

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA

STEPHANIE CAVALCANTI MARTINS LIBERATO

**ANÁLISES DA UTILIZAÇÃO DE CÓDIGOS DE BLOCO ESPAÇO-TEMPO OBTIDOS A
PARTIR DE ÁLGEBRAS CÍCLICAS DE DIVISÃO EM SISTEMAS MIMO 2×2**

São João da Boa Vista

2023

Stephanie Cavalcanti Martins Liberato

**ANÁLISES DA UTILIZAÇÃO DE CÓDIGOS DE BLOCO ESPAÇO-TEMPO OBTIDOS A
PARTIR DE ÁLGEBRAS CÍCLICAS DE DIVISÃO EM SISTEMAS MIMO 2×2**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Conselho de Curso de Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações da Faculdade de Engenharia do Câmpus de São João da Boa Vista - Unesp, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações.

Orientadora: Prof^a Dra. Cintya Wink de Oliveira
Benedito

São João da Boa Vista
2023

L695a

Liberato, Stephanie Cavalcanti Martins

ANÁLISES DA UTILIZAÇÃO DE CÓDIGOS DE BLOCO
ESPAÇO-TEMPO OBTIDOS A PARTIR DE ÁLGEBRAS
CÍCLICAS DE DIVISÃO EM SISTEMAS MIMO 2×2 / Stephanie
Cavalcanti Martins Liberato. -- São João da Boa Vista, 2023
63 p. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia de
Telecomunicações) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Faculdade de Engenharia, São João da Boa Vista
Orientadora: Cintya Wink de Oliveira Benedito

1. Telecomunicações. 2. Quatérnios. 3. Codificação. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de
Engenharia, São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELETRÔNICA E DE TELECOMUNICAÇÕES**

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**ANÁLISES DA UTILIZAÇÃO DE CÓDIGOS DE BLOCO ESPAÇO-TEMPO
OBTIDOS A PARTIR DE ÁLGEBRAS CÍCLICAS DE DIVISÃO EM SISTEMAS
MIMO 2X2**

Aluno: Stephanie Cavalcanti Martins Liberato

Orientador: Prof.^a Dr.^a Cintya Wink de Oliveira Benedito

Banca Examinadora:

- Cintya Wink de Oliveira Benedito (Orientadora)
- Carina Alves (Examinadora)
- Ivan Aritz Aldaya Garde (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno (Processo nº 198/2023)

São João da Boa Vista, 14 de dezembro de 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha orientadora Profa Dra Cintya Wink de Oliveira Benedito, pela oportunidade de me orientar no desenvolvimento deste trabalho, pela paciência e dedicação.

Aos meus pais, Fabíola Cavalcanti Martins Liberato e Jackson Correia Liberato por terem me dado educação, amor e suporte durante toda minha jornada.

Aos meus irmãos Alain Cavalcanti Martins Liberato e Erik Cavalcanti Martins Liberato, pela força e suporte durante minha caminhada.

Aos meus avós Josefa Maria Cavalcanti Martins, Geraldo Francisco Martins, Maria Correia Liberato e José Liberato Filho pelos ensinamentos que fizeram de mim quem sou hoje.

Aos meus amigos, Daniela, Eduardo, Fernando, Julianna, e Renan que sempre estiveram torcendo por mim e que foram essenciais para que eu chegasse até aqui.

Aos professores e funcionários da UNESP - São João da Boa Vista, pela dedicação e suporte durante a graduação.

Ao projeto Ciência no Feminino, que me ensinou lições essenciais para o meu crescimento pessoal.

Aos membros da banca examinadora.

E, por fim, a todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso irá abordar o estudo, construção e análise de códigos de bloco espaço-tempo (*Space Time Block Codes* - STBC) em sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas - MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*) com 2 antenas transmissoras e 2 antenas receptoras. A tecnologia MIMO é utilizada, com o intuito de melhorar a eficiência da transmissão através de múltiplas antenas no transmissor e no receptor, auxiliando no avanço dos sistemas de comunicação sem fio. Os códigos de espaço-tempo desempenham um papel crucial na obtenção de diversidade de transmissão em sistemas MIMO. Inicialmente, surgiram abordagens que dependiam da transmissão de diferentes versões dos dados de várias antenas, mas isso era computacionalmente caro. Posteriormente, o conceito de códigos de bloco espaço-tempo, como o código de Alamouti, foi desenvolvido, evitando a complexidade dos códigos de treliça de espaço-tempo. A construção de códigos de bloco espaço-tempo baseados em álgebras de divisão, foram utilizados para conseguir obter os determinantes do código diferentes de zero, o que é essencial para se obter ganhos de diversidade, multiplexação e codificação. O trabalho proposto é um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) que explora a construção de códigos de bloco espaço-tempo, em especial o código de Alamouti, o código de Prata e o código de Ouro, usando álgebras cíclicas de divisão em sistemas MIMO com 2 antenas transmissoras e 2 antenas receptoras. Essas construções serão implementadas no *software* MATLAB, considerando um canal de desvanecimento Rayleigh quase-estático e ruído gaussiano branco aditivo (*Additive White Gaussian Noise* - AWGN). Diferentes modulações de amplitude em quadratura, *M*-QAM (*M-ary Quadrature Amplitude Modulation*) serão usadas, utilizando um decodificador de máxima verossimilhança (*Maximum Likelihood* - ML). O desempenho dos códigos será avaliado por meio da razão de erro de símbolo (*Symbol Error Ratio* - SER) em relação à relação sinal ruído (*Signal-to-noise Ratio* - SNR).

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas MIMO. Codificação de Canal. Códigos de bloco espaço-tempo. Álgebras de divisão.

ABSTRACT

This course conclusion paper will address the study, construction and analysis of space-time block codes (STBC) in MIMO systems (Multiple-Input Multiple-Output) with 2 transmitting antennas and 2 receiving antennas. MIMO technology is used to improve transmission efficiency through multiple antennas in the transmitter and receiver, helping to advance wireless communication systems. Space-time codes play a crucial role in achieving transmission diversity in MIMO systems. Initially, approaches emerged that relied on transmitting different versions of the data from multiple antennas, but this was computationally expensive. Later, the concept of space-time block codes such as the Alamouti code was developed, avoiding the complexity of space-time lattice codes. The construction of space-time block codes based on division algebras were used to obtain non-zero determinants, which is essential to obtain gains in diversity, multiplexing and coding. The proposed work is a Course Conclusion Paper (TCC) that explores the construction of space-time block codes, in particular the Alamouti code, the Silver code and the Gold code, using cyclic division algebras in MIMO systems with 2 transmitting antennas and 2 receiving antennas. These constructions will be implemented in software MATLAB, considering a quasi-static Rayleigh fading channel and Additive White Gaussian Noise (AWGN). Different M -QAM (M-ary Quadrature Amplitude Modulation) modulations will be used, using a maximum likelihood decoder (ML). The performance of the codes will be evaluated using the symbol error rate (SER) in relation to the signal-to-noise ratio (SNR).

KEYWORDS: MIMO. STBC. Division algebras. Alamouti code.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Reticulado $\mathbb{Z}^2$	21
Figura 2	Reticulado do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	23
Figura 3	Diagrama básico de um sistema de comunicação MIMO.	24
Figura 4	Arquitetura de um sistema de comunicação com diversidade de recepção. . . .	26
Figura 5	Arquitetura de um sistema de comunicação com diversidade de transmissão. . .	26
Figura 6	Arquitetura de um sistema MIMO $n_t \times n_r$	27
Figura 7	Modulador e demodulador QAM.	28
Figura 8	Constelação de 32-QAM.	29
Figura 9	Constelação de 64-QAM.	29
Figura 10	Esquema de Alamouti para duas antenas transmissoras e uma antena receptora. .	31
Figura 11	Esquema de Alamouti para duas antenas transmissoras e duas antenas receptoras.	34
Figura 12	Esquema de transmissão para sistema de duas antenas transmissoras e uma antena receptora.	49
Figura 13	Esquema de transmissão para sistema de duas antenas transmissoras e duas antenas receptoras.	49
Figura 14	Gráfico da SER vs. SNR do código de Alamouti 2×1 com modulações 4, 16, 64 e 256-QAM.	50
Figura 15	Gráfico da SER vs. SNR do código de Alamouti 2×2 com modulações 4, 16, 64 e 256-QAM.	51
Figura 16	Gráfico da SER vs. SNR do código de Alamouti 2×1 e 2×2 com modulações 4, 16, 64 e 256-QAM.	52
Figura 17	Gráfico da SER vs. SNR do código de Alamouti e do código de Prata 2×2 com modulações M -QAM.	56
Figura 18	Gráfico da SER vs. SNR do código de Alamouti, código de Prata e código de Ouro 2×2 com modulações M -QAM.	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Tabela de constelações quadradas.	28
Tabela 2	– Sequência de codificação e transmissão para o esquema de Alamouti 2x1.	32
Tabela 3	– Notação para os sinais recebidos na antena de recepção.	33
Tabela 4	– Coeficientes de canais entre as antenas transmissoras e receptoras para o esquema de Alamouti 2x2.	33
Tabela 5	– Notação para os sinais recebidos nas antenas de recepção.	34

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AWGN	<i>Additive White Gaussian Noise</i>
bpcu	Bits por uso de canal
CSI	<i>Channel State Information</i>
IOT	<i>Internet of Things</i>
LTE	<i>Long Term Evolution</i>
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
MISO	<i>Multiple-Input Single-Output</i>
ML	<i>Maximum Likelihood</i>
<i>M</i> -QAM	<i>M-ary Quadrature Amplitude Modulation</i>
NVD	<i>Non-Vanishing Determinant</i>
SER	<i>Symbol Error Ratio</i>
SIMO	<i>Single-Input Multiple-Output</i>
SNR	<i>Signal-to-Noise Ratio</i>
spcu	Símbolos por uso de canal
STBC	<i>Space-Time Block Code</i>
STC	<i>Space-Time Code</i>
STTC	<i>Space-Time Trellis Code</i>
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
WiMAX	<i>Worldwide Interoperability for Microwave Access</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

n_r	Número de antenas receptoras
n_t	Número de antenas transmissoras
$\mathbf{Y}$	Matriz do sinal recebido
$\mathbf{X}$	Matriz do sinal transmitido
$\mathbf{H}$	Matriz do canal de desvanecimento Rayleigh quase-estático e plano
$\mathbf{Z}$	Matriz do ruído AWGN
$\mathbf{T}$	Matriz de torção
$\mathbf{U}$	Matriz unitária
T	Período de símbolo
C	Capacidade de canal
μ	Módulo do ganho de canal
$\tilde{x}$	Sinal recebido após passar pelo combinador
$\hat{x}$	Sinal recebido após passar pelo detector ML
$P(e)$	Probabilidade de erro
$P(\mathbf{X} \rightarrow \hat{\mathbf{X}})$	Probabilidade de erro aos pares
$\min$	Menor elemento
$\det(\cdot)$	Determinante de uma matriz
$\log(\cdot)$	Logaritmo
$\ \cdot\ $	Norma de Frobenius
$(\cdot)^t$	Matriz Transposta
$\bar{q}$	Complexo conjugado
$ x $	Módulo de x
$\mathbf{A}$	Matriz de distância da palavra-código
λ_j	Autovalores não-nulos a matriz $\mathbf{A}$
Δ	Determinante do código

Δ_{min}	Determinante mínimo do código
div	Ganho de diversidade
$\mathcal{C}$	Código
K	Número de símbolos de informação codificados
η	Eficiência espectral (bpcu)
η_s	Eficiência espectral (spcu)
N_0	Densidade espectral de potência de ruído
S	Código de Prata
M	Ordem de modulação M -QAM
G	Grupo
A, B	Anel
$\mathcal{I}$	Ideal
$\mathbb{K}, \mathbb{L}$	Corpos
$\mathbb{L}/\mathbb{K}$	Extensão de corpos
φ	Homomorfismo de anel
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}(i)$	Conjunto dos inteiros gaussianos
$N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x)$	Norma de $x \in \mathbb{L}$
$\mathbb{H}$	Álgebra dos quatérnios de Hamilton
n	Grau de um corpo de números
σ	Monomorfismo
$\langle \sigma \rangle$	Grupo cíclico de Galois
$Gal(\mathbb{L}/\mathbb{K})$	Grupo de Galois de $\mathbb{L}$ sobre $\mathbb{K}$
$\mathcal{O}$	Anel de inteiros

$\mathcal{A}$	Álgebra
q	Elemento de uma álgebra dos quatérnios
$Nrd(q)$	Norma reduzida de q
Λ	Reticulado
Λ^c	Reticulado complexo
Λ'	Reticulado algébrico
$\mathbf{M}$	Matriz geradora do reticulado
$\mathbf{G}$	Matriz de Gram
x_0, x_1, x_2, x_3	Símbolos de informação QAM
$\langle E \rangle$	Energia média da constelação M -QAM
N	Número de símbolos simulados
d_{min}	Distância Euclidiana mínima
$\text{Re}(a)$	Parte real de (a)
$\text{Im}(a)$	Parte imaginária de (a)
$\mathbf{F}$	Matriz das partes real e imaginária dos símbolos do código de Prata e de Ouro
α	Letra Grega Alfa
β	Letra grega Beta

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	CONCEITOS TEÓRICOS	16
2.1	ÁLGEBRAS DE DIVISÃO	16
2.2	RETICULADOS	20
2.3	SISTEMA MIMO	24
2.4	MODULAÇÃO QAM	27
3	CÓDIGOS DE BLOCO ESPAÇO-TEMPO - STBC	30
3.1	CÓDIGOS DE ESPAÇO-TEMPO	30
3.2	CÓDIGO DE ALAMOUTI	30
3.3	PARÂMETROS DE ANÁLISE	35
4	STBC PARA SISTEMA MIMO 2×2 VIA ÁLGEBRAS CÍCLICAS DE DIVISÃO	39
4.1	STBCs 2×2 VIA ÁLGEBRAS CÍCLICAS DE DIVISÃO	39
4.2	CÓDIGOS DE BLOCO ESPAÇO-TEMPO PERFEITOS	41
4.2.1	Código de Ouro	42
4.2.2	Código de Prata	44
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	48
5.1	SIMULAÇÕES CÓDIGO DE ALAMOUTI	48
5.2	SIMULAÇÕES CÓDIGO DE PRATA	52
5.3	SIMULAÇÕES CÓDIGO DE OURO	56
6	CONCLUSÃO	60
	REFERÊNCIAS	62

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de comunicação sem fio, continuam passando por constantes evoluções e vem se tornando, cada dia mais, essenciais em nossa vida. Mas por fim, o que são as telecomunicações? Pode-se dizer que as telecomunicações compreendem o conjunto dos meios técnicos necessários para transportar e encaminhar tão fielmente quanto possível a informação à distância [Pires 2006]. Segundo a Anatel, Agência Nacional de Telecomunicações, no ano de 2023, o Brasil chegou a 252,4 milhões de acessos em telefonia móvel [ANATEL 2023]. Esse número, vem crescendo cada vez mais, no mundo todo, do mesmo modo que novas tecnologias e dispositivos sem fio vem surgindo. Para acompanhar o avanço dessas tecnologias, como o 5G (*Fifth Generation Internet*) e a Internet das coisas (*Internet of Things - IOT*), é necessário que os sistemas de comunicação sejam projetados para atingir altas taxas de dados, garantir uma transmissão confiável e alta eficiência espectral e de energia.

Para auxiliar o crescimento da demanda nos sistemas de comunicação sem fio, um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*Multiple-Input Multiple-Output* — MIMO) pode ser implementado. Nesta tecnologia, quanto maior o número de antenas de transmissão e recepção, mais rápida e eficiente é a transmissão da informação. O sistema MIMO, por utilizar múltiplas antenas no transmissor e no receptor, explora a diversidade espacial, responsável por mitigar os efeitos degradantes do desvanecimento de multi-percurso. Visando maximizar o ganho de diversidade são utilizados códigos de espaço-tempo, STC's (*Space-Time Code*), termo utilizado para se referir a um esquema de transmissão do sistema MIMO [Sibille, Oestges e Zanella 2010].

Os STCs surgiram devido a tentativas de alcançar a diversidade de transmissão. No início da década de 90, surgiram as abordagens iniciais para o fornecimento deste tipo de diversidade, descritas inicialmente por Wittneben [Wittneben. 1991] e por Seshadri e Winters [Seshadri e Winters 1994], tais abordagens dependem da transmissão de diferentes versões dos dados partindo de diferentes antenas e usando o processamento de sinal para separar os sinais no receptor. Posteriormente, em 1998, Tarokh introduziu códigos de treliça de espaço-tempo (*Space-Time Trellis Code* — STTC), formalizando o conceito de um código espaço-tempo [Tarokh, Seshadri e Calderbank. 1998], porém este tipo de código para atingir a diversidade máxima deve possuir muitas antenas, fazendo com que a treliça possua exponencialmente mais estados, e como a complexidade de decodificação é proporcional ao número de estados, isso tende a se tornar excessivamente caro computacionalmente. Ao mesmo tempo, Alamouti desenvolveu, o que foi de fato, o primeiro bloco de espaço-tempo (*Space-Time Block Code* — STBC), um esquema de transmissão que alcança o ganho de diversidade máxima em sistemas MIMO $2 \times n_r$, onde n_r se refere ao número de antenas receptoras [Alamouti. 1998]. Em 1999, Tarokh formalizou e ampliou esse conceito mostrando que as propriedades do esquema de Alamouti surgiram devido à matriz da palavra-código ser uma matriz ortogonal [Tarokh, Jafarkhani e Calderbank 1999].

Como o próprio nome sugere, os Códigos de bloco espaço-tempo, são baseados em blocos e não em treliças. Neste formato, eles evitam o problema da complexidade que os STTC's apresentam, uma vez que eles possuem um decodificador de máxima verossimilhança (*Maximum Likelihood* — ML) [Sibille, Oestges e Zanella 2010].

Para o desenvolvimento de códigos que possuam taxa de diversidade máximas, alta eficiência energética e espectral, são necessárias novas ferramentas, e as álgebras de divisão se mostraram uma alternativa. A ideia de utilizar álgebras de divisão foi apresentada em [Sethuraman, Rajan e Shashidhar 2003], onde foram introduzidas as álgebras de Brauer, e em [Sethuraman e Rajan 2002] onde o código de Alamouti foi construído a partir dos quatérnios de Hamilton. Em [Sethuraman, Rajan e Shashidhar 2003], a construção de códigos foram baseados em extensões de corpos e álgebras cíclicas. Em 2005, os códigos de bloco espaço-tempo (STBCs) perfeitos, foram apresentados em [Belfiore, Rekaya e Viterbo 2005, Elia, Sethuraman e Kumar 2005] e posteriormente, em 2006, por [Oggier et al. 2006]. Porém, para alcançar o *trade-off* de ganho de diversidade-multiplexação, mostrado em [Zheng e Tse 2003], foi demonstrado em [Yao e Wornell 2003] que um código 2×2 deve possuir um determinante diferente de zero (*Non-vanishing Determinant* - NVD).

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), explora a construção de códigos de bloco espaço-tempo (STBCs) a partir via álgebras cíclicas de divisão em sistemas MIMO para 2 antenas transmissoras e 2 antenas receptoras. Será apresentado a construção do código de Alamouti [Alamouti. 1998], e a construção de dois códigos perfeitos: o código de Ouro [Belfiore, Rekaya e Viterbo 2005] e o código de Prata [Hollanti et al. 2008], ambos os códigos possuem as características definidas em [Oggier et al. 2006] para serem um código perfeito, ou seja, são códigos de diversidade e taxa máximas, possuem a propriedade NVD e *shaping* cúbico. Tais construções serão implementadas utilizando o *software* MATLAB, considerando um canal de desvanecimento Rayleigh quase-estático e plano com ruído gaussiano branco aditivo (*Additive White Gaussian Noise* - AWGN). Serão utilizadas diferentes modulações *M*-QAM (*M-ary Quadrature Amplitude Modulation*), uma técnica utilizada atualmente na modulação de sinais digitais, e tal modulação é considerada híbrida, de amplitude e fase [Abrantes 2009]. Além disso será utilizado também um decodificador de máxima verossimilhança (*Maximum Likelihood* - ML) específico para cada codificação. O desempenho dos códigos serão analisados através da relação da razão de erro de símbolo (*Symbol Error Ratio* — SER) pela relação SNR (*Signal-to-Noise Ratio* — SNR).

No Capítulo 2, apresentaremos alguns conceitos teóricos utilizados no decorrer do trabalho, como conceito de álgebras cíclicas, reticulados, funcionamento do sistema MIMO e modulação QAM. No Capítulo 3, abordaremos mais detalhadamente a construção de códigos de bloco espaço-tempo, o esquema de Alamouti que deu origem a esses códigos e os parâmetros de análises para um STBC. Seguindo os conceitos apresentados nos capítulos anteriores, no Capítulo 4, abordaremos a construção do código de Alamouti e a construção de STBCs 2×2 via álgebra cíclicas de divisão, na Seção 4.2 apresentaremos os códigos de bloco espaço-tempo perfeitos e a construção do código de Ouro e do código de Prata, via álgebras cíclicas de divisão específicas para cada caso. O Capítulo 5, visa apresentar os resultados e desempenhos obtidos nas simulações, realizadas pelo *software* MATLAB, dos códigos apresentados anteriormente. E por fim, no Capítulo 6, apresentamos a conclusão obtida neste trabalho.

2 CONCEITOS TEÓRICOS

Neste capítulo iremos apresentar alguns conceitos teóricos estudados para a elaboração desse trabalho. Abordaremos conceitos de álgebra cíclicas, reticulados, funcionamento do sistema MIMO e modulação QAM. Não serão apresentados de forma completa, por se tratarem de assuntos muito extensos, portanto serão apresentados apenas os principais pontos de cada tópico. As principais referências utilizadas nesse capítulo foram [Oggier, Belfiore e Viterbo 2007, Benedito 2010, Bliss e Govindasamy 2011, Biglieri e al. 2007, Falou 2013, Hampton 2013, Rappaport 2002, Lathi e Ding 2009, Abrantes 2004, Bonfim 2012, Abrantes 2009, Gallager 2008, Alves 2017, Duarte 2021, Benedito 2014].

2.1 ÁLGEBRAS DE DIVISÃO

Essa seção abordará alguns conceitos sobre álgebras, álgebras de divisão, álgebras cíclicas e álgebra dos quatérnios.

Definição 2.1.1 *Uma **álgebra** A é um conjunto sobre um corpo $\mathbb{K}$ com operações de adição, e multiplicação por elementos de $\mathbb{K}$ que atende as seguintes propriedades:*

1. *A é um espaço vetorial com relação à adição e multiplicação por elementos do corpo.*
2. *A é um anel do que diz respeito à adição e multiplicação.*
3. *$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, $a, b \in A$.*

Definição 2.1.2 *Se todo elemento não nulo de uma álgebra A possui inverso multiplicativo, então A é uma **álgebra de divisão**.*

Definição 2.1.3 *Sejam $\mathbb{K}$ e $\mathbb{L}$ corpos. Se $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$, dizemos que $\mathbb{L}$ é uma **extensão de corpos de $\mathbb{K}$** e denotamos por $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.*

Definição 2.1.4 *Seja $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ uma extensão de corpos de grau n . Os n $\mathbb{K}$ -homomorfismos de $\mathbb{L} \in \mathbb{C}$ são chamados de **monomorfismos relativos**.*

Definição 2.1.5 *Seja $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ uma extensão de corpos de grau n , onde $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ representa os n monomorfismos relativos de $\mathbb{L}$, temos a **norma** de x dada por*

$$N(x) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(x). \quad (2.1)$$

Teorema 2.1.1 *Seja $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ uma extensão de corpos. Para qualquer $x \in \mathbb{L}$ temos $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x)$. Se $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ temos então $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$.*

Definição 2.1.6 Uma extensão de corpos $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ é **uma extensão de Galois** se todo polinômio irreduzível sobre $\mathbb{K}$, que tem pelo menos um zero em $\mathbb{L}$, tem de fato todos os seus zeros em $\mathbb{L}$. O **grupo de Galois** da extensão $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, representado por $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$, é o grupo de todos automorfismos de $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{L}$.

Definição 2.1.7 Seja $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ uma extensão de Galois de grau n , tal que seu grupo de Galois $G = \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ seja cíclico, com gerador σ . Uma álgebra não comunicativa, denotada por $\mathcal{A} = (\mathbb{L}/\mathbb{K}, \sigma, \gamma)$, definida da seguinte forma:

$$\mathcal{A} = \mathbb{L} \oplus e\mathbb{L} \oplus \dots \oplus e^{n-1}\mathbb{L}, \quad (2.2)$$

em que $\oplus$ é a soma direta, $\{1, e, e^2, \dots, e^{n-1}\}$ uma base e e satisfaz

$$e^n = \gamma \text{ e } \lambda e = e\sigma(\lambda) \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{L},$$

é chamada de **álgebra cíclica**.

Definição 2.1.8 Definimos a **ordem natural** de $\mathcal{A} = (\mathbb{L}/\mathbb{K}, \sigma, \gamma)$, por

$$\Lambda = \mathcal{O}_{\mathbb{L}} \oplus e\mathcal{O}_{\mathbb{L}}, \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ é o anel de inteiros de $\mathbb{L}$, que é um subanel de $\mathcal{A} = (\mathbb{L}/\mathbb{K}, \sigma, \gamma)$.

Definição 2.1.9 Uma álgebra cíclica que também é uma álgebra de divisão é chamada de **álgebra cíclica de divisão**.

A álgebra $\mathcal{A}$ é definida como a soma direta de cópias de $\mathbb{L}$, o que fornece uma estrutura de espaço vetorial. Assim,

$$x = x_0 + ex_1 + \dots + e^{n-1}x_{n-1}, \quad (2.4)$$

com $x_i \in \mathbb{L}$. Por ser uma álgebra não comutativa, a regra $\lambda e = e\sigma(\lambda)$ mostra como fazer cálculos quando o elemento e é multiplicado à esquerda.

Considerando um elemento $x \in \mathcal{A}$ escrito na base $\{1, e, e^2, \dots, e^{n-1}\}$, a matriz de multiplicação à esquerda por x é dada por

$$\begin{pmatrix} x_0 & \gamma\sigma(x_{n-1}) & \gamma\sigma^2(x_{n-2}) & \dots & \gamma\sigma^{n-1}(x_1) \\ x_1 & \sigma(x_0) & \gamma\sigma^2(x_{n-1}) & \dots & \gamma\sigma^{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-2} & \sigma(x_{n-3}) & \sigma^2(x_{n-4}) & \dots & \gamma\sigma^{n-1}(x_{n-1}) \\ x_{n-1} & \sigma(x_{n-2}) & \sigma^2(x_{n-3}) & \dots & \sigma^{n-1}(x_0) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

Para o caso em que $n = 2$. Vamos considerar $x = (x_0 + ex_1)$, $y = (y_0 + ey_1) \in \mathcal{A}$ na base $\{1, e\}$.

Temos que

$$\begin{aligned}
 xy &= (x_0 + ex_1)(y_0 + ey_1) \\
 &= x_0y_0 + x_0ey_1 + ex_1y_0 + ex_1ey_1 \\
 &= x_0y_0 + e\sigma(x_0)y_1 + ex_1y_0 + \gamma\sigma(x_1)y_1 \\
 &= (x_0y_0 + \gamma\sigma(x_1)y_1) + e(\sigma(x_0)y_1 + x_1y_0),
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

desde que $e^2 = \gamma$. Assim, a forma matricial é apresentada como

$$xy = \begin{pmatrix} x_0 & \gamma\sigma(x_1) \\ x_1 & \sigma(x_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Teorema 2.1.2 *Seja $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ uma extensão cíclica de grau n com grupo Galois $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) = \langle \sigma \rangle$. Se $0 \neq \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1} \in \mathbb{K}$ não são uma norma de qualquer elemento de $\mathbb{L}$, então $\mathcal{A} = (\mathbb{L}/\mathbb{K}, \sigma, \gamma)$ é uma álgebra cíclica de divisão.*

Exemplo 2.1.1 *Para $n = 2$, temos que*

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & \gamma\sigma(x_1) \\ x_1 & \sigma(x_0) \end{pmatrix} = x_0\sigma(x_0) - \gamma x_1\sigma(x_1) = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x_0) - \gamma N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(x_1), \tag{2.8}$$

então,

$$\det(X) = 0 \Leftrightarrow \gamma = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}\left(\frac{x_0}{x_1}\right). \tag{2.9}$$

Deste modo, pelo Teorema 2.1.2, é necessário verificar se γ não é uma norma de algum elemento de $\mathbb{L}$ para garantir que $\mathcal{A}$ é uma álgebra cíclica de divisão.

Já que neste trabalho estaremos interessados em álgebras cíclicas de divisão para $n = 2$, iremos definir um caso particular das álgebras cíclicas de divisão, a álgebra dos quatérnios.

Definição 2.1.10 *Uma álgebra dos quatérnios $\mathcal{A} = (\alpha, \beta)_{\mathbb{K}}$ sobre um corpo de números $\mathbb{K}$ é uma álgebra de dimensão 4 sobre $\mathbb{K}$, com uma base $\{1, i, j, k\}$, que satisfaz as seguintes condições: $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$, $k = ij = -ji$ e $k^2 = -\alpha\beta$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}/\{0\}$.*

Definição 2.1.11 *Pode-se definir o conjugado de um quatérnio $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ como*

$$\bar{q} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k, \tag{2.10}$$

assim, temos que

$$\begin{aligned}
 q\bar{q} &= (x_0 + x_1i + x_2j + x_3k)(x_0 - x_1i - x_2j - x_3k) \\
 &= x_0^2 - \alpha x_1^2 - \beta x_2^2 + \alpha\beta x_3^2 \in \mathbb{K}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Definição 2.1.12 A *norma reduzida* de um elemento q de uma álgebra dos quatérnios pode ser definida por

$$\text{Nrd}(q) = \bar{q}q = q\bar{q}. \quad (2.12)$$

Teorema 2.1.3 Considerando $\mathcal{A} = (\alpha, \beta)_{\mathbb{K}}$ uma álgebra dos quatérnios sobre $\mathbb{K}$. Então, $\mathcal{A}$ é uma álgebra de divisão se, $\text{Nrd}(q) = 0$ para $q = 0$.

O exemplo padrão de álgebra dos quatérnios que será de grande interesse neste trabalho é a álgebra dos quatérnios de Hamilton, pois veremos que podemos construir os códigos de Alamouti com esta álgebra.

Exemplo 2.1.2 A álgebra dos quatérnios $\mathbb{H} = (-1, -1)_{\mathbb{R}}$ que satisfaz $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$ e $k = ij = -ji$, é chamada de **álgebra dos quatérnios de Hamilton**. Os quatérnios de Hamilton é o conjunto $\mathbb{H}$, definido por

$$\mathbb{H} = \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}, \quad (2.13)$$

e possui uma estrutura de anel, já que a adição e multiplicação são bem definidas.

Os exemplos a seguir mostram outras duas álgebras dos quatérnios que também serão de interesse neste trabalho.

Exemplo 2.1.3 Seja a álgebra dos quatérnios $\mathcal{A} = (-1, -1)_{\mathbb{K}}$ sobre $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$, ou seja, $i^2 = -1$ e $j^2 = -1$. Neste caso, temos as seguintes extensões:

$$\begin{array}{c} \mathcal{A} = (-1, -1) \\ | 2 \\ \mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{-7}, \sqrt{-1}) \\ | 2 \\ \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{-7}) \\ | 2 \\ \mathbb{Q} \end{array} \quad (2.14)$$

Tal álgebra será utilizada na construção do código de Prata.

Exemplo 2.1.4 Considerando agora a álgebra dos quatérnios $\mathcal{A} = (5, i)_{\mathbb{K}}$ sobre $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$, ou seja,

neste caso $i^2 = 5$ e $j^2 = i$. Assim, temos as seguintes extensões:

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{A} = (5, i) \\
 | \ 2 \\
 \mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i) \\
 | \ 2 \\
 \mathbb{K} = \mathbb{Q}(i) \\
 | \ 2 \\
 \mathbb{Q}
 \end{array} \tag{2.15}$$

Esta álgebra será utilizada para a construção do código de Ouro.

2.2 RETICULADOS

Nesta seção iremos abordar os conceitos básicos sobre reticulados e reticulados algébricos, apresentando suas matrizes geradoras e matriz de Gram.

Definição 2.2.1 Sejam $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$ um conjunto de vetores do $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, com $m \leq n$. Chamamos de **reticulado** de dimensão m e base $\mathcal{B}$ ao subconjunto do $\mathbb{R}^n$ da forma

$$\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \text{ tal que } x = \sum_{i=1}^m a_i w_i \text{ com } a_i \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{2.16}$$

Observação 2.2.1 Se $m = n$, dizemos que Λ é um **reticulado completo** e que $\mathcal{B}$ é uma base completa do reticulado.

Exemplo 2.2.1 Seja $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ a base canônica de $\mathbb{Z}^2$. Temos que $\Lambda = \mathbb{Z}^2$ é um reticulado gerado por $\mathcal{B}$.

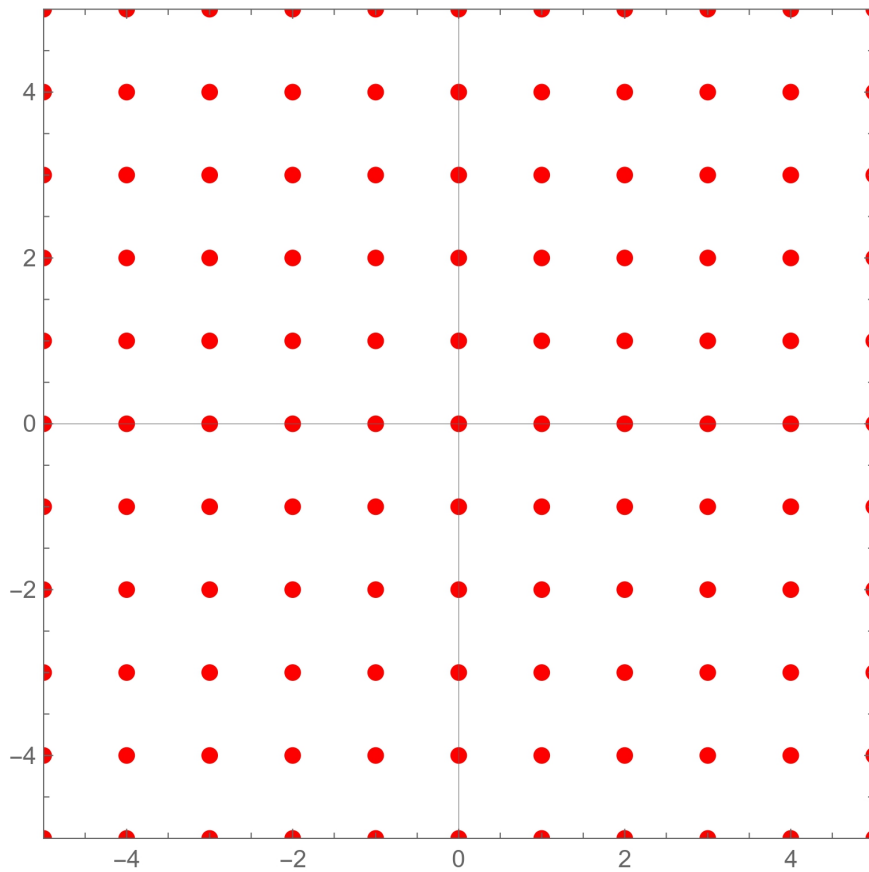
Definição 2.2.2 Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado, com base $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$. O conjunto

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i, 0 \leq \lambda_i < 1 \right\}, \tag{2.17}$$

é denominado de **região fundamental** de Λ com relação a base $\mathcal{B}$.

Definição 2.2.3 Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado, com $\mathbb{Z}$ -base $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$. A **matriz geradora** do reticulado Λ é definida como sendo a matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \dots & w_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

Figura 1 – Reticulado $\mathbb{Z}^2$.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

sendo $w_i = (w_{1i}, \dots, w_{ni})$, para $i = 1, \dots, n$.

Definição 2.2.4 Um reticulado Λ pode ser expresso por meio da sua matriz geradora $\mathbf{M}$

$$\Lambda = \{\mathbf{x} = \lambda \mathbf{M} \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \mathbb{Z}^n\}. \quad (2.19)$$

Definição 2.2.5 Seja Λ um reticulado e $\mathbf{M}$ sua matriz geradora. É definida a **matriz de Gram** associada à matriz geradora por

$$G = \mathbf{M}^t \mathbf{M}. \quad (2.20)$$

Observação 2.2.2 A matriz de Gramm G é uma matriz simétrica.

Definição 2.2.6 Sejam $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ os n monomorfismos distintos de um corpo de números $\mathbb{K}$. Vamos ordenar os σ_i 's de modo que para todo $x \in \mathbb{K}$, $\sigma_i(x) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq r_1$, ou seja, até o índice r_1 os monomorfismos $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_1}$ sejam reais e $\sigma_{j+r_2}(x)$ é o complexo conjugado de $\sigma_j(x)$ para $r_1 + 1 \leq j \leq r_1 + r_2$. Chamamos de **homomorfismo canônico** $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^n$ o homomorfismo definido por

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_{r_1}(x), \Re \sigma_{r_1+1}(x), \Im \sigma_{r_1+1}(x), \dots, \Re \sigma_{r_1+r_2}(x), \Im \sigma_{r_1+r_2}(x)). \quad (2.21)$$

onde, $\Re$ denota a parte real e $\Im$ denota a parte imaginária do homomorfismo.

Observe que $r_1 + 2r_2 = n$.

Podemos definir um homomorfismo considerando uma extensão de corpos mais geral $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ da seguinte forma

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{L} &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ x &\mapsto \sigma(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x)).\end{aligned}\tag{2.22}$$

onde, $\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x)$ são os monomorfismos relativos de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.

Definição 2.2.7 *Um reticulado algébrico Λ pode ser construído como uma imagem do homomorfismo canônico.*

A matriz geradora M de um reticulado algébrico Λ , é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_1(w_1) & \dots & \sigma_{r_1}(w_1) & \Re\sigma_{r_1+1}(w_1), \dots, \Im\sigma_{r_1+r_2}(w_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_1(w_n) & \dots & \sigma_{r_1}(w_n) & \Re\sigma_{r_1+1}(w_n), \dots, \Im\sigma_{r_1+r_2}(w_n) \end{pmatrix}, \tag{2.23}$$

onde, $\{w_1, \dots, w_n\}$ é uma base de $\mathcal{O}_K$. Esta construção resulta em um reticulado real.

Da mesma forma, um reticulado complexo Λ^c é dado por

$$\Lambda^c = \{\mathbf{x} = \lambda M \in \mathbb{C}^n \mid \lambda \in \mathbb{Z}[i]^n \text{ ou } \mathbb{Z}[j]^n\}.\tag{2.24}$$

Sua matriz geradora M , utilizando o homomorfismo $\sigma(x) = (\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x))$, é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_1(w_1) & \sigma_2(w_1) & \dots & \sigma_n(w_1) \\ \sigma_1(w_2) & \sigma_2(w_2) & \dots & \sigma_n(w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1(w_n) & \sigma_2(w_n) & \dots & \sigma_n(w_n) \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

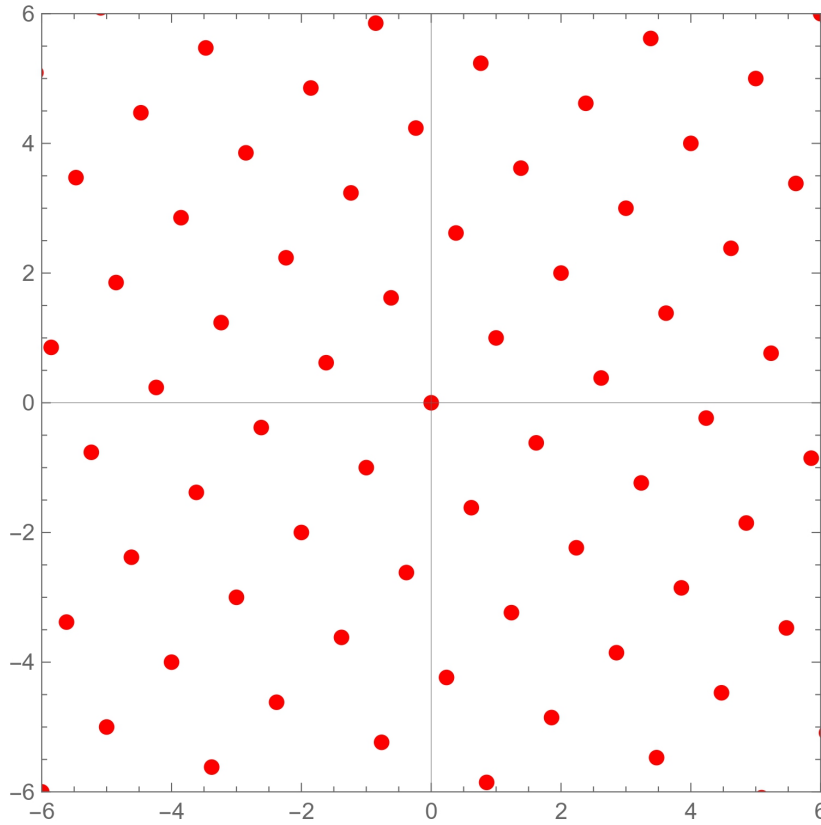
onde $\{w_1, \dots, w_n\}$ é uma base de $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ sobre $\mathbb{K}$, e $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ são monomorfismos relativos de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.

Exemplo 2.2.2 *A Figura 2 mostra o reticulado do corpo quadrático $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, com monomorfismos $\sigma_1(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$ e $\sigma_2(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$ e anel de inteiros $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Deste modo, ao aplicar o homomorfismo canônico nos elementos da base $\left\{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$, a matriz geradora do reticulado algébrico Λ é dada por*

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_1(1) & \sigma_2(1) \\ \sigma_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) & \sigma_2(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.\tag{2.26}$$

Definição 2.2.8 *Um ideal $\mathcal{I}$ é um subgrupo de um anel que satisfaz as seguintes condições*

1. $x + y \in \mathcal{I}$, para todo $x, y \in \mathcal{I}$;
2. $a \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$, para todo $a \in A$.

Figura 2 – Reticulado do corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Definição 2.2.9 Um ideal $\mathcal{I}$ é **principal** se for dado como:

$$\mathcal{I} = (x)A = \{xy, y \in A\}, x \in \mathcal{I}. \quad (2.27)$$

Um reticulado algébrico Λ' construído a partir de um ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_L$, sendo um sub-reticulado do reticulado algébrico Λ obtido a partir de $\mathcal{O}_L$. Se $\mathcal{I} = \alpha\mathcal{O}_L$, então a matriz geradora M de Λ' é dada por

$$M = \begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha w_1) & \sigma_2(\alpha w_1) & \dots & \sigma_n(\alpha w_1) \\ \sigma_1(\alpha w_2) & \sigma_2(\alpha w_2) & \dots & \sigma_n(\alpha w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1(\alpha w_n) & \sigma_2(\alpha w_n) & \dots & \sigma_n(\alpha w_n) \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

onde $\{w_1, \dots, w_n\}$ é uma base de $\mathcal{O}_L$ sobre $\mathbb{K}$, e $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ são monomorfismos relativos de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.

A matriz dada em (2.28) é a matriz dada em (2.25) multiplicada pela matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \sigma_1(\alpha) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Assim, conhecendo a matriz geradora do reticulado, é possível calcular o **determinante** do mesmo.

Por definição, temos que

$$\begin{aligned}
 \det(\Lambda') &= |\det(\mathbf{M})|^2 = |\det[\sigma_j(\alpha w_i)]|^2 \\
 &= |N(\alpha)|^2 |\det[\sigma_j(w_i)]|^2 \\
 &= |N(\alpha)|^2 d_{\mathbb{K}} = |N(\alpha)|^2 \det(\Lambda).
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

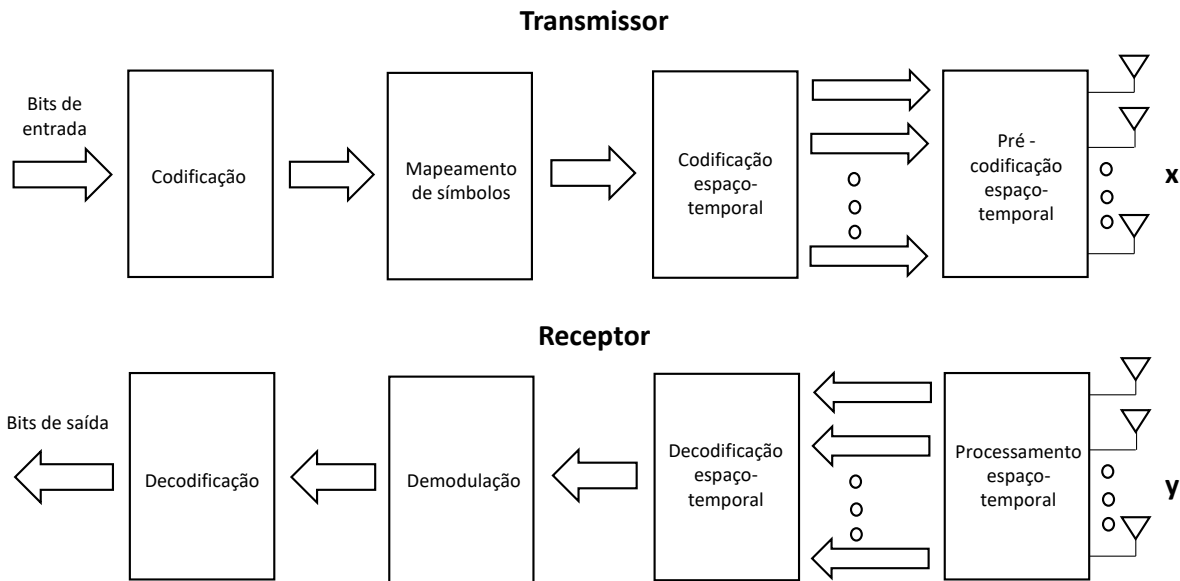
2.3 SISTEMA MIMO

Nesta seção será apresentado os conceitos básicos e funcionamento de um sistema MIMO, assim como conceitos de diversidade, responsáveis por mitigar os efeitos de desvanecimento do canal.

O uso de múltiplas antenas na transmissão e recepção, ou seja, uso da tecnologia MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*), tornou-se um dos paradigmas mais importantes para a implementação e para o avanço dos sistemas de comunicação sem fio. A importância dessa tecnologia é testemunhada pela sua presença em muitos padrões recentes, como WiMAX (*Worldwide Interoperability for Microwave Access*) e LTE (*Long Term Evolution*) [Sibille, Oestges e Zanella 2010].

A Figura 3 mostra os blocos básicos que compõem um sistema de comunicação MIMO. O diagrama apresentado foi baseado em [Biglieri e al. 2007].

Figura 3 – Diagrama básico de um sistema de comunicação MIMO.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Primeiro os bits a serem transmitidos são codificados, então a palavra-código é mapeada para símbolos de dados, esses símbolos são inseridos em um codificador espaço-temporal que produz um ou mais fluxos de dados espaciais. Os fluxos de dados espaciais são modulados para as antenas

de transmissão pelo bloco de pré-codificação espaço-temporal, deste modo os sinais emitidos pelas antenas de transmissão são enviados através do canal e chegam ao conjunto de antenas de recepção.

No receptor os sinais são coletados na saída de cada antena receptora e inverte as operações do transmissor, na função de decodificar os dados. Podem existir diversas variações no posicionamento relativo e nas interações entre os blocos [Biglieri e al. 2007].

Em alguns sistemas de comunicação sem fio, os canais sofrem com o impacto degradante do desvanecimento de multi-percurso. O multi-percurso é a chegada do sinal transmitido com diferentes atrasos de tempo, diferentes ângulos, e diferentes deslocamentos de frequência (Efeito Doppler). Algumas das causas para este fenômeno, são reflexão e refração, difração de sinal, e também movimento do transmissor ou do receptor. Esse desvanecimento, pode afetar gravemente a qualidade e a confiabilidade da comunicação sem fio, fazendo com que a probabilidade de erro de bit aumente em comparação com o que seria se apenas o ruído branco estivesse presente.

Para amenizar os efeitos do desvanecimento, utilizamos o conceito de diversidade. A diversidade refere-se à transmissão de cópias do mesmo sinal com o intuito de que elas sejam atenuadas independentemente das outras, deste modo, cada cópia tende a desaparecer em um momento diferente, fazendo com que a probabilidade de todas as cópias sumirem simultaneamente, diminua a medida que o número de cópias aumenta.

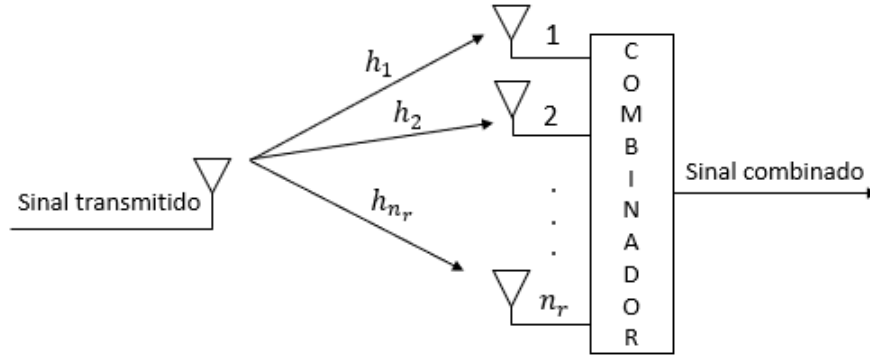
Em um sistema de comunicação sem fio, há vários tipos de diversidade, podemos citar alguns, como:

1. **Diversidade de tempo:** consiste em transmitir o mesmo sinal em tempos diferentes. Esses tempos devem estar suficientemente espaçados entre si, para que o desvanecimento ocorra de forma independente em cada canal;
2. **Diversidade espacial:** refere-se a transmissão do mesmo sinal por diferentes caminhos físicos, ou seja, o sinal é enviado por várias antenas transmissão e recebido por várias antenas de recepção. As antenas receptoras devem estar suficientemente distantes uma da outra, no mínimo meio comprimento de onda da frequência da portadora, garantindo que o desvanecimento em cada caminho será independente [Winters, Salz e Gitlin 1994].

Há duas formas diferentes de diversidade espacial:

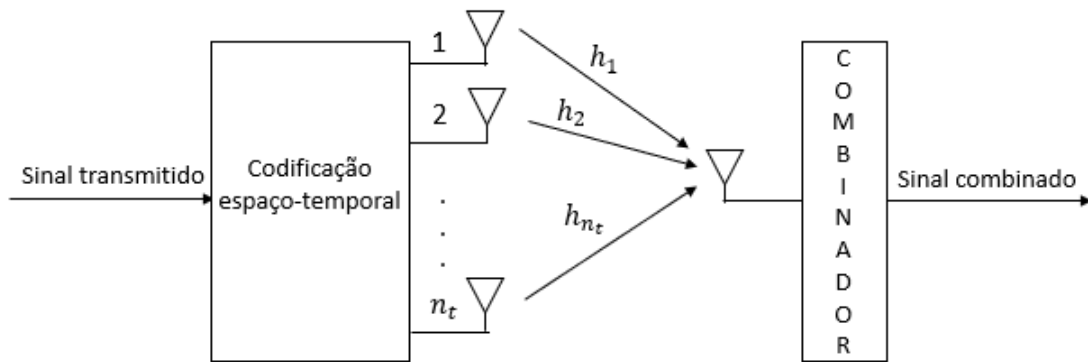
- a) **Diversidade de recepção:** consiste na transmissão de uma única versão do sinal, as cópias do sinal transmitido são obtidas no receptor e então combinadas. Esse tipo de transmissão ocorre em canais do tipo SIMO (*Single-Input Multiple-Output*). A Figura 4 ilustra a arquitetura de um sistema do tipo SIMO, que implementa esse tipo de diversidade espacial [Hampton 2013];
- b) **Diversidade de transmissão:** consiste na transmissão de várias cópias do sinal para apenas uma antena de recepção. Esse tipo de transmissão ocorre em canais do tipo MISO (*Multiple-Input Single-Output*), para esse tipo de transmissão é necessário o uso de técnicas de processamento de sinais, como os códigos de espaço-tempo. A Figura 5 ilustra a arquitetura de um sistema MISO, que implementa a diversidade de transmissão [Hampton 2013].

Figura 4 – Arquitetura de um sistema de comunicação com diversidade de recepção.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 5 – Arquitetura de um sistema de comunicação com diversidade de transmissão.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Como o canal MIMO possui múltiplas antenas no transmissor e no receptor, é possível obter ambas as diversidades espaciais: a de recepção e a de transmissão. E para esses canais que utilizam STBCs conseguem obter, também, a diversidade de tempo.

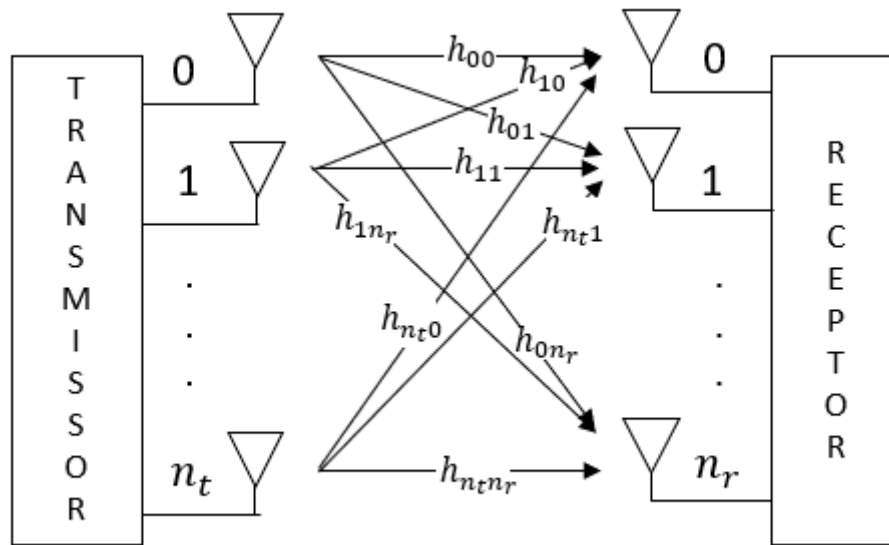
Para este trabalho iremos considerar um canal de desvanecimento Rayleigh quase-estático e com frequência plana. Onde o desvanecimento quase-estático significa que o canal permanece constante dentro de cada período de transmissão, variando independentemente de um período para o outro, e frequência plana significa que a largura de banda do sinal é menor do que a largura de banda de coerência do canal, por isso todas as componentes de frequência do sinal sofrem um desvanecimento de magnitude igual.

Considerando um sistema com n_t antenas de transmissão e n_r antenas de recepção, como na Figura 6, para um único bloco de duração T , em que T coincide com o tempo de coerência, ou seja, o tempo durante o qual os coeficientes do canal permanecem constantes. A matriz $\mathbf{Y}$ do sinal recebido é dada por

$$\mathbf{Y}_{n_r \times T} = \mathbf{H}_{n_r \times n_t} \mathbf{X}_{n_t \times T} + \mathbf{Z}_{n_r \times T}, \quad (2.31)$$

onde $\mathbf{X}$ é a matriz de símbolos transmitidos, $\mathbf{H}$ é a matriz do canal onde seus elementos são modelados como uma variável aleatória complexa de média zero e variância unitária, e $\mathbf{Z}$ é a matriz do ruído gaussiano branco aditivo espacial e temporal.

Ao assumirmos que o receptor seja coerente, ou seja, que ele tenha conhecimento exato sobre

Figura 6 – Arquitetura de um sistema MIMO $n_t \times n_r$.

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

o estado do canal (*Channel State Information* - CSI). A sua capacidade de canal, considerando que possuam SNR's altas, pode ser descrita como [Oggier, Belfiore e Viterbo 2007, Foschini e Gans 1998]

$$C(n_t, n_r, SNR) \sim \min(n_t, n_r) \log_2(SNR). \quad (2.32)$$

A equação 2.32 demonstra como as técnicas MIMO permitem aumentar a taxa de dados dos sistemas de comunicação sem fio. É possível notar que o sistema MIMO oferece aproximadamente $\min(n_t, n_r)$ canais espaciais independentes, paralelos entre o transmissor e o receptor, levando a uma ordem de diversidade espacial de $n_t n_r$, que possibilita o aumento da taxa de dados.

2.4 MODULAÇÃO QAM

Para essa seção será abordado os conceitos básicos e funcionamento da técnica de modulação QAM em sinais digitais.

A modulação QAM é uma técnica utilizada atualmente na modulação de sinais digitais, e é uma modulação híbrida, de amplitude e fase. A forma de onda da banda base $u(t)$ é escolhida para ser complexa nesta técnica de modulação. Esta forma de onda é então deslocada para a banda passante como $u(t)e^{2\pi f_c t}$, depois é convertida em uma forma de onda real para transmissão e adição de seu conjugado complexo. Deste modo, a forma de onda resultante, da banda passante real, é dada por [Gallager 2008]

$$x(t) = u(t)e^{2\pi f_c t} + \bar{u}(t)e^{-2\pi f_c t}, \quad (2.33)$$

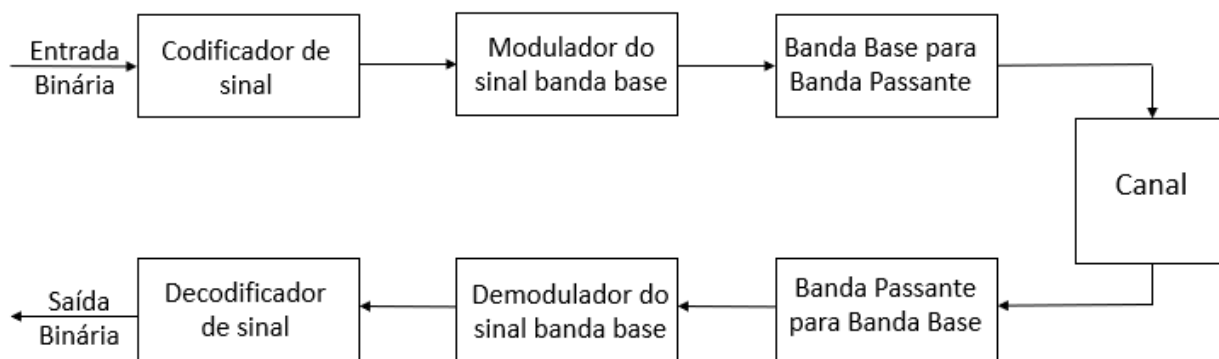
onde f_c e t são respectivamente, a frequência da portadora e tempo de símbolo.

Na Figura 7, é possível ver um esquema básico do funcionamento do modulador e demodulador QAM, esse esquema foi baseado em [Gallager 2008]. No demodulador, primeiro é realizado a codifi-

cação de uma sequência de bits para uma sequência de sinais complexos, através de um codificador, então esses sinais complexos são mapeados para um forma de onda de banda base complexa, que por fim é mapeado para uma forma de onda de banda passante real.

Depois de passar pelo canal, o demodulador realiza o inverso destas ações, primeiro mapeando a forma de onda da banda passante recebida para uma forma de onda banda base, em seguida recupera a sequência de sinais e por fim decodifica o sinal para uma saída em dígitos binários.

Figura 7 – Modulador e demodulador QAM.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

A sequência de bits de entrada, quando codificados, passam a ser representados por uma constelação. Esta constelação possui dimensão $M = 2^m$, em que M são pontos de coordenadas, associados a grupos de m bits, e será quadrada se M for um quadrado perfeito, como 16 ou 64.

Para cada instante de tempo o símbolo ocupa apenas uma posição na constelação, o eixo horizontal (eixo real) representa o sinal em fase e o eixo vertical (eixo imaginário) representa o sinal em quadratura. Além disso, a atribuição de bits aos pontos da constelação chama-se, **mapeamento de Gray** que é uma das forma de codificação binária, onde as transições entre números consecutivos diferem apenas em um bit.

Nas imagens a seguir, Figura 8 e Figura 9, podemos ver alguns exemplos de constelações, para 5 bits por símbolo a constelação possui 32 pontos, e para 6 bits por símbolo a constelação possui 64 pontos.

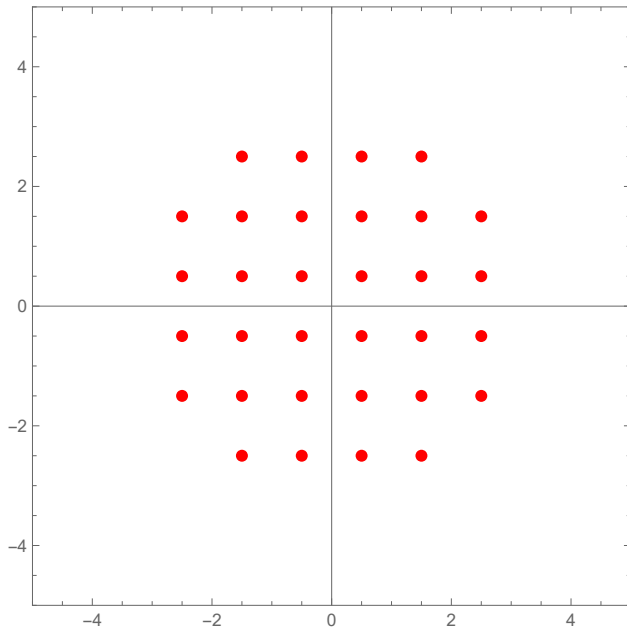
Nota-se que a constelação de 32-QAM é em formato de cruz, já a de 64-QAM é uma constelação quadrada. Para este trabalho, vamos utilizar constelações quadradas que são dadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Tabela de constelações quadradas.

Modulação	Bits por símbolo
4 - QAM	2
16 - QAM	4
64 - QAM	6
256 - QAM	8

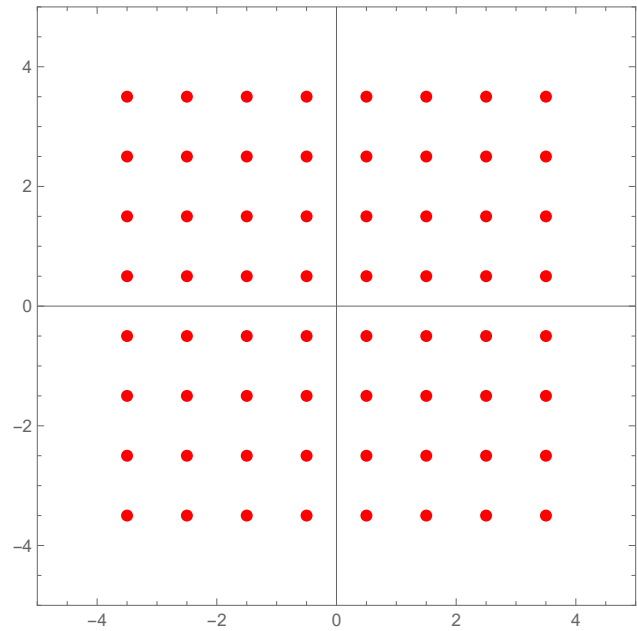
Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 8 – Constelação de 32-QAM.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 9 – Constelação de 64-QAM.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Em 4-QAM temos $4 = 2^2$ pontos e 2 bits por símbolo, em 16-QAM temos $16 = 2^4$ pontos e 4 bits por símbolo, e assim por diante. Portanto, pode-se dizer que de uma constelação quadrada (2^m pontos) para a seguinte (2^{m+2} pontos) são utilizados mais 2 bits por símbolo, fazendo com o que o número de pontos quadruplique.

3 CÓDIGOS DE BLOCO ESPAÇO-TEMPO - STBC

Neste capítulo apresentaremos os códigos espaço-tempo de modo geral, e os códigos de bloco espaço-tempo como código de Alamouti e seus parâmetros de análise. Para isso as principais referências utilizadas foram [Oggier, Belfiore e Viterbo 2007, Biglieri e al. 2007, Sibille, Oestges e Zanella 2010, Tarokh, Jafarkhani e Calderbank 1999, Falou 2013, Alamouti. 1998, Hottinen, Tirkkonen e Wichman 2005, Duarte 2021, Alves e Belfiore 2013]

3.1 CÓDIGOS DE ESPAÇO-TEMPO

Nesta seção será abordado os códigos de espaço-tempo e os códigos de bloco espaço-tempo.

Códigos espaço-tempo são comumente utilizados em sistema MIMO de transmissão que tem como objetivo maximizar o ganho de diversidade.

Historicamente, os códigos de espaço-tempo, surgiram de tentativas de alcançar a diversidade de transmissão. Isto é de grande importância em sistemas de rádio móvel por exemplo, já que é mais fácil fornecer múltiplas antenas em uma estação base do que em um aparelho móvel. As abordagens iniciais para o fornecimento dessa diversidade foram escritas nos anos 90 por Wittneben [Wittneben. 1991] e por Seshadri e Winters [Seshadri e Winters 1994], que dependiam de transmitir diferentes versões de dados por meio de diferentes antenas. Em 1998, Tarokh [Tarokh, Seshadri e Calderbank. 1998] formalizou o conceito de código espaço-tempo, e introduziu os códigos de treliça espaço-tempo (STTC), porém são códigos de alta complexidade na decodificação (medida pelo número de estados de treliça no decodificador) No mesmo ano, Alamouti [Alamouti. 1998] descreveu o código de bloco espaço-tempo, que veremos com mais detalhes posteriormente neste mesmo capítulo.

Os códigos de bloco espaço-tempo, evitam o problema de complexidade da decodificação de códigos baseado em treliças, já que dispõem de um decodificador de máxima verossimilhança. Esse tipo de código, é utilizado na transmissão de múltiplas cópias, para codificar os símbolos antes de serem transmitidos. Essa codificação é utilizada para que o máximo de informação possível dos símbolos seja recebido no receptor. Os STBCs utilizam da diversidade espacial e temporal, transmitindo múltiplas cópias e dados para compensar o desvanecimento. São chamados assim pois, o espaço e o tempo são codificados, já que utilizam várias antenas para transmitir os dados, transmitindo por espaços diferentes e em intervalos de tempo diferentes.

Os STBCs são uma generalização do esquema de Alamouti, e em 1999 foi introduzido por [Tarokh, Jafarkhani e Calderbank 1999] os STBCs construídos a partir de *designs* ortogonais.

3.2 CÓDIGO DE ALAMOUTI

Como mencionado anteriormente, o código de bloco espaço-tempo foi descrito por Alamouti, e hoje é comumente chamado de esquema de Alamouti. Esse esquema não requer uma expansão de largura de banda, já que a redundância é aplicada no espaço através de múltiplas antenas. Assim,

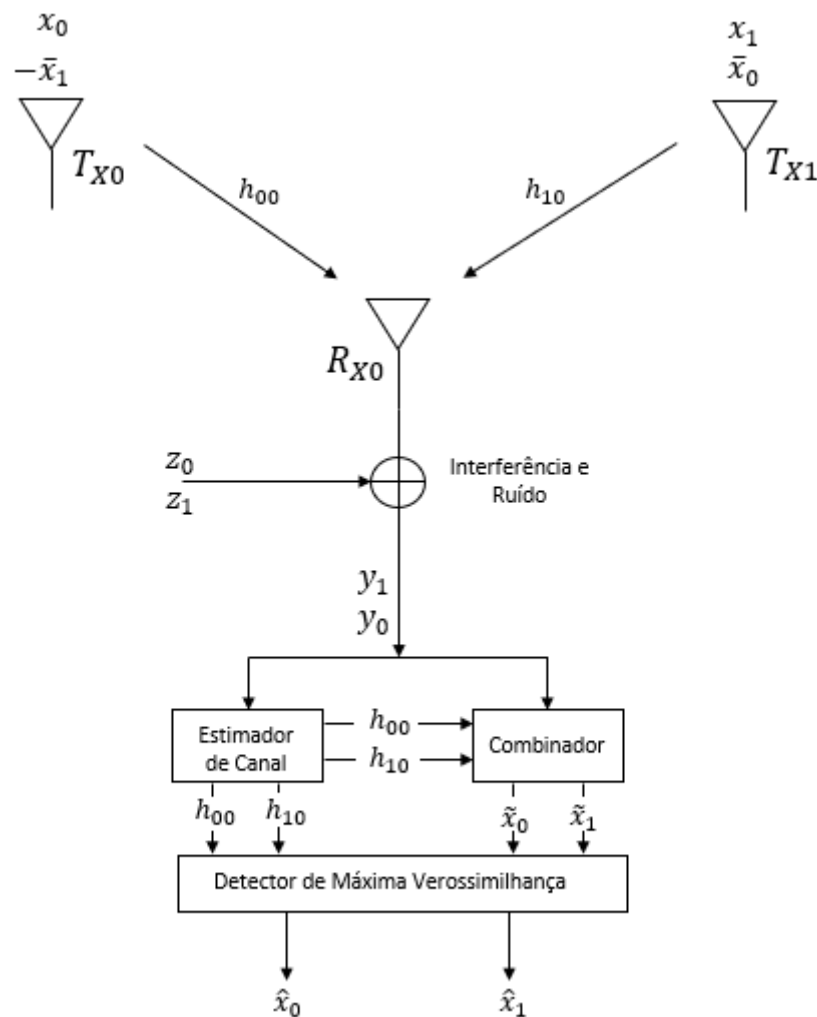
o código de Alamouti proporciona diversidade total de transmissão para o sistema MIMO de duas antenas de transmissão e uma antena de recepção, e permite o uso de decodificador ML simples.

O esquema de Alamouti é eficaz para todas as aplicações onde a capacidade do sistema é limitada pelo desvanecimento de multi-percurso, portanto, é uma maneira simples e econômica de atender às demandas do mercado, que procuram por qualidade e eficiência sem que seja necessário uma reformulação completa dos sistemas existentes [Alamouti. 1998].

Na Figura 10 é representado o esquema para duas antenas de transmissão e uma de recepção, que pode ser definido pelas três etapas a seguir:

1. Sequência de codificação e transmissão dos símbolos de informação no transmissor;
2. Esquema de combinação no receptor;
3. Detecção de Máxima Verossimilhança.

Figura 10 – Esquema de Alamouti para duas antenas transmissoras e uma antena receptora.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Na primeira etapa, os símbolos a serem transmitidos seguem uma sequência de codificação e transmissão mostrada na Tabela 2.

Tabela 2 – Sequência de codificação e transmissão para o esquema de Alamouti 2x1.

	Antena T_{X0}	Antena T_{X1}
Tempo t	x_0	x_1
Tempo $t+T$	$-\bar{x}_1$	$\bar{x}_0$

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Em um determinado instante (t), dois símbolos são transmitidos simultaneamente, x_0 e x_1 pelas antenas T_{X0} e T_{X1} respectivamente. No instante seguinte ($t + T$), as antenas T_{X0} e T_{X1} transmitem os símbolos $-\bar{x}_1$ e $\bar{x}_0$, também de forma simultânea. Assim, os símbolos enviados podem ser representados por uma matriz $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ -\bar{x}_1 & \bar{x}_0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Considerando um sistema MIMO, como apresentado na Seção 2.3, esses sinais passam pelo canal de desvanecimento do tipo Rayleigh quase-estático e com frequência plana, onde os elementos da matriz do canal, h_{00} e h_{10} , são modelados como uma variável aleatória complexa de média zero e variância unitária. Ao assumir que o canal é constante dentro de cada período de tempo, os coeficientes podem ser escritos como sendo

$$\begin{aligned} h_{00} &= h_{00}(t + T) = h_{00} = \mu_0 e^{j\theta_0}, \\ h_{10} &= h_{10}(t + T) = h_{10} = \mu_1 e^{j\theta_1}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde, μ_0 e μ_1 são as amplitudes e, θ_0 e θ_1 são as fases dos canais.

Como definido anteriormente, também na Seção 2.3, os sinais sofrem com os efeitos do ruído gaussiano branco aditivo AWGN. Portanto, utilizando a Equação (2.31), os sinais recebidos, na forma matricial, são vistos a seguir

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ -\bar{x}_1 & \bar{x}_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{00} \\ h_{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Os quais podem expressos por

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y(t) = h_{00}x_0 + h_{10}x_1 + z_0 \\ y_1(t) &= y(t + T) = -h_{00}\bar{x}_1 + h_{10}\bar{x}_0 + z_1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde T é o período de símbolo. Os sinais são recebidos conforme a Tabela 3, onde vemos que a antena R_{X0} recebe em um determinado instante de (t) o sinal y_0 e no instante seguinte ($t + T$) recebe o sinal y_1 .

Na segunda etapa, os sinais recebidos passam pelo estimador de canal e são combinados:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= \bar{h}_{00}y_0 + h_{10}\bar{y}_1 \\ \tilde{x}_1 &= \bar{h}_{10}y_0 - h_{00}\bar{y}_1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Tabela 3 – Notação para os sinais recebidos na antena de recepção.

Antena R_{XO}	
Tempo t	y_0
Tempo $t+T$	y_1

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Ao substituir as equações (3.2) e (3.4) em (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{x}_0 &= \mu_0 e^{-j\theta_0} (\mu_0 e^{j\theta_0} x_0 + \mu_1 e^{j\theta_1} x_1 + z_0) + \mu_1 e^{j\theta_1} (-\mu_0 e^{-j\theta_0} x_1 + \mu_1 e^{-j\theta_1} x_0 + \bar{z}_1) \\ \tilde{x}_1 &= \mu_1 e^{-j\theta_1} (\mu_0 e^{j\theta_0} x_0 + \mu_1 e^{j\theta_1} x_1 + z_0) - \mu_0 e^{j\theta_0} (-\mu_0 e^{-j\theta_0} x_1 + \mu_1 e^{-j\theta_1} x_0 + \bar{z}_1).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Multiplicando e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}\tilde{x}_0 &= (\mu_0^2 + \mu_1^2)x_0 + \bar{h}_{00}z_0 + h_{10}\bar{z}_1, \\ \tilde{x}_1 &= (\mu_0^2 + \mu_1^2)x_1 - h_{00}\bar{z}_1 + \bar{h}_{10}z_0.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Os sinais obtidos em (3.7) são enviados para o detector de máxima verossimilhança.

Assim, é possível notar que não há interferências entre as antenas, já que, o símbolo x_1 não faz parte do sinal $\tilde{x}_0$ assim como x_0 não faz parte do sinal $\tilde{x}_1$, mostrando que os sinais podem ser decodificados de maneira independente.

Uma ordem de diversidade maior pode ser necessária para algumas aplicações, para isso é feito o uso de mais antenas de recepção. Para esses casos, n_r antenas de recepção podem ser utilizadas, proporcionando uma ordem de diversidade $2n_r$. Para este trabalho vamos estudar o uso de duas antenas transmissoras e duas antenas receptoras, com ordem de diversidade 4. A Figura 11, apresenta o esquema de Alamouti para este caso.

O esquema para duas antenas de transmissão e duas antenas de recepção, pode ser definido pelas mesmas três etapas do esquema 2×1 , e a sequência de transmissão é a mesma observada na Tabela 2.

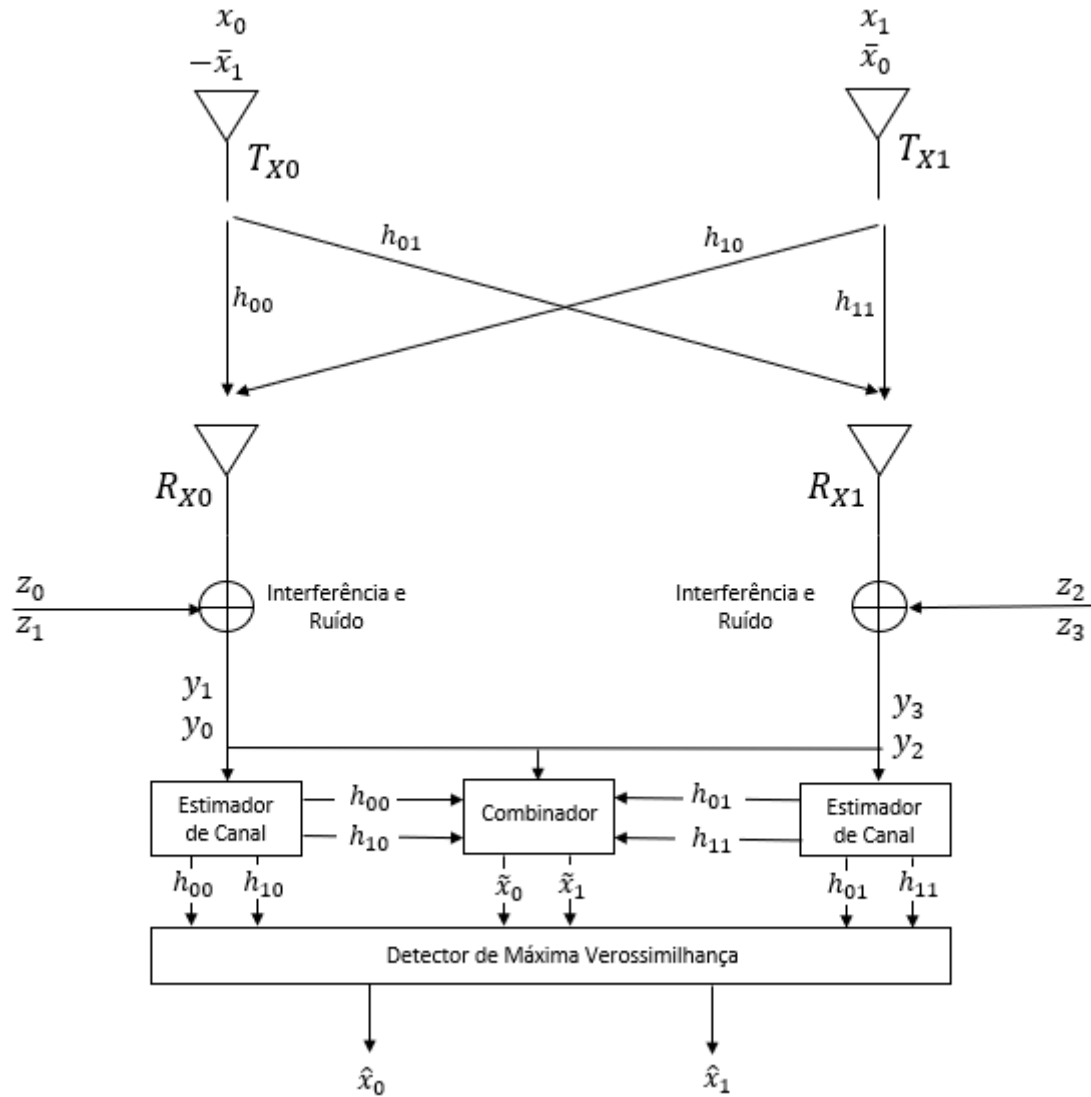
Para este esquema, há quatro caminhos diferentes para a transmissão dos sinais, ou seja, há quatro coeficientes de canais. Na tabela a seguir, definimos os coeficientes entre as antenas receptoras e transmissoras.

Tabela 4 – Coeficientes de canais entre as antenas transmissoras e receptoras para o esquema de Alamouti 2x2.

	Antena T_{XO}	Antena T_{X1}
Antena R_{XO}	h_{00}	h_{10}
Antena R_{X1}	h_{01}	h_{11}

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 11 – Esquema de Alamouti para duas antenas transmissoras e duas antenas receptoras.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Os sinais são recebidos em cada antena receptora, conforme a Tabela 5.

Tabela 5 – Notação para os sinais recebidos nas antenas de recepção.

	Antena R_{X0}	Antena R_{X1}
Tempo t	y_0	y_2
Tempo $t+T$	y_1	y_3

Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Na Tabela 5, vemos que em um determinado instante de tempo (t), dois símbolos são recebidos simultaneamente, y_0 e y_2 pelas antenas R_{X0} e R_{X1} respectivamente. E no instante seguinte ($t + T$), as antenas R_{X0} e R_{X1} recebem os símbolos y_1 e y_3 também de forma simultânea.

Como no esquema de Alamouti 2×1 , os sinais sofrem com os efeitos do ruído gaussiano branco aditivo. Deste modo, os sinais recebidos podem ser expressos matricialmente por

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_0 & y_2 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ -\bar{x}_1 & \bar{x}_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 & z_2 \\ z_1 & z_3 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Assim, desenvolvendo os cálculos da equação anterior, temos que

$$\begin{aligned} y_0 &= h_{00}x_0 + h_{10}x_1 + z_0 \\ y_1 &= -h_{00}\bar{x}_1 + h_{10}\bar{x}_0 + z_1 \\ y_2 &= h_{01}x_0 + h_{11}x_1 + z_2 \\ y_3 &= -h_{01}\bar{x}_1 + h_{11}\bar{x}_0 + z_3. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Após passar pelos estimadores de canais, o combinador envia os seguintes sinais para o detector de máxima verossimilhança:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= \bar{h}_{00}y_0 + h_{10}\bar{y}_1 + \bar{h}_{01}y_2 + h_{11}\bar{y}_3 \\ \tilde{x}_1 &= \bar{h}_{10}y_0 - h_{00}\bar{y}_1 + \bar{h}_{11}y_2 - h_{01}\bar{y}_3. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ao substituir os coeficientes de canais e a Equações (3.9) em (3.10), temos

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= \mu_0 e^{-j\theta_0}(\mu_0 e^{j\theta_1}x_1 + z_0) + \mu_1 e^{j\theta_1}(-\mu_0 e^{-j\theta_0}x_1 + \mu_1 e^{-j\theta_1}x_0 + \bar{z}_1) \\ &+ \mu_2 e^{-j\theta_2}(\mu_2 e^{j\theta_2}x_0 + \mu_3 e^{j\theta_3}x_1 + z_2) + \mu_3 e^{j\theta_3}(-\mu_2 e^{-j\theta_2}x_1 + \mu_3 e^{-j\theta_3}x_0 + \bar{z}_3) \\ \tilde{x}_1 &= \mu_1 e^{-j\theta_1}(\mu_0 e^{j\theta_1}x_1 + z_0) - \mu_0 e^{j\theta_0}(-\mu_0 e^{-j\theta_0}x_1 + \mu_1 e^{-j\theta_1}x_0 + \bar{z}_1) \\ &+ \mu_3 e^{-j\theta_3}(\mu_2 e^{j\theta_2}x_0 + \mu_3 e^{j\theta_3}x_1 + z_2) - \mu_2 e^{j\theta_2}(-\mu_2 e^{-j\theta_2}x_1 + \mu_3 e^{-j\theta_3}x_0 + \bar{z}_3). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Multiplicando e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &= (\mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)x_0 + \bar{h}_{00}z_0 + h_{10}\bar{z}_1 + \bar{h}_{01}z_2 + h_{11}\bar{z}_3 \\ \tilde{x}_1 &= (\mu_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)x_1 - h_{00}\bar{z}_1 + \bar{h}_{10}z_0 - h_{01}\bar{z}_3 + \bar{h}_{11}z_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Como no caso do esquema de Alamouti para apenas uma antena receptora, os sinais combinados das duas antenas receptoras ($\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_1$) são a soma dos sinais combinados de cada antena de recepção (y_0, y_1, y_2, y_3).

A partir do esquema de Alamouti definido acima para 2×1 e 2×2 antenas, podemos definir os códigos de bloco espaço-tempo STBC como uma generalização destes códigos. Assim, podemos definir um STBC $\mathcal{C}$ como um conjunto finito de matrizes complexas $\mathbf{X}$ dada na Equação (3.1), onde cada linha representa a quantidade de antenas transmissoras e cada coluna representa um intervalo de tempo. No Capítulo 4, iremos definir formalmente tais códigos a partir de álgebras cíclicas de divisão.

3.3 PARÂMETROS DE ANÁLISE

Esta seção abordará os parâmetros de análise de um código de bloco espaço-tempo, considerando um canal coerente, isto é, assumimos que o receptor recebeu a informação exata sobre o estado do

canal, também conhecido como CSI (*Channel State Information*) perfeito.

Considerando um CSI perfeito, a decodificação de máxima verossimilhança, corresponde a seleção da palavra-código $\mathbf{X}$ que minimiza:

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathcal{C}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{X}\|^2, \quad (3.13)$$

onde, $\|\cdot\|$ representa a norma quadrada de Frobenius, $\mathbf{Y}$ representa o sinal recebido e $\mathbf{H}$ representa o canal. A estimativa da probabilidade de erro $P(e)$ pode ser obtida por

$$P(e) \leq \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{\mathbf{X} \in \mathcal{C}} \sum_{\hat{\mathbf{X}} \neq \mathbf{X}} P(\mathbf{X} \rightarrow \hat{\mathbf{X}}), \quad (3.14)$$

onde $P(\mathbf{X} \rightarrow \hat{\mathbf{X}})$ significa a probabilidade de uma palavra-código $\mathbf{X}$ ser transmitida e o detector ML decidir equivocadamente por outra palavra-código $\hat{\mathbf{X}}$ e $|\mathcal{C}|$ é a cardinalidade do STBC $\mathcal{C}$. No caso de um canal de desvanecimento Rayleigh independente, podemos mostrar que

$$P(\mathbf{X} \rightarrow \hat{\mathbf{X}}) \leq \det \left[\mathbf{I}_{n_t} + \frac{(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^t}{4N_0} \right], \quad (3.15)$$

onde $(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})$ é a matriz da diferença da palavra-código, $\mathbf{I}_{n_t}$ é a matriz identidade de ordem n_t e N_0 é densidade espectral de potência de ruído.

Para códigos com SNR's altas, baixo valor de N_0 , temos

$$P(\mathbf{X} \rightarrow \hat{\mathbf{X}}) \leq \left(\frac{\Delta^{1/r}}{4N_0} \right)^{-rn_r}. \quad (3.16)$$

onde, $\Delta = \prod_{j=1}^r \lambda_j$, r é o posto da matriz de diferença da palavra-código e λ_j são os autovalores não-nulos da matriz de distância da palavra-código, $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^t. \quad (3.17)$$

Definição 3.3.1 *O ganho de diversidade de um código pode ser escrito como*

$$div = \min\{rn_r\}. \quad (3.18)$$

Um código será chamado de posto máximo se, para todos os pares $(\mathbf{X}, \hat{\mathbf{X}})$, $r = n_t$. Para estes casos, temos que

$$\Delta = \prod_{j=1}^{n_t} \lambda_j = \det(\mathbf{A}) \neq 0, \text{ para todo } \mathbf{A}. \quad (3.19)$$

Assim, podemos dizer que o código possui diversidade total, ou seja, é possível explorar todos os canais independentes, $n_t n_r$, do sistema MIMO.

Definição 3.3.2 *Definimos **determinante mínimo** do código, para códigos de diversidade máxima,*

como

$$\Delta_{\min} = \min_{\mathbf{X} \neq \hat{\mathbf{X}}} \det(\mathbf{A}), \quad (3.20)$$

onde, $(\Delta_{\min})^{1/n_t}$ é chamado de **ganho de codificação**.

Definição 3.3.3 Um código de bloco espaço-tempo STBC $\mathcal{C}$ é dito **linear**, desde que

$$\forall \mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathcal{C} \quad \mathbf{X} \pm \mathbf{X}' \in \mathcal{C}, \quad (3.21)$$

ou seja, para todo $\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}'$ pertencente ao código $\mathcal{C}$, a soma ou diferença de qualquer par de palavras-código é uma palavra-código.

Para códigos lineares, a probabilidade de erro dada em (3.14) pode ser reduzida, já que a soma ou diferença de qualquer par de palavras-códigos é, por fim, uma palavra-código. Assim,

$$P(e) \leq \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{\mathbf{X} \neq \mathbf{0}} P(\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{X}). \quad (3.22)$$

E, por (3.17) e (3.20), segue que

$$\Delta_{\min} = \min_{\mathbf{X} \neq \mathbf{0}_{n_t \times T}} \det(\mathbf{X}\mathbf{X}^t). \quad (3.23)$$

Com o intuito de aumentar a confiabilidade, estamos em busca de códigos lineares com diversidade máxima e alto determinante mínimo $\Delta_{\min}$. Para STBCs lineares, podemos considerar $\mathcal{C}_{\infty} = \Lambda$, já que a diferença ou soma de qualquer dois pontos do reticulado, é sempre um ponto do reticulado.

Como visto na Seção 2.4, para esquemas básicos de modulação, considerando as constelações M -QAM onde $M = 2^m$ para um inteiro positivo m . A eficiência espectral do sistema MIMO pode ser dada por $\eta = km/T$ bits por uso de canal (bpcu) ou $\eta_s = k/T$ símbolos por uso de canal (spcu), onde k é o número de símbolos de informação QAM codificados nas palavras-códigos.

Definição 3.3.4 Dizemos que um código é de **taxa máxima**, se $k = n_r T$.

No caso de $n = n_t = n_r = T$ podemos codificar de forma confiável no máximo, $k = n^2$ símbolos de informação. Deste modo, temos que a eficiência espectral pode ser dada por $\eta_s = n$ spcu.

Assim, podemos dizer que Λ é um reticulado de posto máximo. Reticulados de posto máximo fornecem códigos de espaço-tempo com um ganho máximo de multiplexação.

As palavras-códigos correspondem a pontos em um espaço de sinal multidimensional, formando constelações, como visto na Seção 2.4. O desempenho dessas constelações é determinada pela forma da sua região delimitadora. Para aprimorar a eficiência energética dos códigos, é necessário introduzir uma restrição de modelagem na constelação de sinais, ou seja, *shaping*. Para obtermos o ganho de *shaping* γ_s máximo, a região delimitadora é esférica para qualquer dimensão. Embora essa região delimitadora esférica seja interessante por proporcionar um máximo γ_s , traz como desvantagem a distribuição dos pontos da constelação, já que se faz necessário o uso de uma tabela de consulta, tornando inviável para grandes constelações. Deste modo, a melhor escolha é por uma região delimitadora cúbica, ou seja,

constelações com formato de *shaping* cúbico. Estas constelações podem ser fáceis de serem rotuladas e não apresentam qualquer perda de *shaping*, isto é possuem $\gamma_s = 0$ dB.

A propriedade de determinante diferente de zero (*Non-Vanishing Determinant - NVD*), também é necessária. Esta propriedade pode ser resumida a $\Delta_{min} \neq 0$, e foi introduzida pela primeira vez em [Belfiore e Rekaya 2003]. Como é realizado a transmissão de constelações de diferentes tamanhos, é importante que o ganho de codificação não dependa do tamanho da constelação. Em construções anteriores de STBCs o determinante mínimo era decrescente de acordo com o tamanho da constelação. Deste modo, quando o determinante mínimo, Δ_{min} , é igual a zero, o ganho geral de codificação é radicalmente reduzido. Esta propriedade é precisa para que seja possível atingir o *trade-off* de diversidade de multiplexação.

Assim, os parâmetros de *design* para STBCs que vamos estudar neste trabalho, podem ser listados como os seguintes:

1. Códigos de bloco espaço-tempo lineares, com $n_t = n_r = T$;
2. Diversidade máxima e alto determinante mínimo, para elevar a confiabilidade do sistema;
3. Máxima eficiência espectral, com códigos de taxa máxima;
4. Constelação com formato de *shaping* cúbico;
5. E determinante diferente de zero, para satisfazer a propriedade NVD, necessária para atingir o *trade-off* de diversidade de multiplexação.

4 STBC PARA SISTEMA MIMO 2×2 VIA ÁLGEBRAS CÍCLICAS DE DIVISÃO

Neste capítulo, na primeira seção apresentaremos construção do código de Alamouti 2×2 via álgebra dos quatérnios de Hamilton, uma álgebra particular da álgebra cíclica de divisão, e a construção geral de um código bloco espaço-tempo 2×2 a partir de álgebras cíclicas de divisão. Posteriormente, apresentaremos os STBCs perfeitos e as condições necessárias para estes tipos de código, por fim, apresentaremos os códigos de Ouro e de Prata, que são um dos focos deste trabalho. Para a elaboração deste capítulo foram utilizadas as seguintes referências [Alamouti. 1998, Oggier, Belfiore e Viterbo 2007, Oggier et al. 2006, Belfiore, Rekaya e Viterbo 2005, Tarokh, Jafarkhani e Calderbank 1999, Hollanti et al. 2008, Ray et al. 2009, Biglieri, Hong e Viterbo 2009, Alves e Belfiore 2013, Duarte 2021].

4.1 STBCS 2×2 VIA ÁLGEBRAS CÍCLICAS DE DIVISÃO

Vamos iniciar apresentando a construção dos códigos de Alamouti a partir de uma álgebra cíclica de divisão particular, a álgebra dos quatérnios de Hamilton.

Como definido em 2.1.2, seja a álgebra dos quatérnios $\mathbb{H} = (-1, -1)_{\mathbb{R}}$, para $i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1$, e $k = ij = -ji$, e seja $q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k$ um elemento de $\mathbb{H}$, como definido em 2.1.11. Um quatérnio q pode ser escrito como

$$\begin{aligned} q &= (x_0 + x_1i) + (x_2j + x_3ij) \\ &= (x_0 + x_1i) + (x_2j - x_3ji) \\ &= \alpha_q + j\beta_q, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $\alpha_q = x_0 + x_1i \in \mathbb{C}$ e $\beta_q = x_2 - x_3i \in \mathbb{C}$. Deste modo, $\mathbb{H}$ é um espaço vetorial à direita de $\mathbb{C}$, na base $\mathbb{C} \{1, j\}$ e em que $q = (\alpha_q, \beta_q)$.

Temos que o homomorfismo $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow M_{\mathbb{C}(2)}$ faz a analogia entre os elementos q de $\mathbb{H}$ com uma matriz 2×2 com coeficientes em $\mathbb{C}$. Seja, $M_{\mathbb{C}(2)}$ o espaço vetorial das matrizes 2×2 com coeficientes em $\mathbb{C}$ e com base $\{1, j\}$,

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi(i) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{H} &\rightarrow M_{\mathbb{C}(2)} \\ \varphi : q &\mapsto \varphi(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) = x_0\varphi(1) + x_1\varphi(i) + x_2\varphi(j) + x_3\varphi(k). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Substituindo, (4.2) em (4.3)

$$x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 i & -x_2 - x_3 i \\ x_2 - x_3 i & x_0 - x_1 i \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Dado que $\alpha_q = x_0 + x_1 i$ e $\beta_q = x_2 - x_3 i$, obtemos

$$\begin{pmatrix} \alpha_q & -\bar{\beta}_q \\ \beta_q & \bar{\alpha}_q \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Assim, seja $\mathcal{C}$ o conjunto destas matrizes

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}^t \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}, \quad (4.6)$$

que correspondem às palavras-código do código de Alamouti, conforme (3.1). A diversidade máxima deste código pode também ser derivada da álgebra dos quatérnios de Hamilton já que $\mathbb{H}$ é uma álgebra de divisão. Seja, $q = \alpha + j\beta \in \mathbb{H}$, temos

$$\det(\mathbf{X}) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = Nrd(q) \neq 0, \quad (4.7)$$

visto que, pelo Teorema 2.1.3, $Nrd(q) = 0$, se $q = 0$.

Como dito anteriormente, STBCs podem ser vistos como uma generalização dos códigos de Alamouti, portanto, a construção algébrica de STBCs 2×2 seguirá de forma similar a construção algébrica do código de Alamouti. Como estamos interessados em STBCs 2×2 , podemos considerar as álgebras cíclicas de divisão como uma álgebra dos quatérnios, desde que esta seja de divisão. Assim, seja $\mathcal{A} = (a, b)_{\mathbb{K}}$ uma álgebra dos quatérnios sobre um corpo de números $\mathbb{K}$, em que $Nrd(q) \neq 0$ para $q \neq 0 \in \mathcal{A}$. Podemos construir STBCs 2×2 com diversidade máxima, considerando um homomorfismo semelhante ao utilizado para construção do código de Alamouti, (4.3). Assim, $M_{\mathbb{K}(2)}$ é o espaço vetorial das matrizes 2×2 com coeficientes em $\mathbb{K}$ com base

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \varphi(i) = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}, \varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \varphi(k) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ b\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

portanto

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A} &\rightarrow M_{\mathbb{K}(2)} \\ \varphi : q &\mapsto \varphi(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k) = x_0 \varphi(1) + x_1 \varphi(i) + x_2 \varphi(j) + x_3 \varphi(k). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Substituindo, (4.8) em (4.9), temos

$$x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \\ b\sqrt{a} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 \sqrt{a} & x_2 + x_3 \sqrt{a} \\ x_2 b - x_3 b \sqrt{a} & x_0 - x_1 \sqrt{a} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Assim, temos que o conjunto das matrizes 2×2 com coeficientes em $\mathbb{K}$ é

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1\sqrt{a} & x_2 + x_3\sqrt{a} \\ x_2b - x_3b\sqrt{a} & x_0 - x_1\sqrt{a} \end{pmatrix} \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}} \right\}, \quad (4.11)$$

onde b não é uma norma dos elementos de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, e $\det(\mathbf{X})$, para todo $\mathbf{X} \neq 0$.

Para obtermos símbolos QAM são utilizados corpos de números $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$ e assim o anel dos inteiros é $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[i]$.

Considerando $\mathcal{A} = (\mathbb{L}/\mathbb{K}, \sigma, \gamma)$ uma álgebra cíclica de divisão, definida em (2.1.4), onde σ é um monomorfismo de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ e γ é um elemento que não é norma de algum elemento de $\mathbb{L}$. Deste modo, por (2.7), as palavras-códigos de um STBC derivadas de álgebras cíclicas de divisão, para sistemas MIMO 2×2 podem seguir o seguinte modelo:

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 & \gamma\sigma(x_1) \\ x_1 & -\sigma(x_0) \end{pmatrix}^t \mid x_0, x_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{L}} \right\}. \quad (4.12)$$

4.2 CÓDIGOS DE BLOCO ESPAÇO-TEMPO PERFEITOS

Nesta seção, primeiro iremos apresentar e definir um código de bloco espaço-tempo perfeito. Posteriormente, vamos apresentar mais detalhadamente a construção e características de STBCs perfeitos, o código de Ouro e de Prata.

Definição 4.2.1 *Um código de bloco espaço-tempo quadrado, $n_t \times n_r$, é denominado **perfeito** se, e somente se:*

1. *É um código linear de taxa máxima de n_t^2 símbolos de informação QAM;*
2. *O determinante mínimo de um código infinito é diferente de zero, ou seja, $\Delta_{min} \neq 0$;*
3. *A energia transmitida na codificação dos símbolos de informação não aumenta, ou seja, é usado o formato de constelação cúbica, para a otimização na eficiência energética;*
4. *Todos os símbolos codificados têm a mesma energia média.*

Vamos considerar $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\theta)$ uma extensão quadrática de $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$, para demonstrar que um STBC satisfaz as condições definidas em 4.2.1. Um código de bloco espaço-tempo infinito $\mathcal{C}$, pode ser definido como um conjunto de matrizes, da forma

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 + x_3\theta \\ \gamma(x_2 - x_3\bar{\theta}) & x_0 + x_1\bar{\theta} \end{pmatrix} \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}[i] \right\}, \quad (4.13)$$

em que γ é um elemento que não é uma norma em $\mathbb{L}$.

Temos que $\mathcal{C}$ é um código linear se, $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathcal{C}$ então $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \in \mathcal{C}$. Para obter um código finito $\mathcal{C}$ os símbolos de informação $x_0, x_1, x_2, x_3 \in B$ devem ser limitados a B , em que B é a constelação de sinal, sendo uma modulação M - QAM, deste modo temos um código linear de taxa máxima.

Para obtermos a diversidade máxima, o código deve possuir a propriedade do determinante diferente de zero (*Non-Vanishing Determinant-NVD*). Assim,

$$|\det(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j)|^2 \neq 0, \text{ para } \mathbf{X}_i \neq \mathbf{X}_j \in \mathcal{C}, \quad (4.14)$$

podemos simplificar essa equação, pela linearidade

$$|\det(\mathbf{X})|^2 \neq 0, \quad (4.15)$$

para toda palavra-código $\mathbf{X} \in \mathcal{C}$ diferente de zero.

Para maximizar a vantagem de codificação, o determinante mínimo de um STBC $\mathcal{C}$, é determinado por

$$\Delta_{\min}(\mathcal{C}) = \min_{0 \neq \mathbf{X} \in \mathcal{C}} |\det(\mathbf{X})|^2. \quad (4.16)$$

Deste modo, vemos que para um determinante diferente de zero há um limite inferior no determinante mínimo que não depende do tamanho da constelação.

Para conseguir o formato de constelação cúbica para um STBC $\mathcal{C}$ que é construído através de uma álgebra cíclica de divisão, é necessário aplicar uma matriz unitária em um vetor de valores discretos, que pode ser interpretada como pontos geradores em um reticulado algébrico. Por utilizarmos símbolos de informação QAM, obtemos o reticulado cúbico $\mathbb{Z}^n$, sendo assim, obtemos a condição de *shaping* cúbico.

Um código de bloco espaço-tempo perfeito, pode ser construído para 2, 3, 4 e 6 antenas, ou seja, códigos de bloco espaço-tempo perfeitos para sistemas MIMO 2×2 , 3×3 , 4×4 , e 6×6 [Oggier et al. 2006].

Nas próximas subseções, iremos apresentar dois exemplos de códigos de bloco espaço-tempo para 2 antenas, que satisfazem todas as condições, desta maneira, são códigos perfeitos.

4.2.1 Código de Ouro

O código de Ouro é um STBC perfeito, visto que é um código de diversidade e taxa máxima, possui a propriedade do determinante diferente de zero, e possui o *shaping* cúbico, satisfazendo as condições da Definição 4.2.1.

O nome, código de Ouro, vem do número de ouro $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que está relacionado com a sua construção algébrica utilizando uma álgebra de divisão cíclica. Considerando um corpo de números

$$\mathbb{L} = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5}) \quad (4.17)$$

como uma extensão quadrática relativa de $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$, com polinômio minimal $p(X) = X^2 - X - 1$. O anel de inteiros é definido por

$$\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \{a + b\theta \mid a, b \in \mathbb{Q}(i)\}, \quad (4.18)$$

onde θ é o número de ouro definido acima. Deste modo, o código de Ouro pode ser construído através

de uma álgebra cíclica de divisão definida por

$$\mathcal{A} = (\mathbb{L}/\mathbb{K}, \sigma, \gamma), \quad (4.19)$$

para $\sigma(\theta) = \bar{\theta}$.

Uma palavra-código de um código bloco espaço-tempo construído utilizando esta álgebra, antes do *shaping*, é determinada como

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1\theta & x_2 + x_3\theta \\ i(x_2 + x_3\sigma(\theta)) & x_0 + x_1\sigma(\theta) \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

para $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}[i]$. Assim, para adicionarmos a propriedade de *shaping* nas palavras-códigos, é necessário que cada camada do código seja formada a partir de $\mathbb{Z}[i]^2$ rotacionado, que chamaremos de Λ' . Considerando (2.30), temos que

$$\det(\Lambda) = |N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha)|^2 |d_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}| = 5 |N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha)|^2. \quad (4.21)$$

Precisamos de um elemento α tal qual $|N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\alpha)|^2 = 5$. Para conseguir tal elemento, vejamos a fatoração de 5 no anel de inteiros

$$5\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = (1 + i - i\theta)^2(1 - i + i\theta)^2. \quad (4.22)$$

Deste modo, optamos por $\alpha = 1 + i - i\theta$. Agora iremos analisar se de fato conseguimos o reticulado correto. A matriz geradora, (2.28), é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\theta \\ \sigma(\alpha) & \sigma(\alpha\theta) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

A partir de um cálculo direto, temos que $\mathbf{M}\mathbf{M}^t = 5I_2$. Portanto, $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{M}$ é uma matriz unitária.

Ao adicionar a propriedade de *shaping*, temos que a palavra-código do código de Ouro, é determinada por

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha(x_0 + x_1\theta) & \alpha(x_2 + x_3\theta) \\ i\sigma(\alpha)(x_2 + x_3\sigma(\theta)) & \sigma(\alpha)(x_0 + x_1\sigma(\theta)) \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

onde, x_0, x_1, x_2, x_3 são símbolos QAM. Vamos agora, calcular o determinante mínimo do código de Ouro. Posto que, $\alpha\sigma(\alpha) = 2 + i$, temos

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{X}) &= \frac{2 + 1}{5} [(x_0 + x_1\theta)(x_0 + x_1\sigma(\theta)) - i(x_2 + x_3\theta)(x_2 + x_3\sigma(\theta))] \\ &= \frac{1}{2 - i} [(x_0^2 + x_0x_1 - x_1^2 - i(x_2^2 + x_2x_3 - x_3^2))]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Por definição, temos que $|x_0^2 + x_0x_1 - x_1^2 - i(x_2^2 + x_2x_3 - x_3^2)|^2 = 1$, então o determinante mínimo

normalizado do código de Ouro é

$$\Delta_{\min}(\mathcal{C}) \geq \min_{0 \neq \mathbf{X} \in \mathcal{C}} |\det(\mathbf{X})|^2 = \frac{1}{5}. \quad (4.26)$$

Por fim, podemos dizer que o código de Ouro é um código perfeito, visto que:

- Atinge a diversidade Máxima: pois, $n_t \cdot n_r = 2 \cdot 2 = 4$ canais independentes;
- Possui taxa máxima: O determinante da diferença de 2 palavras-código é sempre diferente de zero;
- Satisfaz a propriedade do determinante diferente de zero (NVD), e o determinante mínimo normalizado do código de Ouro é $1/5$;
- Possui o formato (*shaping*) cúbico, como demonstrado anteriormente pela utilização da Matriz $\mathbf{M}$ complexa unitária;
- Energia média uniforme é alcançada já que todos os símbolos codificados na matriz $\mathbf{X}$ têm a mesma energia média uma vez que $|\gamma|^2 = 1$.

4.2.2 Código de Prata

Em [Hollanti et al. 2008] vemos que o código de Prata pode ser construído algebricamente a partir de uma álgebra cíclica de divisão. Deste modo, garantimos que o código de prata possua taxa e diversidade máxima. Vamos mostrar ainda que ele possui as demais propriedades para ser um código perfeito, ou seja, que tem determinante diferente de zero (NVD) e é energeticamente eficiente (*shaping* cúbico), satisfazendo a Definição 4.2.1 .

O código de Prata é chamado assim por ter seu determinante mínimo normalizado igual a $1/\sqrt{7}$ (que mostraremos nesta seção), o que leva esse código a segunda posição em relação ao código de Ouro, que como vimos, possui determinante mínimo normalizado igual a $1/5$ (Equação 4.26).

O código de Prata S é definido como

$$S = \{ \mathbf{X} = X_A + \mathbf{T}X_B \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}[i] \} \quad (4.27)$$

para

$$X_A = X_A(x_0, x_1) = \begin{pmatrix} x_0 & -\bar{x}_1 \\ x_1 & \bar{x}_0 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$X_B = X_B(s_0, s_1) = \begin{pmatrix} s_0 & -\bar{s}_1 \\ s_1 & \bar{s}_0 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

com uma matriz unitária $\mathbf{U}$ definida por

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1+i & -1+2i \\ 1+2i & 1-i \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

E a matriz de torção é dada por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Considerando a Definição 2.1.7 e o Teorema 2.1.2, temos que $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ é uma extensão cíclica de grau n com grupo de Galois $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}) = \langle \sigma \rangle$, e que a álgebra $\mathcal{A}$ é definida como a soma direta de cópias de $\mathbb{L}$, como apresentado em (2.4) e na sua forma matricial em (2.5).

O código de Prata S está contido como subconjunto em uma álgebra cíclica de divisão $\mathcal{A}$ definida como

$$\mathcal{A} = (\mathbb{L}/\mathbb{K}, \sigma, \gamma), \quad (4.33)$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$, $\mathbb{L} = \mathbb{K}(i)$, $\gamma = -1$ é o elemento não normativo e σ é o gerador do grupo de Galois de $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ e é determinado por

$$\sigma : \begin{cases} i & \mapsto -i \\ \sqrt{7} & \mapsto -\sqrt{7}. \end{cases} \quad (4.34)$$

O anel de inteiros de $\mathbb{L}$ é dado por,

$$\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = \mathbb{Z}[i] \oplus \frac{1 + \sqrt{-7}}{2} \mathbb{Z}[i]. \quad (4.35)$$

Seja, $\sigma(i) = -i = \bar{i}$, a matriz de uma palavra-código de um STBC, construído a partir dessa álgebra, pode ser representada por

$$X_A = \begin{pmatrix} x_0 & -\sigma(x_1) \\ x_1 & \sigma(x_0) \end{pmatrix} \in \mathcal{A}. \quad (4.36)$$

Calculando as matrizes bases da parte $\mathbf{T}X_B(s_0, s_1)$, onde (x_2, x_3) varia sobre o conjunto

$\{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$. Assim, encontramos as quatro matrizes básicas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{-\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1+i & -2-i \\ 2-i & -1-i \end{pmatrix}, \\ & \frac{1}{-\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -2-i & 1-i \\ -1-i & -2+i \end{pmatrix}, \\ & \frac{1}{-\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1-i & -1+2i \\ 1+2i & -1+i \end{pmatrix}, \\ & \frac{1}{-\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1-2i & -1-i \\ 1-i & 1+2i \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Podemos escrever então,

$$\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{-i\sqrt{-7}} = \frac{i}{\sqrt{-7}}, \tag{4.38}$$

onde i foi multiplicado pelas matrizes. Pode se ver que todas as matrizes básicas têm a seguinte forma

$$\frac{1}{\sqrt{-7}} \begin{pmatrix} x_0 & \lambda\sigma(x_1) \\ x_1 & \sigma(x_0) \end{pmatrix}, \tag{4.39}$$

onde, $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}[i]$. Deste modo, as somas em $\mathbf{X} \in S$ são elementos de $\mathcal{A}$ e $\mathbf{X} \in \mathcal{A}$.

Teorema 4.2.1 *O código de Prata possui a propriedade do determinante diferente de zero e determinante mínimo, dado por*

$$\min \det(S) \geq 1/7. \tag{4.40}$$

Prova 4.2.1 *Ao analisar as matrizes da palavra-código,*

$$\mathbf{X} = X_A + \mathbf{T}X_B \in \Lambda \oplus \frac{1}{\sqrt{-7}}\Lambda, \tag{4.41}$$

vemos que, $S \cdot \sqrt{-7} \subseteq \Lambda$, então $S \subseteq \frac{1}{\sqrt{-7}}\Lambda$. Em que S é meu código de Prata. Assim,

$$\min \det(S) \geq \left| \min \det \left(\frac{1}{\sqrt{-7}}\Lambda \right) \right| = \frac{1}{7} \min \det(\Lambda) = \frac{1}{7}. \tag{4.42}$$

Assim, por (4.16), temos que o determinante mínimo normalizado do código de Prata é

$$\Delta_{\min}(S) = \frac{1}{\sqrt{7}} \tag{4.43}$$

Por fim, podemos afirmar que o código de Prata é um código perfeito, visto que:

- Atinge a diversidade Máxima: pois são utilizados 4 canais independentes, $n_t \cdot n_r = 2 \cdot 2 = 4$;
- Possui taxa máxima: O determinante da diferença de 2 palavras-código é sempre diferente de zero;
- Satisfaz a propriedade do determinante diferente de zero (NVD), e o determinante mínimo normalizado do código de Prata é $1/\sqrt{7}$;
- O formato (*shaping*) cúbico é atingido já que cada camada é formada a partir de uma versão rotacionada de $\mathbb{Z}[i]^2$;
- Energia média uniforme é alcançada já que todos os símbolos codificados na matriz $\mathbf{X}$ têm a mesma energia média, para isso escolhemos γ tal que $|\gamma|^2 = 1$.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos nas simulações realizadas no *software* MATLAB. As simulações realizadas foram baseadas em [Aragorn 2011, Duarte 2021]. Na Seção 5.1, realizaremos as simulações do código de Alamouti para sistemas de duas antenas de transmissão e uma antena de recepção (2×1), e para duas antenas de transmissão e duas antenas de recepção (2×2). Seguidamente, na Seção 5.2, realizaremos as simulações para o código de Prata para duas antenas de transmissão e duas antenas de recepção (2×2). E por fim, na Seção 5.3, realizaremos as simulações para o código de Ouro para duas antenas de transmissão e duas antenas de recepção (2×2).

Nas simulações, foi empregado o método de Monte Carlo (*Monte Carlo Method*), que é uma técnica baseada na utilização de números aleatórios [Jacoboni e Lugli 1990]. Este método consiste em simular por um número elevado de vezes, a mesma rotina de caráter aleatório com o intuito de encontrar o comportamento do sistema e obter, assim, um resultado numérico aproximado. Importante falar que, o resultado será mais preciso com um maior número de repetições. Nas simulações realizadas, as rotinas foram simuladas 10^6 vezes, por conta da capacidade do computador utilizado, para que obtivéssemos curvas mais suaves e com menos erros de ponto flutuante, seria preciso aumentar o número de simulações de Monte Carlo.

O interesse das simulações é analisar a performance de cada um dos códigos citados, por meio da relação da razão de erro de símbolo (SER) pela relação sinal ruído (SNR). Além de que iremos realizar uma comparação entre os três códigos, para analisar o desempenho de cada, para modulações M -QAM.

5.1 SIMULAÇÕES CÓDIGO DE ALAMOUTI

Na Seção 3.2 vimos com detalhes o código de Alamouti 2×1 e 2×2 , e na Seção 4.1 foi apresentado o código de Alamouti a partir da álgebra dos quatérnios de Hamilton.

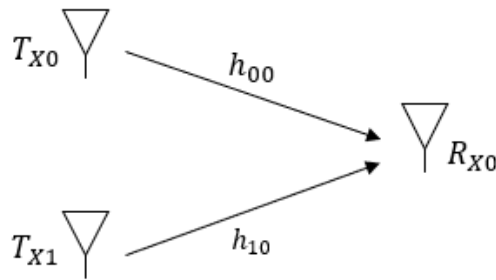
Assim, é feita a transmissão da palavra-código $\mathbf{X}$, definida em (3.1), pelo canal de desvanecimento Rayleigh quase-estático e plano. Neste esquema temos dois canais onde os coeficientes seguem a distribuição de Rayleigh. Podemos relacionar essa distribuição com a distribuição gaussiana por meio de duas variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas. Na Figura 12 vemos o esquema de transmissão para duas antenas transmissoras e uma antena receptora.

Os sinais recebidos, na antena receptora, definidos em (3.3), passam pelo combinador e pelo estimador de canal, como é indicado no esquema representado na Figura 10. Deste modo, obtemos os sinais dados em (3.7) que são enviados ao decodificador ML.

Para o esquema 2×2 , a mesma palavra-código, (3.1), é transmitida, mas por meio de quatro canais onde os coeficientes também seguem a distribuição de Rayleigh. Na Figura 13 vemos o esquema de transmissão para um sistema de duas antenas transmissoras e duas antenas receptoras.

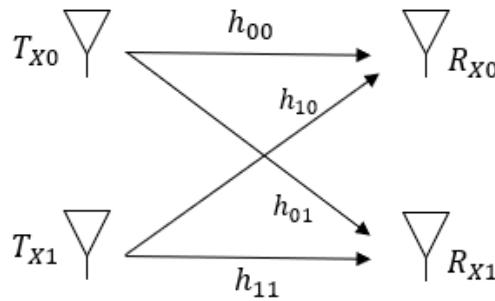
Os sinais recebidos, agora definidos em (3.8), passam também pelo estimador e pelo combinador, como demonstrado no esquema representado na Figura 11. Desta forma, obtemos os sinais da equação (3.12), que depois são enviados ao decodificador ML.

Figura 12 – Esquema de transmissão para sistema de duas antenas transmissoras e uma antena receptora.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Figura 13 – Esquema de transmissão para sistema de duas antenas transmissoras e duas antenas receptoras.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

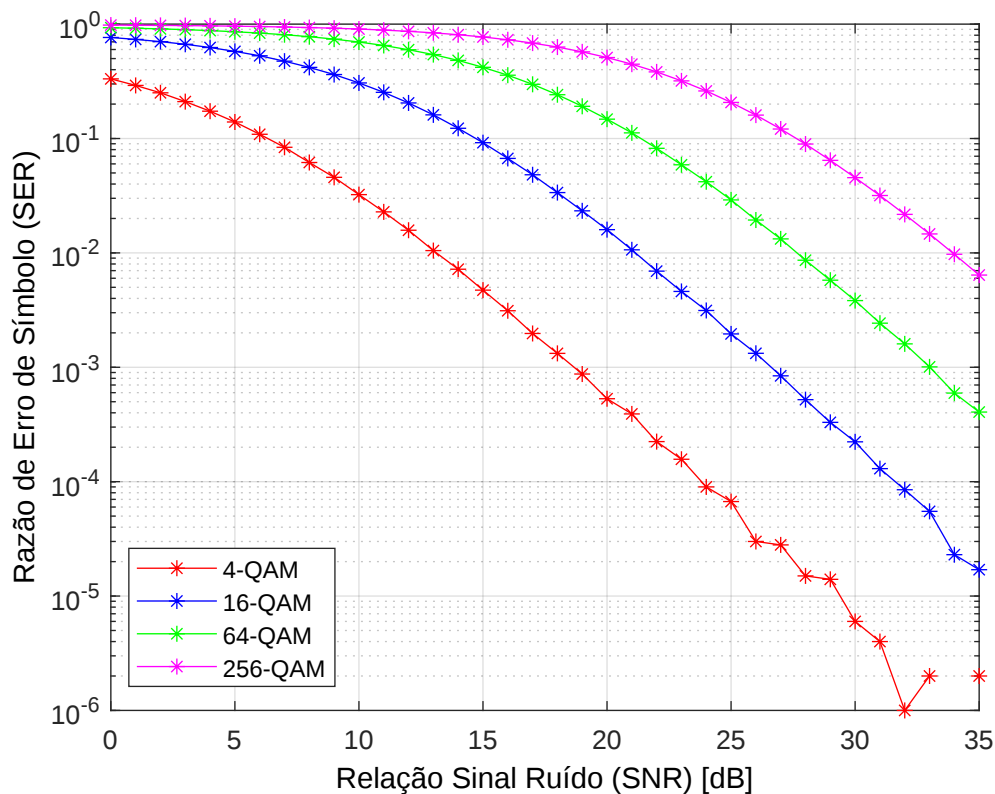
Foram realizadas as simulações para os códigos de Alamouti dos dois esquemas, para as modulações quadradas definidas na Tabela 1 com uma SNR que varia de 0 a 35 dB.

A rotina implementada no MATLAB para as simulações do código de Alamouti, de ambos os esquemas 2×1 e 2×2 , segue a seguinte ordem:

1. Início da Simulação;
2. Geração de N (10^6) símbolos, usando inteiros que variam de 0 até $M-1$, aleatórios e uniformemente distribuídos;
3. Modulação M -QAM dos símbolos obtidos;
4. Geração da matriz, definida em (3.1) dos símbolos a serem transmitidos;
5. Geração da matriz $\mathbf{H}$ do canal de desvanecimento Rayleigh com coeficientes seguindo a distribuição de Rayleigh;
6. Geração da matriz $\mathbf{Z}$ do ruído AWGN, utilizando números aleatórios normalmente distribuídos;
7. A matriz $\mathbf{X}$ das palavras-código são enviadas pelo canal com ruído;
8. É obtida a matriz $\mathbf{Y}$ dos símbolos recebidos, para o esquema 2×1 definida em (3.3) e para o esquema 2×2 definida em (3.8);

9. Os símbolos recebidos passam pelo combinador e pelo estimador de canal, e assim obtemos os sinais definidos em (3.7) para o esquema 2×1 e os sinais definidos em (3.12) para o esquema 2×2 ;
10. Os sinais recebidos são demodulados e passam pelo decodificador ML;
11. A razão de erro de símbolo é calculada;
12. O gráfico da SER vs. SNR é plotado;
13. Fim da simulação.

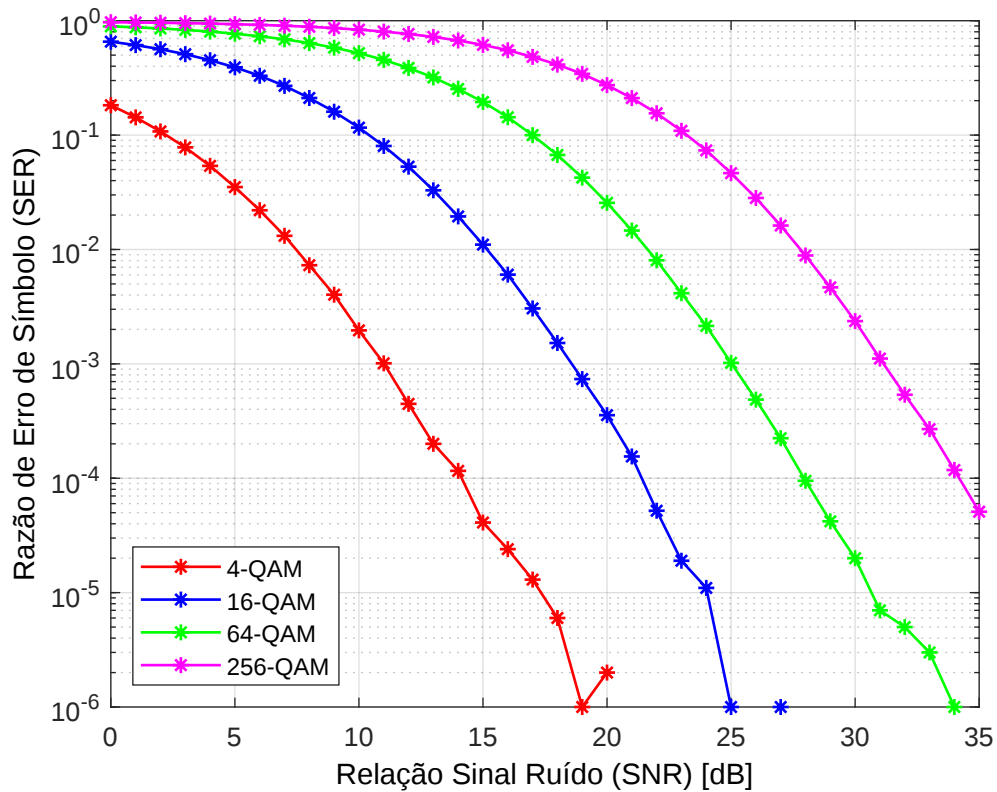
Figura 14 – Gráfico da SER vs. SNR do código de Alamouti 2×1 com modulações 4, 16, 64 e 256-QAM.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

As Figura 14 e Figura 15 mostram as curvas obtidas na simulação do código de Alamouti 2×1 e 2×2 . As curvas obtidas, em ambos os casos, apresentam o comportamento esperado para cada modulação M -QAM, já que conforme a modulação aumenta maior é a razão de erro de símbolo. Portanto, notamos que o desempenho do sistema MIMO é afetado pelos pontos da constelação QAM, o desempenho do sistema é reduzido à medida que o número de pontos de mapeamento da constelação aumenta [Ettarfaoui, Taha e Himmi 2015].

Figura 15 – Gráfico da SER vs. SNR do código de Alamouti 2×2 com modulações 4, 16, 64 e 256-QAM.

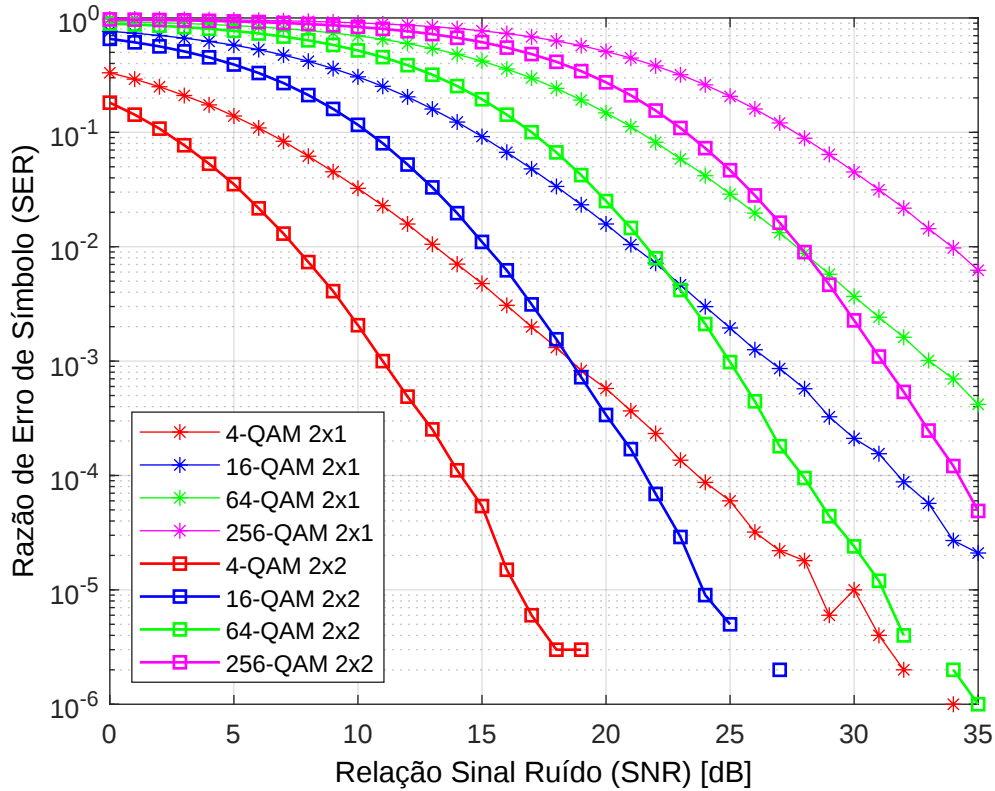


Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

Por fim, na Figura 16, podemos comparar diretamente as curvas para o esquema 2×1 e para o esquema 2×2 . Assim, quando comparamos uma mesma ordem de modulação para esquemas diferentes, nota-se que para o caso 2×2 obtemos uma melhor razão de erro de símbolo.

Para o esquema de Alamouti 2×1 , temos dois canais independentes, ou seja, uma ordem de diversidade de $2n_r = 2$, e para o caso do esquema 2×2 temos quatro canais independentes, já que possui uma ordem de diversidade $2n_r = 4$. Portanto, para obter uma razão de erro de símbolo de 10^{-4} , para uma modulação 4-QAM seria necessária uma SNR de 24 dB para o esquema 2×1 e uma SNR de aproximadamente 15 dB para o esquema 2×2 [Alamouti. 1998].

Figura 16 – Gráfico da SER vs. SNR do código de Alamouti 2×1 e 2×2 com modulações 4, 16, 64 e 256-QAM.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

5.2 SIMULAÇÕES CÓDIGO DE PRATA

Na Seção 4.2.2 vimos a construção do código de Prata via uma álgebra cíclica de divisão. O que garante que o código de Prata seja um STBC perfeito, que possui diversidade e taxa máxima, propriedade de determinante diferente de zero e *shaping* cúbico. O código de Prata 2×2 segue o mesmo esquema de transmissão da Figura 13.

Como visto na Seção 4.2.2, o código de Prata S é definido por

$$S = \{ \mathbf{X} = X_A + \mathbf{T}X_B \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}[i] \}, \quad (5.1)$$

para os elementos definidos nas Equações (4.28), (4.29), (4.30), e (4.31). Deste modo, podemos definir $\mathbf{X}$ como

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{1}{\sqrt{7}}[(1+i)x_2 + (-1+2i)x_3] & -\bar{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{7}}[(1-2i)\bar{x}_2 + (1+i)\bar{x}_3] \\ x_1 - \frac{1}{\sqrt{7}}[(1+2i)x_2 + (1-i)x_3] & \bar{x}_0 - \frac{1}{\sqrt{7}}[(1-i)\bar{x}_2 + (-1-2i)\bar{x}_3] \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Podemos remodelar $\mathbf{X}$, ao empilhar a matriz coluna a coluna, obtendo uma matriz 4×1 :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 + \frac{1}{\sqrt{7}}[(1+i)x_2 + (-1+2i)x_3] \\ x_1 - \frac{1}{\sqrt{7}}[(1+2i)x_2 + (1-i)x_3] \\ -\bar{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{7}}[(1-2i)\bar{x}_2 + (1+i)\bar{x}_3] \\ \bar{x}_0 - \frac{1}{\sqrt{7}}[(1-i)\bar{x}_2 + (-1-2i)\bar{x}_3] \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Agora, ao separarmos a parte real da parte imaginária, da matriz (5.3), obtemos uma matriz 8×1 :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(x_0) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_2) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_2) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_3) - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_3) \\ \operatorname{Im}(x_0) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_2) + \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_3) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_3) \\ \operatorname{Re}(x_1) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_2) + \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_2) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_3) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_3) \\ \operatorname{Im}(x_1) - \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_2) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_3) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_3) \\ -\operatorname{Re}(x_1) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_2) + \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_2) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_3) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_3) \\ \operatorname{Im}(x_1) + \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_2) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_3) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_3) \\ \operatorname{Re}(x_0) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_3) + \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_3) \\ -\operatorname{Im}(x_0) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_2) + \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_2) + \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{Re}(x_3) - \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Im}(x_3) \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

que pode ser reescrita como,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{2}{\sqrt{7}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(x_0) \\ \operatorname{Im}(x_0) \\ \operatorname{Re}(x_1) \\ \operatorname{Im}(x_1) \\ \operatorname{Re}(x_2) \\ \operatorname{Im}(x_2) \\ \operatorname{Re}(x_3) \\ \operatorname{Im}(x_3) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Deste modo, podemos dizer que $\mathbf{X} = \mathbf{MF}$, em que

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{2}{\sqrt{7}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & -\frac{1}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \text{Re}(x_0) \\ \text{Im}(x_0) \\ \text{Re}(x_1) \\ \text{Im}(x_1) \\ \text{Re}(x_2) \\ \text{Im}(x_2) \\ \text{Re}(x_3) \\ \text{Im}(x_3) \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz geradora do código de Prata e $\mathbf{F}$ é a matriz que contém as partes reais e imaginárias dos símbolos modulados.

A matriz $\mathbf{X}$ é transmitida pelo canal $\mathbf{H}$, a matriz desse canal é uma matriz complexa 2×2 que pode ser expandida para uma matriz real 8×8 , [ETTARFAOUI, TAHA e HIMMI 2016]:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \text{Re}(h_{00}) & -\text{Im}(h_{00}) & \text{Re}(h_{10}) & -\text{Im}(h_{10}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Im}(h_{00}) & \text{Re}(h_{00}) & \text{Im}(h_{10}) & \text{Im}(h_{10}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Re}(h_{01}) & -\text{Im}(h_{01}) & \text{Re}(h_{11}) & -\text{Im}(h_{11}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Im}(h_{01}) & \text{Re}(h_{01}) & \text{Im}(h_{11}) & \text{Im}(h_{11}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Re}(h_{00}) & -\text{Im}(h_{00}) & \text{Re}(h_{10}) & -\text{Im}(h_{10}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Im}(h_{00}) & \text{Re}(h_{00}) & \text{Im}(h_{10}) & \text{Im}(h_{10}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Re}(h_{01}) & -\text{Im}(h_{01}) & \text{Re}(h_{11}) & -\text{Im}(h_{11}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Im}(h_{01}) & \text{Re}(h_{01}) & \text{Im}(h_{11}) & \text{Im}(h_{11}) \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Portanto, a matriz do sinal recebido $\mathbf{Y} = \mathbf{XH} + \mathbf{Z}$, pode ser reescrita como $\mathbf{Y} = \mathbf{MFH} + \mathbf{Z}$, já que $\mathbf{X} = \mathbf{MF}$.

A rotina implementada no MATLAB para as simulações do código de Prata, segue a seguinte ordem:

1. Início da Simulação;
2. Construção da matriz geradora $\mathbf{M}$, conforme a Equação (5.6);
3. Geração de N (10^6) símbolos, usando inteiros que variam de 0 até $M-1$, aleatórios e uniformemente distribuídos;
4. Modulação M - QAM dos símbolos obtidos;

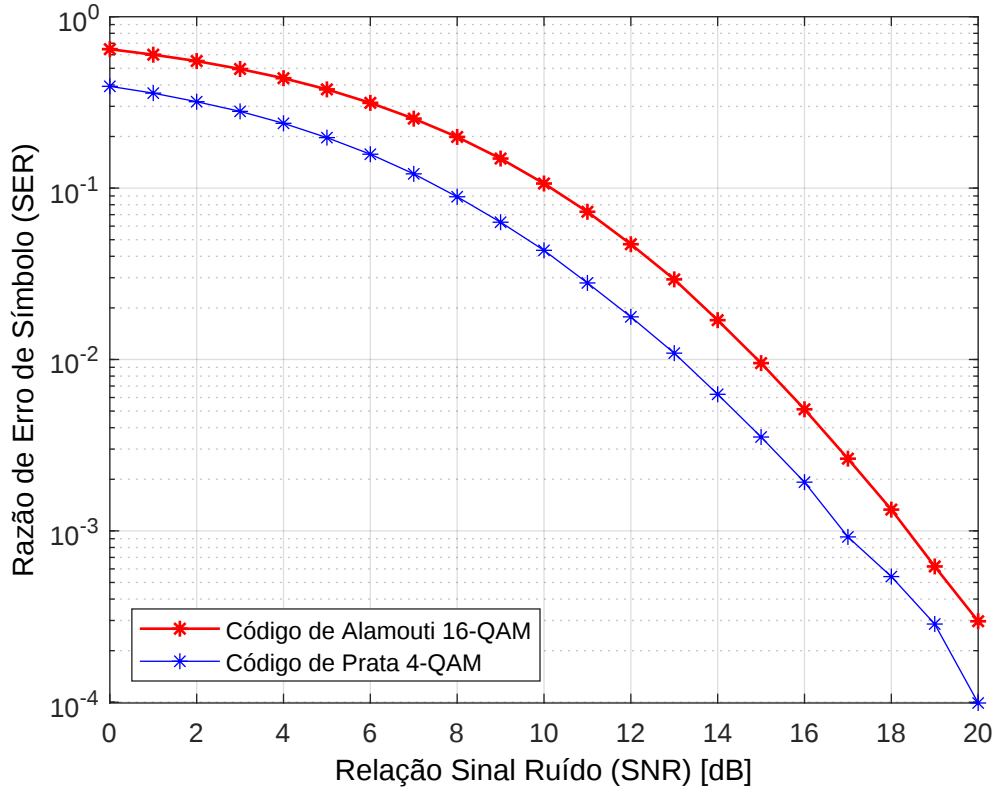
5. Geração da matriz $\mathbf{F}$, definida em (5.6) que contém as partes reais e imaginárias dos símbolos modulados;
6. Geração da matriz $\mathbf{X}$ dos símbolos a serem transmitidos, conforme a Equação (5.5)
7. Geração da matriz $\mathbf{H}$ do canal de desvanecimento Rayleigh com coeficientes seguindo a distribuição de Rayleigh. Matriz $\mathbf{H}$ é obtida conforme Equação (5.7);
8. Geração da matriz $\mathbf{Z}$ do ruído AWGN, utilizando números aleatórios normalmente distribuídos;
9. A matriz $\mathbf{X}$ das palavras-código são enviadas pelo canal com ruído;
10. É obtida a matriz $\mathbf{Y}$ dos símbolos recebidos, conforme $\mathbf{Y} = \mathbf{MFH} + \mathbf{Z}$;
11. Os sinais recebidos são demodulados e passam pelo decodificador ML;
12. A razão de erro de símbolo é calculada;
13. O gráfico da SER vs. SNR é plotado;
14. Fim da simulação.

As simulações foram realizadas para o código de Prata 2×2 para modulação 4-QAM em comparação ao código de Alamouti para modulação de 16-QAM, com uma SNR de 0 a 20 dB. Essa pode não parecer uma comparação válida, já que quanto maior a constelação menor é o desempenho, como vimos anteriormente. Porém quando comparamos a palavra-código $\mathbf{X}$, Equação (3.1), pertencente ao código de Alamouti, com a palavra-código do código de Prata, Equação (5.2), vemos que no código de Alamouti é feito a transmissão de 2 símbolos modulados por vez, no mesmo tempo que o código de Prata transmite 4 símbolos modulados por vez, ou seja, são transmitidos 8 bits de informação em ambos os casos.

Considerando $M = 2^m$, e $\eta = km/T$ definidos anteriormente, temos que para o código de Alamouti $k = 2$ símbolos de informação e $m = 4$ bits por símbolo, e para o código de Prata temos que $k = 4$ símbolos de informação e $m = 2$ bits por símbolo, e considerando o mesmo período de símbolo para ambos, temos a mesma eficiência espectral para os dois casos.

Portanto, para obtermos a mesma eficiência espectral para os dois códigos, é necessário o uso de modulações de ordem diferente. A Figura 17, mostra as curvas obtidas para o código de Prata para uma modulação 4-QAM e para o código de Alamouti 16-QAM. As curvas obtidas na simulação apresentam o comportamento esperado, mostrando que por se tratar de um código considerado perfeito, o código de Prata possui uma maior eficácia quando comparado ao código de Alamouti.

Figura 17 – Gráfico da SER vs. SNR do código de Alamouti e do código de Prata 2×2 com modulações M - QAM.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

5.3 SIMULAÇÕES CÓDIGO DE OURO

Na Seção 4.2.1 vimos a construção do código de Ouro via uma álgebra cíclica de divisão. O que garante, assim como para o código de Prata, que o código de Ouro seja um STBC perfeito, que possui diversidade e taxa máxima, propriedade de determinante diferente de zero e o *shaping* cúbico. O código de Ouro 2×2 também segue o mesmo esquema de transmissão da Figura 13.

Como visto na Seção 4.2.1, o código de Ouro pode ser construído utilizando uma álgebra cíclica de divisão do tipo

$$\mathcal{A} = (\mathbb{L}/\mathbb{K}, \sigma, i), \quad (5.8)$$

com $\sigma : \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5}$.

A matriz da palavra-código $\mathbf{X}$ é dada pela Equação (4.24), onde $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sigma(\theta) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \theta$, $\alpha = 1 + \sigma(\theta)i$ e $\sigma(\alpha) = 1 + \theta i$. Assim, utilizando as relações $\theta\sigma(\theta) = -1$ e $\theta + \sigma(\theta) = 1$, é possível reescrever a matriz $\mathbf{X}$. Temos então

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} [1 + i\sigma(\theta)]x_0 + [\theta - i]x_1 & [1 + i\sigma(\theta)]x_2 + [\theta - i]x_3 \\ [i - \theta]x_2 + [1 + i\sigma(\theta)]x_3 & [1 + i\theta]x_0 + [\sigma(\theta) - i]x_1 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Podemos remodelar $\mathbf{X}$, ao empilhar a matriz coluna a coluna, obtendo uma matriz 4×1 :

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} [1 + i\sigma(\theta)]x_0 + [\theta - i]x_1 \\ [i - \theta]x_2 + [1 + i\sigma(\theta)]x_3 \\ [1 + i\sigma(\theta)]x_2 + [\theta - i]x_3 \\ [1 + i\theta]x_0 + [\sigma(\theta) - i]x_1 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Ao separarmos a parte real da parte imaginária, da matriz remodelada, obtemos uma matriz 8×1 :

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \text{Re}(x_0) - \sigma(\theta)\text{Im}(x_0) + \theta\text{Re}(x_1) + \text{Im}(x_1) \\ \sigma(\theta)\text{Re}(x_0) + \text{Im}(x_0) - \text{Re}(x_1) + \theta\text{Im}(x_1) \\ -\theta\text{Re}(x_2) - \text{Im}(x_2) + \text{Re}(x_3) - \sigma(\theta)\text{Im}(x_3) \\ \text{Re}(x_2) - \theta\text{Im}(x_2) + \sigma(\theta)\text{Re}(x_3) + \text{Im}(x_3) \\ \text{Re}(x_2) - \sigma(\theta)\text{Im}(x_2) + \theta\text{Re}(x_3) + \text{Im}(x_3) \\ \sigma(\theta)\text{Re}(x_2) + \text{Im}(x_2) - \text{Re}(x_3) + \theta\text{Im}(x_3) \\ \text{Re}(x_0) - \theta\text{Im}(x_0) + \sigma(\theta)\text{Re}(x_1) + \text{Im}(x_1) \\ \theta\text{Re}(x_0) + \text{Im}(x_0) - \text{Re}(x_1) + \sigma(\theta)\text{Im}(x_1) \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

que pode ser reescrita como,

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\sigma(\theta) & \theta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma(\theta) & 1 & -1 & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta & -1 & 1 & -\sigma(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\theta & \sigma(\theta) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sigma(\theta) & \theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma(\theta) & 1 & -1 & \theta \\ 1 & -\theta & \sigma(\theta) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta & 1 & -1 & \sigma(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Re}(x_0) \\ \text{Im}(x_0) \\ \text{Re}(x_1) \\ \text{Im}(x_1) \\ \text{Re}(x_2) \\ \text{Im}(x_2) \\ \text{Re}(x_3) \\ \text{Im}(x_3) \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Deste modo, podemos dizer que $\mathbf{X} = \mathbf{MF}$,

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\sigma(\theta) & \theta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma(\theta) & 1 & -1 & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\theta & -1 & 1 & -\sigma(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\theta & \sigma(\theta) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sigma(\theta) & \theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma(\theta) & 1 & -1 & \theta \\ 1 & -\theta & \sigma(\theta) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta & 1 & -1 & \sigma(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \text{Re}(x_0) \\ \text{Im}(x_0) \\ \text{Re}(x_1) \\ \text{Im}(x_1) \\ \text{Re}(x_2) \\ \text{Im}(x_2) \\ \text{Re}(x_3) \\ \text{Im}(x_3) \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

onde $\mathbf{M}$ é a matriz geradora do código de Ouro e $\mathbf{F}$ é a matriz que contém as partes reais e imaginárias dos símbolos modulados.

Assim como para o código de Prata, a matrix $\mathbf{X}$ é transmitida pelo canal $\mathbf{H}$, a matriz desse canal é

dada pela matriz (5.7). Portanto, a matriz do sinal também pode ser reescrita como $\mathbf{Y} = \mathbf{MFH} + \mathbf{Z}$, já que $\mathbf{X} = \mathbf{MF}$.

A rotina implementada no MATLAB para as simulações do código de Ouro, segue a mesma ordem que a rotina implementada para o código de Prata. Então, para o código de ouro temos:

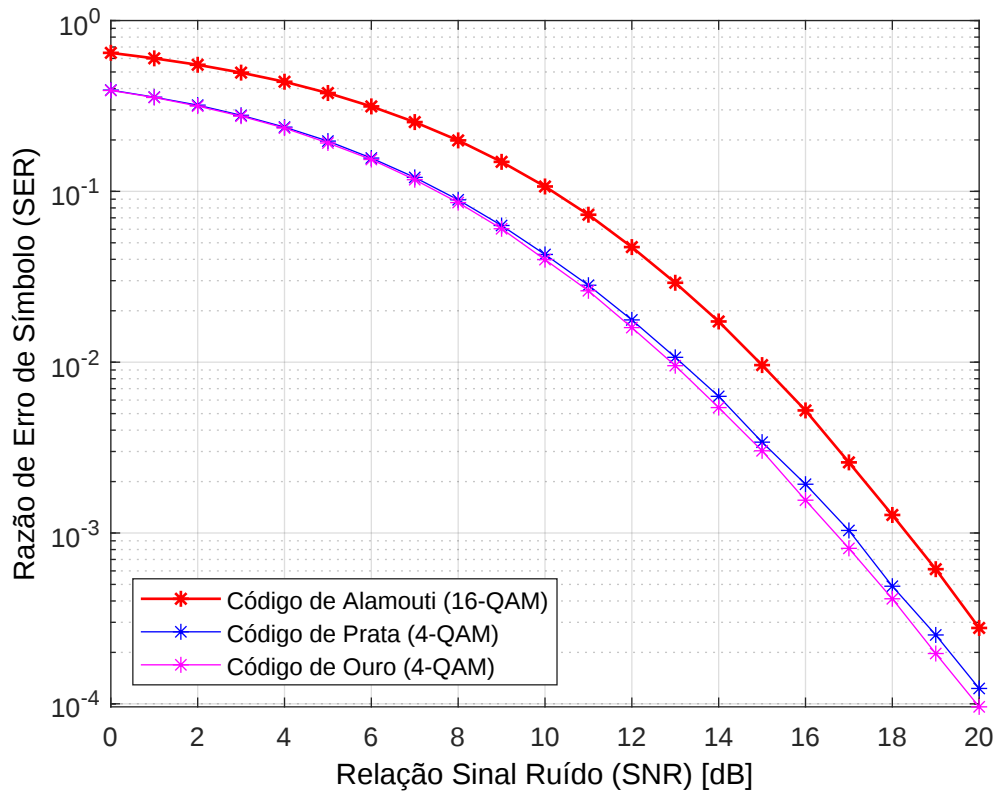
1. Início da Simulação;
2. Construção da matriz geradora $\mathbf{M}$, conforme a Equação (5.13);
3. Geração de N (10^6) símbolos, usando inteiros que variam de 0 até $M-1$, aleatórios e uniformemente distribuídos;
4. Modulação M -QAM dos símbolos obtidos;
5. Geração da matriz $\mathbf{F}$, definida em (5.13) que contém as partes reais e imaginárias dos símbolos modulados;
6. Geração da matriz $\mathbf{X}$ dos símbolos a serem transmitidos, conforme a Equação (5.12)
7. Geração da matriz $\mathbf{H}$ do canal de desvanecimento Rayleigh com coeficientes seguindo a distribuição de Rayleigh. Matriz $\mathbf{H}$ é obtida conforme Equação (5.7);
8. Geração da matriz $\mathbf{Z}$ do ruído AWGN, utilizando números aleatórios normalmente distribuídos;
9. A matriz $\mathbf{X}$ das palavras-código são enviadas pelo canal com ruído;
10. É obtida a matriz $\mathbf{Y}$ dos símbolos recebidos, conforme $\mathbf{Y} = \mathbf{MFH} + \mathbf{Z}$;
11. Os sinais recebidos são demodulados e passam pelo decodificador ML;
12. A razão de erro de símbolo é calculada;
13. O gráfico da SER vs. SNR é plotado;
14. Fim da simulação.

As simulações agora foram realizadas para o código de Ouro 2×2 para modulação 4-QAM em comparação com o código de Prata para modulação 4-QAM e com o código de Alamouti para modulação 16-QAM, com uma SNR de 0 a 20 dB. Assim como para o código de Prata na palavra-código, Equação (5.9), do código de Ouro é feito a transmissão de 4 símbolos modulados por vez, enquanto o código de Alamouti transmite 2 símbolos modulados por vez, portanto, para os três casos é feita a transmissão de 8 bits de informação.

Como já foi explicado anteriormente, é realizado uma comparação dos códigos com modulações de ordem diferentes, a fim de obtermos uma mesma eficiência espectral para os três casos. A (Figura 18), mostra as curvas obtidas para o código de Ouro e de Prata para modulação 4-QAM e para o código de Alamouti para modulação 16-QAM. As curvas obtidas mostram que, ambos os códigos perfeitos, código de Prata e código de Ouro possuem melhores taxas de erros de símbolo quando comparados com o código de Alamouti, e notamos também que o código de prata é ligeiramente inferior ao código

de Ouro, o que também era esperado já que o código de Ouro é considerado o melhor código perfeito, por possuir um menor determinante mínimo normalizado, quando comparado ao código de Prata.

Figura 18 – Gráfico da SER vs. SNR do código de Alamouti, código de Prata e código de Ouro 2×2 com modulações M -QAM.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor.

6 CONCLUSÃO

No trabalho apresentado, foi estudado alguns conceitos teóricos, como álgebras de divisão, reticulados, sistema MIMO e modulação QAM, importantes para o desenvolvimento do trabalho. Em seguida, estudamos mais a fundo os códigos de bloco espaço-tempo, com foco principal no código de Alamouti, já que os STBCs são uma generalização desse código, e os parâmetros necessários para que sejam considerados eficientes. Com isso, foi possível apresentar a construção do código de Alamouti 2×2 via álgebra dos quatérnios de Hamilton, e a construção geral de códigos de bloco espaço-tempo 2×2 a partir de álgebras cíclicas de divisão. Posteriormente, apresentamos os STBCs perfeitos e construção de dois deles, o código de Ouro e o código de Prata. E por fim, apresentamos os resultados obtidos a partir de simulações realizadas no *software* MATLAB, para os códigos de Alamouti 2×1 e 2×2 , e para os códigos de Prata 2×2 e código de Ouro 2×2 . Deste modo, realizamos um estudo sobre o funcionamento, construção de códigos de bloco espaço-tempo e analisamos o desempenho dos mesmos em canais MIMO 2×2 .

Os códigos de bloco espaço-tempo podem ser aplicados em sistemas MIMO de transmissão, em redes sem fio e em modulações codificadas.

O código de Alamouti, transmite dados codificados no espaço e no tempo, já que os símbolos são enviados em períodos de tempo diferentes e por antenas diferentes. Ele é um código de diversidade e taxa máxima para um esquema 2×1 . O esquema de Alamouti é eficaz para todas as aplicações onde a capacidade do sistema é limitada pelo desvanecimento de multi-percurso. Para o caso de $2 \times n_r$, o código de Alamouti proporciona uma ordem de diversidade $2n_r$, portanto, o caso estudado 2×2 proporciona uma diversidade com ordem 4.

Vimos também que os códigos de bloco espaço-tempo perfeitos, atingem taxa e diversidade máxima, satisfazem a propriedade do determinante diferente de zero, possuem um *shaping* cúbico e energia média uniforme. Foram apresentados dois STBCs perfeitos, o código de Prata e o código de Ouro. O código de prata, mesmo considerado um código perfeito, é classificado em segundo lugar quando comparado ao código de Ouro, já que seu determinante mínimo normalizado é $\frac{1}{\sqrt{7}}$, enquanto o código de Ouro possui um menor determinante mínimo normalizado, $\frac{1}{5}$.

Para analisarmos o desempenho dos códigos as simulações foram realizadas utilizando o *software* MATLAB. O desempenho dos códigos foram analisados através das curvas da razão de erro de símbolo (SER) versus a relação sinal ruído (SNR).

Foram feitas inicialmente as simulações do código de Alamouti para sistemas 2×1 e 2×2 , para modulações de 4, 16, 64 e 256-QAM. Com os resultados obtidos, vimos que o desempenho do sistema é reduzido conforme o número de pontos de mapeamento da constelação aumenta, ou seja, quanto maior a modulação maior é a razão de erro de símbolo. Além disso, para o caso 2×2 , obtemos melhores taxas de erros de símbolo já que esse caso possui uma maior ordem de diversidade quando comparado ao caso 2×1 .

Para analisarmos o código de Prata, realizamos as simulações do código de Prata 2×2 para uma modulação 4-QAM em comparação ao código de Alamouti 2×2 para uma modulação 16-QAM,

já que para obtermos uma mesma eficiência espectral é necessário o uso de modulações de ordens diferentes. Com os resultados obtidos, vimos que o código de Prata possui uma melhor razão de erro de símbolo já que é considerado um código perfeito.

Por fim, realizamos as simulações para o código de Ouro 2×2 para uma modulação 4-QAM, comparando com o código de Prata 2×2 para uma mesma modulação e com o código de Alamouti 2×2 para uma modulação 16-QAM, já que assim, todos os códigos transmitem 8 bits de informação, garantindo uma mesma eficiência espectral.

Deste modo, com os últimos resultados obtidos, concluímos que os códigos de bloco espaço-tempo perfeitos são superiores quando comparados ao código de Alamouti, já que o número de sinais transmitidos corresponde ao número de símbolos enviados, levando a uma taxa máxima de dados. Consideramos então por fim, o código de Ouro como melhor código, pois apesar do código de Prata ser também um código perfeito ele apresenta um desempenho ligeiramente pior que o código de Ouro por possuir um determinante mínimo normalizado um pouco maior.

REFERÊNCIAS

- ABRANTES, S. A. **Modulações Digitais, "Quadrature Amplitude Modulation"(QAM) - Detecção coerente e probabilidade de erro**. 2004. Acesso em: 30 de Outubro de 2023. Disponível em: <https://paginas.fe.up.pt/~sam/Tele2/apontamentos/Modul_QAM.pdf>.
- ABRANTES, S. A. **Yes, we QAM**. 2009. Acesso em: 30 de Outubro de 2023. Disponível em: <<https://paginas.fe.up.pt/~sam/textos/Resumindo%20e%20concluindo...%20Yes,we%20QAM.pdf>>.
- ALAMOUTI., S. M. A simple transmit diversity technique for wireless communications. *ieee j. select. areas commun.* p. 16(8):1451–1458, October 1998.
- ALVES, C. **O código de Prata e a Construção do Reticulado E_8** . 2017.
- ALVES, C.; BELFIORE, J.-C. Construction of e_8 as a left ideal of the silver algebra. 09 2013.
- ANATEL, A. N. de T. **Painel de Acessos - Telefonia Móvel**. 2023. <<https://informacoes.anatel.gov.br/paineis/acessos/telefoniamovel>>. Acesso em 04 de Outubro de 2023.
- ARAGORN. **Space Time Block Codes**. 2011. Acesso em: 05 de dezembro de 2023. Disponível em: <<http://spacetimecodes.blogspot.com/>>.
- BELFIORE, J.-C.; REKAYA, G. Quaternionic lattices for space-time coding. In: **Proceedings of ITW 2003**. Paris: [s.n.], 2003.
- BELFIORE, J.-C.; REKAYA, G.; VITERBO, E. The golden code: a 2×2 full-rate space-time code with nonvanishing determinants. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 51, n. 4, p. 1432–1436, 2005.
- BENEDITO, C. W. d. O. **Construção de grupos fuchsianos aritméticos provenientes de álgebras dos quatérnios e ordens maximais dos quatérnios associados a reticulados hiperbólicos**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2014. Tese de Doutorado. Disponível em: <<https://hdl.handle.net/20.500.12733/1623446>>.
- BENEDITO, C. W. O. Famílias de reticulados algébricos e reticulados ideais. **Tese (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas**, 2010. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/items/c75bff05-ed45-4674-9ef4-eeef116607d2>>.
- BIGLIERI, E.; AL. et. **MIMO Wireless Communications**. S.l.: Cambridge University Press, 2007. ISBN 9781139461269.
- BIGLIERI, E.; HONG, Y.; VITERBO, E. On fast-decodable space–time block codes. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 55, n. 2, p. 524–530, 2009.
- BLISS, D.; GOVINDASAMY, S. Adaptive wireless communications: Mimo channels and networks. **Adaptive Wireless Communications: MIMO Channels and Networks**, p. 1–598, 01 2011.
- BONFIM, M. **Técnicas de Modulação - Modulação QAM**. 2012. Acesso em: 30 de Outubro de 2023. Disponível em: <<http://eletr.ufpr.br/marlio/te241/aula3.pdf>>.
- DUARTE, J. D. Códigos de bloco espaço-tempo para canais mimo 2×2 via álgebras cíclicas de divisão. 05 2021.

- ELIA, P.; SETHURAMAN, B. A.; KUMAR, P. V. Perfect space-time codes with minimum and non-minimum delay for any number of antennas. In: **International Conference on Wireless Networks, Communications and Mobile Computing**. [S.l.: s.n.], 2005.
- ETTARFAOUI, S.; TAHA, H.; HIMMI, M. Effect of qam modulation of diversity coding for mimo communications system. p. 264–268, 03 2015.
- ETTARFAOUI, S.; TAHA, H. J.; HIMMI, M. M. Performance comparison of golden and silver code for stbc mimo system. **Automatic Control and System Engineering ACSE**, v. 16, n. 1, p. 1–8, 1 2016.
- FALOU, A. E. **Analysis and Design of Space-Time Block Codes for Coded MIMO Transmissions**. Tese (PhD thesis) — Télécom Bretagne, Université de Bretagne-Sud, 2013. <tel-00908835>.
- FOSCHINI, G. J.; GANS, M. J. On limits of wireless communication in a fading environment when using multiple antennas. **Wireless Personal Communications**, p. 311–335, March 1998.
- GALLAGER, R. G. **Principles of Digital Communication**. Revised edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- HAMPTON, J. R. **Introduction to MIMO Communications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013.
- HOLLANTI, C. et al. On the algebraic structure of the silver code: A 2×2 perfect space-time block code. In: **2008 IEEE Information Theory Workshop**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 91–94.
- HOTTINEN, A.; TIRKKONEN, O.; WICHMAN, R. Multi-antenna transceiver techniques for 3g and beyond / a. hottinen, o. tirkkonen, r. wichman. 01 2005.
- JACOBONI, C.; LUGLI, P. The monte carlo method for semiconductor device simulation. In: . [S.l.: s.n.], 1990.
- LATHI, B. P.; DING, Z. **Modern Digital and Analog Communication Systems**. Oxford: Oxford University Press, 2009.
- OGGIER, F.; BELFIORE, J.-C.; VITERBO, E. Cyclic division algebras: A tool for space-time coding. **Foundations and Trends® in Communications and Information Theory**, Now Publishers, v. 4, n. 1, p. 1–95, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1561%2F0100000016>>.
- OGGIER, F. et al. Perfect space–time block codes. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 52, n. 9, p. 3885–3902, 2006.
- PIRES, J. Sistemas e redes de telecomunicações. January 2006.
- RAPPAPORT, T. S. **Wireless Communications: Principles and Practice**. 2nd. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002. ISBN 978-0130422323.
- RAY, A. et al. Ideal structure of the silver code. In: **2009 IEEE International Symposium on Information Theory**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 2818–2822.
- SESHADRI, N.; WINTERS, J. H. Two signaling schemes for improving the error performance of frequency division duplex (fdd) transmission systems using transmitter antenna diversity. **Int J Wireless Inf Networks**, v. 1, p. 49–60, 01 1994.
- SETHURAMAN, B.; RAJAN, B. S. An algebraic description of orthogonal designs and the uniqueness of the alamouti code. In: . [S.l.: s.n.], 2002. p. 1088 – 1092 vol.2. ISBN 0-7803-7632-3.

SETHURAMAN, B.; RAJAN, B. S.; SHASHIDHAR, V. Full-diversity, high-rate space-time block codes from division algebras. **Information Theory, IEEE Transactions on**, v. 49, p. 2596 – 2616, 11 2003.

SETHURAMAN, B.; RAJAN, B. S.; SHASHIDHAR, V. Full-diversity, high-rate space-time block codes from division algebras. **Information Theory, IEEE Transactions on**, v. 49, p. 2596 – 2616, 11 2003.

SIBILLE, A.; OESTGES, C.; ZANELLA, A. **MIMO: From Theory to Implementation**. [S.l.]: Academic Press, Inc., 2010. ISBN 0123821940.

TAROKH, V.; JAFARKHANI, H.; CALDERBANK, A. R. Space-time block codes from orthogonal designs. *ieee trans. inf. theory*. p. 45:1456–1467, 1999.

TAROKH, V.; SESHADRI, N.; CALDERBANK, A. R. Space-time codes for high data rate wireless communication: performance criteria and code construction. *ieee trans. inf. theory*. p. 44:744–765, 03 1998.

WINTERS, J. H.; SALZ, J.; GITLIN, R. D. The impact of antenna diversity on the capacity of wireless communication systems. **IEEE Trans. Commun.**, v. 42, p. 1740–1751, 1994. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:206638998>>.

WITTNEBEN, A. Base station modulation diversity for digital simulcast. *ieee veh. technol.* May 1991.

YAO, H.; WORNELL, G. W. Achieving the full mimo diversity-multiplexing frontier with rotation-based space-time codes. In: **Proceedings of Allerton Conference on Communication, Control and Computing**. [S.l.: s.n.], 2003.

ZHENG, L.; TSE, D. Diversity and multiplexing: a fundamental tradeoff in multiple-antenna channels. **IEEE Transactions on Information Theory**, v. 49, n. 5, p. 1073–1096, 2003.