

Dimitar K. Dimitrov

**Polinômios e Funções Inteiras
com Zeros Reais**



Polinômios e Funções Inteiras com Zeros Reais

DIMITAR K. DIMITROV

*Departamento de Ciências de Computação e Estatística
IBILCE, Universidade Estadual Paulista
15054-000 São José do Rio Preto
SP, Brasil*



857/99

Tese apresentada ao Departamento de Ciências de Computação e Estatística, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Livre-Docente.

- 1998 -

for zeroado



Índice

INTRODUÇÃO

1	INTRODUÇÃO	2
2	A HIPÓTESE DE RIEMANN E FUNÇÕES INTEIRAS DA CLASSE DE LAGUERRE-PÓLYA	4
2.1	A HIPÓTESE DE RIEMANN	4
2.2	FUNÇÕES INTEIRAS DA CLASSE DE LAGUERRE-PÓLYA	5
3	DESIGUALDADES DE LAGUERRE E DE TURÁN E EXTENSÕES. AS CONJECTURAS DE PÓLYA E DE KARLIN	7
3.1	POLINÔMIOS DE JENSEN. DESIGUALDADES DE LAGUERRE E DE TURÁN.	7
3.2	AS CONJECTURAS DE PÓLYA E DE KARLIN	9
3.3	A EQUIVALÊNCIA DAS CONJECTURAS DE PÓLYA E DE KARLIN	11
3.4	UM CONTRA-EXEMPLO	15
3.5	POLYNÔMIOS E FUNÇÕES INTEIRAS PARA OS QUAIS AS CONJECTURAS VALEM	17
4	CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES PARA UM POLINÔMIO TER SOMENTE ZEROS REAIS	22
4.1	ALGUNS RESULTADOS CLÁSSICOS	22
4.2	NOVAS CONDIÇÕES NECESSÁRIAS EM TERMOS DE DETERMINANTES	24



Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar algumas condições necessárias e suficientes para que polinômios e funções inteiras tenham somente zeros reais. O estudo é justificado pela conexão deste tipo de problema com a famosa hipótese de Riemann. Depois da recente demonstração de Andrew J. Wiles do Teorema de Fermat, parece que a Hipótese de Riemann é o maior desafio em matemática, que ainda está em aberto.

Existem muitas condições necessárias e/ou suficientes sob as quais a hipótese vale. A maioria delas é dada em termos de complicadas desigualdades funcionais ou integrais. Algumas delas são mencionadas na Seção 3. Não é preciso dizer que nenhuma das condições suficientes foi provada ainda. Além disso, as desigualdades são tão complicadas, que será muito difícil verificá-las em computador.

Uma das idéias principais para provar que os zeros não-triviais da função ζ de Riemann estão na reta $Re(z) = 1/2$, que é exatamente o enunciado da hipótese de Riemann, é provar que a função ξ de Riemann, que é uma função inteira real, par, de ordem um, tem somente zeros reais. A hipótese pode ser reduzida então a provar que uma função inteira desse tipo tem somente zeros reais negativos.

Existia um problema em aberto de Karlin, que afirma que as condições necessárias para que uma função inteira φ tenha somente zeros reais e negativos são que alguns determinantes de Hankel, formados pelos valores de φ e de suas derivadas consecutivas, possuam sinais constantes para valores positivos dos argumentos. Recentemente foi provado pelo autor em [10], que um problema antigo de Pólya implica que o problema de Karlin é verdadeiro. Precisamente, foi mostrado que se o problema de Pólya é resolvido, isso implicaria imediatamente ser verdade o problema de Karlin, o que, por outro lado, daria condições necessárias para a hipótese de Riemann. Na demonstração, dada no trabalho [10], usamos um trabalho de Craven e Williamson [8] que afirma que os polinômios de Jensen, associados com uma função inteira da classe de Laguerre-Pólya, são distintos. Algum tempo atrás, de-



pois da publicação do trabalho [10] fomos informados pelo Professor Csordas que a demonstração em [8] estava errada. Neste trabalho, corrigimos a nossa demonstração de modo a evitar-mos o uso do resultado do artigo [8]. Um dos resultados principais desta tese são contra-exemplos às conjecturas de Pólya e de Karlin.

Um resultado de Jensen pode ser usado para reduzir o problema inicial de caracterização das funções inteiras com zeros reais e negativos para o problema de caracterização de todos os polinômios reais, que têm somente zeros reais e negativos. Algumas condições necessárias e/ou suficientes para que um polinômio tenha somente zeros reais são conhecidas. Elas são dadas por Hermite e Schoenberg. As condições de Hermite e de Schoenberg são dadas em termos de sequências de determinantes positivos. É interessante mencionar que os casos mais simples das condições de Hermite e de Schoenberg, e também das condições do problema de Karlin são as desigualdades de Turán.

Alguns resultados muito recentes do autor dão novas condições necessárias para um polinômio ou função inteira ter somente zeros reais. Outro resultado principal da tese é uma extensão dessas condições.

Gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho, em particular ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, a Profa. Dra. Eliana X. L. de Andrade, ao Prof. Dr. Sabastião P. Martins e a todos os colegas do Departamento de Ciências da Computação e Estatística.

Capítulo 2

A HIPÓTESE DE RIEMANN E FUNÇÕES INTEIRAS DA CLASSE DE LAGUERRE-PÓLYA

2.1 A HIPÓTESE DE RIEMANN

A função zeta de Riemann $\zeta(z)$ é definida por

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad (2.1)$$

ou, equivalentemente, por

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}.$$

Aqui z é complexo, $z = x + iy$. A série de Dirichlet (2.1) é convergente para $x > 1$ e uniformemente convergente em todo compacto de $\{x \geq 1 + \delta\}$, $\delta > 0$. Então (2.1) define uma função analítica $\zeta(z)$ para $x > 1$. A função zeta de Riemann pode ser estendida analiticamente através dessa região pela equação funcional

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin(\pi z/2) \Gamma(1-z) \zeta(1-z).$$

É bem conhecido que os únicos zeros reais de $\zeta(z)$ são $-2, -4, -6, \dots$ e $\zeta(z)$ tem um número infinito de zeros não-reais e todos eles pertencem à faixa $0 \leq \text{Re}(z) \leq 1$. Em 1859 Riemann colocou sua famosa hipótese:



Todos os zeros não-reais de $\zeta(z)$ pertencem a $\text{Re}(z) = 1/2$.

A função ξ de Riemann é definida por

$$\xi(iz) = \frac{1}{2}(z^2 - 1/4)\pi^{-z/2-1/4}\Gamma(z/2 + 1/4)\zeta(z + 1/2), \quad (2.7)$$

onde Γ é a função gama. Então a hipótese de Riemann é equivalente a dizer que a função ξ de Riemann tem somente zeros reais. A função $\xi(z)$ é uma função inteira de ordem um. Além disso, ela pode ser representada na forma

$$\xi(x/2) = 8 \int_0^\infty \Phi(t) \cos xt dt,$$

onde

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n^4 \pi^2 e^{9t} - 3n^2 \pi e^{5t}) \exp(-n^2 \pi e^{4t}). \quad (2.2)$$

Daí,

$$\frac{1}{8}\xi(x/2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \hat{b}_k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (2.3)$$

com

$$\hat{b}_k = \int_0^\infty t^{2k} \Phi(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

Colocando $z = -x^2$ obtemos a função inteira

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{b}_k \frac{z^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{\gamma}_k \frac{z^k}{k!}, \quad \hat{\gamma}_k = \frac{k!}{(2k)!} \hat{b}_k. \quad (2.5)$$

de ordem $1/2$. Então a hipótese de Riemann é equivalente a dizer que a função $F(z)$, definida por (2.5) tem somente zeros reais negativos.

A monografia de Titchmarsh [26] contém informações completas sobre as funções ζ e ξ de Riemann, e sobre a hipótese de Riemann.

2.2 FUNÇÕES INTEIRAS DA CLASSE DE LAGUERRE-PÓLYA

Uma função real inteira $\psi(x)$ é da *classe de Laguerre-Pólya* se $\psi(x)$ pode ser representada da forma

$$\psi(x) = cx^m e^{-\alpha x^2 + \beta x} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x/x_k) e^{-x/x_k}, \quad (2.6)$$



onde c, β e x_k são reais, $\alpha \geq 0$, m é um número inteiro não-negativo e $\sum x_k^{-2} < \infty$. Se ψ é da classe de Laguerre-Pólya, escreveremos $\psi \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$. Uma função real inteira $\varphi(x)$ é da *classe de Laguerre-Pólya do tipo I* se $\varphi(x)$ ou $\varphi(-x)$ pode ser representada na forma

$$\varphi(x) = cx^m e^{\sigma x} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x/x_k), \quad (2.7)$$

onde c é real, $\sigma \geq 0$, m é um número inteiro não-negativo, $x_k > 0$, e $\sum 1/x_k < \infty$. Se φ é da classe de Laguerre-Pólya do tipo I, escreveremos $\varphi \in \mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$. Adotaremos as notações de [5, 19, 24] onde são encontradas propriedades das funções da classe de Laguerre-Pólya. A classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ consiste de funções inteiras que são limites uniformes locais (isto é, limites uniformes em qualquer conjunto compacto do plano complexo) de polinômios com somente zeros reais e as funções em $\mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$ são limites uniformes locais de polinômios cujos zeros são todos reais e positivos ou, todos reais e negativos. É claro que $\mathcal{L} - \mathcal{P}(I) \subset \mathcal{L} - \mathcal{P}$. Uma observação importante de Pólya e Schur [23] é que, se uma função

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \frac{x^k}{k!} \quad (2.8)$$

é da classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}$, cujos coeficientes de Maclaurin γ_k , $k = 0, 1, \dots$, são não-negativos, então $\varphi \in \mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$ e, além disso, o termo constante c na representação de φ na forma (2.7) é positivo.

Portanto, pelo teorema de Hadamard, a hipótese de Riemann é equivalente a dizer que a função real inteira F , definida por (2.2), (2.4) e (2.5), é da classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$ (veja Pólya e Schur [23] e Boas [2, p. 24]).

Como foi mencionado na introdução, condições necessárias e/ou suficientes para que uma função seja da classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ ou $\mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$ são conhecidas.

TEOREMA 1 (Laguerre [15]) *Seja φ pertencer a $\mathcal{L} - \mathcal{P}$. Então*

$$(\varphi^{(k+1)}(x))^2 - \varphi^{(k)}(x) \varphi^{(k+2)}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

Extensões das desigualdades de Laguerre foram obtidas por M. L. Patrick.

TEOREMA 2 (Patrick [20]) *Seja φ pertencer a $\mathcal{L} - \mathcal{P}$. Então*

$$\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k+j}}{(2k)!} \binom{2k}{j} \varphi^{(j)}(x) \varphi^{(2k-j)}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

As correspondentes desigualdades discretas

$$\sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k+j}}{(2k)!} \binom{2k}{j} \gamma_j \gamma_{2k-j} \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

Capítulo 3

DESIGUALDADES DE LAGUERRE E DE TURÁN E EXTENSÕES. AS CONJECTURAS DE PÓLYA E DE KARLIN

3.1 POLINÔMIOS DE JENSEN. DESIGUALDADES DE LAGUERRE E DE TURÁN.

Como foi mencionado na introdução, condições necessárias e/ou suficientes para que uma função seja da classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ ou $\mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$ são conhecidas.

TEOREMA 1 (Laguerre [13]) *Seja φ pertencente a $\mathcal{L} - \mathcal{P}$. Então*

$$(\varphi^{(k+1)}(x))^2 - \varphi^{(k)}(x)\varphi^{(k+2)}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

Extensões das desigualdades de Laguerre foram obtidas por M. L. Patrick.

TEOREMA 2 (Patrick [20]) *Seja φ pertence a $\mathcal{L} - \mathcal{P}$. Então*

$$\sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{j+k}}{(2k)!} \binom{2k}{j} \varphi^{(j)}(x) \varphi^{(2k-j)}(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

As correspondentes desigualdades discretas

$$\sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^{j+k}}{(2k)!} \binom{2k}{j} \gamma_j \gamma_{2k-j} \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.3)$$

de (3.2) para $x = 0$, foram obtidas primeiramente por Jensen.

Jensen provou também que a hipótese de Riemann vale se, e somente se,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) \Phi(\beta) e^{i(\alpha+\beta)x} (\alpha - \beta)^n d\alpha d\beta, \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots$$

As desigualdades de Patrick são extensões das desigualdades de Laguerre. Por outro lado, Jensen provou uma caracterização importante das funções de $\mathcal{L} - \mathcal{P}$.

TEOREMA 3 (Jensen) *A função inteira φ , definida por (2.8), pertence a $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ se, e somente se, os polinômios*

$$g_n(z) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_k z^k, \quad n = 1, 2, \dots$$

têm somente zeros reais. Outrossim, φ com $\gamma_k \geq 0$ pertence a $\mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$ se, e somente se, os polinômios $g_n(z)$ têm somente zeros reais não-positivos.

Os polinômios $g_n(z)$ são chamados polinômios de Jensen associados a φ . Uma demonstração desse fato fundamental foi feita pela primeira vez em Pólya e Schur [23]. Craven e Csordas [5, Lema 2.2] provaram que a sequência de polinômios $p_n(z) = g_n(z/n)$ converge local e uniformemente para $\varphi(z)$. Então $p_n^{(j)}$ converge local e uniformemente para $\varphi^{(j)}$ quando n tende para infinito, para qualquer número inteiro não-negativo j . Isso já prova que se uma função pertence à classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}$, então todas as suas derivadas são também de $\mathcal{L} - \mathcal{P}$. O mesmo enunciado vale para as funções de $\mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$. Observe que os polinômios de Jensen, associados a $\varphi^{(j)}(x)$ são

$$g_{n,j}(z) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_{k+j} z^k.$$

Assim, se $\varphi \in \mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$ e $\gamma_k \geq 0$, então todos os polinômios

$$g_{n,j}(z) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_{k+j} z^k, \quad n, j = 0, 1, 2, \dots$$

têm somente zeros reais e não-positivos.

Consideremos os polinômios

$$p_{k-1,2}(z) = \gamma_{k-1} + 2\gamma_k z + \gamma_{k+1} z^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Pelas observações acima, concluímos que se uma função real inteira de $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ tem coeficientes de Maclaurin, γ_k , positivos, então

$$\gamma_k^2 - \gamma_{k-1} \gamma_{k+1} > 0 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots$$



Essas desigualdades são chamadas desigualdades de Turán. Elas podem ser consideradas como as análogas discretas das desigualdades de Laguerre (3.1). Em 1927 Pólya [22] conjecturou que as desigualdades de Turán valem para os coeficientes de Maclaurin da função F . Precisamente, devido a (2.5), a conjectura de Pólya pode ser dada por

$$(2k+1)(\hat{b}_k)^2 - (2k-1)\hat{b}_{k-1}\hat{b}_{k+1} > 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Quase sessenta anos depois Csordas, Norfolk e Varga [6] provaram as últimas desigualdades, assim verificando a conjectura de Pólya. Antes da prova rigorosa, um enorme trabalho computacional foi feito em um supercomputador do Centro Computacional da Universidade de Kent State. Referimo-nos a um bom resumo de Varga [27, Capítulo 3] para a demonstração da conjectura e outros aspectos teóricos e computacionais da hipótese de Riemann.

3.2 AS CONJECTURAS DE PÓLYA E DE KARLIN

Um problema aparece naturalmente: Como obter condições necessárias e/ou suficientes para que uma função real inteira φ seja de $\mathcal{L} - \mathcal{P}$, que é equivalente ao problema de achar condições necessárias e/ou suficientes para que todos os polinômios de Jensen tenham somente zeros reais não-positivos. Um bom ponto de partida são as desigualdades de Laguerre e de Turán. Existia um interessante problema de Karlin em aberto, que dá condições necessárias para que uma função pertença a $\mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$ em termos de sequências de determinantes de Hankel positivos.

Para toda função f , $2k-2$ vezes continuamente diferenciável, o determinante de Hankel de ordem k , $H_k(f; x)$, é definido por

$$H_k(f; x) = \det(f^{(i+j)}(x))_{i,j=0}^{k-1}.$$

Formulamos o problema de Karlin em forma de conjectura:

CONJECTURA 1 (Karlin [12]) *Para toda função $\varphi \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ com coeficientes de Maclaurin γ_k não-negativos e para todo $q = 0, 1, \dots$ e $k = 2, 3, \dots$,*

$$(-1)^{k(k-1)/2} H_k(\varphi^{(q)}; x) \geq 0, \quad \text{para } x \geq 0. \quad (3.4)$$

Como já foi mencionado por Craven e Csordas [5, p. 258], a conjectura aparece com erro nas páginas 389-190 de [12]. A conjectura de Karlin, como enunciada acima, foi formulada como “Open Problem 3.4” em [5].



Observe que para $k = 2$ as desigualdades (3.4) reduzem-se às bem conhecidas desigualdades de Laguerre (3.1), que valem ainda para todo x real e para toda função inteira de $\mathcal{L} - \mathcal{P}$. Craven e Csordas [5] provaram as desigualdades (3.4) para $k = 3$.

Um caso particularmente interessante das desigualdades (3.4) é quando $x = 0$. Nesse caso, (3.4) é da forma

$$(-1)^{k(k-1)/2} \det \begin{pmatrix} \gamma_q & \gamma_{q+1} & \cdots & \gamma_{q+k-1} \\ \gamma_{q+1} & \gamma_{q+2} & \cdots & \gamma_{q+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{q+k-1} & \gamma_{q+k} & \cdots & \gamma_{q+2k-2} \end{pmatrix} \geq 0. \quad (3.5)$$

Observe que enquanto as desigualdades conjecturadas (3.4) podem ser consideradas como extensões naturais das desigualdades de Laguerre, as desigualdades (3.5) são extensões naturais das desigualdades de Turán

$$\gamma_k^2 - \gamma_{k-1}\gamma_{k+1} \geq 0, \quad q = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Como já foi mencionado, Craven e Csordas [5] provaram a conjectura de Karlin para $k = 3$. Eles observaram também [5, Eq. (2.63)] que as desigualdades (3.5) valem para $k = 3$ para toda função inteira de $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ com coeficientes de Maclaurin γ_q não-negativos.

Discutiremos um outro problema muito antigo de Pólya, mais forte do que o problema de Karlin. Para formular o problema de Pólya precisamos de uma definição.

DEFINIÇÃO 1 A sequência finita de funções $f_0, \dots, f_n$ satisfaz à regra de sinais de Descartes no intervalo (a, b) se o número de zeros em (a, b) de qualquer combinação linear não-trivial

$$\alpha_0 f_0(x) + \dots + \alpha_n f_n(x)$$

é menor ou igual ao número de mudanças de sinal na sequência $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

Formulamos em forma de conjectura também:

CONJECTURA 2 (Pólya) Seja p um polinômio de grau precisamente n com zeros reais distintos $\eta_1 < \dots < \eta_n$. Prove que a sequência $p, p', \dots, p^{(n)}$ satisfaz à regra de sinais de Descartes em (η_n, ∞) .

Esse problema aparece em um rodapé de importante artigo de Schoenberg [25]. Schoenberg atribue esse problema a Pólya. O enunciado do problema é muito natural. Observe que as funções $1, x, \dots, x^n$ satisfazem à regra de sinais de Descartes em

$(0, \infty)$ e a demonstração foi feita por Descartes. Um resultado bem conhecido de Runge afirma que a sequência $1, x-x_1, (x-x_1)(x-x_2), \dots, (x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_n)$, onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números reais arbitrários, satisfaz à regra de sinais de Descartes para $x > \max\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$. A sequência de polinômios ortogonais $p_0, p_1, \dots, p_n$, normalizados de modo que os coeficientes dos termos de maior grau tenham mesmos sinais, também satisfaz à regra de sinais de Descartes para $x > \zeta_n$, onde ζ_n é o maior zero de $p_n(x)$. Esse último resultado, como enunciado aqui, foi provado primeiro por Obrechhoff [16, 17, 18] e redescoberto mais tarde por Schoenberg [25]. As demonstrações de Obrechhoff e de Schoenberg são diferentes. O fato de que a sequência de polinômios de Legendre $P_0, P_1, \dots, P_n$ satisfaz à regra de sinais de Descartes para $x > \zeta_n$, onde ζ_n é o maior zero de $P_n(x)$, foi provado muito antes por Laguerre [13]. M. Marden [14] deu uma demonstração do resultado de Obrechhoff-Schoenberg para os polinômios ortogonais clássicos. As demonstrações de Laguerre e de Marden usam a equação diferencial de segundo grau satisfeita pelos polinômios ortogonais clássicos. Um resultado de Bochner [3] (veja também [4, p. 150]) afirma que os únicos polinômios ortogonais associados a medida real que satisfazem a uma equação diferencial de segundo grau, são os polinômios ortogonais clássicos. Então, os métodos de Laguerre e de Marden não podem ser usados para provar o resultado geral de Obrechhoff-Schoenberg.

Observe que as últimas três sequências de polinômios têm propriedades comuns. Os coeficientes dos termos de maior grau de todos os polinômios têm o mesmo sinal, todos os seus zeros são reais e os zeros de dois polinômios consecutivos se entrelaçam. Isto é, se $\xi_{k1} < \dots < \xi_{kk}$ e $\xi_{k-1,1} < \dots < \xi_{k-1,k-1}$ são os zeros do k -ésimo e $(k-1)$ -ésimo polinômios, respectivamente, então $\xi_{ki} \leq \xi_{k-1,i} \leq \xi_{k,i+1}$ para $i = 1, \dots, k-1$. Assim, podemos esperar que os resultados de Descartes, de Runge e de Obrechhoff-Schoenberg possam ser estendidos para qualquer sequência de polinômios com essas propriedades. Este problema foi colocado por Pólya e aparece no mesmo rodapé do artigo de Schoenberg [25], que deu um contra-exemplo simples. Mas, ainda podem existir outras sequências de polinômios com zeros entrelaçados que satisfazem à regra de sinais de Descartes. Um candidato natural é a sequência que aparece no Problema 1.

3.3 A EQUIVALÊNCIA DAS CONJECTURAS DE PÓLYA E DE KARLIN

DEFINIÇÃO 2 A matriz $A = (a_{ij})_{i,j=0}^n$ é chamada totalmente positiva se todos os seus determinantes menores são não-negativos.



Utilizamos a seguinte caracterização fundamental de sequências de polinômios que satisfazem à regra de sinais de Descartes, devida a Schoenberg:

TEOREMA 4 (Schoenberg [25]) *A sequência de polinômios*

$$\begin{aligned} p_0(x) &= a_{00}, \\ p_1(x) &= a_{10} + a_{11}x, \\ p_2(x) &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2, \\ &\vdots \\ p_n(x) &= a_{n0} + a_{n1}x + \cdots + a_{nn}x^n, \end{aligned} \quad (3.5)$$

para que $a_{00} > 0, a_{11} > 0, \dots, a_{nn} > 0$, satisfaz à regra de sinais de Descartes em $(0, \infty)$ se, e somente se, a matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & \cdots & a_{n0} \\ & a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

é totalmente positiva.

Uma consequência quase imediata do Teorema 4 são as seguintes formas equivalentes da conjectura de Pólya:

LEMA 1 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Para todo polinômio p de grau n com zeros distintos $\eta_1 < \dots < \eta_n$, a sequência $p, p', \dots, p^{(n)}$ satisfaz à regra de sinais de Descartes em (η_n, ∞) .

(ii) Para todo polinômio p ,

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x \\ &= x(x - \eta_1) \cdots (x - \eta_n), \end{aligned}$$

cujos zeros $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ são não-positivos, a sequência $p, p', \dots, p^{(n)}$ satisfaz à regra de sinais de Descartes em $(0, \infty)$.

(iii) Para todo polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x$ com zeros reais não-positivos, tal que pelo menos um delas é a origem, a matriz triangular superior

$$\begin{pmatrix} n! & (n-1)!a_{n-1} & \cdots & 1!a_1 & 0 \\ & n! & \ddots & \ddots & 1!a_1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & n! & (n-1)!a_{n-1} \\ & & & & n! \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

é totalmente positiva.

Observe que (i) é simplesmente a afirmação da conjectura de Pólya e que nem em (ii), nem em (iii) requeremos que os zeros de $p(x)$ sejam distintos.

Demonstração. A matriz (3.7) é totalmente positiva se e somente se a matriz

$$\begin{pmatrix} n! & (n-1)!a_{n-1} & \cdots & a_1 & 0 \\ & n! & \ddots & 2a_2 & a_1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & n & a_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

é totalmente positiva. De fato, a matriz (3.7) é obtida da matriz (3.8) multiplicando-se a k -ésima linha por $(k-1)!$, $k = 1, \dots, n+1$.

É claro que não perdemos generalidade se normalizarmos p de modo que ele seja mônico e colocarmos $\eta_n = 0$ em (i).

Assim, Teorema 4 faz a equivalência entre (ii) e (iii), bem como a implicação (iii) $\Rightarrow$ (i) obvias.

Suponha que (i) vale para todo

$$\begin{aligned} p(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x \\ &= x(x - \eta_1) \cdots (x - \eta_{n-1}), \end{aligned}$$

tal que $\eta_1 < \dots < \eta_{n-1} < 0$. Então, pelo Teorema 1, todo menor de (3.8), ou equivalentemente, todo menor Δ de (3.7) é não-negativo. Obviamente Δ é uma função contínua de $\eta_1 < \dots < \eta_{n-1}$. Desde que este menor é não-negativo no simplex aberto $\Xi = \{\eta_1 < \dots < \eta_{n-1} < 0\}$, então ele é não-negativo no fecho de Ξ e (iii) vale. $\square$

Se $f_0, \dots, f_n$ são funções suficientemente suaves, o Wronskiano $W(f_0, \dots, f_n; x)$ de $f_0, \dots, f_n$ no ponto x é definido por

$$W(f_0, \dots, f_n; x) = \det \left(f_j^{(i)}(x) \right)_{i,j=0}^n.$$

Uma outra caracterização importante de funções que satisfazem à regra de Descartes é devida a Pólya e Szegő:

TEOREMA 5 (Pólya e Szegő [24]) *As condições necessárias e suficientes para que a sequência de funções $f_0, \dots, f_n$ de $C^n[a, b]$, não-identicamente nulas em (a, b) , satisfaz à regra de sinais de Descartes em (a, b) são que para qualquer $\nu_1, \dots, \nu_k$, $0 \leq \nu_1 < \dots < \nu_k \leq n$ o Wronskiano $W(f_{\nu_1}, \dots, f_{\nu_k})$ é diferente de zero em (a, b) e quaisquer dois Wronskianos com mesmo número k de colunas têm mesmo sinal para $k = 1, \dots, n$.*



Podemos mencionar que a exigência de nenhuma das funções ser identicamente zero em (a, b) é essencial. Em [24] isso está implicitamente aceito.

Apesar de darmos contra-exemplos para as conjecturas, provaremos que a afirmação da conjectura de Pólya implica na afirmação da conjectura de Karlin.

TEOREMA 6 *Suponha que a afirmação do Conjectura 2 seja verdadeira. Seja $\varphi \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ cujos coeficientes de Maclaurin γ_k são não-negativos. Então, a desigualdade (3.4) vale para todo $q = 0, 1, \dots$ e todo $k = 2, 3, \dots$*

Como já mencionamos, a demonstração em [10] usou um resultado incorreto de Csordas e Williamsion [8]. A demonstração apresentada em seguida não usa esse resultado.

Demonstração do Teorema 6. Desde que a função φ é da classe de Laguerre-Pólya e os coeficientes de Maclaurin são não-negativos, então existe uma sequência de polinômios $\{p_n\}$ somente com zeros não-positivos, tal que $\{p_n\}$ converge localmente uniformemente (uniformemente em todo compacto do plano complexo) para φ . Craven e Csordas [5, Lemma 2.2] provaram que a sequência $\{g_n(z/n)\}$, onde $g_n(z)$ são os polinômios de Jensen associados a φ , converge localmente uniformemente para φ . Por outro lado, se φ é de $\mathcal{L} - \mathcal{P}$, então, para todo n positivo, o polinômio $g_n(z)$ tem somente zeros reais [23] (veja também [5]). Desde que os coeficientes de $g_n(z)$ são não-negativos, então todos os seus zeros são não-positivos. Assim, podemos escolher

$$p_n(z) = g_n(z/n). \quad (3.9)$$

Desde que a convergência de $p_n(z)$ para $\varphi(z)$ é uniforme nos subconjuntos compactos do plano complexo, então, para todo j positivo, a sequência $\{p_n^{(j)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ converge localmente uniformemente para $\varphi^{(j)}(z)$. Pelo Teorema de Roll os polinômios $p_n^{(j)}(z)$ têm somente zeros reais não-positivos. Consequentemente $\varphi^{(j)}(z)$ também pertença à classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ e provamos que $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ é fechado sob a diferenciação. A primeira demonstração deste fato foi feita por Pólya e Schur [23].

Observe que os polinômios de Jensen, associados com $\varphi^{(j)}(z)$ são

$$g_{n,j}(z) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \gamma_{k+j} z^k.$$

Então, se $\varphi \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$ e os coeficientes de Maclaurin são não-negativos, todos os polinômios $g_{n,j}(z)$, $n, j = 0, 1, 2, \dots$, têm somente zeros reais e não-negativos.

Agora podemos provar que a sequência $\gamma = \{\gamma_k\}$ dos coeficientes de Maclaurin γ_k , $\gamma_k \geq 0$ de uma função da classe in $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ não pode ter "lacunas". Isto significa que γ não possui subsequência

$$\gamma_j \neq 0, \gamma_{j+1} = \dots = \gamma_{j+n-1} = 0, \gamma_{j+n} \neq 0, n \geq 2.$$



De fato, se uma tal subsequência existisse, desde que γ_j and γ_{j+n} são necessariamente positivos, $g_{n,j}(z)$ teria zeros não-reais.

Então, se $\varphi \in \mathcal{L} - \mathcal{P}$, seus coeficientes de Maclaurin são não-negativos e φ não é um polinômio e, se $n \geq m$, onde m é a potência de x em (2.7), o polinômio de Jensen g_n , associado com φ , tem coeficiente de maior grau positivo e, exatamente n zeros não-negativos. Em seguida, até o final da demonstração, suponhamos que φ não é polinômio e que $n \geq m$.

Então, os polinômios p_n , definidos por (3.9) têm somente zeros não-positivos e coeficiente de maior grau positivo. Seja $n \geq q + k - 1$. Supondo que Conjectura 2 é verdadeira, a sequência $p_n, p'_n, \dots, p_n^{(n)}$ satisfaz à regra de Descartes em $(0, \infty)$. Desde que

$$H_k(p_n^{(q)}; x) = W(p_n^{(q)}, \dots, p_n^{(q+k-1)}; x),$$

pelo Teorema 5, $H_k(p_n^{(q)}; x)$ é diferente de zero em $(0, \infty)$. Outrossim, o Teorema 5 implica também que

$$\text{sign } H_k(p_n^{(q)}; x) = \text{sign } W(p_n^{(n-k+1)}, \dots, p_n^{(n)}; x) = \text{sign } H_k(p_n^{(n-k+1)}; x), \text{ para } x > 0.$$

Observe que $H_k(p_n^{(n-k+1)}; x)$ tem elementos nulos abaixo da diagonal secundaria e os elementos desta diagonal são números positivos. Então,

$$\text{sign } H_k(p_n^{(q)}; x) = (-1)^{k(k-1)/2}, \text{ para } x > 0.$$

Agora, quando n diverge, obtemos

$$(-1)^{k(k-1)/2} H_k(\varphi^{(q)}; x) \geq 0, \text{ para } x > 0.$$

Desde que $H_k(\varphi^{(q)}; x)$ é uma função contínua de x em uma vizinhança do ponto 0, a última desigualdade implica:

$$(-1)^{k(k-1)/2} H_k(\varphi^{(q)}; x) \geq 0, \text{ para } x \geq 0.$$

Para completar a demonstração, falta somente mencionar que o Teorema pode ser provado com os mesmos argumentos no caso em que φ é polinômio.

3.4 UM CONTRA-EXEMPLO

Primeiro provaremos:

LEMA 2 A sequência $p, p', \dots, p^{(8)}$, onde $p(x) = x^6(x+1)^2$, não satisfaz à regra de sinais de Descartes em $(0, \infty)$.



Prova. Pela equivalência das afirmações (ii) e (iii) no Lema 1, é suficiente mostrar que, para $n = 8$, pelo menos um menor da matriz triangular superior, tridiagonal $(n+1) \times (n+1)$

$$\begin{pmatrix} n! & 2(n-1)! & (n-2)! & & \\ & n! & 2(n-1)! & (n-2)! & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & n! & 2(n-1)! & (n-2)! \\ & & & & n! & 2(n-1)! \\ & & & & & n! \end{pmatrix},$$

é negativo. Mostramos que o menor $n \times n$

$$\det \begin{pmatrix} 2(n-1)! & (n-2)! & & \\ & n! & 2(n-1)! & (n-2)! \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & n! & 2(n-1)! & (n-2)! \\ & & & & n! & 2(n-1)! \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

é negativo. O sinal deste menor é o mesmo que o sinal do determinante $\Delta_{8,8}$, onde $\Delta_{n,k}$ é o determinante $k \times k$

$$\Delta_{n,k} = \det \begin{pmatrix} 2(n-1) & 1 & & \\ n(n-1) & 2(n-1) & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & n(n-1) & 2(n-1) & 1 \\ & & & n(n-1) & 2(n-1) \end{pmatrix}.$$

Obviamente $\Delta_{n,k}$ satisfaz à fórmula de recorrência

$$\begin{aligned} \Delta_{n,0} &= 1, \\ \Delta_{n,1} &= 2(n-1), \\ \Delta_{n,k+1} &= 2(n-1)\Delta_{n,k} - n(n-1)\Delta_{n,k-1}. \end{aligned}$$

Usando a teoria geral para solução de equações de diferença, achamos

$$\Delta_{n,k} = \frac{(n-1)^{k/2}}{2i} \{(\sqrt{n-1} + i)^{k+1} - (\sqrt{n-1} - i)^{k+1}\}.$$

Em particular,

$$\Delta_{8,8} = -\frac{7^4}{2} 2560,$$

o que prova o lema.

Utilizando novamente o argumento de continuidade na demonstração do Lema 1, podemos concluir que:



COROLÁRIO 1 *Existe uma classe de polinômios $p(x)$ de grau 8 com zeros distintos e reais $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_7 < \eta_8 = 0$, tais que os zeros η_1 e η_2 são suficientemente próximos ao ponto -1 , os zeros $\eta_3 < \eta_4 < \dots < \eta_7$ são próximos ao ponto 0 e $p, p', \dots, p^{(8)}$ não satisfaz à regra de sinais de Descartes em $(0, \infty)$.*

Esse é exatamente o contra-exemplo para o problema de Pólya.

Não entramos em detalhes computacionais. Vale a pena mencionar que a fórmula geral para $\Delta_{n,k}$ permite a construção de uma grande variedade de contra-exemplos desta forma. Parece que $\Delta_{n,n} < 0$ para todo $n \geq 8$ e, $\Delta_{n,k} < 0$ para alguns $k < n$ se n é grande. Por exemplo, para $n = 10$ os determinantes $\Delta_{10,9}$ e $\Delta_{10,10}$ são negativos.

Este contra-exemplo para o problema de Pólya serve como contra-exemplo para problema de Karlin:

COROLÁRIO 2 *Para $p(x) = x^6(x+1)^2$ e $k = 8$ temos*

$$(-1)^{k(k-1)/2} H_k(p; 0) < 0.$$

Precisamos somente rearranjar as colunas de $H_8(p; 0)$ e ver que $(-1)^{28} H_8(p; 0)$ coincide com o determinante (3.10), associado com $p(x)$. Então, o sinal de

$$(-1)^{28} H_8(p; 0)$$

coincide com o sinal de $\Delta_{8,8}$.

3.5 POLYNÔMIOS E FUNÇÕES INTEIRAS PARA OS QUAIS AS CONJECTURAS VALEM

Apesar dos contra-exemplos para as conjecturas, é interessante indicar algumas subclasses de polinômios e de funções inteiras de $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ para as quais as conjecturas valem.

TEOREMA 7 *Suponha que o polinômio*

$$q(x) = a_0 + 1!a_1x + 2!a_2x^2 + \dots + n!a_nx^n$$

tenha coeficientes não-negativos e somente zeros reais não-positivos. Então, o polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

também tem somente zeros reais não-positivos. Além disso, a sequência $p, p', \dots, p^{(n)}$ satisfaz à regra de sinais de Descartes em $(0, \infty)$.



Precisaremos da seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3 A seqüência de números reais $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ é chamada *totalmente positiva* se $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ é uma função inteira e a matriz triangular inferior infinita

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_0 & & & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

é *totalmente positiva*.

A seguinte caracterização para as funções da classe de Laguerre-Pólya com coeficientes de Maclaurin não-negativos em termos de seqüências positivas definidas, devida a Aisen, Edrei, Schoenberg e Whitney [1] tem papel chave nas demonstrações dos resultados deste secção:

TEOREMA 8 A função inteira real $\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k$ com coeficientes não-negativos α_k pertence à classe de Laguerre-Pólya se, e somente se, $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ é totalmente positiva.

Como consequência imediata deste teorema obtemos:

COROLÁRIO 3 O polinômio real $r(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$ com coeficientes não-negativos α_k tem somente zeros reais não-positivos se, e somente se, a matriz triangular inferior infinita

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_0 & & & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \alpha_n & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_0 \\ & \alpha_n & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_0 \\ & & \alpha_n & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

é *totalmente positiva*.



Vale a pena mencionar que a afirmação do Corolário 3 foi conjecturada por Schoenberg e provada por Edrei [11] antes da demonstração do Teorema 8.

Demonstração do Teorema 7. A primeira afirmação do teorema nada mais é do que a afirmação do Teorema de Malo (veja Marden [15] e Obrechhoff [19]). Desde que $q(x)$ tem coeficientes não-negativos e somente zeros reais não-positivos, então, pelo Corolário 3 a seqüência $a_0, 1!a_1, 2!a_2, \dots, n!a_n$ é totalmente positiva. Em particular, a matriz finita

$$\begin{pmatrix} n! & (n-1)!a_{n-1} & \cdots & 1!a_1 & a_0 \\ & n! & \ddots & \ddots & 1!a_1 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & n! & (n-1)!a_{n-1} \\ & & & & n! \end{pmatrix}$$

é totalmente positiva. Agora, o Lema 1 implica que a seqüência $p, p', \dots, p^{(n)}$ satisfaz à regra de sinais de Descartes em $(0, \infty)$.

TEOREMA 9 *Seja a função inteira real*

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k$$

com coeficientes não-negativos γ_k em $\mathcal{L} - \mathcal{P}$. Então,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} x^k$$

também pertence à classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}$. Além disso, para qualquer $q = 0, 1, \dots$, e $k = 2, 3, \dots$

$$(-1)^{k(k-1)/2} H_k(\varphi^{(q)}; x) \geq 0 \quad \text{para } x \geq 0.$$

Primeiramente, forneceremos somente um esboço de uma demonstração. A primeira afirmação é consequência direta do Teorema 7. De fato, desde que os polinômios de Jensen associados a $\psi^{(q)}$ têm somente zeros reais não-positivos, então, pelo Teorema 7, todos os zeros do polinômio de Jensen $g_{n,q}$ associados a $\varphi^{(q)}$ também são não-positivos. Além disso, o Teorema 7 implica em que a seqüência de polinômios formada pelo polinômio $g_{n,q}$ e pelas suas derivadas, satisfaz à regra de sinais de Descartes em $(0, \infty)$. Para completar a demonstração basta lembrar que provando o Teorema 6, provamos de fato a seguinte afirmação: Se, para qualquer número inteiro positivo n a seqüência de polinômios, formada pelo polinômio de Jensen g_n de grau

n , associado a função inteira φ da classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ e pelas suas derivadas consecutivas $g'_n, \dots, g_n^{(n)}$, satisfaz à regra de sinais de Descartes em $(0, \infty)$, então para qualquer $k = 2, 3, \dots$

$$(-1)^{k(k-1)/2} H_k(\varphi; x) \geq 0 \text{ para } x \geq 0.$$

Uma outra demonstração do Teorema 9 pode ser dada utilizando somente o Teorema 8. Desde que ψ é uma função inteira da classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}$ com coeficientes não-negativos, então Teorema 8 implica que a matriz triangular inferior infinita

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_0 & & & & \\ \gamma_1 & \gamma_0 & & & \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

é totalmente positiva.

A fim de provar o Teorema 9 mostraremos que os coeficientes de Maclaurin da função inteira

$$\begin{aligned} H(x) &= (-1)^{k(k-1)/2} H_k(\varphi^{(q)}; x) \\ &= \det \begin{pmatrix} \varphi^{(q+k-1)}(x) & \varphi^{(q+k-2)}(x) & \dots & \varphi^{(q+1)}(x) & \varphi^{(q)}(x) \\ \varphi^{(q+k)}(x) & \varphi^{(q+k-1)}(x) & \dots & \varphi^{(q+2)}(x) & \varphi^{(q+1)}(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \varphi^{(q+2k-2)}(x) & \varphi^{(q+2k-3)}(x) & \dots & \varphi^{(q+k)}(x) & \varphi^{(q+k-1)}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

são não-negativos.

Observe que

$$H(0) = \det \begin{pmatrix} \gamma_{q+k-1} & \gamma_{q+k-2} & \dots & \gamma_{q+1} & \gamma_q \\ \gamma_{q+k} & \gamma_{q+k-1} & \dots & \gamma_{q+2} & \gamma_{q+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{q+2k-2} & \gamma_{q+2k-3} & \dots & \gamma_{q+k} & \gamma_{q+k-1} \end{pmatrix}.$$

Este último determinante é um menor de A e então $H(0) \geq 0$.

Derivando o determinante $H(x)$ linha por linha, obtemos um determinante que difere do determinante $H(x)$ somente pela sua última linha, onde todas as ordens das derivadas são aumentadas de um. Assim, $H'(0)$ é também um menor de A e daí $H'(0) \geq 0$. A segunda derivada de H é soma de dois determinantes. O primeiro difere do determinante $H(x)$ somente pela sua última linha, onde todas as ordens



das derivadas são aumentadas de dois. O segundo determinante difere de $H(x)$ pelas suas duas últimas linhas, onde em cada uma delas as ordens das derivadas são aumentadas de um. Então, $H''(0)$ é soma de dois determinantes que são novamente menores de A e isto implica na desigualdade $H''(0) \geq 0$.

Podemos observar que, para todo m inteiro positivo a derivada $H^{(m)}(x)$ é soma de determinantes e cada um deles consiste de linhas cujos elementos são derivadas consecutivas, em ordem decrescente, de $\varphi(x)$. As ordens das derivadas de $\varphi(x)$ na primeira, ou em qualquer coluna, não são necessariamente consecutivas mas sempre formam uma seqüência crescente. Por isso, $H^{(m)}(0)$ é soma de determinantes, cada um dos quais é um menor de A . Então, $H^{(m)}(0) \geq 0$. Portanto, $H(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$.

SUFICIENTES PARA UM POLINÔMIO TER SOMENTE ZEROS REAIS

4.1 ALGUNS RESULTADOS CLÁSSICOS

Existem duas caracterizações de polinômios com somente zeros reais. A primeira é dada em termos de seqüências totalmente positivas.

DEFINIÇÃO 4 A seqüência finita $a_0, a_1, \dots, a_n$ é chamada totalmente positiva (ou seqüência de freqüência de Pólya) se a matriz infinita

$$A(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

é totalmente positiva.

Edrei provou a seguinte caracterização de polinômios com zeros negativos:

TEOREMA 10 (Edrei [11]) O polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (3.1)$$

Capítulo 4

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFICIENTES PARA UM POLINÔMIO TER SOMENTE ZEROS REAIS

4.1 ALGUNS RESULTADOS CLÁSSICOS

Existem duas caracterizações de polinômios com somente zeros reais.

A primeira é dada em termos de sequências totalmente positivas.

DEFINIÇÃO 4 A sequência finita $a_0, a_1, \dots, a_n$ é chamada *totalmente positiva* (ou *sequência de frequência de Pólya*) se a matriz infinita

$$A(a_0, a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

é *totalmente positiva*.

Edrei provou a seguinte caracterização de polinômios com zeros negativos:

TEOREMA 10 (Edrei [11]) O polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (4.1)$$

tem somente zeros negativos se, e somente se, a sequência $a_0, a_1, \dots, a_n$ é totalmente positiva.

DETERMINANTES

A segunda caracterização de polinômios com somente zeros reais é clássica e devida a Hermite.

Denotaremos por s_k , $k = 0, 1, \dots, n$, as somas de Newton dos zeros $x_1, x_2, \dots, x_n$ do polinômio $p(x)$ definido por (4.1),

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k.$$

TEOREMA 11 (Hermite) *O polinômio $p(x)$, definido por (4.1), tem somente zeros reais se, e somente se, a matriz de Hankel*

$$H_n(s_0, s_1, \dots, s_{2n-2}) = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

é não-negativa definida. Outrossim, $p(x)$ tem somente zeros reais e distintos se, e somente se, $H_n(s_0, s_1, \dots, s_{2n-2})$ é positiva definida.

Pelo critério de Sylvester de matrizes positivas definidas, o polinômio p tem somente zeros reais e distintos se, e somente se, os menores principais de

$$H_n(s_0, s_1, \dots, s_{2n-2})$$

são positivos. Por outro lado, precisamos de condições para que um polinômio tenha somente zeros reais em termos de seus coeficientes de Maclaurin. Assim, precisamos representar primeiro as somas de Newton s_k em termos de coeficientes a_k do polinômio p . Pela fórmula clássica de Vieta

$$\sigma_k = (-1)^{n-k} a_{n-k} / a_n,$$

onde σ_k são as funções simétricas elementares de $x_1, x_2, \dots, x_n$, é suficiente representar as somas de Newton s_k em termos de $\sigma_0 = 1, \sigma_1, \dots, \sigma_n$. Essas representações são conhecidas:

$$s_k = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2\sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \cdots & 0 & 3\sigma_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \sigma_{k-4} & \cdots & 1 & (k-1)\sigma_{k-1} \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & \sigma_{k-3} & \cdots & \sigma_1 & k\sigma_k \end{vmatrix}.$$



4.2 NOVAS CONDIÇÕES NECESSÁRIAS EM TERMOS DE DETERMINANTES

Começamos esta seção com dois fatos básicos. Primeiro, todas as condições suficientes para a hipótese de Riemann são dadas em termos de complicadas desigualdades funcionais ou integrais.

Segundo, as condições dadas em termos de sequências de determinantes, que podem ser verificadas primeiro em computador, são apenas condições necessárias. Recentemente, o autor [9] provou os seguintes resultados:

TEOREMA 12 *Seja a função real inteira ψ , definida por (2.6), da classe de Laguerre-Pólya. Então*

$$4(\gamma_n^2 - \gamma_{n-1}\gamma_{n+1})(\gamma_{n+1}^2 - \gamma_n\gamma_{n+2}) - (\gamma_n\gamma_{n+1} - \gamma_{n-1}\gamma_{n+2})^2 \geq 0, \quad \text{para } n \geq 1.$$

COROLÁRIO 4 *Sejam $\hat{\gamma}_n$ definidos por (2.2), (2.4) e (2.5). Uma condição necessária para a hipótese de Riemann é*

$$4(\hat{\gamma}_n^2 - \hat{\gamma}_{n-1}\hat{\gamma}_{n+1})(\hat{\gamma}_{n+1}^2 - \hat{\gamma}_n\hat{\gamma}_{n+2}) - (\hat{\gamma}_n\hat{\gamma}_{n+1} - \hat{\gamma}_{n-1}\hat{\gamma}_{n+2})^2 \geq 0, \quad \text{para } n \geq 1. \quad (4.3)$$

Estenderemos esses resultados para algumas novas condições necessárias.

Sejam

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu} \quad \text{e} \quad Q(x) = \sum_{\nu=0}^m b_{\nu} x^{m-\nu}$$

dois polinômios de grau n e m , respectivamente, onde $a_0 b_0 \neq 0$. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ os zeros de $P(x)$. Os dois polinômios $P(x)$ and $Q(x)$ têm um zero comum se, e somente se,

$$Q(x_1)Q(x_2) \cdots Q(x_n) = 0.$$

Definimos a quantidade

$$R(P, Q) = a_0^m Q(x_1)Q(x_2) \cdots Q(x_n)$$

que é chamada resultante (ou eliminante) de P e Q . Sejam $y_1, y_2, \dots, y_m$ os zeros de $Q(x)$. A definição de $R(P, Q)$ imediatamente implica que:

$$R(P, Q) = a_0^m \prod_{k=1}^n \left(b_0 \prod_{i=1}^m (x_k - y_i) \right) = a_0^m b_0^n \prod_{k=1}^n \prod_{i=1}^m (x_k - y_i). \quad (4.6)$$

O resultante de P e Q pode ser representado como um determinante de uma matriz $(m+n) \times (m+n)$,

$$R(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix}, \quad (4.4)$$

onde $R(P, Q)$ contém m linhas com coeficientes a_k e n linhas com coeficientes b_k .

Definimos também o discriminante de P pela expressão

$$D(P) = a_0^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

Obviamente o polinômio P tem pelo menos um zero múltiplo se, e somente se, o discriminante dele é igual a zero. É claro que

$$(-1)^{n(n-1)/2} a_0 D(P) = a_0^{n-1} P'(x_1) \cdots P'(x_n).$$

Por outro lado, o lado direito da última igualdade é igual ao resultante de $P(x)$ e $P'(x)$. Então

$$D(P) = (-1)^{n(n-1)/2} a_0^{-1} R(P, P'). \quad (4.5)$$

A definição de $D(P)$ implica que

$$D(P) = a_0^{2n-2} V_n^2(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

onde $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ denota o determinante de Vandemonde de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Utilizamos a igualdade

$$V_n^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det H_n(s_0, s_1, \dots, s_{2n-2}),$$

onde $H_n(s_0, s_1, \dots, s_{2n-2})$ é definido por (4.2). Então,

$$D(P) = a_0^{2n-2} \det H_n(s_0, s_1, \dots, s_{2n-2}), \quad (4.6)$$

Agora (4.5), (4.6) e (4.4) implicam que $a_0^{2n-2} \det H_n(s_0, s_1, \dots, s_{2n-2})$ é igual ao determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ & & & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} & \\ & & & & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Então, os Teoremas de Hermite e de Jensen, junto com a última expressão implicam no

TEOREMA 13 *Seja a função real inteira φ , definida por (2.8), da classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$ e sejam seus coeficientes de Maclaurin γ_k positivos. Então os determinantes*

$$\Delta_{n,j} = \begin{vmatrix} \gamma_j & \cdots & \binom{n}{k} \gamma_{k+j} & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_{j+1} & \cdots & \binom{n}{k} \gamma_{k+j+1} & \cdots & \gamma_{n+1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \gamma_j & \cdots & \binom{n}{k} \gamma_{k+j} & \cdots & \gamma_n \\ & & \gamma_{j+1} & \cdots & \binom{n}{k} \gamma_{k+j+1} & \cdots & \gamma_{n+1} \end{vmatrix}$$

mudam os sinais alternativamente.

CONJECTURA 3 *A função real inteira φ com coeficientes de Maclaurin positivos, γ_k , pertence à classe $\mathcal{L} - \mathcal{P}(I)$ se, e somente se, todos os menores principais das*

matrizes

$$A_{n,j} = \begin{pmatrix} \gamma_j & \cdots & \binom{n}{k} \gamma_{k+j} & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_{j+1} & \cdots & \binom{n}{k} \gamma_{k+j+1} & \cdots & \gamma_{n+1} \\ \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \gamma_j & \cdots & \binom{n}{k} \gamma_{k+j} & \cdots & \gamma_n \\ & \gamma_{j+1} & \cdots & \binom{n}{k} \gamma_{k+j+1} & \cdots & \gamma_{n+1} \end{pmatrix},$$

mudam os sinais alternativamente para $n, j = 0, 1, 2, \dots$

- [1] M. AISEN, A. EDREI, I. J. SCHOENBERG AND A. WHITNEY, On the generating functions of totally positive sequences, *Ann. of Math.* 57(1951), 303-307.
- [2] R. BOAS, "Entire Functions," Academic Press, New York, 1954.
- [3] S. BOCHNER, Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme, *Math. Z.* 29(1929), 730-736.
- [4] T. S. CHIHARA, "An Introduction to Orthogonal Polynomials," Gordon and Breach, New York, 1978.
- [5] T. CRAVEN AND G. CSORDAS, Jensen polynomials and the Turán and Laguerre inequalities, *Pacific J. Math.* 136(1989), 241-260.
- [6] G. CSORDAS, T. S. NORFOLK AND R. S. VARGA, The Riemann hypothesis and the Turán inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc.* 296(1986), 521-541.
- [7] G. CSORDAS, R. S. VARGA AND I. VINCEZ, Jensen polynomials with applications to the Riemann ξ -function, *J. Math. Anal. Appl.* 153(1990), 112-135.
- [8] G. CSORDAS AND J. WILLIAMSON, The zeros of Jensen polynomials are simple, *Proc. Amer. Math. Soc.* 49(1975), 263-264.
- [9] D. K. DIMITROV, Higher order Turán inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.* 126(1998), 2033-2037.
- [10] D. K. DIMITROV, A problem of Polya concerning polynomials which obey Descartes' rule of signs, *East J. Approx.* 3(1997), 31-46.
- [11] EDREI, Proof of a conjecture of Schoenberg on the generating function of a totally positive sequence, *Canad. J. Math.* 5(1953), 86-94.
- [12] S. KARLIN, "Total Positivity", vol. I, Stanford University Press, Stanford, California, 1968.



Bibliografia

- [1] M. AISEN, A. EDREI, I. J. SCHOENBERG AND A. WHITNEY, On the generating functions of totally positive sequences, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37**(1951), 303-307.
- [2] R. BOAS, "Entire Functions," Academic Press, New York, 1954.
- [3] S. BOCHNER, Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme, *Math. Z.* **29**(1929), 730-736.
- [4] T. S. CHIHARA, "An Introduction to Orthogonal Polynomials," Gordon and Breach, New York, 1978.
- [5] T. CRAVEN AND G. CSORDAS, Jensen polynomials and the Turán and Laguerre inequalities, *Pacific J. Math.* **136**(1989), 241-260.
- [6] G. CSORDAS, T. S. NORFOLK AND R. S. VARGA, The Riemann hypothesis and the Turán inequalities, *Trans. Amer. Math. Soc.* **296**(1986), 521-541.
- [7] G. CSORDAS, R. S. VARGA AND I. VINCZE, Jensen polynomials with applications to the Riemann ξ -function, *J. Math. Anal. Appl.* **153**(1990), 112-135.
- [8] G. CSORDAS AND J. WILLIAMSON, The zeros of Jensen polynomials are simple, *Proc. Amer. Math. Soc.* **49**(1975), 263-264.
- [9] D. K. DIMITROV, Higher order Turán inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126**(1998), 2033-2037.
- [10] D. K. DIMITROV, A problem of Pólya concerning polynomials which obey Descartes' rule of signs, *East J. Approx.* **3**(1997), 31-40.
- [11] EDREI, Proof of a conjecture of Schoenberg on the generating function of a totally positive sequence, *Canad. J. Math.* **5**(1953), 86-94.
- [12] S. KARLIN, "Total Positivity", vol. I, Stanford University Press, Stanford, California, 1968.



- [13] E. LAGUERRE, "Oeuvres", vol. I, Paris, 1898.
- [14] M. MARDEN, A rule of signs involving certain orthogonal polynomials, *Ann. Math.* **33**(1932), 118-124.
- [15] M. MARDEN, "Geometry of Polynomials", Math. Surveys Vol. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.
- [16] N. OBRECHKOFF, On the distribution of zeros of algebraic equations, *Annuaire Univ. Sofia* **15-16**(1918-1919, 1919-1920), 1-14, 1-11, 1-4 (em búlgaro).
- [17] N. OBRECHKOFF, On the roots of algebraic equations, *Annuaire Univ. Sofia* **19**(1922-1923), 43-76 (em búlgaro).
- [18] N. OBRECHKOFF, Über die Wurzeln von algebraischen Gleichungen, *Jber. Deutschen Math. Ver.* **33**(1924), 52-64.
- [19] N. OBRECHKOFF, "Zeros of Polynomials," Publ. Bulg. Acad. Sci., Sofia, 1963 (em búlgaro).
- [20] M. L. PATRICK, Extensions of inequalities of the Laguerre and Turán type, *Pacific J. Math.* **44**(1973), 675-682.
- [21] G. PÓLYA, Über Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln, *Rend. Circ. Matem. Palermo* **36**(1913), 279-295.
- [22] G. PÓLYA, Über die algebraisch - funktionentheoretischen Untersuchungen von J.L.W.V. Jensen, *Klg. Danske Vid. Sel. Math.-Fys. Medd.* **7**(1927), 3-33.
- [23] G. PÓLYA AND J. SCHUR, Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen, *J. Reine Angew. Math.* **144**(1944), 89-113.
- [24] G. PÓLYA AND G. SZEGŐ, "Problems and Theorems in Analysis, vol. II," Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [25] I.J. SCHOENBERG, Zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen, *Math.Z.* **38**(1934), 546-564.
- [26] E. C. TITCHMARSH, "The Theory of the Riemann Zeta-Function," Oxford University Press, Oxford, 1951.
- [27] R.S.VARGA, "Scientific Computation on Mathematical Problems and Conjectures," Regional Conf. Ser. Appl. Math. Vol. 60, SIAM, Philadelphia, PA, 1990.



