

PEDRO ALEXANDRE DOS SANTOS

**ESTUDO DA QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA DE CALIBRE: MAPAS
DINÂMICOS, AÇÕES COMPLEXAS, TEORIAS DE CAMPO EM REDE E
(IM)POSSIBILIDADE**

Guaratinguetá
2017

PEDRO ALEXANDRE DOS SANTOS

ESTUDO DA QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA DE CALIBRE: MAPAS DINÂMICOS,
AÇÕES COMPLEXAS, TEORIAS DE CAMPO EM REDE E (IM)POSSIBILIDADE

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para obtenção do título de Mestre em Física na área de Teoria de Campos e Partículas.

Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva

Guaratinguetá

2017

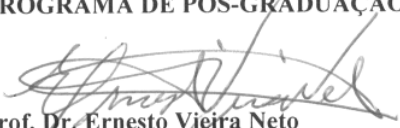
S237e	Santos, Pedro Alexandre dos Estudo da quebra espontânea de simetria de calibre: mapas dinâmicos, ações complexas, teorias de campo em rede e (im)possibilidade / Pedro Alexandre dos Santos. – Guaratinguetá, 2017. 158 f : il. Bibliografia: f. 114 - 117 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2017. Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva 1. Teoria de campos (Física). 2. Campos de calibre (Física). 3. Termodinâmica. I. Título CDU 530.145(043)
-------	---

PEDRO ALEXANDRE DOS SANTOS

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Orientador / UNESP/FEG


Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP/FEG


Prof. Dr. ALYSSON FÁBIO FERRARI
Universidade Federal do ABC

Fevereiro de 2017

DADOS CURRICULARES

PEDRO ALEXANDRE DOS SANTOS

NASCIMENTO	05.07.1991 - Taubaté/SP
FILIAÇÃO	José Domingues dos Santos Maria Aparecida Santos
2010/2015	Curso de Graduação Bacharelado em Física - na Faculdade de Engenharia do do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista
2015/2017	Curso Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista

À minha família, que sempre me apoiou e me incentivou nos estudos.

AGRADECIMENTOS

À Deus, o principio, meio e fim. Ao meu orientador Julio por todo suporte, apoio, paciência e pelas longas listas de exercícios.

Aos membros da banca pelo trabalho dispendido na leitura deste texto.

À Diana, minha cachorrinha, pela paciência e compreensão e principalmente por todo o amor que recebi.

À minha família como um todo, com atenção especial para os meus pais José e Maria por todo o amor que me dedicam, as minhas irmãs Jane, Giovana e Silvana, ao meu irmão Paulo e meu sobrinho Serginho pela atenção.

Aos meus amigos Rodrigo, Laura, Thalita, Dino, Thiago, Carlos, Rodolfo entre tantos outros pela amizade, pelo companheirismo e pela ajuda nas horas de provas e de longas listas de exercícios.

À Universidade Estadual Paulista, ao Departamento de Física e Química e a todos os funcionários desta instituição que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu pudesse estar desenvolvendo este trabalho.

Aos contribuintes que de forma direta contribuem para a manutenção das instituições de ensino públicas e das organizações de fomento.

À CAPES pelo suporte financeiro.

“Até mesmo a maior das caminhadas começa com um primeiro passo.”

Gandhi

SANTOS, P. A. **Estudo da quebra espontânea de simetria de calibre:** mapas dinâmicos, ações complexas, teorias de campo em rede e (im) possibilidade. 2017. 158 f. Dissertação (Mestrado em Bacharelado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2017.

RESUMO

Neste trabalho, fez-se uma introdução aos mapas dinâmicos, um conjunto de técnicas desenvolvido por Matsuoto, Umezawa, entre outros colaboradores, e a prescrição $i\epsilon$ na formulação usual da teoria quântica de campos no contínuo para descrever quebra espontânea de simetria de calibre (QES). Esta técnica baseia-se na utilização de representações unitárias não equivalentes, para construir as diferentes fases físicas observadas em sistemas que apresenta QES. Introduzido o mapa dinâmico, tentou-se adaptar esta coleção de técnicas junto da prescrição $i\epsilon$ em rede, obtendo como resultado que a primeira não é satisfatoriamente desenvolvida em redes finitas, entretanto no limite termodinâmico o resultado aparenta estar adequado. Então, visitou-se o Teorema de Elitzur para as descrições obtidas por esta ferramenta, isto é, tentou-se demonstrar o Teorema de Elitzur para modelos com termos complexos provenientes da prescrição $i\epsilon$. Uma vez que este não forneceu as informações esperadas, aplicou-se outras discussões para investigar a possibilidade da quebra espontânea de simetria de calibre em rede. Neste texto, o ferramental adotado se baseou em uma discussão apresentada por Splittorff.

PALAVRAS-CHAVE: Teorias de Calibre em Rede. Teorema de Elitzur. Mapa dinâmico.

SANTOS, P. A. **Study of the spontaneous breaking of gauge symmetry:** dynamic maps, complex actions, lattice field theories and (im) possibility. 2017. 158 f. Dissertation (MSc in Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2017.

ABSTRACT

In this work, an introduction to dynamic maps, a set of techniques developed by Matsumoto, Umezawa, among other collaborators, and the $i\epsilon$ prescription in the usual formulation of the quantum field theory in the continuum to describe spontaneous breaking of gauge symmetry (QES). This technique is based on the use of non-equivalent unitary representations to construct the different physical phases observed in systems that presented QES. Introduced dynamic map, it was started the adaptation fo this collection of techniques together with the prescription $i\epsilon$ in lattice, obtaining as a result that the first one is not satisfactorily developed in finite lattice, however in the thermodynamic limit the apparent result is adequate. Then the Elitzur's Theorem was visited for the descriptions obtained by this tool, that is, it was attempted to demonstrate Elitzur's Theorem for models with complex terms from the prescription $i\epsilon$. As soon as the latter did not provide the expected information, other discussions were conducted to investigate the possibility of spontaneous breaking of lattice gauge symmetry. In this text, the tooling adopted was based on a discussion presented by Splittorff.

KEYWORDS: Lattice Gauge Theory. Elitzur Theorem. Dynamic Maps.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	CONSTRUINDO TEORIA DE CAMPOS EM REDE	13
2.1	CONSTRUINDO TEORIAS DE CALIBRE EM REDE	17
2.1.1	Primeiros passos	17
2.1.2	Transporte paralelo para teorias de calibre no contínuo	19
2.1.3	Transporte paralelo para teorias de calibre em rede	24
2.2	FUNCIONAL GERADOR PARA AÇÃO DE WILSON	28
3	ASPECTOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS: MAPAS DINÂMICOS	30
3.1	INTRODUÇÃO	30
3.2	PRIMEIRAS IDEIAS	30
3.3	UMA TEORIA EM DOIS NÍVEIS	31
3.4	MÉTODO DE AUTO-CONSISTÊNCIA	33
3.5	ALGUNS EXEMPLOS DE REPRESENTAÇÕES NÃO EQUIVALENTES	34
3.5.1	A translação bosônica	34
3.6	EXEMPLO DE CÁLCULO POR AUTO-CONSISTÊNCIA	38
3.6.1	Cálculo por auto-consistência utilizando a translação bosônica	38
3.7	REARRANJO DINÂMICO DE SIMETRIA	39
4	PRESCRIÇÃO ϵ: MODELO INVARIANTE SOB TRANSLAÇÃO GLOBAL	41
4.1	CASO CONTÍNUO	41
4.2	CASO EM REDE	45
5	PRESCRIÇÃO ϵ: MODELO INVARIANTE SOB TRANSFORMAÇÃO $U(1)$ GLOBAL	47
5.1	CASO CONTÍNUO	47
5.2	CASO EM REDE	53
6	PRESCRIÇÃO ϵ: MODELO INVARIANTE SOB TRANSFORMAÇÃO $U(1)$ LOCAL	56
6.1	CASO CONTÍNUO	56
6.1.1	Identidades de Ward-Takahashi Globais	57
6.1.2	Identidades de Ward-Takahashi Locais	58
6.1.3	Estrutura de polos das funções de dois pontos	61
6.1.4	Mapa dinâmico	63
6.2	CASO EM REDE	68
6.2.1	Identidades de Ward-Takahashi Globais	70
6.2.2	Identidades de Ward-Takahashi Locais	71
6.2.3	Estrutura de polos das funções de dois pontos	73
6.2.4	Mapa dinâmico	75
6.2.5	Aproximação $a \ll 1$	76
	Identidades de Ward-Takahashi	76
	Estrutura de polos das funções de dois pontos	78

	Mapa dinâmico	79
6.2.6	Expansão a acoplamento fraco	84
6.3	TEOREMA DE HAAG	87
6.3.1	Resultados e uma breve visão	87
6.3.2	Ponto de partida e chegada	89
6.3.3	Implicações	91
7	TEOREMA DE ELITZUR	93
7.1	ANÁLISE I	93
7.2	ANÁLISE II	95
7.2.1	Definição da Ação e valor esperado para o modelo XY	95
7.2.2	Transformações de calibre para o modelo XY	96
7.2.3	Estimativa de $\langle f \rangle_{\Lambda}(J, J^{\dagger})$ no limite termodinâmico	96
7.3	ANÁLISE DA PRESCRIÇÃO ϵ EM RELAÇÃO AO TEOREMA DE ELITZUR	98
7.4	ANÁLISE I	99
7.5	ANÁLISE II	101
7.6	OUTRAS ANÁLISES PARA SISTEMAS COM FUNCIONAL GERADOR NÃO POSITIVO	104
7.6.1	Modelo XY	104
7.6.2	Proposta Geral	106
7.6.3	Nosso Modelo Teste	107
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	112
	REFERÊNCIAS	114
	APÊNDICE A - A REGRA DE LEIBNIZ EM REDE	118
	APÊNDICE B - ALGUNS ELEMENTOS DE TRANSPORTE PARALELO	120
	APÊNDICE C - TRANSFORMAÇÃO DE BOGOLIUBOV	122
	APÊNDICE D - MODELO COM SIMETRIA DE TRANS. GLOBAL EM REDE	130
	APÊNDICE E - SIMPLIFICAÇÕES DE ALGUNS FUNCIONAIS GERADORES	136
	APÊNDICE F - MODELO $U(1)$ GLOBAL - REDE	138
	APÊNDICE G - TERMO DE CAMPO AUXILIAR E FONTE EM REDE	141
	APÊNDICE H - DEDUÇÃO DAS EXPRESSÕES (6.139) E (6.146)	143
	APÊNDICE I - DEDUÇÃO DA SUBSEÇÃO 6.2.3	148
	APÊNDICE J - DEDUÇÃO DA SUBSEÇÃO 6.2.4	151
	APÊNDICE K - FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO - TÓPICO DA SUBSEÇÃO 6.2.5	154
	APÊNDICE L - RESULTADOS DE DERIVADAS EM REDE	157

1 INTRODUÇÃO

Teorias de calibre em rede começaram a ser estudadas e formuladas inicialmente em 1971 [1] por Wegner. Elas foram introduzidas como uma analogia ao modelo de rotor plano bidimensional, mas com o objetivo de desenvolver descrições de sistemas que apresentassem diagramas de fase não triviais, sem a presença de magnetização espontânea, isto é, sem parâmetro de ordem local. Wegner percebeu intuitivamente que um grupo de simetria local, também denominada de simetria de calibre, impede a ocorrência de uma magnetização espontânea. Este resultado obtido de maneira heurística seria mais tarde formulado no Teorema de Elitzur.

Em 1974, K. Wilson introduz, ou melhor, recupera teorias de calibre na rede [2–4]. Seu objetivo era aplicar tais técnicas para o estudo da liberdade assintótica dos quarks, isto é, o comportamento segundo o qual após uma regularização, a teoria se torna livre a pequenas distâncias. Também tinha em mente descrever o confinamento de tais partículas, ou seja, o fato dos quarks permanecerem isolados.

A grande relevância da proposta de Wilson foi permitir investigações em regimes de energia e de escala desconhecidos. De fato, teorias na rede atuam como um método direto para ganhar informações exatas e não perturbativas sobre as teorias de calibre, pois, por exemplo, permitem a investigação com constantes de acoplamento forte. Isto os levou a explicar com sucesso aspectos observados do espectro de massa de hádrons, por exemplo.

Em 1975, baseado na formulação de teorias de calibre em rede desenvolvida por Wilson, Elitzur demonstra a impossibilidade da quebra espontânea de simetria local em uma rede Euclidiana [5], ou como entendido posteriormente, demonstra que o valor esperado de um observável local e limitado é nulo, desta forma levando ou a impossibilidade da quebra espontânea de simetria local em rede, ou a impossibilidade da adaptação da técnica adotada no contínuo para o estudo da quebra de simetria local em rede. Ambas as situações apresentam discussões na literatura. Por exemplo, em [6] é apresentado um modelo com simetria axial local onde há quebra espontânea de simetria, entretanto neste modelo se faz uso de ações com termos complexos.

Uma outra possibilidade, por exemplo, foi desenvolvida por J. Fröhlich, G. Morchio e F. Strocchi [7], onde é proposto um modelo de quebra da simetria de calibre sem um parâmetro de ordem. A característica mais importante da quebra de simetria de calibre, nesta proposta, é a existência de uma órbita minimizante com um grupo residual menor que o grupo de simetria inicial. Como consequência do Teorema de Elitzur, surgiram também discussões no âmbito de uma formulação mais sistemática, inclusive no contínuo, sobre a existência ou não de quebra espontânea de simetria.

Em 1962, Anderson [8] propõem o mecanismo de quebra espontânea de simetria de calibre no contínuo desenvolvendo um trabalho realizado no fim dos anos 50 sobre quebra de simetria em modelos supercondutores e um artigo de 1960 escrito por Nambu que discutiu suas aplicações em física de partículas. Quase simultaneamente, em 1964, foram publicados trabalhos independentes sobre teorias de calibre capazes de explicar a geração de massa. Os grupos que apresentaram estes foram Brout e Englert [9]; Higgs [10]; Guralnik, Hagen e Kibble [11]. Estes trabalhos introduziram a ideia de quebra espontânea de simetria de calibre como mecanismo de geração de massa. Atualmente, este é denominado mais frequentemente de mecanismo de Higgs.

O mecanismo de Higgs foi incorporado na física de partículas moderna por Steven Weinberg e Abdus Salam e é parte essencial do Modelo Padrão, onde ele é utilizado para explicar a geração de massa dos bósons de calibre. Agora, um fato a ser destacado é que em formulações em rede, a impossibilidade da quebra espontânea de simetria de calibre leva à impossibilidade do mecanismo de Higgs. Portanto, técnicas e

interpretações alternativas precisam ser discutidas, tais como mapa dinâmico e rearranjo dinâmico de simetria.

Mapa dinâmico e rearranjo dinâmico de simetria são um conjunto de técnicas apresentadas por Umezawa, Matsumoto, Tachiki, entre outros colaboradores, sintetizadas em duas publicações [12, 13] datadas de 1982 e 1992, respectivamente. Elas são uma abordagem alternativa para a descrição dos efeitos quânticos associados aos defeitos topológicos, uma vez que estabelecem uma origem quântica para tais defeitos, cuja existência depende da quebra espontânea de simetria. Por apresentar uma formulação sistemática onde existe a adição de termos complexos responsáveis pela descrição da quebra espontânea de simetria em formulações funcionais, é uma construção interessante a ser investigada em rede.

Neste trabalho, é feita uma apresentação sobre teorias de calibre e sua quebra espontânea no contínuo como resultado da técnica de mapa dinâmico. Então, tentar-se-á desenvolver estas técnicas em rede, finalizando com uma revisão a respeito do teorema de Elitzur em relação aos novos termos introduzidos decorrentes da técnica de mapa dinâmico.

Este trabalho está organizado como se segue:

- Capítulo 2. Introduzir-se-ão os conceitos básicos de teoria de campos em rede, passando pela construção da ação até o funcional gerador, destacando-se os elementos necessários para este trabalho, como o limite do contínuo;
- Capítulo 3. Apresentar-se-ão os elementos e conceitos necessários para mapas dinâmicos, como a existência de representações unitárias não equivalentes e translação bosônica;
- Capítulo 4. Discutir-se-á um modelo com simetria por translações globais, onde então, ter-se-á o procedimento associado à prescrição ϵ como método de remoção de ambiguidade do gerador funcional, assim como a construção de sua contra-parte em rede;
- Capítulo 5. Ter-se-á o desenvolvimento de um modelo com simetria global $U(1)$ onde, então, a introdução da prescrição ϵ se dá como uma necessidade para a existência da quebra espontânea de simetria; também será esboçado seu análogo em rede;
- Capítulo 6. Generalizar-se-á o modelo apresentando no capítulo anterior, introduzindo simetrias locais, o que permitirá descrever quebra espontânea de simetria local por meio do mapa dinâmico. Seu correspondente em rede também será construído e, assim, diferentes aproximações para a obtenção do mapa dinâmico serão abordadas e discutidas. Este capítulo se encerra com uma discussão sobre o teorema de Haag e representações unitárias não equivalentes, que quando combinados em rede irão fornecer indicativos sobre o comportamento da técnica de mapa dinâmico em rede;
- Capítulo 7. Finalmente, o Teorema de Elitzur será enunciado e demonstrado. Então, sua discussão à luz dos novos termos introduzidos pela prescrição ϵ será realizada.

2 CONSTRUINDO TEORIA DE CAMPOS EM REDE

Utilizar-se-á uma rede¹ [3, 14, 15] definida por meio de $\Lambda = \{x = (\vec{x}, x_4) \in a\mathbb{Z}^4 | 0 \leq x_\mu \leq a(N_\mu - 1)\}$ onde a é uma constante da rede ($a \in \mathbb{R}^+$) e $N_\mu \in \mathbb{N}$ é o número de sítios em uma dada direção. Uma definição equivalente é $\Lambda = \{x = a(\vec{n}, n_4) | (\vec{n}, n_4) \in \mathbb{Z}^4 \text{ e } 0 \leq n_\mu \leq (N_\mu - 1)\}$.

Um campo $\phi(x)$, com condições de contorno periódicas, é uma aplicação de Λ em algum espaço, tal que $\phi(x + a\hat{\mu}N_\mu) = \phi(x)$, onde $\hat{\mu}$ é o vetor unitário na direção indicada por μ . Em outras palavras, o campo está definido nos pontos x pertencentes a Λ , com condição de contorno periódica².

Em analogia com o caso contínuo se pode definir um produto que carrega informação a respeito da estrutura dimensional da teoria,

$$(f, g) = \sum_x a^4 f(x)g(x), \quad (2.1)$$

onde f e g pertencem ao mesmo espaço de $\phi(x)$, isto é, o espaço das aplicações de Λ em algum espaço, com condições de contorno periódicas.

O número total de pontos na rede é denotado por

$$\Omega = N_1 N_2 N_3 N_4. \quad (2.2)$$

A transformada de Fourier da função $f(x)$ é definida por

$$\tilde{f}(p) = \sum_x a^4 \exp ipx f(x), \quad (2.3)$$

onde os momentos permitidos na rede são dados por

$$p_\mu = \frac{2\pi}{aN_\mu} n_\mu, \quad n_\mu = 0, 1, \dots, N_\mu - 1. \quad (2.4)$$

Estes são momentos com valores na zona de Brillouin. A transformada inversa é dada por

$$f(x) = \frac{1}{a^4 \Omega} \sum_p \exp -ipx \tilde{f}(p), \quad (2.5)$$

enquanto a normalização para a transformada de Fourier e sua inversa são dadas por meio das relações

$$\sum_p \exp -ip(x - x') = \Omega \delta(x, x') \quad \text{e} \quad \sum_x \exp ix(p - p') = \Omega \delta(p, p'), \quad (2.6)$$

as quais implicam

¹A rede pode ser compreendida de duas maneiras: primeiramente, a rede é uma estrutura artificial, sem nenhum significado físico, introduzida como um regulador em teoria de campos contínua. Assim como o segundo ponto a ser destacado, pode ser estudada em qualquer “temperatura”. Isto permite obter informações sobre regiões críticas, descritas inicialmente por uma teoria contínua; por outro lado, de um ponto de vista oposto, a rede pode ser encarada como uma representação da estrutura cristalina de um sólido. Neste contexto, ela desempenha um importante papel a curtas distâncias, porém é irrelevante em regiões críticas, exceto como um regulador para a teoria de campos na abordagem de tais regiões. A primeira interpretação é a que será utilizada no texto. Finalmente, independentemente de interpretação, a formulação matemática é a mesma.

²Também é possível definir campos em redes com condições de contorno fixas, a diferença é que não se terá $\phi(x + a\hat{\mu}N_\mu) = \phi(x)$, porém nos sítios de borda o valor de $\phi(x)$ é conhecido a priori.

$$\frac{1}{a^4\Omega} \sum_p \exp -ip(x-x') = a^{-4}\delta(x,x') \quad \text{e} \quad \sum_x a^4 \exp ix(p-p') = a^4\Omega\delta(p,p'). \quad (2.7)$$

Com a operação de derivada se pode associar os operadores de diferença finita para a frente e para trás, definidos respectivamente por

$$\tilde{\Delta}_\mu^f f(x) = \frac{1}{a}[f(x+a\hat{\mu}) - f(x)] \quad \text{e} \quad \tilde{\Delta}_\mu^b g(x) = \frac{1}{a}[g(x) - g(x-a\hat{\mu})]. \quad (2.8)$$

Os operadores³ $\tilde{\Delta}_\mu^f$ e $\tilde{\Delta}_\mu^b$ apresentam algumas das propriedades que uma operação de derivada deve ter, tal como linearidade, porém outras não, consulte o apêndice A para mais informações. Além disso, tem-se a propriedade

$$(\tilde{\Delta}_\mu^f f, g) = -(f, \tilde{\Delta}_\mu^b g), \quad (2.9)$$

que implica

$$(\tilde{\Delta}_\mu^f f, \tilde{\Delta}_\mu^f f) = -(f, \tilde{\Delta}_\mu^b \tilde{\Delta}_\mu^f f) \equiv (f, \tilde{\square} f), \quad (2.10)$$

onde o operador d'Alembertiano em rede é

$$\tilde{\square} = \tilde{\Delta}_\mu^b \tilde{\Delta}_\mu^f, \quad (2.11)$$

sendo sua atuação na função dada por

$$\tilde{\square} f(x) = \sum_{\mu=1}^4 \frac{1}{a^2} [2f(x) - f(x+a\hat{\mu}) - f(x-a\hat{\mu})]. \quad (2.12)$$

Nesse contexto pode-se escrever a ação para um campo escalar livre como:

$$S = \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left[\sum_{\mu=1}^4 \tilde{\Delta}_\mu^f \phi_0(x) \tilde{\Delta}_\mu^f \phi_0(x) + m_0^2 \phi_0^2(x) \right]. \quad (2.13)$$

Usando o operador de diferença finita definido acima, tem-se

$$S = \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left\{ \sum_{\mu=1}^4 \left[\frac{1}{a} (\phi_0(x+\hat{\mu}) - \phi_0(x)) \right]^2 + m_0^2 \phi_0(x)^2 \right\}. \quad (2.14)$$

Logo,

$$S = \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left\{ -\frac{2}{a^2} \sum_{\mu=1}^4 \phi_0(x) \phi_0(x+a\hat{\mu}) + \frac{4}{a^2} \phi_0(x)^2 + \sum_{\mu=1}^4 \frac{1}{a^2} \phi_0^2(x+a\hat{\mu}) + m_0^2 \phi_0^2(x) \right\}, \quad (2.15)$$

ou, simplesmente,

$$S = \sum_x \left\{ -a^2 \sum_{\mu=1}^4 \phi_0(x) \phi_0(x+a\hat{\mu}) + 4a^2 \phi_0^2(x) + \frac{m_0^2 a^4}{2} \phi_0^2(x) \right\}. \quad (2.16)$$

³Os índices sob escritos f e b denotam as duas possíveis diferenças finitas em rede. f vem do termo inglês “forward”, para frente e b do termo “back”, para trás.

Definindo $a\phi_0(x) = (2k)^{1/2}\phi(x)$ e $\lambda = 8k + m_0^2 a^2 k$, onde k é uma constante, a ação fica

$$S = \sum_x \left\{ -2k \sum_{\mu=1}^4 \phi(x) \phi(x + a\hat{\mu}) + \lambda \phi^2(x) \right\}. \quad (2.17)$$

Esta forma da ação é geralmente usada para o tratamento numérico da teoria de campo escalar livre periódico em rede. Porém, pode ser estendida a diversos modelos físicos, por exemplo, considerando que $\phi(x)$ seja um “spin” assumindo valores $\phi(x) = \pm 1$ se tem o modelo Ising, onde então a ação pode ser usada para descrever materiais ferromagnéticos [16, 17]. Note também que tal ação pode ser adaptada para descrever modelos sigma [16, 18].

Finalmente, retornando a expressão (2.13), pode-se exemplificar os passos para o cálculo do propagador da teoria:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left[\sum_{\mu=1}^4 \tilde{\Delta}_\mu^f \phi_0(x) \tilde{\Delta}_\mu^f \phi_0(x) + m_0^2 \phi_0^2(x) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left[\sum_{\mu=1}^4 -\phi_0(x) (\tilde{\Delta}_\mu^b \tilde{\Delta}_\mu^f - m_0^2) \phi_0^2(x) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y} a^8 \left[\sum_{\mu=1}^4 -\phi_0(y) (\square - m_0^2)_{y,x} \phi_0^2(x) \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde

$$(\square - m_0^2)_{x,y} = a^{-4} (\square - m_0^2) \delta(x, y), \quad (2.19)$$

é uma matriz indexada pelos pontos da rede. O cálculo do propagador se procede definindo $G(x, y; a)$ que é a matriz inversa de $(\square - m_0^2)$, ou seja,

$$\sum_y a^4 (\square - m_0^2)_{x,y} G(y, z; a) = a^{-4} \delta(x, z). \quad (2.20)$$

A solução desta equação é obtida por meio da transformada de Fourier

$$G(x, z, a) = \frac{1}{a^4 \Omega} \sum_p \exp -ip(x - z) \tilde{G}(p; a), \quad (2.21)$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\sum_y a^4 a^{-4} (\square - m_0^2) \delta(x, y) G(y, z; a) &= a^{-4} \delta(x, z) \\
(\square - m_0^2) G(x, z; a) &= a^{-4} \delta(x, z) \\
\frac{1}{a^4 \Omega} \sum_p (\square - m_0^2) \exp -ip(x - z) \tilde{G}(p; a) &= \frac{1}{a^4 \Omega} \sum_p \exp -ip(x - z) \\
\frac{1}{a^4 \Omega} \sum_p \exp -ip(x - z) \tilde{G}(p; a) \left[\sum_{\mu=1}^4 \frac{1}{a^2} (2 - \exp -iap_\mu - \exp iap_\mu) - m_0^2 \right] &= \frac{1}{a^4 \Omega} \sum_p \exp -ip(x - z) \\
\frac{1}{a^4 \Omega} \sum_p \exp -ip(x - z) \tilde{G}(p; a) \left\{ \sum_{\mu=1}^4 a^{-2} 2[1 - \cos(iap_\mu)] - m_0^2 \right\} &= \frac{1}{a^4 \Omega} \sum_p \exp -ip(x - z) \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{G}(p; a) = \left\{ \sum_{\mu=1}^4 a^{-2} 2[1 - \cos(iap_\mu)] - m_0^2 \right\}^{-1}, \quad (2.23)$$

ou

$$\tilde{G}(p; a) = \left\{ \sum_{\mu=1}^4 a^{-2} 4 \sin^2 \frac{ap_\mu}{2} - m_0^2 \right\}^{-1}. \quad (2.24)$$

Deste modo $G(x, y; a)$ é uma matriz bem definida para todo x e y . É relevante destacar que usualmente se faz $a = 1$ em alguns tratamentos analíticos. Também é usual se optar por uma mudança de variáveis que elimine a constante a , assim, é possível reintroduzir esta quando necessário por procedimento análogo. É comum se adotar a seguinte convenção: n , k e m referindo-se a quantidades adimensionais para sítios, momento e massa [15], e x , p e m_0 para quantidades dimensionais na rede com espaçamento a . Todavia, certas referências também utilizarão x e p para quantidades adimensionais. Aqui, adota-se x e p como adimensionais, pois a é feito igual a 1 como na referência [14]. Evidentemente o cuidado necessário é tomado nesta transição, a qual é necessária para se analisar o limite do contínuo.

Agora, no exemplo abaixo se mostra a reintrodução do parâmetro a para uma teoria livre. Seja, a ação com quantidades adimensionais:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \sum_{n, m} (\phi(m) - \phi(n))^2 + \frac{m^2}{2} \sum_n \phi^2(n) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x \in (a\mathbb{Z})^d} \frac{a^d}{a^{d-2}} \left(\sum_{\mu=1}^4 \frac{(\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x))^2}{a^2} + \frac{m^2}{a^2} \phi^2(x) \right), \quad (2.25)
\end{aligned}$$

onde o campo ϕ é adimensional e d a dimensão da rede. Fazendo, agora, as mudanças

$$\phi_0(x) = \frac{1}{a^{(d-2)/2}} \phi(an) \quad \text{e} \quad m_0 = \frac{m}{a}, \quad (2.26)$$

tem-se

$$S = \frac{1}{2} \sum_{x \in (a\mathbb{Z})^d} a^d \left(\sum_{\mu=1}^4 \frac{(\phi_0(x + a\hat{\mu}) - \phi_0(x))^2}{a^2} + m_0^2 \phi_0^2(x) \right),$$

o que no limite do contínuo leva a

$$S = \frac{1}{2} \int d^d x \left((\nabla \phi_0(x))^2 + m_0^2 \phi_0^2(x) \right). \quad (2.27)$$

2.1 CONSTRUINDO TEORIAS DE CALIBRE EM REDE

2.1.1 Primeiros passos

O próximo passo na construção da ação, e por sua vez da teoria, é estudar o seu comportamento com relação a um conjunto de transformações e então impor as condições relevantes. Dentre as diversas transformações possíveis, duas são relevantes neste contexto, a global e a local. Esta última também pode ser denominada de transformação de calibre, porém antes de iniciar esta fase vamos apresentar uma extensão imediata da nossa ação (2.13).

Em um primeiro momento, definiu-se apenas ações de campos escalares, $\phi(x)$, contudo, ações que dependem de outros tipos de campos também são possíveis, tais como:

- o campo escalar complexo $\phi(x) \in \mathbb{C}$;
- o campo vetorial real de n -componentes $\phi(x) \in \mathbb{R}^n$;
- o campo vetorial complexo de n -componentes $\phi(x) \in \mathbb{C}^n$;
- o campo de Yang-Mills $A_\mu(x) = \sum_b A_\mu^b(x) T_b$, cujas componentes são elementos da álgebra de Lie de um grupo compacto de Lie com geradores T_b .

Para o caso de um campo $\phi(x) \in \mathbb{C}^n$, isto é, um campo vetorial complexo, tem-se a ação escrita como:

$$S = \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left\{ \sum_{\mu=1}^4 [\tilde{\Delta}_\mu^f \phi_0(x)]^\dagger [\tilde{\Delta}_\mu^f \phi_0(x)] + m_0^2 [\phi_0(x)]^\dagger [\phi_0(x)] \right\} + \frac{g_0}{4!} \sum_x a^4 \{ [\phi_0(x)]^\dagger [\phi_0(x)] \}^2, \quad (2.28)$$

onde foi adicionado um termo g_0 , correspondente à auto-interação do campo.

Note que se está utilizando uma representação matricial para os campos. De forma semelhante ao que foi feito anteriormente, é possível encontrar para esta ação uma expressão análoga a (2.17). Para tal se utiliza a derivada definida anteriormente, a diferença é que agora esta atua sobre as componentes do campo vetorial e, portanto, em cada uma das entradas da matriz coluna. Para (2.28) se tem

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left\{ \sum_{\mu=1}^4 \left[\frac{1}{a} (\phi_0(x + \hat{\mu}) - \phi_0(x)) \right]^\dagger \left[\frac{1}{a} (\phi_0(x + \hat{\mu}) - \phi_0(x)) \right] + m_0^2 [\phi_0(x)]^\dagger [\phi_0(x)] \right\} \\
&\quad + \frac{g_0}{4!} \sum_x a^4 \{ [\phi_0(x)]^\dagger [\phi_0(x)] \}^2 \\
&= \sum_x \left\{ -a^2 \sum_{\mu=1}^4 \text{Re}[\phi_0^\dagger(x) \phi_0(x + a\hat{\mu})] + 4a^2 \phi_0^\dagger(x) \phi_0(x) + \frac{a^4 m_0^2}{2} \phi_0^\dagger(x) \phi_0(x) \right\} \\
&\quad + \frac{g_0}{4!} \sum_x a^4 \{ \phi_0^\dagger(x) \phi_0(x) \}^2.
\end{aligned}$$

Fazendo agora as mudanças

$$a\phi_0(x) = (2k)^{1/2}\phi(x), \quad a^2 m_0^2 = \frac{1-2\lambda}{k} - 8, \quad \text{e} \quad g_0 = \frac{6\lambda}{k^2}, \quad (2.29)$$

a expressão para a ação (2.28) fica

$$S = \sum_x \left\{ -2k \sum_{\mu=1}^4 \text{Re}[\phi^\dagger(x) \phi(x + a\hat{\mu})] + \phi^\dagger(x) \phi(x) + \lambda [\phi^\dagger(x) \phi(x) - 1]^2 - \lambda \right\}. \quad (2.30)$$

A partir de agora, com o intuito de fazer a generalização para uma ação invariante de calibre, trabalha-se com o campo pertencente a $\mathbb{C}^n$ e, posteriormente, caso haja interesse, faz-se a transição para $\mathbb{R}^n$. Outro aspecto importante é que o interesse primeiramente residirá em grupos de transformações unitárias, tais como $U(N)$ e $SU(N)$. Isto se deve primariamente ao fato de que para um dado operador linear invertível R , com a seguinte atuação

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = R\phi(x) \quad \text{e} \quad [\phi(x)]^\dagger \rightarrow [\phi'(x)]^\dagger = [R\phi(x)]^\dagger = \phi^\dagger(x) R^\dagger, \quad (2.31)$$

a ação (2.30) torna-se

$$S' = \sum_x \left\{ -2k \sum_{\mu=1}^4 \text{Re}[\phi^\dagger(x) R^\dagger R \phi(x + a\hat{\mu})] + \phi^\dagger(x) R^\dagger R \phi(x) + \lambda [\phi^\dagger(x) R^\dagger R \phi(x) - 1]^2 - \lambda \right\},$$

e uma vez que se quer $S' = S$ se tem $R^\dagger R = I$, ou seja $R^\dagger = R^{-1}$ o que é equivalente a um operador unitário caso o mesmo atue no espaço dos complexos.

É importante observar aqui que R pertencendo a $U(N)$ tem parâmetros, porém ele independe da rede, isto é, os parâmetros independem dos sítios. Este tipo de transformação é denominado de transformação global. Pode-se generalizar a transformação e considerá-la como uma quantidade (aplicação) que é definida na rede, ou seja, $R : \Lambda \rightarrow U(n)$ ou $R(x)$. Em um primeiro momento, esta visão heurística de nossa generalização é o suficiente, contudo, eventualmente, pode-se necessitar analisar isto mais rigorosamente. A este tipo de transformação se dá o nome de transformação local ou transformação de calibre. A atuação desta se dá por

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = R(x)\phi(x) \quad \text{e} \quad [\phi(x)]^\dagger \rightarrow [\phi'(x)]^\dagger = [R(x)\phi(x)]^\dagger = \phi^\dagger(x) R^\dagger(x), \quad (2.32)$$

e a ação se torna

$$\begin{aligned}
S' = & -2k \sum_x \sum_{\mu=1}^4 \text{Re}[\phi^\dagger(x) R^\dagger(x) R(x + a\hat{\mu}) \phi(x + a\hat{\mu})] + \sum_x \phi^\dagger(x) R^\dagger(x) R(x) \phi(x) \\
& + \lambda \sum_x [\phi^\dagger(x) R^\dagger(x) R(x) \phi(x) - 1]^2 - \sum_x \lambda,
\end{aligned}$$

onde evidentemente $R^\dagger(x)R(x) = I$. Observe, porém, que o termo $R^\dagger(x)R(x + a\hat{\mu})$ não se reduz a identidade, isso ocorre porque os R s são avaliados em pontos diferentes. O que se pode fazer, por exemplo, é redefinir o produto interno de tal forma que este termo resulte em I , porém isto afetaria os demais termos que se mantiveram invariantes. Notando que esta parte da expressão provém da derivada e apenas ela, neste contexto, fornece o produto de funções avaliadas em sítios diferentes, pode-se, então, modificar a mesma sem que isso altere os demais termos da expressão.

Esta modificação dar-se-á por meio do conceito de transporte paralelo. Contudo, antes de se prosseguir com tal discussão em rede, introduzir-se-á a versão contínua e como ela aparece para o contexto de simetrias de calibre.

2.1.2 Transporte paralelo para teorias de calibre no contínuo

Considere um conjunto de N campos escalares complexos $\phi^i(x)$, $i = 1, \dots, N$, em um espaço euclidiano contínuo, que formam as componentes de um campo vetorial complexo $\phi(x)$. Para cada ponto do espaço-tempo x o vetor $\phi(x)$ é um elemento de um espaço vetorial V_x . Neste caso, V_x é isomorfo a $\mathbb{C}^N$. No espaço V_x um produto escalar é definido por meio de

$$\phi\phi' = \sum_i \phi^{*i} \phi'^i. \quad (2.33)$$

A ação

$$S = \int d^4x \{ \phi(x)(\partial^2 + m^2)\phi(x) + U(\phi(x)\phi(x)) \}, \quad (2.34)$$

onde U é o termo de potencial, é invariante sob transformações da forma

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \Lambda\phi(x), \quad \Lambda \in SU(N), \quad (2.35)$$

onde Λ é uma matriz $N \times N$, independente de x satisfazendo

$$\Lambda^\dagger \Lambda = 1, \quad \det \Lambda = 1. \quad (2.36)$$

A primeira condição define o grupo $U(N)$. A segunda condição significa uma restrição ao subgrupo especial de $U(N)$, o que é feito apenas por simplicidade. Uma classe maior de transformações consiste das transformações de calibre

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \Lambda(x)\phi(x), \quad (2.37)$$

onde $\Lambda(x)$ varia com x . Elas podem ser entendidas como transformações passivas resultando de uma mudança

de base dependente de x . Evidentemente a ação não é invariante pela transformação de calibre. Naturalmente, a física se desenvolveu de forma que a sua descrição da natureza deva ser independente da escolha de uma base local, e necessita de um mecanismo que transporte informação a respeito de um objeto de um ponto a outro ponto do espaço para comparação, isto é, a ideia de paralelismo. Estas ideias aplicadas a situação acima levam à necessidade de se modificar a ação de tal modo que esta seja invariante sob transformações de calibre. Em analogia com a Relatividade Geral, isto pode ser feito pela introdução de uma diferenciação covariante. Esta, por sua vez, resulta de um conceito denominado transporte paralelo. O transporte paralelo ao longo de alguma curva é explicado pela seguinte construção. Seja τ_{yx} uma curva qualquer no espaço-tempo de x até y . Ela pode ser parametrizada da seguinte maneira

$$t^\mu(s), \quad s \in [0, 1], \quad t^\mu(0) = x^\mu, \quad t^\mu(1) = y^\mu. \quad (2.38)$$

A τ_{yx} se associa uma matriz $SU(N)$

$$U(\tau_{yx}) : V_x \rightarrow V_y, \quad (2.39)$$

a qual define um mapa de V_x para V_y . Então o vetor

$$U(\tau_{yx})\phi(x) \in V_y \quad (2.40)$$

é definido como sendo o vetor $\phi(x)$ transportado paralelamente ao longo de τ_{yx} até o ponto y . $U(\tau_{yx})$ é chamado de transporte paralelo. De modo geral, a toda curva no espaço-tempo se associa um transporte paralelo de maneira contínua e diferenciável. O transporte paralelo deve satisfazer as seguintes condições:

- $U(0) = 1$, onde 0 denota a curva de comprimento zero.
- $U(\tau_2 \circ \tau_1) = U(\tau_2)U(\tau_1)$, onde $\tau_2 \circ \tau_1$ denota a trajetória que é composta de τ_1 seguida por τ_2 .
- $U(-\tau) = U(\tau)^{-1}$, onde $-\tau$ denota a trajetória na direção oposta.

Sob uma transformação de calibre

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \Lambda(x)\phi(x), \quad (2.41)$$

$$\phi(y) \rightarrow \phi'(y) = \Lambda(y)\phi(y), \quad (2.42)$$

um transporte paralelo qualquer se transforma como

$$U(\tau_{yx}) \rightarrow U'(\tau_{yx}) = \Lambda(y)U(\tau_{yx})\Lambda^{-1}(x), \quad (2.43)$$

onde a dedução desta expressão pode ser encontrada no apêndice B, equação (B.2).

A fim de se obter a diferenciação covariante, deve-se subtrair vetores em pontos de uma vizinhança infinitesimal, tais como x e $y = x + dx$. Como as bases em diferentes pontos podem ser escolhidas de maneira arbitrária, somente se pode comparar dois vetores por meio do transporte paralelo levando os ao mesmo ponto. Considere uma curva contínua de x até $x + dx$ e o correspondente transporte paralelo. Uma vez que o transporte paralelo desta curva desvia da identidade apenas infinitesimalmente, pode-se escrever

$$U(\tau_{x+dx,x}) = 1 - A_\mu(x)dx^\mu, \quad (2.44)$$

onde $A_\mu(x) \in su(N)$ é um elemento da álgebra de Lie de $SU(N)$, ou seja, ela é uma matriz $N \times N$ anti-Hermitiana de traço nulo. Define-se a diferencial covariante de $\phi(x)$ por

$$D\phi(x) = U^{-1}(\tau_{x+dx,x})\phi(x+dx) - \phi(x), \quad (2.45)$$

assim, obtém-se

$$D\phi(x) = D_\mu\phi(x)dx^\mu \quad (2.46)$$

com a derivada covariante

$$D_\mu\phi(x) = (\partial_\mu + A_\mu(x))\phi(x). \quad (2.47)$$

$A_\mu(x)$ é o chamado campo de calibre. Da lei de transformação do transporte paralelo sob transformações locais se obtém a lei de transformação do campo de calibre:

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= \Lambda(x)A_\mu(x)\Lambda^{-1}(x) - (\partial_\mu\Lambda(x))\Lambda^{-1}(x) \\ &= \Lambda(x)(\partial_\mu + A_\mu(x))\Lambda^{-1}(x), \end{aligned} \quad (2.48)$$

no apêndice B encontra-se a lei de transformação para $F_{\mu\nu}$.

A derivada covariante então se transforma covariantemente da seguinte maneira

$$D'_\mu\phi'(x) = \Lambda(x)D_\mu\phi(x). \quad (2.49)$$

O objeto correspondente ao tensor de curvatura da Relatividade Geral é o “field strength”, o qual pode ser definido através do comutador de derivadas covariantes:

$$F_{\mu\nu}(x) = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (2.50)$$

O seu significado pode ser extraído da consideração de um transporte paralelo ao longo de um paralelograma infinitesimal de medidas dx por dy . O correspondente transporte paralelo é dado por

$$U(\tau_{xx}) = 1 - F_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \quad (2.51)$$

Sob uma transformação de calibre o field strength se transforma como

$$F'_{\mu\nu}(x) = \Lambda(x)F_{\mu\nu}(x)\Lambda^{-1}(x). \quad (2.52)$$

Agora, discutir-se-á e introduzir-se-á a notação indicial. Todo elemento A de uma álgebra de Lie real $su(N)$ pode ser escrita como uma combinação linear dos elementos iT_a ,

$$A = \sum_{a=1}^{N^2-1} i\omega^a T_a, \quad \omega^a \in \mathbb{R}. \quad (2.53)$$

As matrizes T_a , as quais também são chamadas de geradores, são matrizes de traço nulo e Hermitianas que satisfazem, em geral, uma normalização dada por

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (2.54)$$

Os geradores satisfazem a seguinte relação de comutação

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c, \quad (2.55)$$

onde as constantes de estrutura f_{abc} em geral são completamente antissimétricas e reais. Para o caso do grupo $SU(2)$, por exemplo, tem-se

$$T_a = \frac{\tau_a}{2}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (2.56)$$

onde as matrizes τ_a são as matrizes de Pauli e

$$f_{abc} = \epsilon_{abc}. \quad (2.57)$$

Para o caso do $SU(3)$, por sua vez, tem-se

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2}, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (2.58)$$

onde λ_a são as matrizes de Gell-Mann. Note que elementos de $SU(N)$ podem ser representados na forma

$$\Lambda = \exp i T_a \omega^a, \quad (2.59)$$

onde a parametrização em termos de ω^a é única em uma região suficientemente pequena próxima da identidade.

As componentes dos campos A_μ e $F_{\mu\nu}$ são definidas por

$$A_\mu(x) = -ig A_\mu^a(x) T_a, \quad (2.60)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = -ig F_{\mu\nu}^a(x) T_a. \quad (2.61)$$

Elas se relacionam entre si por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.62)$$

onde a constante de acoplamento g foi introduzida da maneira convencional.

Agora, retorna-se rapidamente ao problema de uma formulação que seja invariante sob transformações de calibre. Utilizando-se da derivada covariante acima definida, tem-se a seguinte ação invariante de calibre para um campo $\phi(x)$

$$S_\phi = \int d^4x \{ D_\mu \phi(x) D_\mu \phi(x) + m^2 \phi(x) \phi(x) + U(\phi(x) \phi(x)) \}. \quad (2.63)$$

A dinâmica para o campo de calibre é introduzida por meio da ação de Yang-Mills,

$$S_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.64)$$

a qual contém termos de auto-interação de ordem cúbica e quártica.

O campo $\phi(x)$ serviu como modelo inicial para a introdução dos transportes paralelos e dos campos de calibre. Todavia, o campo de calibre com a ação de Yang-Mills pode ser considerado por si próprio, ou seja, sem estar acoplado a outros campos. Neste caso, tem-se uma teoria de Yang-Mills pura.

Os transportes paralelos determinam o campo de calibre unicamente como visto acima. Por outro lado, dado um campo de calibre $A_\mu(x)$, o transporte paralelo pode ser reconstruído. Para tal, considere uma curva τ_{yx} parametrizada como em (2.38) e seja τ_s a correspondente curva com o parâmetro t variando de 0 até s somente. Variando o ponto final de τ_s se obtém uma equação diferencial

$$\frac{d}{ds}U(\tau_s) = -A_\mu(c(s))\frac{dc^\mu}{ds}U(\tau_s). \quad (2.65)$$

Com a condição inicial

$$U(\tau_0) = 1, \quad (2.66)$$

sua solução é dada pela fórmula de Dyson:

$$\begin{aligned} U(\tau_s) &= P \exp \left\{ - \int_0^s A_\mu(c(s)) \frac{dc^\mu}{ds} ds \right\} \\ &= P \exp \left\{ - \int_{\tau_s} A_\mu dx^\mu \right\}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde o símbolo P denota o ordenamento da trajetória de acordo com o parâmetro s de tal modo que as matrizes $A_\mu(c(s))$ com maior valor de s estejam a esquerda daquelas com menor valor de s .

Acima, restringiu-se a discussão para o caso de grupos de calibre $SU(N)$. Eles pertencem aos mais importantes casos para os físicos. Todavia, não há obstáculos para se discutir e desenvolver a formulação de teorias de calibre para outros grupos compactos. Porém, um caso interessante é o grupo abeliano $U(1)$. Este consiste de números complexos de módulo 1,

$$U(1) = \{\exp -i\alpha | 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}. \quad (2.68)$$

Campos complexos carregados $\phi(x)$ (o grupo de simetria $U(1)$ local é o grupo de simetria do eletromagnetismo) transformam-se sob o grupo de calibre $U(1)$ de acordo com

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \exp -i\alpha(x)\phi(x). \quad (2.69)$$

Uma vez que há somente um gerador, a notação em termos de componentes se torna desnecessária, e $A_\mu(x)$ denota a componente real do campo de calibre. Assim, a derivada covariante para este grupo é dada por

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x). \quad (2.70)$$

A lei de transformação para o campo de calibre é dado por

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha(x), \quad (2.71)$$

e o field strength

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.72)$$

é invariante de calibre em contraste com o caso não-Abeliano. Além disso, o fato de que este campo é linear em A_μ implica que a ação

$$S_A = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.73)$$

não apresenta termos de interação e logo descreve uma teoria de campo livre. Uma vez que o campo de calibre comuta, a fórmula para transporte paralelo é dado por

$$U(\tau) = \exp \left\{ ig \int_\tau A_\mu(x) dx^\mu \right\}, \quad (2.74)$$

e ela não requer o ordenamento de trajetória.

2.1.3 Transporte paralelo para teorias de calibre em rede

No caso contínuo, como visto acima, o campo de calibre é dado pelo transporte paralelo ao longo de distâncias infinitesimais. Porém, em rede, a menor distância não nula em uma rede hipercúbica é o espaçamento da rede a . Portanto, os transportes paralelos elementares em rede são aqueles associados com os links (ou bonds) b conectando os vizinhos mais próximos. Seja x um ponto na rede e $x + a\hat{\mu}$ o vizinho mais próximo na direção da rede dada por μ . O correspondente link b é uma trajetória reta de x até $x + a\hat{\mu}$. Ela é identificada com o par ordenado de pontos e denotada por

$$b = \langle x + a\hat{\mu}, x \rangle \equiv (x, \mu). \quad (2.75)$$

O transporte paralelo associado ao link $b = \langle x + a\hat{\mu}, x \rangle$ pode ser representado por

$$U(b) \equiv U(x + a\hat{\mu}, x) \equiv U_{x\mu} \in G, \quad (2.76)$$

onde G é o grupo associado às transformações de calibre. U é usualmente chamado de variável link e satisfaz

$$U(y, x) = U^{-1}(x, y). \quad (2.77)$$

Agora, para um caminho arbitrário na rede

$$\tau = b_n \circ \dots \circ b_2 \circ b_1, \quad (2.78)$$

o transporte paralelo é

$$U(\tau) = U(b_n) \dots U(b_2)U(b_1) \equiv \prod_{b \in \{b_i\}_{i=1, \dots, n}} U(b), \quad (2.79)$$

que é determinado pelas variáveis link. Portanto, pode-se considerar o conjunto de todas as variáveis link $\{U(b)\}$ como o campo de calibre na rede. Sob transformações de calibre as variáveis links se transformam como

$$U(x + a\hat{\mu}, x) \rightarrow U'(x + a\hat{\mu}, x) = R(x + a\hat{\mu})U(x + a\hat{\mu}, x)R^{-1}(x). \quad (2.80)$$

Um termo de acoplamento na forma

$$\sum_{\langle xy \rangle} \phi(x)U(x, y)\phi(x) \quad (2.81)$$

é evidentemente invariante sob transformações de calibre. Tendo isso em mente, utilizando o fato do transporte paralelo ser necessário para se calcular a diferença entre vetores em pontos diferentes e comparando as expressões (2.28) e (2.30), pode-se definir a derivada covariante para a frente em rede por

$$\tilde{D}_\mu \phi(x) = \left[\frac{1}{a} U(x, x + a\hat{\mu}) \phi(x + a\hat{\mu}) - \frac{1}{a} \phi(x) \right]. \quad (2.82)$$

Agora, pode-se escrever a forma final da ação invariante de calibre, a qual com a adição dos termos de massa e auto-interação fica

$$\begin{aligned} S = & -2k \sum_x \sum_{\mu=1}^4 \text{Re}[\phi_0^\dagger(x)U(x, x + a\hat{\mu})\phi_0(x + a\hat{\mu})] + 8k \sum_x \phi^\dagger(x)\phi(x) \\ & + \frac{1}{2} \sum_x a^4 m_0^2 [\phi_0(x)]^\dagger [\phi_0(x)] + \frac{g_0}{4!} \sum_x a^4 \{ [\phi_0(x)]^\dagger [\phi_0(x)] \}^2. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Fazendo a mudança dada em (2.29) de forma a manter uma notação compatível ao que foi feito anteriormente se obtém

$$\begin{aligned} S = & -2k \sum_x \sum_{\mu=1}^4 \text{Re}[\phi^\dagger(x)U(x, x + a\hat{\mu})\phi(x + a\hat{\mu})] \\ & + \sum_x \{ \phi^\dagger(x)\phi(x) + \lambda [\phi^\dagger(x)\phi(x) - 1]^2 - \lambda \}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Outras quantidades que são invariantes por transformação de calibre, também podem ser construídas tais como

$$\phi^\dagger(x)U(\tau_{x, x+a\hat{\mu}})\phi(x + a\hat{\mu}), \quad (2.85)$$

ou

$$\text{Tr}[U(\tau_{x, x})], \quad (2.86)$$

onde $(\tau_{x, x})$ é uma curva fechada na rede. É fácil notar que estas quantidades são invariantes de calibre.

Uma diferença relevante entre a teoria contínua e a discreta é que a teoria discreta envolve o grupo (na verdade, representações deste), enquanto a teoria contínua envolve a álgebra de Lie (representações desta). Isto torna a invariância de calibre em rede explícita e simples, o que proporciona a oportunidade de se usar grupos de calibre discretos, os quais não têm interpretação direta no limite do contínuo.

Em analogia com o caso contínuo, pode-se pensar na menor trajetória fechada possível em rede (no caso contínuo isto nos forneceria o field strength). Estas pequenas trajetórias em redes consistem de quatro links

e são denominadas “plaquettes”, veja figura abaixo.

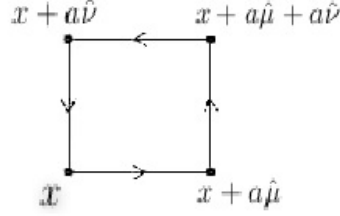


Figura 2.1: “Representação de um plaquette”.

Evidentemente, o “plaquette” consiste dos sítios

$$x, \quad x + a\hat{\mu}, \quad x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, \quad x + a\hat{\nu}, \quad (2.87)$$

orientados conforme a figura 2.1 e é usualmente denotado por

$$p = (x; \mu, \nu), \quad (2.88)$$

onde algumas vezes a vírgula é omitida. O transporte paralelo correspondente ao “plaquette” como dado pela expressão (2.79) é

$$U_p \equiv U_{x; \mu\nu} \equiv U(x, x + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu})U(x + a\hat{\mu}, x), \quad (2.89)$$

o qual é chamado de variável “plaquette”. A ação de Wilson [2] para uma teoria de calibre pura é definida em termos das variáveis “plaquette”:

$$S[U] = \sum_p S_p(U_p), \quad (2.90)$$

com o termo “plaquette”

$$S_p(U_p) = -\beta \left\{ \frac{1}{2TrI} (TrU(p) + TrU^{-1}(p)) - 1 \right\}, \quad (2.91)$$

onde I é a identidade do grupo de simetria do modelo. Esta ação é a mais simples construção que no limite do contínuo recupera a ação de Yang-Mills.

A soma sobre todos os “plaquettes” p é a soma sobre cada “plaquette” da rede com somente uma orientação

$$\sum_p \equiv \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4}. \quad (2.92)$$

A ação de Wilson é evidentemente invariante de calibre uma vez que

$$TrU'_p = TrU_p. \quad (2.93)$$

Além disso, é real e positiva. Existem outras possibilidades para se definir uma ação invariante de calibre, com apenas as variáveis links. Todavia, a ação de Wilson é escolhida por ser a mais simples.

Agora, combinando a ação (2.84) com a ação de Wilson (2.90) tem-se

$$\begin{aligned}
S = & -2k \sum_x \sum_{\mu=1}^4 \text{Re}[\phi^\dagger(x)U(x, x+a\hat{\mu})\phi(x+a\hat{\mu})] - \beta \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[\frac{1}{2\text{Tr}I} (\text{Tr}U(p) + \text{Tr}U^{-1}(p)) - 1 \right] \\
& + \sum_x \{ \phi^\dagger(x)\phi(x) + \lambda[\phi^\dagger(x)\phi(x) - 1]^2 - \lambda \}.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

A ação (2.94) é invariante de calibre e contém dinâmica para o campo de calibre, logo é a ação que se procurava. É usualmente denominada ação de Yang-Mills-Higgs em rede.

Finalmente, é interessante apresentar a relação entre a ação de Wilson para $SU(N)$ e a correspondente ação de Yang-Mills para os campos de calibre no contínuo. Para tal, seja

$$A_\mu(x) = -igA_\mu^b T_b, \tag{2.95}$$

um campo vetorial assumindo valores em uma álgebra de Lie definida sob a rede e seja

$$U(x, \mu) \equiv e^{-aA_\mu(x)} = 1 - aA_\mu(x) + \frac{a^2}{2}A_\mu(x)^2 + \dots \tag{2.96}$$

Usando

$$A_\nu(x+a\hat{\mu}) = A_\nu(x) + a\tilde{\Delta}_\mu^f A_\nu(x) \tag{2.97}$$

e a fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff

$$\exp x \exp y = \exp x + y + (1/2)[x, y] + \dots \tag{2.98}$$

é possível obter o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
U_{x;\mu\nu} &= U(x, x+a\hat{\nu})U(x+a\hat{\nu}, x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})U(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}, x+a\hat{\mu})U(x+a\hat{\mu}, x) \\
&= \exp\{aA_\nu(x)\} \exp\{aA_\mu(x+a\hat{\nu})\} \exp\{-aA_\nu(x+a\hat{\mu})\} \exp\{-aA_\mu(x)\} \\
&= \exp\{aA_\nu(x) + aA_\mu(x+a\hat{\nu}) + a^2/2[A_\nu(x), A_\mu(x+a\hat{\nu})] + \dots\} \\
&\quad \times \exp\{-aA_\nu(x+a\hat{\mu}) - aA_\mu(x) + a^2/2[A_\nu(x+a\hat{\mu}), A_\mu(x)]\} \\
&= \exp\{a(A_\nu(x) + aA_\mu(x)) + a^2\tilde{\Delta}_\nu^f A_\mu(x) + a^2/2[A_\nu(x), A_\mu(x)] + \dots\} \\
&\quad \times \exp\{-a(A_\nu(x) + A_\mu(x)) - a^2\tilde{\Delta}_\mu^f A_\nu(x) + a^2/2[A_\nu(x+a\hat{\mu}), A_\mu(x)] \dots\} \\
&= \exp\{-a^2(\tilde{\Delta}_\mu^f A_\nu(x) - \tilde{\Delta}_\nu^f A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)]) + \dots\},
\end{aligned} \tag{2.99}$$

onde apenas os termos com até ordem dois em a são explicitamente escritos. É interessante reconhecer

$$F_{\mu\nu}(x) = \tilde{\Delta}_\mu^f A_\nu(x) - \tilde{\Delta}_\nu^f A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)], \tag{2.100}$$

de modo que é conveniente escrever

$$U_{x;\mu\nu} = \exp -a^2 G_{\mu\nu}, \tag{2.101}$$

onde $G_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a)$. Isto produz

$$\text{Tr}(U_p + U_p^{-1}) = \text{Tr}(1 - a^2 G_{\mu\nu} + \frac{a^4}{2} G_{\mu\nu}^2 + 1 + a^2 G_{\mu\nu} + \frac{a^4}{2} G_{\mu\nu}^2) = 2\text{Tr}(1) + a^4 \text{Tr}(F_{\mu\nu})^2 + \mathcal{O}(a^5). \quad (2.102)$$

Usando agora que

$$\sum_p \text{Tr}(F_{\mu\nu}(x))^2 = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu\nu} \text{Tr}(F_{\mu\nu}(x))^2, \quad (2.103)$$

obtem-se para a ação de Wilson que

$$S = \frac{\beta}{4N} \sum_x a^4 \text{Tr} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^5), \quad (2.104)$$

onde N é a “dimensão” do grupo de calibre. A ação acima coincide com a ação de Yang-Mills para a pequeno se for definido $\beta = 2N/g^2$ e se identificar g com a constante de acoplamento da teoria em rede com dimensão.

2.2 FUNCIONAL GERADOR PARA AÇÃO DE WILSON

Uma vez definidos os campos e a ação, o próximo passo é a especificação do funcional gerador. Lembre-se que no contexto de redes o campo de calibre é dado pelo conjunto das variáveis de link $\{U(b)\} \equiv U$, deste modo, no contexto de uma teoria de calibre pura, os observáveis são funções

$$O(\{U(b)\}), \quad (2.105)$$

das variáveis link. O valor esperado de O é dado por

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_b dU(b) O \exp[-S(U)], \quad (2.106)$$

onde

$$Z = \int \prod_b dU(b) \exp[-S(U)] \quad (2.107)$$

e $S(U)$ é ação de Wilson dada na expressão (2.90). Agora, se campos de matéria também estiverem presentes a expressão mais geral para um observável será $O(\{U(b)\}, \{\phi(x)\})$ onde $\{\phi(x)\} \equiv \phi$ representa o conjunto dos campos de matéria. As respectivas integrais (aqui, por integrais entenda uma medida de Lebesgue que pode ser normalizada) também devem ser incluídas de forma que a expressão para o valor esperado será

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_b dU(b) \prod_x d\phi(x) O \exp[-S(U, \phi)], \quad (2.108)$$

onde

$$Z = \int \prod_b dU(b) \prod_x d\phi(x) \exp[-S(U, \phi)] \quad (2.109)$$

e $S(U, \phi)$ é a ação de Yang-Mills-Higgs dada em (2.94). Nesta formulação se deve definir $dU(b)$, ou escolhê-lo.

Uma escolha interessante seria aquela que respeita a invariância de calibre, ou seja, $dU(b)$ é uma quantidade invariante de calibre (o termo adequado seria medida). Isto é garantido se dU for tomado como sendo uma medida de Haar em um grupo de calibre. A medida de Haar definida em um grupo topológico compacto G é a medida dU em G que obedece a invariância

$$\int_G f(U) dU = \int_G f(VU) dU = \int_G f(UV) dU \text{ para qualquer } V \in G. \quad (2.110)$$

A medida de Haar é definida a menos de uma constante, todavia se a medida for normalizada

$$\int_G dU = 1, \quad (2.111)$$

ela passa a ser única. A medida de Haar também satisfaz

$$\int_G f(U) dU = \int_G f(U^{-1}) dU. \quad (2.112)$$

3 ASPECTOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS: MAPAS DINÂMICOS

3.1 INTRODUÇÃO

Os estados ordenados que são observados em matéria condensada e física de altas-energias podem ser entendidos como resultado de uma dinâmica quântica, portanto os sistemas macroscópico que exibem este tipo de comportamento, tais como, por exemplo, supercondutores, ferromagnetos podem ser descritos e investigados no arcabouço de uma teoria quântica. Assim, é possível falar em sistemas quânticos macroscópicos, ou seja, sistemas que embora apresentem comportamento clássico, algumas de suas características macroscópicas somente podem ser compreendidas utilizando uma teoria quântica.

Observa-se também uma variedade de fenômenos físicos onde partículas quânticas coexistem e interagem com objetos macroscópicos extensos que mostram um comportamento clássico, tais como vórtices em supercondutores ou superfluidos e domínios magnéticos em ferromagnetos, entre outros.

Assim, torna-se necessário estudar e entender qual é o papel e a origem quântica dos defeitos topológicos e das suas interações com os quantas. Uma compreensão adequada de tal questão como destacado pelas ideias introduzidas por [12, 13] se faz indispensável para o correto entendimento das transições de fase com quebra de simetria e da formação de estruturas ou padrões de ordenamento, independente da área de aplicação, por exemplo, física de matéria condensada ou cosmologia.

Aqui, introduzir-se-á e discutir-se-á um pouco sobre os métodos apresentados nas referências [12, 13]. A abordagem apresentada nestas obras é uma alternativa, por exemplo, a assumir uma solução clássica tipo sóliton e então quantiza-lá [19], entre outras.

3.2 PRIMEIRAS IDEIAS

A descrição quântica de sistemas físicos faz uso em geral de quatro elementos: **os campos**, cujos elementos descritivos são operadores cujo significado matemático só fica completamente estabelecido quando o espaço onde estes operam é também definido; **o espaço de estados** (ou fase física), este é o espaço onde os operadores atuam, ele depende do sistema físico a ser descrito e das condições de contorno, por exemplo, temperatura sob a qual o sistema está submetido; **a hamiltoniana**, a qual fornecerá a dinâmica do sistema; e **as relações de comutação canônicas**, as quais são relações essencialmente algébricas.

Evidentemente, a definição das relações de comutação leva à definição das variáveis canônicas (entenda operadores de criação e aniquilação). Contudo, a fim de se determinar a evolução temporal do sistema se faz necessário representar estas variáveis canônicas como operadores em um espaço de Hilbert. Neste ponto, surge uma importante diferença entre os modelos descritos pela mecânica quântica e os modelos descritos pela teoria quântica de campos. Em mecânica quântica, isto é, sistemas quânticos com um número finito de graus de liberdade, a escolha de uma representação não é essencial, uma vez que todas as representações irreduzíveis das relações de comutação canônicas são unitariamente equivalentes entre si. Esta última afirmação, é o conteúdo do teorema de Stone-von Neumann [20]. Deste modo, neste arcabouço, a questão da escolha de uma representação particular para se trabalhar se reduz a simples conveniência.

A situação, contudo, muda drasticamente quando se considera sistemas com um número infinito de graus

de liberdade, e este, obviamente, é o caso da teoria quântica de campos, onde sistemas com um número N muito grande de constituintes são considerados e as quantidades relevantes são aquelas - por exemplo, densidade $n = N/V$ - que permanecem finitas no limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$).

Em contraste com o que acontece na mecânica quântica, o teorema de Stone-von Neumann não tem validade em teoria quântica de campos, e a escolha de uma representação particular da álgebra dos campos pode apresentar significado físico e implicações físicas. Formalmente, este é o resultado da existência em teoria quântica de campos de representações unitárias não equivalentes das relações de comutação canônicas.

Observe que uma mudança nas condições de contorno do espaço de estados pode resultar em uma transição de uma fase para outra. Por exemplo, uma redução na temperatura tal que esta seja inferior a temperatura crítica de uma dada amostra pode induzir nesta uma transição do estado normal para uma fase supercondutora, caso a mesma seja um metal. Contudo, tem-se uma dependência do arcabouço teórico na descrição. Além disso, note como a condição de contorno influencia na escolha de um espaço de estados.

De forma geral, o primeiro importante resultado é que em mecânica quântica o sistema físico pode existir apenas em uma única fase. Uma vez que equivalência unitária significa de fato equivalência física, não é possível a existência e representações de diferentes fases físicas. Por outro lado, em teoria quântica de campos o sistema pode apresentar diferentes fases físicas. Finalmente, isto indica e sugere o sentido da investigação a respeito de uma origem quântica para os defeitos topológicos.

3.3 UMA TEORIA EM DOIS NÍVEIS

Agora, discutir-se-á como a teoria quântica de campos pode ser entendida como uma teoria de dois níveis, com dois tipos de campos relevantes: o campo livre (físico) e o campo de Heisenberg (interação).

Assim, considere uma abordagem perturbativa da teoria. Nesta, qualquer experimento pode ser esquematizado como um processo de espalhamento com basicamente três etapas: a preparação de um conjunto de partículas livres¹ (não-interagentes) as quais são preparadas para colidir algum tempo depois em alguma região do espaço (região do espaço-tempo de interações), ou seja, a segunda etapa, onde as partículas interagem, e a terceira etapa, onde os produtos das colisões são esperados emergir da região de interação como partículas livres².

Correspondentemente, tem-se o espaços de estados dos campos in e dos campos out³. Além disso, o que se observa sempre em um processo é a soma das energias das partículas in e a soma das energias das partículas out. Assim, é importante destacar que a palavra livre não significa sem interação, mas sim que a soma da energia total do sistema é dada pela soma das energias de cada partícula observada⁴. A região de interação é onde a dinâmica opera: dados os campos in e os estados in, a dinâmica determina os campos out e os estados out.

As partículas de entrada e as de saída somente são bem distinguíveis e localizadas quando longe da região de interação, em um tempo muito antes ($t = -\infty$) e muito depois ($t = +\infty$) da interação. Deste modo, os campos in e out são entendidos como sendo campos assintóticos. Quando entendidos com uma unidade é adequado e útil se assumir que as forças de interação não agem sobre eles, em outras palavras, podem ser

¹Denominar-se-á de partículas de entrada ou partículas in.

²Denominar-se-á de partículas de saída ou partículas out.

³O espaço de Fock para as partículas físicas pode ser construído pela ação dos operadores de criação e aniquilação correspondentes aos campos livres no estado de vácuo $|0\rangle$.

⁴Isto é identificado em física de estado sólido como quasi-partícula. E a estes elementos pode ser associada uma dinâmica de campo livre.

vistos como campos livres.

As únicas regiões acessíveis ao observador evidentemente são aquelas muito longe (no espaço-tempo) da região de interação, em outras palavras, as regiões assintóticas, denominadas aqui de regiões in e out. Isto ocorre pois, ao nível quântico, observações realizadas interferem com o experimento, logo uma observação na região de interação pode modificar drasticamente a dinâmica e os objetos lá interagindo o que implicaria a inutilização do resultado.

A dinâmica é introduzida por meio dos campos de Heisenberg, os quais evidentemente estarão associados à região de interação. Uma vez que esta é excluída de processos de observação, tem-se que os campos de Heisenberg não são observados. Isso implica que os resultados experimentais devem ser descritos unicamente em termos dos campos assintóticos do modelo.

Basicamente, tem-se então a teoria quântica de campos como uma teoria de dois níveis: o de interação onde a dinâmica é especificada pelas equações para os campos de Heisenberg; e o físico, isto é, dos campos assintóticos e dos espaços de estados físicos diretamente acessível ao observador. Claro, que ambas os campos são físicos, pois a interação é física, entretanto, esta não será acessível diretamente ao observador, o qual obterá informações a respeito da interação por meio dos estados assintóticos. Para os campos físicos a dinâmica é determinada por equações de campo livre podendo ser massivo ou não massivo. Os operadores de campo de Heisenberg são genericamente denotados por $\phi_H(x)$ e os operadores de campos físicos por $\phi_{in}(x)$ ou ϕ_{out} . Assume-se que eles devem satisfazer as relações de comutação ou anti-comutação canônicas a tempos iguais.

As equações de campo de Heisenberg e as equações de campo livre são escritas respectivamente como

$$\Delta(\partial)\phi_H(x) = I[\phi_H](x) \quad (3.1)$$

e

$$\Delta(\partial)\phi_{in}(x) = 0, \quad (3.2)$$

onde $\Delta(\partial)$ é um operador diferencial comum a ambas equações, $x \equiv (t, x)$ e F é algum funcional dos campos $\phi_H(x)$, descrevendo a interação exemplo. A equação (3.1) é somente uma relação formal entre os operadores $\phi_H(x)$ enquanto não representada em um espaço vetorial. Assim, para que a descrição em termos dos campos de Heisenberg adquira algum significado físico é necessário que o mesmo seja representado no espaço de estados físicos e, portanto, precisa-se que eles sejam escritos em termos dos campos físicos $\phi_{in}(x)$.

Uma maneira interessante para se relacionar ambos é reescrevendo a equação (3.1) na forma integral (equação de Yang-Feldman):

$$\phi_H(x) = \phi_{in}(x) + \Delta^{-1}(\partial) * I[\phi_H](x), \quad (3.3)$$

onde $*$ denota convolução e o símbolo $\Delta^{-1}(\partial)$ denota a função de Green para $\phi_{in}(x)$. A forma precisa das funções de Green é especificada pelas condições de contorno, assim como o espaço de estados físicos. A equação (3.3) pode ser resolvida por interação fornecendo uma expressão para os campos de Heisenberg $\phi_H(x)$ em termos de potências dos campos $\phi_{in}(x)$. Esta é a expansão de Haag no formalismo LSZ⁵ [21, 22] ou mapa dinâmico na linguagem adota pelas referências [12, 13], que pode ser formalmente escrito como⁶

⁵O formalismo Lehmann-Symanzik-Zimmermann ou LSZ foi desenvolvido em 1955 e é nomeado em homenagem aos seus inventores, os físicos alemães H. Lehmann, K. Symanzik e W. Zimmermann. O formalismo LSZ, o qual incluía a fórmula de redução LSZ, fornece uma maneira explícita de expressar os elementos físicos da matriz S (amplitudes de espalhamento) das funções de correlação ordenadas no tempo de uma teoria quântica de campos. Assim, o objetivo é expressar os elementos da matriz S em termos dos campos livres assintóticos em vez dos campos de interação desconhecidos.

⁶Uma forma fechada e rigorosa para o mapa dinâmico é obtido no formalismo de trajetória de tempo fechado (CTP) [23].

$$\phi_H(x) = F[x; \phi_{in}(x)]. \quad (3.4)$$

A igualdade na equação (3.4) deve ser entendida como uma igualdade entre elementos de matrizes computados no espaço de Fock das partículas físicas. Este tipo de relação é também conhecida como relação fraca no sentido que ela depende em geral do espaço onde a mesma é representada. Uma condição para a determinação do mapa acima é que a hamiltoniana de interação, uma vez escrita em termos dos operadores físicos, tenha a forma de uma hamiltoniana livre, além de uma possível constante.

Então, em geral, denotando por H a hamiltoniana de interação e por H_0 a hamiltoniana livre, tem-se a relação fraca:

$$\langle a|H|b\rangle = \langle a|H_0|b\rangle + W_0 \langle a|b\rangle, \quad (3.5)$$

a qual determina o mapa dinâmico. Na equação (3.5), W_0 é uma constante, mais especificamente um c-número e $|a\rangle$ e $|b\rangle$ são vetores no espaço de Fock das partículas físicas.

A forma geral de um mapa dinâmico é

$$\phi_{Hi}(x) = \chi_i + \sum_j Z_{ij}^{1/2} \phi_{in_j}(x) + \sum_{i,j} \int d^4 z_1 d^4 z_2 F_{ijk}(x, z_1, z_2) : \phi_{in_j}(z_1) \phi_{in_k}(z_2) : + \dots \quad (3.6)$$

onde i, j, k são índices para os diferentes campos físicos, χ_i são constantes complexas ou reais, Z_{ij} são constantes também complexas ou reais denominadas de fatores de renormalização, os dois pontos denotam ordenamento normal, ϕ_{in} denota tanto o campo quanto seu conjugado hermitiano, $F_{ijk}(x, z_1, z_2)$ são funções complexas ou reais, e os termos faltando são produtos com ordenamento normal de termos de mais alta ordem. As funções χ_i , Z_{ij} , F_{ijk} entre outras são os coeficientes do mapa dinâmico e os elementos que se deseja determinar.

3.4 MÉTODO DE AUTO-CONSISTÊNCIA

A consistência matemática da técnica exige que o conjunto de campos $\phi_{in}(x)$ seja irreduzível. Contudo, pode ocorrer que nem todos os elementos desse conjunto sejam conhecidos desde o início. Por exemplo, pode haver campos compostos (estados ligados) ou mesmo quantas elementares cuja existência é ignorada ou desconhecida em um primeiro reconhecimento. Assim, o cálculo dos elementos de matriz no estado físico vai levar a detecção de polos inesperados nas funções de Green, ou não ter-se-á a forma adequada para a hamiltoniana de interação escrita em termos dos campos assintóticos. De forma geral, isto indica a existência de quantas ignorados.

Deste modo, introduz-se novos campos correspondentes a esses quantas até então ignorados ou desconhecidos e se repete o cálculo. Este procedimento é chamado de método de auto-consistência [12, 13]. É importante destacar que não é necessário a princípio que exista uma correspondência um a um entre os elementos do conjunto $\{\phi_H^j\}$ e do $\{\phi_{in}^j\}$. De fato, há campos físicos que não aparecem como um termo linear no mapa dinâmico de qualquer elemento do conjunto $\{\phi_H^j\}$. Estas partículas são ditas serem compostas, e vão aparecer em termos lineares no mapa dinâmico do produto de algumas combinações dos operadores de campo de Heisenberg. Por exemplo, se n campos $\phi_H(x)$ formarem tal produto a partícula composta é um

Então, a expansão de Haag é diretamente aplicável a situações de equilíbrio e não equilíbrio.

estado ligado de n corpos.

O espaço de Fock $\mathcal{H}_0$ para os estados físicos na teoria quântica de campos não é único uma vez que se pode ter diversos estados físicos diferentes, por exemplo, para um metal, a fase normal e a fase supercondutora. O espaço original $\mathcal{H}$ é construído pela atuação dos operadores de criação e aniquilação no estado vácuo $|0\rangle$, conforme mencionado anteriormente. Contudo, este espaço construído contém vetores com um número infinito de partículas, isto implica que a base no qual foi construído é não-numerável. Assim, é necessário separar um subespaço $\mathcal{H}_0$ de $\mathcal{H}$ para enfim representar corretamente o espaço físico sob consideração. Este fato implica a existência de infinitos espaços de Fock unitariamente não equivalentes entre si, em correspondência com as infinitas representações não equivalentes da álgebra das variáveis canônicas, de modo que a escolha de uma representação é indicada pelo sistema físico em consideração.

Assim, representações unitariamente não equivalentes descrevem diferentes fases físicas. Logo, tem-se diferentes valores esperados para certos observáveis e mesmo diferentes conjuntos irredutíveis de quantas físicas. Portanto, encontrar o mapa dinâmico envolve escolher o espaço de Fock onde a dinâmica será realizada.

Finalmente, é interessante observar que a construção do espaço de Fock depende da escolha dos operadores de campo físico. Porém, este conjunto é determinado pela dinâmica, a qual requer conhecimento do espaço de Fock das partículas físicas. Tem-se, então, um problema de auto-consistência, de forma que o procedimento adotado pode ser clareado pela seguinte “receita”: baseado em considerações físicas e intuições se escolhe um conjunto de campos físicos (campos in) como candidatos; então, escreve-se o mapa dinâmico em termos destes campos.⁷ Contudo, pode ocorrer do sistema de equações sob consideração não admitir soluções consistentes, o que acontece caso o conjunto de campos selecionados não seja completo; então, adiciona-se novos campos ou se escolhe um novo conjunto e se repetem os procedimentos. Isto justifica o nome do procedimento.

3.5 ALGUNS EXEMPLOS DE REPRESENTAÇÕES NÃO EQUIVALENTES

3.5.1 A translação bosônica

Considerar-se-á primeiro uma situação em mecânica quântica. Seja a um operador “oscilador” definido por

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad \text{e} \quad a|0\rangle = 0. \quad (3.7)$$

Chama-se de $\mathcal{H}[a]$ o espaço de Fock construído por repetidas atuações do operador $a^\dagger$ em $|0\rangle$:

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad \mathcal{H}[a] = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n |n\rangle \mid \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \right\}. \quad (3.8)$$

Realizar-se-á, agora, a seguinte transformação em a , conhecida como transformação de Bogoliubov para estados coerentes ou translação bosônica:

$$a \rightarrow \alpha = a + \theta, \quad \theta \in \mathbb{C}. \quad (3.9)$$

⁷Os coeficientes do mapa são mais facilmente determinados considerando elementos de matriz (3.6), deixando indeterminada a forma do espectro de energia. As equações para os coeficientes do mapa são obtidos das equações de Heisenberg (3.2), que valem para os elementos de matriz dos campos $\phi_{H_i}(x)$. Assim, ambos os coeficientes do mapa e o espectro de energia das partículas físicas são determinados.

Esta é uma transformação canônica, uma vez que preserva a relação de comutação (3.7):

$$\begin{aligned} [\alpha, \alpha^\dagger] &= [a + \theta, a^\dagger + \theta^*] \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Note que α não aniquila o vácuo $|0\rangle$:

$$\alpha |0\rangle = (a + \theta) |0\rangle = \theta |0\rangle. \quad (3.11)$$

Porém, é possível definir um novo vácuo $|0(\theta)\rangle$, o qual é aniquilado por α :

$$\alpha(\theta) |0(\theta)\rangle = 0. \quad (3.12)$$

Em termos de $|0(\theta)\rangle$ e $\{\alpha, \alpha^\dagger\}$, tem-se uma nova representação (espaço de Fock) das relações de comutação canônicas.

É conveniente escrever um gerador para a transformação (3.9) da forma:

$$\alpha(\theta) = U(\theta)aU^{-1}(\theta) = a + \theta \quad \text{com} \quad U(\theta) = \exp[iG(\theta)], \quad (3.13)$$

com U unitário, assim, a nova representação é unitariamente equivalente a anterior. A forma funcional de G pode ser obtida por variação infinitesimal de seu parâmetro. Assim, considere uma translação infinitesimal $\delta\theta$. Neste caso, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha(\delta\theta) &= U(\delta\theta)aU^{-1}(\delta\theta) \\ &= (1 + iG(\delta\theta))a(1 - iG(\delta\theta)) \\ &= a + i[G(\delta\theta), a] \\ a + \delta\theta &= a + i[G(\delta\theta), a]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Portanto, $\delta\theta = i[G(\delta\theta), a]$. Uma possibilidade para $G(\delta\theta)$ é obtida observando a relação de comutação canônica para a e $a^\dagger$, de onde se encontra $G(\delta\theta) = i\delta\theta a^\dagger$. U deve ser unitário, e isto é garantido se G for hermitiana. Assim, acrescenta-se $-i\delta\theta^*a$ à definição de G . Note que a nova versão de G continua satisfazendo $\delta\theta = i[G(\delta\theta), a]$. Finalmente,

$$G(\theta) = -i(\theta^*a - \theta a^\dagger). \quad (3.15)$$

O novo estado de vácuo é dado por

$$\begin{aligned} |0(\theta)\rangle &= U(\theta) |0\rangle \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}|\theta|^2\right] \exp[-\theta a^\dagger] |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde se utilizou a fórmula de Zassenhaus:

$$e^{t(X+Y)} = e^{tX} e^{tY} e^{-(t^2/2)[X,Y]} e^{(t^3/6)(2[Y,[X,Y]]+[X,[X,Y]])} \dots, \quad (3.17)$$

com $t = 1$, $X = -\theta a^\dagger$ e $Y = \theta^* a$. Note então, que $e^{\theta^* a}$ atuando no estado de vácuo fornece o próprio estado de vácuo. Observe ainda que $|0(\theta)\rangle$ é um condensado de quantas a , onde o número de partículas a em $|0(\theta)\rangle$ é

$$\langle 0(\theta) | a^\dagger a | 0(\theta) \rangle = \langle 0(\theta) | (\alpha^\dagger - \theta^*)(\alpha - \theta) | 0(\theta) \rangle = |\theta|^2. \quad (3.18)$$

Agora considere um exemplo similar em teoria quântica de campos, isto é, um modelo com um número infinito de graus de liberdade indexados por $\vec{k}$:

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}}, a_{\vec{q}}^\dagger] &= i\delta(\vec{k} - \vec{q}), \quad [a_{\vec{k}}, a_{\vec{q}}] = 0, \\ a_{\vec{k}} |0\rangle &= b_{\vec{k}} |0\rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A transformação bosônica é realizada para cada modo individualmente,

$$a_{\vec{k}} \rightarrow a_{\vec{k}}(\theta) = a_{\vec{k}} + \theta_{\vec{k}}, \quad \theta_{\vec{k}} \in \mathbb{C}, \quad \forall \vec{k}. \quad (3.20)$$

Além disso, define-se o novo vácuo por

$$\alpha_{\vec{k}}(\theta) |0(\theta)\rangle = 0 \quad \forall \vec{k}. \quad (3.21)$$

De maneira análoga, pode-se escrever uma expressão equivalente à (3.13) (o que é em parte devido ao fato de modos com diferentes $\vec{k}$ comutarem entre si):

$$\alpha_{\vec{k}}(\theta) = U(\theta) a_{\vec{k}} U^{-1}(\theta) = a_{\vec{k}} + \theta_{\vec{k}} \quad \text{com} \quad U(\theta) = \exp[iG(\theta)], \quad (3.22)$$

onde U é unitário. Para tal, admite-se uma translação infinitesimal $\delta\theta_{\vec{k}}$. Neste caso, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{k}}(\delta\theta) &= U(\delta\theta) a_{\vec{k}} U^{-1}(\delta\theta) \\ &= (1 + iG(\delta\theta)) a_{\vec{k}} (1 - iG(\delta\theta)) \\ &= a_{\vec{k}} + i[G(\delta\theta), a_{\vec{k}}] \\ a_{\vec{k}} + \delta\theta_{\vec{k}} &= a_{\vec{k}} + i[G(\delta\theta), a_{\vec{k}}]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Portanto, $\delta\theta_{\vec{k}} = i[G(\delta\theta), a_{\vec{k}}]$. A solução para G é análoga a solução para (3.15), com a diferença que agora se deve ter uma integral sobre $d^3\vec{k}$ de forma a eliminar o delta na relação de comutação canônica para $a_{\vec{k}}$ e $a_{\vec{k}}^\dagger$, de onde se encontra $G(\delta\theta) = \int d^3\vec{k} i\delta\theta_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger$. Todavia, U deve ser unitário, e isto é garantido se G for hermitiana. Este objetivo é alcançado acrescentando $-i \int d^3\vec{k} \delta\theta_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}}$ à definição de G :

$$G(\theta) = -i \int d^3\vec{k} (\theta_{\vec{k}}^* a_{\vec{k}} - \theta_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger). \quad (3.24)$$

De modo que se fica com

$$|0(\theta)\rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^3 \vec{k} |\theta_{\vec{k}}|^2 \right] \exp \left[- \int d^3 k (\theta_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger) \right] |0\rangle. \quad (3.25)$$

O número de quantas com momento $\vec{k}$ é

$$\langle 0(\theta) | a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} | 0(\theta) \rangle = \langle 0(\theta) | (\alpha_{\vec{k}}^\dagger - \theta_{\vec{k}}) (\alpha_{\vec{k}} - \theta_{\vec{k}}) | 0(\theta) \rangle = |\theta_{\vec{k}}|^2. \quad (3.26)$$

Considere agora a projeção de $|0(\theta)\rangle$ em $|0\rangle$, a qual é obtida de (3.25):

$$\begin{aligned} \langle 0 | 0(\theta) \rangle &= \langle 0 | \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^3 \vec{k} |\theta_{\vec{k}}|^2 \right] \exp \left[- \int d^3 k (\theta_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger) \right] | 0 \rangle \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^3 \vec{k} |\theta_{\vec{k}}|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Observe que se acontecer $\int d^3 \vec{k} |\theta_{\vec{k}}|^2 = \infty$, então as duas representações são não-equivalentes. Uma situação exemplo onde isto ocorre é $\theta_{\vec{k}} = \theta \delta(\vec{k})$, neste caso, a condensação é homogênea, ou seja, a distribuição de condensados e bosões é uniforme. Para esta situação, tem-se

$$\int d^3 \vec{k} |\theta_{\vec{k}}|^2 = \theta^2 \delta(\vec{k}) \Big|_{\vec{k}=0} = \infty, \quad (3.28)$$

a qual é infinita, no limite de volume infinito ($V \rightarrow \infty$), uma vez que a delta é $\delta(\vec{k}) = (2\pi)^{-3} \int d^3 x e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = (2\pi)^{-3} V$.

Finalmente, a equação (3.20) define uma transformação canônica não unitária, pois uma atuação de $U(\theta)$ no vácuo leva a um estado fora do espaço de Hilbert original. Assim, os espaços $\mathcal{H}[a]$ e $H[\alpha(\theta)]$ são ortogonais, e as representações associadas à $\mathcal{H}[a]$ e à $H[\alpha(\theta)]$ são ditas unitariamente não equivalentes.

Observe que o número total de partículas $a_{\vec{k}}$, $N = \int d^3 \vec{k} n_{\vec{k}}$, no estado $|0(\theta)\rangle$ é infinito, contudo a densidade permanece finita

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{V} \int d^3 \vec{k} |\theta_{\vec{k}}|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \theta^2. \quad (3.29)$$

Além disso, pode-se escrever a translação bosônica a nível de campos como

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\rho}(x) + f(x), \quad (3.30)$$

a qual ainda é uma transformação canônica. Entretanto, a transformação acima é mais geral, pois é possível incluir casos em que $f(x)$ não admite transformada de Fourier, o que permite a descrição de condensados não-homogêneos. Ao leitor interessado em conhecer outro exemplo de transformação unitariamente não equivalente, indica-se o apêndice

3.6 EXEMPLO DE CÁLCULO POR AUTO-CONSISTÊNCIA

3.6.1 Cálculo por auto-consistência utilizando a translação bosônica

Ir-se-á exemplificar o método de auto-consistência utilizando da translação bosônica. Para tal, considere a hamiltoniana para o modelo de van Hove⁸:

$$H = \int d^3\vec{k} \left[\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \nu_{\vec{k}} (a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger) \right], \quad (3.31)$$

onde devido à exigência que H seja hermitiano, tem-se $\omega_{\vec{k}}$ e $\nu_{\vec{k}}$ sendo reais. $a_{\vec{k}}$ é um operador bosônico, de modo que satisfaz as relações de comutação

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{p}), \quad (3.32)$$

com todas as demais relações nula. O modelo somente apresenta invariância por translações se $\nu_{\vec{k}} = c\delta(\vec{k})$, sendo c um número real. O estado de vácuo é denotado por $|0\rangle$, pertencendo ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}[a]$ onde

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0, \quad (3.33)$$

de tal modo que $\mathcal{H}[a]$ é uma representação irredutível das relações de comutação canônicas. Entretanto, uma vez que a hamiltoniana não se apresenta na forma livre, claramente o operador $a_{\vec{k}}$ não está associado a um estado físico. Lembrando, o campo físico ou assintótico como entendido neste texto será considerado livre, assim o operador hamiltoniano que o descreve, deve ser o de um campo livre a menos de isomorfismos, quando isso não ocorrer, considera-se que não se tem um campo físico.

Todavia, existe uma representação onde a hamiltoniana assume a forma:

$$H = \int d^3\vec{k} E_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + W_0, \quad (3.34)$$

onde $\alpha_{\vec{k}}$ satisfaz a relação de comutação

$$[\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{l}}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{l}), \quad (3.35)$$

com todas as demais relações de comutação nulas. A hamiltoniana (3.34) pode ser obtida por meio de uma translação bosônica:

$$\alpha_{\vec{k}} = a_{\vec{k}} + \theta_{\vec{k}}, \quad (3.36)$$

a qual, quando substituída em (3.31), leva à

⁸Este modelo foi apresentado por van Hove em seu trabalho [24]. Ele descreve um campo escalar neutro com interação escalar infinita, com fontes pontuais fixas (funções delta de Dirac). Ele é relevante por apresentar estados estacionários com soluções analíticas. Desta forma, permitiu investigar os seguintes problemas: a origem das divergências que são inevitavelmente trazidas quando a interação é tratada como uma perturbação; e o comportamento da solução exata frente a solução obtida a partir do método da perturbação auxiliado pela técnica de renormalização para descartar as divergências.

O seu principal resultado foi demonstrar que a origem das divergências se deve ao fato dos estados estacionários dos campos interagentes não serem combinações lineares dos estados associados aos campos livres. Portanto, estarão definidos em espaços de Hilbert ortogonais.

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3\vec{k} \left[\omega_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger - \theta_{\vec{k}}^*) (\alpha_{\vec{k}} - \theta_{\vec{k}}) + \nu_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}} - \theta_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}^\dagger - \theta_{\vec{k}}^*) \right] \\
&= \int d^3\vec{k} \left[\omega_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}}^* \theta_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger \theta_{\vec{k}} - s \omega_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}}^* \alpha_{\vec{k}} + \nu_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \nu_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger - \nu_{\vec{k}} (\theta_{\vec{k}} + \theta_{\vec{k}}^*) \right]. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

É possível ver que a expressão (3.37) assume a forma de uma hamiltoniana livre se:

$$(-\omega_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}} + \nu_{\vec{k}}) \alpha_{\vec{k}}^\dagger = 0 \quad (3.38)$$

e

$$(-\omega_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}}^* + \nu_{\vec{k}}) \alpha_{\vec{k}} = 0, \quad (3.39)$$

cujas soluções são

$$\theta_{\vec{k}} = \frac{\nu_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}}}, \text{ para } \omega_{\vec{k}} \neq 0, \forall \vec{k}. \quad (3.40)$$

Portanto,

$$H = \int d^3\vec{k} \left(\omega_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}}^2 - 2\nu_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}} \right), \quad (3.41)$$

ou, simplesmente,

$$H = \int d^3\vec{k} E_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + W_0, \quad (3.42)$$

onde $E_{\vec{k}} = \omega_{\vec{k}}$ e $W_0 = -\int d^3\vec{k} \nu_{\vec{k}}^2 / \omega_{\vec{k}}$ para $\omega_{\vec{k}} \neq 0, \forall \vec{k}$. Finalmente, (3.36) é um exemplo de mapa dinâmico, onde $\alpha_{\vec{k}}$ é o operador físico, enquanto $a_{\vec{k}}$ é o operador de Heisenberg. Este exemplo ilustra o método de auto-consistência.

3.7 REARRANJO DINÂMICO DE SIMETRIA

Considere que as equações de campo de Heisenberg são invariantes sob algum grupo G de transformações de $\phi_H(x)$:

$$\phi_H(x) \rightarrow \phi'_H(x) = g[\phi_H(x)], \quad (3.43)$$

com $g \in G$. A simetria é espontaneamente quebrada quando o estado de vácuo no espaço de Fock $\mathcal{H}$ não é invariante sobre G , mas somente sob seus subgrupos [12, 13, 21, 22].

Por outro lado, quando ϕ_H é transformado como em (3.43), a equação (3.4) fornece:

$$\phi_{in}(x) \rightarrow \phi'_{in}(x) = g'[\phi_{in}(x)], \quad (3.44)$$

com g' pertencendo a algum grupo de transformações G' tal que

$$g[\phi_H(x)] = F[g'[\phi_{in}(x)]]. \quad (3.45)$$

Quando a simetria não está quebrada, tem-se $G' = G$. Entretanto, quando a simetria é espontaneamente quebrada, tem-se $G' \neq G$, com G' sendo o grupo de contração de G [27]. Uma vez que G é o grupo de invariância da dinâmica, a equação (3.4) exige que G' seja o grupo sob o qual as equações de campo livre sejam invariantes, ou seja, $\phi'_{in}(x)$ é uma solução da equação (3.2).

Agora, sendo (3.4) uma igualdade fraca, tem-se que G' depende da escolha do espaço de Fock $\mathcal{H}_0$ entre os espaços de estados unitariamente não equivalentes fisicamente realizáveis. Portanto, encontra-se que a simetria original da dinâmica pode se manifestar como diferentes grupos de simetria para os campos $\phi_{in}(x)$, dependendo das diferentes escolhas do espaço de estados físico. Uma vez que este processo está conectado pelas equações dinâmicas (3.1), ele é chamado de rearranjo dinâmico de simetria [12, 13].

Em resumo, diferentes padrões de ordenamento podem ser entendidos como diferentes manifestações da mesma invariância dinâmica básica. A descoberta do processo de rearranjo dinâmico de simetria leva a um entendimento unificado da geração dinâmica de muitos padrões de ordenamentos observados. Este é o fenômeno de geração dinâmica de ordem. A contração do grupo de simetria é a estrutura matemática controlando o rearranjo dinâmico de simetria [27].

Pode-se perguntar, agora, quem são os transportadores da informação de ordenamento entre os constituintes elementares do sistema e como as correlações de longo alcance e a coerência observada nos padrões de ordenamento são geradas e sustentadas. A resposta está no fato de que QES⁹ implica no aparecimento de partículas bosônicas [28–30], os chamados modos ou quantas de Nambu-Goldstone. Eles se manifestam como uma correlação de longo alcance e assim são responsáveis pelas mencionadas mudanças de escala, do microscópico para o macroscópico. A condensação bosônica coerente dos modos de Nambu-Goldstone se torna então o mecanismo pelo qual ordem é gerada.

Quando campos de calibre estão presentes, ou seja, em quebras de simetrias locais, os modos de Nambu-Goldstone não aparecem no espectro de partículas físicas. Basicamente, isto ocorre devido a existência de ghosts que irão contribuir para a matriz de espalhamento cancelando as contribuições dos modos de Nambu-Goldstone. Quando discutida a QES de simetria local para $U(1)$, será possível ver que determinados mapas dinâmicos contribuem com termos da forma $\chi_{in} - b_{in}$, bóson e ghost respectivamente, o que ilustrará a ideia apresentada.

⁹Quebra espontânea de simetria.

4 PRESCRIÇÃO ϵ : MODELO INVARIANTE SOB TRANSLAÇÃO GLOBAL

Neste capítulo, ir-se-á introduzir a primeira parte da prescrição ϵ . Esta dar-se-á por meio de um simples modelo, o qual permite constatar de maneira clara como diferentes soluções podem ser distinguidas entre si pelo uso do processo de limite denominado de prescrição ϵ .

4.1 CASO CONTÍNUO

Dar-se-á início ao estudo proposto no contexto de sistemas contínuos. A lagrangiana para o nosso modelo inicial é simplesmente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x), \quad (4.1)$$

onde $\varphi(x)$ é um campo escalar real sem massa. Esta lagrangiana é claramente invariante pela transformação

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \lambda, \quad (4.2)$$

onde λ é uma constante, e deste modo é possível visualizar esta transformação como uma translação global de campo.

Note, porém, que esta não é uma simetria do vácuo. Assim, $\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = \text{const} \neq 0$ corresponde à solução assimétrica do modelo (solução com quebra espontânea de simetria, QES), onde a constante está relacionada ao parâmetro de transformação λ , enquanto $\langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0$ corresponde a solução simétrica.

Agora, apresentar-se-á como a informação a respeito da quebra QES deve ser incorporada na definição do funcional gerador. Conforme a definição usual, o funcional gerador para as funções de Green é dado por

$$Z[J] = N^{-1} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + J(x)\varphi(x)) \right], \quad (4.3)$$

onde

$$N = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L} \right]. \quad (4.4)$$

Como usual, o termo de fonte $J(x)$ foi adicionado a ação e denota a fonte do campo $\varphi(x)$. Assim, após os cálculos, a fonte deve ser feita igual a zero de modo a restaurar a dinâmica original do modelo, dada pela lagrangiana (4.1). Entretanto, observe que o papel desempenhado por J não é o de um simples mecanismo matemático. Na verdade, sua função é descrever as operações físicas concretas do nosso sistema. A fonte carrega informação a respeito da forma do campo φ interagindo com um dispositivo externo descrito pelo campo J , o campo de fonte. Uma configuração experimental diferente, implicando uma fonte diferente, J_1 , seria então descrita por um funcional gerador diferente, $Z[J_1]$. Todavia, observáveis não podem depender do arranjo experimental específico usado para a preparação do sistema. Em outras palavras, não podem depender do termo de fonte usado em Z . Por isso, deve-se fazer $J = 0$ após os cálculos.

Por outro lado, a utilidade formal do termo de fonte reside no fato de que operando com a derivada funcional com respeito a J no funcional gerador, obtém-se a média funcional (ou valor esperado) do campo

$\langle \varphi \rangle$, o que na abordagem funcional corresponde ao valor esperado de vácuo do operador de campo $\hat{\varphi}$,

$$\langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle \equiv \langle \varphi(x) \rangle = \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J] \right)_{J=0}. \quad (4.5)$$

Derivadas de ordem mais alta irão fornecer as funções de correlação de vários pontos.

O gerador funcional pode ser calculado através da abordagem padrão, isto é, expande-se o campo φ em relação aos pontos (soluções) que mais contribuem para o funcional gerador $Z[J]$, ou seja, aqueles que mantêm a fase estacionária. A condição para a fase estacionária δL , com $L = \int d^3x (\mathcal{L} + J\varphi)$, negligenciando termos de superfície, é

$$\partial^2 \varphi(x) = J(x), \quad (4.6)$$

onde $(\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu)$. A equação (4.6) expressa o fato de que $J(x)$ é a fonte do campo φ . Além disso, observe que esta expressão apresenta invariância pela transformação de translação, deste modo o conjunto de pontos estacionários formam uma reta no espaço de $\varphi(x)$. Infelizmente, a contribuição de todos pontos desta reta torna o gerador funcional $Z[J]$ indeterminado, como ver-se-á abaixo.

A solução formal (solução para equação particular) para esta expressão é dada por

$$\varphi_0(x) = \int d^4y G(x, y) J(y), \quad (4.7)$$

com a função de Green $G(x, y) = \langle x | 1/\partial^2 | y \rangle$ e $\partial^2 G(x, y) = \delta^4(x - y)$. $\varphi_0(x)$ denota uma solução clássica para a equação de movimento. Agora, é necessário definir alguma prescrição de forma a evitar a singularidade da função de Green, tal como, por exemplo, a prescrição de Feymann. Assim, pode-se expandir $\varphi(x)$ em torno de $\varphi_0(x)$, por meio da expressão

$$\varphi(x) = \varphi'(x) + \varphi_0(x), \quad (4.8)$$

onde esta expansão pode ser tratada como uma mudança de variáveis, que nos leva ao funcional gerador

$$Z[J] = \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right], \quad (4.9)$$

a dedução deste funcional gerador pode ser encontrada no apêndice E culminando na equação (E.4). Note que isto não muda o gerador funcional uma vez que equivale a uma mudança das variáveis de integração (observe que $\mathcal{D}\varphi = \mathcal{D}\varphi'$). Além disso, o funcional gerador nesta forma se apresenta invariante pela transformação de translação (4.2). Usando então (4.5) se pode calcular $\langle \varphi(x) \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle &= \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J] \right)_{J=0} \\ &= \left\{ \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right] \int d^4y G(x, y) J(y) \right\} \Big|_{J=0} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Assim, foi obtido a solução simétrica para o valor esperado de vácuo. A expressão (4.9) não nos permite obter a condição de quebra de simetria ($\langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle \neq 0$).

A questão que apresentar-se-á agora é que o funcional gerador definido pela expressão (4.3) é ambíguo, uma vez que a mesma expressão permite obter um resultado diferente de (4.10) dependendo de como o proce-

dimento de cálculo é feito. Para exemplificar tal fato, tome-se uma ordem diferente, isto é, comece realizando a mudança de variáveis (4.2) (a transformação de translação) no funcional gerador, e depois expanda $\varphi(x)$ em termos das soluções estacionárias (4.8). O resultado final não deveria depender das mudanças das variáveis de integração, entretanto note que agora obtém-se

$$Z[J] = \exp \left[i\lambda \int d^4x J(x) \right] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right], \quad (4.11)$$

o que difere de (4.10) e leva ao resultado

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle &= \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J] \right)_{J=0} \\ &= \left\{ \exp \left[i\lambda \int d^4x J(x) \right] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right] \int d^4y G(x, y) J(y) \right\} \Big|_{J=0} \\ &\quad + \lambda \left\{ \exp \left[i\lambda \int d^4x J(x) \right] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right] \right\} \Big|_{J=0} \\ &= \lambda. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Conclui-se, então, que a ambiguidade no resultado surge devido à invariância da ação sob transformações contínuas dos campos, as quais implicam uma extensão contínua do domínio de “ponto estacionário” no diagrama de fase de $Z[J]$ fazendo, assim, $Z[J]$ indeterminado.

Isso sugere que para se eliminar esta ambiguidade, precisa-se introduzir um termo que quebre a simetria reduzindo o domínio a um único ponto estacionário:

$$\frac{i\epsilon}{2}(\varphi - v)^2. \quad (4.13)$$

Ao final desta seção se estabelece a relação entre o termo acima e a o termo $i\epsilon$ usual, porém se pode adiantar que eles são basicamente análogos, com o termo acima realizando o papel do potencial que perturba o sistema, portanto atuando como um “trigger” que leva a soluções assimétricas. Agora, o termo (4.13) introduz no funcional gerador a informação a respeito da condição de contorno selecionada, isto é, a informação associada à solução de interesse (neste caso a solução simétrica ou assimétrica):

$$Z[J] = N^{-1} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L} + J\varphi + \frac{i\epsilon}{2}(\varphi - v)^2 \right) \right], \quad (4.14)$$

onde

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L} + \frac{i\epsilon}{2}(\varphi - v)^2 \right) \right], \quad (4.15)$$

v é uma constante, e o termo de quebra de simetria é o ϵ -termo. Toma-se o limite de ϵ indo a 0 ao final dos cálculos. Neste caso, tem-se que a condição de fase estacionária junto da lagrangiana

$$\int d^3x \left(\mathcal{L} + J\varphi + \frac{i\epsilon}{2}(\varphi - v)^2 \right), \quad (4.16)$$

leva à equação de ponto estacionária:

$$(\partial^2 - i\epsilon)\varphi(x) = J(x) - i\epsilon v, \quad (4.17)$$

que não é invariante pela transformação (4.2). Assim, o conjunto de pontos (soluções da equação de movimento) que levam à fase estacionária, contém apenas um único ponto, cuja posição depende de v . Sua solução formal (solução para equação particular) é dada por

$$\varphi_0(x) = v + \int d^4y G(x, y) J(y), \quad (4.18)$$

com a função de Green agora sendo dada por $G(x, y) = \langle 0 | \frac{1}{\partial^2 - i\epsilon} | 0 \rangle$ e $(\partial^2 - i\epsilon)G(x, y) = \delta^4(x - y)$.

O apêndice E contém algumas equações que podem auxiliar nesta etapa. Assim, com o auxílio deste se procede de maneira análoga a feita anteriormente, isto é, expandido-se $\varphi(x)$ em torno de $\varphi_0(x)$ e se utilizando da transformação de translação, encontra-se:

$$Z[J] = \exp \left[i v \int d^4x J(x) \right] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right], \quad (4.19)$$

o que leva à

$$\langle 0 | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle = \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J] \right)_{J=0} = v. \quad (4.20)$$

Faça-se agora o caso oposto, isto é, utilize-se da transformação de translação e depois se faça a expansão em torno de $\varphi_0(x)$. Observe que neste caso a transformação realizada induz em $Z[J]$ o termo $[i\lambda \int d^4x J]$ e ao mesmo tempo v é substituído por $v - \lambda$. Fazendo então a expansão conclui-se que $Z[J]$ não muda sob $\varphi \rightarrow \varphi + \lambda$.¹

Finalmente, encontra-se

$$\langle \varphi(x) \rangle = v, \quad (4.22)$$

o que fornece a solução simétrica quando $v = 0$ e assimétrica quando $v \neq 0$. Além disso, a ambiguidade foi removida.

A prescrição ϵ -termo leva também à correta regularização da função de Green, que é de fato o propagador de Feynman quando $\epsilon > 0$. O papel do termo ϵ é especificar a condição de quebra de simetria sob a qual se deseja computar a integração funcional. Uma vez que ele contribui para o termo de fonte (4.17), pode ser interpretado como uma descrição da preparação do sistema; mais ainda, ele representa a interação do sistema com o processo de medida, o que por sua vez leva o sistema a uma dada representação não equivalente. Finalmente, pode-se vê-lo como um pequeno campo externo que atua como “trigger” da quebra de simetria. Se a dinâmica do sistema permite a quebra de simetria, a solução assimétrica precisa sobreviver ao desligamento do termo ϵ .

¹Após a transformação de translação ter-se-á que $Z[J]$ será dado por

$$Z[J] = N^{-1} \exp \left[i\lambda \int d^4x J(x) \right] \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L} + J\varphi + \frac{i\epsilon}{2} [\varphi - (v - \lambda)]^2 \right) \right], \quad (4.21)$$

onde se defini um $v' = v - \lambda$ e se segue com o procedimento anterior. Neste caso, ter-se-á um resultado semelhante, apenas havendo a troca de v por v' . Observe que neste caso o denominador do gerador funcional também sente os efeitos da translação, pois não é mais invariante. Ao final do cálculo, troca-se v' por sua definição.

4.2 CASO EM REDE

Procede-se, agora, estudando a contraparte deste modelo traduzido para o contexto de uma rede euclidiana. Dada a definição (2.8) de diferença finita em rede², a ação euclidiana dele, em rede pode ser escrita como

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2. \quad (4.23)$$

A invariância da ação sob a translação

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \lambda \quad (4.24)$$

é constatada a partir definição da operação de diferença finita,

$$\Delta_\mu^f \phi(x) \rightarrow \Delta_\mu^f [\phi(x) + \lambda] = [\phi(x + a\hat{\mu}) + \lambda - \phi(x) - \lambda] = \Delta_\mu^f \phi(x). \quad (4.25)$$

O funcional gerador para este modelo é dado por

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi(x) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 - \sum_x J(x) \phi(x) \right), \quad (4.26)$$

com

$$N = \int \prod_x d\phi(x) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 \right). \quad (4.27)$$

O protocolo, agora, a seguir é análogo ao feito no caso contínuo: determina-se a solução clássica do modelo, realização a expansão em torno da solução clássica (D.3) e, em seguida, implementa-se a translação (4.24). O resultado obtido foi

$$\langle \phi(z) \rangle = 0. \quad (4.28)$$

Então, troca-se a ordem das operações, ou seja, faz-se primeiro a translação (4.24), seguido da expansão em torno da solução clássica (D.3). Neste caso, encontra-se

$$\langle \phi(z) \rangle = -\lambda \quad (4.29)$$

Portanto, de maneira análoga ao que ocorre no contínuo, aqui também se tem uma ambiguidade nos resultados. Evidentemente, então, pode-se tentar fazer uso do termo ϵ introduzido anteriormente para sanar tais problemas. Vamos, assim, verificar como isso dar-se-á e o que ocorre. Para tal, tem-se que agora o gerador funcional é dado por

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 - \sum_x J(x) \phi(x) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x (\phi(x) - v)^2 \right\}, \quad (4.30)$$

com

²Utiliza-se aqui uma versão sem o parâmetro a .

$$N = \int \prod_x d\phi(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x \phi^2(x) + i\epsilon \sum_x v\phi(x) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x v^2 \right\} \quad (4.31)$$

e

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 + \sum_x J(x)\phi(x) + \frac{i\epsilon}{2} \sum_x \phi^2(x) - i\epsilon \sum_x v\phi(x) + \frac{i\epsilon}{2} \sum_x v^2. \quad (4.32)$$

Uma vez que a ação mudou, a solução clássica da equação de movimento também sofreu alterações, e agora é dada pela equação (D.14). Por demais, a técnica é análoga, entretanto, também é necessário neste caso expandir N (4.31) em termos da solução clássica da sua equação de movimento.

Finalmente, encontra-se que a abordagem do termo ϵ também resolve no contexto de redes o problema de ambiguidade gerada pelo funcional gerador definido em (4.26). Além disso, toda a interpretação do papel do termo ϵ apresentada no caso contínuo se aplica aqui.

No final, isto fortalece a necessidade do termo ϵ numa discussão a respeito de quebra espontânea de simetria. Para mais detalhes do procedimento de cálculo na versão em rede, pode-se consultar o apêndice D.

No próximo capítulo, apresentar-se-á mais um modelo onde o termo ϵ é empregado de forma a obter os resultados adequados, e depois prosseguir-se-á com sua adaptação à rede.

5 PRESCRIÇÃO ϵ : MODELO INVARIANTE SOB TRANSFORMAÇÃO $U(1)$ GLOBAL

Neste capítulo, tratar-se-á de um modelo consistindo de um campo escalar complexo $\phi(x)$, com a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^*(x) \partial_\mu \phi(x) + m^2 |\phi(x)|^2 + U(\phi), \quad (5.1)$$

onde U é um terminal de potencial, invariante sob transformações globais de fase (simetria $U(1)$)

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x), \quad (5.2)$$

sendo α uma constante arbitrária real. Assim, a lagrangiana está sujeita à condição

$$\mathcal{L}[e^{i\alpha} \phi(x)] = \mathcal{L}[\phi(x)]. \quad (5.3)$$

O campo $\phi(x)$ é escrito como

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(x) + i\chi(x)], \quad (5.4)$$

e é assumido QES, isto é,

$$\tilde{v} \equiv \langle \psi(x) \rangle = \sqrt{2} \langle \phi(x) \rangle \neq 0. \quad (5.5)$$

Esta quantidade $\tilde{v}$ é chamada de parâmetro de ordem renormalizado. Diferentemente do caso anterior, o gerador funcional não apresenta a ambiguidade discutida. Todavia, é possível demonstrar que não é possível obter as soluções assimétricas sem a introdução do termo ϵ^1 . A análise que se segue está dividida em duas seções, na primeira, discute-se a respeito da versão contínua e, na segunda, discute-se sobre a versão em rede. As informações qualitativas apresentadas acima independem da escolha entre contínuo ou rede, chamando apenas a atenção para o fato de que na rede não é usual apresentar a densidade de lagrangiana, mas sim a ação e algumas definições precisam ser levemente modificadas, como o processo de “integração”, o domínio da variáveis, entre outras.

5.1 CASO CONTÍNUO

Para o caso contínuo, tem-se que o gerador funcional é definido como:

$$Z[J, J^*] = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + J^* \phi + J \phi^* + i\epsilon |\phi - v|^2) \right], \quad (5.6)$$

¹Para ver como o termo ϵ cria a quebra espontânea de simetria, inicia-se desconsiderando o termo ϵ e realizando a mudança de variáveis $\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x)$ em $Z[J^*, J]$. O resultado é $Z[e^{i\alpha} J^*, e^{-i\alpha} J]$. Portanto, quando $Z[J^*, J]$ é bem definido, $Z[J^*, J]$ precisa ser igual $Z[e^{i\alpha} J^*, e^{-i\alpha} J]$, implicando que $Z[J^*, J]$ deva depender de J e J^* somente através da combinação $J^* J$. Isto significa que a simetria por transformações globais de fase não é quebrada. Deste modo, é impossível haver QES sem a definição do termo ϵ .

Uma vez que a introdução de v em $W[J^*, J]$ substitui J e J^* por $J - i\epsilon v$ e $J^* - i\epsilon v^*$, vê-se que $W[J^*, J]$ depende de J, J^*, v e v^* somente através da combinação $(J - i\epsilon v)(J^* - i\epsilon v^*)$. Uma quebra espontânea da simetria por transformações globais de fase é possível devido à existência de termos como Jv^* e J^*v em $(J - i\epsilon v)(J^* - i\epsilon v^*)$.

com

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + i\epsilon |\phi - v|^2) \right]. \quad (5.7)$$

Em geral, v pode ser um número complexo, todavia, aqui por simplicidade assumir-se-á como sendo uma constante real. O termo ϵ não é invariante pela transformação de fase considerada. E como usual, o limite $\epsilon \rightarrow 0$ é tomado ao final dos cálculos.

É importante, agora, ressaltar que esta não é a única escolha possível para o termo ϵ . Em geral, qualquer termo ϵ que quebre a simetria da lagrangiana pode ser usado. Para este modelo, a introdução do termo ϵ é equivalente à substituição de J por $J - i\epsilon v$ onde v é uma constante. Contudo, este procedimento de deslocamento da fonte J não apresenta um caráter tão geral quanto a prescrição ϵ . Isto ocorre pois o método de deslocamento não pode ser aplicado, por exemplo, quando o campo ϕ é fermiônico, uma vez que neste caso a fonte é uma quantidade Grassmaniana e a constante de deslocamento, então, seria um número Grassmaniano.

Define-se a notação:

$$\langle F[\phi(x)] \rangle_{J,\epsilon} = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* F[\phi] \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L} + J^* \phi + J \phi^* + i\epsilon |\phi - v|^2) \right], \quad (5.8)$$

com $\langle F[\phi] \rangle_\epsilon \equiv \langle F[\phi] \rangle_{J,\epsilon} |_{J=0}$ e $\langle F[\phi] \rangle \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle F[\phi] \rangle_\epsilon$. Observe que no limite $\epsilon \rightarrow 0$, $\langle F[\phi(x)] \rangle_\epsilon$ se reduz ao valor esperado de vácuo do produto ordenado temporalmente dos ϕ correspondentes a $F[\phi]$. Além disso, também, define-se:

$$J(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [J_1(x) + iJ_2(x)], \quad (5.9)$$

$$\rho(x) \equiv \psi(x) - \langle \psi(x) \rangle_\epsilon, \quad (5.10)$$

onde $J_1(x)$ desempenha o papel de fonte de $\psi(x)$ e $J_2(x)$ desempenha o papel de fonte de χ . Agora, dar-se-á início ao cálculo das identidades de Ward-Takahashi de interesse. Utilizando-as, apresentar-se-á também, mais uma vez, o porquê da relevância do termo ϵ . As identidades seguem da propriedade de invariância de (5.3). Para tal, inicia-se fazendo a mudança de variáveis (5.2) no numerador de (5.6):

$$Z[J, J^*]_\alpha = N \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L} + J^* e^{i\alpha} \phi + J e^{-i\alpha} \phi^* + i\epsilon (e^{i\alpha} \phi - v)(e^{-i\alpha} \phi^* - v^*) \right) \right]. \quad (5.11)$$

Uma vez que a integral deve permanecer inalterada pela mudança de variáveis, precisa-se ter $\frac{\partial Z[J]}{\partial \alpha} = 0$ para todo α , de onde então se obtém

$$\frac{\partial Z[J]}{\partial \alpha} = \int d^4x \langle i(J^*(x)\phi(x) - J(x)\phi^*(x)) + \epsilon(v^*\phi(x) - v\phi^*(x)) \rangle_{\epsilon, J} = 0. \quad (5.12)$$

Assim, tome a derivada funcional de (5.12) em relação a J^* e faça os termos de fonte iguais a zero:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta}{\delta J^*(z)} \int d^4x \langle i(J^*(x)\phi(x) - J(x)\phi^*(x)) + \epsilon(v^*\phi(x) - v\phi^*(x)) \rangle_{\epsilon, J} \Big|_{J=J^*=0} \\
&= \int d^4x \left\langle \phi(x)\delta(x-z) + [i(J^*(x)\phi(x)J(x)\phi^*(x)) + \epsilon(v^*\phi(x) - v\phi^*(x))] \right. \\
&\quad \left. \times \left(i \int d^4y \phi(y) \right) \right\rangle_{\epsilon, J} \Big|_{J=J^*=0} \\
&= \langle \phi(z) \rangle_{\epsilon} + \epsilon \int d^4x \langle (v^*\phi(x) - v\phi^*(x))\phi(z) \rangle_{\epsilon}, \tag{5.13}
\end{aligned}$$

ou, simplesmente,

$$\langle \phi(z) \rangle_{\epsilon} = -\epsilon \int d^4x \langle (v^*\phi(x) - v\phi^*(x))\phi(z) \rangle_{\epsilon}. \tag{5.14}$$

Note que se não fosse introduzido o termo ϵ em (5.6), a expressão (5.14) teria nos fornecido o resultado $\langle \phi(x) \rangle = 0$, e a possibilidade de quebra espontânea de simetria não teria surgido. Aqui, no entanto, tem-se uma situação diferente: se a integral (5.14) permanecer finita no limite $\epsilon \rightarrow 0$, obtém-se a solução simétrica, por outro lado se ela se comporta como $1/\epsilon$ no limite, a quebra espontânea de simetria ocorre.

Substituindo (5.4) e (5.9) em (5.12) e usando

$$J^*(x)\phi(x) - J(x)\phi^*(x) = i(J_1(x)\chi(x) - J_2(x)\psi(x)) \tag{5.15}$$

$$\tag{5.16}$$

e

$$v^*\phi(x) - v\phi^*(x) = i\sqrt{2}v\chi(x), \tag{5.17}$$

tem-se

$$\int d^4x \left\langle i(J_1(x)\chi(x) - J_2(x)\psi(x)) + \sqrt{2}\epsilon v\chi(x) \right\rangle_{\epsilon, J} = 0. \tag{5.18}$$

Enquanto a substituição de (5.4) e (5.9) no gerador funcional (5.6) leva a

$$\begin{aligned}
Z[J, J^*] &= N \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\chi \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L} + J_1(x)\psi(x) + J_2(x)\chi(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i\epsilon \left(\psi^2(x) + \chi^2(x) - v \frac{\psi(x)}{\sqrt{2}} + v^2 \right) \right] \right\}, \tag{5.19}
\end{aligned}$$

onde se utilizou

$$J^*(x)\phi(x) + J(x)\phi^*(x) = J_1\psi(x) + J_2(x)\chi(x) \quad (5.20)$$

$$(\phi(x) - v)(\phi^*(x) - v) = \psi^2(x) + \chi^2(x) - v\frac{\psi(x)}{\sqrt{2}} + v^2. \quad (5.21)$$

Retornando às identidades de Ward-Takahashi, continua-se tomando a derivada funcional de (5.18) em relação a J_2 , o que fornece

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta}{\delta J_2(z)} \int d^4x \left\langle i(J_1(x)\chi(x) - J_2(x)\psi(x)) + \sqrt{2}\epsilon v\chi(x) \right\rangle_{\epsilon, J} \Big|_{J_1=J_2=0} \\ &= \int d^4x \left\langle -i\psi(x)\delta(x-z) + (i(J_1(x)\chi(x) - J_2(x)\psi(x)) + \sqrt{2}\epsilon v\chi(x)) \left(\int d^4y i\chi(y)\delta(y-z) \right) \right\rangle_{\epsilon, J} \Big|_{J_1=J_2=0} \\ &= -\langle \psi(z) \rangle_\epsilon + \sqrt{2}\epsilon v \int d^4x \langle \chi(x)\chi(z) \rangle_\epsilon, \end{aligned} \quad (5.22)$$

ou, simplesmente,

$$\langle \phi(z) \rangle_\epsilon = \sqrt{2}\epsilon v \int d^4x \langle \chi(x)\chi(z) \rangle_\epsilon. \quad (5.23)$$

Agora, toma-se a derivada funcional de (5.18) em relação a J_2 e em seguida, em relação a J_1 :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta^2}{\delta J_1(m)\delta J_2(z)} \int d^4x \left\langle i(J_1(x)\chi(x) - J_2(x)\psi(x)) + \sqrt{2}\epsilon v\chi(x) \right\rangle_{\epsilon, J} \Big|_{J_1=J_2=0} \\ &= \int d^4x \left\langle [i\delta(x-m)\chi(x)] \int d^4y \chi(y)\delta(y-z) + \left[-i\psi(x)\delta(x-z) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (i(J_1(x)\chi(x) - J_2(x)\psi(x)) + \sqrt{2}\epsilon v\chi(x)) \left(\int d^4y i\chi(y)\delta(y-z) \right) \right] \left(\int d^4y i\psi(y)\delta(y-m) \right) \right\rangle_{\epsilon, J} \Big|_{J_1=J_2=0} \\ &= -\langle \chi(m)\chi(z) \rangle_\epsilon + \langle \psi(z)\psi(m) \rangle_\epsilon - \sqrt{2}\epsilon v \int d^4x \langle \chi(x)\chi(z)\psi(m) \rangle_\epsilon. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Utilizando (5.10), pode-se reescrever (5.24) como

$$\begin{aligned} 0 &= -\langle \chi(m)\chi(z) \rangle_\epsilon + \langle \rho(z)\rho(m) \rangle_\epsilon + \langle \rho(z) \rangle_\epsilon \langle \psi(m) \rangle_\epsilon + \langle \psi(z) \rangle_\epsilon \langle \rho(m) \rangle_\epsilon + \langle \psi(z) \rangle_\epsilon \langle \psi(m) \rangle_\epsilon \\ &\quad - \sqrt{2}\epsilon v \int d^4x \langle \chi(x)\chi(z)\rho(m) \rangle_\epsilon - \sqrt{2}\epsilon v \int d^4x \langle \chi(x)\chi(z) \rangle_\epsilon \langle \psi(m) \rangle_\epsilon \\ &= -\langle \chi(m)\chi(z) \rangle_\epsilon + \langle \rho(z)\rho(m) \rangle_\epsilon + \sqrt{2}\epsilon v \int d^4x \langle \chi(x)\chi(z) \rangle_\epsilon \langle \psi(m) \rangle_\epsilon \\ &\quad - \sqrt{2}\epsilon v \int d^4x \langle \chi(x)\chi(z)\rho(m) \rangle_\epsilon - \sqrt{2}\epsilon v \int d^4x \langle \chi(x)\chi(z) \rangle_\epsilon \langle \psi(m) \rangle_\epsilon. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Também foi utilizado o fato de $\langle \rho(x) \rangle_\epsilon = 0$, além da expressão (5.23). O resultado (5.2) ainda pode ser escrito como

$$\langle \rho(z)\rho(m) \rangle_\epsilon - \langle \chi(m)\chi(z) \rangle_\epsilon = \sqrt{2}\epsilon v \int d^4x \langle \chi(x)\chi(z)\rho(m) \rangle_\epsilon. \quad (5.26)$$

Finalmente, $\langle \chi(x) \rangle_\epsilon = 0$ devido à simetria sob a transformação $\chi \rightarrow -\chi$.

O significado da equação (5.23) se torna claro se a mesma for reescrita no espaço dos momentos. Para tal, introduza a transformada de Fourier da função de dois pontos por

$$\langle \chi(x)\chi(y) \rangle_\epsilon = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-y)} \Delta_\chi(\epsilon, p). \quad (5.27)$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$, $\Delta_\chi(\epsilon, 0)$ se reduz ao propagador não normalizado da partícula χ . O termo ϵ em Z gera a prescrição $i\epsilon$ para o propagador livre. Note que na presença de interação, novamente, o termo ϵ gera a prescrição $i\epsilon$, como pode ser visto a partir de considerações vindas de métodos perturbativos, entretanto não é possível excluir a possibilidade das interações substituírem $i\epsilon$ por $i\epsilon a_\chi$ no propagador completo, com a_χ sendo uma constante de renormalização de ϵ . Assim, $\Delta_\chi(\epsilon, p)$ terá a forma:

$$\Delta_\chi(\epsilon, p) = \frac{Z_\chi}{p^2 - m_\chi^2 + i\epsilon a_\chi} + \text{contribuições contínuas}, \quad (5.28)$$

onde Z_χ é a constante de renormalização para a função de onda do campo χ . Substituindo a equação (5.27) em (5.23), encontra-se

$$\langle \phi(z) \rangle_\epsilon = \sqrt{2} \frac{i}{(2\pi)^4} \epsilon v \int d^4x \int d^4p e^{-ip(x-y)} \Delta_\chi(\epsilon, p), \quad (5.29)$$

ou,

$$\langle \phi(z) \rangle_\epsilon = \sqrt{2} \frac{i}{(2\pi)^4} \epsilon v \int d^4p \Delta_\chi(\epsilon, p) e^{ipy} \int d^4x e^{-ipx} \quad (5.30)$$

e, portanto,

$$\langle \phi(z) \rangle_\epsilon = \sqrt{2} i \epsilon v \Delta_\chi(\epsilon, 0). \quad (5.31)$$

Definido, então,

$$\langle \psi(x) \rangle_\epsilon = \tilde{v}(\epsilon), \quad (5.32)$$

obté-m-se

$$\tilde{v}(\epsilon) = i\sqrt{2}\epsilon v \Delta_\chi(\epsilon, 0). \quad (5.33)$$

Observe, que esta solução é equivalente ao teorema de Goldstone, se

$$\tilde{v} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{v}(\epsilon) \quad (5.34)$$

não é nulo. Isto implica (junto de (5.28)) que $m_\chi^2 = 0$:

$$\tilde{v} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{v}(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i\sqrt{2}\epsilon v \frac{Z_\chi}{-m_\chi^2 + i\epsilon a_\chi} = \begin{cases} \sqrt{2} \frac{Z_\chi}{a_\chi} v, & \text{se } m_\chi = 0 \\ 0, & \text{se } m_\chi \neq 0 \end{cases}, \quad (5.35)$$

e

$$\tilde{v} = \sqrt{2}v \frac{Z_\chi}{a_\chi}. \quad (5.36)$$

Se $m_\chi^2 \neq 0$ (como mostrado acima) se conclui que $\tilde{v} = 0$, que é a solução simétrica. Isto não é nada mais que o Teorema de Goldstone: se a simetria é espontaneamente quebrada ($\tilde{v} \neq 0$), um modo não massivo existe. Este é o bóson de Nambu-Goldstone; uma vez que sua massa é nula, ele manifesta uma correlação de longo alcance. No presente caso do modelo do campo escalar complexo, o modo de Nambu-Goldstone é um campo elementar. Todavia, em outros modelos pode aparecer como um estado ligado, tal como os mágnons em ferromagnetismo [31].

A equação (5.35) mostra que v real implica $\tilde{v}$ real. É possível mostrar [32, 33] que

$$\frac{\partial}{\partial v} \langle \psi(x) \rangle_\epsilon = \sqrt{2}\epsilon \int d^4y \langle \rho(x)\rho(y) \rangle_\epsilon, \quad (5.37)$$

usando as equações (5.23) e (5.26). Como $m_\rho \neq 0$, tem-se da equação (5.37) que seu lado esquerdo é zero no limite de $\epsilon \rightarrow 0$ e, portanto, $\tilde{v}$ é independente de v . Isto é semelhante ao caso do ferromagnetismo, onde uma vez que um campo magnético externo é ligado, o sistema é magnetizado independentemente da força do campo externo. Além disso, quando v é assumido ser complexo, pode ser demonstrado [32, 33] que a fase de v determina a fase de $\tilde{v}$.

Define-se, agora, o propagador para o campo ρ no espaço de Fourier por

$$\langle \rho(x)\rho(y) \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-y)} \Delta_\rho(\epsilon, p), \quad (5.38)$$

onde $\Delta_\rho(\epsilon, p)$ tem uma estrutura similar a $\Delta_\chi(\epsilon, p)$, ver (5.28). Também é introduzido o apropriado vértice $\chi\chi\rho$ por meio de

$$\begin{aligned} \langle \chi(x)\chi(y)\rho(z) \rangle_\epsilon &= \frac{-1}{(2\pi)^8} \int d^4p d^4q d^4r \Delta_\chi(\epsilon, p) \Delta_\chi(\epsilon, q) \Delta_\rho(\epsilon, r) \Gamma_{\chi\chi\rho}(\epsilon; p, q, r) \\ &\times e^{-i(px+qy+rz)} \delta(p+q+r). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Substituindo (5.27), (5.38) e (5.39) em (5.26), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(z-m)} (\Delta_\rho(\epsilon, p) - \Delta_\chi(\epsilon, p)) &= -\sqrt{2}\epsilon v \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4x \int d^4p d^4q d^4r \\ \Delta_\chi(\epsilon, p) \Delta_\chi(\epsilon, q) \Delta_\rho(\epsilon, r) \Gamma_{\chi\chi\rho}(\epsilon; p, q, r) &\times e^{-i(px+qm+rz)} \delta(p+q+r) \end{aligned} \quad (5.40)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(z-m)} (\Delta_\rho(\epsilon, p) - \Delta_\chi(\epsilon, p)) &= -\sqrt{2}\epsilon v \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p d^4q d^4r \Delta_\chi(\epsilon, p) \Delta_\chi(\epsilon, q) \Delta_\rho(\epsilon, r) \\ &\times \Gamma_{\chi\chi\rho}(\epsilon; p, q, r) e^{-i(qm+rz)} \delta(p+q+r) \delta(p) \end{aligned} \quad (5.41)$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned}
& \int d^4 p e^{-ip(z-m)} (\Delta_\rho(\epsilon, p) - \Delta_\chi(\epsilon, p)) \\
&= \tilde{v}(\epsilon) \int d^4 q d^4 r \Delta_\chi(\epsilon, q) \Delta_\rho(\epsilon, r) \Gamma_{\chi\chi\rho}(\epsilon; 0, q, r) e^{-i(qm+rz)} \delta(q+r),
\end{aligned} \tag{5.42}$$

onde se utilizou (5.33). Fazendo a integral sobre q , trocando r por p se fica com

$$\int d^4 p e^{-ip(z-m)} (\Delta_\rho(\epsilon, p) - \Delta_\chi(\epsilon, p) - \tilde{v}(\epsilon) \Delta_\chi(\epsilon, -p) \Delta_\rho(\epsilon, p) \Gamma_{\chi\chi\rho}(\epsilon; 0, -p, p)) = 0. \tag{5.43}$$

Logo, tem-se

$$\tilde{v}(\epsilon) \Gamma_{\chi\chi\rho}(\epsilon; 0, -p, p) = \Delta_\chi^{-1}(\epsilon, p) - \Delta_\rho^{-1}(\epsilon, p). \tag{5.44}$$

Dois diferentes casos podem ser distinguidos:

1. $m_\rho^2 = 0$. Então, uma vez que $m_\chi^2 = 0$ também (assume-se $\tilde{v} \neq 0$), tem-se de (5.44)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_{\chi\chi\rho}(\epsilon; 0, -p, p) \Big|_{p^2=0} = 0.$$

Esta possibilidade não pode ser excluída sem especificar a Lagrangiana antes do requerimento de invariância (5.3). Um modelo com esta situação ocorre no campo escalar livre não massivo.

2. $m_\rho^2 \neq 0$. Neste caso (5.44) leva às seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\tilde{v} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta_\chi \Gamma_{\chi\chi\rho}(\epsilon; 0, -p, p) \Big|_{p^2=m_\rho^2} &= 1 \\
\tilde{v} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta_\rho \Gamma_{\chi\chi\rho}(\epsilon; 0, -p, p) \Big|_{p^2=0} &= -1
\end{aligned}$$

Assim, para este caso onde se tem um campo escalar complexo massivo, tem-se a segunda situação. O que finalmente leva ρ a ser instável devido ao acoplamento $\chi\chi\rho$.²

5.2 CASO EM REDE

Prossegue-se, agora, discutindo a contraparte em rede do modelo com simetria U(1) discutido na seção anterior.

A ação deste modelo é dada por

²O importante resultado, apresentado por [32], como consequência desta abordagem é que foi observado que a realização de uma expansão das funções de Green assimétricas em termos das funções de Green simétricas, leva à necessidade de que cada termo da expansão carregue uma potência de parâmetros assimétricos. Assim, a expansão seria uma série de potências em ϵv , tal que cada termo vai a zero no limite $\epsilon \rightarrow 0$, implicando que a expansão não faz sentido. Isto confirmou a impossibilidade de expandir estados assimétricos em termos de estados simétricos.

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_x \sum_{\mu=1}^4 [\Delta_\mu^f \phi(x)] [\Delta_\mu^f \phi(x)] + \frac{m^2}{2} \sum_x \phi^*(x) \phi(x) + \frac{g}{4!} \sum_x (\phi^*(x) \phi(x))^2. \quad (5.45)$$

A transformação de simetria global pertencente a $U(1)$ é implementada por

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x). \quad (5.46)$$

O funcional gerador é dado por

$$Z[J, J^*] = \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi(x) d\phi^*(x) \exp \left\{ -S_E - \sum_x (J^*(x) \phi(x) + \phi(x)^* J(x)) \right. \\ \left. - i\epsilon \sum_x \phi^*(x) \phi(x) + i\epsilon \sum_x (v^* \phi(x) + \phi^*(x) v) \right\}, \quad (5.47)$$

onde N é

$$N = \int \prod_x d\phi(x) d\phi^*(x) \exp \left\{ -S_E - i\epsilon \sum_x \phi^*(x) \phi(x) + i\epsilon \sum_x (v^* \phi(x) + \phi^*(x) v) \right\}. \quad (5.48)$$

Adotar-se-á aqui as mesmas notações utilizadas na formulação contínua, com a diferença que elas agora são definidas nos sítios da rede. Também prosseguir-se-á de maneira análoga, logo, começa-se calculando as identidades de Ward-Takahashi de interesse.

A primeira identidade obtida é

$$\langle \phi(z) \rangle_{\epsilon, N} = i\epsilon \sum_x x \langle (v^* \phi(x) - v \phi^*(x)) \phi(z) \rangle_{\epsilon, N}. \quad (5.49)$$

Note que de maneira análoga ao que ocorre no modelo contínuo se não fosse introduzido o termo ϵ , a expressão (5.49) teria fornecido um resultado nulo, e a possibilidade de quebra espontânea de simetria não seria admissível.

Substituindo (5.4), (5.9), (5.15) e (5.17) em (F.2) (lembre-se sempre que apenas se trocou o domínio de definição dos campos do espaço de Minkowski para a rede euclidiana) tem-se:

$$\sum_x \left\langle (J_1(x) \chi(x) - J_2(x) \psi(x)) - i\sqrt{2}\epsilon v \chi(x) \right\rangle_{\epsilon, N, J} = 0, \quad (5.50)$$

enquanto a substituição de (5.4) e (5.9) no gerador funcional (5.47) leva à

$$Z[J, J^*] = \frac{1}{N} \int \prod_x d\psi(x) \chi(x) \exp \left\{ -S_E - \sum_x \left[J_1(x) \psi(x) + J_2(x) \chi(x) \right. \right. \\ \left. \left. + i\epsilon \left(\psi^2(x) + \chi^2(x) - v \frac{\psi(x)}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\}, \quad (5.51)$$

onde se utilizou de (5.20) e uma versão modificada de (5.21) onde se excluiu o termo de v^2 . Retornando às identidades de Ward-Takahashi, continua-se tomando a derivada funcional de (5.50) em relação a J_2 , o que fornece

$$\langle \psi(z) \rangle_{\epsilon, N} = i\sqrt{2}\epsilon v \sum_x \langle \chi(x)\chi(z) \rangle_{\epsilon, N}. \quad (5.52)$$

A equação (F.5) pode ser interpretada e seu significado extraído convenientemente se a mesma for reescrita no espaço dos momentos, o que leva à

$$\langle \psi(z) \rangle_{\epsilon, N} = \sqrt{2}\epsilon v \Delta_\chi(\epsilon, 0), \quad (5.53)$$

com

$$\Delta_\chi(\epsilon, p) = \frac{Z_\chi}{\rho^2(p) + m_\chi^2 + i\epsilon a_\chi} + \text{contribuições contínuas}. \quad (5.54)$$

Finalmente, combinando os dois últimos resultados se chega a um resultado análogo ao caso contínuo, isto é, se $m_\chi^2 \neq 0$, um valor esperado de vácuo nulo é obtido, a solução simétrica. Se $m_\chi^2 = 0$, então um valor esperado não nulo de vácuo é encontrado. Este nada mais é do que o Teorema de Goldstone: a simetria espontaneamente quebrada ($\langle \psi(z) \rangle \neq 0$) leva a existência de um modo não massivo.

É interessante, agora, partir de (5.53) e observar como se desenrola o limite do contínuo (logo, considera-se o limite de N tendendo a infinito com a indo a zero, mantendo fixo o produto Na). Neste limite, tem-se que certos elementos adquirirão a constante da rede conforme a relação abaixo:

$$\psi \rightarrow a\psi_0, \quad (5.55)$$

$$\epsilon \rightarrow a^2\epsilon_0, \quad (5.56)$$

$$v \rightarrow av_0, \quad (5.57)$$

$$m \rightarrow am_0, \quad (5.58)$$

onde entenda as quantidades indexadas com 0 como suas correspondentes no contínuo. Tem-se assim,

$$\begin{aligned} a \langle \psi(z)_0 \rangle_{\epsilon, N} &= a^3 \sqrt{2} i \epsilon_0 v_0 a^{-2} \Delta_\chi(\epsilon, 0) \\ &= a \sqrt{2} i \epsilon v \Delta_{\chi_0}(\epsilon, 0), \end{aligned} \quad (5.59)$$

onde $\Delta_\chi(\epsilon, 0)$ contribui com a^{-2} devido aos termos de massa e ϵ em seu denominador. Isolando a na expressão acima, escreve-se

$$a(\langle \psi(z)_0 \rangle_{\epsilon, N} = \sqrt{2} i \epsilon v \Delta_{\chi_0}(\epsilon, 0)) = 0. \quad (5.60)$$

Uma vez que a é uma constante arbitrária que se toma indo a zero de modo controlado, tem-se a seguinte relação

$$\langle \psi(z)_0 \rangle_\epsilon = \sqrt{2} i \epsilon v \Delta_{\chi_0}(\epsilon, 0), \quad (5.61)$$

a qual é equivalente a (F.13). Note, que o resultado (5.61) decorre da validade de (5.60) para qualquer que seja a , isto é, a expressão deve valer para redes com espaçamento arbitrário. Ao leitor interessado em mais detalhes em relação ao cálculos realizados nesta seção indica-se a leitura do apêndice F.

6 PRESCRIÇÃO ϵ : MODELO INVARIANTE SOB TRANSFORMAÇÃO $U(1)$ LOCAL

Neste capítulo, ir-se-á analisar um modelo de um campo escalar complexo $\phi(x)$ interagindo com um campo de calibre, com uma simetria de calibre local $U(1)$. Este é o conhecido modelo tipo Goldstone-Higgs [34].

6.1 CASO CONTÍNUO

No caso contínuo, do modelo Abelian de Higgs-Maxwell dado pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu - ie_0 A^\mu) \phi^*(x) (\partial_\mu + ie_0 A_\mu) \phi(x) - m^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (6.1)$$

tem-se invariância sob dois tipos de transformações:

1. Transformações globais de fase, da forma:

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \phi(x), \quad (6.2)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x). \quad (6.3)$$

2. Transformações locais ou de calibre, da forma:

$$\phi(x) \rightarrow e^{ie_0 \lambda(x)} \phi(x), \quad (6.4)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x). \quad (6.5)$$

Aqui, $\lambda(x)$ é uma função do espaço tempo com as propriedades

$$\lambda(x) \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad |x_0| \rightarrow \infty \quad \text{ou} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

Define-se

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(x) + i\chi(x)], \quad \rho(x) = \psi(x) - \langle \psi(x) \rangle_\epsilon. \quad (6.7)$$

Ir-se-á utilizar o calibre de Lorenz:

$$\partial_\mu A_H^\mu(x) = 0, \quad (6.8)$$

onde $A_H^\mu(x)$ é o operador de campo de calibre de Heisenberg. A QES é introduzida através da condição

$$\langle 0 | \phi_H(x) | 0 \rangle \equiv \tilde{v} \neq 0, \quad (6.9)$$

onde $\tilde{v}$ é uma constante e $\phi_H(x)$ é o operador de campo de Heisenberg para $\phi(x)$. $\tilde{v}$ ser constante significa que é independente de x e, portanto, preserva a invariância do vácuo por translação. Observe que se não surgir confusão, usar-se-á os mesmos símbolos $\phi(x)$, $A_\mu(x)$ tanto para os operadores de campo de Heisenberg quanto para os correspondentes campos que aparecem no gerador funcional.

O gerador funcional para este modelo é dado por

$$Z[J, K] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}(x) + B(x) \partial^\mu A_\mu(x) + K^*(x) \phi(x) + K(x) \phi^*(x) \right. \right. \\ \left. \left. + J^\mu(x) A_\mu(x) + i\epsilon |\phi(x) - v|^2 \right) \right], \quad (6.10)$$

com

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}(x) + i\epsilon |\phi(x) - v|^2 \right) \right]. \quad (6.11)$$

$B(x)$ é um campo auxiliar¹ que não aparece em $\mathcal{L}$. Ele é introduzido para garantir que a condição de fixação de calibre (6.8) seja satisfeita. O vínculo de calibre é implementado pela seguinte identidade:

$$\int \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x B(x) \partial^\mu A_\mu(x) \right] \propto \delta[\partial^\mu A_\mu(x)]. \quad (6.12)$$

Não há termo de fonte correspondente a $B(x)$ na equação (6.10). Se fosse introduzido um termo $J_B(x)B(x)$ no gerador funcional, a condição de calibre mudaria para

$$\partial^\mu A_\mu(x) + J_B(x) = 0, \quad (6.13)$$

o que é diferente do calibre de Lorenz (6.8).

O termo $\epsilon, i\epsilon|\phi(x) - v|^2$, é incluído de maneira a induzir uma quebra espontânea da simetria global, (6.2) e (6.3). O limite de ϵ indo a zero é tomado ao final dos cálculos, de maneira análoga a feita anteriormente. A constante v é assumida sendo real. A notação é semelhante à utilizada anteriormente, chama-se atenção ao fato de termos duas fontes:

$$\langle F[\phi(x)] \rangle_{J,K} \equiv F[\phi(x)]_{\epsilon, J, K}, \quad (6.14)$$

$$\langle F[\phi(x)] \rangle \equiv F[\phi(x)]_{J=K=0}. \quad (6.15)$$

As várias identidades de Ward-Takahashi do modelo são deduzidas sistematicamente realizando as mudanças de variáveis (6.2), (6.3), (6.4) e (6.5) na expressão (6.10), para o gerador funcional e requerendo que o mesmo se mantenha inalterado.

6.1.1 Identidades de Ward-Takahashi Globais

A invariância do gerador funcional sob as mudança de variáveis (transformações globais), equações (6.2) e (6.3), levam a identidade básica

¹Este campo auxiliar é conhecido na literatura como campo de Nakashini-Lautrup e está associado a um formalismo de mesmo nome, que permite uma quantização canônica covariante. Ele pode ser removido da expressão por meio de uma integração, entretanto seu uso apresenta vantagens para o reconhecimento dos assintóticos da teoria, especialmente quando as técnicas discutidas são generalizadas além da eletrodinâmica quântica, onde a formulação BRST “off-shell” é mais adequada.

$$i \int d^4x \langle K_2(x)\psi(x) - K_1(x)\chi(x) \rangle_{\epsilon, J, K} = \sqrt{2}\epsilon v \int d^4x \langle \chi(x) \rangle_{\epsilon, J, K}, \quad (6.16)$$

onde foi utilizado

$$K(x) = \frac{1}{2}[K_1(x) + iK_2(x)]. \quad (6.17)$$

Note que o resultado (6.16) é semelhante ao resultado obtido na seção 5.1. Atuando em (6.16) com $\frac{\delta}{\delta K_2(x)}$ e $\frac{\delta^2}{\delta K_1(x)\delta K_2(y)}$, obtém-se

$$\langle \psi(x) \rangle_{\epsilon} = \sqrt{2}\epsilon v \int d^4y \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon} = \sqrt{2}\epsilon v \Delta_{\chi}(\epsilon, 0), \quad (6.18)$$

$$\langle \rho(x)\rho(y) \rangle_{\epsilon} - \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon} = \sqrt{2}\epsilon v \int d^4z \langle \chi(z)\chi(x)\rho(y) \rangle_{\epsilon}. \quad (6.19)$$

6.1.2 Identidades de Ward-Takahashi Locais

As mudanças de variáveis (6.4) e (6.5) no gerador funcional (6.10) fornecem a seguinte expressão para o mesmo

$$\begin{aligned} Z[J, K]_{\lambda} &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}(x) + B(x) \partial^{\mu} A_{\mu}(x) + B(x) \partial^2 \lambda(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + K^*(x) e^{ie_0 \lambda(x)} \phi(x) + K(x) e^{-ie_0 \lambda(x)} \phi^*(x) + J^{\mu}(x) A_{\mu}(x) + J^{\mu}(x) \partial_{\mu} \lambda(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i\epsilon |e^{ie_0 \lambda(x)} \phi(x) - v|^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

A invariância do gerador funcional leva à

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta Z_{\lambda}}{\delta \lambda(u)} \right|_{\lambda=0} = 0 &= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_{\mu} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}(x) + B(x) \partial^{\mu} A_{\mu}(x) + B(x) \partial^2 \lambda(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + K^*(x) e^{ie_0 \lambda(x)} \phi(x) + K(x) e^{-ie_0 \lambda(x)} \phi^*(x) + J^{\mu}(x) A_{\mu}(x) + J^{\mu}(x) \partial_{\mu} \lambda(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i\epsilon |e^{ie_0 \lambda(x)} \phi(x) - v|^2 \right) \right] \times \left\{ i \int d^4x \left(B(x) \partial^{\mu} \partial_{\mu} \delta(x-u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [K^*(x) e^{ie_0 \lambda(x)} \phi(x) i e_0 + K(x) e^{-ie_0 \lambda(x)} \phi^*(x) (-i e_0)] \delta(x-u) + J^{\mu} \partial_{\mu} \delta(x-u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i\epsilon [e^{-ie_0 \lambda(x)} \phi^*(x) v (-i e_0) \delta(x-u) + v^* e^{ie_0 \lambda(x)} \phi(x) (i e_0) \delta(x-u)] \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

ou

$$\begin{aligned}
& i \int d^4x \langle B(x) \partial^2 \delta(x-u) \rangle_{\epsilon, J, K} + i \int d^4x \langle i e_0 (K^*(x) \phi(x) - K(x) \phi^*(x)) \delta(x-u) \rangle_{\epsilon, J, K} \\
& + i \int d^4x \langle J^\mu \partial_\mu \delta(x-u) \rangle_{\epsilon, J, K} + i \int d^4x \langle (-\epsilon)(e_0)(v^* \phi(x) - v \phi^*(x)) \delta(x-u) \rangle_{\epsilon, J, K} = 0.
\end{aligned} \quad (6.22)$$

Utilizando, agora,

$$v^* \phi(x) - v \phi^*(x) = \sqrt{2} i v \chi(x), \quad (6.23)$$

$$K^*(x) \phi(x) - K(x) \phi^*(x) = i(K_1(x) \phi_2(x) - K_2(x) \phi_1(x)), \quad (6.24)$$

$$i \int d^4x \langle J^\mu \partial_\mu \delta(x-u) \rangle_{\epsilon, J, K} = -i \int d^4x \langle \partial_\mu J^\mu \delta(x-u) \rangle_{\epsilon, J, K} \quad (6.25)$$

e

$$i \int d^4x \langle B(x) \partial^2 \delta(x-u) \rangle_{\epsilon, J, K} = i \int d^4x \langle \partial^2 B(x) \delta(x-u) \rangle_{\epsilon, J, K}, \quad (6.26)$$

pode-se escrever (6.22) como

$$i \langle \partial^2(u) B(u) - \partial_\mu(u) J^\mu(u) + e_0(K_2(u) \phi_1(u) - K_1(u) \phi_2(u)) \rangle_{\epsilon, J, K} = \epsilon e_0 \sqrt{2} v \langle \chi(u) \rangle_{\epsilon, J, K}. \quad (6.27)$$

Todavia, devido aos cálculos que ainda serão realizados abaixo é mais conveniente trabalhar com a expressão (6.27) apresentando uma dependência explícita do parâmetro de calibre, $\lambda(x)$. Para tal, multiplica-se (6.27) por $\int d^4x \lambda(x)$, trocando a variável u por x ,

$$\begin{aligned}
& i \int d^4x \langle \partial^2 B(x) - \partial_\mu J^\mu(x) + e_0(K_2(x) \phi_1(x) - K_1(x) \phi_2(x)) \rangle_{\epsilon, J, K} \lambda(x) \\
& = \epsilon e_0 \sqrt{2} v \int d^4x \langle \chi(x) \rangle_{\epsilon, J, K} \lambda(x).
\end{aligned} \quad (6.28)$$

Operando com $\delta/\delta K_2(y)$ e $\delta/\delta J_\nu(y)$ na equação (6.28), obtém-se:

$$\begin{aligned}
& i \int d^4x \left\langle e_0 \delta(x-y) \psi(x) + (\partial^2 B(x) - \partial^\mu J_\mu(x) + e_0(K_2(x) \psi(x) - K_1(x) \chi(x))) \right. \\
& \times \left. \left(i \int d^4z \chi(z) \delta(z-y) \right) \right\rangle_{\epsilon, J, K} \bigg|_{J, K=0} \lambda(x) = \sqrt{2} \epsilon v e_0 \int d^4x \left\langle \chi(x) \left(i \int d^4z \chi(z) \delta(z-y) \right) \right\rangle_{\epsilon, J, K} \bigg|_{J, K=0} \lambda(x),
\end{aligned} \quad (6.29)$$

ou

$$i \partial_x^2 \langle B(x) \chi(y) \rangle_\epsilon + e_0 \langle \psi(x) \rangle_\epsilon \delta(x-y) = \sqrt{2} \epsilon v e_0 \langle \chi(x) \chi(y) \rangle_\epsilon \quad (6.30)$$

e

$$i \int d^4x \left\langle (-) \partial_x^\mu \delta(x-y) \delta_\mu^\nu + (\partial^2 B(x) - \partial^\mu J_\mu(x) + e_0(K_2(x)\psi(x) - K_1(x)\chi(x))) \times \right. \\ \left. \left(i \int d^4x \delta(x-y) \delta_\mu^\nu A^\mu(x) \right) \right\rangle_{\epsilon, J, K} \Big|_{J, K=0} \lambda(x) = \sqrt{2} \epsilon v e_0 \int d^4x \left\langle \chi(x) \left(i \int d^4x \delta(x-y) \delta_\mu^\nu A^\mu(x) \right) \right\rangle_{\epsilon, J, K} \Big|_{J, K=0} \lambda(x), \quad (6.31)$$

ou ainda

$$i \partial_x^2 \langle B(x) A^\mu(y) \rangle_\epsilon - \partial_x^\mu \delta(x-y) = \sqrt{2} \epsilon v e_0 \langle \chi(x) A^\mu(y) \rangle_\epsilon, \quad (6.32)$$

onde foram feitas algumas simplificações e se trocou ν por μ .

O gerador funcional deve ser ainda invariante pela transformação $B(x) \rightarrow B(x) + \lambda(x)$, o que fornece

$$Z[J, K]_{B(x) \rightarrow B(x) + \lambda(x)} = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}B \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}(x) + B(x) \partial^\mu A_\mu(x) \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda(x) \partial^\mu A_\mu(x) + K^*(x) \phi(x) + K(x) \phi^*(x) + J^\mu(x) A_\mu(x) \right. \right. \\ \left. \left. + i\epsilon |\phi(x) - v|^2 \right) \right] \quad (6.33)$$

e, portanto,

$$\frac{\delta Z[J, K]}{\delta \lambda(u)} \Big|_{\lambda=0} = 0 = i \int d^4x \langle \delta(x-u) \partial^\mu A_\mu(x) \rangle_{\epsilon, J, K}, \quad (6.34)$$

ou, simplesmente,

$$\langle \partial^\mu A_\mu(x) \rangle_{\epsilon, J, K} = 0. \quad (6.35)$$

Atuando com as derivadas funcionais $\delta/\delta K_2(y)$ e $\delta/\delta J_\nu(y)$ na equação (6.35), obtém-se respectivamente

$$\left\langle \partial^\mu A_\mu(x) \left(i \int d^4x \chi(x) \delta(x-y) \right) \right\rangle_{\epsilon, J, K} \Big|_{J, K=0} = \langle \partial^\mu A_\mu(x) \chi(y) \rangle_\epsilon = 0, \quad (6.36)$$

$$\left\langle \partial^\mu A_\mu(x) \left(i \int d^4x A^\mu(x) \delta_\mu^\nu \delta(x-y) \right) \right\rangle_{\epsilon, J, K} \Big|_{J, K=0} = \langle \partial^\mu A_\mu(x) A^\nu(y) \rangle_\epsilon = 0. \quad (6.37)$$

Uma outra identidade é obtida quando transformações de simetria locais são realizadas nas funções de Green $\langle \partial_{x_1}^2 B(x_1) \dots \partial_{x_n}^2 B(x_n) \rangle_{\epsilon, J, K}$. Note que neste caso, de maneira análoga ao da simetria local, apenas a exponencial complexa da ação sente a mudança de variáveis. Assim, tem-se imediatamente

$$i \int d^4x \langle \partial_{x_1}^2 B(x_1) \dots \partial_{x_n}^2 B(x_n) [\partial^2 B(x) - \partial_\mu J^\mu(x) + e_0(K_2(x)\phi_1(x) - K_1(x)\phi_2(x))] \rangle_{\epsilon, J, K} \lambda(x) \\ = \epsilon e_0 \sqrt{2} v \int d^4x \langle \partial_{x_1}^2 B(x_1) \dots \partial_{x_n}^2 B(x_n) \chi(x) \rangle_{\epsilon, J, K} \lambda(x). \quad (6.38)$$

Fazendo $n = 1$ e $J = K = 0$ na equação (6.38), encontra-se

$$i\partial_x^2 \langle B(x)\partial_y^2 B(y) \rangle_\epsilon = \sqrt{2}\epsilon v e_0 \partial_x^2 \langle B(x)\chi(y) \rangle_\epsilon. \quad (6.39)$$

Finalmente, como resultado da invariância sob $(\chi, A_\mu, B) \rightarrow (-\chi, -A_\mu, -B)$, todas as demais funções de dois pontos são nulas:

$$\langle \rho(x)B(y) \rangle_\epsilon = \langle \rho(x)\chi(y) \rangle_\epsilon = \langle \rho(x)A^\mu(y) \rangle_\epsilon = 0. \quad (6.40)$$

6.1.3 Estrutura de polos das funções de dois pontos

Uma vez determinado as identidades de Ward-Takahashi para as funções de dois pontos, pode-se estudar as consequências das mesmas. Das equações (6.18) e (6.19), tem-se

$$\tilde{v} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(x)_\epsilon \neq 0, \quad (6.41)$$

onde neste caso já se assume QES. Tem-se assim que o propagador de χ contém um polo de massa zero,

$$\langle \chi(x)\chi(y) \rangle_\epsilon = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-y)} \Delta_\chi(p, \epsilon), \quad (6.42)$$

com

$$\Delta_\chi(p, \epsilon) = \frac{Z_\chi}{p^2 + i\epsilon a_\chi} + (\text{contribuições contínuas}), \quad (6.43)$$

e

$$\tilde{v} = \sqrt{2}v \frac{Z_\chi}{a_\chi}. \quad (6.44)$$

Note que o resultado acima é a afirmação do teorema de Godstone.

Agora, define-se

$$\langle B(x)\chi(y) \rangle_\epsilon = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-y)} \Delta_{B\chi}(p, \epsilon). \quad (6.45)$$

Substituindo (6.42) e (6.45) em (6.30), tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p (p^2) e^{-ip(x-y)} \Delta_{B\chi}(p, \epsilon) + e_0 \langle \psi(x) \rangle_\epsilon \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-y)} \\ &= \sqrt{2}\epsilon v e_0 \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-y)} \Delta_\chi(p, \epsilon), \end{aligned} \quad (6.46)$$

usando que $\tilde{v}(\epsilon) = i\sqrt{2}\epsilon v \Delta_\chi(\epsilon, 0)$ em (6.46), encontra-se

$$p^2 \Delta_{B\chi}(p, \epsilon) + e_0 i \sqrt{2}\epsilon v \Delta_\chi(\epsilon, 0) - \sqrt{2}\epsilon v e_0 i \frac{Z_\chi}{p^2 + i\epsilon a_\chi} = 0, \quad (6.47)$$

ou

$$p^2 \Delta_{B\chi}(p, \epsilon) + e_0 v \sqrt{2} \epsilon i \left(\frac{Z_\chi}{i \epsilon a_\chi} - \frac{Z_\chi}{p^2 + i \epsilon a_\chi} \right) = 0, \quad (6.48)$$

ou ainda

$$\Delta_{\beta\chi}(p, \epsilon) = -\frac{e_0 \tilde{v}}{p^2 + i \epsilon a_\chi}, \quad (6.49)$$

onde foi utilizado (6.44). Deste modo, tem-se a seguinte estrutura para a função de dois pontos $\langle B(x)\chi(y) \rangle$:

$$\langle B(x)\chi(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{e_0 \tilde{v}}{p^2 + i \epsilon a_\chi} \right]. \quad (6.50)$$

Agora, define-se

$$\langle B(x)A_\mu(y) \rangle_\epsilon = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \Delta_{BA}(p, \epsilon). \quad (6.51)$$

Antes de substituir (6.51) em (6.32) observe que não se conhece $\langle \chi(x)A_\mu(y) \rangle_\epsilon$, todavia sabe-se o valor de $\langle \partial_\mu A^\mu \chi(y) \rangle_\epsilon$, dado por (6.36). Deste modo, inicia-se tomando a derivada parcial ∂_y^μ da expressão (6.32)

$$i \partial_y^\mu \partial_x^2 \langle B(x)A_\mu(y) \rangle_\epsilon - \partial_y^\mu \partial_\mu^x \delta(x-y) = \sqrt{2} \epsilon v e_0 \langle \chi(x) \partial_y^\mu A_\mu(y) \rangle_\epsilon = 0. \quad (6.52)$$

Logo,

$$i \partial_y^\mu \partial_x^2 \langle B(x)A_\mu(y) \rangle_\epsilon = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p p^2 e^{-i(x-y)}. \quad (6.53)$$

Substituindo (6.51) em (6.53) ter-se-á

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} (p^2 p^\mu) \Delta_{BA}(p, \epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-i(x-y)} p^2. \quad (6.54)$$

Finalmente,

$$\Delta_{BA} = \frac{1}{p^\mu}. \quad (6.55)$$

Assim, $\langle B(x)A_\mu(y) \rangle$ pode ser escrito como

$$\langle B(x)A_\mu(y) \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^\mu}, \quad (6.56)$$

o qual também pode ser escrito como

$$\langle B(x)A_\mu(y) \rangle = \partial_\mu^x \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2}. \quad (6.57)$$

Então, resta apenas determinar $\langle B(x)B(y) \rangle_\epsilon$. Para tal, define-se

$$\langle B(x)B(y) \rangle_\epsilon = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \Delta_{BB}(p, \epsilon) \quad (6.58)$$

e substituindo (6.50) e (6.58) em (6.39):

$$\frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} (p^2)^2 \Delta_{BB}(p, \epsilon) = \sqrt{2} \epsilon v e_0 \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} p^2 \frac{e_0 \tilde{v}}{p^2 + i \epsilon a_\chi}. \quad (6.59)$$

Portanto,

$$-p^4 \Delta_{BB}(p, \epsilon) - i\sqrt{2}\epsilon v e_0 p^2 \frac{e_0 \tilde{v}}{p^2 + i\epsilon a_\chi} = 0, \quad (6.60)$$

ou

$$\begin{aligned} \Delta_{BB}(p, \epsilon) &= -\frac{i\sqrt{2}\epsilon v e_0^2 \tilde{v}}{(p^2 + i\epsilon a_\chi)p^2} \\ &= -i\sqrt{2}\epsilon v e_0^2 \tilde{v} \left\{ \frac{1}{p^2 + i\epsilon a_\chi} - \frac{1}{p^2} \right\} \frac{1}{(-i\epsilon a_\chi)} \\ &= \frac{(e_0 \tilde{v})^2}{Z_\chi} \left\{ \frac{1}{p^2 + i\epsilon a_\chi} - \frac{1}{p^2} \right\}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Deste modo, encontra-se que $\langle B(x)B(y) \rangle$ será dado por

$$\langle B(x)B(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{(e_0 \tilde{v})^2}{Z_\chi} \left[\frac{1}{p^2 + i\epsilon a_\chi} - \frac{1}{p^2} \right]. \quad (6.62)$$

Finalmente, ficou-se com as seguintes funções de dois pontos:

$$\langle \chi(x)\chi(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{Z_\chi}{p^2 + i\epsilon a_\chi} + \text{contribuições contínuas}. \quad (6.63)$$

$$\langle B(x)\chi(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{e_0 \tilde{v}}{p^2 + i\epsilon a_\chi} \right]. \quad (6.64)$$

$$\langle B(x)A_\mu(y) \rangle = \partial_\mu^x \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2}. \quad (6.65)$$

$$\langle B(x)B(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{(e_0 \tilde{v})^2}{Z_\chi} \left[\frac{1}{p^2 + i\epsilon a_\chi} - \frac{1}{p^2} \right]. \quad (6.66)$$

6.1.4 Mapa dinâmico

Ir-se-á aqui obter os mapas dinâmicos [12, 33, 35] para o modelo com simetria local U(1) apresentado acima, para mais informações consulte [34]. Deste modo, há quatro campos associados aos operadores de Heisenberg, ψ_H , χ_H , B_H , A_H^μ , de modo que, em geral, tem-se no máximo quatro campos assintóticos [36]. Assim, optar-se-á por assumir a existência de quatro campos assintóticos, χ_{in} , b_{in} , ρ_{in} e U_{in}^μ .

A função de dois pontos (6.63) mostra que o campo χ é não massivo; mais ainda, mostra-se que ele é um bóson de Goldstone, quando substituído em (6.18). Além disso, neste presente caso, ter-se-á mais um campo não massivo. Este aparece por meio da equação (6.66), todavia, ele é um estado de norma negativa (ghost). A ausência de singularidades de corte nestas três últimas funções de correlação sugere que o $B(x)$ obedece uma equação de campo livre.

Resumindo, as equações de (6.63) até (6.66) implicam a existência de dois campos assintóticos: o campo de Nambu-Goldstone χ_{in} e um campo de norma negativa (ghost) b_{in} , ambos satisfazendo a equação de campo livre:

$$\partial^2 \chi_{in}(x) = 0, \quad (6.67)$$

$$\partial^2 b_{in}(x) = 0. \quad (6.68)$$

Agora, dar-se-á início à expansão dos elementos de matrizes dos operadores de Heisenberg em termos dos elementos dos campos assintóticos. Os coeficientes da expansão serão dados por meio das funções de Green do modelo. Tem-se então, que cada operador de Heisenberg pode inicialmente depender de todos os outros operadores assintóticos. Logo, pode-se escrever

$$\chi_H(x) = a_0 + a_1 \chi_{in}(x) + a_2 \rho_{in}(x) + a_3 b_{in}(x) + a_4 \partial_\mu U_{in}^\mu(x), \quad (6.69)$$

$$\rho_H(x) = b_0 + b_1 \chi_{in}(x) + b_2 \rho_{in}(x) + b_3 b_{in}(x) + b_4 \partial_\mu U_{in}^\mu(x), \quad (6.70)$$

$$B_H(x) = c_0 + c_1 \chi_{in}(x) + c_2 \rho_{in}(x) + c_3 b_{in}(x) + c_4 \partial_\mu U_{in}^\mu(x), \quad (6.71)$$

$$A_H^\mu(x) = d_0^\mu + d_1 \partial^\mu \chi_{in}(x) + d_2 \partial^\mu \rho_{in}(x) + d_3 \partial^\mu b_{in}(x) + d_4 U_{in}^\mu(x). \quad (6.72)$$

Tem-se imediatamente que

$$a_0 = c_0 = 0 \quad , \quad b_0 = \tilde{v} \quad \text{e} \quad d_0^\mu = 0, \quad (6.73)$$

pois $\langle \chi_H \rangle = \langle B_H \rangle = \langle A_H^\mu \rangle = 0$ e $\langle \rho_H \rangle = \tilde{v}$ e o valor esperado de todos os campos assintóticos é nulo. Propondo, agora, o seguinte Ansatz:

$$a_2 = b_1 = b_3 = b_4 = c_2 = d_2 = 0, \quad (6.74)$$

tem-se que as identidades (6.40) são automaticamente satisfeitas, e o sistema se reduz à

$$\chi_H(x) = a_1 \chi_{in}(x) + a_3 b_{in}(x) + a_4 \partial_\mu U_{in}^\mu(x), \quad (6.75)$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + b_2 \rho_{in}(x), \quad (6.76)$$

$$B_H(x) = c_1 \chi_{in}(x) + c_3 b_{in}(x) + c_4 \partial_\mu U_{in}^\mu(x), \quad (6.77)$$

$$A_H^\mu(x) = d_1 \partial^\mu \chi_{in}(x) + d_3 \partial^\mu b_{in}(x) + d_4 U_{in}^\mu(x). \quad (6.78)$$

Utilizando da condição de fixação de calibre $\partial_\mu A_H^\mu = 0$ na equação (6.78), encontra-se²

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_H^\mu(x) &= d_1 \partial^2 \chi_{in}(x) + d_3 \partial^2 b_{in}(x) + d_4 \partial_\mu U_{in}^\mu(x) \\ 0 &= d_4 \partial_\mu U_{in}^\mu(x), \end{aligned} \quad (6.79)$$

levando-se a imposição da condição de calibre sobre o campo $U_{in}^\mu(x)$, ou seja, $\partial_\mu U_{in}^\mu(x) = 0$. Não é interessante

²Pode parecer estranho fixar o calibre após assumir a quebra espontânea de simetria. No presente caso, entenda que a expressão de fixação surge devido a abordagem de campo auxiliar como uma das equações de Heisenberg a ser satisfeita pelo operador quântico de Heisenberg A_H^μ . Segundo, a quebra de simetria aparece não como a ausência da simetria original nas equações de Heisenberg, mas como uma realização de conjuntos de simetrias diferentes ao nível das equações de Heisenberg e os estados quânticos, [12, 13, 21]. Deste modo, a expressão (6.79) é simplesmente o resultado da imposição de que o mapa dinâmico satisfaz as equações de Heisenberg.

fazer $d_4 = 0$, pois como será visto isto implicaria a ausência de quebra espontânea da simetria de calibre. Feitas essas considerações, o sistema de equações se reduz a

$$\chi_H(x) = a_1 \chi_{in}(x) + a_3 b_{in}(x), \quad (6.80)$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + b_2 \rho_{in}(x), \quad (6.81)$$

$$B_H(x) = c_1 \chi_{in}(x) + c_3 b_{in}(x), \quad (6.82)$$

$$A_H^\mu(x) = d_1 \partial^\mu \chi_{in}(x) + d_3 \partial^\mu b_{in}(x) + d_4 U_{in}^\mu(x). \quad (6.83)$$

Usando o fato de que a função de dois pontos de campos assintóticos diferentes é nula, pois os mesmos não podem estar correlacionados, pode-se escrever:

$$\langle \chi_H(x) \chi_H(y) \rangle = a_1^2 \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle + a_3^2 \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle, \quad (6.84)$$

$$\langle B_H(x) \chi_H(y) \rangle = a_1 c_1 \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle + a_3 c_3 \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle, \quad (6.85)$$

$$\langle B_H(x) B_H(y) \rangle = c_1^2 \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle + c_3^2 \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle, \quad (6.86)$$

Lembrando, agora, que b_{in} é um campo assintótico livre com norma negativa (ghost), tem-se que o correlator $\langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle$ introduziria estados de norma negativa no correlator de $\langle \chi_H(x) \chi_H(y) \rangle$ se $a_3 \neq 0$. Todavia, tais estados não podem existir como pode ser observado da expressão (6.63) e, portanto, $a_3 = 0$.

Usando (6.63) em (6.84) com

$$\langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2 + i\epsilon a_\chi}, \quad (6.87)$$

junto do fato de $a_3 = 0$, tem-se $a_1 = Z_\chi^{\frac{1}{2}}$. Assim

$$\langle B_H(x) \chi_H(y) \rangle = c_1 Z_\chi^{\frac{1}{2}} \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle, \quad (6.88)$$

$$\langle B_H(x) B_H(y) \rangle = c_1^2 \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle + c_3^2 \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle. \quad (6.89)$$

Substituindo (6.64) e (6.87) em (6.88), encontra-se que $c_1 = -e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-\frac{1}{2}}$. Neste caso, (6.89) se transforma em

$$\langle B_H(x) B_H(y) \rangle = \frac{e_0^2 \tilde{v}^2}{Z_\chi} \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle + c_3^2 \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle. \quad (6.90)$$

Propondo, agora, a seguinte forma para o correlator $\langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle$:

$$\langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{-1}{p^2}, \quad (6.91)$$

e o substituindo em (6.90) junto de (6.66) e (6.89) se encontra que c_3 é igual à $e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-1/2}$. Até o presente ponto, tem-se os mapas dinâmicos sendo dados por:

$$\chi_H(x) = Z_\chi^{\frac{1}{2}} \chi_{in}(x), \quad (6.92)$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + b_2 \rho_{in}(x), \quad (6.93)$$

$$B_H(x) = e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-\frac{1}{2}} (-\chi_{in}(x) + b_{in}(x)), \quad (6.94)$$

$$A_H^\mu(x) = d_1 \partial^\mu \chi_{in}(x) + d_3 \partial^\mu b_{in}(x) + d_4 U_{in}^\mu(x). \quad (6.95)$$

O campo assintótico ρ_{in} correspondente a ρ_H deve ser massivo. Portanto, a correspondente equação de campo livre é

$$(\partial^2 + m_\rho^2) \rho_{in}(x) = 0. \quad (6.96)$$

Assim, a função de correlação $\langle \rho_H(x) \rho_H(y) \rangle$ deve ser da forma

$$\langle \rho_H(x) \rho_H(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{Z_\rho}{p^2 + m_\rho^2 + i\epsilon a_\rho}, \quad (6.97)$$

enquanto a função de correlação $\langle \rho_{in}(x) \rho_{in}(y) \rangle$ é

$$\langle \rho_{in}(x) \rho_{in}(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2 + m_\rho^2 + i\epsilon a_\rho}. \quad (6.98)$$

Comparando (6.96), (6.97) junto de (6.93) tem-se que $b_2 = Z_\rho^{\frac{1}{2}}$.

A função de correlação $\langle B_H(x) A_H^\mu(y) \rangle$ por meio dos mapas dinâmicos (6.92)-(6.95) fornece

$$\langle B_H(x) A_H^\mu(y) \rangle = -\frac{e_0 \tilde{v}}{Z_\chi^{1/2}} d_1 \partial_y^\mu \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle + \frac{e_0 \tilde{v}}{Z_\chi^{1/2}} d_3 \partial^\mu \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle. \quad (6.99)$$

A função de correlação $\langle A_H^\mu(x) \chi_H(y) \rangle$ por meio dos mapas dinâmicos (6.92)-(6.95) fornece

$$\langle A_H^\mu(x) \chi_H(y) \rangle = d_1 Z_\chi^{1/2} \partial_x^\mu \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle. \quad (6.100)$$

Observando a forma de $\langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle$ dada em (6.87), pode-se escrever a expressão acima como

$$\langle A_H^\mu(x) \chi_H(y) \rangle = -d_1 Z_\chi^{1/2} \partial_y^\mu \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle. \quad (6.101)$$

Então, tomando a derivada parcial ∂_μ^x , tem-se

$$\langle \partial_\mu^x A_H^\mu(x) \chi_H(y) \rangle = -d_1 Z_\chi^{1/2} \partial_\mu^x \partial_y^\mu \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle, \quad (6.102)$$

o que comparando com (6.36) leva à $d_1 = 0$. Portanto, (6.99) se transforma em

$$\langle B_H(x) A_H^\mu(y) \rangle = \frac{e_0 \tilde{v}}{Z_\chi^{1/2}} d_3 \partial^\mu \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle. \quad (6.103)$$

Substituindo (6.65) e (6.92) em (6.103) se encontra que $d_3 = \frac{Z_\chi^{1/2}}{\tilde{v} e_0}$, e o mapa dinâmico para $A_H^\mu(x)$ fica

$$A_H^\mu(x) = \frac{Z_\chi^{1/2}}{\tilde{v} e_0} \partial^\mu b_{in} + d_4 U_{in}^\mu(x). \quad (6.104)$$

Defina

$$\langle A_{\mu H}(x) A_{\nu H}(y) \rangle = i \int \frac{d^4 p}{2\pi^4} \exp^{-ip(x-y)} \Delta_{\mu\nu}(p). \quad (6.105)$$

Por outro lado,

$$\langle A_{\mu H}(x) A_{\nu H}(y) \rangle = \frac{Z_\chi}{e_0^2 \tilde{v}} \partial_\mu^x \partial_\mu^y \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle + d_4^2 \langle U_{\mu in}(x) U_{\mu in}(y) \rangle, \quad (6.106)$$

ou, substituindo a expressão para $\langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle$ dada em (6.91),

$$\langle A_{\mu H}(x) A_{\nu H}(y) \rangle = \frac{Z_\chi}{e_0^2 \tilde{v}^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} (-ip_\mu)(ip_\nu) \left(\frac{-1}{p^2} \right) + d_4^2 \langle U_{\mu in}(x) U_{\mu in}(y) \rangle. \quad (6.107)$$

Definindo,

$$\langle U_{\mu in}(x) U_{\nu in}(y) \rangle = i \int \frac{d^4 p}{2\pi^4} \exp^{-ip(x-y)} \Delta_{\mu\nu}^{in}(p), \quad (6.108)$$

a equação (6.107) pode ser escrita como

$$\langle A_{\mu H}(x) A_{\nu H}(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip(x-y)} \left(-\frac{Z_\chi}{e_0^2 \tilde{v}^2} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} + d_4^2 \Delta_{\mu\nu}^{in}(p) \right). \quad (6.109)$$

Portanto, comparando com (6.105), pode-se escrever

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = -\frac{Z_\chi}{e_0^2 \tilde{v}^2} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} + d_4^2 \Delta_{\mu\nu}^{in}(p). \quad (6.110)$$

Resta agora, adequar $\langle A_{\mu H}(x) A_{\nu H}(y) \rangle$ com a identidade (6.37), a qual por sua vez equivale a $p^\mu \Delta_{\mu\nu} = 0$.

Assim, tem-se

$$p^\mu \Delta_{\mu\nu} = -\frac{Z_\chi}{e_0^2 \tilde{v}^2} p_\nu + d_4^2 p^\mu \Delta_{\mu\nu}^{in}(p) = 0, \quad (6.111)$$

ou

$$\frac{Z_\chi}{d_4^2 e_0^2 \tilde{v}^2} p_\nu = p^\mu \Delta_{\mu\nu}^{in}(p), \quad (6.112)$$

de onde, então, vê-se que d_4^2 precisa ser diferente de 0.

O campo $U_{\mu in}$ pode ou não ter massa. Analisar-se-á as duas possibilidades.

- (Caso Massivo): Neste caso, o campo vetorial $U_{\mu in}(x)$ satisfaz a equação de Proca:

$$(\partial^2 + m_v^2) U_{in}^\mu(x) = 0, \quad (6.113)$$

junto da equação $\partial_\mu U_{in}^\mu(x) = 0$. Assim, $\Delta_{\mu\nu}^{in}(p)$ é dado por

$$\Delta_{\mu\nu}^{in}(p) = \frac{-g_{\mu\nu}}{p^2 - m_v^2} + \frac{m_v^{-2} p_\mu p_\nu}{p^2 - m_v^2}. \quad (6.114)$$

Então, (6.112) fornece

$$\frac{-p_\nu}{p^2 - m_v^2} + \frac{p^2 m_v^{-2} p_\nu}{p^2 - m_v^2} = \frac{Z_\chi}{d_4^2 e_0^2 \tilde{v}^2} p_\nu \quad (6.115)$$

e imediatamente $m_v^2 = \frac{d_4^2}{Z_\chi} (e_0^2 \tilde{v}^2)$. É conveniente, portanto, substituir d_4 por $Z_3^{\frac{1}{2}}$, com Z_3 sendo interpretado com uma constante de renormalização.

- (Caso não Massivo): Aqui, o campo vetorial $U_{\mu in}(x)$ satisfaz a equação de campo livre, $\partial^2 U_{\mu in}(x) = 0$ e assim $\Delta_{\mu\nu}^{in}(p)$ é escrito como

$$\Delta_{\mu\nu}^{in}(p) = \frac{-g_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}. \quad (6.116)$$

Logo, (6.112) implica

$$\frac{-p_\nu}{p^2 + i\epsilon} = \frac{Z_\chi}{d_4^2 e_0^2 \tilde{v}^2} p_\nu, \quad (6.117)$$

de tal modo que, $d_4^2 = \frac{-Z_\chi p^2}{e_0^2 \tilde{v}^2}$.

O caso de $U_{\mu in}(x)$ não massivo deve ser descartado, pois não é aceitável d_4 depender do momento, ficando, então, apenas com o caso massivo. O resultado $m_v = \frac{d_4^2}{Z_\chi} (e_0^2 \tilde{v}^2)$ mostra que um valor não nulo do valor esperado do campo vetorial bosônico é devido a uma condição de QES. Isto, junto do fato dos bósons de Nambu-Goldstone não aparecerem no espectro de partículas físicas [8–11, 37–41] é o chamado mecanismo de Higgs. Finalmente, o mapa dinâmico ficou dado por

$$\chi_H(x) = Z_\chi^{\frac{1}{2}} \chi_{in}(x), \quad (6.92 \text{ revisitada})$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + Z_\rho^{1/2} \rho_{in}(x), \quad (6.118)$$

$$B_H(x) = e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-\frac{1}{2}} (-\chi_{in}(x) + b_{in}(x)), \quad (6.94 \text{ revisitada})$$

$$A_H^\mu(x) = \frac{Z_\chi^{1/2}}{\tilde{v} e_0} \partial^\mu b_{in} + Z_3^{1/2} U_{in}^\mu(x). \quad (6.119)$$

6.2 CASO EM REDE

No contexto de rede, tem-se que a ação S_E do modelo Abelian de Higgs-Maxwell é dada por:

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_x \left\{ \sum_{\mu=1}^4 [D_\mu^f \phi(x)]^\dagger [D_\mu^f \phi(x)] + m^2 [\phi(x)]^\dagger [\phi(x)] \right\} + \frac{g}{4!} \sum_x \{ [\phi(x)]^\dagger [\phi(x)] \}^2, \quad (6.120)$$

onde m corresponde ao termo de massa, g correspondente ao termo de auto-interação do campo e D_μ^f à derivada covariante, a qual é implementada por:

$$D_\mu^f \phi(x) = [U(x, x + a\hat{\mu}) \phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x)], \quad (6.121)$$

onde $U(x, x + a\hat{\mu})$ é o campo de calibre e sua relação com o campo $A_\mu(x)$ é dado por

$$U(x + a\hat{\mu}, x) = e^{iaeA_\mu(x)} = U_{x,\mu}. \quad (6.122)$$

Esta ação é invariante sob dois tipos de transformações:

1. Transformações globais de fase, da forma:

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \phi(x), \quad (6.123)$$

$$U_{x,\mu} \rightarrow U_{x,\mu}. \quad (6.124)$$

2. Transformações locais, da forma:

$$\phi(x) \rightarrow e^{ie_0\lambda(x)} \phi(x), \quad (6.125)$$

$$U_{x,\mu} \rightarrow e^{-ie_0\lambda(x+a\hat{\mu})} U_{x,\mu} e^{ie_0\lambda(x)} \quad (6.126)$$

Aqui, $\lambda(x)$ é uma função definida na rede. Além disso, adota-se a definição (6.7) para os campos $\phi(x)$ e $\rho(x)$ com a diferença de que agora estes passam a estar definidos sobre os sítios da rede.

A QES é introduzida através da condição

$$\langle 0 | \phi_H(x) | 0 \rangle \equiv \tilde{v} \neq 0, \quad (6.127)$$

onde $\tilde{v}$ é uma constante e $\phi_H(x)$ é o operador de campo de Heisenberg para $\phi(x)$. Como anteriormente, quando não surgir confusão, usar-se-ão os mesmos símbolos $\phi(x)$ e $U_{x,\mu}$ tanto para os operados de campo de Heisenberg quanto para os correspondentes campos que aparecem no gerador funcional.

O gerador funcional para este modelo é dado por

$$\begin{aligned} Z[J, K] = & \frac{1}{N} \int \prod_x \prod_\mu dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) \exp \left[-S_E - \sum_x \left(K^*(x) \phi(x) + K(x) \phi^*(x) \right. \right. \\ & \left. \left. + i\epsilon |\phi(x) - v|^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (6.128)$$

com

$$N = \int \prod_x \prod_\mu dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) \exp \left[-S_E - \sum_x i\epsilon |\phi(x) - v|^2 \right]. \quad (6.129)$$

Todavia, neste caso, não se tem o termo de campo auxiliar $B(x)$ nem mesmo o termo de fonte para o campo de calibre. Aos leitores interessados o apêndice G contém o procedimento pela qual estes termos podem ser construídos. O termo de fonte do campo de calibre é dado por

$$- \frac{i}{2e_0} \sum_{x,\mu} J_\mu(x) (U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*). \quad (6.130)$$

Enquanto o termo de campo auxiliar $B(x)$ é dado por

$$-\frac{i}{2e_0} \sum_{x,\mu} B(x) \Delta_\mu^f (U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*). \quad (6.131)$$

Assim, os termos de fonte para o campo de calibre e o campo auxiliar podem ser inseridos no funcional gerador (6.128) junto da medida de integração para o campo auxiliar. É conveniente se trocar o termo $i\epsilon|\phi(x) - v|^2$ no funcional gerador por

$$i\epsilon\phi^*(x)\phi(x) - i\epsilon(\phi^*(x)v + \phi(x)v), \quad (6.132)$$

onde o termo v^2 foi descartado uma vez que sua contribuição no denominador e no numerador do gerador funcional se cancelam. Logo, o funcional gerador fica dado por

$$\begin{aligned} Z[J, K] = & \frac{1}{N} \int \prod_x \prod_\mu dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) dB(x) \exp \left[-S_E - \sum_x \left(K^*(x)\phi(x) + K(x)\phi^*(x) \right. \right. \\ & - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu B(x) \Delta_\mu^f (U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*) - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu J_\mu(x) (U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*) \\ & \left. \left. + i\epsilon\phi^*(x)\phi(x) - i\epsilon(\phi^*(x)v + \phi(x)v) \right) \right], \end{aligned} \quad (6.133)$$

com N dado por

$$N = \int \prod_x \prod_\mu dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) \exp \left[-S_E - \sum_x (i\epsilon\phi^*(x)\phi(x) - i\epsilon(\phi^*(x)v + \phi(x)v)) \right]. \quad (6.134)$$

Não há termo de fonte correspondente a $B(x)$ na equação (6.133). O termo ϵ , $i\epsilon|\phi(x) - v|^2$, ou (6.132) é incluído de maneira a induzir uma quebra espontânea da simetria global, (6.123) e (6.124). O limite de ϵ indo a zero é tomado ao final dos cálculos, de maneira análoga ao que foi feito anteriormente. A constante v é assumida sendo real. A notação é análoga ao que foi adotado no caso contínuo.

Novamente, as várias identidades de Ward-Takahashi do modelo são deduzidas sistematicamente realizando-se as mudanças de variáveis (6.123), (6.124), (6.125) e (6.126) na expressão (6.133), para o gerador funcional e requerendo que o mesmo se mantenha inalterado.

6.2.1 Identidades de Ward-Takahashi Globais

A invariância do gerador funcional sob a mudança de variáveis (transformações globais), equações (6.123) e (6.124), levam à identidade básica

$$\sum_x \langle K_1(x)\chi(x) - K_2(x)\psi(x) \rangle_{\epsilon, N, J, K} = i\sqrt{2}\epsilon v \sum_x \langle \chi(x) \rangle_{\epsilon, N, J, K}, \quad (6.135)$$

onde foi utilizado

$$K(x) = \frac{1}{2}[K_1(x) + iK_2(x)]. \quad (6.136)$$

Note que o resultado (6.135) é semelhante ao resultado obtido na subseção 6.1.1. Atuando em (6.135) com $\frac{\delta}{\delta K_2(x)}$ e $\frac{\delta^2}{\delta K_1(x)\delta K_2(y)}$, obtém-se

$$\langle \psi(x) \rangle_\epsilon = i\sqrt{2}\epsilon v \sum_y \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon,N} = \sqrt{2}\epsilon v \Delta_\chi(\epsilon, 0), \quad (6.137)$$

$$\langle \rho(x)\rho(y) \rangle_{\epsilon,N} - \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon,N} = i\sqrt{2}\epsilon v \sum_z \langle \chi(z)\chi(x)\rho(y) \rangle_{\epsilon,N}, \quad (6.138)$$

respectivamente.

6.2.2 Identidades de Ward-Takahashi Locais

As mudanças de variáveis (6.125) e (6.126) no gerador funcional (6.133), junto da invariância deste sobre estas mesmas mudanças de variáveis levam à³

$$\left\langle \frac{1}{2} \sum_\mu \left(\Delta_\mu^b [\Delta_\mu^b B(u)(U_{u,\mu} + U_{u,\mu}^*)] \right) - \frac{1}{2} \sum_\mu \left(\Delta_\mu^b [J_\mu(u)(U_{u,\mu} + U_{u,\mu}^*)] \right) \right. \\ \left. - ie_0(K^*(u)\phi(u) - \phi^*(u)K(u)) - \epsilon e_0(v^*\phi(u) - \phi^*(u)v) \right\rangle_{\epsilon,N,J,K} = 0, \quad (6.139)$$

Utilizando, agora,

$$v^*\phi(x) - v\phi^*(x) = \sqrt{2}iv\chi(x) \quad (6.140)$$

e

$$K^*(x)\phi(x) - K(x)\phi^*(x) = i(K_1(x)\chi(x) - K_2(x)\psi(x)), \quad (6.141)$$

pode-se escrever (6.22) como

$$\left\langle \frac{1}{2} \sum_\mu \left(\Delta_\mu^b [\Delta_\mu^b B(u)(U_{u,\mu} + U_{u,\mu}^*)] \right) - \frac{1}{2} \sum_\mu \left(\Delta_\mu^b [J_\mu(u)(U_{u,\mu} + U_{u,\mu}^*)] \right) \right. \\ \left. + e_0(K_1(u)\chi(u) - K_2(u)\psi(u)) \right\rangle_{\epsilon,N,J,K} = i\sqrt{2}\epsilon e_0 v \langle \chi(u) \rangle_{\epsilon,N,J,K}. \quad (6.142)$$

Todavia, devido aos cálculos que ainda serão realizados abaixo é mais conveniente trabalhar a expressão (6.142) com a função dependente de calibre explícita $\lambda(x)$. Para tal, multiplica-se (6.142) por $\sum_x \lambda(x)$, trocando a variável u por x :

³A demonstração da equação (6.139) se encontra no apêndice H.

$$\begin{aligned} & \sum_x \left\langle \frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(\Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(x)(U_{x,\mu} + U_{x,\mu}^*)] \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(\Delta_{\mu}^b [J_{\mu}(x)(U_{x,\mu} + U_{x,\mu}^*)] \right) \right. \\ & \left. + e_0 (K_1(x)\chi(x) - K_2(x)\psi(x)) \right\rangle_{\epsilon, N, J, K} \lambda(x) = i\sqrt{2}\epsilon e_0 v \sum_x \langle \chi(x) \rangle_{\epsilon, N, J, K} \lambda(x). \end{aligned} \quad (6.143)$$

Operando com $\delta/\delta K_2(y)$ e $\delta/\delta J_{\nu}(y)$ em (6.143), obtém-se:

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left\langle \Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(x)(U_{x,\mu} + U_{x,\mu}^*)] \chi(y) \right\rangle_{\epsilon, N} + e_0 \langle \psi(x) \rangle_{\epsilon, N} \delta(x, y) = i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon, N}, \quad (6.144)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2e_0} \sum_{\mu} \left\langle \Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(x)(U_{x,\mu} + U_{x,\mu}^*)] (U_{y,\nu} - U_{y,\nu}^*) \right\rangle_{\epsilon, N} - \Delta_{\nu}^b \left\langle \delta(x, y) (U_{x,\nu} + U_{x,\nu}^*) \right\rangle_{\epsilon, N} \\ & = -\sqrt{2}\epsilon v \langle \chi(x)(U_{y,\nu} - U_{y,\nu}^*) \rangle_{\epsilon, N}. \end{aligned} \quad (6.145)$$

O gerador funcional deve ser ainda invariante pela transformação $B(x) \rightarrow B(x) + \lambda(x)$, o que fornece⁴

$$\sum_{\mu} \langle \Delta_{\mu}^f (U_{u,\mu} - U_{u,\mu}^*) \rangle_{\epsilon, N, J, K} = 0. \quad (6.146)$$

Atuando com as derivadas funcionais $\delta/\delta K_2(y)$ e $\delta/\delta J_{\nu}(y)$ na equação (6.146), obtém-se respectivamente:

$$\sum_{\mu} \langle \Delta_{\mu}^f (U_{u,\mu} - U_{u,\mu}^*) \chi(y) \rangle_{\epsilon, N} = 0. \quad (6.147)$$

$$\sum_{\mu} \langle \Delta_{\mu}^f (U_{u,\mu} - U_{u,\mu}^*) (U_{y,\nu} - U_{y,\nu}^*) \rangle_{\epsilon, N} = 0. \quad (6.148)$$

Uma outra identidade é obtida quando transformações de simetria locais são realizadas nas funções de Green:

$$\left(\frac{1}{2} \right)^n \left\langle \sum_{\alpha_1} \left(\Delta_{\alpha_1}^b [\Delta_{\alpha_1}^b B(x_1)(U_{x_1, \alpha_1} + U_{x_1, \alpha_1}^*)] \right) \cdots \sum_{\alpha_n} \left(\Delta_{\alpha_n}^b [\Delta_{\alpha_n}^b B(x_1)(U_{x_n, \alpha_n} + U_{x_n, \alpha_n}^*)] \right) \right\rangle. \quad (6.149)$$

Note que neste caso apenas a exponencial sente a mudança de variáveis. Assim, tem-se imediatamente

⁴ A demonstração da equação (6.146) pode ser encontrada no apêndice H.

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{2} \right)^n \sum_x \left\langle \left[\sum_{\alpha_1} \left(\Delta_{\alpha_1}^b [\Delta_{\alpha_1}^b B(x_1)(U_{x_1, \alpha_1} + U_{x_1, \alpha_1}^*)] \right) \dots \sum_{\alpha_n} \left(\Delta_{\alpha_n}^b [\Delta_{\alpha_n}^b B(x_1)(U_{x_n, \alpha_n} + U_{x_n, \alpha_n}^*)] \right) \right] \right. \\
& \times \left[\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(\Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(x)(U_{x, \mu} + U_{x, \mu}^*)] \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(\Delta_{\mu}^b [J_{\mu}(x)(U_{x, \mu} + U_{x, \mu}^*)] \right) \right. \\
& \left. \left. + e_0(K_1(x)\chi(x) - K_2(x)\psi(x)) \right] \right\rangle_{\epsilon, N, J, K} \lambda(x) = i\sqrt{2}\epsilon e_0 v \left(\frac{1}{2} \right)^n \sum_x \left\langle \left[\right. \right. \\
& \sum_{\alpha_1} \left(\Delta_{\alpha_1}^b [\Delta_{\alpha_1}^b B(x_1)(U_{x_1, \alpha_1} + U_{x_1, \alpha_1}^*)] \right) \dots \\
& \left. \left. \times \sum_{\alpha_n} \left(\Delta_{\alpha_n}^b [\Delta_{\alpha_n}^b B(x_1)(U_{x_n, \alpha_n} + U_{x_n, \alpha_n}^*)] \right) \right] \chi(x) \right\rangle_{\epsilon, N, J, K} \lambda(x). \tag{6.150}
\end{aligned}$$

Fazendo $n = 1$ e $J = K = 0$ em (6.150) se obtém

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \sum_{\nu} \sum_{\mu} \left\langle \left(\Delta_{\nu}^b [\Delta_{\nu}^b B(y)(U_{y, \nu} + U_{y, \nu}^*)] \right) \left(\Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(x)(U_{x, \mu} + U_{x, \mu}^*)] \right) \right\rangle_{\epsilon, N} = \\
& i\epsilon e_0 v \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{\nu} \left\langle \Delta_{\nu}^b [\Delta_{\nu}^b B(y)(U_{y, \nu} + U_{y, \nu}^*)] \chi(x) \right\rangle_{\epsilon, N}. \tag{6.151}
\end{aligned}$$

Finalmente, como resultado da invariância sob $(\chi, U_{x, \mu}, B) \rightarrow (-\chi, U_{x, \mu}^*, -B)$ todas as demais funções de dois pontos são nulas:

$$\langle \rho(x) B(y) \rangle_{\epsilon, N} = \langle \rho(x) \chi(y) \rangle_{\epsilon, N} = \langle \rho(x) (U_{x, \mu} - U_{x, \mu}^*) \rangle_{\epsilon, N} = 0. \tag{6.152}$$

6.2.3 Estrutura de polos das funções de dois pontos

Uma vez determinadas as identidades de Ward-Takahashi para as funções de dois pontos, pode-se estudar as implicações das mesmas. O apêndice L contém algumas derivadas úteis para o que se segue. Das equações (6.137) e (6.138), tem-se

$$\tilde{v} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \psi(x)_{\epsilon, N} \neq 0, \tag{6.153}$$

onde neste caso já se assumiu QES. Tem-se assim que o propagador de χ contém um polo de massa zero,

$$\langle \chi(x) \chi(y) \rangle_{\epsilon, N} = \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{\chi}(p, \epsilon), \tag{6.154}$$

com

$$\Delta_{\chi}(p, \epsilon) = \frac{Z_{\chi}}{\rho^2(p) + i\epsilon a_{\chi}} + (\text{contribuições contínuas}), \tag{6.155}$$

e

$$\tilde{v} = \sqrt{2}v \frac{Z_\chi}{a_\chi}. \quad (6.156)$$

Note que o resultado acima é a afirmação do teorema de Goldstone.

Agora, define-se as seguintes transformadas de Fourier para algumas das funções de correlação do modelo:

$$\langle B(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon,N} = \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{B\chi}(p, \epsilon), \quad (6.157)$$

$$\langle B(x)G_{y,\nu} \rangle_{\epsilon,N} = \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{BG}(p, \epsilon), \quad (6.158)$$

$$\langle B(x)B(y) \rangle_{\epsilon,N} = \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{BB}(p, \epsilon). \quad (6.159)$$

Porém, antes de proceder é necessário fazer a seguinte aproximação⁵:

$$(U_{x,\mu} + U_{x,\mu}^*) = 2 \quad (6.160)$$

junto da definição

$$(U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*) = 2G_{x,\mu}, \quad (6.161)$$

de tal modo que as identidades (6.144), (6.145), (6.147), (6.148) e (6.151) se transformam respectivamente em:

$$\sum_\mu \left\langle \Delta_\mu^b [\Delta_\mu^b B(x)] \chi(y) \right\rangle_{\epsilon,N} + e_0 \langle \psi(x) \rangle_{\epsilon,N} \delta(x, y) = i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon,N}, \quad (6.162)$$

$$\frac{i}{e_0} \sum_\mu \left\langle \Delta_\mu^b [\Delta_\mu^b B(x)] G_{y,\nu} \right\rangle_{\epsilon,N} - \Delta_\nu^b \langle \delta(x, y) \rangle_{\epsilon,N} = -\sqrt{2}\epsilon v \langle \chi(x) G_{y,\nu} \rangle_{\epsilon,N}, \quad (6.163)$$

$$\sum_\mu \langle \Delta_\mu^f G_{u,\mu} \chi(y) \rangle_{\epsilon,N} = 0, \quad (6.164)$$

$$\sum_\mu \langle \Delta_\mu^f G_{u,\mu} G_{y,\nu} \rangle_{\epsilon,N} = 0 \quad (6.165)$$

e

$$\sum_\nu \sum_\mu \left\langle \left(\Delta_\nu^b [\Delta_\nu^b B(y)] \right) \left(\Delta_\mu^b [\Delta_\mu^b B(x)] \right) \right\rangle_{\epsilon,N} = i\sqrt{2}\epsilon e_0 v \sum_\nu \left\langle \Delta_\nu^b [\Delta_\nu^b B(y)] \chi(x) \right\rangle_{\epsilon,N}. \quad (6.166)$$

⁵Esta aproximação é o resultado de se fazer a , a constante de espaçamento da rede, muito menor que 1. Ela surgiu como necessidade em um primeiro momento de simplificar a estrutura das identidades de Ward-Takahashi. Observe ainda que nos cálculos apresentados nesta subseção, essa aproximação não foi introduzida para todos os campos, o que seria equivalente ao se tomar o limite do contínuo. Além disso, o termo $G_{x,\mu}$ vai à $ie_0 A_\mu(x)$ no limite do contínuo.

Combinando as identidades apresentadas de (6.162) até (6.166) e as definições das transformadas de Fourier, é possível encontrar as seguintes funções de dois pontos⁶:

$$\langle \chi(x)\chi(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{Z_\chi}{\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi} \right] + \text{contribuições contínuas.} \quad (6.167)$$

$$\langle B(x)\chi(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{e_0 \tilde{\nu} \rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(p_\mu) [\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi]} \right]. \quad (6.168)$$

$$\langle B(x)G_{y,\nu} \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{2e_0}{\tilde{\rho}(p_\nu)} \right]. \quad (6.169)$$

$$\langle B(x)B(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \left(-i\sqrt{2}\epsilon \nu e_0 \frac{e_0 \tilde{\nu} \rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(-p_\mu) \tilde{\rho}^2(p_\mu) [\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi]} \right) \right]. \quad (6.170)$$

6.2.4 Mapa dinâmico

Agora, é interessante estudar os mapas dinâmicos para este modelo. A discussão basear-se-á nas referências [12, 33, 35], entretanto, aqui se tem uma situação em rede de modo que um dos elementos guias é que no limite do contínuo se recupere a formulação adequada. Assim, propõe-se a existência de quatro campos físicos, a saber $\chi_{in}(x)$, $\rho_{in}(x)$, $b_{in}(x)$ e $G_{in}(x + a\hat{\mu}, x)$, baseados na existência de quatro campos associados aos operadores de Heisenberg, ψ_H , χ_H , B_H , $G_H(x + a\hat{\mu}, x)$.

Inicialmente, cada operador de Heisenberg pode depender de todos os outros operadores de campo assintóticos:

$$\chi_H(x) = a_0 + a_1 \chi_{in}(x) + a_2 \rho_{in}(x) + a_3 b_{in}(x) + a_4 \sum_\mu \Delta_\mu^f G_{in}(x + a\hat{\mu}, x), \quad (6.171)$$

$$\rho_H(x) = b_0 + b_1 \chi_{in}(x) + b_2 \rho_{in}(x) + b_3 b_{in}(x) + b_4 \sum_\mu \Delta_\mu^f G_{in}(x + a\hat{\mu}, x), \quad (6.172)$$

$$B_H(x) = c_0 + c_1 \chi_{in}(x) + c_2 \rho_{in}(x) + c_3 b_{in}(x) + c_4 \sum_\mu \Delta_\mu^f G_{in}(x + a\hat{\mu}, x), \quad (6.173)$$

$$G_H(x + a\hat{\mu}, x) = d_0(\hat{\mu}) + d_1 \Delta_\mu^b \chi_{in}(x) + d_2 \Delta_\mu^b \rho_{in}(x) + d_3 \Delta_\mu^b b_{in}(x) + d_4 G_{in}(x + a\hat{\mu}, x), \quad (6.174)$$

onde os elementos de matrizes dos operadores de Heisenberg em termos dos elementos de campos assintóticos são dados pelas funções de Green do modelo. O cálculo dos coeficientes do mapa dinâmico é análogo ao feito no caso contínuo, assim, ele foi omitido, entretanto, aos leitores que tiverem interesse ele poder ser consultado no apêndice J. Os três primeiros mapas dinâmicos ficam dados por

⁶Para mais detalhes dos cálculos utilizados consulte o apêndice I.

$$\chi_H(x) = Z_\chi^{1/2} \chi_{in}(x), \quad (6.175)$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + Z^{1/2} \rho_{in}(x), \quad (6.176)$$

$$B_H(x) = e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-1} \left\{ \frac{\rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(p_\mu)} \chi_{in}(x) + \left\{ \frac{[\rho^2(p)]^2}{[\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi] \tilde{\rho}^2(p_\mu)} \left[\frac{\rho^2(p)}{\rho^2(p_\mu)} + \frac{i\epsilon a_\chi}{\tilde{\rho}^2(-p_\mu)} \right] \right\}^{1/2} b_{in}(x) \right\}. \quad (6.177)$$

É possível continuar e analisar o quarto mapa dinâmico. O problema é que os coeficientes da técnica de mapa dinâmico deveriam ser constantes, o que não é o caso aqui. Assim, não há razão para continuar com este procedimento de cálculo, ou aproximação, pois uma das hipóteses básicas do método é violado em rede, quase que imediatamente.

Considerando que esta primeira aproximação falhou em produzir os resultados esperados, segue-se tentando outras aproximações, já adiantando alguns pontos, uma das aproximações a seguir produzirá um resultado parcialmente positivo, entretanto este será confrontado em relação ao Teorema de Haag para compreender, o porquê de algumas aproximações falharem, enquanto outras não.

6.2.5 Aproximação $a \ll 1$

Identidades de Ward-Takahashi

A aproximação adotada, agora, é implementa uma sutil diferença em relação à anterior. Ela é realizada em todos os campos, e não apenas nos campos de calibre. Isto é feito por meio das seguintes expressões:

$$B(x) \rightarrow a^2 B(x), \quad (6.178)$$

$$\Delta_\mu^{f,b} \rightarrow a \tilde{\Delta}_\mu^{f,b}, \quad (6.179)$$

$$\phi(x) \rightarrow a \phi(x), \quad (6.180)$$

$$v \rightarrow av, \quad (6.181)$$

$$\epsilon \rightarrow a^2 \epsilon, \quad (6.182)$$

$$J_\mu \rightarrow a^3 J_\mu, \quad (6.183)$$

$$U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^* \rightarrow 2ie_0 a A_\mu(x), \quad (6.184)$$

$$\delta(x, y) \rightarrow a^4 \delta(x - y), \quad (6.185)$$

$$G_{x,\mu} \rightarrow ie_0 a A_\mu(x), \quad (6.186)$$

as quais serão substituídas nos geradores funcionais obtidos nas subseções 6.2.1 e 6.2.2. Começando com a identidade global (6.137) se obtém

$$\begin{aligned} \langle a\psi(x) \rangle_\epsilon &= i\sqrt{2}a^2 \epsilon av \sum_y \langle a\chi(x) a\chi(y) \rangle_{\epsilon, N}, \\ a \left\{ \langle \psi(x) \rangle_\epsilon \right\} &= ai\sqrt{2}\epsilon v \sum_y a^4 \langle \chi(x) \chi(y) \rangle_{\epsilon, N}. \end{aligned} \quad (6.187)$$

Entretanto, agora,

$$\sum_y a^4 \langle \chi(x) \chi(y) \rangle_{\epsilon, N} = \Delta_\chi(0, \epsilon). \quad (6.188)$$

Portanto,

$$a \left\{ \langle \psi(x) \rangle_\epsilon = ai\sqrt{2}\epsilon v \Delta_\chi(0, \epsilon) \right\}, \quad (6.189)$$

enquanto (6.138) fornece

$$\begin{aligned} \langle a\rho(x)a\rho(y) \rangle_{\epsilon, N} - \langle a\chi(x)a\chi(y) \rangle_{\epsilon, N} &= i\sqrt{2}a^2\epsilon av \sum_z \langle a\chi(z)a\chi(x)a\rho(y) \rangle_{\epsilon, N} \\ a^2 \left\{ \langle \rho(x)\rho(y) \rangle_{\epsilon, N} - \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon, N} &= i\sqrt{2}\epsilon v \sum_z a^4 \langle \chi(z)\chi(x)\rho(y) \rangle_{\epsilon, N} \right\}, \end{aligned} \quad (6.190)$$

o que é natural haja visto que agora todas as somas no espaço das posições devem carregar termos de a^4 , assim como ocorreu em (6.188). A identidade local (6.139) se torna

$$\begin{aligned} \sum_\mu \left\langle a\tilde{\Delta}_\mu^b [a\tilde{\Delta}_\mu^b a^2 B(x)] a\chi(y) \right\rangle_{\epsilon, N} + e_0 \langle a\psi(x) \rangle_{\epsilon, N} a^4 \delta(x, y) &= i\sqrt{2}a^2\epsilon ave_0 \langle a\chi(x)a\chi(y) \rangle_{\epsilon, N} \\ a^5 \left\{ \sum_\mu \left\langle \tilde{\Delta}_\mu^b [\tilde{\Delta}_\mu^b B(x)] \chi(y) \right\rangle_{\epsilon, N} + e_0 \langle \psi(x) \rangle_{\epsilon, N} \delta(x, y) &= i\sqrt{2}\epsilon ve_0 \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon, N} \right\}. \end{aligned} \quad (6.191)$$

Por sua vez a identidade (6.145) se transforma em

$$\begin{aligned} \sum_\mu \left\langle a\tilde{\Delta}_\mu^b [a\tilde{\Delta}_\mu^b a^2 B(x)] aA_\nu(y) \right\rangle_{\epsilon, N} + a\tilde{\Delta}_\nu^b \left\langle a^4 \delta(x, y) \right\rangle_{\epsilon, N} &= i\sqrt{2}a^2\epsilon ave_0 \langle a\chi(x)aA_\nu(y) \rangle_{\epsilon, N} \\ a^5 \left\{ \sum_\mu \left\langle \tilde{\Delta}_\mu^b [\tilde{\Delta}_\mu^b B(x)] A_\nu(y) \right\rangle_{\epsilon, N} + \tilde{\Delta}_\nu^b \left\langle \delta(x, y) \right\rangle_{\epsilon, N} &= i\sqrt{2}\epsilon ve_0 \langle \chi(x)A_\nu(y) \rangle_{\epsilon, N} \right\}. \end{aligned} \quad (6.192)$$

A partir da identidade (6.146) se tem

$$\begin{aligned} \sum_\mu \langle a\tilde{\Delta}_\mu^f aA_\mu(u) \rangle_{\epsilon, N} &= 0 \\ a^2 \left\{ \sum_\mu \langle \tilde{\Delta}_\mu^f A_\mu(u) \rangle_{\epsilon, N} \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (6.193)$$

A identidade (6.147) se reduz a

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \langle a \tilde{\Delta}_{\mu}^f a A_{\mu}(u) a \chi(y) \rangle_{\epsilon, N} &= 0 \\ a^3 \left\{ \sum_{\mu} \langle \tilde{\Delta}_{\mu}^f A_{\mu}(u) \chi(y) \rangle_{\epsilon, N} \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (6.194)$$

enquanto (6.148) a

$$\begin{aligned} \sum_{\mu} \langle a \tilde{\Delta}_{\mu}^f a A_{\mu}(u) a A_{\nu}(y) \rangle_{\epsilon, N} &= 0 \\ a^3 \left\{ \sum_{\mu} \langle \tilde{\Delta}_{\mu}^f A_{\mu}(u) A_{\nu}(y) \rangle_{\epsilon, N} \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (6.195)$$

Do mesmo modo (6.151) levou a

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \sum_{\mu} \left\langle \left(a \tilde{\Delta}_{\nu}^b [a \tilde{\Delta}_{\nu}^b a^2 B(y)] \right) \left(a \tilde{\Delta}_{\mu}^b [a \tilde{\Delta}_{\mu}^b a^2 B(x)] \right) \right\rangle_{\epsilon, N} &= i\sqrt{2}a^2 \epsilon a v e_0 \left\langle a \tilde{\Delta}_{\nu}^b [a \tilde{\Delta}_{\nu}^b a^2 B(y)] a \chi(x) \right\rangle_{\epsilon, N} \\ a^8 \left\{ \sum_{\nu} \sum_{\mu} \left\langle \left(\tilde{\Delta}_{\nu}^b [\tilde{\Delta}_{\nu}^b B(y)] \right) \left(\tilde{\Delta}_{\mu}^b [\tilde{\Delta}_{\mu}^b B(x)] \right) \right\rangle_{\epsilon, N} \right\} &= i\sqrt{2} \epsilon v e_0 \left\langle \tilde{\Delta}_{\nu}^b [\tilde{\Delta}_{\nu}^b B(y)] \chi(x) \right\rangle_{\epsilon, N}. \end{aligned} \quad (6.196)$$

Finalmente, (6.152) fica

$$a^3 \left\{ \langle \rho(x) B(y) \rangle_{\epsilon, N} \right\} = a^3 \left\{ \langle \rho(x) \chi(y) \rangle_{\epsilon, N} \right\} = a^2 \left\{ \langle \rho(x) \tilde{A}_{\mu}(y) \rangle_{\epsilon, N} \right\} = 0. \quad (6.197)$$

As expressões que serão utilizadas nos próximos tópicos são os elementos entre colchetes, pois as relações obtidas devem valer para qualquer que seja a , na aproximação.

Estrutura de polos das funções de dois pontos

Determinadas as identidades de Ward-Takahashi para as funções de dois pontos, segue-se com a determinação de suas estruturas. Para tal, assumir-se-á quebra espontânea de simetria. Entretanto, alguns elementos precisam ser revistos, devido a forma em que a aproximação é adotada. Assim, tem-se

$$\langle \chi(x) \chi(y) \rangle_{\epsilon, N} = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{\chi}(p, \epsilon), \quad (6.198)$$

onde $\Delta_{\chi}(p, \epsilon)$ é

$$\Delta_{\chi}(p, \epsilon) = \frac{Z_{\chi}}{p^2 + i\epsilon a_{\chi}}. \quad (6.199)$$

Note a presença do fator a^4 no denominador da expressão da transformada de Fourier, de maneira análoga as transformadas de Fourier definidas neste e no próximo tópico carregarão um fator de $1/a^4$. Além disso, observe que (6.199) não carrega mais uma função do momento na forma $\rho^2(p)$, mas sim o próprio momento.

Define-se

$$\langle B(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon,N} = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{B\chi}(p, \epsilon), \quad (6.200)$$

$$\langle B(x)A_\nu(y) \rangle_{\epsilon,N} = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{BA}(p, \epsilon). \quad (6.201)$$

$$\langle B(x)B(y) \rangle_{\epsilon,N} = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{BB}(p, \epsilon). \quad (6.202)$$

Combinando as definições acima com as identidades construídas na subsubseção anterior, finalmente se chega as seguintes funções de dois pontos:

$$\langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon,N} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{Z_\chi}{p^2 + i\epsilon a_\chi} \right]. \quad (6.203)$$

$$\langle B(x)\chi(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{e_0 \tilde{v}}{\sum_\mu p_\mu^2 + i\epsilon a_\chi} \right]. \quad (6.204)$$

$$\langle B(x)A_\nu(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{\sum_\nu ip_\nu} \right]. \quad (6.205)$$

$$\langle B(x)B(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{(e_0 \tilde{v})^2}{Z_\chi} \left(\frac{1}{\sum_\mu p_\mu^2 + i\epsilon a_\chi} - \frac{1}{\sum_\nu p_\nu^2} \right) \right]. \quad (6.206)$$

As diferenças destas em relações as funções obtidas no caso contínuo se resumem a ausência do fator imaginário, a utilização do somatório ao invés da integral, e as diferenças de sinal, por exemplo, em (6.204) em relação à (6.64).

Mapa dinâmico

Obtidas as funções de correlações de dois pontos (6.203) até (6.206), pode-se prosseguir com a construção dos mapas dinâmicos, novamente basear-se-á nas referências [12, 33, 35]. Portanto, propõem-se a existência de quatro campos físicos, a saber $\chi_{in}(x)$, $\rho_{in}(x)$, $b_{in}(x)$ e $A_{\mu_{in}}(x)$, devido à existência de quatro campos associados aos operadores de Heisenberg, ψ_H , χ_H , B_H , $A_{\mu_{in}}(x)$.

A função de dois pontos para o campo χ , equação (6.203), mostra que ele é não massivo, além disso quando combinado com (6.189) é possível notar que ele é um bóson de Nambu Goldstone. Portanto, seu campo físico irá satisfazer uma equação de campo livre. Neste modelo, tem-se também mais um campo físico livre não massivo b_{in} , que aparece por meio da equação (6.206), entretanto ele é um ghost (estado de norma negativa).

A expansão dos elementos de matrizes dos operadores de Heisenberg em termos dos elementos dos campos assintóticos se dá por

$$\chi_H(x) = a_0 + a_1\chi_{in}(x) + a_2\rho_{in}(x) + a_3b_{in}(x) + a_4\sum_{\mu}\tilde{\Delta}_{\mu}^f A_{\mu_{in}}(x), \quad (6.207)$$

$$\rho_H(x) = b_0 + b_1\chi_{in}(x) + b_2\rho_{in}(x) + b_3b_{in}(x) + b_4\sum_{\mu}\tilde{\Delta}_{\mu}^f A_{\mu_{in}}(x), \quad (6.208)$$

$$B_H(x) = c_0 + c_1\chi_{in}(x) + c_2\rho_{in}(x) + c_3b_{in}(x) + c_4\sum_{\mu}\tilde{\Delta}_{\mu}^f A_{\mu_{in}}(x), \quad (6.209)$$

$$A_{\mu_H}(x) = d_0^{\mu} + d_1\tilde{\Delta}_{\mu}^b\chi_{in}(x) + d_2\tilde{\Delta}_{\mu}^b\rho_{in}(x) + d_3\tilde{\Delta}_{\mu}^b b_{in}(x) + d_4A_{\mu_{in}}(x), \quad (6.210)$$

onde os coeficientes da expansão serão dados por meio das funções de Green do modelo. É possível fazer os coeficientes $a_0 = c_0 = 0$, $b_0 = \tilde{v}$ e $d_0^{\mu} = 0$, pois $\langle\chi_H\rangle = \langle B_H\rangle = \langle A_{\mu_H}\rangle = 0$ e $\langle\rho_H\rangle = \tilde{v}$ e o valor esperado de todos os campos assintóticos é nulo. Por meio do seguinte Ansatz, $a_2 = b_1 = b_3 = b_4 = c_2 = d_2 = 0$, tem-se que as identidades (6.197) ficam automaticamente satisfeitas e resolvidas. Assim, o mapa dinâmico se reduz a

$$\chi_H(x) = a_1\chi_{in}(x) + a_3b_{in}(x) + a_4\sum_{\mu}\tilde{\Delta}_{\mu}^f A_{\mu_{in}}(x), \quad (6.211)$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + b_2\rho_{in}(x), \quad (6.212)$$

$$B_H(x) = c_1\chi_{in}(x) + c_3b_{in}(x) + c_4\sum_{\mu}\tilde{\Delta}_{\mu}^f A_{\mu_{in}}(x), \quad (6.213)$$

$$A_{\mu_H}(x) = d_1\tilde{\Delta}_{\mu}^b\chi_{in}(x) + d_3\tilde{\Delta}_{\mu}^b b_{in}(x) + d_4A_{\mu_{in}}(x), \quad (6.214)$$

A expressão (6.194) combinada com (6.214) fornece

$$d_1\langle\tilde{\Delta}^2\chi_{in}(x)\rangle + d_3\langle\tilde{\Delta}^2b_{in}(x)\rangle + d_4\sum_{\mu}\langle\tilde{\Delta}_{\mu}^f A_{\mu_{in}}(x)\rangle = 0. \quad (6.215)$$

uma vez que b_{in} e χ_{in} satisfazem equações de campo livre, a expressão (6.215) se torna

$$d_4\sum_{\mu}\langle\tilde{\Delta}_{\mu}^f A_{\mu_{in}}(x)\rangle = 0. \quad (6.216)$$

Como não é adequado escolher $d_4 = 0$, a única opção plausível é $\sum_{\mu}\langle\tilde{\Delta}_{\mu}^f A_{\mu_{in}}(x)\rangle = 0$. Agora, novamente as igualdades utilizadas no mapa dinâmico são fracas, o que significa que só valem entre os elementos de matriz. Sabendo disso, pode-se combinar (6.216) com o mapa, o qual é então reescrito como

$$\chi_H(x) = a_1\chi_{in}(x) + a_3b_{in}(x), \quad (6.217)$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + b_2\rho_{in}(x), \quad (6.218)$$

$$B_H(x) = c_1\chi_{in}(x) + c_3b_{in}(x), \quad (6.219)$$

$$A_{\mu_H}(x) = d_1\tilde{\Delta}_{\mu}^b\chi_{in}(x) + d_3\tilde{\Delta}_{\mu}^b b_{in}(x) + d_4A_{\mu_{in}}(x). \quad (6.220)$$

O campo assintótico ρ_{in} associado a ρ_H deve ser massivo. Neste caso, sua equação de campo livre é

$$(\Delta^2 + m_\rho^2)\rho_{in}(x) = 0, \quad (6.221)$$

e a função de correlação $\langle \rho_H(x)\rho_H(y) \rangle$ deve ser da forma

$$\langle \rho_H(x)\rho_H(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{Z_\rho}{p^2 + m_\rho^2 + i\epsilon a_\rho} \right], \quad (6.222)$$

enquanto a função de correlação $\langle \rho_{in}(x)\rho_{in}(y) \rangle$ é da forma

$$\langle \rho_{in}(x)\rho_{in}(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{p^2 + m_\rho^2 + i\epsilon a_\rho} \right]. \quad (6.223)$$

Comparando às equações (6.222) e (6.223) junto de (6.218) se vê que $b_2 = Z_\rho^{1/2}$.

Agora, ir-se-á estudar as funções de correlação $\langle \chi_H(x)\chi_H(y) \rangle$, $\langle B_H(x)\chi_H(y) \rangle$ e $\langle B_H(x)B_H(y) \rangle$, entretanto, é importante salientar que funções de dois pontos de campos assintóticos diferentes é nula, pois estes não podem estar correlacionados. Assim, segue

$$\langle \chi_H(x)\chi_H(y) \rangle = a_1^2 \langle \chi_{in}(x)\chi_{in}(y) \rangle + a_3^2 \langle b_{in}(x)b_{in}(y) \rangle, \quad (6.224)$$

$$\langle B_H(x)\chi_H(y) \rangle = a_1 c_1 \langle \chi_{in}(x)\chi_{in}(y) \rangle + a_3 c_3 \langle b_{in}(x)b_{in}(y) \rangle, \quad (6.225)$$

$$\langle B_H(x)B_H(y) \rangle = c_1^2 \langle \chi_{in}(x)\chi_{in}(y) \rangle + c_3^2 \langle b_{in}(x)b_{in}(y) \rangle. \quad (6.226)$$

b_{in} é um campo assintótico livre e também um estado com norma negativa (ghost), logo sua função de dois pontos introduz ghosts em outras funções de dois pontos quando estiver presente. Uma vez que em (6.224) não se tem ghost no lado esquerdo, a_3 deve ser feito igual a zero em (6.224), para que o lado direito concorde com o esquerdo.

Propõem-se a seguinte estrutura para o correlator de $\langle \chi_{in}(x)\chi_{in}(y) \rangle$:

$$\langle \chi_{in}(x)\chi_{in}(y) \rangle = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{\sum_\mu p_\mu^2 + i\epsilon a_\chi}. \quad (6.227)$$

Esta, junto de (6.203) e (6.224), permite concluir que $a_1 = Z_\chi^{1/2}$. Utilizando este resultado em (6.227) junto de $a_3 = 0$, encontra-se

$$\langle B_H(x)\chi_H(y) \rangle = c_1 Z_\chi^{1/2} \langle \chi_{in}(x)\chi_{in}(y) \rangle. \quad (6.228)$$

Combinando a equação (6.204) e (6.227) em (6.228), obtém-se

$$c_1 = Z_\chi^{-1/2} e_0 \tilde{v}. \quad (6.229)$$

Logo, até o presente momento, os três primeiros mapas dinâmicos são

$$\chi_H(x) = Z_\chi^{1/2} \chi_{in}(x), \quad (6.230)$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + Z_\rho^{1/2} \rho_{in}(x), \quad (6.231)$$

$$B_H(x) = Z_\chi^{-1/2} e_0 \tilde{v} \chi_{in}(x) + c_2 b_{in}(x). \quad (6.232)$$

Substituindo os resultados de (6.230) até (6.232) em (6.228), fica-se com

$$\langle B_H(x)B_H(y) \rangle = Z_\chi^{-1} e_0^2 \tilde{v}^2 \langle \chi_{in}(x)\chi_{in}(y) \rangle + c_3^2 \langle b_{in}(x)b_{in}(y) \rangle. \quad (6.233)$$

$\langle b_{in}(x)b_{in}(y) \rangle$ deve ter a seguinte estrutura para a sua função de dois pontos

$$\langle b_{in}(x)b_{in}(y) \rangle = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \left(-\frac{1}{\sum_\mu p_\mu^2} \right). \quad (6.234)$$

Utilizando em (6.228) as equações (6.206), (6.227) e (6.234), encontra-se que c_3 é

$$c_3 = e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-1}. \quad (6.235)$$

Portanto, os três primeiros mapas dinâmicos ficam dados por

$$\chi_H(x) = Z_\chi^{1/2} \chi_{in}(x), \quad (6.236)$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + Z_\rho^{1/2} \rho_{in}(x), \quad (6.237)$$

$$B_H(x) = e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-1} (\chi_{in}(x) + b_{in}(x)). \quad (6.238)$$

Agora, determinar-se-ão os coeficientes para o quarto mapa dinâmico. Para este, pode-se analisar três funções de correlação $\langle A_{\mu_H}(x)\chi_H(y) \rangle$, $\langle B_H(x)A_{\mu_H}(y) \rangle$ e $\langle A_{\mu_H}(x)A_{\nu_H}(y) \rangle$. Para a primeira, tem-se

$$\langle A_{\mu_H}(x)\chi_H(y) \rangle = d_1 Z_\chi^{1/2} \langle \tilde{\Delta}_\mu^b \chi_{in}(x)\chi_{in}(y) \rangle. \quad (6.239)$$

Atuando-se em (6.239) com $\sum_\mu \tilde{\Delta}_\mu^f(x)$, chega-se em

$$0 = d_1 Z_\chi^{1/2} \sum_\mu \tilde{\Delta}^2(x) \langle \chi_{in}(x)\chi_{in}(y) \rangle. \quad (6.240)$$

O termo de derivada atuando na função de correlação, no lado direito da equação (6.240), não é nulo, assim $d_1 = 0$ é a única maneira da expressão acima ser satisfeita.

Para o segundo termo $\langle B_H(x)A_{\mu_H}(y) \rangle$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle B_H(x)A_{\mu_H}(y) \rangle &= d_3 e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-1/2} \langle b_{in}(x) \tilde{\Delta}_\mu^b(y) b_{in}(y) \rangle \\ &= d_3 e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-1/2} \tilde{\Delta}_\mu^b(y) \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \left(-\frac{1}{\sum_\mu p_\mu^2} \right) \\ \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{\sum_\nu ip_\mu} &= \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} d_3 e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-1/2} \frac{(-i)p_\mu}{\sum_\mu p_\mu^2}, \end{aligned} \quad (6.241)$$

portanto $d_3 = e_0 \tilde{v} Z_\chi^{1/2}$.

Finalmente, falta analisar o terceiro termo $\langle A_{\mu_H}(x)A_{\mu_H}(y) \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle A_{\mu H}(x) A_{\mu H}(y) \rangle &= \frac{Z_\chi}{e_0^2 \tilde{v}^2} \langle \tilde{\Delta}_\mu^b(x) b_{in}(x) \tilde{\Delta}_\nu^b(y) b_{in}(y) \rangle + d_4^2 \langle A_{\mu in}(x) A_{\mu in}(y) \rangle \\
&= \frac{Z_\chi}{e_0^2 \tilde{v}^2} \tilde{\Delta}_\mu^b(x) \tilde{\Delta}_\nu^b(y) \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \left(-\frac{1}{\sum_\mu p_\mu^2} \right) + d_4^2 \langle A_{\mu in}(x) A_{\mu in}(y) \rangle \\
&= \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{Z_\chi}{e_0^2 \tilde{v}^2} \frac{-p_\mu p_\nu}{\sum_\mu p_\mu^2} + d_4^2 \langle A_{\mu in}(x) A_{\mu in}(y) \rangle.
\end{aligned} \tag{6.242}$$

Define-se

$$\langle A_{\mu H}(x) A_{\mu H}(y) \rangle = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{\mu\nu}^H(p, \epsilon) \tag{6.243}$$

e

$$\langle A_{\mu in}(x) A_{\mu in}(y) \rangle = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{\mu\nu}^{in}(p, \epsilon). \tag{6.244}$$

Combinando as equações (6.242), (6.243) e (6.244), tem-se

$$\Delta_{\mu\nu}^H(p, \epsilon) = -\frac{Z_\chi}{e_0^2 \tilde{v}^2} \frac{1}{\sum_\mu p_\mu^2} p_\mu p_\nu + d_4^2 \Delta_{\mu\nu}^{in}(p, \epsilon). \tag{6.245}$$

Utilizando a definição (6.243) na identidade (6.195), obtém-se $\sum_\mu \Delta_{\mu\nu}^H(p, \epsilon) = 0$. Portanto, atuar-se-á com p_μ à direita em (6.245) e, então, tomar-se-á a soma sobre μ , o que fornece

$$\sum_\mu p_\mu \Delta_{\mu\nu}^{in}(p, \epsilon) = \frac{Z_\chi}{d_4^2 e_0^2 \tilde{v}^2} p_\nu, \tag{6.246}$$

Agora, tem-se duas possibilidades para o campo $A_{\mu in}(x)$, isto é, ele pode ou não ter massa, e os dois casos merecem ser considerados:

- **(Caso Massivo):** O campo vetorial $A_{\mu in}(x)$ satisfaz a equação:

$$(\partial^2 + m_v^2) A_{\mu in}(x) = 0, \tag{6.247}$$

junto da equação $\partial_\mu A_{\mu in}(x) = 0$. Assim, $\Delta_{\mu\nu}^{in}(p)$ é dado por

$$\Delta_{\mu\nu}^{in}(p) = \frac{-g_{\mu\nu}}{p^2 - m_v^2} + \frac{m_v^{-2} p_\mu p_\nu}{p^2 - m_v^2}. \tag{6.248}$$

Então, (6.246) fornece

$$\frac{-p_\nu}{p^2 - m_v^2} + \frac{p^2 m_v^{-2} p_\nu}{p^2 - m_v^2} = \frac{Z_\chi}{d_4^2 e_0^2 \tilde{v}^2} p_\nu \tag{6.249}$$

logo $m_v^2 = \frac{d_4^2}{Z_\chi} (e_0^2 \tilde{v}^2)$. Pode-se substituir d_4 por $Z_3^{\frac{1}{2}}$, com Z_3 sendo interpretado com uma constante de renormalização.

- **(Caso não Massivo):** Aqui, o campo vetorial $A_{\mu_{in}}(x)$ satisfaz a equação de campo livre, $\partial^2 A_{\mu_{in}}(x) = 0$, neste caso $\Delta_{\mu\nu}^{in}(p)$ é escrito como

$$\Delta_{\mu\nu}^{in}(p) = \frac{-\delta_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}. \quad (6.250)$$

Finalmente, (6.246) implica

$$\frac{-p_\nu}{p^2 + i\epsilon} = \frac{Z_\chi}{d_4^2 e_0^2 \tilde{v}^2} p_\nu, \quad (6.251)$$

de tal modo que, $d_4^2 = \frac{-Z_\chi p^2}{e_0^2 \tilde{v}^2}$.

Este último resultado não é admissível, pois o coeficiente passa a ter dependência do momento, e deixa de ser constante. Logo, adota-se o campo $A_{\mu_{in}}(x)$ massivo, o que é análogo ao Teorema de Higgs. Entretanto, é importante salientar que tal resultado só foi possível no contexto de uma aproximação onde os elementos da rede são muito próximos, o que neste caso é muito semelhante a retornar ao caso contínuo.

6.2.6 Expansão a acoplamento fraco

A teoria perturbativa em rede ou expansão a acoplamento fraco se dá como uma expansão em torno da configuração $U_p = 1$ a qual fornece o valor mínimo para ação. Nos tratamentos não perturbativos o volume do grupo de calibre é finito e pode ser fatorado e simplificado quando se normaliza a integral de trajetória com o gerador funcional para o cálculo do valor esperado dos operadores. Entretanto, em uma teoria perturbativa se faz aproximações do tipo ponto de sela da integral funcional em torno do mínimo da ação $U_p = 1$, ou seja, o valor do plaquette é aproximado para 1. Todavia, tal técnica leva a uma descompactificação do domínio do campo de calibre, onde então, as variáveis $A_\mu(x)$ se tornam reais. Neste caso, é necessário se fixar calibre. Para um modelo com simetria $U(1)$ se pode adotar um termo de fixação da forma (6.131), porém é interessante analisar um pouco mais esta abordagem, para maiores informações os leitores são indicados à referência [42].

Um plaquete como definido em (2.89), no caso do modelo $U(1)$ se transforma em

$$\phi_p = \phi_\mu(x) + \phi_\nu(x + a\hat{\mu}) - \phi_\mu(x + a\hat{\nu}) - \phi_\nu(x), \quad (6.252)$$

onde

$$\phi_\mu(x) = ae_0 A_\mu(x). \quad (6.253)$$

Nos livros-texto padrão é usual fazer e_0 pequeno, ou seja, a constante de acoplamento pequena, o que equivale a fazer $\phi_\mu(x)$ pequeno. Contudo, para preservar a estrutura de grupo da teoria é essencial que ϕ seja permitido tomar todos os valores no intervalo $]-\pi, \pi]$. Neste caso, o campo $A_\mu(x)$ que muda com e_0 :

$$-\frac{\pi}{ae_0} < A_\mu(x) \leq \frac{\pi}{ae_0}. \quad (6.254)$$

Todavia, sob certas circunstâncias é possível restringir a atenção para pequenos valores da variável angular. Para tal, considere que ação de Wilson para o modelo $U(1)$ é mínima se

$$\phi_p = \phi_\mu(x) + \phi_\nu(x + a\hat{\mu} - \phi_\mu(x + a\hat{\nu}) - \phi_\nu(x)) \approx 0 \quad \forall p. \quad (6.255)$$

Claramente, a relação acima é satisfeita se cada link $\phi_\mu(x)$ for individualmente pequeno. Esta classe é denotada por C_0 . Se todos os elementos satisfazendo (6.255) pertencessem a C_0 teria-se uma justificativa para restringir a atenção apenas para pequenos valores da variável angular.

Note, todavia, que é possível haver configurações com variáveis angulares assumindo valores grandes que satisfaçam a relação (6.255), isto ocorre quando um termo positivo e outro negativos contribuem com números de mesma magnitude. Esta classe é denominada de C_1 e contém um grande número de configurações. Neste caso, a aproximação de ponto de sela não pode ser aplicada, pois estas configurações podem com seus grandes valores de variáveis angulares contribuir insignificativamente para a integral e, assim, não podem ser descartados.

Em uma rede infinita cada membro de C_1 é equivalente a um membro de C_0 e as configurações indesejadas de C_1 podem ser eliminadas por uma escolha apropriada do calibre.

Considere um membro arbitrário de C_1 . Cada plaquette U_p satisfaz

$$U_p = 1 + \delta_p, \quad |\delta_p| \leq 1 \quad \forall p. \quad (6.256)$$

Escolha um plaquette e aplique uma transformação geral de calibre de modo que

$$U_p = U'_p = e^{i\lambda(x)} e^{\theta_1} e^{\theta_2} e^{\theta_3} e^{\theta_4} e^{-i\lambda(x)} = 1 + \delta_p, \quad (6.257)$$

logo

$$e^{\theta_1} e^{\theta_2} e^{\theta_3} e^{\theta_4} \approx 1 + \delta_p, \quad (6.258)$$

onde

$$\theta_1 = \phi_\mu(x) - \lambda(x + a\hat{\mu}) \quad (6.259)$$

$$\theta_2 = \lambda(x + a\hat{\mu}) + \phi_\nu(x + a\hat{\mu}) - \lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \quad (6.260)$$

$$\theta_3 = \lambda(x + a\hat{\mu} - \phi_\mu(x + a\hat{\nu}) - a\hat{\nu}) \lambda(x + a\hat{\nu}) \quad (6.261)$$

$$\theta_4 = \lambda(x + a\hat{\nu}) - \phi_\nu(x). \quad (6.262)$$

$\lambda(x)$ pode ser deixado arbitrário, então, define-se $\lambda(x + a\hat{\mu})$ tal que θ_1 seja pequeno. De maneira análoga é possível definir $\lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})$ tal que θ_2 seja pequeno e $\lambda(x + a\hat{\nu})$ tal que θ_3 seja pequeno. Logo, é possível escrever

$$e^{\theta_4} \approx 1 + \delta_p e^{-\theta_1} e^{-\theta_2} e^{-\theta_3} \approx 1 + \delta_p, \quad (6.263)$$

de modo que θ_4 seja necessariamente pequeno. Uma vez que se tenha transformado o primeiro plaquette, pode-se mover para um plaquette vizinho e repetir o processo para os dois sítios remanescentes livres. Note que o primeiro plaquette compartilha um link com o seu vizinho, de maneira que ao fixar os dois sítios livres o link entre eles é necessariamente pequeno. Ao final deste procedimento se definiu uma transformação de calibre que tomou uma configuração em C_1 e levou a C_0 . Finalmente, para cada plaquette interior na rede há liberdade suficiente para forçar três de seus quatro links serem pequenos, e o quarto link será garantido

pequeno devido à invariância de calibre.

Na ausência de plaquettes de borda (redes infinitas) esta abordagem é suficiente para eliminar todas as configurações na classe C_1 . Portanto, a ação tem um único mínimo correspondente a todos os links iguais à identidade.

Em uma rede finita, com condições de contorno periódicas, os plaquettes de borda são adicionalmente restringidos por condições de contorno, e a técnica de fixação de calibre não pode ser completamente implementada. A referência [42] apresenta uma discussão interessante a respeito destes detalhes.

Finalmente, este problema é apenas um exemplo de um problema mais geral em redes finitas: as condições de contorno impostas afetam o procedimento de fixação de calibre, logo esta restrição precisa ser escolhida de forma a evitar a introdução de inconsistências.

No caso do modelo com simetria $U(1)$, condições de contorno periódicas não são suficientemente restritivas, de modo que uma expansão a campo fraco requer que as variáveis angulares sejam nulas. A existência desta condição de contorno fixa permite tratar todos os plaquettes como interiores, e assim a fixação de calibre define um único mínimo para ação, assim como no caso de rede infinita.

Agora, pode-se retornar ao termo de fixação de calibre (6.131), uma vez que já se introduziu como a aproximação fraca dar-se-á, isto é, considerando os elementos acima levantados é possível fazer ϕ pequeno. Assim, (6.131) se torna

$$-\frac{i}{2e_0} \sum_{x,\mu} B(x) \Delta_\mu^f \tilde{A}_\mu, \quad (6.264)$$

enquanto o termo de fonte (6.130) fica

$$-\frac{i}{2e_0} \sum_{x,\mu} J_\mu(x) \tilde{A}_\mu, \quad (6.265)$$

onde $\tilde{A}_\mu = aA_\mu$. Deste modo, o funcional gerador (6.133) se transforma em

$$\begin{aligned} Z[J, K] = & \frac{1}{N} \int \prod_x \prod_\mu dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) dB(x) \exp \left[-S_E - \sum_x \left(K^*(x) \phi(x) + K(x) \phi^*(x) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_\mu B(x) \Delta_\mu^f \tilde{A}_\mu + \sum_\mu J_\mu(x) \tilde{A}_\mu + i\epsilon \phi^*(x) \phi(x) - i\epsilon (\phi^*(x)v + \phi(x)v) \right) \right], \end{aligned} \quad (6.266)$$

com N dado por

$$N = \int \prod_x \prod_\mu dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) \exp \left[-S_E - \sum_x (i\epsilon \phi^*(x) \phi(x) - i\epsilon (\phi^*(x)v + \phi(x)v)) \right]. \quad (6.267)$$

A próxima etapa é o cálculo das identidades de Ward-Takahashi globais e locais, o que pode ser feito utilizando os procedimentos apresentados nas subseções 6.2.1 e 6.2.2. Os resultados obtidos são:

$$\langle \psi(x) \rangle_\epsilon = i\sqrt{2}\epsilon v \sum_y \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon,N} = \sqrt{2}\epsilon v \Delta_\chi(\epsilon, 0), \quad (6.268)$$

$$\langle \rho(x)\rho(y) \rangle_{\epsilon,N} - \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon,N} = i\sqrt{2}\epsilon v \sum_z \langle \chi(z)\chi(x)\rho(y) \rangle_{\epsilon,N}, \quad (6.269)$$

onde as duas identidades acima são as globais e

$$\sum_\mu \left\langle \Delta_\mu^b [\Delta_\mu^b B(x)] \chi(y) \right\rangle_{\epsilon,N} + e_0 \langle \psi(x) \rangle_{\epsilon,N} \delta(x, y) = i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon,N}, \quad (6.270)$$

$$\sum_\mu \left\langle \Delta_\mu^b [\Delta_\mu^b B(x)] \tilde{A}_\nu(y) \right\rangle_{\epsilon,N} - \Delta_\nu^b \left\langle \delta(x, y) \right\rangle_{\epsilon,N} = i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \left\langle \chi(x) \tilde{A}_\nu(y) \right\rangle_{\epsilon,N}, \quad (6.271)$$

$$\sum_\mu \langle \Delta_\mu^f \tilde{A}_\mu(u) \rangle_{\epsilon,N} = 0, \quad (6.272)$$

$$\sum_\mu \langle \Delta_\mu^f \tilde{A}_\mu(u) \chi(y) \rangle_{\epsilon,N} = 0, \quad (6.273)$$

$$\sum_\mu \langle \Delta_\mu^f \tilde{A}_\mu(u) \tilde{A}_\nu(y) \rangle_{\epsilon,N} = 0, \quad (6.274)$$

$$\sum_\nu \sum_\mu \left\langle \left(\Delta_\nu^b [\Delta_\nu^b B(y)] \right) \left(\Delta_\mu^b [\Delta_\mu^b B(x)] \right) \right\rangle_{\epsilon,N} = i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \left\langle \Delta_\nu^b [\Delta_\nu^b B(y)] \chi(x) \right\rangle_{\epsilon,N}, \quad (6.275)$$

$$\langle \rho(x) B(y) \rangle_{\epsilon,N} = \langle \rho(x) \chi(y) \rangle_{\epsilon,N} = \langle \rho(x) \tilde{A}_\mu(y) \rangle_{\epsilon,N} = 0, \quad (6.276)$$

são as identidades locais. Note que o conjunto de identidades obtidas apresenta as mesmas formas funcionais das identidades obtidas com a aproximação $a \ll 1$ nos termos de campo de calibre, o que é natural haja visto que esta última e aproximação de campo fraco acabam sendo equivalentes. Finalmente, uma vez que se obteve o mesmo conjunto de identidades, os demais elementos da teoria, como por exemplo o mapa dinâmico, serão iguais, a menos de constantes que decorrem da redefinição da Transformada de Fourier [42].

6.3 TEOREMA DE HAAG

6.3.1 Resultados e uma breve visão

O teorema de Haag a respeito da representação de interação em teoria quântica de campos foi apresentado em meados da década de 50 [43]. A sua relevância foi rapidamente reconhecida pelos físicos matemáticos que trabalhavam na construção axiomática da teoria quântica de campos. Entre estes Wightman e Hall, em 1957, contribuíram com uma demonstração mais formal e geral para o teorema, de modo que é usual encontrar, atualmente, este referido como teorema de Haag-Hall-Wightman [44].

Uma consequência deste teorema é que a teoria quântica de campos parece não ser capaz de descrever interações. Isto é válido para as abordagens perturbativas usuais. Entretanto, o formalismo LSZ (nota de rodapé 5, Capítulo 3), por exemplo, contorna este problema. Portanto, ao invés de ver este teorema como um elemento que traz problemas para a teoria quântica de campos, ele deve sim, ser encarado como

um portador da relevância física dos conceitos matemáticos que separam a teoria quântica de campos da mecânica quântica não relativística. Neste contexto, surgem as representações unitárias não equivalentes das relações de comutação canônicas.

Duas representações das relações de comutação canônicas $(\mathcal{H}_1, \{O_1^i\})$ e $(\mathcal{H}_2, \{O_2^i\})$, onde $\{O_n^i\}$ é um conjunto dos operadores que aparecem nas relações de comutação canônicas, são unitariamente equivalentes se e somente se existe um mapa U unitário do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ para o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_2$, tal que para cada operador $O_1^j \in \{O_1^i\}$ exista um operador $O_2^j = U^{-1}O_1^jU$. A importância da equivalência unitária é que ela garante equivalência física, isto é, as representações fornecem o mesmo valor esperado para os correspondentes observáveis.

Na abordagem usual, considera-se que apenas uma das representações unitárias não equivalentes (a menos de equivalências unitárias) apresenta significado físico, e as demais são não físicas. Neste caso, o teorema de Haag mostra que a existência de representações unitárias não equivalentes não é apenas uma sofisticação matemática sem relevância, mas deve sim apresentar significado físico. É interessante se enfatizar aqui, que a técnica de mapa dinâmico faz uso das representações unitárias não equivalentes, os quais então passam a ter interpretações físicas, uma vez que estabelecem conexão entre as diferentes fases físicas de um sistema onde pode ocorrer quebra espontânea de simetria. Esta conexão é natural haja visto a equivalência entre estas técnicas e a expansão de Haag no formalismo LSZ.

O teorema de Haag indica ainda que a escolha de uma representação unitariamente não equivalente das relações de comutação canônicas depende da dinâmica, o que também é compatível com o mapa dinâmico. Além disso, o teorema implica a necessidade de representações em espaços não-Fock para representação de interações.

Uma representação de Fock das relações de comutação canônicas é caracterizada pela existência de um estado de vácuo que é aniquilado por todos os operadores de aniquilação $a(f)$, e a partir dos quais um conjunto de estados pode ser construído pela atuação no vácuo com os operadores de criação $a^*(f)$, onde f varre todos os elementos do espaço de funções complexas teste. Uma representação construída por este procedimento tem um operador auto-adjunto N , definido em algum domínio, cujo espectro é $\{0, 1, 2, \dots\}$ e satisfaz a relação de comutação $[N, a^*(f)] = 1$, claramente este é o operador número.

Para um campo livre, N contabiliza o número de quantas de excitação do campo. Quando uma representação falha em admitir um número total de quantas, significa que estes são muitos [45]. Neste caso, tem-se uma representação estranha. Seguindo o exemplo desenvolvido na subseção C, observa-se que cada uma das representações $\theta = 0$ e $\theta \neq 0$, a princípio, consistiriam de uma representação de Fock, porém o cálculo do número de quantas de $\theta = 0$ no espaço $\theta \neq 0$, mostra que ele é infinito, e neste caso o operador N não está bem definido, uma vez que as duas representações escolhidas não fornecem o mesmo valor para N . Note ainda que o número de quantas de $\theta \neq 0$ no estado $\theta = 0$, também fornece um número infinito para $N(\theta)$. Assim, diz-se que se tem representações estranhas das relações de comutação canônicas.

Em 1975, Bogoliubov [22] argumentou que é natural supor a utilização de uma representação de Fock, entretanto o teorema de Haag mostra que em qualquer momento, o que se utiliza é uma representação estranha das relações de comutação canônicas, isto é, em uma representação em que cada estado contém um número infinito de partículas. Neste caso, a representação, ou no caso o espaço, é denominado de não-Fock. É importante destacar que no modelo adotado como exemplo o surgimento da representação estranha decorre do número infinito de graus de liberdade, o qual é também um elemento necessário para a construção do mapa dinâmico.

6.3.2 Ponto de partida e chegada

As discussões sobre quantização na mecânica quântica não relativística envolvem um processo de escolha de uma representação adequada das relações de comutação canônicas. Este procedimento de escolha entre um conjunto de representações é denominado usualmente de problema de escolha. Normalmente, as relações de comutação canônicas tomam a forma:

$$[q_j, q_k] = 0 = [p_j, p_k], \quad [q_i, p_k] = i\delta_{jk} \quad (6.277)$$

onde os índices j, k varrem os graus de liberdade do sistema. Quando o sistema apresenta um número finito de graus de liberdade, a representação mais utilizada é a de Schroedinger, a qual é construída tomando o espaço de Hilbert como o espaço $L^2((R)^n)$, ou seja, o espaço de funções complexas de quadrado integráveis $(R)^n$ e definindo

$$q_j f(x_1, \dots) = x_j f(x_1, \dots), \quad (6.278)$$

$$p_k f(x_1, \dots) = i \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_1, \dots). \quad (6.279)$$

Um aspecto não muito comentado a respeito da escolha acima é que o conjunto de operadores q_j e p_k são não limitados, assim suas atuações podem levar a elementos que não pertençam a seu domínio, deste modo as equações acima somente ficam completamente definidas quando seu domínio também o é. Isto pode ser evitado quando se adota por exemplo a representação de Weyl, a qual é construída em termos de mapas exponenciais, onde $U_j(r) = \exp(irp_j)$ e $V_k(s) = \exp(isq_k)$:

$$\begin{aligned} U_j(r)U_k(s) - U_k(s)U_j(r) &= V_j(r)V_k(s) - V_k(s)V_j(r) = 0 \\ U_j(r)V_k(s) &= V_k(s)U_j(r) \exp(i r s \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (6.280)$$

Admitindo que esta representação se dê em termos de grupos de operadores unitários fortemente contínuo em r e s , então como consequência de um teorema de Stone, eles são operadores auto-adjuntos, e em um domínio denso comum, estes operadores satisfazem (6.277). Um outro aspecto conveniente da forma (6.280) é que ela permite a utilização do teorema de Stone-von Neumann [20], o qual como já discutido anteriormente fornece que todas as representações das relações de comutação canônicas para um número finito de graus de liberdade são unitariamente equivalentes. E, neste caso, para mecânica quântica usual, este teorema elimina o problema de escolha, onde então a adoção de uma representação se torna uma questão de conveniência sem significado físico.

Quando o sistema apresenta um número infinito de graus de liberdade este teorema falha e incontáveis representações unitárias não equivalentes são possíveis. Este fato já era conhecido na década de 30, entretanto seria mais profundamente investigado somente 20 anos depois, na década de 50. Em 1952, tem-se uns dos primeiros trabalhos que mostram que representações unitárias não equivalentes não são um devaneio matemático, mas apresentam sim, implicações na descrição da interação em teoria quântica de campos. Este trabalho foi o modelo de van Hove [24], o qual foi brevemente apresentado anteriormente aqui em um nota de rodapé. Em 1955, Wightman e Schweber [46] mostram que o suposto comportamento patológico

(representações unitárias não equivalentes) ocorre na maioria dos modelos em teoria campos, e que a escolha de representação depende da dinâmica.

Haag, também em 1955, após estudar o trabalho de Wightman observa a ausência de uma demonstração mais geral, o que ele, então, apresenta também no mesmo ano: a primeira demonstração do teorema de Haag. Entretanto, apresentar-se-á aqui a versão de 1957 [44], usualmente denominada de teorema de Haag-Hall-Wightman (HHW):

Teorema 1 (Teorema HHW): *Admita dois campos escalares neutros ϕ_1 e ϕ_2 , e seus respectivos momentos conjugados π_1 e π_2 , tal que cada par (ϕ_j, π_j) forneça uma representação irredutível das relações de comutação canônicas a tempos iguais:*

$$[\phi_j(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (6.281)$$

$$[\phi_j(\vec{x}, t), \phi_j(\vec{x}', t)] = [\pi_j(\vec{x}, t), \pi_j(\vec{x}', t)] = 0, \quad (6.282)$$

onde $j = 1, 2$. Admita agora que transformações Euclidianas dos campos $(\vec{a}, \mathbf{R})$ (onde $\vec{a}$ denota translação e $\mathbf{R}$ denota rotação) são induzidas por transformações $U_j(\vec{a}, \mathbf{R})$:

$$U_j(\vec{a}, \mathbf{R})\phi_j(\vec{x}, t)U_j^{-1}(\vec{a}, \mathbf{R}) = \phi_j(\mathbf{R}\vec{x} + \vec{a}, t), \quad (6.283)$$

$$U_j(\vec{a}, \mathbf{R})\pi_j(\vec{x}, t)U_j^{-1}(\vec{a}, \mathbf{R}) = \pi_j(\mathbf{R}\vec{x} + \vec{a}, t). \quad (6.284)$$

Admita também que os campos estão relacionados por alguma transformação unitária $V(t)$:

$$\phi_2(\vec{x}, t) = V(t)\phi_1(\vec{x}, t)V^{-1}(t), \quad \pi_2(\vec{x}, t) = V(t)\pi_1(\vec{x}, t)V^{-1}(t). \quad (6.285)$$

Então,

$$U_2(\vec{a}, \mathbf{R}) = V(t)U_1(\vec{a}, \mathbf{R})V^{-1}(t). \quad (6.286)$$

Além disso, se existem estados $|0_j\rangle$ normalizáveis únicos invariantes sobre transformações Euclidianas

$$U_j(\vec{a}, \mathbf{R})|0_j\rangle = |0_j\rangle, \quad (6.287)$$

então

$$c|0_2\rangle = V(t)|0_1\rangle, \quad (6.288)$$

onde $|c| = 1$.

Admita, agora, que os campos além de satisfazerem as hipóteses acima tem que as transformações de Poincaré (a, λ) (entende-se λ como uma transformação própria de Lorentz) sobre eles são induzidas por transformações unitárias $T_j(a, \lambda)$:

$$T_j(a, \lambda)\phi_j(x) = \phi_j(\lambda x + a), \quad j = 1, 2. \quad (6.289)$$

Além disso, considere que os estados $|0_j\rangle$ são invariantes por Poincaré:

$$T_j(a, \lambda)(a, \lambda) |0_j\rangle = |0_j\rangle, \quad (6.290)$$

e que estados de energia negativa não existem. Então, os quatro primeiros valores esperados de vácuo dos dois campos são iguais:

$$\langle 0_2 | \phi_2(x_1) \dots \phi_2(x_4) | 0_2 \rangle = \langle 0_1 | \phi_1(x_1) \dots \phi_1(x_4) | 0_1 \rangle. \quad (6.291)$$

6.3.3 Implicações

No caso geral, apenas o resultado acima pode ser demonstrado, e nenhuma consideração pode ser feita para outras funções de n pontos de ordem superior a 4. Entretanto, se for feita a particularização, por exemplo, que o campo ϕ_1 seja livre, então todas as funções de n pontos serão iguais e ϕ_2 também será livre (o inverso também é válido). O ponto é que a conclusão do teorema é que ambos os campos são livres, todavia tal resultado não é interessante, pois o objetivo de um modelo físico é descrever interação, o mundo real é interagente, logo ao menos uma das hipóteses do teorema precisar ser descartada.

A abordagem mais usual é descartar a existência de uma transformação unitária $V(t)$ relacionando os campos. Neste caso, ter-se-á que os campos serão conectados por uma transformação unitária não equivalente. É conveniente destacar que isto não é completamente estranho, uma vez que isto já foi feito no capítulo de mapa dinâmico quando se implementou as transformações de Bogoliubov, e isto também é feito em toda construção de mapa dinâmico.

Outra questão a ser levantada é que apesar da construção do teorema de Haag acima depender do formalismo de Wightman da teoria quântica de campos, ele pode ser demonstrado por outros meios não dependendo de um formalismo particular da teoria quântica de campos, desde que alguns elementos básicos como invariância de Poincaré sejam mantidos. Além disso, invariância relativística é um ingrediente essencial.

Um ponto não aparente na construção do teorema acima diz respeito ao infinito número de graus de liberdade. Evidentemente, pelo teorema de Stone-von Neumann quando o sistema tem um número finito de graus de liberdade o teorema HHW não se aplica, e a falha ocorre na proposição de que $|0_j\rangle$ são os únicos estados normalizados invariantes sobre transformações Euclidianas, pois em sistemas com um número finitos de graus de liberdade podem existir múltiplos estados normalizáveis invariantes sobre transformações Euclidianas.

Agora, como conclusão é interessante observar o que se pode afirmar a respeito do teorema de Haag em rede. O teorema de Haag é evadido quando se considera um sistema em um caixa, pois a invariância translacional é violada. Em rede, por sua construção [2], a invariância de Poincaré é quebrada, somente sendo recuperada no limite termodinâmico. Logo, fica claro que o teorema de Haag é também evadido neste contexto. Considerando que este foi o forte motivador para adoção de representações unitárias não equivalentes, é natural que tal elemento não seja adotado em rede⁷.

Finalmente, em rede o número de graus de liberdade é finito, pois a cada nó desta é que se associa um par de operadores de criação e aniquilação, de modo que é impossível a construção de transformações unitárias não equivalentes em rede. Portanto, isto leva à técnica de mapa dinâmico não ser completamente adaptável

⁷A efeito de informação, existem modelos em teoria quântica de campos Galileana em que o teorema de Haag é evadido e representações unitárias não equivalentes são adotadas, portanto, é possível evadir Haag e ter representações unitárias não equivalentes, porém nestes modelos ainda se tem um número infinito de graus de liberdade.

à rede, somente obtendo alguma interpretação no limite termodinâmico onde a invariância de Poincaré é recuperada, assim como o número infinito de graus de liberdade.

A título de informação, os livros textos usuais de teoria quântica de campos, tais como Peskin e Schroeder, Ryder, Weinberg não discorrem sobre este teorema, entretanto existem algumas exceções como o “Quantum Field Theory for Mathematicians” do Ticciati, que apresentam esta discussão. Este último, destaca uma informação relevante: o resultado da aplicação da representação de interação é uma série perturbativa que não converge, o que é esperado devido ao teorema de Haag, mas cujos primeiros termos levam a excelentes resultados, assim apesar da abordagem usual parecer boa, ela pode não ter validade. Como corolário surge naturalmente a pergunta: como pode uma técnica baseada em falsas premissas demonstráveis produzir resultados tão bons? Apesar desta pergunta ainda não ter resposta, existem possíveis direções para a discussão, um das ideias principais é que a dinâmica venha a determinar uma representação que permitiria a realização dos cálculos, para mais informações consulte a referência [47, 48].

7 TEOREMA DE ELITZUR

O importante Teorema de Elitzur [5, 7, 49–51] a respeito do valor esperado de observáveis não invariantes de calibre em rede será enunciado abaixo¹:

Teorema 2 (Elitzur): *Uma simetria de calibre não pode ser espontaneamente quebrada: o valor esperado de qualquer observável local, isto é, um observável que dependa apenas de um número finito de campos definidos em alguma região finita A , não invariante de calibre, deve ser nulo para qualquer temperatura, consequentemente não pode ser utilizado como parâmetro de ordem.*

Do ponto de vista físico uma quebra de simetria global envolve um número macroscópico de graus de liberdade. Por outro lado, isto não acontece em uma simetria de calibre. O resultado é que as flutuações quânticas tendem a barrar a função de onda do estado fundamental ao longo de toda órbita do grupo. Isto se traduz no teorema acima. A prova deste teorema é baseada no fato de que uma desigualdade que se mantém para qualquer configuração do campo continua valendo após uma integração com respeito a uma medida positiva. Com isto e com a invariância de calibre é possível provar o teorema. Para compreender melhor o significado deste resultado é interessante fazer analogias com sistemas da física estatística clássica, tais como os modelos de Ising. Neste contexto, o resultado acima significa que não há análogo de magnetização²; em outras palavras, o valor esperado de “spin” é nulo mesmo na presença de um campo externo, o qual quebra explicitamente a simetria de calibre. Isto também explica os cuidados que se deve ter no tratamento geral: toma-se primeiro o limite do volume tendendo ao infinito e então se toma o limite da constante de acoplamento do termo de fonte indo a zero. Mais ainda, estes limites não são comutativos, e o resultado se deve em muito a isto. Finalmente, o teorema leva à necessidade de observáveis invariantes de calibre e não locais, tal como o loop de Wilson.

Apresentar-se-á, agora, uma demonstração geral para o teorema de Elitzur para modelos com os campos de calibre tomando valores em um grupo compacto e com campos escalares, também assumindo valores em um conjunto limitado. Esta demonstração é adaptada das referências [15, 52]. As linhas gerais de tal demonstração denominar-se-á de Análise I. Depois, prosseguir-se-á em linhas gerais com uma demonstração para o modelo XY, a qual é sutilmente diferente da demonstração geral. As técnicas empregadas para a discussão do modelo XY, denominar-se-á Análise II.

7.1 ANÁLISE I

Seja $\Phi = U_l, \phi_x, \dots$ um conjunto de campos de uma teoria de calibre, com os campos de calibre tomando seus valores em um grupo topológico compacto, e $d\mu_\Lambda(\Phi)$ uma medida de integração invariante. O valor esperado de um observável $F(\Phi)$ local e não invariante de calibre é dado por

¹Algumas das referências indicadas apresentam algumas generalizações interessantes e demonstrações alternativas deste teorema, demonstrando a sua solidez e relevância.

²É importante compreender o significado de uma magnetização nula no modelo Ising, para que se entenda o significado deste teorema. Neste contexto, existe uma descrição que se utiliza de um pequeno campo externo h : existem duas configurações fundamentais $\sigma_i = +1$ e $\sigma_i = -1$. Nesta prescrição elas estão energeticamente separadas por um “gap” de $2Nh$ onde N é o número total de sítios. Quando se toma o limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$, uma destas configurações é eliminada e a simetria se quebra; após isto h é tomado nulo, e se fica com uma magnetização nula.

$$\langle F(\Phi) \rangle = \lim_{J \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle F(\Phi) \rangle_{N,J}, \quad (7.1)$$

com

$$\langle F(\Phi) \rangle_{N,J} = \frac{1}{Z_{N,J}} \int \exp(-S(\Phi) + J\Phi) F(\Phi) d\mu_\Lambda(\Phi). \quad (7.2)$$

F não invariante de calibre significa

$$\int \prod_{x \in \Lambda} dg_x F(\Phi_g) = 0, \quad (7.3)$$

onde Φ_g denota a configuração de calibre transformada.

Tanto a ação quanto a medida são invariantes pela transformação g pertencente a algum grupo de calibre qualquer. A integral acima é realizada sobre cada g_x independentemente. Deste modo, é possível considerar o subgrupo de transformações que agem somente sobre um subconjunto finito Φ' do qual o observável local, $F(\Phi')$, dependa, e que deixa invariante o subconjunto complementar $\Phi'' : \Phi'' = \Phi'_g$.

Realizando uma transformação de calibre, considerando que a ação e a medida são invariantes, e tomando a média sobre o subgrupo das transformações de calibre que mantém Φ'' invariante, a integral (7.2) fica

$$\langle F(\Phi') \rangle_{N,J} = \frac{1}{Z_{N,J}} \int \exp(-S(\Phi) + J\Phi'_g + J\Phi'') F(\Phi'_g) d\mu_\Lambda(\Phi) \prod_{x \in \Lambda} dg_x. \quad (7.4)$$

O “conjunto” Φ' contém um número finito e independente de graus de liberdade e J pode ser feito arbitrariamente pequeno, de tal modo que é limitado por uma quantidade γ tão pequena quanto se queira. Assim,

$$|\exp(J\Phi') - 1| \leq \epsilon(J) \xrightarrow{J \rightarrow 0} 0. \quad (7.5)$$

Este resultado é um ponto crucial e $\epsilon(J)$ desaparece uniformemente com J , qualquer que seja a configuração do campo Φ' e o número total de sítios N . Em outras palavras, este limite é uniforme em Λ e em Φ . Logo, esta desigualdade é válida por três motivos: o conjunto Φ' é finito, como já mencionado, e é independente de N , e os campos Φ assumem seus valores em um domínio compacto³.

Escrevendo

$$\exp(J\Phi'_g) = 1 + [\exp(J\Phi'_g) - 1]$$

na integral (7.4), a mesma será dividida em dois termos:

$$\begin{aligned} \langle F(\Phi') \rangle_{N,J} &= \frac{1}{Z_{N,J}} \int \exp(-S(\Phi) + J\Phi'') (1) F(\Phi'_g) d\mu_\Lambda(\Phi) \prod_{x \in \Lambda} dg_x \\ &+ \frac{1}{Z_{N,J}} \int \exp(-S(\Phi) + J\Phi'') [\exp(J\Phi'_g) - 1] F(\Phi'_g) d\mu_\Lambda(\Phi) \prod_{x \in \Lambda} dg_x. \end{aligned} \quad (7.6)$$

O primeiro termo é identicamente nulo devido a condição (7.3). Tomando-se o módulo de (7.6) se tem

³Este tipo de desigualdade não é válida, por exemplo, para sistemas de “spin” com simetria global, pois a partição $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$ não pode ser realizada neste caso, de modo que $J\Phi'$ é uma quantidade extensiva proporcional à N .

$$|\langle F(\Phi') \rangle_{N,J}| \leq \frac{1}{|Z_{N,J}|} \int \exp(-S(\Phi) + J\Phi'') |\exp(J\Phi'_g) - 1| |F(\Phi'_g)| d\mu_\Lambda(\Phi) \prod_{x \in \Lambda} dg_x. \quad (7.7)$$

Substituindo (7.5) em (7.7) se encontra

$$|\langle F(\Phi') \rangle_{N,J}| \leq \epsilon(J) \frac{1}{|Z_{N,J}|} \int \exp(-S(\Phi) + J\Phi'') |F(\Phi'_g)| d\mu_\Lambda(\Phi) \prod_{x \in \Lambda} dg_x, \quad (7.8)$$

ou

$$|\langle F(\Phi') \rangle_{N,J}| \leq \frac{\epsilon(J)}{1 - \epsilon(J)} \text{Sup}(F). \quad (7.9)$$

Tomando então os limites na ordem correta se tem

$$\langle F(\Phi') \rangle = \lim_{J \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle F(\Phi') \rangle_{N,J} = 0, \quad (7.10)$$

que é a afirmação esperada.

7.2 ANÁLISE II

7.2.1 Definição da Ação e valor esperado para o modelo XY

Esta análise será realizada sobre o modelo XY invariante de calibre, o qual apresenta simetria $SO(2)$, e o vínculo $\Phi^\dagger \Phi = 1$. Deste modo, adota-se a seguinte parametrização em relação à variável angular $\phi(x)$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos \phi(x) \\ \sin \phi(x) \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

com $\phi(x)$ assumindo valores no intervalo $]-\pi, \pi]$. Neste caso, excluindo-se termos que não modificam o valor esperado de um observável, tem-se como ação a expressão

$$\begin{aligned} S = & -4k \sum_x \sum_{\mu=1}^4 \{ \cos(-\phi(x) + \beta(x, x + a\hat{\mu}) + \phi(x + a\hat{\mu})) \} \\ & - \beta \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \cos(\beta(x, x + a\hat{\nu}) + \beta(x + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \\ & + \beta(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu}) + \beta(x + a\hat{\mu}, x)). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Note que esta ação é invariante de calibre; além disso, a ação é real de forma que $d\mu_\Lambda = \prod d\Phi dU \exp^{-S[\Phi, U]}$ será uma medida de integração invariante de calibre.

O valor esperado de um observável limitado f definido como uma função dos campos em um região limitada contida na rede, de tal modo que há periodicidade nos campos, na presença de fonte (denotada⁴ por

⁴Escolheu-se aqui utilizar uma fonte na forma $-J \sum_x \Phi(x)$ onde a justaposição entre J e $\Phi(x)$ deve ser entendida como um produto interno.

$F(\Phi)$ é

$$\langle f \rangle_{\Lambda}(J) = \frac{1}{Z_{\Lambda}(J)} \int d\mu_{\Lambda} \exp \left\{ -S + J \sum_x \Phi(x) \right\} f. \quad (7.13)$$

Na equação acima, Λ indica que a rede é finita e permite expressar o limite termodinâmico mais facilmente; $d\mu_{\Lambda}$ é a medida de integração dada por

$$\prod_x \frac{d\phi(x)}{2\pi} \prod_{x,\mu} \frac{1}{2\pi} d\beta(x, x + a\hat{\mu}) \quad (7.14)$$

e $Z_{\Lambda}(J)$ é

$$Z_{\Lambda}(J) = \int d\mu_{\Lambda} \exp \left\{ -S + J \sum_x \Phi(x) \right\}. \quad (7.15)$$

7.2.2 Transformações de calibre para o modelo XY

Uma transformação de calibre geral para o modelo XY é dada por

$$\begin{aligned} \Phi \rightarrow \Phi' &= G\Phi \\ U \rightarrow U' &= GUG^{-1}, \quad G = \Pi(g(\zeta(z))), \end{aligned} \quad (7.16)$$

onde

$$\Pi(g(\zeta(z))) = \begin{pmatrix} \cos \zeta(z) & -\sin \zeta(z) \\ \sin \zeta(z) & \cos \zeta(z) \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Esta última expressão é relevante, pois a transformação pode ser transcrita observando sua atuação nos campos como

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \varsigma(x) \quad (7.18)$$

e

$$\beta(x, x + a\hat{\mu}) \rightarrow \beta'(x, x + a\hat{\mu}) = \varsigma(x) + \beta(x, x + a\hat{\mu}) - \varsigma(x + a\hat{\mu}), \quad (7.19)$$

onde $j = 1, 2$ e se trocou ζ por ς .

7.2.3 Estimativa de $\langle f \rangle_{\Lambda}(J, J^{\dagger})$ no limite termodinâmico

Como definido acima, f é uma função associada por definição a um observável local. Logo, está definida em uma região fixa e limitada $M \subset \Lambda$. Utilizando as transformações de calibre dadas em (7.18) e (7.19), define-se

$$f_g = f(\phi(x) + \varsigma_M(x), \beta(x, x + a\hat{\mu}) + \varsigma_M(x) - \varsigma_M(x + a\hat{\mu})), \quad (7.20)$$

onde

$$\varsigma_M(x) = \begin{cases} \varsigma(x), & x \in M, \\ 0, & x \notin M, \end{cases} \quad (7.21)$$

e seu valor esperado é dado por

$$\langle f_g \rangle_\Lambda(J) = \frac{1}{Z_\Lambda(J)} \int d\mu_\Lambda \exp \left\{ -S + J \sum_x \Phi(x) \right\} f_g. \quad (7.22)$$

Faz-se a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} \phi(x) + \varsigma_M(x) &= \phi'(x), \\ \beta(x, x + a\hat{\mu}) + \varsigma_M(x) - \varsigma_M(x + a\hat{\mu}) &= \beta'(x, x + a\hat{\mu}), \end{aligned} \quad (7.23)$$

na expressão (7.22), onde então apenas f_g e o termo de fonte sofrem mudanças em sua forma, os demais termos ganham uma linha. Os termos que apenas ganharam linha o fizeram pois são invariantes de calibre, e imediatamente “invariantes” frente à transformação de variáveis escolhida. A expressão para f_g é então

$$f_g(\phi'(x), \beta'(x, x + a\hat{\mu})), \quad (7.24)$$

enquanto a expressão para a fonte é dada por

$$J \sum_x \Phi'(x) + J \sum_{x \in M} \delta\Phi'(x), \quad (7.25)$$

onde

$$\delta\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \cos[\phi'(x) - \varsigma_M(x)] - \cos \phi'(x) \\ \sin[\phi'(x) - \varsigma_M(x)] - \sin \phi'(x) \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

Fazendo então uma nova mudança de variáveis:

$$\phi'(x) = \phi(x), \quad \beta'(x, x + a\hat{\mu}) = \beta(x, x + a\hat{\mu}), \quad (7.27)$$

o valor esperado de f_g se torna

$$\langle f_g \rangle_\Lambda(J) = \left\langle f \exp \left[J \sum_{x \in M} \delta\Phi(x) \right] \right\rangle_\Lambda(J). \quad (7.28)$$

Da expressão acima, obtém-se

$$|\langle f_\varsigma \rangle_\Lambda(J) - \langle f \rangle_\Lambda(J)| \leq \left\langle |f| \left| \exp \left[J \sum_{x \in M} \delta\Phi(x) \right] - 1 \right| \right\rangle_\Lambda(J). \quad (7.29)$$

Usando a desigualdade $|\exp(ax) - 1| \leq \exp|ax| - 1$ para $a \in \mathbb{R}$ junto de

$$\left| J \sum_{x \in M} \delta \Phi(x) \right| \leq |J| |K|,$$

onde K é definido como o limite superior da soma $\sum_{x \in M} \delta \Phi^\dagger(x)$, a expressão (7.29) fica

$$|\langle f_g \rangle_\Lambda(J) - \langle f \rangle_\Lambda(J)| \leq [\exp(|J||K|) - 1] |\langle f \rangle_\Lambda(J). \quad (7.30)$$

Tomando-se o limite da rede indo para infinito e J indo a zero, nesta ordem, obtém-se $|\langle f_g \rangle - \langle f \rangle| = 0$ e se conclui que $\langle f_g \rangle = \langle f \rangle$. Isto implica que qualquer que seja a função local das configurações, o estado é invariante de calibre. Segue deste resultado que $\langle \Phi \rangle$ dado por $\langle \cos \phi \rangle$ e $\langle \sin \phi \rangle$ é nulo.

7.3 ANÁLISE DA PRESCRIÇÃO ϵ EM RELAÇÃO AO TEOREMA DE ELITZUR

Agora, ir-se-á analisar o modelo XY apresentado acima pelos dois métodos anteriormente descritos. Entretanto, o funcional gerador do modelo XY discutido nesta seção é ligeiramente diferente do apresentado na equação (7.13). A principal diferença é a adição do termo $\frac{i\epsilon}{2}(\Phi - v)^2$, o qual é o responsável por introduzir no funcional gerador a informação a respeito da condição de contorno (entenda aqui, informação a respeito da ocorrência ou não ocorrência da quebra de simetria). Assim, o valor esperado de f , observável limitado e periódico, na presença de fonte é dado por:

$$\langle f \rangle_\Lambda(J, \epsilon) = \frac{1}{Z_\Lambda(J, \epsilon)} \int d\mu_\Lambda \exp \left\{ J \sum_{z \in \Lambda} F(\Phi(z)) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_{z \in \Lambda} (\Phi(z) - v)^2 \right\} f, \quad (7.31)$$

onde Λ denota a dependência com relação à rede. Nos cálculos abaixo será subentendido $z \in \Lambda$, exceto se for explicitamente mencionado o contrário. O termo de $\exp(-S)$ foi incorporado à medida $d\mu_\Lambda$. Assim, o funcional gerador é dado por

$$Z_\Lambda(J, \epsilon) = \frac{1}{N} \int d\mu_\Lambda \exp \left\{ J \sum_{z \in \Lambda} F(\Phi(z)) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_{z \in \Lambda} (\Phi(z) - v)^2 \right\}, \quad (7.32)$$

onde N é a constante de normalização de modo que $Z_\Lambda(0, \epsilon) = 1$.

Observe que ao se impor a parametrização (7.11) sob o termo adicionado, isto é, o termo que carrega informação a respeito da condição de contorno se encontra

$$\frac{i\epsilon}{2} \sum_z (\Phi(z) - v)^2 \rightarrow \frac{i\epsilon}{2} \sum_z \exp \{ \Phi(z) \Phi(z) - 2\Phi(z)v + vv \} \rightarrow +i\epsilon \sum_z \Phi(z)v. \quad (7.33)$$

Novamente, é conveniente escolher um termo de fonte da forma

$$F(\Phi) = \Phi(z). \quad (7.34)$$

Assim, o valor esperado de f e o funcional gerador ficam dados respectivamente por

$$\langle f \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) = \frac{1}{Z_{\Lambda}(J, \epsilon)} \int d\mu_{\Lambda} \exp \left\{ J \sum_{z \in \Lambda} F(\Phi(z)) + i\epsilon \sum_{z \in \Lambda} \Phi(z)v \right\} f \quad (7.35)$$

e

$$Z_{\Lambda}(J, \epsilon) = \frac{1}{N} \int d\mu_{\Lambda} \exp \left\{ J \sum_{z \in \Lambda} F(\Phi(z)) + i\epsilon \sum_{z \in \Lambda} \Phi(z)v \right\}. \quad (7.36)$$

7.4 ANÁLISE I

Utilizando a transformação geral de calibre definida em (7.16) se pode definir a seguinte transformação de calibre

$$\begin{aligned} \Phi \rightarrow \Phi' &= G\Phi \\ U \rightarrow U' &= GUG^{-1}, \quad G = \begin{cases} 1, & z \neq x \\ \Pi(g(\alpha)), & z = x \end{cases}, \end{aligned} \quad (7.37)$$

onde

$$\Pi(g(\zeta(z))) = \begin{pmatrix} \cos \zeta(z) & -\sin \zeta(z) \\ \sin \zeta(z) & \cos \zeta(z) \end{pmatrix}, \quad (7.38)$$

de onde, conclui-se

$$\zeta(z) = \begin{cases} 0, & z \neq x \\ \alpha, & z = x \end{cases}. \quad (7.39)$$

Define-se uma função

$$f_g = f(\phi(z) + \zeta(z), \beta(z, z + a\hat{\mu}) + \zeta(z) - \zeta(z + a\hat{\mu})), \quad (7.40)$$

a qual tem seu valor esperado dado por

$$\langle f_g \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) = \frac{1}{Z_{\Lambda}(J, \epsilon)} \int d\mu_{\Lambda} \exp \left\{ J \sum_z \Phi(z) + i\epsilon v \sum_z \Phi(z) \right\} f_g. \quad (7.41)$$

Faz-se, então, a seguinte mudança de variáveis:

$$\phi'(z) = \phi(z) + \zeta(z) \quad (7.42)$$

$$\beta'(z, z + a\hat{\mu}) = \beta(z, z + a\hat{\mu}) + \zeta(z) - \zeta(z + a\hat{\mu}). \quad (7.43)$$

A medida $d\mu_{\Lambda}$ é invariante de calibre, portanto não tem sua forma alterada, enquanto os termos que quebram a simetria de calibre se tornam, por exemplo, para a fonte,

$$J \sum_z \begin{pmatrix} \cos \phi(z) \\ \sin \phi(z) \end{pmatrix} \rightarrow J \sum_z \begin{pmatrix} \cos[\phi'(z) - \zeta(z)] \\ \sin[\phi'(z) - \zeta(z)] \end{pmatrix}, \quad (7.44)$$

ou abrindo o somatório:

$$J \sum_{z \notin M} \begin{pmatrix} \cos \phi(z) \\ \sin \phi(z) \end{pmatrix} + J \sum_{z \in M} \begin{pmatrix} \cos[\phi'(z) - \alpha] \\ \sin[\phi'(z) - \alpha] \end{pmatrix}, \quad (7.45)$$

onde $M = \{x\}$. Agora, somando e subtraindo

$$J \sum_{z \in M} \begin{pmatrix} \cos \phi(z) \\ \sin \phi(z) \end{pmatrix} \quad (7.46)$$

na expressão (7.45) tem-se

$$J \sum_z \begin{pmatrix} \cos \phi(z) \\ \sin \phi(z) \end{pmatrix} - J \sum_{z \in M} \begin{pmatrix} \cos \phi(z) \\ \sin \phi(z) \end{pmatrix} + J \sum_{z \in M} \begin{pmatrix} \cos[\phi'(z) - \alpha] \\ \sin[\phi'(z) - \alpha] \end{pmatrix}, \quad (7.47)$$

ou

$$J \sum_z \begin{pmatrix} \cos \phi'(z) \\ \sin \phi'(z) \end{pmatrix} + J \sum_{z \in M} \begin{pmatrix} \cos[\phi'(z) - \alpha] - \cos \phi'(z) \\ \sin[\phi'(z) - \alpha] - \sin \phi'(z) \end{pmatrix}, \quad (7.48)$$

ou ainda, usando,

$$\Phi'(z) = \begin{pmatrix} \cos \phi'(z) \\ \sin \phi'(z) \end{pmatrix} \quad (7.49)$$

e

$$\delta \phi'(z) = \begin{pmatrix} \cos[\phi'(z) - \alpha] - \cos \phi'(z) \\ \sin[\phi'(z) - \alpha] - \sin \phi'(z) \end{pmatrix}, \quad (7.50)$$

tem-se

$$J \sum_z \Phi'(z) + J \sum_{z \in M} \delta \Phi'(z). \quad (7.51)$$

Analogamente, o termo que carrega informação a respeito da condição de contorno fica

$$i\epsilon v \sum_z \Phi'(z) + i\epsilon v \sum_z \delta \Phi'(z). \quad (7.52)$$

Finalmente, após, a mudança de variáveis se encontra

$$\langle f_g \rangle_\Lambda(J, \epsilon) = \frac{1}{Z_\Lambda(J, \epsilon)} \int d\mu_\Lambda \exp \left\{ J \sum_z \Phi'(z) + i\epsilon v \sum_z \Phi'(z) \right\} \times \quad (7.53)$$

$$\exp \left\{ (J + i\epsilon v) \sum_{z \in M} \delta \Phi'(z) \right\} f_g(\phi'(z), \beta'(z, z + a\hat{\mu})). \quad (7.54)$$

Fazendo, então, uma nova mudança de variáveis dada por

$$\phi'(z) = \phi(z) \text{ e } \beta'(z, z + a\hat{\mu}) = \beta(z, z + a\hat{\mu}), \quad (7.55)$$

tem-se

$$\langle f_g \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) = \frac{1}{Z_{\Lambda}(J, \epsilon)} \int d\mu_{\Lambda} \exp \left\{ J \sum_z \Phi(z) + i\epsilon v \sum_z \Phi(z) \right\} \times \quad (7.56)$$

$$\exp \left\{ (J + i\epsilon v) \sum_{z \in M} \delta\Phi(z) \right\} f_g(\phi(z), \beta(z, z + a\hat{\mu})), \quad (7.57)$$

ou

$$\langle f_g \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) = \left\langle f \exp \left[(J + i\epsilon v) \sum_{z \in M} \delta\Phi(z) \right] \right\rangle_{\Lambda}(J, \epsilon). \quad (7.58)$$

Pode-se, agora, avaliar o termo $|\langle f_g \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) - \langle f \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon)|$:

$$\begin{aligned} &= \left| \left\langle f \exp \left[(J + i\epsilon v) \sum_{z \in M} \delta\Phi(z) \right] \right\rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) - \langle f \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) \right| \\ &= \left| \frac{1}{Z_{\Lambda}(J, \epsilon)} \right| \left| \int d\mu \exp \left\{ (J + i\epsilon v) \sum_z \Phi(z) \right\} f \left\{ \exp(J + i\epsilon v) \sum_{z \in M} \delta\Phi(z) - 1 \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{|Z_{\Lambda}(J, \epsilon)|} \int d\mu \left| \exp \left(J \sum_z \Phi(z) \right) \right| \left| \exp \left(-i\epsilon v \sum_z \Phi(z) \right) \right| |f| \times \\ &\quad \left| \exp(J + i\epsilon v) \sum_{z \in M} \delta\Phi(z) - 1 \right|, \end{aligned} \quad (7.59)$$

finalmente

$$\| \langle f_g \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) - \langle f \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) \| \leq \frac{1}{|Z_{\Lambda}(J, \epsilon)|} \int d\mu \exp \left(J \sum_z \Phi(z) \right) |f| \left| \exp(J + i\epsilon v) \sum_{z \in M} \delta\Phi(z) - 1 \right|. \quad (7.60)$$

Fica-se, agora, impossibilitado de se seguir com o método de análise proposto. Isto ocorre, como esperado, pois o funcional gerador para este modelo não é positivo definido e o problema se manifesta por meio do termo $1/|Z_{\Lambda}|$. A utilização do módulo na definição corrente do funcional gerador leva a uma violação da desigualdade atual, em oposição à situação original onde $1/|Z_{\Lambda}| = \frac{1}{Z_{\Lambda}}$. Uma visão mais geral da conexão entre este fato e a falha da demonstração será apresentada após a Análise II.

7.5 ANÁLISE II

Tomando f como $\cos \phi(x)$, tem-se

$$\langle \cos \phi(x) \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) = \frac{1}{Z_{\Lambda}(J, \epsilon)} \int d\mu_{\Lambda} \exp \left\{ J \sum_z \Phi(z) + i\epsilon \sum_z \Phi(z)v \right\} \cos \phi(x). \quad (7.61)$$

Realizando a transformação de calibre dada em (7.37), fica-se com

$$\begin{aligned} \langle \cos \phi(x) \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) &= \frac{1}{Z_{\Lambda}(J, \epsilon)} \int d\mu_{\Lambda} \exp \left\{ J \sum_{z \neq x} \Phi(z) + i\epsilon \sum_{z \neq x} \Phi(z)v \right\} \times \\ &\quad \exp \{ J\Pi(g(\alpha))\Phi(z) \} \exp \{ +i\epsilon\Pi(g(\alpha))\Phi(z)v \} \cos[\alpha + \phi(x)]. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Definindo e utilizando as expressões abaixo:

$$\exp \left\{ J \sum_{z \neq x} \Phi(z) + i\epsilon \sum_{z \neq x} \Phi(z)v \right\} = A, \quad (7.63)$$

$$\exp \{ J\Pi(g(\alpha))\Phi(z) \} = 1 + \{ \exp (J\Pi(g(\alpha))\Phi(z)) - 1 \} = 1 + B, \quad (7.64)$$

$$\exp \{ +i\epsilon\Pi(g(\alpha))\Phi(z)v \} = 1 + \{ \exp (+i\epsilon\Pi(g(\alpha))\Phi(z)v) - 1 \} = 1 + C, \quad (7.65)$$

em (7.62), tem-se

$$\begin{aligned} \langle \cos \phi(x) \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) &= \frac{1}{Z_{\Lambda}(J, \epsilon)} \left\{ \int d\mu_{\Lambda} A \cos[\alpha + \phi(x)] \right. \\ &\quad + \int d\mu_{\Lambda} AB \cos[\alpha + \phi(x)] + \int d\mu_{\Lambda} AC \cos[\alpha + \phi(x)] \\ &\quad \left. + \int d\mu_{\Lambda} ABC \cos[\alpha + \phi(x)] \right\}. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Tomando a média sobre $d\alpha$, tem-se

$$\begin{aligned} \langle \cos \phi(x) \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) &= \frac{1}{Z_{\Lambda}(J, \epsilon)} \left\{ \int d\mu_{\Lambda} d\alpha AB \cos[\alpha + \phi(x)] \right. \\ &\quad + \int d\mu_{\Lambda} d\alpha AC \cos[\alpha + \phi(x)] \\ &\quad \left. + \int d\mu_{\Lambda} d\alpha ABC \cos[\alpha + \phi(x)] \right\}. \end{aligned} \quad (7.67)$$

Agora, pode-se avaliar $|\langle \cos \phi(x) \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon)|$:

$$\begin{aligned}
|\langle \cos \phi(x) \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon)| &\leq \frac{1}{|Z_{\Lambda}(J, \epsilon)|} \left\{ \int d\mu_{\Lambda} d\alpha |A||B| |\cos[\alpha + \phi(x)]| \right. \\
&\quad + \int d\mu_{\Lambda} d\alpha |A||C| |\cos[\alpha + \phi(x)]| \\
&\quad \left. + \int d\mu_{\Lambda} d\alpha |A||B||C| |\cos[\alpha + \phi(x)]| \right\}, \tag{7.68}
\end{aligned}$$

onde

$$|A| = \left| \exp \left\{ J \sum_{z \neq x} \Phi(z) + i\epsilon \sum_{z \neq x} \Phi(z)v \right\} \right| = \exp \left\{ J \sum_{z \neq x} \Phi(z) \right\} \tag{7.69}$$

$$|B| = |\{\exp(J\Pi(g(\alpha))\Phi(z)) - 1\}| \leq \theta(J) \xrightarrow{J \downarrow 0} 0 \tag{7.70}$$

$$|C| = |\exp(+i\epsilon\Pi(g(\alpha))\Phi(z)v) - 1| \leq |\exp(+i\epsilon\Pi(g(\alpha))\Phi(z)v)| + 1 \leq 2. \tag{7.71}$$

Assim, obtém-se

$$\begin{aligned}
|\langle \cos \phi(x) \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon)| &\leq \frac{1}{|Z_{\Lambda}(J, \epsilon)|} \left\{ \int d\mu_{\Lambda} d\alpha \exp \left(J \sum_{z \neq x} \Phi(z) \right) \theta(J) |\cos[\alpha + \phi(x)]| \right. \\
&\quad + \int d\mu_{\Lambda} d\alpha \exp \left(J \sum_{z \neq x} \Phi(z) \right) 2 |\cos[\alpha + \phi(x)]| \\
&\quad \left. + \int d\mu_{\Lambda} d\alpha \exp \left(J \sum_{z \neq x} \Phi(z) \right) 2 |\cos[\alpha + \phi(x)]| \right\}, \tag{7.72}
\end{aligned}$$

ou definindo $K = \sup |\cos(\alpha + \phi(x))|$,

$$|\langle \cos \phi(x) \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon)| \leq \frac{1}{|Z_{\Lambda}(J, \epsilon)|} \left\{ [3\theta(J) + 2]K \int d\mu_{\Lambda} \exp \left(J \sum_{z \neq x} \Phi(z) \right) \right\}. \tag{7.73}$$

Novamente, chega-se aqui à impossibilidade de seguir-se com o método de análise escolhido. Isto ocorre também como esperado, pois o funcional gerador para este modelo não é positivo definido e o problema se manifesta mais uma vez por meio do termo $1/|Z_{\Lambda}|$ o qual novamente é diferente de $\frac{1}{Z_{\Lambda}}$. Estabelecido isto, é possível delinear o ponto onde as discussões falharam.

Estas demonstrações acima, de modo geral, baseiam-se em encontrar relações da forma $|H| \leq \epsilon(J) * \sup O$, onde H é alguma função local dos campos discutidos e O também. Assim, é necessário que os termos no numerador e denominador se simplifiquem sem violar as desigualdades que se desenvolvem ao longo da análise. Isto ocorria quando $|Z| = Z$ e assim numerador e denominador podiam se simplificar. Entretanto, isto não ocorre com a versão complexa.

Finalmente, a abordagem discutida é incapaz de demonstrar o teorema de Elitzur para o modelo com termo complexo abordado aqui. Além disso, tal resultado leva a crer que falhas também irão ocorrer para outros modelos com a adição do termo ϵ . Assim, não é possível afirmar que o teorema De Elitzur foi evadido

e outras abordagens devem ser procuradas, como fazer-se-á na próxima seção, entretanto este pode ser um primeiro indicativo da evasão do teorema.

7.6 OUTRAS ANÁLISES PARA SISTEMAS COM FUNCIONAL GERADOR NÃO POSITIVO

Feita uma discussão dos modelos com o termo ϵ , em relação ao teorema de Elitzur, algumas perguntas merecem ser contempladas: qualquer demonstração do Teorema de Elitzur necessita da positividade da medida? Existe alguma outra demonstração que não faça uso desta técnica? Se este for o caso, existe um critério mais geral? Para responder a estas perguntas utilizar-se-á um trabalho de Splittorff [6], no qual se apresenta uma técnica para se verificar a possibilidade ou não de QES.

Na primeira parte desta análise, adaptar-se-á a discussão feita na referência [6] para o modelo XY a nossa notação. Então, apresentar-se-ão seus argumentos gerais⁵.

7.6.1 Modelo XY

Adotando-se a parametrização (7.11) para spin com $\phi(x)$ como variável angular, tem-se que a ação será dada por (7.12). Todavia, é conveniente se introduzir algumas constantes multiplicativas, de modo a escrever a ação como

$$S = K \sum_x \sum_{\mu=1}^d \cos(\phi(x) - \phi(x + a\hat{\mu}) - \beta(x + a\hat{\mu}, x)) + \frac{1}{g^2} \sum_x \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^d \cos(\beta(x, x + a\hat{\nu}) + \beta(x + a\hat{\nu}, x + a\hat{\nu} + a\hat{\mu}) - \beta(x + a\hat{\mu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) - \beta(x, x + a\hat{\nu})), \quad (7.74)$$

onde N é o volume⁶, d é o número de dimensões e K e g são constantes. A escolha da expressão acima para a ação se deve ao fato dela ser utilizada nas discussões originais apresentadas por Elitzur em [5]. Para maiores informações a respeito desta escolha se remete o leitor à referência [53]. Esta ação é evidentemente invariante pela transformação de calibre, equações (7.18) e (7.19). Além disso, é real e periódica nos campos. Uma vez que é real, o peso e^{-S} é positivo no funcional gerador

$$Z_\Lambda(J=0) = \int_{-\pi}^{\pi} \prod_x d\phi(x) \prod_{\mu=1}^d d\beta(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(\phi, \beta)}. \quad (7.75)$$

Quando consideradas as fontes, a avaliação do valor esperado de vácuo envolve um limite duplo. Assim, adicionando o termo de fonte J para um campo externo $F(\phi, A)$, como feito em (7.13), pode-se escrever o valor esperado de um operador $O(\phi, \beta)$ como

⁵É conveniente ressaltar que a abordagem seguida em [6] parece carecer do mesmo rigor das análises do Teorema de Elitzur feita por outros autores, incluindo o próprio Elitzur.

⁶É usual omitir N na soma, ou produto sobre os sítios.

$$\langle O(\phi, \beta) \rangle \equiv \lim_{J \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Z(N, J)} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_x d\phi(x) \prod_{\mu=1}^d d\beta(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(\phi, \beta)} O(\phi, \beta) e^{JF(\phi, \beta)}. \quad (7.76)$$

O operador $O(\phi, \beta)$ é um operador local cujo valor esperado sob uma órbita de calibre é zero. Local significa que existe dependência apenas de um número finito de sítios e links. Uma restrição adicional é que se considera apenas fontes que são nulas sob uma média em uma órbita do grupo de calibre. Além disso, ela é escolhida de maneira a quebrar explicitamente a invariância de calibre. Assim, por exemplo, pode-se escolher

$$F(\phi, \beta) = \sum_x \sum_{\mu=1}^d \cos(\beta(x + a\hat{\mu}, x)). \quad (7.77)$$

A proposta acima, é a versão estudada por Elitzur em sua demonstração. Seguindo a proposta realizada em [6] é feita uma generalização, tal que, assume-se um peso $e^{-S(\phi, \beta)}$ invariante de calibre, porém não necessariamente real e positivo. Os campos ϕ e β novamente são variáveis angulares, de modo que somente se considera funções destas quantidades que são periódicas no intervalo $[-\pi, \pi]$. Mais ainda, novamente somente se considera ações e funções locais, ou seja, elementos onde os termos individuais somente apresentam conexão com os vizinhos próximos (sítios e links).

Splitdorff avalia o valor esperado de $\cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu}))$, onde y é um sítio fixo e ν uma direção fixa. Novamente ressaltando, esta escolha não é essencial. O valor esperado da função acima fica dado por

$$\begin{aligned} \langle \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})) \rangle &\equiv \lim_{J \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} Z(N, J)^{-1} \\ &\times \int_{-\pi}^{\pi} d\{\phi\} d\{\beta\} e^{-S(\phi, \beta)} e^{J \sum_{x, \mu} \cos(\beta(x + a\hat{\mu}, x))} \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})), \end{aligned} \quad (7.78)$$

onde

$$d\{\phi\} \equiv \prod_x d\phi(x) \quad \text{e} \quad d\{\beta\} \equiv \prod_x \prod_{\mu=1}^d d\beta(x + a\hat{\mu}, x). \quad (7.79)$$

Em ordem de se avaliar (7.79), procede-se realizando a seguinte mudança de variáveis de $(\phi(x), \beta(x + a\hat{\mu}, x))$ para $(\phi(x), l(x + a\hat{\mu}, x))$ onde

$$l(x + a\hat{\mu}, x) \equiv \phi(x) - \phi(x + \hat{\mu}) - \beta(x + a\hat{\mu}, x). \quad (7.80)$$

A ação é somente uma função de $l(x + a\hat{\mu}, x)$ devido à invariância de calibre. O Jacobiano é independente dos campos e se cancela entre o numerador e o denominador, quando se avalia o valor esperado. Portanto, $\langle \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})) \rangle$ fica dado por

$$\begin{aligned} \langle \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})) \rangle &\equiv \\ &\lim_{J \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\int d\{l\} e^{-S(l)} \int d\{\phi\} e^{J \sum_{x, \mu} \cos(l(x + a\hat{\mu}, x) - \phi(x) + \phi(x + a\hat{\mu}))} \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu}))}{\int d\{l\} e^{-S(l)} \int d\{\phi\} e^{J \sum_{x, \mu} \cos(l(x + a\hat{\mu}, x) - \phi(x) + \phi(x + a\hat{\mu}))}}. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Então, devido à escolha da fonte a expansão de $e^{J \sum_{x, \mu} \cos(l(x + a\hat{\mu}, x) - \phi(x) + \phi(x + a\hat{\mu}))}$ no denominador leva a

ausência de termo linear em J , enquanto no numerador a expansão de $e^{J \sum_{x,\mu} \cos(l(x+a\hat{\mu},x)-\phi(x)+\phi(x+a\hat{\mu}))}$ leva à

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\phi(x) d\phi(x+a\hat{\mu}) e^{J \sum_{x,\mu} \cos(l(x+a\hat{\mu},x)-\phi(x)+\phi(x+a\hat{\mu}))} \cos(\phi(y)-\phi(y+a\hat{\nu})) = J2\pi^2 \cos(l(x+a\hat{\mu},x)) + \mathcal{O}(J^2). \quad (7.82)$$

Assim, para J pequeno se encontra

$$\langle \cos(\phi(y)-\phi(y+a\hat{\nu})) \rangle = \lim_{J \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{J/2 \int d\{l\} e^{-S(l)} \cos(l(y+a\hat{\mu},y))}{\int d\{l\} e^{-S(l)}} + \mathcal{O}(J^2). \quad (7.83)$$

Se $e^{-S(l)}$ é uma função positiva e real então pode ser usado que $|\cos(l(y+a\hat{\mu},y))| \leq 1$ para mostrar que para todo N e J

$$\frac{J/2 \int d\{l\} e^{-S(l)} \cos(l(y+a\hat{\mu},y))}{\int d\{l\} e^{-S(l)}} \leq \frac{J/2 Z(N,J)}{Z(N,J)}. \quad (7.84)$$

O limite $N \rightarrow \infty$ no lado direito é trivial, de modo que $\langle \cos(\phi(y)-\phi(y+a\hat{\nu})) \rangle$ passa a desaparecer linearmente com J . E o mesmo é verdade para os termos de ordem superior em J .

Se $e^{-S(l)}$ não é positivo, não é possível chegar a tal conclusão. Retornando à expressão (7.83) e realizando a integral sobre todos os $l(x+a\hat{\mu},x)$ com $x \neq y$ e $\mu \neq \nu$, tem-se

$$\langle \cos(\phi(y)-\phi(y+a\hat{\nu})) \rangle \equiv \lim_{J \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{J/2 \int_{-\pi}^{\pi} dl(y,y+a\hat{\nu}) f(l(y+a\hat{\mu},y),N) \cos(l(y+a\hat{\mu},y))}{\int d\{l\} e^{-S(l)}} + \mathcal{O}(J^2), \quad (7.85)$$

onde

$$f(l(y+a\hat{\mu},y),N) \equiv \int \prod_{\substack{x \neq y \\ \mu \neq \nu}} dl(x+a\hat{\mu},x) e^{-S(l)}. \quad (7.86)$$

O único requerimento imposto à função $f(l(y+a\hat{\mu},y),N)$ é que a mesma seja periódica em $l(y+a\hat{\mu},y)$. Deste modo, a invariância de calibre e a periodicidade não excluem, por exemplo, soluções da forma $f(l(y+a\hat{\mu},y),N) = \frac{1}{N} + \cos(l(y+a\hat{\mu},y))$. Neste caso, o limite de $N \rightarrow \infty$ em (7.85) é infinito (note que o numerador é maior que o denominador por um fator de N). Portanto, os limites levam à possibilidade de um valor esperado de vácuo não-trivial. Este exemplo ilustra que a invariância de calibre sozinha não é suficiente para levar a um valor esperado de vácuo nulo.

7.6.2 Proposta Geral

Admita uma função de calibre, $O(\phi,\beta)$, local, limitada e periódica que é nula sob uma média em sua órbita do grupo de calibre. Considere também uma fonte geral, $F(\phi,\beta)$, limitada e periódica. Partindo da definição (7.76) e expandindo até a primeira ordem em J se obtém

$$\langle O \rangle = \lim_{J \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{J \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{x,\mu} dl(x+a\hat{\mu},x) e^{-S(l)} g(l)}{\int_{-\pi}^{\pi} d\{l\} d\{\phi\} e^{-S(l)} + J \int_{-\pi}^{\pi} d\{l\} e^{-S(l)} F(l)} + \mathcal{O}(J^2), \quad (7.87)$$

onde

$$g(l) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \prod_x d\phi(x) F(\phi, l) O(\phi, l) \quad (7.88)$$

e

$$F(l) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \prod_x x d\phi(x) F(\phi, l). \quad (7.89)$$

Agora, têm-se duas possibilidades: ou se tem um termo linear em J no denominador ou não. Na presença de termo linear, provado que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} dl(x + a\hat{\mu}, x) d\phi(x) e^{-S(l)}}{\int_{-\pi}^{\pi} dl(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(l)} F(l)} = 0, \quad (7.90)$$

pode-se largar o primeiro termo do denominador da expressão (7.87). Assim, os termos de J se cancelam e o valor esperado de vácuo passa a ser dado por

$$\langle O \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{J \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{x,\mu} dl(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(l)} g(l)}{J \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{x,\mu} dl(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(l)} F(l)}. \quad (7.91)$$

Uma vez que os fatores de J se cancelaram explicitamente o valor esperado de vácuo é potencialmente não-nulo.

Na ausência de termo linear em J se requer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} dl(x + a\hat{\mu}, x) d\phi(x) e^{-S(l)}}{\int_{-\pi}^{\pi} dl(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(l)} g(l)} = 0, \quad (7.92)$$

em ordem de se obter um valor esperado de vácuo não nulo. A propriedade (7.90) ou (7.91) que são características necessárias em ordem de se obter um valor esperado de vácuo não-nulo de $\langle O \rangle$ apresentam um significado físico direto: As razões definidas representam o inverso do valor esperado de vácuo de F e g respectivamente, medidos na ausência de uma fonte externa. Uma vez que F e g são funções de calibre arbitrárias, periódicas e limitadas, pode-se formular a seguinte proposta [6]: se todo operador invariante de calibre local e limitado tem valor esperado de vácuo finito quando medido sem fonte externa então a quebra espontânea de simetria local é excluída.

7.6.3 Nosso Modelo Teste

O modelo a ser testado é o XY com um termo ϵ . A ação dele é dada por (7.74), que é equivalente a ação (7.12), as diferenças residem na escolha de constantes.

O valor esperado de um operador f é dado a menos de mais um termo de fonte para β , o campo de calibre, por (7.31):

$$\langle f \rangle_{\Lambda}(J, \epsilon) = \frac{1}{Z_{\Lambda}(J, \epsilon)} \int d\mu_{\Lambda} \exp \left\{ J \sum_{z \in \Lambda} F(\Phi(z)) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_{z \in \Lambda} (\Phi(z) - v)^2 \right\} f, \quad (7.31)$$

com o funcional gerador definido por (7.32). Assim, tem-se que o valor esperado de vácuo, a menos de algumas constantes que foram descartadas ou reescritas, fica dado por

$$\langle f \rangle_{\Lambda}(K, J, \epsilon) = \frac{1}{Z_{\Lambda}(K, J, \epsilon)} \int d\mu_{\Lambda} \exp \left\{ (K + i\epsilon v) \sum_x \left(\frac{\cos \phi(x)}{\sin \phi(x)} \right) + J \sum_{x, \mu} \cos(\beta(x + a\hat{\mu}, x)) \right\} f, \quad (7.93)$$

onde $Z_{\Lambda}(K, J, \epsilon)$ é

$$Z_{\Lambda}(K, J, \epsilon) = \frac{1}{Z_{\Lambda}(0, 0, \epsilon)} \int d\mu_{\Lambda} \exp \left\{ (K + i\epsilon v) \sum_x \left(\frac{\cos \phi(x)}{\sin \phi(x)} \right) + J \sum_{x, \mu} \cos(\beta(x + a\hat{\mu}, x)) \right\}. \quad (7.94)$$

Assumindo f como $\cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu}))$, uma função dependente de calibre local, periódica e limitada, começa-se a aplicar as ideias desenvolvidas anteriormente, primeiro fazendo a mudança de variável (7.80):

$$\begin{aligned} \langle \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})) \rangle_{\Lambda}(K, J, \epsilon) &= \\ \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{x, \mu} d\phi(x) dl(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(\phi, l)} \exp \left\{ (K + i\epsilon v) \sum_x \left(\frac{\cos \phi(x)}{\sin \phi(x)} \right) + J \sum_{x, \mu} \cos(l(x + a\hat{\mu}, x) - \phi(x) + \phi(x + a\hat{\mu})) \right\} \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu}))}{\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{x, \mu} d\phi(x) dl(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(\phi, l)} \exp \left\{ (K + i\epsilon v) \sum_x \left(\frac{\cos \phi(x)}{\sin \phi(x)} \right) + J \sum_{x, \mu} \cos(l(x + a\hat{\mu}, x) - \phi(x) + \phi(x + a\hat{\mu})) \right\}}. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Expandindo a exponencial que contém os termos de fonte (até primeira ordem nestes) se obtém

$$\langle \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})) \rangle_{\Lambda}(K, J, \epsilon) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{x, \mu} d\phi(x) dl(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(l)} \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})) + \mathcal{G}(l)}{\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{x, \mu} d\phi(x) dl(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(l)} + \mathcal{F}(l)}, \quad (7.96)$$

onde

$$\mathcal{G}(l) = \int_{-\pi}^{\pi} d\{\phi\} d\{l\} e^{-S(l)} \left\{ (K + i\epsilon v) \sum_x \left(\frac{\cos \phi(x)}{\sin \phi(x)} \right) + J \sum_{x, \mu} \cos(l(x + a\hat{\mu}, x) - \phi(x) + \phi(x + a\hat{\mu})) \right\} \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})) \quad (7.97)$$

e

$$\mathcal{F}(l) = \int_{-\pi}^{\pi} d\{\phi\} d\{l\} e^{-S(l)} \left\{ (K + i\epsilon v) \sum_x \left(\frac{\cos \phi(x)}{\sin \phi(x)} \right) + J \sum_{x, \mu} \cos(l(x + a\hat{\mu}, x) - \phi(x) + \phi(x + a\hat{\mu})) \right\}. \quad (7.98)$$

O primeiro termo no numerador de (7.96) é avaliado por meio de

$$\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{x, \mu} dl(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(l)} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\substack{x \neq y \\ x \neq y + a\hat{\mu}}} d\phi(x) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y) d\phi(y + a\hat{\mu}) [\cos \phi(y) \cos \phi(y + a\hat{\nu}) + \sin \phi(y) \sin \phi(y + a\hat{\nu})] \quad (7.99)$$

e, portanto, é zero. Assim, fica-se com

$$\langle \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})) \rangle_{\Lambda}(K, J, \epsilon) = \frac{\mathcal{G}(l)}{\int_{-\pi}^{\pi} \prod_{x,\mu} d\phi(x) dl(x + a\hat{\mu}, x) e^{-S(l)} + \mathcal{F}(l)}. \quad (7.100)$$

É conveniente se reescrever $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}$ como

$$\mathcal{G}(l) = \int_{-\pi}^{\pi} d\{l\} e^{-S(l)} \tilde{G}(l) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(l) = \int_{-\pi}^{\pi} d\{l\} e^{-S(l)} \tilde{F}(l), \quad (7.101)$$

onde

$$\tilde{G}(l) = \int_{-\pi}^{\pi} d\{\phi\} \left\{ (K + i\epsilon v) \sum_x \begin{pmatrix} \cos \phi(x) \\ \sin \phi(x) \end{pmatrix} + J \sum_{x,\mu} \cos(l(x + a\hat{\mu}, x) - \phi(x) + \phi(x + a\hat{\mu})) \right\} \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})) \quad (7.102)$$

e

$$\tilde{F}(l) = \int_{-\pi}^{\pi} d\{\phi\} \left\{ (K + i\epsilon v) \sum_x \begin{pmatrix} \cos \phi(x) \\ \sin \phi(x) \end{pmatrix} + J \sum_{x,\mu} \cos(l(x + a\hat{\mu}, x) - \phi(x) + \phi(x + a\hat{\mu})) \right\}. \quad (7.103)$$

Ir-se-á primeiramente avaliar $\tilde{F}(l)$ considerando seu primeiro e segundo termos individualmente. O primeiro termo é dado por

$$(K + i\epsilon v) \sum_x \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{z \neq x} d\phi(z) \begin{pmatrix} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(x) \cos \phi(x) \\ \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(x) \sin \phi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.104)$$

O segundo termo pode ser avaliado por meio de

$$\begin{aligned} J \sum_{x,\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\substack{z \neq y \\ z \neq y + a\hat{\mu}}} d\phi(z) & \left[\cos l(x, x + a\hat{\mu}) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(x) \cos \phi(x) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(x + a\hat{\mu}) \cos \phi(x + a\hat{\mu}) \right. \\ & + \sin l(x, x + a\hat{\mu}) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(x) \sin \phi(x) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(x + a\hat{\mu}) \cos \phi(x + a\hat{\mu}) \\ & - \sin l(x, x + a\hat{\mu}) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(x) \cos \phi(x) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(x + a\hat{\mu}) \sin \phi(x + a\hat{\mu}) \\ & \left. + \cos l(x, x + a\hat{\mu}) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(x) \sin \phi(x) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(x + a\hat{\mu}) \sin \phi(x + a\hat{\mu}) \right]. \quad (7.105) \end{aligned}$$

Finalmente, $\tilde{F}(l) = 0$ e, portanto, $\mathcal{F}(l) = 0$ também. $\tilde{G}(l)$ também será avaliado considerando-se seu primeiro e o segundo termos individualmente:

$$\begin{aligned}
& (K + i\epsilon v) \sum_{\substack{x \neq y \\ x \neq y + a\hat{\mu}}} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\substack{x \neq y \\ x \neq y + a\hat{\mu}}} d\phi(x) \begin{pmatrix} \cos \phi(x) \\ \sin \phi(x) \end{pmatrix} \\
& \quad \times \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y) \cos \phi(y) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y + a\hat{\mu}) \cos \phi(y + a\hat{\nu}) + \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y) \sin \phi(y) \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y + a\hat{\mu}) \sin \phi(y + a\hat{\nu}) \\
& + (K + i\epsilon v) \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\substack{x \neq y \\ x \neq y + a\hat{\mu}}} d\phi(x) \left[\int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y) \begin{pmatrix} \cos^2 \phi(y) \\ \cos \phi(y) \sin \phi(y) \end{pmatrix} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y + a\hat{\mu}) \cos \phi(y + a\hat{\nu}) \right. \\
& \quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y) \begin{pmatrix} \cos \phi(y) \sin \phi(y) \\ \sin^2 \phi(y) \end{pmatrix} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y + a\hat{\mu}) \sin \phi(y + a\hat{\nu}) \right] \\
& + (K + i\epsilon v) \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\substack{x \neq y \\ x \neq y + a\hat{\mu}}} d\phi(x) \left[\int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y + a\hat{\mu}) \begin{pmatrix} \cos^2 \phi(y + a\hat{\mu}) \\ \cos \phi(y + a\hat{\mu}) \sin \phi(y + a\hat{\mu}) \end{pmatrix} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y) \cos \phi(y) \right. \\
& \quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y + a\hat{\mu}) \begin{pmatrix} \cos \phi(y + a\hat{\mu}) \sin \phi(y + a\hat{\mu}) \\ \sin^2 \phi(y + a\hat{\mu}) \end{pmatrix} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi(y) \sin \phi(y) \right] \tag{7.106}
\end{aligned}$$

é a contribuição do primeiro termo e é claramente nula. A contribuição do segundo termo é dada por

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(l) = J \sum_{x, \mu} \int_{-\pi}^{\pi} d\{\phi\} \left[\right. & \cos l(x + a\hat{\mu}, x) \cos \phi(x) \cos \phi(x + a\hat{\mu}) \cos \phi(y) \cos \phi(y + a\hat{\mu}) \\
& + \sin l(x + a\hat{\mu}, x) \sin \phi(x) \cos \phi(x + a\hat{\mu}) \cos \phi(y) \cos \phi(y + a\hat{\mu}) \\
& - \sin l(x + a\hat{\mu}, x) \cos \phi(x) \sin \phi(x + a\hat{\mu}) \cos \phi(y) \cos \phi(y + a\hat{\mu}) \\
& + \cos l(x + a\hat{\mu}, x) \sin \phi(x) \sin \phi(x + a\hat{\mu}) \cos \phi(y) \cos \phi(y + a\hat{\mu}) \\
& + \cos l(x + a\hat{\mu}, x) \cos \phi(x) \cos \phi(x + a\hat{\mu}) \sin \phi(y) \sin \phi(y + a\hat{\mu}) \\
& + \sin l(x + a\hat{\mu}, x) \sin \phi(x) \cos \phi(x + a\hat{\mu}) \sin \phi(y) \sin \phi(y + a\hat{\mu}) \\
& - \sin l(x + a\hat{\mu}, x) \cos \phi(x) \sin \phi(x + a\hat{\mu}) \sin \phi(y) \sin \phi(y + a\hat{\mu}) \\
& \left. + \cos l(x + a\hat{\mu}, x) \sin \phi(x) \sin \phi(x + a\hat{\mu}) \sin \phi(y) \sin \phi(y + a\hat{\mu}) \right], \tag{7.107}
\end{aligned}$$

que somente contribui quando $x = y$ e $\mu = \nu$, pois para os demais casos a integral é nula. Finalmente, o resultado é $\tilde{G}(l) = (2)^{N-1}(\pi)^N J \cos l(x + a\hat{\mu}, x)$. Assim, fica-se com a seguinte expressão para $\mathcal{G}(l)$ e $\mathcal{F}(l)$, respectivamente:

$$\mathcal{G}(l) = (2)^{N-1}(\pi)^N J \int_{-\pi}^{\pi} d\{l\} e^{-S(l)} \cos l(x + a\hat{\mu}, x) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}(l) = 0. \tag{7.108}$$

Substituindo o resultado acima em (7.100) se obtém

$$\begin{aligned}
\langle \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})) \rangle_{\Lambda}(K, J, \epsilon) &= \frac{(2)^{N-1}(\pi)^N J \int_{-\pi}^{\pi} d\{l\} e^{-S(l)} \cos l(x + a\hat{\mu}, x)}{\int_{-\pi}^{\pi} \prod_x d\phi(x) d\{l\} e^{-S(l)}} \\
&= \frac{(2)^{N-1}(\pi)^N J \int_{-\pi}^{\pi} d\{l\} e^{-S(l)} \cos l(x + a\hat{\mu}, x)}{(2\pi)^N \int_{-\pi}^{\pi} d\{l\} e^{-S(l)}}. \quad (7.109)
\end{aligned}$$

Tomando o limite $N \rightarrow \infty$ e depois $J \rightarrow 0$ se encontra $\langle \cos(\phi(y) - \phi(y + a\hat{\nu})) \rangle = 0$, de modo que não há quebra de simetria. É possível tentar a análise com outras funções, contudo o resultado será o mesmo. Todavia, isto não significa que a proposta deva ser abandonada, pois na versão mais completa com simetria de calibre se adiciona um termo de campo auxiliar, o qual por exemplo na abordagem com o grupo $U(1)$ é

$$\frac{-i}{2e_0} \sum_{x,\mu} B(x) \Delta_{\mu}^f (U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*). \quad (7.110)$$

O correspondente termo para o grupo $SO(2)$ discutido aqui seria algo da forma $\sum_{x,\mu} B(x) \Delta_{\mu}^f \sin \beta(x + a\hat{\mu}, x)$. A questão é que quando implementada a transformação (7.80) se encontra

$$\sum_{x,\mu} B(x) \left[\sin[\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x + 2a\hat{\mu}) - \beta(x + a\hat{\mu}, x + 2a\hat{\mu})] - \sin[\phi(x) - \phi(x + a\hat{\mu}) - \beta(x + a\hat{\mu}, x)] \right]. \quad (7.111)$$

Observando a expressão acima fica evidente que ela depende de ϕ e, portanto, deve entrar na definição de $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$. Uma vez que não é adequado expandir este fator descartando termos, segue que é inadequado a utilização dessa abordagem para a análise desse caso.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foram apresentados os conceitos básicos de teoria de campos em rede, como a construção do gerador funcional para modelos com simetrias globais até modelos com simetria de calibre. Deu-se, também, um destaque ao processo de tomar o limite do contínuo, o qual foi importante para se avaliar a técnica de mapa dinâmico em rede.

Seguiu-se então com uma apresentação geral da técnica de mapa dinâmico, discutindo os conceitos e os elementos necessários para a sua utilização, tais como representações unitárias não-equivalentes e a translação bosônica. Implementando esta ferramenta, discutiu-se um modelo com simetria de translação global, onde se lançou mão do procedimento associado à prescrição ϵ como método de remoção da ambiguidade do gerador funcional. Também foi verificada a sua contra-parte em rede.

A utilização da prescrição ϵ é conveniente, pois introduz um termo complexo no funcional gerador e como apresentado na introdução e discutido no capítulo do teorema de Elitzur, termos complexos evadem o teorema de Elitzur e uma nova análise deve ser implementada de forma a verificar a possibilidade ou não de ocorrência de quebra espontânea de simetria. No capítulo 7 deste trabalho, onde discutiu-se sobre o teorema de Elitzur, foi apresentando seu enunciado, assim como a sua demonstração para modelos compactos, entretanto salienta-se que este pode ser verificado para outros modelos que não satisfaçam algumas das hipóteses levantadas.

Utilizou-se, então, o teorema de Elitzur enunciado e as técnicas utilizadas em sua demonstração para se estudar alguns modelos com funcionais geradores não positivos definidos, onde o elemento imaginário é introduzido pela prescrição ϵ . O resultado obtido é que foi impossível aplicar as técnicas utilizadas no teorema de Elitzur para este funcional gerador, e é natural concluir que ele evade o teorema de Elitzur. Neste caso, seguiu-se com a análise apresentada por Splittorff, onde então, encontra-se que valor esperado de vácuo é nulo, e novamente a quebra espontânea de simetria de calibre não é possível. Entretanto, ainda não se descarta completamente o procedimento $i\epsilon$, pois o funcional gerador mais completo como apresentada no capítulo 6, apresenta um termo de fixação de calibre, em termos de um campo auxiliar $B(x)$, e este termo torna as técnicas apresentadas por Splittorff inadequadas. Assim sendo ainda existe a possibilidade de quebra espontânea de simetria.

No capítulo 6, apresentou-se o modelo com simetria $U(1)$ local mais o termo da prescrição $i\epsilon$. Utilizou-se esse modelo para exemplificar a quebra espontânea de simetria local por meio do mapa dinâmico. Então, seguiu-se para o seu correspondente em rede, o qual é um dos pontos chaves deste trabalho: aplicar a técnica de mapa dinâmico por meio da prescrição $i\epsilon$ para a construção da quebra espontânea de simetria local em rede. Esta etapa é a que fornece o modelo analisado no Capítulo 7. A adaptação em rede se utilizou de diferentes técnicas de aproximações para o cálculo das funções de correlação e do mapa dinâmico, entre estas, a aproximação de campo fraco e de $a \ll 1$. O que se observa é que somente no limite $a \ll 1$ para todos os campos os resultados são mais plausíveis e interpretáveis.

O capítulo 6 encerrou com uma discussão a respeito do teorema de Haag sobre representações de interações. O ponto chave é um consequência deste teorema que leva a necessidade de representações unitárias não equivalentes das relações de comutação canônicas e como a existência de infinitos graus de liberdade levam a este tipo de representação. Combinado estes pontos cruciais com o fato do teorema de Haag precisar da invariância de Poincaré para sua demonstração, apontou-se que ele é evadido em rede. Neste caso, as teorias em rede não tem motivo para utilizar representações unitárias equivalentes, uma vez que a simetria que levou

a elas no contínuo, não existe em rede. O que é uma justificativa adequada para que a técnica de mapa dinâmico somente se apresente razoável em rede no limite termodinâmico, uma vez que esta depende da existência deste tipo de representação.

Conclui-se assim, que apesar da técnica de mapa dinâmico provavelmente não ser adequável de maneira completa em rede, a prescrição $i\epsilon$ mais o termo de fixação de calibre com campo auxiliar podem fornecer uma maneira alternativa para a descrição de quebra espontânea de simetria local em rede.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] WEGNER, F. J. Duality in generalized ising models and phase transitions without local order parameters. **Journal of Mathematical Physics**, v. 12, n. 10, p. 2259–2272, 1971.
- [2] WILSON, K. G. Confinement of quarks. **Physical Review D**, v. 10, p. 2445–2459, 1974.
- [3] BALIAN, R.; DROUFFE, J. M.; ITZYKSON, C. Gauge fields on a lattice. i. general outlook. **Physical Review D**, v. 10, p. 3376–3395, 1974.
- [4] KOGUT, J.; SUSSKIND, L. Hamiltonian formulation of wilson’s lattice gauge theories. **Physical Review D**, v. 11, p. 395–408, 1975.
- [5] ELITZUR, S. Impossibility of spontaneously breaking local symmetries. **Physical Review D**, v. 12, p. 3978–3982, 1975.
- [6] SPLITTORFF, K. Impossibility of spontaneously breaking local symmetries and the sign problem. **Physical Review D**, v. 68, p. 054504, 2003.
- [7] FRÖHLICH, J.; MORCHIO, G.; STROCCHI, F. Higgs phenomenon without symmetry breaking order parameter. **Nuclear Physics B**, v. 190, n. 3, p. 553 – 582, 1981.
- [8] ANDERSON, P. W. Plasmons, gauge invariance, and mass. **Physical Review**, v. 130, p. 439–442, 1963.
- [9] ENGLERT, F.; BROUT, R. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. **Physical Review Letters**, v. 13, p. 321–323, 1964.
- [10] HIGGS, P. W. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. **Physical Review Letters**, v. 13, p. 508–509, 1964.
- [11] GURALNIK, G. S.; HAGEN, C. R.; KIBBLE, T. W. B. Global conservation laws and massless particles. **Physical Review Letters**, v. 13, p. 585–587, 1964.
- [12] UMEZAWA, H.; MATSUMOTO, H.; TACHIKI, M. **Thermo field dynamics and condensed states**. Amsterdã: North-Holland Pub. Co., 1982. 591 p.
- [13] UMEZAWA, H. **Advanced field theory: Micro, macro, and thermal physics**. Nova York: AIP Press, 1995. 238 p.
- [14] MÜNSTER, G. Lattice quantum field theory. **Scholarpedia**, v. 5, n. 12, p. 8613, 2010. revision 91423.
- [15] WIPF, A. **Statistical approach to quantum field theory: An introduction**. Lecture Notes in Physics. Nova York: Springer Berlin Heidelberg, 2012. 390 p.
- [16] MONTVAY, I.; MÜNSTER, G. **Quantum fields on a lattice**. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Nova York: Cambridge University Press, 1997. 491 p.
- [17] MCCOY, B. Ising model: exact results. **Scholarpedia**, v. 5, n. 7, p. 10313, 2010. revision 123804.

- [18] KETOV, S. V. Nonlinear Sigma model. **Scholarpedia**, v. 4, n. 1, p. 8508, 2009. revision 91589.
- [19] RAJARAMAN, R. **Solitons and instantons: An introduction to solitons and instantons in quantum field theory**. North-Holland personal library. Amsterdã: North-Holland Publishing Company, 1982. 409 p.
- [20] NEUMANN, J. V. **Mathematical foundations of quantum mechanics**. Investigations in physics. Princeton: Princeton University Press, 1955. 445 p.
- [21] ITZYKSON, C.; ZUBER, J. **Quantum field theory**. Dover Books on Physics. Nova York: Dover Publications, 2012. 752 p.
- [22] BOGOLIUBOV, N.; LOGUNOV, A.; TODOROV, I. **Axiomatic quantum field theory**. Mathematical physics monograph series. Massachusetts: W. A. Benjamin, Advanced Book Program, 1975. 707 p.
- [23] BLASONE, M.; JIZBA, P. Topological defects as inhomogeneous condensates in quantum field theory: Kinks in (1+1) dimensional $\lambda\phi^4$ theory. **Annals of Physics**, v. 295, n. 2, p. 230 – 260, 2002.
- [24] HOVE, L. V. Les difficultés de divergences pour un modèle particulier de champ quantifié. **Physica**, v. 18, n. 3, p. 145 – 159, 1952.
- [25] ANDERSON, P. W. Limits on the energy of the antiferromagnetic ground state. **Physical Review**, v. 83, p. 1260–1260, 1951.
- [26] KUBO, R. The spin-wave theory of antiferromagnetics. **Physical Review**, v. 87, p. 568–580, 1952.
- [27] CONCINI, C. D.; VITIELLO, G. Spontaneous breakdown of symmetry and group contractions. **Nuclear Physics B**, v. 116, n. 1, p. 141 – 156, 1976.
- [28] NAMBU, Y.; JONA-LASINIO, G. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. **Physical Review**, v. 122, p. 345–358, 1961.
- [29] GOLDSTONE, J.; SALAM, A.; WEINBERG, S. Broken symmetries. **Physical Review**, v. 127, p. 965–970, 1962.
- [30] GOLDSTONE, J. Field theories with ■ superconductor ■ solutions. **Il Nuovo Cimento (1955-1965)**, v. 19, n. 1, p. 154–164, 1961.
- [31] SHAH, M. N.; UMEZAWA, H.; VITIELLO, G. Relation among spin operators and magnons. **Physical Review B**, v. 10, p. 4724–4736, 1974.
- [32] MATSUMOTO, H.; PAPASTAMATIOU, N.; UMEZAWA, H. The formulation of spontaneous breakdown in the path-integral method. **Nuclear Physics B**, v. 68, n. 1, p. 236 – 254, 1974.
- [33] MATSUMOTO, H.; PAPASTAMATIOU, N.; UMEZAWA, H. The goldstone theorem and dynamical rearrangement of symmetry in the path-integral formalism. **Nuclear Physics B**, v. 82, n. 1, p. 45 – 68, 1974.
- [34] MATSUMOTO, H.; PAPASTAMATIOU, N.; UMEZAWA, H.; VITIELLO, G. Dynamical rearrangement in the anderson-higgs-kibble mechanism. **Nuclear Physics B**, v. 97, n. 1, p. 61 – 89, 1975.

- [35] BLASONE, M.; JIZBA, P.; VITIELLO, G. **Quantum field theory and its macroscopic manifestations: Boson condensation, ordered patterns, and topological defects**. Londres: Imperial College Press, 2011. 526 p.
- [36] NAKAGAWA, K.; SEN, R. N.; UMEZAWA, H. Dynamical rearrangement of symmetries. **Il Nuovo Cimento A (1965-1970)**, v. 42, n. 3, p. 565–588, 1966.
- [37] ANDERSON, P. W. Coherent excited states in the theory of superconductivity: Gauge invariance and the meissner effect. **Physical Review**, v. 110, p. 827–835, 1958.
- [38] HIGGS, P. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. **Physics Letters**, v. 12, n. 2, p. 132 – 133, 1964.
- [39] HIGGS, P. W. Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons. **Physical Review**, v. 145, p. 1156–1163, 1966.
- [40] KIBBLE, T. W. B. Symmetry breaking in non-abelian gauge theories. **Physical Review**, v. 155, p. 1554–1561, 1967.
- [41] NAMBU, Y. Quasi-particles and gauge invariance in the theory of superconductivity. **Physical Review**, v. 117, p. 648–663, 1960.
- [42] PINTO, C. Boundary conditions, gauge fixing ambiguities and exact expectation values in U(1) lattice gauge theory. **International Journal of Modern Physics A**, v. 31, n. 08, p. 1650035–1–1650035–24, 2016.
- [43] HAAG, R. On quantum field theories. **Matemtisk-fysiske Meddelelser**, v. 29, n. 12, p. 1–37, 1955.
- [44] HALL, D.; WIGHTMAN. A theorem on invariant analytic functions with applications to relativistic quantum field theory. **Matemtisk-fysiske**, v. 31, n. 5, p. 1–41, 1957.
- [45] FRIEDRICHS, K. **Mathematical aspects of the quantum theory of fields**. Nova York: Interscience Publishers, 1953. 272 p.
- [46] WIGHTMAN, A. S.; SCHWEBER, S. S. Configuration space methods in relativistic quantum field theory. i. **Phys. Rev.**, v. 98, p. 812–837, 1955.
- [47] FRASER, D. L. Haag’s theorem and the interpretation of quantum field theories with interactions. 2006.
- [48] EARMAN, J.; FRASER, D. Haag’s theorem and its implications for the foundations of quantum field theory. **Erkenntnis**, v. 64, n. 3, p. 305, 2006.
- [49] ANGELIS, G. F. D.; FALCO, D. D.; GUERRA, F. Scalar quantum electrodynamics on lattice correlation inequalities and infinite volume limit. **Physics Letters B**, v. 68, n. 3, p. 255 – 257, 1977.
- [50] DE ANGELIS, G. F.; DE FALCO, D.; GUERRA, F. Scalar quantum electrodynamics on the lattice as classical statistical mechanics. **Communications in Mathematical Physics**, v. 57, n. 3, p. 201–212, 1977.
- [51] DE ANGELIS, G. F.; DE FALCO, D.; GUERRA, F. Note on the abelian higgs-kibble model on a lattice: Absence of spontaneous magnetization. **Physical Review D**, v. 17, p. 1624–1628, 1978.

- [52] ITZYKSON, C.; DROUFFE, J. **Statistical field theory: Volume 1, from brownian motion to renormalization and lattice gauge theory**. Nova York: Cambridge University Press, 1991. 403 p., v. 1 of **Cambridge Monographs on Mathematical Physics**.
- [53] KOGUT, J. B. An introduction to lattice gauge theory and spin systems. **Review of Modern Physics**, v. 51, p. 659–713, 1979.

APÊNDICE A - A REGRA DE LEIBNIZ EM REDE

A operação de derivada em rede não apresenta todas as propriedades de sua contraparte contínua, uma destas é a regra de Leibniz. Porém, antes de demonstrarmos tal fato vamos verificar o significado da regra de Leibniz. É notório que a invariância da ação contínua frente a variações de simetrias infinitesimais no espaço-tempo utiliza-se da regra de Leibniz para sua demonstração. Contudo, tal regra não existe em rede. Tal fato já era esperado, uma vez que a rede em sua formulação já não apresenta essa invariância. Agora, pode-se provar que independentemente da derivada construída em rede, nenhuma satisfaz a regra de Leibniz.

Considere o conjunto de funções em rede, $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$, formando um espaço vetorial e qualquer derivada na rede D (um operador linear neste espaço). Definindo o operador linear $D : \text{map}(\Lambda, \mathbb{C}) \rightarrow \text{map}(\Lambda, \mathbb{C})$ que satisfaz a regra de Leibniz

$$D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg), \quad \forall f, g : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\text{A.1})$$

com $f \cdot g$ denotando o produto de funções no mesmo ponto, isto é, $f \cdot g = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$, tem-se que $D = 0$. Para demonstrar esta afirmação, faz-se uso de uma representação, ou seja, nós identificamos a função na rede $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^n$ como a componente x do vetor $(f(x))_{x=1, \dots, N^\mu}$, onde N é o número de sítios em uma direção, e N^μ é o número total de sítios na rede, e o operador linear D com a matriz $N^\mu \times N^\mu$ $D(x, y)$ ou seja,

$$(Df)_x = \sum_{y \in \Lambda} D(x, y) f(y). \quad (\text{A.2})$$

A regra de Leibniz pode ser escrita como

$$\sum_m D(x, m) (f(m)g(m)) = g(x) \sum_m D(x, m) f(m) + f(x) \sum_m D(x, m) g(m). \quad (\text{A.3})$$

Uma vez que esta expressão é válida para qualquer que seja f e g , pode-se fazer uma escolha particular, por exemplo, $f(m)$ e $g(m)$ igual a zero para todos $m \neq j$ e para $m = j$, $f(j) = g(j) = 1$ assim, a equação (A.3) torna-se

$$\begin{aligned} D(x, j) (f(j)g(j)) &= g(x) D(x, j) f(j) + f(x) D(x, j) g(j) \\ D(x, j) (1) &= g(x) D(x, j) 1 + f(x) D(x, j) 1 \\ D(x, j) (1) &= 2\delta(x, j) D(x, j) 1. \end{aligned}$$

Desta última linha segue $D = 0$. Observe que $D(x, j)$ é um vetor, enquanto $g(x)$ e $f(x)$ corresponde a componente x do vetor $(f(x))_{x=1, \dots, N^\mu}$, e finalmente o último zero também é um vetor. O resultado final é que todas as componentes da matriz $D(x, y)$ são nulas, e a expressão acima varre linha a linha desta matriz. Concluindo $D = 0$ e as derivadas definidas para frente e para trás também satisfazem essa condição. É possível existir para uma dada derivada subconjuntos do nosso conjunto de funções na rede que satisfazem a regra de Leibniz, todavia estes não são de interesse por serem muito restritivos. Essa discussão não é

adequada para o contínuo por levar à necessidade de funções mal definidas.

APÊNDICE B - ALGUNS ELEMENTOS DE TRANSPORTE PARALELO

Considere um transporte paralelo atuando em $\phi(x)$:

$$\phi(y) = U(\tau_{yx})\phi(x). \quad (\text{B.1})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \phi'(y) &= \Lambda(y)U(\tau_{yx})\phi(x). \\ &= \Lambda(y)U(\tau_{yx})\Lambda^{-1}(x)\Lambda(x)\phi(x) \\ &= \Lambda(y)U(\tau_{yx})\Lambda^{-1}(x)\phi'(x) \\ &= U'(\tau_{yx})\phi'(x). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Portanto, a forma funcional do transporte paralelo não muda com uma mudança de referencial.

Agora, admita uma transformação de calibre atuando no transporte paralelo entre x e $x + dx$:

$$U(\tau_{x+dx,x})' = \Lambda(x + dx)U(\tau_{x+dx,x})\Lambda^{-1}(x). \quad (\text{B.3})$$

Sabendo que as expressões acima diferem da identidade apenas infinitesimalmente e descartando termos de ordem superior a um em dx , tem-se

$$\begin{aligned} 1 - A'_\mu(x)dx^\mu &= [\Lambda(x) + \partial_\mu\Lambda(x)dx^\mu][1 - A_\mu(x)dx^\mu]\Lambda^{-1}(x) \\ &= [\Lambda(x) - \Lambda(x)A_\mu(x)dx^\mu + \partial_\mu\Lambda(x)dx^\mu]\Lambda^{-1}(x) \\ &= [\Lambda(x)\Lambda^{-1}(x) - \Lambda(x)A_\mu(x)\Lambda^{-1}(x)dx^\mu + (\partial_\mu\Lambda(x))\Lambda^{-1}(x)dx^\mu] \\ &= 1 - [\Lambda(x)A_\mu(x)\Lambda^{-1}(x) - (\partial_\mu\Lambda(x))\Lambda^{-1}(x)]dx^\mu. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + [A'_\mu, A'_\nu] \\ &= \partial_\mu(\Lambda A_\nu \Lambda^{-1} - (\partial_\nu \Lambda)\Lambda^{-1}) - \partial_\nu(\Lambda A_\mu \Lambda^{-1} - (\partial_\mu \Lambda)\Lambda^{-1}) + [\Lambda A'_\mu \Lambda^{-1} - (\partial_\mu \Lambda)\Lambda^{-1}, \Lambda A'_\nu \Lambda^{-1} - (\partial_\nu \Lambda)\Lambda^{-1}] \\ &= [(\partial_\mu \Lambda)A_\nu - (\partial_\nu \Lambda)A_\mu]\Lambda^{-1} + \Lambda[A_\nu(\partial_\mu \Lambda^{-1}) - A_\mu(\partial_\nu \Lambda^{-1})] - (\partial_\nu \Lambda)(\partial_\mu \Lambda^{-1}) + (\partial_\mu \Lambda)(\partial_\nu \Lambda^{-1}) \\ &\quad - gA_\mu g^{-1}(\partial_\nu \Lambda)\Lambda^{-1} + (\partial_\nu \Lambda)A_\mu \Lambda^{-1} - (\partial_\mu \Lambda)A_\nu \Lambda^{-1} + \Lambda A_\nu \Lambda^{-1}(\partial_\mu \Lambda)\Lambda^{-1} + (\partial_\mu \Lambda)\Lambda^{-1}(\partial_\nu \Lambda)\Lambda^{-1} \\ &\quad - (\partial_\nu \Lambda)\Lambda^{-1}(\partial_\mu \Lambda)\Lambda^{-1} \\ &= \Lambda F_{\mu\nu} \Lambda^{-1} + \Lambda[A_\nu(\partial_\mu \Lambda^{-1}) - A_\mu(\partial_\nu \Lambda^{-1})] - (\partial_\nu \Lambda)(\partial_\mu \Lambda^{-1}) + (\partial_\mu \Lambda)(\partial_\nu \Lambda^{-1}) - \Lambda A_\mu \Lambda^{-1}(\partial_\nu \Lambda)\Lambda^{-1} \\ &\quad + \Lambda A_\nu \Lambda^{-1}(\partial_\mu \Lambda)\Lambda^{-1} + (\partial_\mu \Lambda)\Lambda^{-1}(\Lambda_\nu \Lambda)\Lambda^{-1} - (\partial_\nu \Lambda)\Lambda^{-1}(\partial_\mu \Lambda)\Lambda^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Usando, agora, que

$$\partial_\nu(\Lambda^{-1}) = -\Lambda^{-1}(\partial_\nu\Lambda)\Lambda^{-1}, \quad (\text{B.6})$$

na expressão (B.5), encontra-se que

$$F'_{\mu\nu}(x) = \Lambda(x)F_{\mu\nu}\Lambda^{-1}(x). \quad (\text{B.7})$$

APÊNDICE C - TRANSFORMAÇÃO DE BOGOLIUBOV

A TRANSFORMAÇÃO DE BOGOLIUBOV: TRANSFORMAÇÃO UNITÁRIA NÃO EQUIVALENTE

Discutir-se-á a transformação de Bogoliubov para campos bosônicos. Para tal, considerar-se-á um exemplo com dois modos diferentes a e b . As relações de comutação canônicas para $a_{\vec{k}}$ e $b_{\vec{k}}$ são dadas por

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{p}}^\dagger] = [b_{\vec{k}}, b_{\vec{p}}^\dagger] = \delta^3(\vec{k} - \vec{p}), \quad (\text{C.1})$$

com todos os outros comutadores nulos. Denote por $\mathcal{H}[a, b]$ o espaço de Fock obtido por aplicações dos operadores de criação $a_{\vec{k}}^\dagger$ e $b_{\vec{k}}^\dagger$ no vácuo definido por

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0 = b_{\vec{k}} |0\rangle. \quad (\text{C.2})$$

$\mathcal{H}[a, b]$ é uma representação irredutível de (C.1), ou seja, o espaço $\mathcal{H}[a, b]$ fornece uma base para a construção de uma representação de (C.1). Considere a seguinte transformação de Bogoliubov:

$$\alpha_{\vec{k}} = a_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}} - b_{-\vec{k}}^\dagger \sinh \theta_{\vec{k}}, \quad (\text{C.3})$$

$$\beta_{\vec{k}} = b_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}} - a_{-\vec{k}}^\dagger \sinh \theta_{\vec{k}}. \quad (\text{C.4})$$

Tal transformação é canônica, pois preserva as relações de comutação (C.1):

$$[\alpha_{\vec{k}}, \alpha_{\vec{p}}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{p}) \quad \text{e} \quad [\beta_{\vec{k}}, \beta_{\vec{p}}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{p}), \quad (\text{C.5})$$

e todas as demais relações de comutação entre os α s e os β s são nulas. Os novos vácuos são definidos por

$$\alpha_{\vec{k}}(\theta) |0(\theta)\rangle = \beta_{\vec{k}}(\theta) |0(\theta)\rangle = 0, \quad (\text{C.6})$$

onde o espaço de Fock $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ é construído por aplicações de $\alpha^\dagger$ e $\beta^\dagger$ em $|0(\theta)\rangle$. Uma vez que a transformação de Bogoliubov é canônica, o espaço $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ também é uma representação irredutível de (C.1).

É útil escrever um gerador para a transformação de Bogoliubov na forma:

$$\alpha_{\vec{k}}(\theta) = U(\theta) a_{\vec{k}} U^{-1}(\theta), \quad (\text{C.7})$$

$$\beta_{\vec{k}}(\theta) = U(\theta) b_{\vec{k}} U^{-1}(\theta), \quad (\text{C.8})$$

onde

$$U(\theta) = \exp[iG(\theta)]. \quad (\text{C.9})$$

Para tal, considere uma transformação com parâmetro infinitesimal $\delta\theta_{\vec{k}}$, de tal modo que

$$\alpha_{\vec{k}}(\delta\theta) = a_{\vec{k}} - b_{-\vec{k}}^\dagger \delta\theta_{\vec{k}}, \quad (\text{C.10})$$

$$\beta_{\vec{k}}(\delta\theta) = b_{\vec{k}} - a_{-\vec{k}}^\dagger \delta\theta_{\vec{k}}, \quad (\text{C.11})$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{k}}(\delta\theta) &= U(\delta\theta) a_{\vec{k}} U^{-1}(\delta\theta) \\ &= (1 + iG(\delta\theta)) a_{\vec{k}} (1 - iG(\delta\theta)) \\ &= a_{\vec{k}} + i[G(\delta\theta), a_{\vec{k}}], \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

e

$$\begin{aligned} \beta_{\vec{k}}(\delta\theta) &= U(\delta\theta) b_{\vec{k}} U^{-1}(\delta\theta) \\ &= (1 + iG(\delta\theta)) b_{\vec{k}} (1 - iG(\delta\theta)) \\ &= b_{\vec{k}} + i[G(\delta\theta), b_{\vec{k}}] \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

e, portanto,

$$i[G(\delta\theta), a_{\vec{k}}] = -b_{-\vec{k}}^\dagger \delta\theta_{\vec{k}}, \quad (\text{C.14})$$

$$i[G(\delta\theta), b_{\vec{k}}] = -a_{-\vec{k}}^\dagger \delta\theta_{\vec{k}}. \quad (\text{C.15})$$

Uma inspeção na expressão (C.14) e (C.15) junto de (C.5) leva à seguinte proposta para $G(\theta)$:

$$G(\theta) = -i \int d^3\vec{k} \theta_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger b_{-\vec{k}}^\dagger. \quad (\text{C.16})$$

Porém, $G(\theta)$ deve ser hermitiano de forma a garantir que U seja unitário, e isto é feito adicionando a definição de G o conjugado hermitiano de (C.16), o que leva à

$$G(\theta) = i \int d^3\vec{k} \theta_{\vec{k}} (a_{\vec{k}} b_{-\vec{k}} - a_{\vec{k}}^\dagger b_{-\vec{k}}^\dagger). \quad (\text{C.17})$$

Então,

$$|0(\theta)\rangle = U(\theta) |0\rangle \quad (\text{C.18})$$

é avaliada por meio de derivadas funcionais de $f_0(\theta) = \langle 0|U(\theta)|0\rangle$ em relação ao parâmetro $\theta_{\vec{l}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\theta_{\vec{l}}}f_0(\theta) &= \langle 0| \frac{\delta}{\delta\theta_{\vec{l}}}U(\theta) |0\rangle \\
&= \langle 0| \frac{\delta}{\delta\theta_{\vec{l}}} \exp\left(-\int d^3\vec{k}\theta_{\vec{k}}(a_{\vec{k}}b_{-\vec{k}} - b_{-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger)\right) |0\rangle \\
&= \langle 0| U(\theta)(-a_{\vec{l}}b_{-\vec{l}} + b_{-\vec{l}}^\dagger a_{\vec{l}}^\dagger) |0\rangle = \langle 0| (-a_{\vec{l}}b_{-\vec{l}} + b_{-\vec{l}}^\dagger a_{\vec{l}}^\dagger)U(\theta) |0\rangle \\
&= \langle 0| U(\theta)b_{-\vec{l}}^\dagger a_{\vec{l}}^\dagger |0\rangle = -\langle 0| a_{\vec{l}}b_{-\vec{l}}U(\theta) |0\rangle.
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Agora, usando que $U^{-1}(\theta) = U(-\theta)$, pode-se escrever¹

$$\begin{aligned}
a_{\vec{l}}b_{-\vec{l}}U(\theta) &= U(\theta)U(-\theta)a_{\vec{l}}U^{-1}(-\theta)U(-\theta)b_{-\vec{l}}U^{-1}(-\theta) \\
&= U(\theta)\left(a_{\vec{l}}\cosh\theta_{\vec{l}} + b_{-\vec{l}}^\dagger\sinh\theta_{\vec{l}}\right)\left(b_{-\vec{l}}\cosh\theta_{\vec{l}} + a_{\vec{l}}^\dagger\sinh\theta_{\vec{l}}\right) \\
&= U(\theta)\left(a_{\vec{l}}b_{-\vec{l}}\cosh^2\theta_{\vec{l}} + a_{\vec{l}}a_{\vec{l}}^\dagger\cosh\theta_{\vec{l}}\sinh\theta_{\vec{l}} + b_{-\vec{l}}^\dagger b_{-\vec{l}}\cosh\theta_{\vec{l}}\sinh\theta_{\vec{l}} + b_{-\vec{l}}^\dagger a_{\vec{l}}^\dagger\sinh^2\theta_{\vec{l}}\right).
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Portanto,

$$\frac{\delta}{\delta\theta_{\vec{l}}}f_0(\theta) = -\langle 0| U(\theta)\left(a_{\vec{l}}a_{\vec{l}}^\dagger\cosh\theta_{\vec{l}}\sinh\theta_{\vec{l}} + b_{-\vec{l}}^\dagger a_{\vec{l}}^\dagger\sinh^2\theta_{\vec{l}}\right) |0\rangle, \tag{C.21}$$

ou

$$\frac{\delta}{\delta\theta_{\vec{l}}}f_0(\theta) = -\delta(\vec{0})\cosh\theta_{\vec{l}}\sinh\theta_{\vec{l}}f_0(\theta) - \sinh^2\theta_{\vec{l}}\langle 0| U(\theta)b_{-\vec{l}}^\dagger a_{\vec{l}}^\dagger |0\rangle, \tag{C.22}$$

onde se utilizou $[a_{\vec{l}}, a_{\vec{l}}^\dagger] = \delta(\vec{0})$. Inserindo a relação (C.19), por meio de $\delta f_0(\theta)/\delta\theta_{\vec{l}} = \langle 0| U(\theta)b_{-\vec{l}}^\dagger a_{\vec{l}}^\dagger |0\rangle$, em (C.22) se tem

$$\frac{\delta}{\delta\theta_{\vec{l}}}f_0(\theta)(1 + \cosh^2\theta_{\vec{l}}) = -\delta(\vec{0})\cosh\theta_{\vec{l}}\sinh\theta_{\vec{l}}f_0(\theta), \tag{C.23}$$

ou simplesmente

$$\frac{\delta}{\delta\theta_{\vec{l}}}f_0(\theta) = -\delta(\vec{0})\tanh\theta_{\vec{l}}f_0(\theta). \tag{C.24}$$

A solução da equação diferencial funcional (C.24) com a condição de contorno $f_0(0) = 1$, assumindo que $\delta(\vec{0})$ é uma quantidade finita, é

$$f_0(\theta) = \exp\left\{-\delta(\vec{0})\int d^3k \ln \cosh\theta_{\vec{k}}\right\}. \tag{C.25}$$

Uma vez que o gerador $U(\theta)$ contém pares de operadores ab e $a^\dagger b^\dagger$, precisa-se computar os elementos de matriz $f_n(\theta) = \langle 0|[a_{\vec{l}}b_{-\vec{l}}]^n U(\theta)|0\rangle$. Assim, toma-se a derivada funcional de $f_n(\theta)$

¹Na expressão (C.18) note que $G(-\theta) = -G(\theta)$. Enquanto que $U^{-1}(\theta) = U^\dagger(\theta) = \exp[-iG(\theta)]$, pois $G(\theta)$ hermitiano. Portanto, $U^{-1}(\theta) = U(-\theta)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\theta_{\vec{l}}}f_0(\theta) &= \langle 0|[a_{\vec{l}}b_{-\vec{l}}]^n(-a_{\vec{l}}b_{-\vec{l}} + b_{-\vec{l}}^\dagger a_{\vec{l}}^\dagger)U(\theta)|0\rangle \\
&= -\langle 0|[a_{\vec{l}}b_{-\vec{l}}]^{n+1}U(\theta)|0\rangle + \langle 0|[a_{\vec{l}}b_{-\vec{l}}]^n b_{-\vec{l}}^\dagger a_{\vec{l}}^\dagger U(\theta)|0\rangle \\
&= -f_{n+1}(\theta) + n^2(\delta(\vec{0}))^2 f_{n-1}(\theta),
\end{aligned} \tag{C.26}$$

onde se usou

$$[a_{\vec{l}}b_{-\vec{l}}]^n b_{-\vec{l}}^\dagger a_{\vec{l}}^\dagger = (b_{-\vec{l}}^\dagger b_{-\vec{l}} + nb_{-\vec{l}}^{n-1}\delta(\vec{0})) (a_{\vec{l}}^\dagger a_{\vec{l}} + na_{\vec{l}}^{n-1}\delta(\vec{0})). \tag{C.27}$$

Agora, estudar-se-á a fórmula de recorrência (C.26). Para tanto, a mesma será reescrita como

$$f_{n+1}(\theta) = n^2(\delta(\vec{0}))^2 f_{n-1}(\theta) - \frac{\delta}{\delta\theta_{\vec{l}}}f_0. \tag{C.28}$$

Para $n = 0$, tem-se

$$\begin{aligned}
f_1(\theta) &= -\frac{\delta}{\delta\theta_{\vec{l}}}f_0(\theta) \\
&= \delta(\vec{0}) \tanh \theta_{\vec{l}} f_0(\theta).
\end{aligned} \tag{C.29}$$

Para $n = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
f_2(\theta) &= -\frac{\delta}{\delta\theta_{\vec{l}}}f_1(\theta) + (\delta(\vec{0}))^2 f_0(\theta) \\
&= -\left(-\delta(\vec{0}) \tanh \theta_{\vec{l}} \delta(\vec{0}) \tanh_{\vec{l}} f_0(\theta) + \delta(\vec{0}) \delta(\vec{0}) \text{sech}^2(\theta_{\vec{l}}) f_0(\theta) \right) + (\delta(\vec{0}))^2 f_0(\theta) \\
&= (\delta(\vec{0}))^2 f_0(\theta) \tanh^2 \theta_{\vec{l}} + (\delta^3(\vec{0}))^2 f_0(\theta) (1 - \text{sech}^2 \theta_{\vec{l}}) \\
&= 2(\delta(\vec{0}))^2 f_0(\theta) \tanh^2 \theta_{\vec{l}}.
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Assim, é possível ver que a solução para a formula de recorrência (C.26) é

$$f_n(\theta, l) = n! [\delta(\vec{0})]^n \exp \left(-\delta(\vec{0}) \int d^3 \vec{k} \ln \cosh \theta_{\vec{k}} \right) (\tanh \theta_{\vec{l}})^n. \tag{C.31}$$

Finalmente, $|0(\theta)\rangle$ pode ser escrito como

$$|\theta(0)\rangle = \exp \left(-\delta(\vec{0}) \int d^3 \vec{k} \ln \cosh \theta_{\vec{k}} \right) \exp \left(\delta(\vec{0}) \int d^3 \vec{k} \tanh \theta_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger b_{-\vec{k}}^\dagger \right) |0\rangle. \tag{C.32}$$

Esta expressão pode ser reapresentada observando que

$$\delta(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{x} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \tag{C.33}$$

de modo que é natural se escrever

$$\delta(\vec{0}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \times \text{Volume no qual o sistema é confinado.} \quad (\text{C.34})$$

No caso de um volume finito V , por exemplo, uma caixa de lados L_i , $i = 1, 2, 3$, com $V = L_1 L_2 L_3$, tem-se a discretização do momento $\vec{k}$ com as componentes sendo dadas por

$$k_{n_i} = \frac{2\pi n_i}{L_i}, i = 1, 2, 3 \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (\text{C.35})$$

de maneira que o gerador ao invés de ser dado por $U(\theta)$ (equação (C.9), com $G(\theta)$ dado por (C.17)) passa a ter uma dependência discreta no momento:

$$U(\theta) = \exp \left(- \sum_{\vec{k}} \theta_{\vec{k}} (a_{\vec{k}} b_{-\vec{k}} - b_{-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger) \right), \quad (\text{C.36})$$

onde a soma é estendida sob o conjunto discreto de momentos $\vec{k}$. Então,

$$|0(\theta)\rangle = \exp \left(- \sum_{\vec{k}} \ln \cosh \theta_{\vec{k}} \right) \exp \left(\sum_{\vec{k}} \tanh \theta_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger b_{-\vec{k}}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (\text{C.37})$$

Vê-se, assim, que desde que

$$\sum_{\vec{k}} \ln \cosh \theta_{\vec{k}} \neq \infty, \quad (\text{C.38})$$

para um $\theta_{\vec{k}}$ não nulo, $U(\theta)$ é um operador unitário mapeando vetores de um espaço de Fock em vetores do mesmo espaço. No limite do contínuo se recupera uma expressão análoga a (C.32):

$$|\theta(0)\rangle = \exp \left(- \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} \ln \cosh \theta_{\vec{k}} \right) \exp \left(\delta(\vec{0}) \int d^3 \vec{k} \tanh \theta_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger b_{-\vec{k}}^\dagger \right) |0\rangle, \quad (\text{C.39})$$

onde $d^3 \vec{k} = (2\pi)^3/V$, com o limite representado por

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k}. \quad (\text{C.40})$$

Neste limite, quando $V \rightarrow \infty$ representações unitariamente não-equivalentes serão obtidas. Este resultado implica que $|0(\theta)\rangle$ não pode ser expresso em termos dos vetores do espaço $\mathcal{H}[a, b]$ a menos que $\theta_{\vec{k}} = 0, \forall \vec{k}$. Portanto, isto significa que um vetor genérico de $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ não pode ser escrito dos vetores de $\mathcal{H}[a, b]$: os espaços $\mathcal{H}[\alpha, \beta]$ e $\mathcal{H}[a, b]$ são ortogonais entre si. Além disso, é possível escolher dois espaços com conjuntos de θ diferentes para a realização da análise, e encontrar-se-á que $\mathcal{H}[\theta]$ e $\mathcal{H}[\theta']$ são unitariamente não equivalentes no limite do volume tendendo a infinito. Uma vez que os espaços de Fock indexados por diferentes θ 's fornecem representações unitariamente não equivalentes, tem-se representações para as diferentes fases físicas do sistema.

Por fim, ressalta-se que o número de modos $a_{\vec{k}}$ e $b_{\vec{k}}$ condensados no estado $|0(\theta)\rangle$ é:

$$\langle 0(\theta) | a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} | 0(\theta) \rangle = \langle 0(\theta) | b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} | 0(\theta) \rangle = \sinh^2 \theta_{\vec{k}}. \quad (\text{C.41})$$

CÁLCULO POR AUTO-CONSISTÊNCIA UTILIZANDO A TRANSFORMAÇÃO DE BOGOLIUBOV

Considere uma hamiltoniana bosônica exemplo² dada por

$$H = \int d^3\vec{k} [\omega_{\vec{k}}(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}}) + \nu_{\vec{k}}(a_{\vec{k}} b_{-\vec{k}} + b_{-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger)]. \quad (\text{C.42})$$

A necessidade de que a hamiltoniana seja hermitiana implica $\omega_{\vec{k}}$ e $\nu_{\vec{k}}$ reais. Assumir-se-á que $w_{\vec{k}}^2 > \nu_{\vec{k}}^2$. As relações usuais de comutação para os operadores bosônicos são dadas por

$$[a_{\vec{k}}, a_{\vec{l}}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{l}), \quad [b_{\vec{k}}, b_{\vec{l}}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{l}), \quad (\text{C.43})$$

com todos os outros comutadores nulos. $|0\rangle$ denota o estado de vácuo pertencente ao espaço $\mathcal{H}$ aniquilado pelos operadores $a_{\vec{k}}$ e $b_{\vec{k}}$:

$$a_{\vec{k}} |0\rangle = 0 = b_{\vec{k}} |0\rangle. \quad (\text{C.44})$$

$\mathcal{H}$ é uma representação irredutível das relações de comutação canônicas (C.1) e (C.43). Porém, uma vez que a hamiltoniana (C.42) não se apresenta na forma de uma hamiltoniana para campos bosônicos livres, os $a_{\vec{k}}$'s e $b_{\vec{k}}$'s não são os operadores que aniquilam as partículas físicas. Entretanto, existe uma representação das relações de comutação onde a hamiltoniana assume a forma de uma hamiltoniana de campo livre. Para tal, considere a transformação de Bogoliubov (transformação inversa da considerada em (C.3) e (C.4)):

$$a_{\vec{k}} = \alpha_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}} + \beta_{-\vec{k}}^\dagger \sinh \theta_{\vec{k}}, \quad (\text{C.45})$$

$$b_{\vec{k}} = \beta_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}}^\dagger \sinh \theta_{\vec{k}}. \quad (\text{C.46})$$

Prossegue-se determinando os termos $a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$, $b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}}$, $a_{\vec{k}} b_{-\vec{k}}$ e $b_{-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger$:

$$a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} = \alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} \cosh^2 \theta_{\vec{k}} + \beta_{-\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}^\dagger \sinh^2 \theta_{\vec{k}} + (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}^\dagger + \beta_{-\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}}^\dagger) \sinh \theta_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}}, \quad (\text{C.47})$$

$$b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} = \beta_{\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}} \cosh^2 \theta_{\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}}^\dagger \alpha_{-\vec{k}}^\dagger \sinh^2 \theta_{\vec{k}} + (\beta_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{-\vec{k}}^\dagger + \alpha_{-\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}}^\dagger) \sinh \theta_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}}, \quad (\text{C.48})$$

$$a_{\vec{k}} b_{-\vec{k}} = \alpha_{\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}} \cosh^2 \theta_{\vec{k}} + \beta_{-\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}}^\dagger \sinh^2 \theta_{\vec{k}} + (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}}^\dagger + \beta_{-\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}^\dagger) \sinh \theta_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}} \quad (\text{C.49})$$

e

$$b_{-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger = \beta_{-\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}}^\dagger \cosh^2 \theta_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}} \sinh^2 \theta_{\vec{k}} + (\beta_{-\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}})^\dagger \sinh \theta_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}}, \quad (\text{C.50})$$

onde se usou $\theta_{\vec{k}} = \theta_{-\vec{k}}$. Agora, calcular-se-á³ $a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}}$ e $a_{\vec{k}} b_{-\vec{k}} + b_{-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger$:

²Esta hamiltoniana pode ser utilizada para descrever ondas de spin em materiais anti-ferromagnéticos. Para referências, o leitor é indicado a consultar o trabalho do Anderson [25], ou o review do Kubo [26].

³É útil lembrar que:

$$\cosh 2\theta_{\vec{k}} = \cosh^2 \theta_{\vec{k}} + \sinh^2 \theta_{\vec{k}}, \quad (\text{C.51})$$

$$\sinh 2\theta_{\vec{k}} = 2 \sinh \theta_{\vec{k}} \cosh \theta_{\vec{k}}. \quad (\text{C.52})$$

$$\begin{aligned}
a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + b_{\vec{k}}^\dagger b_{\vec{k}} &= \cosh^2 \theta_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}}) + \sinh^2 \theta_{\vec{k}} (\beta_{-\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}^\dagger + \alpha_{-\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}}^\dagger) \\
&\quad + \frac{\sinh 2\theta_{\vec{k}}}{2} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}^\dagger + \beta_{-\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{-\vec{k}}^\dagger + \alpha_{-\vec{k}} \beta_{\vec{k}})
\end{aligned} \tag{C.53}$$

e

$$a_{\vec{k}} b_{-\vec{k}} + b_{-\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}^\dagger = (\alpha_{\vec{k}} \beta_{-\vec{k}} + \beta_{-\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}}^\dagger) \cosh 2\theta_{\vec{k}} + (\alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger + \beta_{-\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}) \sinh 2\theta_{\vec{k}}. \tag{C.54}$$

Substituindo os resultados (C.53) e (C.54) na expressão para a hamiltoniana (C.42), tem-se

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3 \vec{k} \left[\omega_{\vec{k}} \left(\cosh^2 \theta_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}}) + \sinh^2 \theta_{\vec{k}} (\beta_{-\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}^\dagger + \alpha_{-\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}}^\dagger) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\sinh 2\theta_{\vec{k}}}{2} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}^\dagger + \beta_{-\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{-\vec{k}}^\dagger + \alpha_{-\vec{k}} \beta_{\vec{k}}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \nu_{\vec{k}} \left((\alpha_{\vec{k}} \beta_{-\vec{k}} + \beta_{-\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}}^\dagger) \cosh 2\theta_{\vec{k}} + (\alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger + \beta_{-\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}) \sinh 2\theta_{\vec{k}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{C.55}$$

Note, agora, que

$$\int d^3 \vec{k} \omega_{\vec{k}} \sinh^2 \theta_{\vec{k}} (\beta_{-\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}^\dagger + \alpha_{-\vec{k}} \alpha_{-\vec{k}}^\dagger) = \int d^3 \vec{k} \omega_{\vec{k}} \sinh^2 \theta_{\vec{k}} (\beta_{\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}}^\dagger + \alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger) \tag{C.56}$$

e que tal resultado é valido para qualquer elemento na expressão (C.56) desde que os termos não operadores satisfaçam, por exemplo, $\omega_{\vec{k}} = \omega_{-\vec{k}}$, $\nu_{\vec{k}} = \nu_{-\vec{k}}$ e $\theta_{\vec{k}} = \theta_{-\vec{k}}$. Portanto

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3 \vec{k} \left[\omega_{\vec{k}} \left(\cosh^2 \theta_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}}) + \sinh^2 \theta_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger + \beta_{\vec{k}} \beta_{\vec{k}}^\dagger) + \sinh 2\theta_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}^\dagger + \beta_{-\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \nu_{\vec{k}} \left((\alpha_{\vec{k}} \beta_{-\vec{k}} + \beta_{-\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}}^\dagger) \cosh 2\theta_{\vec{k}} + (\alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger + \beta_{\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}}) \sinh 2\theta_{\vec{k}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{C.57}$$

Utilizando da relação de comutação $\beta_{\vec{k}} \beta_{\vec{k}}^\dagger = \beta_{\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}} + \delta(\vec{0})$ e $\alpha_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}^\dagger = \alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \delta(\vec{0})$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3 \vec{k} \left[\omega_{\vec{k}} \left((\cosh^2 \theta_{\vec{k}} + \sinh^2 \theta_{\vec{k}}) (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}}) + 2\delta(\vec{0}) \sinh^2 \theta_{\vec{k}} + \sinh 2\theta_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}^\dagger + \beta_{-\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \nu_{\vec{k}} \left((\alpha_{\vec{k}} \beta_{-\vec{k}} + \beta_{-\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}}^\dagger) \cosh 2\theta_{\vec{k}} + (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}}) \sinh 2\theta_{\vec{k}} + \delta(\vec{0}) \sinh \theta_{\vec{k}} \right) \right],
\end{aligned} \tag{C.58}$$

ou

$$\begin{aligned}
H = & \int d^3\vec{k} \left[(\omega_{\vec{k}} \cosh 2\theta_{\vec{k}} + \nu_{\vec{k}} \sinh 2\theta_{\vec{k}}) (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}}) + (\omega_{\vec{k}} \sinh 2\theta_{\vec{k}} + \nu_{\vec{k}} \cosh 2\theta_{\vec{k}}) (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \beta_{-\vec{k}}^\dagger + \beta_{-\vec{k}} \alpha_{\vec{k}}) \right. \\
& \left. + \delta(\vec{0}) (2\omega_{\vec{k}} \sinh^2 \theta_{\vec{k}} + \nu_{\vec{k}} \sinh \theta_{\vec{k}}) \right]. \tag{C.59}
\end{aligned}$$

Para que a hamiltoniana (C.59) assuma a forma de uma hamiltoniana livre, deve-se ter $(\omega_{\vec{k}} \sinh 2\theta_{\vec{k}} + \nu_{\vec{k}} \cosh 2\theta_{\vec{k}}) = 0$, o que junto de $\cosh^2 2\theta_{\vec{k}} - \sinh^2 2\theta_{\vec{k}} = 1$ fornece

$$\cosh 2\theta_{\vec{k}} = \frac{\omega_{\vec{k}}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}^2 - \nu_{\vec{k}}^2}} \quad \text{e} \quad \sinh 2\theta_{\vec{k}} = \frac{-\nu_{\vec{k}}}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}^2 - \nu_{\vec{k}}^2}}. \tag{C.60}$$

Logo, $(\omega_{\vec{k}} \cosh 2\theta_{\vec{k}} + \nu_{\vec{k}} \sinh 2\theta_{\vec{k}}) = \sqrt{\omega_{\vec{k}}^2 - \nu_{\vec{k}}^2}$, o qual é convenientemente definido como $E_{\vec{k}}$. Enquanto, $(2\omega_{\vec{k}} \sinh^2 \theta_{\vec{k}} + \nu_{\vec{k}} \sinh \theta_{\vec{k}}) = \sqrt{\omega_{\vec{k}}^2 - \nu_{\vec{k}}^2} - \omega_{\vec{k}}$. Finalmente, a hamiltoniana fica

$$H = \int d^3\vec{k} E_{\vec{k}} (\alpha_{\vec{k}}^\dagger \alpha_{\vec{k}} + \beta_{\vec{k}}^\dagger \beta_{\vec{k}}) + \int d^3\vec{k} \delta(\vec{0}) \left(\sqrt{\omega_{\vec{k}}^2 - \nu_{\vec{k}}^2} - \omega_{\vec{k}} \right), \tag{C.61}$$

a qual se apresenta na forma de uma hamiltoniana livre. Assim, é possível concluir que $\alpha_{\vec{k}}$ e $\beta_{\vec{k}}$ são os operadores que aniquilam as partículas físicas. A discussão acima ilustra o cálculo por auto-consistência. Além disso, as transformações de Bogoliubov ilustram um mapa dinâmico, pois relacionam os operadores físicos com os operadores de Heisenberg.

APÊNDICE D - MODELO COM SIMETRIA DE TRANS. GLOBAL EM REDE

SEM TERMO ϵ

Dadas as definições:

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2, \quad (4.23 \text{ revisitada})$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \lambda, \quad (4.24 \text{ revisitada})$$

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi(x) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 - \sum_x J(x) \phi(x) \right), \quad (4.26 \text{ revisitada})$$

$$N = \int \prod_x d\phi(x) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 \right). \quad (4.27 \text{ revisitada})$$

A condição de fase estacionária $\delta S = 0$ fornece

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{x,\mu} \Delta_\mu^f \phi(x) \Delta_\mu^f (\delta \phi(x)) + \sum_x a^4 J(x) \delta \phi(x) \\ &= - \sum_{x,\mu} (\Delta_\mu^b \Delta_\mu^f \phi(x)) \delta \phi(x) + \sum_x a^4 J(x) \delta \phi(x) \end{aligned} \quad (D.1)$$

e imediatamente para $\forall \phi(x)$:

$$-\square \phi(x) + J(x) = 0, \quad (D.2)$$

cuja solução formal é

$$\phi(x) = \sum_y J(y) G(x-y). \quad (D.3)$$

Seguindo o procedimento se faz respectivamente a expansão e a transformação,

$$\phi(x) = \phi'(x) + \phi_0(x), \quad (D.4)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \lambda, \quad (D.5)$$

no funcional gerador (4.26):

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi'(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi']^2 - \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi_0(x)]^2 - \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi'(x)] [\Delta_\mu^f \phi_0(x)] \right. \\ \left. - \sum_x J(x) \phi'(x) - \sum_x J(x) \phi_0(x) \right\}, \quad (\text{D.6})$$

ou ainda

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi'(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi']^2, - \sum_{x,y} J(x) G(x-y) J(y) \right\} \quad (\text{D.7})$$

onde se usou que

$$\sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi'(x)] [\Delta_\mu^f \phi_0(x)] = - \sum_{x,\mu} \phi'(x) \Delta_\mu^b [\Delta_\mu^f \phi_0(x)]. \quad (\text{D.8})$$

Finalmente, parte do numerador do gerador funcional é cancelado pelo denominador, então

$$Z[J] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) G(x-y) J(y) \right\}. \quad (\text{D.9})$$

Note que (D.9) é invariante pela translação (D.5). Dando prosseguimento, calcula-se o valor esperado de $\phi(z)$ o qual é dado por

$$\begin{aligned} \langle \phi(z) \rangle &= \frac{\delta}{\delta J(z)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) G(x-y) J(y) \right\} \Big|_{J=0} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) G(x-y) J(y) \right\} \left\{ - \sum_y G(z-y) J(y) \right\} \Big|_{J=0} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{4.28 revisitada})$$

Agora, invertendo a ordem das operações (D.4) e (D.5), isto é, realizando respectivamente a transformação de translação (D.5) a expansão em torno da solução de fase estacionária (D.4), pode-se escrever:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 - \sum_x J(x) \phi(x) - \sum_x J(x) \lambda \right\} \quad (\text{D.10})$$

e, portanto,

$$Z[J] = \exp \left\{ - \sum_x J(x) \lambda \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) G(x-y) J(y) \right\}. \quad (\text{D.11})$$

Deste modo, tem-se que o valor esperado de $\phi(z)$ é

$$\begin{aligned}
\langle \phi(z) \rangle &= \frac{\delta}{\delta J(z)} \exp \left\{ - \sum_x J(x) \lambda \right\} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) G(x-y) J(y) \right\} \Big|_{J=0} \\
&= \exp \left\{ - \sum_x J(x) \lambda \right\} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) G(x-y) J(y) \right\} \\
&\quad \times \left\{ - \lambda - \sum_y G(z-y) J(y) \right\} \Big|_{J=0} \\
&= -\lambda.
\end{aligned} \tag{4.29 revisitada}$$

COM TERMO ϵ

Agora, verificar-se-á o caso em que se tem a adição do termo ϵ , o qual começa pelas definições:

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi(x) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 - \sum_x J(x) \phi(x) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x (\phi(x) - v)^2 \right\}, \tag{4.30 revisitada}$$

com

$$N = \int \prod_x d\phi(x) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x \phi^2(x) + i\epsilon \sum_x v \phi(x) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x v^2 \right\} \tag{4.31 revisitada}$$

e

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 + \sum_x J(x) \phi(x) + \frac{i\epsilon}{2} \sum_x \phi^2(x) - i\epsilon \sum_x v \phi(x) + \frac{i\epsilon}{2} \sum_x v^2. \tag{4.32 revisitada}$$

Tomando, então, a variação da ação δS_E e impondo que esta é nula de forma a determinar as soluções que contribuem para a fase estacionária, tem-se

$$\begin{aligned}
\delta S_E &= - \sum_{x,\mu} \Delta_\mu^b [\Delta_\mu^f \phi(x)] \delta \phi(x) + \sum_x J(x) \delta \phi(x) + \frac{i\epsilon}{2} \sum_x \phi(x) \delta \phi(x) \\
&\quad - i\epsilon \sum_x v \delta \phi(x) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{D.12}$$

ou, simplesmente,

$$(\square - i\epsilon) \phi(x) = J(x) - i\epsilon v, \tag{D.13}$$

cujas solução formal é dada por

$$\phi_0(x) = v + \sum_y J(y)G(x-y) = v + g(x), \quad (\text{D.14})$$

com

$$g(x) = \sum_y J(y)G(x-y) \quad \text{e} \quad (\square - i\epsilon)g(x) = J(x). \quad (\text{D.15})$$

Agora, prossegue-se fazendo respectivamente a expansão (D.4) e a transformação (D.5):

$$\begin{aligned} Z[J] = & \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi'(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi'(x)]^2 - \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi_0(x)]^2 \right. \\ & - \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi'(x)] [\Delta_\mu^f \phi_0(x)] - \sum_x J(x) \phi'(x) - \sum_x J(x) \phi_0(x) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x \phi'^2(x) \\ & - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x \phi_0^2(x) - i\epsilon \sum_x \phi'(x) \phi_0(x) + i\epsilon \sum_x v \phi'(x) + i\epsilon \sum_x v \phi_0(x) \\ & \left. - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x v^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Usando (D.14) e (D.15), tem-se

$$\begin{aligned} Z[J] = & \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi'(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi'(x)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} g(x) \Delta_\mu^b [\Delta_\mu^f g(x)] \right. \\ & + \sum_{x,\mu} \phi'(x) \Delta_\mu^b [\Delta_\mu^f g(x)] - \sum_x J(x) \phi'(x) - \sum_x J(x) g(x) - \sum_x J(x) v \\ & - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x \phi'^2(x) - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x g^2(x) - i\epsilon \sum_x g(x) v - i\epsilon \sum_x \phi'(x) g(x) - i\epsilon \sum_x \phi'(x) v \\ & \left. + i\epsilon \sum_x v \phi'(x) + i\epsilon \sum_x v g(x) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

ou, simplesmente,

$$\begin{aligned} Z[J] = & \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi'(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi'(x)]^2 - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x \phi'^2(x) \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_x J(x) g(x) - \sum_x J(x) v \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

onde foi usado que

$$\sum_x \phi'(x)(\square - i\epsilon)g(x) - \sum_x J(x)\phi'(x) = 0 \quad (\text{D.19})$$

$$\sum_x g(x)(\square - i\epsilon)g(x) - \sum_x J(x)g(x) = -\frac{1}{2} \sum_x J(x)g(x). \quad (\text{D.20})$$

Agora, N também deve ser expandido em termos das soluções que contribuem com fase estacionária para sua expressão funcional. Neste caso as soluções serão dadas por meio de

$$\delta S_E = \delta \left\{ \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 + \frac{i\epsilon}{2} \sum_x \phi^2(x) - i\epsilon \sum_x v\phi(x) + \frac{i\epsilon}{2} \sum_x v^2 \right\} = 0 \quad (\text{D.21})$$

e, portanto, tem-se

$$(\square - i\epsilon)\phi(x) = -i\epsilon v, \quad (\text{D.22})$$

cujas solução formal é

$$\phi_0(x) = v. \quad (\text{D.23})$$

Logo a expansão se dará por meio de $\phi(x) = \phi'(x) + v$, e N será

$$N = \int \prod_x d\phi'(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi'(x)]^2 - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x \phi'^2(x) \right\}. \quad (\text{D.24})$$

A forma final do gerador funcional é então

$$Z[J] = \exp \left\{ -\sum_x J(x)v \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x)G(x-y)J(y) \right\}. \quad (\text{D.25})$$

Observe que (D.25) é invariante pela transformação (D.5). O valor esperado de $\hat{\phi}(z)$ fica dado por

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \rangle_\epsilon &= \frac{\delta}{\delta J(z)} \exp \left\{ -\sum_x J(x)v \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x)G(x-y)J(y) \right\} \Big|_{J=0} \\ &= \exp \left\{ -\sum_x J(x)v \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x)G(x-y)J(y) \right\} \\ &\quad \times \left\{ -v - \frac{1}{2} \sum_y G(z-y)J(y) \right\} \Big|_{J=0} \\ &= -v. \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Prossegue-se agora fazendo respectivamente a transformação (D.5) e depois a expansão (D.4):

$$\begin{aligned}
Z[J] = & \frac{1}{N} \exp \left\{ - \sum_x J(x) \lambda \right\} \int \prod_x d\phi(x) \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} [\Delta_\mu^f \phi(x)]^2 - \sum_x J(x) \phi(x) \right. \\
& \left. - \frac{i\epsilon}{2} \sum_x (\phi(x) - v')^2 \right\}, \tag{D.27}
\end{aligned}$$

onde $v' = v - \lambda$. Em N também existe a troca de v por v' . Segue-se com o desenvolvimento feito anteriormente, trocando v por v' . Logo, tem-se que o gerador funcional é dado por:

$$Z[J] = \exp \left\{ - \sum_x J(x) \lambda \right\} \exp \left\{ - \sum_x J(x) v' \right\} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) G(x-y) J(y) \right\}. \tag{D.28}$$

Substituindo $v' = v - \lambda$ em (D.28), encontra-se

$$Z[J] = \exp \left\{ - \sum_x J(x) v \right\} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) G(x-y) J(y) \right\}. \tag{D.29}$$

Isto é, o gerador funcional dado em (D.25). Imediatamente, tem-se que o valor esperado de $\hat{\phi}(z)$ é (D.26). Logo, neste caso o termo ϵ também irá sanar o problema.

APÊNDICE E - SIMPLIFICAÇÕES DE ALGUNS FUNCIONAIS GERADORES

A ação para o modelo dado pela lagrangiana (4.1) muda da seguinte forma sob a mudança de variáveis (4.8)

$$\int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_0 \partial_\mu \varphi_0 + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi' \partial_\mu \varphi' + \partial^\mu \varphi_0 \partial_\mu \varphi' + J\varphi + J\varphi_0 \right). \quad (\text{E.1})$$

Utilizando integração por partes, descartando termos de superfícies e usando que $\partial^2 \varphi_0 = J$, fica-se com

$$\int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi' \partial_\mu \varphi' \right) + \int d^4x (J\varphi_0). \quad (\text{E.2})$$

Substituindo o resultado acima no numerador do gerador funcional (4.3), fazendo a correspondente mudança na medida de integração da teoria, e utilizando (4.7), tem-se

$$Z[J] = \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right] N^{-1}[\varphi] N[\varphi'], \quad (\text{E.3})$$

ou, simplesmente,

$$Z[J] = \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right]. \quad (\text{E.4})$$

Agora, a ação do modelo associada à lagrangiana (4.16) muda da seguinte forma sob a mudança de variáveis (4.8)

$$S_N = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_0 \partial_\mu \varphi_0 + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi' \partial_\mu \varphi' + \partial^\mu \varphi_0 \partial_\mu \varphi' + J\varphi' + J\varphi_0 + \frac{i\epsilon}{2} \varphi_0^2 + \frac{i\epsilon}{2} \varphi'^2 + i\epsilon \varphi_0 \varphi' - i\epsilon \varphi_0 v - i\epsilon \varphi' v + \frac{i\epsilon}{2} v^2 \right) \quad (\text{E.5})$$

Substituindo a equação (4.18) com $g(x) = \int d^4y G(x, y) J(y)$ e v constante, tem-se

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu g \partial_\mu g + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi' \partial_\mu \varphi' + \partial^\mu g \partial_\mu \varphi' + J\varphi' + Jv + Jg + \frac{i\epsilon}{2} v^2 + \frac{i\epsilon}{2} g^2 + i\epsilon gv + \frac{i\epsilon}{2} \varphi'^2 + i\epsilon g\varphi' + i\epsilon v\varphi' - i\epsilon gv \right. \\ & \left. - i\epsilon v^2 - i\epsilon \varphi' v + \frac{i\epsilon}{2} v^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Utilizando integração por partes, descartando termos de superfícies, fica-se com

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left(-\frac{1}{2} g \partial^2 g + \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi' \partial_\mu \varphi' - \varphi' \partial^2 g + J\varphi' + Jv + Jg + \frac{i\epsilon}{2} v^2 + \frac{i\epsilon}{2} g^2 + i\epsilon gv + \frac{i\epsilon}{2} \varphi'^2 + i\epsilon g\varphi' + i\epsilon v\varphi' \right. \\ & \left. - i\epsilon gv - i\epsilon v^2 - i\epsilon \varphi' v + \frac{i\epsilon}{2} v^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Observe, agora, que da equação (4.17) e (4.18), encontra-se

$$(\partial^2 - i\epsilon)g(x) = J(x), \quad (\text{E.8})$$

e assim, tem-se

$$-\varphi'(\partial^2 - i\epsilon)g + \varphi'J = 0 \quad (\text{E.9})$$

e

$$-\frac{1}{2}g(\partial^2 - i\epsilon)g + Jg = \frac{1}{2}Jg, \quad (\text{E.10})$$

o que leva à

$$S_N = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \varphi' \partial_\mu \varphi' + \frac{i\epsilon}{2} \varphi'^2 + Jv + \frac{1}{2} Jg \right). \quad (\text{E.11})$$

A expressão acima é a ação para o numerador do funcional gerador. Para este caso, faz-se necessário também expandir a ação do denominador em termos da solução que produz fase estacionária. Assim, a ação do denominador é

$$S_D = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{i\epsilon}{2} \varphi^2 - i\epsilon \varphi v + \frac{i\epsilon}{2} v \right), \quad (\text{E.12})$$

cuja equação de movimento é

$$(\partial - i\epsilon)\varphi = -i\epsilon v, \quad (\text{E.13})$$

com solução dada por $\varphi_0 = v$. Assim, a expansão da ação do denominador em termos $\varphi = \varphi' + v$, seguindo os procedimentos utilizados acima, leva à ação do denominador

$$S_D = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi' \partial^\mu \varphi' + \frac{i\epsilon}{2} \varphi'^2 \right). \quad (\text{E.14})$$

Substituindo a ação do denominador e a ação do numerador no gerador funcional (4.14), fazendo a correspondente mudança na medida de integração da teoria, e utilizando $g(x) = \int d^4y G(x, y) J(y)$, tem-se

$$Z[J] = \exp \left(i v \int d^4x J(x) \right) \exp \left[\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) G(x, y) J(y) \right]. \quad (\text{E.15})$$

APÊNDICE F - MODELO $U(1)$ GLOBAL - REDE

Utilizando as definições:

$$Z[J, J^*] = \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi(x) d\phi^*(x) \exp \left\{ -S_E - \sum_x (J^*(x)\phi(x) + \phi(x)^* J(x)) \right. \\ \left. - i\epsilon \sum_x \phi^*(x)\phi(x) + i\epsilon \sum_x (v^*\phi(x) + \phi^*(x)v) \right\}, \quad (5.47 \text{ revisitada})$$

$$N = \int \prod_x d\phi(x) d\phi^*(x) \exp \left\{ -S_E - i\epsilon \sum_x \phi^*(x)\phi(x) + i\epsilon \sum_x (v^*\phi(x) + \phi^*(x)v) \right\}, \quad (5.48 \text{ revisitada})$$

é possível obter as identidades de Ward-Takahashi do modelo. E, a primeira destas é obtida implementando a transformação de simetria global

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\phi(x). \quad (5.46 \text{ revisitada})$$

no funcional gerador (5.47):

$$Z[J, J^*]_\alpha = \frac{1}{N} \int \prod_x d\phi(x) d\phi^*(x) \exp \left\{ -S_E - \sum_x (J^*(x)e^{i\alpha}\phi(x) + e^{-i\alpha}\phi(x)^* J(x)) \right. \\ \left. - i\epsilon \sum_x \phi^*(x)\phi(x) + i\epsilon \sum_x (v^*e^{i\alpha}\phi(x) + e^{-i\alpha}\phi^*(x)v) \right\}, \quad (F.1)$$

onde se utilizou que a ação (5.45) e o terceiro termo do gerador funcional são invariantes pela transformação global. Uma vez que o gerador funcional deve permanecer inalterado pela mudança de variáveis (lembre-se que o gerador funcional é definido por processo de integração e veja a transformação de simetria global como uma mudança de variáveis), precisa-se ter $\frac{\partial Z[J, J^*]_\alpha}{\partial \alpha} = 0$ qualquer que seja α . Logo

$$\left. \frac{\partial Z[J, J^*]_\alpha}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_x \langle -i(J^*(x)\phi(x) - J(x)\phi^*(x)) - \epsilon(v^*\phi(x) - v\phi^*(x)) \rangle_{\epsilon, N, J} = 0. \quad (F.2)$$

Em seguida tome a derivada funcional de (F.2) em relação a J^* e faça os termos de fonte iguais a zero:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta}{\delta J^*(z)} \sum_x \langle -i(J^*(x)\phi(x) - J(x)\phi^*(x)) - \epsilon(v^*\phi(x) - v\phi^*(x)) \rangle_{\epsilon, N, J} \Big|_{J=J^*=0} \\
&= \sum_x \left\langle -i\phi(x)\delta(x, z) + [-i(J^*(x)\phi(x)J(x)\phi^*(x)) - \epsilon(v^*\phi(x) - v\phi^*(x))] \right. \\
&\quad \times \left. \left(-\sum_y \phi(y)\delta(y, z) \right) \right\rangle_{\epsilon, N, J} \Big|_{J=J^*=0} \\
&= -i \langle \phi(z) \rangle_{\epsilon, N} + \epsilon \sum_x x \langle (v^*\phi(x) - v\phi^*(x))\phi(z) \rangle_{\epsilon, N}, \tag{F.3}
\end{aligned}$$

ou, simplesmente,

$$\langle \phi(z) \rangle_{\epsilon, N} = i\epsilon \sum_x x \langle (v^*\phi(x) - v\phi^*(x))\phi(z) \rangle_{\epsilon, N}. \tag{5.49 revisitada}$$

Realizando as substituições (5.4), (5.9), (5.15) e (5.17) em (F.2), tem-se:

$$\sum_x \left\langle (J_1(x)\chi(x) - J_2(x)\psi(x)) - i\sqrt{2}\epsilon v\chi(x) \right\rangle_{\epsilon, N, J} = 0. \tag{5.50 revisitada}$$

Atuando com a derivada funcional de (5.50) em relação a J_2 , encontra-se

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta}{\delta J_2(z)} \sum_x \left\langle (J_1(x)\chi(x) - J_2(x)\psi(x)) - i\sqrt{2}\epsilon v\chi(x) \right\rangle_{\epsilon, N, J} \Big|_{J_1=J_2=0} \\
&= \sum_x \left\langle -\psi(x)\delta(x, z) + ((J_1(x)\chi(x) - J_2(x)\psi(x)) - i\sqrt{2}\epsilon v\chi(x)) \left(\sum_y -\chi(y)\delta(y, z) \right) \right\rangle_{\epsilon, N, J} \Big|_{J_1=J_2=0} \\
&= -\langle \psi(z) \rangle_{\epsilon, N} + i\sqrt{2}\epsilon v \sum_x \langle \chi(x)\chi(z) \rangle_{\epsilon, N}, \tag{F.4}
\end{aligned}$$

ou, simplesmente,

$$\langle \psi(z) \rangle_{\epsilon, N} = i\sqrt{2}\epsilon v \sum_x \langle \chi(x)\chi(z) \rangle_{\epsilon, N}. \tag{F.5}$$

A transformada de Fourier discreta da função de dois pontos, o termo da direita da expressão acima, é

$$\langle \chi(x)\chi(z) \rangle_{\epsilon, N} = \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-z)} \Delta_\chi(\epsilon, p). \tag{F.6}$$

As discussões a respeito do termo ϵ desenvolvidas no caso contínuo podem ser trazidas para a rede. Deste modo, é possível propor a seguinte forma para $\Delta_\chi(\epsilon, p)$:

$$\Delta_\chi(\epsilon, p) = \frac{Z_\chi}{\rho^2(p) + m_\chi^2 + i\epsilon a_\chi} + \text{contribuições contínuas}, \tag{5.54 revisitada}$$

onde Z_χ é novamente a constante de renormalização para a função de onda do campo χ . Substituindo a equação (F.6) em (F.5), encontra-se

$$\langle \psi(z) \rangle_{\epsilon, N} = \sqrt{2} \frac{i}{N^4} \epsilon v \sum_x \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_\chi(\epsilon, p), \quad (\text{F.7})$$

ou,

$$\langle \psi(z) \rangle_{\epsilon, N} = \sqrt{2} \frac{i}{N^4} \epsilon v \sum_p \Delta_\chi(\epsilon, p) e^{ipy} \sum_x e^{-ipx} \quad (\text{F.8})$$

e, portanto,

$$\langle \psi(z) \rangle_{\epsilon, N} = \sqrt{2} i \epsilon v \Delta_\chi(\epsilon, 0). \quad (5.53 \text{ revisitada})$$

Definido, então,

$$\langle \psi(x) \rangle_{\epsilon, N} = \tilde{v}(\epsilon), \quad (\text{F.9})$$

obtém-se

$$\tilde{v}(\epsilon) = i \sqrt{2} \epsilon v \Delta_\chi(\epsilon, 0). \quad (\text{F.10})$$

Observe, que esta solução é equivalente ao teorema de Goldstone, se

$$\tilde{v} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{v}(\epsilon) \quad (\text{F.11})$$

não é nulo. Isto implica (junto de (5.28)) que $m_\chi^2 = 0$ (desconsiderou-se o limite de N e se observou o resultado em rede finita):

$$\tilde{v} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{v}(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \sqrt{2} \epsilon v \frac{Z_\chi}{m_\chi^2 + i \epsilon a_\chi} = \begin{cases} \sqrt{2} \frac{Z_\chi}{a_\chi} v, & \text{se } m_\chi = 0 \\ 0, & \text{se } m_\chi \neq 0 \end{cases}, \quad (\text{F.12})$$

e

$$\tilde{v} = \sqrt{2} v \frac{Z_\chi}{a_\chi}. \quad (\text{F.13})$$

Portanto, resultado análogo ao contínuo é obtido.

APÊNDICE G - TERMO DE CAMPO AUXILIAR E FONTE EM REDE

O termo

$$-\frac{i}{2e_0} \sum_{x,\mu} J_\mu(x)(U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*), \quad (6.130 \text{ revisitada})$$

no limite do contínuo fornece

$$U_{x,\mu} \rightarrow 1 + iae_0 A_\mu(x) \quad \text{e} \quad J_\mu(x) \rightarrow a^3 J_\mu(x), \quad (G.1)$$

de tal modo que (6.130) se transforma em

$$-\frac{i}{2e_0} \sum_{x,\mu} a^3 J_\mu(x)(1 + iae_0 A_\mu(x) - 1 + iae_0 A_\mu(x)) = \sum_{x,\mu} a^4 J_\mu(x) A_\mu(x) = \int d^4x J_\mu(x) A_\mu(x). \quad (G.2)$$

Enquanto, o termo

$$-\frac{i}{2e_0} \sum_{x,\mu} B(x) \Delta_\mu^f(U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*) \quad (6.131 \text{ revisitada})$$

leva à

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2e_0} \sum_{x,\mu} B(x) \Delta_\mu^f(U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*) &= -\frac{i}{2e_0} \sum_{x,\mu} B(x) \left(U(x + 2a\hat{\mu}, x + a\hat{\mu}) - U(x + a\hat{\mu}, x) \right. \\ &\quad \left. - U^*(x + 2a\hat{\mu}, x + a\hat{\mu}) + U^*(x + a\hat{\mu}, x) \right). \end{aligned} \quad (G.3)$$

No limite de contínuo, tem-se que $B(x) \rightarrow a^2 B(x)$ e que $\Delta_\mu^f \rightarrow a\tilde{\Delta}_\mu^f$, onde $\tilde{\Delta}_\mu^f$ é implementada por

$$\tilde{\Delta}_\mu^f \phi(x) = \frac{1}{a} \left(\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x) \right). \quad (G.4)$$

Com tal procedimento, (G.3) pode ser reescrita como

$$-\frac{i}{2e_0} \sum_{x,\mu} a^2 B(x) \frac{a}{a} (1 + iae_0 A_\mu(x + a\hat{\mu}) - 1 - iae_0 A_\mu(x) - 1 + iae_0 A_\mu(x + a\hat{\mu}) + 1 - iae_0 A_\mu(x)), \quad (G.5)$$

ou

$$\sum_{x,\mu} a^4 B(x) \frac{1}{a} (A_\mu(x + a\hat{\mu}) - A_\mu(x - a\hat{\mu})) = \sum_{x,\mu} a^4 B(x) \tilde{\Delta}_\mu^f A_\mu(x), \quad (\text{G.6})$$

o que é simplesmente

$$\int d^4x B(x) \partial_\mu A_\mu(x). \quad (\text{G.7})$$

Assim, as versões definidas em rede recuperam a estrutura esperada no limite do contínuo.

APÊNDICE H - DEDUÇÃO DAS EXPRESSÕES (6.139) E (6.146)

DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO (6.139)

As mudanças de variáveis (6.125) e (6.126),

$$\phi(x) \rightarrow e^{ie_0\lambda(x)}\phi(x) \quad \text{e} \quad (6.125 \text{ revisitada})$$

$$U_{x,\mu} \rightarrow e^{-ie_0\lambda(x+a\hat{\mu})}U_{x,\mu}e^{ie_0\lambda(x)}, \quad (6.126 \text{ revisitada})$$

quando implementadas no gerador funcional (6.133),

$$\begin{aligned} Z[J, K] = \frac{1}{N} \int \prod_x \prod_\mu dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) dB(x) \exp \Bigg[& -S_E - \sum_x \left(K^*(x)\phi(x) + K(x)\phi^*(x) \right. \\ & - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu B(x) \Delta_\mu^f(U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*) - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu J_\mu(x)(U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*) \\ & \left. + i\epsilon\phi^*(x)\phi(x) - i\epsilon(\phi^*(x)v + \phi(x)v) \right) \Bigg], \end{aligned} \quad (6.133 \text{ revisitada})$$

forneem a seguinte expressão para o mesmo

$$\begin{aligned} Z[J, K]_\lambda = \frac{1}{N} \int dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) dB(x) \exp \Bigg[& -S_E - \sum_x \left(i\epsilon\phi^*(x)\phi(x) \right. \\ & - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu B(x) \Delta_\mu^f(e^{-ie_0\lambda(x+a\hat{\mu})}U(x+a\hat{\mu}, x)e^{ie_0\lambda(x)} - e^{ie_0\lambda(x+a\hat{\mu})}U^*(x+a\hat{\mu}, x)e^{-ie_0\lambda(x)}) \\ & + K^*(x)e^{ie_0\lambda(x)}\phi(x) + K(x)e^{-ie_0\lambda(x)}\phi^*(x) \\ & - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu J_\mu(x)(e^{-ie_0\lambda(x+a\hat{\mu})}U(x+a\hat{\mu}, x)e^{ie_0\lambda(x)} - e^{ie_0\lambda(x+a\hat{\mu})}U^*(x+a\hat{\mu}, x)e^{-ie_0\lambda(x)}) \\ & \left. \left. - i\epsilon(e^{-ie_0\lambda(x)}\phi^*(x)v + e^{ie_0\lambda(x)}\phi(x)v) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{H.1})$$

Utilizando o fato do grupo ser abeliano se pode escrever

$$\begin{aligned}
Z[J, K]_\lambda = & \frac{1}{N} \int dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) dB(x) \exp \left[-S_E - \sum_x \left(i\epsilon \phi^*(x) \phi(x) \right. \right. \\
& - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu B(x) \Delta_\mu^f (e^{ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))}) U(x+a\hat{\mu}, x) - e^{-ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} U^*(x+a\hat{\mu}, x)) \\
& + K^*(x) e^{ie_0\lambda(x)} \phi(x) + K(x) e^{-ie_0\lambda(x)} \phi^*(x) \\
& - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu J_\mu(x) (e^{ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))}) U(x+a\hat{\mu}, x) - e^{-ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} U^*(x+a\hat{\mu}, x)) \\
& \left. \left. - i\epsilon (e^{-ie_0\lambda(x)} \phi^*(x) v + e^{ie_0\lambda(x)} \phi(x) v) \right) \right]. \tag{H.2}
\end{aligned}$$

Além disso, é interessante reescrever o termo com o campo auxiliar $B(x)$ realizando a operação de diferença finita no termo que acompanha $B(x)$, de forma que o novo termo de $B(x)$ seja escrito como

$$\begin{aligned}
& - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu B(x) \left(e^{ie_0(\lambda(x+a\hat{\mu})-\lambda(x+2a\hat{\mu}))} U(x+2a\hat{\mu}, x+a\hat{\mu}) - e^{ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} U(x+a\hat{\mu}, x) \right. \\
& \left. - e^{ie_0(\lambda(x+a\hat{\mu})-\lambda(x+2a\hat{\mu}))} U(x+2a\hat{\mu}, x+a\hat{\mu}) + e^{-ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} U^*(x+a\hat{\mu}, x) \right).
\end{aligned}$$

Portanto, a expressão (H.2) fica

$$\begin{aligned}
Z[J, K]_\lambda = & \frac{1}{N} \int dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) dB(x) \exp \left\{ -S_E - \sum_x \left[i\epsilon \phi^*(x) \phi(x) \right. \right. \\
& - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu B(x) \left(e^{ie_0(\lambda(x+a\hat{\mu})-\lambda(x+2a\hat{\mu}))} U(x+2a\hat{\mu}, x+a\hat{\mu}) - e^{ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} U(x+a\hat{\mu}, x) \right. \\
& \left. - e^{-ie_0(\lambda(x+a\hat{\mu})-\lambda(x+2a\hat{\mu}))} U^*(x+2a\hat{\mu}, x+a\hat{\mu}) + e^{-ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} U^*(x+a\hat{\mu}, x) \right) \\
& + K^*(x) e^{ie_0\lambda(x)} \phi(x) + K(x) e^{-ie_0\lambda(x)} \phi^*(x) \\
& - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu J_\mu(x) (e^{ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))}) U(x+a\hat{\mu}, x) - e^{-ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} U^*(x+a\hat{\mu}, x)) \\
& \left. \left. - i\epsilon (e^{-ie_0\lambda(x)} \phi^*(x) v + e^{ie_0\lambda(x)} \phi(x) v) \right] \right\}. \tag{H.3}
\end{aligned}$$

Agora, a invariância do gerador funcional leva à

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta Z_\lambda}{\delta \lambda(u)} \right|_{\lambda=0} = 0 = & \frac{1}{N} \int dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) dB(x) \exp \left\{ -S_E - \sum_x \left[i\epsilon \phi^*(x) \phi(x) \right. \right. \\
& - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu B(x) \left(e^{ie_0(\lambda(x+a\hat{\mu})-\lambda(x+2a\hat{\mu}))} U(x+2a\hat{\mu}, x+a\hat{\mu}) - e^{ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} U(x+a\hat{\mu}, x) \right. \\
& \left. \left. - e^{-ie_0(\lambda(x+a\hat{\mu})-\lambda(x+2a\hat{\mu}))} U^*(x+2a\hat{\mu}, x+a\hat{\mu}) + e^{-ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} U^*(x+a\hat{\mu}, x) \right) \right. \\
& + K^*(x) e^{ie_0\lambda(x)} \phi(x) + K(x) e^{-ie_0\lambda(x)} \phi^*(x) \\
& \left. - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu J_\mu(x) (e^{ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} U(x+a\hat{\mu}, x) - e^{-ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} U^*(x+a\hat{\mu}, x)) \right. \\
& \left. \left. - i\epsilon (e^{-ie_0\lambda(x)} \phi^*(x)v + e^{ie_0\lambda(x)} \phi(x)v) \right] \right\} \\
& \times \left\{ - \sum_x \left[\right. \right. \\
& - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu B(x) \left(e^{ie_0(\lambda(x+a\hat{\mu})-\lambda(x+2a\hat{\mu}))} (ie_0)(\delta(x+a\hat{\mu}, u) - \delta(x+2a\hat{\mu}, u)) U(x+2a\hat{\mu}, x+a\hat{\mu}) \right. \\
& - e^{ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} (ie_0)(\delta(x, u) - \delta(x+a\hat{\mu}, u)) U(x+a\hat{\mu}, x) \\
& - e^{-ie_0(\lambda(x+a\hat{\mu})-\lambda(x+2a\hat{\mu}))} (-ie_0)(\delta(x+a\hat{\mu}, u) - \delta(x+2a\hat{\mu}, u)) U^*(x+2a\hat{\mu}, x+a\hat{\mu}) \\
& \left. \left. + e^{-ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} (-ie_0)(\delta(x, u) - \delta(x+a\hat{\mu}, u)) U^*(x+a\hat{\mu}, x) \right) \right. \\
& + [K^*(x) e^{ie_0\lambda(x)} \phi(x) ie_0 + K(x) e^{-ie_0\lambda(x)} \phi^*(x) (-ie_0)] \delta(x, u) \\
& - \frac{i}{2e_0} \sum_\mu J_\mu(x) \left(e^{ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} (ie_0)(\delta(x, u) - \delta(x+a\hat{\mu}, u)) U(x+a\hat{\mu}, x) \right. \\
& \left. - e^{-ie_0(\lambda(x)-\lambda(x+a\hat{\mu}))} (-ie_0)(\delta(x, u) - \delta(x+a\hat{\mu}, u)) U^*(x+a\hat{\mu}, x) \right) \\
& \left. \left. - i\epsilon [e^{-ie_0\lambda(x)} \phi^*(x)v (-ie_0)\delta(x, u) + v^* e^{ie_0\lambda(x)} \phi(x)(ie_0)\delta(x, u)] \right] \right\} \Big|_{\lambda=0}. \tag{H.4}
\end{aligned}$$

Realizando a soma sobre x para o termo $B(x)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_\mu \left(B(u-a\hat{\mu}) U(u+a\hat{\mu}, u) - B(u-2a\hat{\mu}) U(u, u-a\hat{\mu}) - B(u) U(u+a\hat{\mu}, u) \right. \\
+ B(u-a\hat{\mu}) U(u, u-a\hat{\mu}) + B(u-a\hat{\mu}) U^*(u+a\hat{\mu}, u) - B(u-2a\hat{\mu}) U^*(u, u-a\hat{\mu}) \\
\left. - B(u) U^*(u+a\hat{\mu}, u) + B(u-a\hat{\mu}) U^*(u, u-a\hat{\mu}) \right), \tag{H.5}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_\mu \left(-U(u+a\hat{\mu}, u) \Delta_\mu^b B(u) + U(u, u-a\hat{\mu}) \Delta_\mu^b B(u-a\hat{\mu}) \right. \\
\left. - U^*(u+a\hat{\mu}, u) \Delta_\mu^b B(u) + U^*(u, u-a\hat{\mu}) \Delta_\mu^b B(u-a\hat{\mu}) \right), \tag{H.6}
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(-\Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(u) U(u + a\hat{\mu}, u)] - \Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(u) U^*(u + a\hat{\mu}, u)] \right). \quad (\text{H.7})$$

Finalmente

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(-\Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(u) (U_{u,\mu} + U_{u,\mu}^*)] \right). \quad (\text{H.8})$$

Para o termo de fonte $J_{\mu}(x)$ tem-se que a realização da soma sobre x fornece

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(J_{\mu}(u) U(u + a\hat{\mu}, u) - J_{\mu}(u - a\hat{\mu}) U(u, u - a\hat{\mu}) \right. \\ \left. + J_{\mu}(u) U^*(u + a\hat{\mu}, u) - J_{\mu}(u - a\hat{\mu}) U^*(u, u - a\hat{\mu}) \right), \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

ou

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(\Delta_{\mu}^b [J_{\mu}(u) U(u + a\hat{\mu}, u)] + \Delta_{\mu}^b [J_{\mu}(u) U^*(u + a\hat{\mu}, u)] \right), \quad (\text{H.10})$$

ou, simplesmente,

$$\frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(\Delta_{\mu}^b [J_{\mu}(u) (U_{u,\mu} + U_{u,\mu}^*)] \right). \quad (\text{H.11})$$

Os demais termos são imediatos, de forma que a expressão (H.4) fica

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(\Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(u) (U_{u,\mu} + U_{u,\mu}^*)] \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(\Delta_{\mu}^b [J_{\mu}(u) (U_{u,\mu} + U_{u,\mu}^*)] \right) \right. \\ \left. - ie_0 (K^*(u) \phi(u) - \phi^*(u) K(u)) - \epsilon e_0 (v^* \phi(u) - \phi^*(u) v) \right\rangle_{\epsilon, N, J, K} = 0, \end{aligned} \quad (6.139 \text{ revisitada})$$

DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO (6.146)

A invariância do gerador funcional pela transformação $B(x) \rightarrow B(x) + \lambda(x)$ fornece

$$\begin{aligned}
Z[J, K]_{B(x) \rightarrow B(x) + \lambda(x)} &= \frac{1}{N} \int dU_{x,\mu} d\phi(x) d\phi^*(x) dB(x) \exp \left[-S_E - \sum_x \left(\right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{i}{2e_0} \sum_{\mu} B(x) \Delta_{\mu}^f(U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*) - \frac{i}{2e_0} \sum_{\mu} \lambda(x) \Delta_{\mu}^f(U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + K^*(x) \phi(x) + K(x) \phi^*(x) - \frac{i}{2e_0} \sum_{\mu} J_{\mu}(x) (U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i\epsilon |\phi(x) - v|^2 \right) \right] \quad (H.12)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left. \frac{\delta Z[J, K]}{\delta \lambda(u)} \right|_{\lambda=0} = 0 = \frac{i}{2e_0} \sum_x \sum_{\mu} \langle \delta(x, u) \Delta_{\mu}^f(U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^*) \rangle_{\epsilon, N, J, K}, \quad (H.13)$$

ou, simplesmente,

$$\sum_{\mu} \langle \Delta_{\mu}^f(U_{u,\mu} - U_{u,\mu}^*) \rangle_{\epsilon, N, J, K} = 0. \quad (6.146 \text{ revisitada})$$

APÊNDICE I - DEDUÇÃO DA SUBSEÇÃO 6.2.3

Dadas as definições

$$\langle B(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon, N} = \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{B\chi}(p, \epsilon), \quad (6.157 \text{ revisitada})$$

$$\langle B(x)G_{y,\nu} \rangle_{\epsilon, N} = \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{BG}(p, \epsilon), \quad (6.158 \text{ revisitada})$$

$$\langle B(x)B(y) \rangle_{\epsilon, N} = \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{BB}(p, \epsilon), \quad (6.159 \text{ revisitada})$$

e

$$\sum_{\mu} \left\langle \Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(x)] \chi(y) \right\rangle_{\epsilon, N} + e_0 \langle \psi(x) \rangle_{\epsilon, N} \delta(x, y) = i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \langle \chi(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon, N}, \quad (6.162 \text{ revisitada})$$

$$\frac{i}{e_0} \sum_{\mu} \left\langle \Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(x)] G_{y,\nu} \right\rangle_{\epsilon, N} - \Delta_{\nu}^b \langle \delta(x, y) \rangle_{\epsilon, N} = -\sqrt{2}\epsilon v \langle \chi(x)G_{y,\nu} \rangle_{\epsilon, N}, \quad (6.163 \text{ revisitada})$$

$$\sum_{\mu} \langle \Delta_{\mu}^f G_{u,\mu} \chi(y) \rangle_{\epsilon, N} = 0, \quad (6.164 \text{ revisitada})$$

$$\sum_{\mu} \langle \Delta_{\mu}^f G_{u,\mu} G_{y,\nu} \rangle_{\epsilon, N} = 0 \quad (6.165 \text{ revisitada})$$

$$\sum_{\nu} \sum_{\mu} \left\langle \left(\Delta_{\nu}^b [\Delta_{\nu}^b B(y)] \right) \left(\Delta_{\mu}^b [\Delta_{\mu}^b B(x)] \right) \right\rangle_{\epsilon, N} = i\sqrt{2}\epsilon e_0 v \sum_{\nu} \left\langle \Delta_{\nu}^b [\Delta_{\nu}^b B(y)] \chi(x) \right\rangle_{\epsilon, N}. \quad (6.166 \text{ revisitada})$$

Prossegue-se substituindo (6.154) e (6.157) em (6.162), assim, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N^4} \sum_p \sum_{\mu} [\Delta_{\mu}^b(x) \Delta_{\mu}^b(x)] e^{-ip(x-y)} \Delta_{B\chi}(p, \epsilon) + e_0 \tilde{v}(\epsilon) \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \\ & = \sqrt{2}\epsilon v e_0 i \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{\chi}(p, \epsilon), \end{aligned} \quad (I.1)$$

onde se usou a definição (F.9).

Sostituindo $\tilde{v}(\epsilon) = i\sqrt{2}\epsilon v \Delta_{\chi}(\epsilon, 0)$ (definido em (F.10)) em (I.1), encontra-se

$$-\tilde{\rho}^2(p_{\mu}) \Delta_{B\chi}(p, \epsilon) + e_0 i \sqrt{2}\epsilon v \Delta_{\chi}(\epsilon, 0) - \sqrt{2}\epsilon v e_0 i \frac{Z_{\chi}}{\rho^2(p) + i\epsilon a_{\chi}} = 0, \quad (I.2)$$

ou

$$-\tilde{\rho}^2(p_{\mu}) \Delta_{B\chi}(p, \epsilon) + e_0 v \sqrt{2}\epsilon i \left(\frac{Z_{\chi}}{i\epsilon a_{\chi}} - \frac{Z_{\chi}}{\rho^2(p) + i\epsilon a_{\chi}} \right) = 0, \quad (I.3)$$

ou ainda

$$\Delta_{\beta\chi}(p, \epsilon) = \frac{e_0 \tilde{v} \rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(p_\mu) [\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi]}, \quad (\text{I.4})$$

onde foi utilizado (6.156). Deste modo, tem-se a seguinte estrutura para a função de dois pontos $\langle B(x)\chi(y) \rangle$:

$$\langle B(x)\chi(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{e_0 \tilde{v} \rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(p_\mu) [\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi]} \right]. \quad (\text{I.5})$$

Antes de substituir (6.158) em (6.163) observe que não se conhece $\langle \chi(x) G_{y,\mu} \rangle_{\epsilon, N}$; todavia sabe-se que $\sum_\mu \langle \Delta_\mu^f G_{u,\mu} \chi(y) \rangle_{\epsilon, N} = 0$ (6.164). Deste modo, inicia-se tomando a diferença finita $\Delta_\nu^f(y)$ da expressão (6.163) junto da soma sobre ν :

$$\frac{i}{e_0} \sum_\mu \sum_\nu \left\langle \Delta_\mu^b [\Delta_\mu^b B(x)] \Delta_\nu^f(y) G_{y,\nu} \right\rangle_{\epsilon, N} - \sum_\nu \Delta_\nu^f(y) \Delta_\nu^b \langle \delta(x, y) \rangle_{\epsilon, N} = -\sqrt{2}\epsilon v \sum_\nu \langle \chi(x) \Delta_\nu^f(y) G_{y,\nu} \rangle_{\epsilon, N}. \quad (\text{I.6})$$

Logo,

$$\frac{i}{e_0} \sum_\mu \sum_\nu \left\langle \Delta_\mu^b [\Delta_\mu^b B(x)] \Delta_\nu^f(y) G_{y,\nu} \right\rangle_{\epsilon, N} - \sum_\nu \Delta_\nu^f(y) \Delta_\nu^b \langle \delta(x, y) \rangle_{\epsilon, N} = 0. \quad (\text{I.7})$$

Substituindo (6.158) em (I.7) ter-se-á

$$\frac{i}{e_0} \frac{1}{N} \sum_p \sum_\mu \Delta_\mu^b(x) \Delta_\mu^b(x) \sum_\nu \Delta_\nu^f(y) e^{-ip(x-y)} \Delta_{BG}(p, \epsilon) - \frac{1}{N} \sum_p \sum_\nu \Delta_\nu^f(y) \Delta_\nu^b(x) e^{-ip(x-y)} = 0. \quad (\text{I.8})$$

Do apêndice L, tem-se

$$-\frac{i}{e_0} \frac{1}{N} \tilde{\rho}^2(p_\mu) \sum_\nu \Delta_\nu^f(y) e^{-ip(x-y)} \Delta_{BG}(p, \epsilon) - \frac{1}{N} \sum_p \sum_\nu \Delta_\nu^f(y) \Delta_\nu^b(x) e^{-ip(x-y)} = 0, \quad (\text{I.9})$$

enquanto os termos $\sum_\nu \Delta_\nu^f(y) e^{-ip(x-y)}$ e $\sum_\nu \Delta_\nu^f(y) \Delta_\nu^b(x) e^{-ip(x-y)}$, são dados no apêndice L, equações (L.14) e (L.19):

$$-\frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{i}{e_0} (-) \tilde{\rho}^2(p_\mu) i \tilde{\rho}(p_\nu) \Delta_{BG}(p, \epsilon) = \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-i(x-y)} 2\tilde{\rho}^2(p_\nu), \quad (\text{I.10})$$

ou,

$$\Delta_{BG}(p, \epsilon) = -\frac{2e_0}{\tilde{\rho}(p_\nu)}. \quad (\text{I.11})$$

Assim, $\langle B(x) G_{y,\nu} \rangle$ pode ser escrito como

$$\langle B(x) G_{y,\nu} \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{2e_0}{\tilde{\rho}(p_\nu)} \right]. \quad (\text{I.12})$$

Então, resta apenas determinar $\langle B(x)B(y) \rangle_{\epsilon, N}$ substituindo (I.5) e (6.159) em (6.166):

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^4} \sum_p \sum_\nu [\Delta_\nu^b(x) \Delta_\nu^b(x)] \sum_\mu [\Delta_\mu^b(y) \Delta_\mu^b(y)] e^{-ip(x-y)} \Delta_{BB}(p, \epsilon) \\ = i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \frac{1}{N^4} \sum_p \sum_\nu [\Delta_\nu^b(x) \Delta_\nu^b(x)] e^{-ip(x-y)} \Delta_{B\chi}(p, \epsilon). \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

A diferença finita em x pode ser calculada usando o resultado do apêndice L (trocando μ por ν), Enquanto a derivada em relação a y pode ser calculada usando, também, o resultado do apêndice L, porém, trocando p por $-p$. De tal modo que se obtém

$$\tilde{\rho}^2(p_\nu) \tilde{\rho}^2(-p_\mu) \Delta_{BB}(p, \epsilon) = -i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \tilde{\rho}^2(p_\nu) \frac{e_0 \tilde{v} \rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(p_\mu) [\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi]}, \quad (\text{I.14})$$

ou

$$\Delta_{BB}(p, \epsilon) = -i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \frac{e_0 \tilde{v} \rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(-p_\mu) \tilde{\rho}^2(p_\mu) [\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi]}. \quad (\text{I.15})$$

Deste modo, encontra-se que $\langle B(x)B(y) \rangle$ será dado por

$$\langle B(x)B(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \left(-i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \frac{e_0 \tilde{v} \rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(-p_\mu) \tilde{\rho}^2(p_\mu) [\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi]} \right) \right]. \quad (\text{I.16})$$

APÊNDICE J - DEDUÇÃO DA SUBSEÇÃO 6.2.4

Utilizando-se das definições

$$\chi_H(x) = a_0 + a_1\chi_{in}(x) + a_2\rho_{in}(x) + a_3b_{in}(x) + a_4 \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^f G_{in}(x + a\hat{\mu}, x), \quad (6.171 \text{ revisitada})$$

$$\rho_H(x) = b_0 + b_1\chi_{in}(x) + b_2\rho_{in}(x) + b_3b_{in}(x) + b_4 \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^f G_{in}(x + a\hat{\mu}, x), \quad (6.172 \text{ revisitada})$$

$$B_H(x) = c_0 + c_1\chi_{in}(x) + c_2\rho_{in}(x) + c_3b_{in}(x) + c_4 \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^f G_{in}(x + a\hat{\mu}, x), \quad (6.174 \text{ revisitada})$$

$$G_H(x + a\hat{\mu}, x) = d_0(\hat{\mu}) + d_1\Delta_{\mu}^b\chi_{in}(x) + d_2\Delta_{\mu}^b\rho_{in}(x) + d_3\Delta_{\mu}^b b_{in}(x) + d_4 G_{in}(x + a\hat{\mu}, x) \quad (6.174 \text{ revisitada})$$

pode-se fazer $a_0 = c_0 = 0$, $b_0 = \tilde{v}$ e $d_0^{\mu} = 0$, uma vez que $\langle \chi_H \rangle = \langle B_H \rangle = \langle G_H(x + a\hat{\mu}, x) \rangle = 0$ e $\langle \rho_H \rangle = \tilde{v}$. Além disso, é conveniente fazer $a_2 = b_1 = b_3 = b_4 = c_2 = d_2 = 0$ de modo a satisfazer (6.152), lembrando que $U_{x,\mu} - U_{x,\mu}^* = 2G_{x,\mu} = 2G(x + a\hat{\mu}, x)$. Logo, fica-se com

$$\chi_H(x) = a_1\chi_{in}(x) + a_3b_{in}(x) + a_4 \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^f G_{in}(x + a\hat{\mu}, x), \quad (J.1)$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + b_2\rho_{in}(x), \quad (J.2)$$

$$B_H(x) = c_1\chi_{in}(x) + c_3b_{in}(x) + c_4 \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^f G_{in}(x + a\hat{\mu}, x), \quad (J.3)$$

$$G_H(x + a\hat{\mu}, x) = d_1\Delta_{\mu}^b\chi_{in}(x) + d_3\Delta_{\mu}^b b_{in}(x) + d_4 G_{in}(x + a\hat{\mu}, x). \quad (J.4)$$

A partir da expressão (6.146), tem-se

$$\sum_{\mu} \langle \Delta_{\mu}^f G_H(x + a\hat{\mu}, x) \rangle = 0, \quad (J.5)$$

o que combinado com (J.4) fornece

$$d_1 \langle \Delta^2 \chi_{in}(x) \rangle + d_3 \langle \Delta^2 b_{in}(x) \rangle + d_4 \sum_{\mu} \langle \Delta_{\mu}^f G_{in}(x + a\hat{\mu}, x) \rangle = 0. \quad (J.6)$$

Impondo que b_{in} e χ_{in} satisfaçam equações de campo livre¹ a expressão (J.6) leva à

$$\sum_{\mu} \langle \Delta_{\mu}^f G_{in}(x + a\hat{\mu}, x) \rangle = 0, \quad (J.7)$$

uma vez que não é adequado escolher $d_4 = 0$. Note que, as igualdades utilizadas nos mapas dinâmicos são fracas, no sentido que só valem entre os elementos de matriz. Neste caso, o resultado recém obtido reduz os mapas à

¹Esta imposição é natural haja visto que no limite do contínuo é isto o que se deseja recuperar.

$$\chi_H(x) = a_1 \chi_{in}(x) + a_3 b_{in}(x), \quad (\text{J.8})$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + b_2 \rho_{in}(x), \quad (\text{J.9})$$

$$B_H(x) = c_1 \chi_{in}(x) + c_3 b_{in}(x), \quad (\text{J.10})$$

$$G_H(x + a\hat{\mu}, x) = d_1 \Delta_\mu^b \chi_{in}(x) + d_3 \Delta_\mu^b b_{in}(x) + d_4 G_{in}(x + a\hat{\mu}, x). \quad (\text{J.11})$$

Agora, pode-se estudar algumas funções de dois pontos para os campos de Heisenberg. Para tal é conveniente usar o fato de que as funções de dois pontos de campos assintóticos diferentes é nula, pois os mesmos não podem estar correlacionados. Portanto,

$$\langle \chi_H(x) \chi_H(y) \rangle = a_1^2 \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle + a_3^2 \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle, \quad (\text{J.12})$$

$$\langle B_H(x) \chi_H(y) \rangle = a_1 c_1 \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle + a_3 c_3 \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle, \quad (\text{J.13})$$

$$\langle B_H(x) B_H(y) \rangle = c_1^2 \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle + c_3^2 \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle. \quad (\text{J.14})$$

É interessante considerar que b_{in} seja um campo assintótico livre com norma negativa (ghost), pois assim, no limite do contínuo, ele recuperaria a estrutura adequada. Neste caso, sua função de dois pontos introduziria estados de norma negativa em outras funções de dois pontos que podem não ter este tipo de termo. Assim, a_3 deve ser feito igual a zero em (J.12). Além disso, propondo a seguinte estrutura para o correlator de $\langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle$:

$$\langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle = \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi}, \quad (\text{J.15})$$

junto da equação (6.167) se encontra que $a_1 = Z_\chi^{1/2}$. Combinado este último resultado com $a_3 = 0$ em (J.13), tem-se

$$\langle B_H(x) \chi_H(y) \rangle = c_1 Z_\chi^{1/2} \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle. \quad (\text{J.16})$$

Utilizando a equação (6.168), a qual fornece a função de dois pontos para os operadores de Heisenberg a esquerda na equação (J.16) se encontra que

$$c_1 = \frac{Z_\chi^{-1/2} e_0 \tilde{v} \rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(p_\mu)}. \quad (\text{J.17})$$

Assim, até o presente momento os três primeiros mapas dinâmicos se reduziram à

$$\chi_H(x) = Z_\chi^{1/2} \chi_{in}(x), \quad (\text{J.18})$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + Z_\chi^{1/2} \rho_{in}(x), \quad (\text{J.19})$$

$$B_H(x) = \left[\frac{Z_\chi^{-1/2} e_0 \tilde{v} \rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(p_\mu)} \right] \chi_{in}(x) + c_2 b_{in}(x). \quad (\text{J.20})$$

Substituindo os resultados de (J.18) até (J.20) em (J.14), fica-se com

$$\langle B_H(x)B_H(y) \rangle = \left[\frac{Z_\chi^{-1/2} e_0 \tilde{v} \rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(p_\mu)} \right]^2 \langle \chi_{in}(x) \chi_{in}(y) \rangle + c_3^2 \langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle. \quad (\text{J.21})$$

Considere que $\langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle$ tenha a seguinte estrutura para a função de dois pontos

$$\langle b_{in}(x) b_{in}(y) \rangle = \frac{1}{N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \left(-\frac{1}{\rho^2(p)} \right), \quad (\text{J.22})$$

o que é razoável haja vista que b_{in} deve satisfazer uma equação de campo livre e apresenta normal negativa. Combinando (J.22), (J.15), (6.170) em (J.21), encontra-se que c_3 é

$$c_3 = e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-1} \left\{ \frac{[\rho^2(p)]^2}{[\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi] \tilde{\rho}^2(p_\mu)} \left[\frac{\rho^2(p)}{\rho^2(p_\mu)} + \frac{i\epsilon a_\chi}{\tilde{\rho}^2(-p_\mu)} \right] \right\}^{1/2}. \quad (\text{J.23})$$

Logo, os três primeiros mapas dinâmicos ficam dados por

$$\chi_H(x) = Z_\chi^{1/2} \chi_{in}(x), \quad (6.175 \text{ revisitada})$$

$$\rho_H(x) = \tilde{v} + Z_\chi^{1/2} \rho_{in}(x), \quad (6.176 \text{ revisitada})$$

$$B_H(x) = e_0 \tilde{v} Z_\chi^{-1} \left\{ \frac{\rho^2(p)}{\tilde{\rho}^2(p_\mu)} \chi_{in}(x) + \left\{ \frac{[\rho^2(p)]^2}{[\rho^2(p) + i\epsilon a_\chi] \tilde{\rho}^2(p_\mu)} \left[\frac{\rho^2(p)}{\rho^2(p_\mu)} + \frac{i\epsilon a_\chi}{\tilde{\rho}^2(-p_\mu)} \right] \right\}^{1/2} b_{in}(x) \right\}. \quad (6.177 \text{ revisitada})$$

APÊNDICE K - FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO - TÓPICO DA SUBSEÇÃO 6.2.5

Dadas as definições

$$\langle B(x)\chi(y) \rangle_{\epsilon, N} = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{B\chi}(p, \epsilon), \quad (6.200 \text{ revisitada})$$

$$\langle B(x)A_\nu(y) \rangle_{\epsilon, N} = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{BA}(p, \epsilon). \quad (6.201 \text{ revisitada})$$

$$\langle B(x)B(y) \rangle_{\epsilon, N} = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{BB}(p, \epsilon), \quad (6.202 \text{ revisitada})$$

começa-se os cálculos substituindo (6.199) e (6.200) em (6.191), o que fornece

$$\begin{aligned} \sum_\mu \tilde{\Delta}_\mu^b \tilde{\Delta}_\mu^b \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{B\chi}(p, \epsilon) + i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_\chi(0, \epsilon) \\ = i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_\chi(p, \epsilon). \end{aligned} \quad (K.1)$$

Usando que

$$\begin{aligned} \sum_\mu \tilde{\Delta}_\mu^b(x) \tilde{\Delta}_\mu^b(x) e^{-ip(x-y)} &= \sum_\mu \frac{e^{-ip(x-y)}}{a^2} e^{iap_\mu} (-2 + e^{-iap_\mu} + e^{iap_\mu}) \\ &= -e^{-ip(x-y)} \sum_\mu p_\mu^2, \end{aligned} \quad (K.2)$$

tem-se

$$\frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \left[-\sum_\mu p_\mu^2 \Delta_{B\chi}(p, \epsilon) + i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \Delta_\chi(0, \epsilon) \right] = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \Delta_\chi(p, \epsilon), \quad (K.3)$$

de onde se obtém, substituindo (6.199) e $\tilde{v} = \sqrt{2}vZ_\chi/a_\chi$,

$$\Delta_{B\chi}(p, \epsilon) = \frac{e_0 \tilde{v}}{\sum_\mu p_\mu^2 + i\epsilon a_\chi}. \quad (K.4)$$

Portanto, a função de dois pontos $\langle B(x)\chi(y) \rangle$ fica

$$\langle B(x)\chi(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{e_0 \tilde{v}}{\sum_\mu p_\mu^2 + i\epsilon a_\chi} \right]. \quad (K.5)$$

Agora, atuando com a derivada finita $\tilde{\Delta}_\nu^f(y)$ em (6.192) junto da soma em ν , obtém-se

$$\sum_{\mu,\nu} \tilde{\Delta}_\nu^f(y) \left\langle \tilde{\Delta}_\mu^b[\tilde{\Delta}_\mu^b B(x)] A_\nu(y) \right\rangle_{\epsilon,N} + \sum_\nu \tilde{\Delta}_\nu^f(y) \Delta_\nu^b \left\langle \delta(x,y) \right\rangle_{\epsilon,N} = i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \sum_\nu \tilde{\Delta}_\nu^f(y) \langle \chi(x) A_\nu(y) \rangle_{\epsilon,N}, \quad (\text{K.6})$$

entretanto, pela identidade (6.194) o termo da direita é zero:

$$\sum_{\mu,\nu} \tilde{\Delta}_\nu^f(y) \left\langle \tilde{\Delta}_\mu^b[\tilde{\Delta}_\mu^b B(x)] A_\nu(y) \right\rangle_{\epsilon,N} = - \sum_\nu \tilde{\Delta}_\nu^f(y) \Delta_\nu^b \left\langle \delta(x,y) \right\rangle_{\epsilon,N}. \quad (\text{K.7})$$

Substituindo a definição (K.6) em (K.7), tem-se

$$\frac{1}{a^4 N^4} \sum_p \sum_{\mu,\nu} \tilde{\Delta}_\nu^f(y) \tilde{\Delta}_\mu^b(x) \tilde{\Delta}_\mu^b(x) e^{-ip(x-y)} \Delta_{BA}(p, \epsilon) = - \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p \sum_\nu \tilde{\Delta}_\nu^f(y) \tilde{\Delta}_\nu^b(x) e^{-ip(x-y)}. \quad (\text{K.8})$$

Aplicando os elementos introduzidos em (K.2) e os já desenvolvidos no apêndice L a respeito da diferença finita em (K.8), encontra-se

$$\frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \sum_\mu (-p_\mu^2) \sum_\nu i p_\nu \Delta_{BA}(p, \epsilon) = \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \sum_\nu p_\nu^2. \quad (\text{K.9})$$

Portanto,

$$\Delta_{BA}(p, \epsilon) = \frac{1}{\sum_\nu i p_\nu}, \quad (\text{K.10})$$

e assim, $\langle B(x) A_\nu(y) \rangle$ fica dado por

$$\langle B(x) A_\nu(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \frac{1}{\sum_\nu i p_\nu} \right]. \quad (\text{K.11})$$

Substituindo as definições (6.200) e (6.202) em (6.196), fica-se com

$$\sum_\nu \sum_\mu [\tilde{\Delta}_\nu^b(x)]^2 [\tilde{\Delta}_\mu^b(y)]^2 \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{BB}(p, \epsilon) = i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \sum_\nu [\tilde{\Delta}_\nu^b(x)]^2 \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \Delta_{B\chi}(p, \epsilon), \quad (\text{K.12})$$

ou

$$\frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \sum_\nu (-p_\nu^2) \sum_\mu (-p_\mu^2 \Delta_{BB}(p, \epsilon)) = i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \frac{1}{a^4 N^4} \sum_p e^{-ip(x-y)} \sum_\nu (-p_\nu^2 \Delta_{B\chi}(p, \epsilon)), \quad (\text{K.13})$$

ou ainda

$$\Delta_{BB}(p, \epsilon) = -i\sqrt{2}\epsilon v e_0 \frac{\Delta_{B\chi}(p, \epsilon)}{\sum_\mu p_\mu^2}. \quad (\text{K.14})$$

Substituindo a expressão para $\Delta_{B\chi}(p, \epsilon)$ dada em (K.4) e realizando algumas manipulações algébricas, encontra-se

$$\Delta_{BB}(p, \epsilon) = \frac{(e_0 \tilde{v})^2}{Z_\chi} \left(\frac{1}{\sum_\mu p_\mu^2 + i\epsilon a_\chi} - \frac{1}{\sum_\nu p_\nu^2} \right). \quad (\text{K.15})$$

Logo, $\langle B(x)B(y) \rangle$ fica dado por

$$\langle B(x)B(y) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{(e_0 \tilde{v})^2}{Z_\chi} \left(\frac{1}{\sum_\mu p_\mu^2 + i\epsilon a_\chi} - \frac{1}{\sum_\nu p_\nu^2} \right) \right]. \quad (\text{K.16})$$

APÊNDICE L - RESULTADOS DE DERIVADAS EM REDE

Estudar-se-á alguns termos de derivadas em rede. Assim, começar-se-á com o termo

$$\sum_{\mu} [\Delta_{\mu}^b(x) \Delta_{\mu}^b(x)] e^{-ip(x-y)}. \quad (\text{L.1})$$

Isolando o termo com dependência em y e aplicando a primeira operação de diferença finita em x , tem-se

$$e^{ipy} \sum_{\mu} [\Delta_{\mu}^b(x)] [e^{-ipx} - e^{-ip(x-a\hat{\mu})}]. \quad (\text{L.2})$$

Aplicando-se a segunda operação de diferença finita, tem-se

$$e^{ipy} \sum_{\mu} [e^{-ipx} - e^{-ip(x-a\hat{\mu})} - e^{-ip(x-a\hat{\mu})} + e^{-ip(x-2a\hat{\mu})}], \quad (\text{L.3})$$

ou

$$e^{-ip(x-y)} \sum_{\mu} [1 - 2e^{ip(a\hat{\mu})} + e^{ip(2a\hat{\mu})}]. \quad (\text{L.4})$$

Usando, agora, que $p(a\hat{\mu}) = p_{\mu}$, pode-se escrever

$$e^{-ip(x-y)} \sum_{\mu} [1 - 2e^{ip_{\mu}} + e^{i2p_{\mu}}]. \quad (\text{L.5})$$

Isolando $e^{ip_{\mu}}$, obtém-se

$$e^{-ip(x-y)} \sum_{\mu} e^{ip_{\mu}} [-2 + e^{ip_{\mu}} + e^{-ip_{\mu}}], \quad (\text{L.6})$$

ou

$$2e^{-ip(x-y)} \sum_{\mu} e^{ip_{\mu}} [-1 + \cos(p_{\mu})], \quad (\text{L.7})$$

ou, ainda,

$$2e^{-ip(x-y)} \sum_{\mu} e^{ip_{\mu}} [-\cos^2(p_{\mu}/2) - \sin^2(p_{\mu}/2) + \cos^2(p_{\mu}/2) - \sin^2(p_{\mu}/2)]. \quad (\text{L.8})$$

De modo que se define:

$$\sum_{\mu} [\Delta_{\mu}^b(x) \Delta_{\mu}^b(x)] e^{-ip(x-y)} = -\tilde{\rho}^2(p_{\mu}) e^{-ip(x-y)}, \quad (\text{L.9})$$

onde

$$\tilde{\rho}^2(p_\mu) = \sum_{\mu} [2e^{ip_\mu/2} \text{sen}(p_\mu/2)]^2. \quad (\text{L.10})$$

Agora, o termo $\sum_{\nu} \Delta_{\nu}^f(y) e^{-ip(x-y)}$ pode ser escrito como

$$e^{-ipx} \sum_{\nu} \Delta_{\nu}^f(y) e^{ipy}, \quad (\text{L.11})$$

ou

$$e^{-ipx} \sum_{\nu} [e^{ip(y+a\hat{\nu})} - e^{ipy}], \quad (\text{L.12})$$

ou, ainda,

$$e^{-ip(x-y)} \sum_{\nu} e^{ip_{\nu}/2} [e^{ip_{\nu}/2} - e^{-ip_{\nu}/2}]. \quad (\text{L.13})$$

Finalmente, tem-se

$$\sum_{\nu} \Delta_{\nu}^f(y) e^{-ip(x-y)} = e^{-ip(x-y)} i\tilde{\rho}(p_{\nu}), \quad (\text{L.14})$$

onde

$$\tilde{\rho}(p_{\nu}) = 2 \sum_{\nu} e^{ip_{\nu}/2} \text{sen}(p_{\nu}/2). \quad (\text{L.15})$$

Enquanto, o termo $\sum_{\nu} \Delta_{\nu}^f(y) \Delta_{\nu}^b(x) e^{-ip(x-y)}$ após algumas manipulações algébricas é dado por

$$\sum_{\nu} [\Delta_{\nu}^f(y) e^{ipy}] [\Delta_{\nu}^b(x) e^{-ipx}]. \quad (\text{L.16})$$

O primeiro termo tem sua expressão dada acima. Usando-o e atuando com a diferença finita no segundo termo, obtém-se

$$\sum_{\nu} [2ie^{ip_{\nu}/2} \text{sen}(p_{\nu}/2)] e^{ipy} [e^{-ipx} - e^{-ip(x-a\hat{\nu})}], \quad (\text{L.17})$$

ou

$$\sum_{\nu} [2ie^{ip_{\nu}/2} \text{sen}(p_{\nu}/2)] e^{-ip(x-y)} (-) e^{ip_{\nu}/2} [-e^{-ip_{\nu}/2} + e^{ip_{\nu}/2}], \quad (\text{L.18})$$

ou, simplesmente.

$$\sum_{\nu} [2e^{ip_{\nu}/2} \text{sen}(p_{\nu}/2)]^2 e^{-ip(x-y)} = \tilde{\rho}^2(p_{\nu}) e^{-ip(x-y)}. \quad (\text{L.19})$$