez aproximações ainda mais próximas de Mimas, produzindo imagens com muito mais detalhes

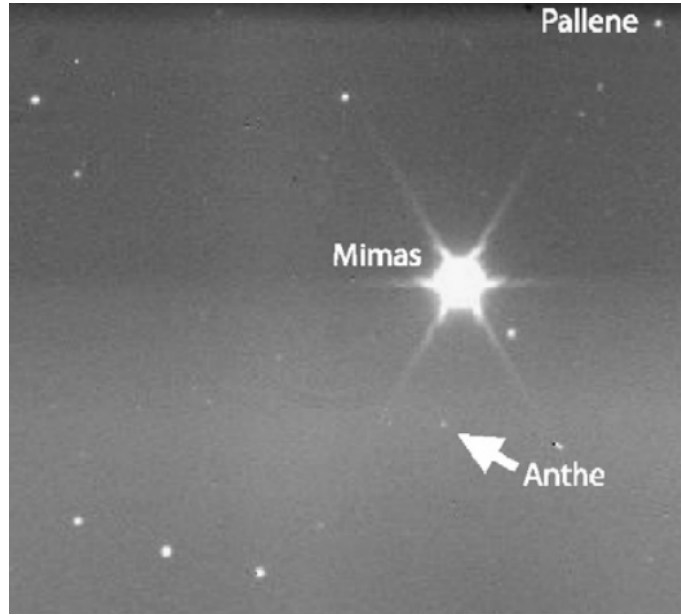


Figura 14: Imagem de Mimas e Anthe proveniente de "Astrometry and dynamics of Anthe (S/2007 S 4), a new satellite of Saturn"[7], foi registrada em 30 de maio de 2007 às 04:02:02.511, com uma duração de exposição de 15s.

De acordo com Callegari e Yokoyama (2020)[4], o comportamento da ressonância entre Mimas e Anthe pode ser descrito pelo argumento da ressonância secular:

$$\phi_1 = 11\lambda_{Anthe} - 10\lambda_{Mimas} - \varpi_{Mimas} \quad (61)$$

Método Computacional

Nas simulações de Pan foram considerados 5 satélites: Pan, Prometheus, Atlas, Pandora e Janus (Fig. 15). Utilizando dois modelos para as equações de movimento, o modelo utilizado em [3, Callegari e Yokoyama (2010)] que foi explicado na seção 2.5 deste trabalho, e o modelo para elementos orbitais geométricos dados em [21, Renner and Sicardy (2006)] para que fossem plotados os ângulos críticos (Tabela 4).

Sendo elementos geométricos elementos orbitais calculados a partir do vetor de estado, que contém as coordenadas de posição e as velocidades instantâneas de um satélite. Esses elementos são usados para ajustar melhor a órbita de um satélite sob a influência de um campo gravitacional não central onde o argumento do pericentro (ω) avança periodicamente na mesma frequência do movimento médio, devido componentes como J_2 . Além disso, as órbitas são analisadas no domínio das frequências seguindo o que foi desenvolvido na seção 2.7 deste trabalho.

Tanto as constantes físicas de Saturno quanto as condições iniciais e parâmetros numéricos dos satélites utilizados nas simulações foram adquiridos com base no sistema de efemérides *Horizons*⁵ da NASA, este sistema utiliza o banco de dados SAT343[10]. Estes valores são mostrados nas Tabelas (5), (6), (7) e (8).

⁵<http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi> (Versão 4.94)

Tabela 5: Constantes físicas de Saturno, a massa e o raio foram adquiridos pela plataforma *Horizons* e os harmônicos sazonais em [12, Jacobson et al. (2006)]

Constante	Valor
Massa (g)	$568,317 \cdot 10^{24}$
Raio (km)	60268
J_2	$16290,6 \cdot 10^{-6}$
J_4	$86,8 \cdot 10^{-6}$

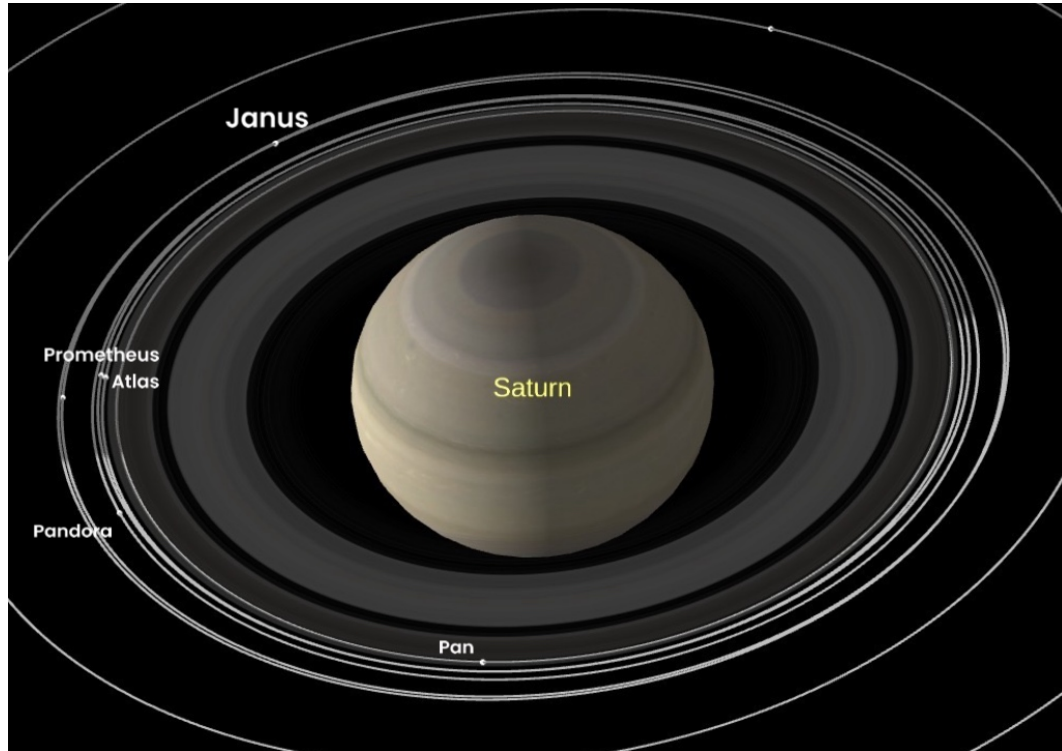


Figura 15: Representação de Saturno, seus anéis e as órbitas de seus satélites para na data 26 de Agosto de 2024. Figura elaborada no site *Horizons*. (Acesso em 26/08/2024)

Tabela 6: Elementos osculadores para os satélites Pan, Prometheus, Atlas, Pandora e Janus no dia 01/01/2000, valores obtidos a partir do *Horizons*, exceto as massas que foram obtidas em [24, Thomas e Helfenstein (2020).]

	Pan	Prometheus	Atlas	Pandora	Janus
Massa (kg)	$0,430 \cdot 10^{16}$	$15,6 \cdot 10^{16}$	$0,575 \cdot 10^{16}$	$13,7 \cdot 10^{16}$	$198 \cdot 10^{16}$
a (km)	134263,65	140024,64	138325,37	142346,13	152031,24
e	0,00506	0,0025	0,0059	0,0015	0,00425
i	$0,00085^\circ$	$0,0081^\circ$	$0,0042^\circ$	$0,0502^\circ$	$0,1659^\circ$
ω	$339,92^\circ$	$201,36^\circ$	$200,77^\circ$	$332,15^\circ$	$306,46^\circ$
Ω	$247,094^\circ$	$309,14^\circ$	$235,44^\circ$	$149,98^\circ$	$155,57^\circ$

Nas simulações de Anthe foram considerados os satélites Anthe, Mimas, Enceladus, Tethys, Dione, Rhea e Titan (Fig. 16 (a) e (b)).

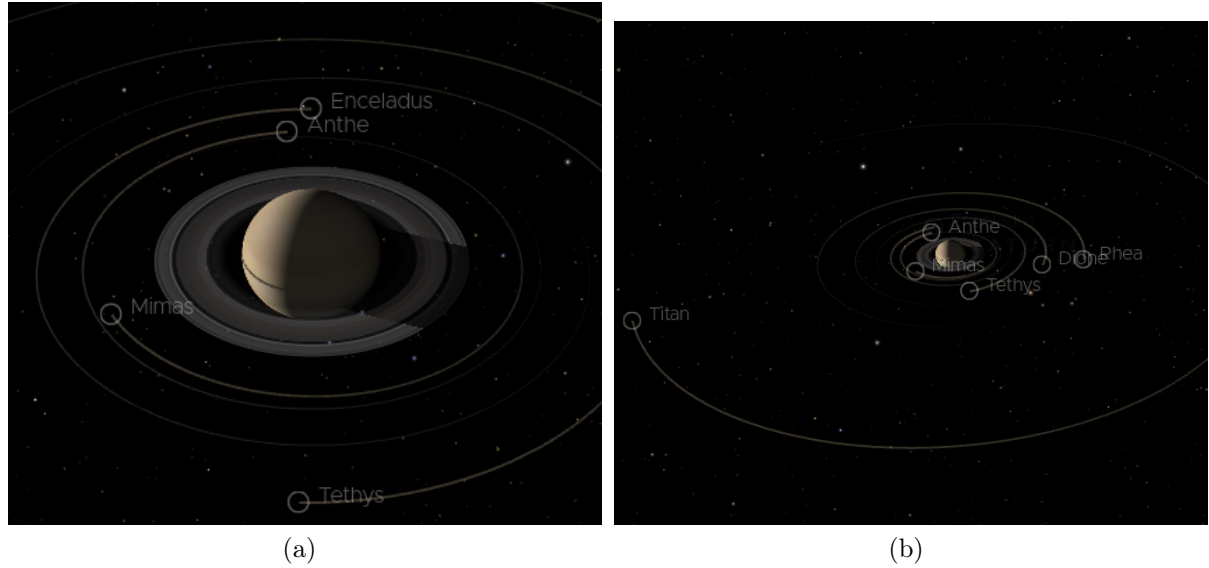


Figura 16: Representação de Saturno, seus anéis e as órbitas de seus satélites para na data 03 de Novembro de 2024. Figura elaborada no site Horizons. (Acesso em 03/11/2024)

Tabela 7: Elementos osculadores para os satélites Anthe, Mimas, Enceladus e Tethys no dia 01/01/2016, valores obtidos a partir do *Horizons*.

	Anthe	Mimas	Enceladus	Tethys
Massa (kg)		$3,75 \cdot 10^{19}$	$10,8 \cdot 10^{19}$	$61,7 \cdot 10^{19}$
$a(\text{km})$	198131,08217	186025,6255	238410,9605	294975,2025
e	0,00270	0,020026	0,00541	0,001065
i	$0,02118^\circ$	$1,5676^\circ$	$0,006280^\circ$	$1,0938^\circ$
ω	$77,092^\circ$	$149,66^\circ$	$254,877^\circ$	$155,44^\circ$
Ω	$285,11^\circ$	$92,69^\circ$	$106,824^\circ$	$183,774^\circ$

Tabela 8: Elementos osculadores para os satélites Dione, Rhea e Titan no dia 01/01/2016, valores obtidos a partir do *Horizons*.

	Dione	Rhea	Titan
Massa (kg)	$109,5 \cdot 10^{19}$	$230,9 \cdot 10^{19}$	$13455,3 \cdot 10^{19}$
$a(\text{km})$	377651,4674	527213,741	1221961,1217
e	0,001724	0,001013	0,0287
i	$0,02979^\circ$	$0,3556^\circ$	$0,4023^\circ$
ω	$161,93^\circ$	$18,623^\circ$	$324,327^\circ$
Ω	$171,141^\circ$	$194,531^\circ$	$247,89^\circ$

3.3 Ângulos Críticos

Um ângulo crítico combina a longitude média dos corpos (λ) e as longitudes do pericentro (ϖ). Os ângulos para ambas as ressonâncias estão apresentados na Tabela 3 deste trabalho. Quando dois corpos estão em ressonância, o ângulo crítico oscila entre

um intervalo limitado em vez de variar livremente entre 0 e 360 graus. Esse "confinamento" indica uma troca de energia controlada entre os corpos, mantendo a ressonância estável; se o ângulo crítico não estivesse limitado, a ressonância poderia ser instável e um dos corpos poderia, por exemplo, ser eventualmente ejetado da órbita ou ter sua órbita alterada drasticamente.

Mimas - Anthe

Para valores iniciais da órbita de Anthe sendo aqueles da Tabela (7) temos a configuração dos ângulos críticos nas Fig. (17) e (18).

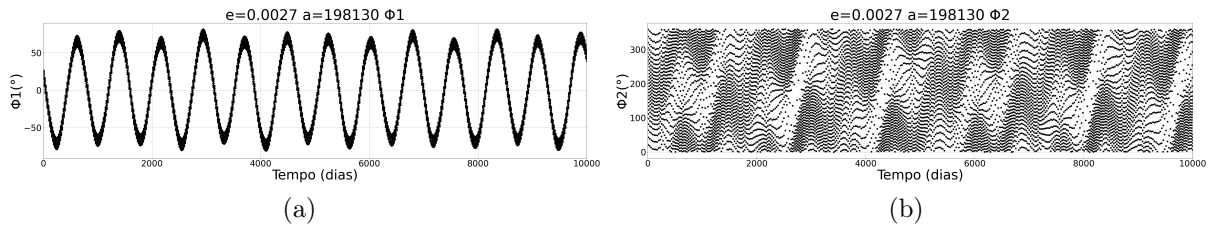


Figura 17: Variação temporal dos ângulos críticos expressos na Tabela (4), ângulos ϕ_1 , ϕ_2 . Para valores iniciais de $a=0,0027$ e $e=198130$

ϕ_1 é o ângulo de corrotação e podemos notar pela Fig (17) que ele libra em torno de 0, demonstrando que Anthe está preso em uma ressonância do tipo corrotação com Mimas, além disso, este ângulo tem um período de libração de 767 dias.

ϕ_2 é aqui definido como ângulo de Lindblad e na verdade pode ser reescrito como:

$$\phi_2 = 11\lambda_A - 10\lambda_M - \varpi_M + \varpi_M - \varpi_A \quad \phi_2 = \phi_1 - \Delta\varpi_{A-M} \quad (62)$$

No plot dele é possível percebermos que anthe não está na ressonância de Lindblad, ou seja, ϕ_2 não circula, porém existe uma oscilação de ϕ_2 que ocorre em escalas de tempo curtas mostrando a componente ϕ_1 presente nele.

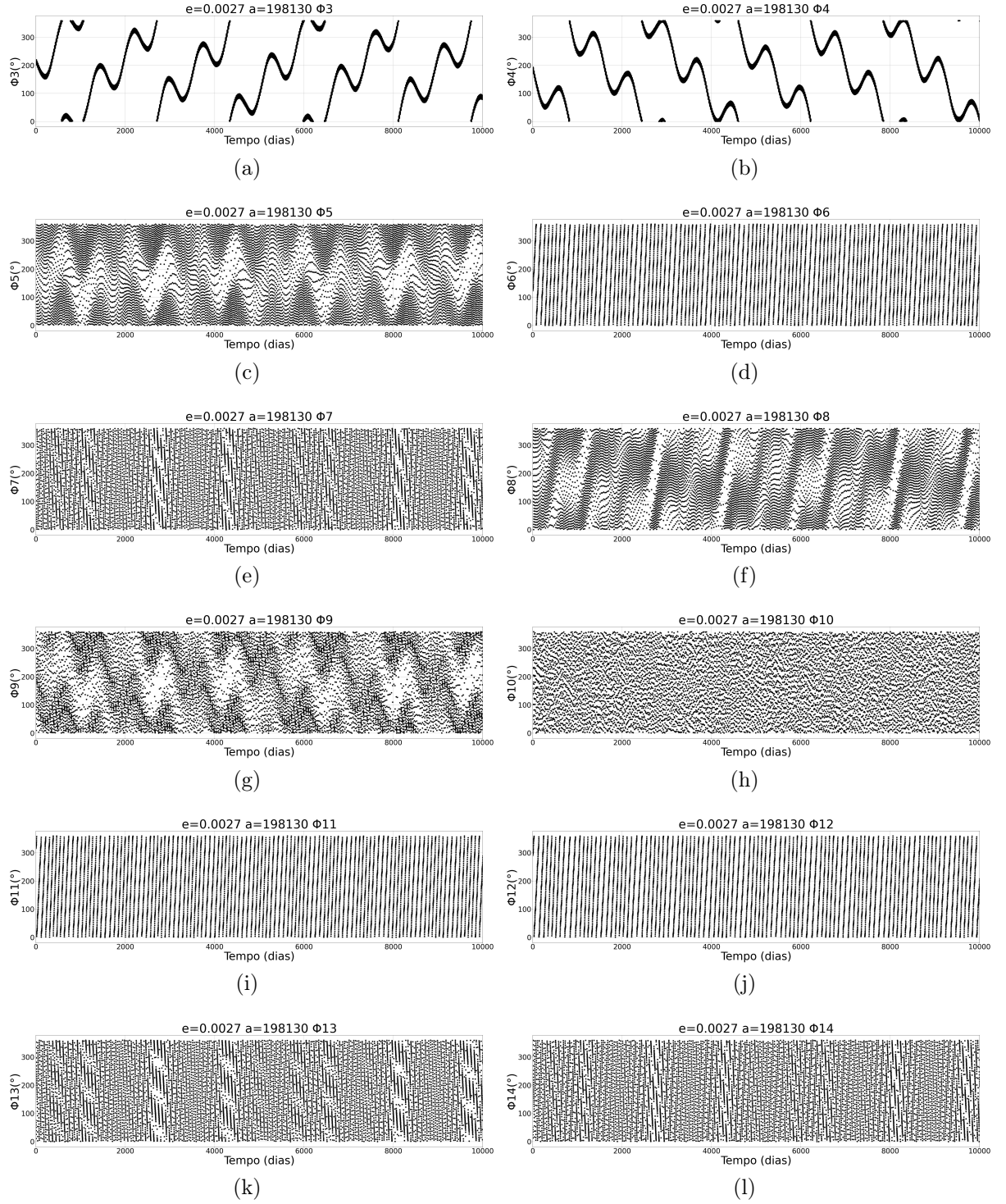


Figura 18: Variação temporal dos ângulos críticos expressos na Tabela 4, ângulos ϕ_3 , ϕ_4 , ϕ_5 , ϕ_6 , ϕ_7 , ϕ_8 , ϕ_9 , ϕ_{10} , ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{13} e ϕ_{14} respectivamente.

Apesar de alguns ângulos apresentarem uma pequena variação, esta está presente pois os ângulos podem ser escritos muitas vezes como combinação do ϕ_1 [4], mas não apresentam interpretação física notável.

Podemos analisar ainda o comportamento dos ângulos críticos em diferentes posições do mapa dinâmico:

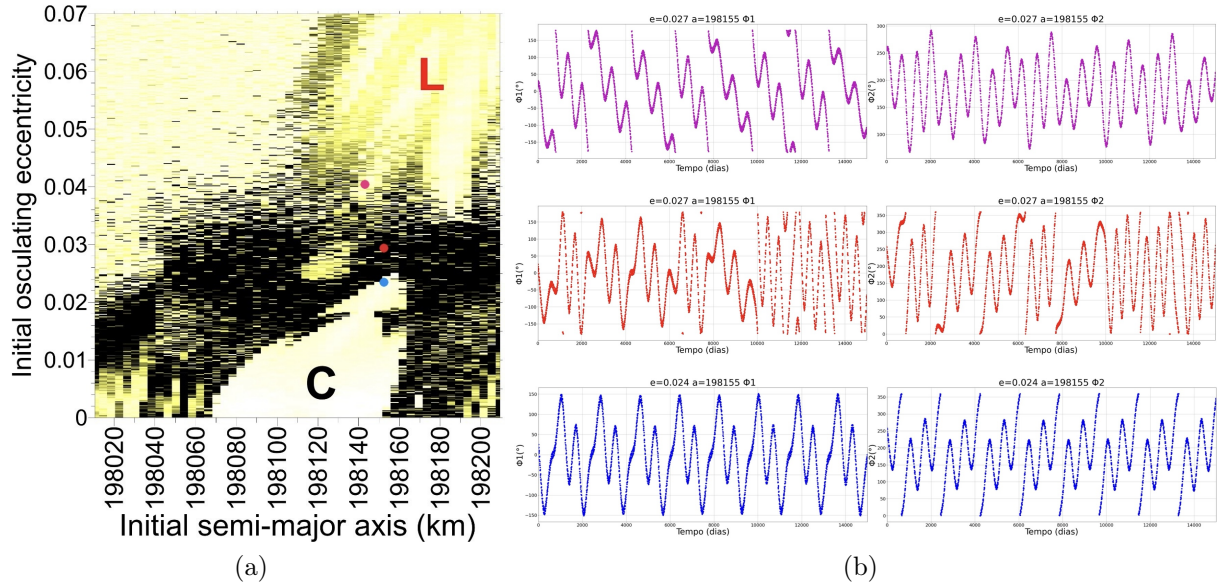


Figura 19: (a) Mapa Dinâmico de Anthe, similar à Fig. 10 porém com os pontos identificando o local de análise. Azul: $e=0,024$ $a=198155$, Rosa: $e=0,04$ $a=198145$, Vermelho $e=0,027$ $a=198155$ (b) Variação temporal dos ângulos ϕ_1 e ϕ_2 para os diferentes pontos mostrados no mapa a esquerda.

Com base na Fig. 19 pode-se perceber a libração diferente dos ângulos a depender do local analisado. Sendo o ponto azul na área de ressonância tipo corotação, o ponto vermelho numa área de transição entre elas em que o mapa é escuro, logo o espectro de Fourier apresenta muitos picos, sendo este ponto uma órbita instável, e por fim o ponto rosa está na área do tipo de ressonância Lindblad.

Elementos Orbitais

O comportamento de alguns dos elementos orbitais pode ser observado abaixo:

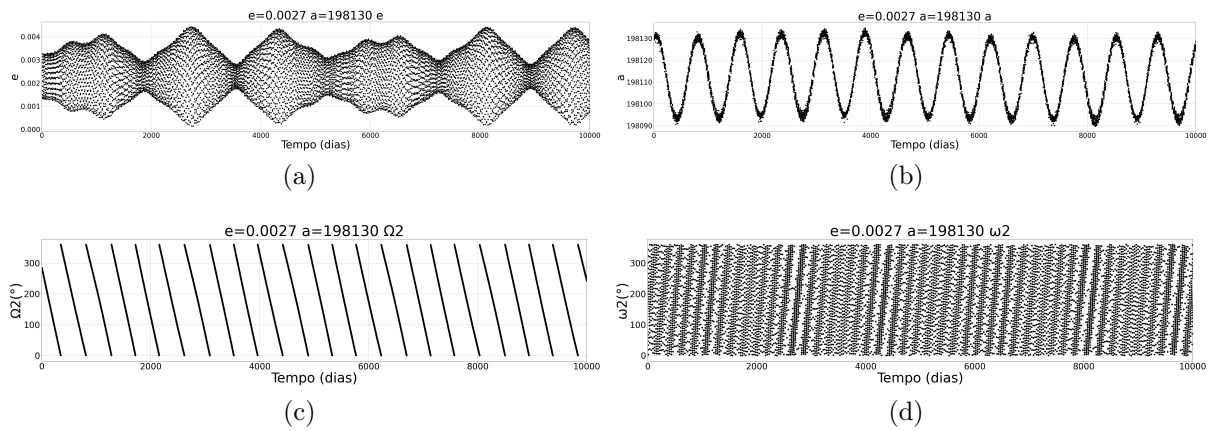


Figura 20: Evolução temporal dos elementos orbitais (a)Excentricidade (b)Semi-eixo maior (c)Argumento do pericentro e (d)Longitude do nodo ascendente

A excentricidade do satélite sofre grandes oscilações em um curto período de tempo

devido principalmente ao efeito do termo J_2 da gravidade de Saturno. O semi-eixo maior varia com amplitude de 55 km.

Utilizando as equações 44 e 45 temos que o nodo ascendente (Ω) tem uma variação retrógrada e com período de 460,5 dias. A evolução temporal do argumento do pericentro (ω) apresenta muito ruído pois é fortemente afetada pelo termo J_2 .

Pan - Prometheus

Para valores iniciais da órbita de Pan sendo aqueles da Tabela 6 temos a seguinte configuração dos ângulos críticos:

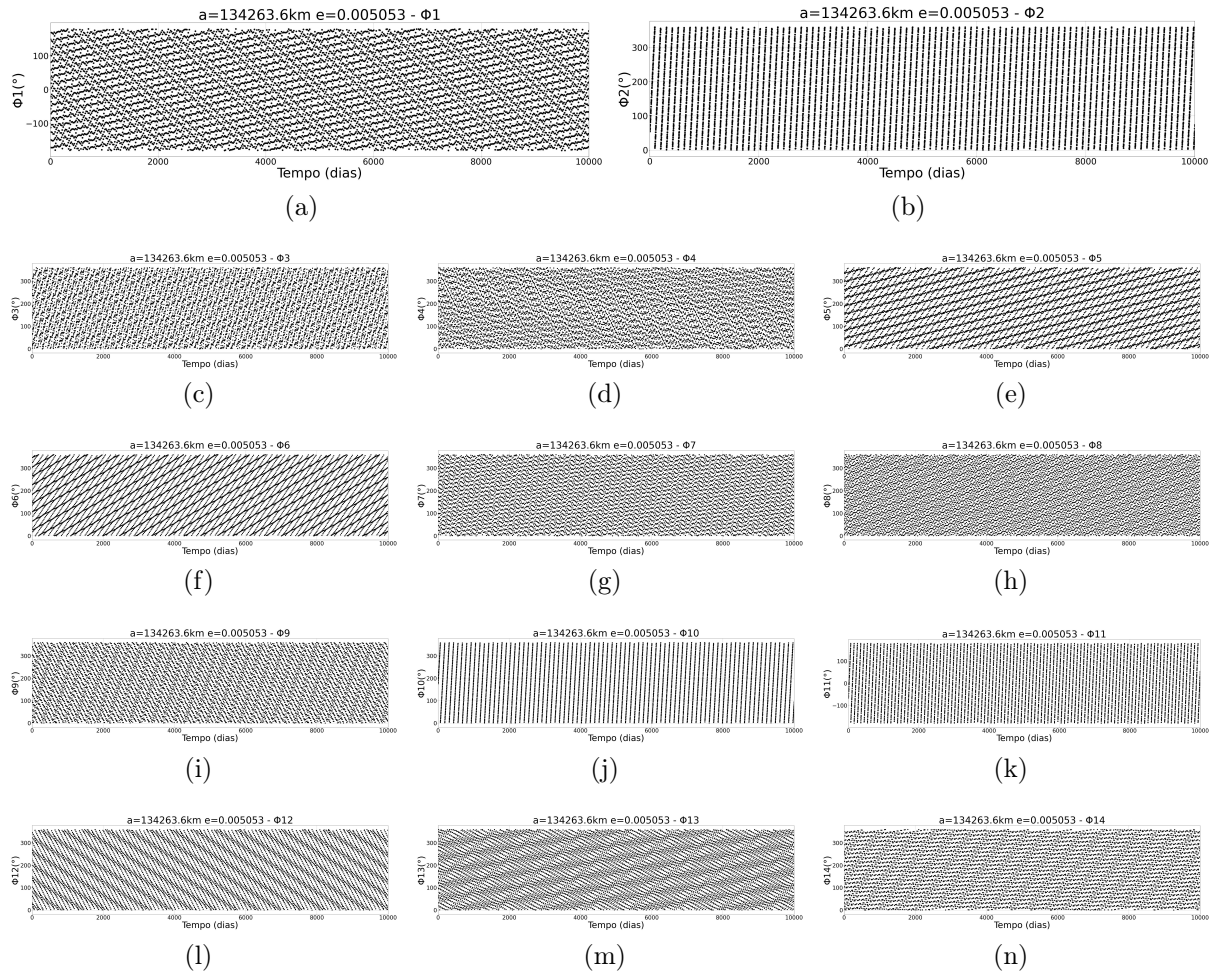


Figura 21: Variação temporal dos ângulos críticos expressos na Tabela 4, ângulos ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , ϕ_5 , ϕ_6 , ϕ_7 , ϕ_8 , ϕ_9 , ϕ_{10} , ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{13} e ϕ_{14} respectivamente. Para valores de $a=134263,6$ Km; $e_0=0,005053$

Pode-se observar que não existe ressonância nestes valores iniciais, fato que pode ser notado também ao se observar o mapa dinâmico Fig. 10b em que o valor real para o semi-eixo da órbita do satélite está à direita da ressonância.

Podemos mudar o valor inicial para um local no mapa dinâmico em que haja ressonância orbital; para esses outros valores iniciais, temos:

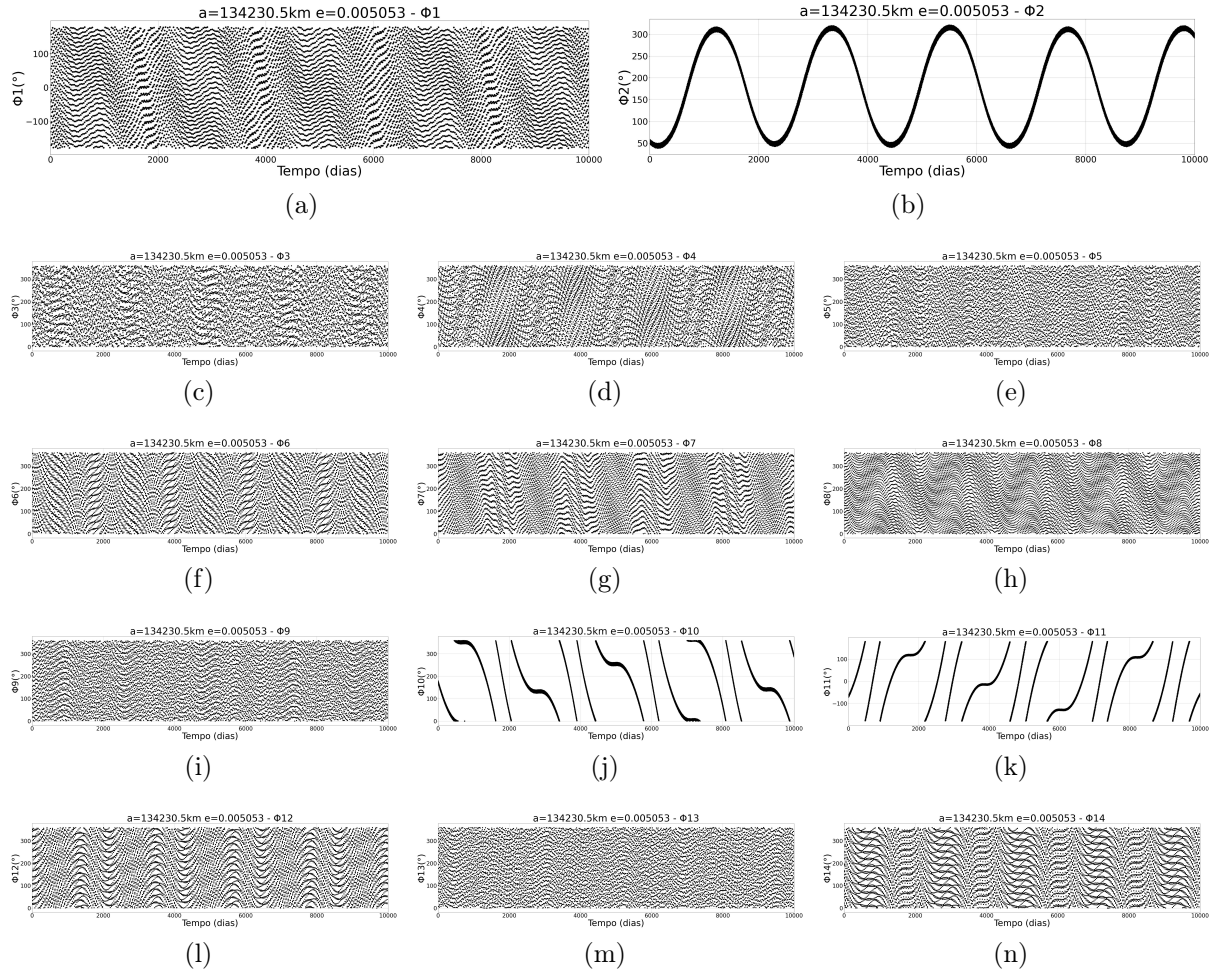


Figura 22: Variação temporal dos ângulos críticos expressos na Tabela 4, ângulos ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 , ϕ_4 , ϕ_5 , ϕ_6 , ϕ_7 , ϕ_8 , ϕ_9 , ϕ_{10} , ϕ_{11} , ϕ_{12} , ϕ_{13} e ϕ_{14} respectivamente. Para valores de $a=134230,5$ Km; $e=0,005053$

A condição inicial para Pan $a=134230,5$ Km; $e=0,005053$ apresenta a oscilação de ϕ_2 em torno de 180° , mostrado na Fig. 22(b).

Elementos Orbitais

A excentricidade da órbita e o semi-eixo maior exibem o comportamento mostrado abaixo (Fig. 23 e 24) para os valores iniciais da Tabela 6

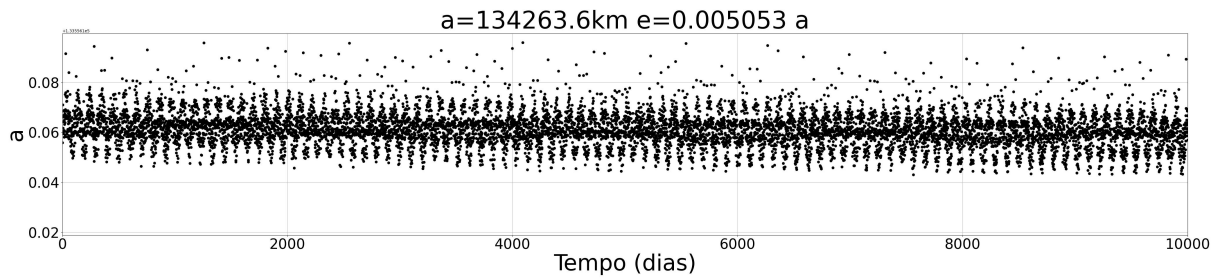


Figura 23: Evolução temporal durante 10 mil dias do semi-eixo maior de Pan para os valores iniciais $a=134263,6$ e $e=0,00503$.

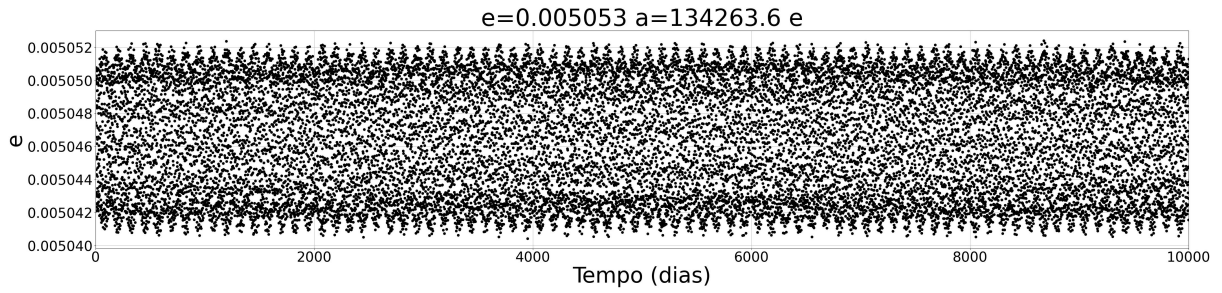


Figura 24: Evolução temporal durante 10 mil dias da excentricidade de Pan para os valores iniciais $a=134263,6$ e $e=0,00503$.

O semi-eixo maior, assim como a excentricidade, variam pouco. $133556,12257km < a < 133556,19589km$ e $0,005037 < e < 0.005054$. A excentricidade se mantém no mesmo padrão, mas é notável que o semi-eixo tende a diminuir; para o tempo de 60 mil anos, temos a Fig. 25 mostrando essa tendência a se aproximar de Saturno.

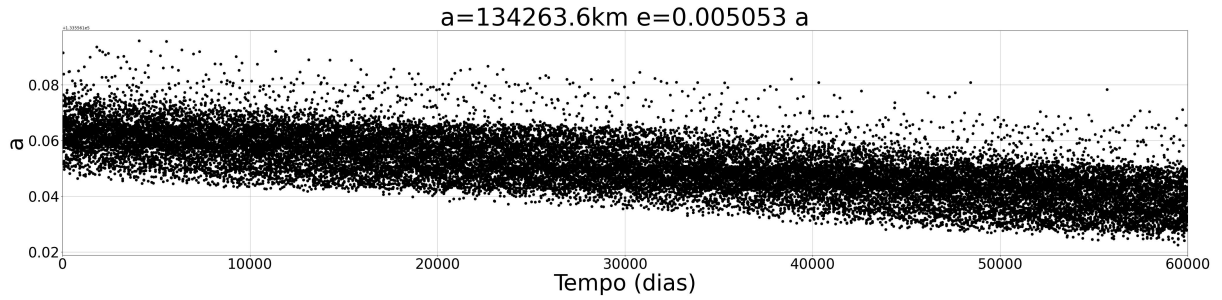


Figura 25: Evolução temporal durante 60 mil dias da excentricidade de Pan para os valores iniciais $a=134263,6$ e $e=0,00503$.

3.4 Estabilidade

Podemos também analisar a órbita a longo prazo.

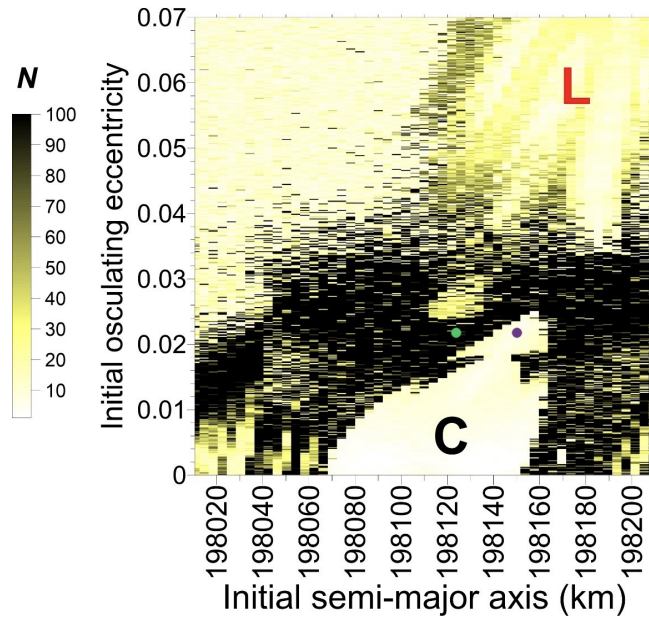


Figura 26: Mapa Dinâmico com o ponto verde sendo $e=0,02$ e $a=198125$, e o ponto roxo sendo $e=0,02$ e $a=198150$

O mapa dinâmico da Fig. 26 mostra dois pontos, um na ressonância (roxo) e outro fora dela (verde), foi feita a integração a longo prazo dessas órbitas. Os resultados são exibidos nas Fig. 27 e 28.

Ponto verde:

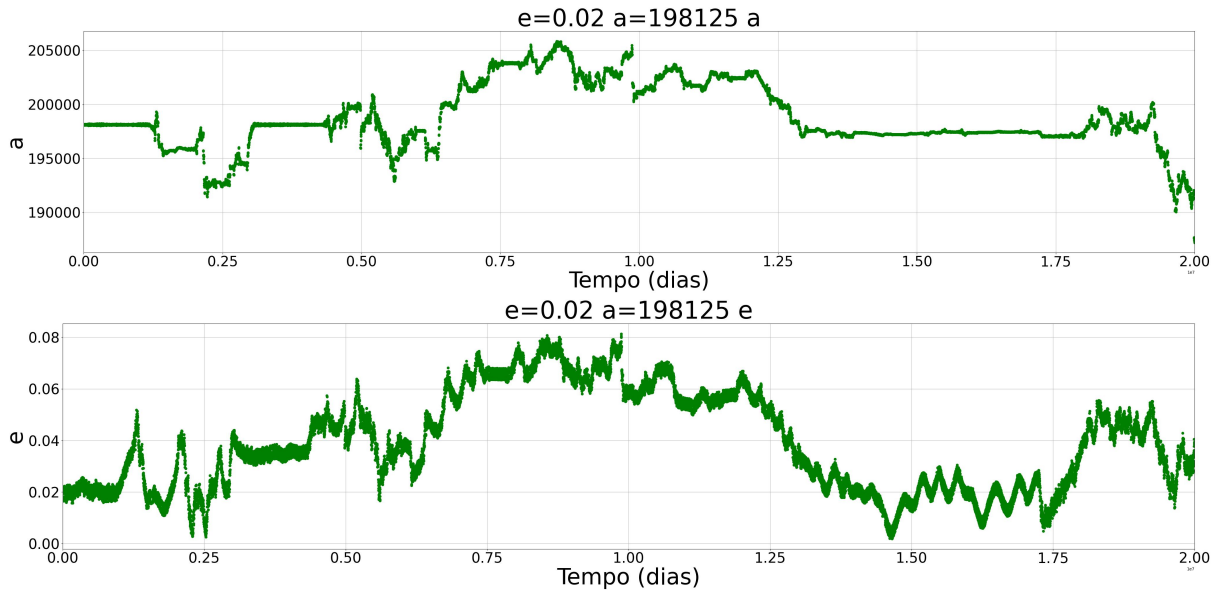


Figura 27: Evolução temporal do semi-eixo maior e da excentricidade para o ponto de cor verde no mapa da Fig. 26 ao longo de 20 milhões de dias.

Ponto Roxo:

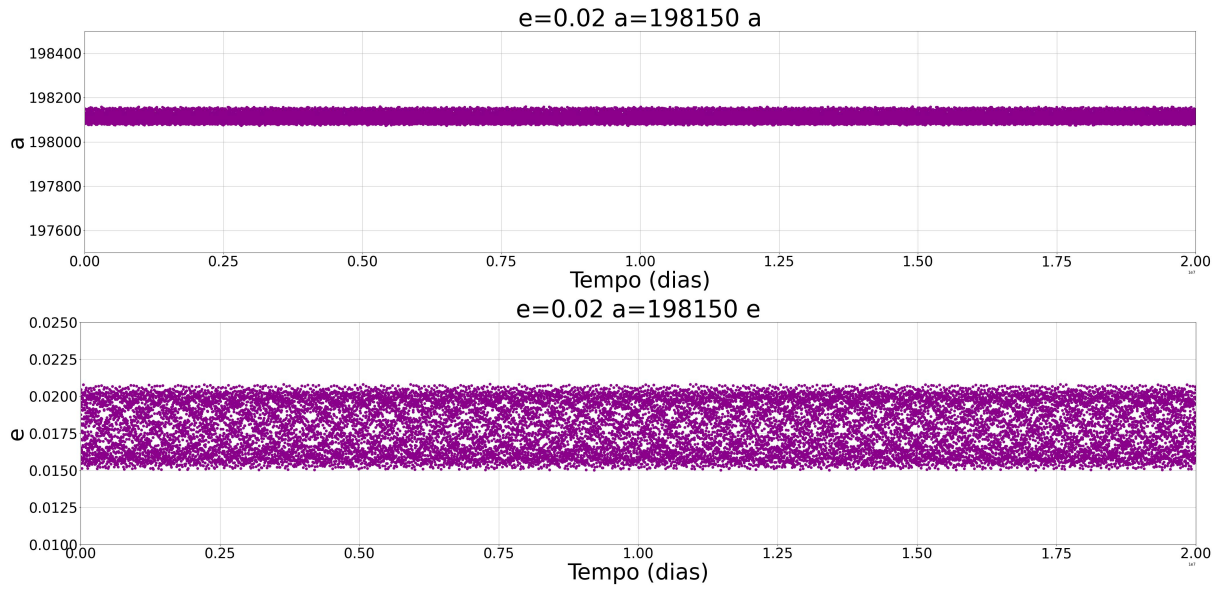


Figura 28: Evolução temporal do semi-eixo maior e da excentricidade para o ponto de cor roxa no mapa da Fig. 26 ao longo de 20 milhões de dias.

Essas simulações foram feitas para 20 milhões de dias e é perceptível como o comportamento da órbita na ressonância é mais estável a longo prazo.

Abaixo (Fig. 29) temos os valores do ponto roxo novamente, mas com um espaço amostral menor, pode-se notar que o semi-eixo varia entre 198070 km e 198160 km e a excentricidade entre 0,015 e 0,021.

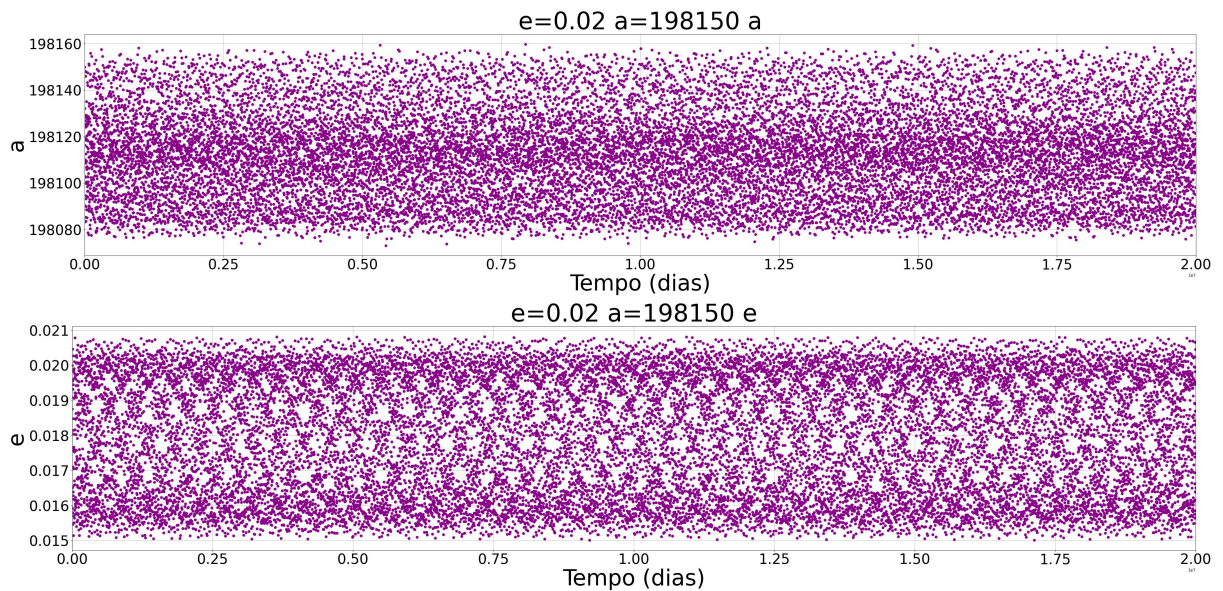


Figura 29: Evolução temporal do semi-eixo maior e da excentricidade para o ponto de cor roxa no mapa da Fig. 26 ao longo de 20 milhões de dias.

4 Conclusão

Neste trabalho, foi feita uma explanação da teoria básica do problema de n corpos, que serviu como fundamento para o estudo do sistema dos pequenos satélites de Saturno, com ênfase nas interações gravitacionais e nos mecanismos de quase ressonância e ressonância que governam a estabilidade e a evolução de suas órbitas.

Foi explorado o comportamento de pares específicos, como Pan e Prometheus, cujas órbitas mostram evidências de uma quase ressonância de 16:15. O estudo revelou uma gradual aproximação da órbita de Pan em relação a Saturno, um comportamento que pode ter implicações significativas para a estabilidade a longo prazo desse satélite. Essa tendência sugere que forças externas, como marés ou interações com os anéis de Saturno, desempenham um papel essencial na evolução orbital de Pan.

Adicionalmente, foi revisado o artigo de Callegari e Yokoyama (2020)[\[4\]](#) sobre Mimas e Anthe, onde foram empregadas diversas técnicas computacionais baseadas na teoria mencionada anteriormente. Nota-se pelos resultados que os elementos orbitais, mesmo na borda da área de ressonância, demonstram uma estabilidade contínua. A ressonância de corrotação demonstrou atuar como um mecanismo estabilizador, permitindo que Anthe mantenha uma órbita estável, minimizando as oscilações extremas mesmo diante de perturbações.

Os resultados obtidos contribuem para o entendimento das ressonâncias orbitais em sistemas de múltiplos corpos, oferecendo um modelo que pode ser aplicado a outros sistemas planetários e satelitários. Estudos futuros, com simulações de maior precisão e intervalos temporais mais longos, poderão fornecer mais detalhes sobre a influência de perturbações externas e sobre o papel de ressonâncias orbitais mais complexas no sistema saturniano.

Referências

- [1] Callegari, N. and Rodríguez, A. (2023). The orbit of aegaeon and the 7:6 mimas-aegaeon resonance. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 135(21).
- [2] Callegari, N., Rodríguez, A., and Ceccatto, D. (2021). The current orbit of methone (s/2004 s 1). *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 133(49).
- [3] Callegari, N. and Yokoyama, T. (2010). Numerical exploration of resonant dynamics in the system of saturnian major satellites. *Planetary and Space Science*, 58(14):1906–1921.
- [4] Callegari, N. and Yokoyama, T. (2020). Dynamics of the 11:10 corotation and lindblad resonances with mimas, and application to anthe. *Icarus*, 348:113820.
- [5] Casteletti, J. R. (2024). Desenvolvimento da função perturbadora e aplicações em dinâmica de exoplanetas.
- [6] Ceccatto, D. T. (2024). *Dinâmica de Pequenos Satélites de Saturno e Aplicações ao Sistema Atlas-Prometheus-Pandora*. Ph.d. thesis, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Rio Claro, SP, Brazil.
- [7] Cooper, N., Murray, C., Evans, M., Beurle, K., Jacobson, R., and Porco, C. (2008). Astrometry and dynamics of anthe (s/2007 s 4), a new satellite of saturn. *Icarus*, 195(2):765–777.
- [8] Cuzzi, J. N. and Scargle, J. D. (1985). Wavy edges suggest moonlet in encke’s gap. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X)*, vol. 292, May 1, 1985, p. 276-290., 292:276–290.
- [9] Ferraz-Mello, S. (1999). Regular motions in extra-solar planetary systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 73.
- [10] Giorgini, J. D., Yeomans, D. K., Chamberlin, A. B., Chodas, P. W., Jacobson, R. A., Keesey, M. S., Lieske, J. H., Ostro, S. J., Standish, E. M., and Wimberly, R. N. (1996). Jpl’s on-line solar system data service. In *American Astronomical Society, DPS Meeting #28, id.25.04; Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 28, page 1158.
- [11] Hedman, M., Murray, C., Cooper, N., Tiscareno, M., Beurle, K., Evans, M., and Burns, J. (2009). Three tenuous rings/arcs for three tiny moons. *Icarus*, 199(2):378–386.
- [12] Jacobson, R. A., Antreasian, P. G., Bordi, J. J., Criddle, K. E., Ionasescu, R., Jones, J. B., Mackenzie, R. A., Meek, M. C., Parcher, D., Pelletier, F. J., Owen Jr., W. M., Roth, D. C., Roundhill, I. M., and Stauch, J. R. (2006). The gravity field

- of the saturnian system from satellite observations and spacecraft tracking data. *The Astronomical Journal*, 132:2520–2526.
- [13] Lasumcty (2007). Orbit1.svg. Disponível em Wikimedia Commons sob a licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 (CC BY-SA 3.0). Acesso em: 01 nov. 2024.
- [14] Longaretti, P.-Y. (1989). Uranian ring dynamics: An analysis of multimode motions. *Icarus*, 82(2):281–287.
- [15] Murray, C. D. and Dermott, S. F. (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press.
- [16] NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute (2004a). Pia06099: The encke gap as never seen before. Accessed: 2024-08-25.
- [17] NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute (2004b). Pia06536 rings of saturn (sweeping beauty). <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA06536>. Accessed: 2024-08-20.
- [18] NASA/JPL-Caltech/Space Science Institute (2017). Pia21449 small wonders. <https://www.jpl.nasa.gov/images/pia21449-small-wonders>. Accessed: 2024-08-20.
- [19] NASA/JPL/Space Science Institute (2008). The Anthe Arc. Imagem capturada pela sonda Cassini mostrando o arco de material orbitando junto com a lua Anthe de Saturno.
- [20] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2nd edition. The second edition, published in 1992.
- [21] Renner, S. and Sicardy, B. (2006). Use of the geometric elements in numerical simulations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94(3-4):237–248.
- [22] Roatsch, T., Wählich, M., Scholten, F., Hoffmeister, A., Matz, K.-D., Denk, T., Neukum, G., Thomas, P., Helfenstein, P., and Porco, C. (2006). Mapping of the icy saturnian satellites: First results from cassini-iss. *Planetary and Space Science*, 54(12):1137–1145. Surfaces and Atmospheres of the Outer Planets, their Satellites and Ring Systems from Cassini-Huygens Data.
- [23] Spitale, J. N., Jacobson, R. A., Porco, C. C., and Owen, W. M. (2006). The orbits of saturn’s small satellites derived from combined historic and cassini imaging observations. *The Astronomical Journal*, 132(2):692–710.
- [24] Thomas, P. C. and Helfenstein, P. (2020). The small inner satellites of saturn: Shapes, structures and some implications. *Icarus*, 344:113355.

A Transformada Rápida de Fourier

A Transformada de Fourier é uma ferramenta matemática utilizada para converter sinais do domínio do tempo para o domínio da frequência e vice-versa. Esta permite decompor uma função temporal $h(t)$ em suas componentes de frequência, representando-a como uma soma de senos e cossenos.

Matematicamente, a Transformada de Fourier de uma função contínua $h(t)$ é definida como:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{2\pi i f t} dt \quad (\text{A1})$$

onde $H(f)$ é a representação da função no domínio da frequência.

A transformada inversa, que permite retornar do domínio da frequência para o domínio do tempo, é dada por:

$$h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)e^{-2\pi i f t} df \quad (\text{A2})$$

Quando lidamos com uma função contínua $h(t)$, muitas vezes só podemos medir seus valores em intervalos discretos de tempo devido a limitações de hardware ou de processamento. Esses valores discretos são amostras da função em momentos específicos, separados por um intervalo de tempo fixo Δ . A função $h(t)$ em intervalos Δ é representada como:

$$h_n = h(n\Delta) \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A3})$$

Δ é o intervalo de tempo entre amostras consecutivas. Por exemplo, se Δ for medido em segundos, a taxa de amostragem ($\frac{1}{\Delta}$) é a recíproca de Δ , ou seja, o número de amostras por segundo.

Existe também uma frequência especial chamada de Frequência Crítica de Nyquist, definida como:

$$f_c \equiv \frac{1}{2\Delta} \quad (\text{A4})$$

Ela é a metade da taxa de amostragem, ou seja, se você estiver um total de a 1000 amostras por segundo, a frequência de Nyquist será de 500 Hz, e define o limite máximo de frequência que você pode representar corretamente com a sua taxa de amostragem.

Se uma onda senoidal tem exatamente a frequência de Nyquist (f_c), ela terá como amostra exatamente dois pontos por ciclo (um no pico positivo e outro no pico negativo). Se a frequência for maior que f_c , os pontos de amostragem não serão suficientes para capturar de forma adequada o comportamento da onda.

Para contornar este problema é utilizado o Teorema da Amostragem que afirma que se uma função contínua $h(t)$ for limitada em banda, ou seja, se seu espectro $H(f)$ for zero para todas as frequências $|f|f_c$, então $h(t)$ é completamente determinada por suas

amostras h_n . Isto é, a função contínua pode ser reconstruída perfeitamente a partir das suas amostras por meio da seguinte soma infinita:

$$h(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n \frac{\sin[2\pi f_c(t - n\Delta)]}{\pi(t - n\Delta)} \quad (\text{A5})$$

Essa equação mostra que, ao amostrar uma função banda limitada adequadamente, toda a informação sobre a função original está contida nas amostras h_n .

Ao tentar representar frequências maiores que a frequência de Nyquist, estas não serão representadas corretamente no sinal amostrado, isto leva ao fenômeno chamado aliasing. Isso significa que as componentes de frequência acima de f_c "se dobram" sobre as frequências mais baixas, aparecendo falsamente como se fossem componentes de frequência dentro do intervalo $-f_c < f < f_c$.

Isso resulta em uma distorção dos dados amostrados, onde componentes de alta frequência são erroneamente representados como componentes de baixa frequência. O aliasing ocorre porque as amostras não são suficientes para distinguir entre diferentes ondas de alta frequência que, devido à amostragem insuficiente, parecem ter a mesma forma.

No caso de uma quantidade amostral de dados não podemos calcular a integral da eq. (A1) diretamente porque só temos um número finito de amostras. Em vez disso, é utilizada a Transformada de Fourier Discreta (H_n), que é uma soma finita que aproxima a integral da eq. (A1) apenas com valores discretos:

$$f_n \equiv \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (\text{A6})$$

Note que os valores extremos de n na equação acima correspondem exatamente aos limites inferior e superior da faixa de frequência crítica de Nyquist, estes valores de n não são independentes, mas todos os outros são. Isso reduz a contagem para N :

$$H(f_n) \approx \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i f_n t_k} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N} \quad (\text{A7})$$

$$H_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N} \quad (\text{A8})$$

A Transformada de Fourier Discreta transforma N números complexos h_k em N números complexos H_n , representando a informação de frequência do sinal amostrado. Além disso esta também compartilha várias propriedades com a Transformada de Fourier contínua, como simetria, convolução e correlação, e a inversa da Transformada Discreta é dada por:

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-2\pi i k n / N} \quad (\text{A9})$$

Imaginando um caso onde existam N pontos de dados, a Transformada de Fourier Discreta exige N^2 operações para computar a transformada completa, ou seja, um grande número de operações. Isso torna o processo lento e ineficiente, especialmente para conjuntos de dados grandes, por este motivo é utilizada a Transformada Rápida de Fourier, uma versão otimizada do cálculo da Transformada de Fourier Discreta que reduz a complexidade computacional do problema.

Para entender como a Transformada Rápida de Fourier atinge essa eficiência, a Transformada Discreta pode ser representada como uma multiplicação de matrizes. Definimos W como um número complexo:

$$W \equiv e^{2\pi i/N} \quad (\text{A10})$$

então eq. (A10) pode ser escrito como:

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} h_k \quad (\text{A11})$$

Isso sugere que a Transformada de Fourier Discreta é essencialmente uma multiplicação de vetor por matriz, onde a matriz tem elementos que são potências de W . Podemos determinar ainda o chamado Lema de Danielson-Lanczos, que mostra que a Transformada de Fourier Discreta de comprimento N pode ser dividida em duas transformadas menores, cada uma de comprimento $N/2$:

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi ijk/N} f_j \quad (\text{A12})$$

$$= \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi ijk(2j)/N} f_{2j} + \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi ijk(2j+1)/N} f_{2j+1}$$

$$F_k = \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi ijk/(N/2)} f_{2j} + \sum_{j=0}^{N/2-1} e^{2\pi ijk/(N/2)} f_{2j+1} \quad (\text{A13})$$

$$F_n^e + W^k F_n^o$$

Onde F_n^e e F_n^o são as Transformada de Fourier Discretas das partes par e ímpar dos dados, respectivamente. Esse processo pode ser repetido recursivamente até que a Transformada de Fourier Discreta seja reduzida a transformadas de comprimento 1, o que é trivial de calcular.

Para implementar a Transformada Rápida de Fourier de forma eficiente, os dados devem ser reordenados em uma sequência de "bit reverso". Isso significa que, para cada índice j , os bits de j são invertidos para formar um novo índice j' , e o valor h_j é movido para a posição $h_{j'}$. Essa reordenação facilita a aplicação eficiente do Lema de Danielson-Lanczos. Em conclusão o algoritmo da Transformada Rápida de Fourier consiste em duas partes principais:

- Reordenação dos dados em ordem de bit reverso: Isso organiza os dados de modo que o Lema de Danielson-Lanczos possa ser aplicado de maneira simples e sistemática;
- Cálculo da Transformada Rápida por meio de combinações recursivas: Uma vez que os dados estejam em ordem, o algoritmo aplica recursivamente o Lema de Danielson-Lanczos, combinando pares de transformadas de tamanho crescente até que toda a Transformada de Fourier Discreta seja calculada.

Mais detalhes da aplicação da Transformada Rápida de Fourier no âmbito da ciência da computação pode ser encontrado no capítulo 12 do livro [20, Numerical Recipes in Fortran 77].