

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

EDUARDO CARVALHO PINHEIRO

Equações de Clohessy-Wiltshire: modelo linear para variação de massa nas manobras
evasivas de veículos espaciais

Guaratinguetá
2018

Eduardo Carvalho Pinheiro

Equações de Clohessy-Wiltshire: modelo linear para variação de massa nas manobras evasivas de veículos espaciais

Dissertação de Mestrado apresentado ao Conselho de Curso da Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Física.

Orientador: Rafael Sfair de Oliveira

Co-orientador: Antônio Delson Conceição de Jesus

Guaratinguetá

2018

Pinheiro, Eduardo Carvalho
P654e Equações de Clohessy-Wiltshire: modelo linear / para variação de
 massa nas manobras evasivas de veículos espaciais – Guaratinguetá, 2018.
 95 f : il.
 Bibliografia: f. 95

 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2018.
 Orientador: Prof. Dr. Rafael Sfair
 Co-orientador: Prof. Dr. Antônio Delson Conceição de Jesus

 1. Veículos espaciais – Sistemas de propulsão. 2. Satélites artificiais -
Órbitas. I. Título.

CDU 629.7(043)


Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

EDUARDO CARVALHO PINHEIRO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Konstatin Georgiev Kostov
Coordenador

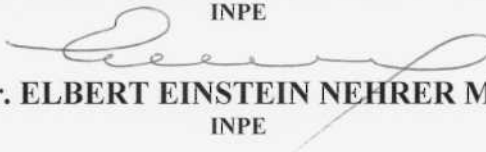
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. RAFAEL SFAIR OLIVEIRA
Orientador / UNESP/FEG



Prof. Dr. ANTONIO FERNANDO BERTACHINI DE ALMEIDA PRADO
INPE



Prof. Dr. ELBERT EINSTEIN NEHRER MACAU
INPE

Abril de 2018

DADOS CURRICULARES

EDUARDO CARVALHO PINHEIRO

NASCIMENTO 15/11/1984 - Caxias / MA

FILIAÇÃO Elias Tadeu de Oliveira Pinheiro
Raimunda Vilanova de Carvalho

2009 / 2014 Curso de Graduação, Licenciatura em Física,
Universidade Estadual de Feira de Santana

2015 / 2018 Curso de Pós Graduação em Física, nível Mestrado,
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá,
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Jesus Cristo por ter me ensinado a escolher os melhores caminhos para conduzir minha vida.

Aos meus pais pelo apoio e incentivo durante o curso.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Rafael Sfair de Oliveira e Prof. Dr. Antônio Delson pela paciência que tiveram para responder a todas as minhas perguntas e pelo aprendizado que adquiri durante suas orientações.

Não posso deixar de agradecer Rafael Ribeiro e Ricardo Moraes pela paciência em sanar minhas dúvidas computacionais.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Obrigado a todos!

Este trabalho contou com o apoio financeiro da:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

RESUMO

Detritos espaciais (DE) são objetos que possuem altas velocidades e são capazes de inviabilizar o sucesso de missões espaciais, caso venham a colidir com veículos espaciais, além de colocar em risco a segurança dos astronautas. O nosso modelo matemático é baseado, inicialmente, nas equações dinâmicas derivadas de Clohessy-Wiltshire (1960). Estas equações regem o movimento relativo entre dois corpos e seu uso é apropriado aqui porque descrevemos o movimento relativo entre um veículo espacial e um DE. Dado ao fato de soluções do modelo linear apresentar vários fatores resultou em algumas dificuldades nas simulações computacionais, mas obtivemos êxito em contornar essas dificuldades e conseguimos implementar manobras evasivas usando o modelo linear.

PALAVRAS-CHAVE: Detritos Espaciais. Propulsão. Manobras.

ABSTRACT

Space debris (DE) are objects that have high speeds and are capable of unfeasible space missions successful if they collide with space vehicles, as well as endangering the safety of astronauts. Our mathematical model is based initially on the dynamic equations derived from Clohessy-Wiltshire (1960). These equations govern the relative motion between two bodies and their use is appropriate here because we describe the relative motion between a space vehicle and an ED. Due to the fact that solutions of the linear model have several factorials, some difficulties were encountered in the computational simulations, but we succeeded in getting around these difficulties and we were able to implement evasive maneuvers using the linear model.

KEYWORDS: Space Debris. Propulsion. Maneuvers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Ilustração da queima do combustível de um veículo espacial, visto por um referencial inercial na Terra.	19
Figura 2 -	Vetor $\vec{v}'$ sendo representado pela soma dos vetores $\vec{v}_e$ e $\vec{v} + d\vec{v}$	20
Figura 3 -	Esquema mostra o sistema de coordenada dos satélites.	25
Figura 4 -	Esquema da dinâmica relativa.	26
Figura 5 -	Possibilidades de Colisão versus velocidade relativa de colisão.	32
Figura 6 -	Possibilidades de Colisão versus posição inicial.	32
Figura 7 -	Curva de dinâmica relativa.	35
Figura 8 -	Curva de dinâmica relativa.	36
Figura 9 -	Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.	52
Figura 10 -	Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.	53
Figura 11 -	Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.	54
Figura 12 -	Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.	54
Figura 13 -	Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000km$	55
Figura 14 -	Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000km$	56
Figura 15 -	Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000km$	56
Figura 16 -	Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000km$	57
Figura 17 -	Representação dos vetores posição do veículo espacial $\vec{R}_v$ e do detrito espacial $\vec{R}_D$ em relação ao referencial inercial na Terra.	64
Figura 18 -	Representação do vetor posição do veículo em relação à Terra.	65
Figura 19 -	Trajetrória de colisão em relação a Terra	67
Figura 20 -	Curva de dinâmica relativa.	69
Figura 21 -	Curva de dinâmica relativa.	69

Figura 22 - Curva de dinâmica relativa.	70
Figura 23 - Curva de dinâmica relativa.	71
Figura 24 - Curva de dinâmica relativa.	71
Figura 25 - Trajetória de colisão em relação a Terra	73
Figura 26 - Trajetória de colisão em relação a Terra.	73
Figura 27 - Trajetória de colisão em relação a Terra	74
Figura 28 - Curva de dinâmica relativa.	75
Figura 29 - Curva de dinâmica relativa.	76
Figura 30 - Curva de dinâmica relativa.	77
Figura 31 - Curva de dinâmica relativa.	77
Figura 32 - Curva de dinâmica relativa.	78
Figura 33 - Curva de dinâmica relativa.	78
Figura 34 - Ilustração de uma manobra evasiva numa situação real. Onde r_v é o raio do veículo e r_l é o raio do lixo espacial.	80
Figura 35 - Curva de dinâmica relativa.	89
Figura 36 - Curva de dinâmica relativa.	90
Figura 37 - Curva de dinâmica relativa.	90
Figura 38 - Curva de dinâmica relativa.	91
Figura 39 - Curva de dinâmica relativa.	91
Figura 40 - Curva de dinâmica relativa.	92
Figura 41 - Curva de dinâmica relativa.	92
Figura 42 - Curva de dinâmica relativa.	93
Figura 43 - Curva de dinâmica relativa.	93
Figura 44 - Curva de dinâmica relativa.	94
Figura 45 - Curva de dinâmica relativa.	94
Figura 46 - Curva de dinâmica relativa.	95
Figura 47 - Curva de dinâmica relativa.	95
Figura 48 - Curva de dinâmica relativa.	96
Figura 49 - Curva de dinâmica relativa.	96
Figura 50 - Curva de dinâmica relativa.	97
Figura 51 - Curva de dinâmica relativa.	97
Figura 52 - Curva de dinâmica relativa.	98
Figura 53 - Curva de dinâmica relativa.	98
Figura 54 - Curva de dinâmica relativa.	99
Figura 55 - Curva de dinâmica relativa.	99
Figura 56 - Curva de dinâmica relativa.	100
Figura 57 - Curva de dinâmica relativa.	100
Figura 58 - Curva de dinâmica relativa.	101

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Valores típicos de velocidades de exaustão de foguetes químicos . . .	22
Tabela 2 -	Impulso específicos típicos de propulsores	23
Tabela 3 -	Análise da condição de expansão para altitude de $220km$, para o caso homogêneo.	57
Tabela 4 -	Análise da condição de expansão para altitude de $700km$, para o caso homogêneo.	58
Tabela 5 -	Dados para avaliar a condição de existência do logaritmo na altitude de $220km$, onde $t_c = 2667s$ e $\chi = 5$	59
Tabela 6 -	Dados para avaliar a condição de existência do logaritmo na altitude de $700km$, onde $t_c = 2980kms$ e $\chi = 5$	60
Tabela 7 -	Dados usados na equação (112) e cálculo da velocidade final (v_{xf}) para $v_e = 1,7km/s$ e $t_c = 2667s$	61
Tabela 8 -	Dados usados na equação (112) e cálculo da velocidade final (v_{xf}) para $v_e = 0,5km/s$. Altitude de $220km$ e $t_c = 2667s$. Δv_x são valores aproximados.	62
Tabela 9 -	Dados usados na equação (112) e cálculo da velocidade final(v_{xf}) para $v_e = 0,5km/s$. Altitude de $700km$ e $t_c = 2980s$. Δv são valores aproximados.	62
Tabela 10 -	Análise da condição de expansão para veículos espaciais na altitude de $220 km$	63
Tabela 11 -	Análise da condição de expansão para veículos espaciais na altitude de $700 km$, para o caso $r_0 = 300 km$	63
Tabela 12 -	Posição relativa final dos veículos espaciais para as mesmas condições iniciais. Empuxo aplicado na mesma direção de $\vec{v}_e$	72
Tabela 13 -	Posição relativa final dos veículos espaciais para condições iniciais diferentes na altitude de $700km$. Empuxo aplicado na mesma direção de $\vec{v}_e$	79

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVOS	14
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	15
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	16
3	PARÂMETROS DE PERFORMANCE DE VEÍCULOS ESPACIAIS	19
3.1	EQUAÇÃO DE TSIOLKOVSKY	19
3.2	EMPUXO E IMPULSO ESPECÍFICO	21
3.3	PROPULSORES	21
3.3.1	Propulsores Químicos	22
3.3.2	Propulsão Elétrica	22
4	EQUAÇÕES DE CLOHESSY-WILTSHIRE	24
4.1	EQUAÇÕES DA DINÂMICA DE RENDEZVOUS	24
4.2	EQUAÇÕES DA DINÂMICA RELATIVA PARA MANOBRAS EVASIVAS	26
4.3	DINÂMICA RELATIVA DE COLISÃO	29
4.4	MANOBRAS EVASIVAS: MODELO EXPONENCIAL PARA O DECAIMENTO DA MASSA DE COMBUSTÍVEL	33
5	EQUAÇÕES DE CLOHESSY-WILTSHIRE: MODELO LINEAR PARA VARIAÇÃO DE MASSA NAS MANOBRAS EVASIVAS DE VEÍCULOS ESPACIAIS	37
5.1	SOLUÇÃO PARTICULAR DO MODELO LINEAR	37
6	RESULTADOS	50
6.1	DINÂMICA DE COLISÃO E POSIÇÃO RELATIVA MÁXIMA	50
6.2	CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA, CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES EM SÉRIES E INCREMENTO NA VELOCIDADE DO VEÍCULO ESPACIAL	58
6.2.1	Trajetória de colisão	64
6.3	DINAMICA RELATIVA DE MANOBRAS DE EVASÃO: MODELO LINEAR PARA VARIAÇÃO DE MASSA DO COMBUSTÍVEL	67
7	CONCLUSÃO	82
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICE A: CURVAS DE DINÂMICA RELATIVA I	89

1 INTRODUÇÃO

A exploração do espaço de maneira freqüente só é possível graças aos foguetes que possuem empuxo elevado para vencer a força gravitacional da Terra e colocar objetos em órbita. A tecnologia dos foguetes já era conhecida pelos chineses por volta do século *VI d.C.* Eram muito usados em datas comemorativas e com o tempo foram transformados em armas de guerra. Mas, foi um cientista russo chamado Konstantin Tsiolkovsky (1857–1935) que, em 1903, apresentou a tese de que foguetes poderiam chegar ao espaço usando propelentes líquido. Já o americano Robert H. Goddard (1882 – 1945) realizou experimentos com foguetes no início do século *XX* e seu interesse baseava-se em como os foguetes atingiam altitudes maiores que os balões mais leve que o ar. Por meio dos seus testes, chegou à conclusão de que os foguetes conseguem ter maior eficiência no vácuo do que no ar e que foguetes com múltiplos estágios atingiriam altitudes ainda maiores. Dessa maneira seria possível atingir a velocidade necessária para escapar da força gravitacional da Terra. Porém, o grande marco da atividade humana no espaço viria com os estudos do engenheiro Sergei Pavlovitch Korolev (1907 – 1966) (PÔRTO, 2010). A partir de 1946, ele trabalhou no desenvolvimento de foguetes com capacidade de levar cargas ao espaço. Assim surgiu o Semiorca ou *R7*, um foguete com a capacidade de colocar uma massa de 1300 *kg* em órbitas baixas. Por apresentar excelentes resultados logo nos primeiros testes a Academia de Ciência da URSS decidiu, em 1956, usar o Semiorca para o lançamento de um satélite artificial chamado de Sputnik 1, cujo lançamento ocorreu em 4 de Outubro 1957 (WINTER; MELO, 2007). A partir deste feito histórico o homem foi desenvolvendo e aperfeiçoando tecnologias espaciais capazes não só de orbitar a Terra mas também de chegar a outros planetas.

A exploração espacial possibilitou a humanidade realizar diversos avanços tecnológicos tais como monitoramento do clima, comunicação, observações astronômicas e também aplicações militares. Todavia, a atividade espacial humana causou o aumento do número de objetos orbitando a Terra, contribuindo significativamente para o acúmulo de detrito espacial.

Objetos que orbitam a Terra sem função alguma tais como estágios de foguetes, resíduos de combustível de propulsão química, ferramentas que escapam das mãos dos astronautas, satélites artificiais fora de operação, meteoroides, entre outros, são considerados detritos espaciais (DE).

Os foguetes capazes de colocar satélites em órbita possuem vários estágios que vão sendo descartados na medida em que seu combustível se esgota. Enquanto os estágios

dos foguetes vão sendo descartados são desprendidos lascas de tinta, pequenos parafusos e os resíduos de combustível acabam virando pequenos detritos.

O sistema de propulsão dos foguetes que usam propelentes sólidos ("Solid Rocket Motors- SRM) contribuem significativamente para geração de detritos. Estes motores podem incluir até 20% de partículas de alumínio, a fim de estabilizar a combustão e o óxido de alumínio gerado durante o empuxo representa 30% dos produtos gerados pela queima de propelente. Por exemplo, em 1997 foram ejetadas 16 toneladas de óxido de alumínio devido à atividade de motores do tipo SRM. A combustão usada para estabilizar a órbita ejeta partículas com baixa velocidade, de tamanhos entre 1 a 2 centímetros e são compostas por uma mistura de alumínio e óxido de alumínio. A maior parte dos DE da ordem de centímetros são oriundos do uso de SRM (ESA, 2006).

Um objeto de 10 *cm* não é muito grande quando comparado com as dimensões de um satélite artificial. Porém, um objeto pequeno, orbitando em torno da Terra, viajando a uma velocidade da ordem de *km/s*, tem energia suficiente para danificar a Estação Espacial Internacional, liberando o oxigênio, destruindo aparelhos eletrônicos, perfurar o tanque de combustível de uma nave ou a roupa de um astronauta, fatos que comprometeriam toda missão espacial (PENG, 2015).

Normalmente, DE são detectados e monitorados usando radares e telescópios. No entanto, não é possível detectá-los aqui da Terra quando são muito pequenos (menores que 10 *cm*). Para este fim, entre Abril de 1984 e Janeiro de 1990, a NASA lançou o "Long Duration Exposure Facility"(LDEF) para recolher informações sobre DE que não podem ser rastreados pelos radares na superfície da Terra. Esse satélite cilíndrico tinha dimensões de 9 *m* de comprimento e 4,3 *m* de diâmetro, foi coberto com placas planas e ficou em órbita por 5,7 anos. Quando foi recuperado pelo ônibus espacial Columbia, toda a sua superfície exterior de cerca de 130 *m*² foi exaustivamente examinada para verificar os danos causados pelos impactos de micrometeoroides e DE. Verificou-se mais de 4.600 impactos, de tamanhos que variavam de 0.3 *mm* a 5 *mm* (HALL, 2014).

A fragmentação de objetos em órbitas de operações espaciais terrestres é outro fator que contribui para o aumento de DE. Por exemplo, caso ocorra uma colisão entre dois satélites artificiais, os fragmentos gerados colidiriam entre si e produziram mais fragmentos, gerando um efeito cascata, conhecido também como efeito Kessler (KESSLER; COUR-PALAIS, 1978).

Um exemplo disso ocorreu em 24 de julho de 1996, quando foi registrado a colisão do microsatélite Cerise que na ocasião foi atingido por um pedaço de estágio do foguete Ariane que explodiu dez anos antes (JESUS et al., 2012). Em 10 de fevereiro de 2009, um satélite militar russo (Cosmos 2251) e outro de comunicação dos Estados Unidos (Iridium 33) colidiram a cerca de 780 km acima do território da Sibéria, na Rússia. Esta é a primeira colisão já registrada entre satélites artificiais (HALL, 2014).

Outro caso de fragmentação de DE ocorreu em 2007, para testar uma arma anti-satélite a China destruiu o próprio satélite meteorológico que estava fora de operação. Estima-se

que esse episódio gerou 150000 fragmentos maiores que 1cm (PENG, 2015).

Os acidentes citados servem de alerta para que seja desenvolvida uma política internacional que vise a busca de meios para explorar o espaço sem comprometer o futuro das missões espaciais.

As órbitas LEO (Low-altitude Earth Orbit), cujo a altitude vai de 160 *km* a 2000 *km*, e GEO (Geostationary Earth Orbit), com altitude acima de 35800 *km*, são as regiões onde há a maior população de objetos artificiais, mas temos também objetos na região intermediária a essas duas órbitas conhecida como órbita MEO (Medium Earth orbit). Há um esforço por parte de algumas agências espaciais em adotar medidas para minimizar a geração de DE nessas regiões. A Inter-Agency Space Debris Coordination Committee (IADC), por exemplo, tem a finalidade de trocar informações sobre a exploração e rastreamento de DE. Porém, não haverá resultado significativo se somente uma nação aderir medidas preventivas, pois o espaço é um domínio público e deve ser protegido por todos. O problema do DE ainda se perpetuará por um longo tempo, até que os estudos para modificar as técnicas utilizadas na exploração espacial sejam aplicáveis (ESA, 2006).

Diante do problema exposto e dado o fato de não existir uma tecnologia para limpar o espaço, é necessário que os veículos espaciais sejam capazes de realizar manobras de evasão para evitar colisões com o lixo espacial, evitando possíveis danos que venham a inviabilizar a missão espacial e a perda de uma quantidade significativa de dinheiro.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é estudar o problema da viabilidade de manobras orbitais evasivas de veículos espaciais, quando há risco iminente de colisão com DE. O estudo da dinâmica relativa entre veículo e DE se dará por meio das soluções analíticas das equações de Clohessy-Wiltshire (1960). Estas equações quando solucionadas para o caso homogêneo, nos permitem impor condições iniciais que irão garantir que haverá colisão ao final de um certo intervalo de tempo. Estas condições iniciais serão catalogadas e quando um veículo se enquadrar dentro destas condições iniciais de colisão, ele poderá acionar o sistema de propulsão, dando início à manobra de evasão.

Originalmente essas equações diferenciais são chamadas de equações de Hill no caso não homogêneo e no caso homogêneo quando se trata de órbitas circulares são chamadas de equações de Clohessy-Wiltshire. Jesus et al. (2012) foi o pioneiro em encontrar uma solução analítica para as equações de Clohessy-Wiltshire para o caso particular usando o modelo exponencial para o decaimento da massa de combustível e aplicou essas soluções na dinâmica de manobra evasiva. Com o acionamento da propulsão a dinâmica relativa entre veículo espacial e DE foi dada pelas soluções dessas equação, obtendo êxito no escape da colisão.

Nesse trabalho iremos solucionar as equações de Clohessy-Wiltshire admitindo que a massa de combustível do veículo decaia linearmente com o tempo. Feito isto, desejamos que ao final do intervalo de tempo no qual ocorreria colisão, as soluções para o caso

não-homogêneo, nos forneça uma posição relativa em que o veículo esteja a uma certa distância do DE, caracterizando uma manobra evasão.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Organizamos este trabalho da seguinte forma: No Capítulo 1, apresentamos uma introdução onde dissertamos um pouco da história da exploração espacial até chegar no problema da ameaça dos detritos espaciais. No Capítulo 2 encontram-se registros bibliográficos de autores que preveram o aumento dos detritos espaciais ao longo dos anos e também registramos trabalhos que tratam das equações de Clohessy-Wiltshire. No Capítulo 3 mostramos alguns conceitos e equações que são de fundamental importância nos testes das soluções do modelo linear e interpretação dos resultados. No Capítulo 4, apresentamos um resumo do trabalho de Clohessy-Wiltshire para dinâmica de rendezvous, mostramos também que essas mesmas equações podem ser adaptadas para o problema de manobras evasivas, além disso fizemos um breve resumo do trabalho de Jesus et al. (2012) onde as soluções encontradas são usadas para realizar manobras de evasão. No Capítulo 5 mostramos o método para solucionar as equações de Clohessy-Wiltshire para o caso particular e também as integrais que foram resolvidas usando o modelo linear para encontrar as soluções dessas equações. No Capítulo 6 mostramos os resultados onde buscamos condições iniciais convenientes para realizar manobras evasivas e investigamos as limitações do modelo linear, mostramos também manobras evasivas de alguns veículos espaciais. E no Capítulo 7 está a conclusão.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A crescente necessidade da humanidade de explorar o espaço, provocou o aumento de DE na órbita da Terra. Se a quantidade de DE continuar crescendo, o futuro das missões espaciais estará comprometido, pois esses objetos orbitam com velocidades da ordem de km/s , e no caso de uma colisão com um satélite, a uma velocidade relativa dessa magnitude, ambos os objetos seriam submetidos a uma pressão instantânea muito alta, conseqüentemente o aquecimento devido às ondas de choque e a possível vaporização na região do impacto, resultaria num provável dano catastrófico no satélite (KESSLER; COUR-PALAI, 1978). Em janeiro de 1987, o "US Space Command", usando radar de comprimento de onda, já estava rastreando cerca de 6300 detritos catalogados com tamanhos a partir de 10 cm (KESSLER, 1989). Somando-se a isso ainda existe outro problema capaz de agravar ainda mais a situação. A possibilidade de ocorrer impactos entre os fragmentos resultantes de uma colisão. Isso acabaria dando origem a DE cada vez menores e difíceis de serem detectados (KESSLER, 1991). Cordelli; Farinella; Rossi (1998) usando simulações numéricas mostraram o efeito da fragmentação em uma curva, onde o número de objetos maiores que 1 cm crescem em função do tempo em anos. Essa curva mostra que entre os anos 2000 a 2500 o número de objetos é quase linear nos primeiros 100 anos e depois disso esse crescimento passa a ser exponencial.

A concentração de fragmentos em uma região bem definida do espaço constitui-se uma nuvem de DE. Devido às leis do movimento orbital e aos processos físicos envolvidos em uma explosão ou em uma colisão, a nuvem não se espalha uniformemente, de forma que a densidade espacial pode ser maior em alguns locais do que em outros. O centro da nuvem move-se ao longo de uma órbita bem definida, que pode até ser igual à do objeto que lhe deu origem. No transcorrer do tempo ela evolui até limites máximos de altitude e inclinação (SANTOS, 2007). Embora as perturbações da Lua e do Sol sejam capazes de reduzir a vida orbital de alguns desses objetos, o único mecanismo capaz de remover objetos realmente importantes é o arrasto atmosférico. Entretanto, sua eficácia depende da densidade do ar, da massa e da área dos objetos espaciais, por isso não é eficiente para remover objetos que estejam em altitudes acima de 650 km em relação à superfície da Terra.

Devido à alta velocidade que os DE se encontram, a tarefa de remover esses objetos do espaço não é um pequeno desafio, mas algumas tecnologias para limpar o espaço já estão sendo estudadas para serem aplicadas no futuro. Os estudos para capturar esses objetos incluem o uso de um sistema de rede, arpão e transferência do momento, usando jatos de

plasma, fazendo com que o objeto alvo caia na Terra (WORMNES et al., TADT). Outra solução que poderia ser estudada é a possibilidade de usar braços mecânicos, como o utilizado pelo satélite ETS-VII.

Porém, ainda existe o problema político. Por exemplo, uma agência espacial americana poderia capturar um satélite desativado norte coreano, ou vice-versa? O país que desenvolver uma tecnologia capaz de limpar o espaço estaria disposto a tornar essa tecnologia acessível a agências espaciais de outras nações? O desenvolvimento de novas tecnologias pode exigir que os governos e o setor privado trabalhem juntos. Sem a implementação de políticas e medidas de exploração espacial que minimize a formação de DE, os riscos para as operações espaciais em órbitas próximas da Terra continuarão a subir (LIOU; JOHNSON, 2006). Em 2014, a receita global de satélites totalizou U\$ 195.2 bilhões, porém esse fluxo de atividade econômica está ameaçado pela concentração de DE. Outras atividades no ramo da economia espacial também estão potencialmente ameaçados, como por exemplo vôos espaciais para pessoas que não são astronautas e vôos em naves não orbitárias (vôos que atingem o espaço mas o veículo não permanecem em órbita da Terra), que produziram em 2013 uma receita de U\$ 320 bilhões. O turismo espacial e a mineração de asteróides também serão afetados se o acesso à órbita ficar muito complicado (SALTER, 2015). Enquanto não aparece soluções políticas e tecnológicas economicamente viáveis, o que resta aos veículos espaciais é realizar manobras de evasão. Mas para isso, faz-se necessário um estudo da dinâmica relativa entre veículo espacial e DE.

Sabemos que na teoria elíptica, as coordenadas retangulares de um planeta em relação a um corpo central são dadas em função dos semi-eixos, de elementos orbitais e da anomalia média. Porém, os elementos orbitais sofrem alterações devido à forças de perturbação. Com o intuito de estudar a dinâmica da Lua, Hill (1878), elaborou um estudo a partir de um referencial fixado no centro de gravidade da Terra e obteve equações diferenciais que possibilitaram o estudo do movimento da Lua relativo a Terra, sem a dependência de elementos orbitais. Essas equações são conhecidas como equações de Hill. Segundo Roa; Pelaez (2014), esse foi a primeira formulação formal sobre o estudo de movimento relativo.

Clohessy; Wiltshire (1960), formularam um estudo para aplicação em manobra de rendezvous, essa manobra consiste na união de dois objetos em órbita espacial. Considerando um referencial centrado num corpo que descreve órbita circular em torno da Terra e usando expansão em série, eles linearizaram as equações de Hill. Assim, após essas modificações obtiveram as equações de Clohessy-Wiltshire. A posição relativa de um objeto em relação ao corpo que se encontra em órbita circular é dado pelas soluções analíticas das equações de Clohessy-Wiltshire. O sucesso dessa manobra ocorre quando a posição relativa entre o corpo em órbita circular e o objeto é igual a zero.

Durante a missão Apollo, o retorno do Módulo de Exploração Lunar para o Módulo de Comando de Serviço exigiu-se a realização de manobra de acoplamento. Outro exemplo que podemos citar foi a montagem da Estação Espacial Internacional e nesse caso

foram realizadas várias manobras de acoplamento. Devemos observar nesses exemplos que é mais conveniente estudar seus movimentos relativos em vez de seus movimentos individuais (KAPLAN, 1976).

As equações de Clohessy-Wiltshire são muito estudadas para obter posição relativa em relação à uma órbita elíptica. Conforme o problema a ser resolvido por elas, as equações e suas soluções são transformadas por meio de matrizes. Yamanaka; Ankersen (2002) apresentam uma matriz transformação para descrever o movimento relativo dado pelas equações de Clohessy-Wiltshire em termos de elementos orbitais de uma órbita elíptica arbitrária. Schaub (2004) obteve soluções em termos da anomalia verdadeira. Gurfil (2005) desenvolveram uma manobra de acoplamento com base na combinação de energia para minimizar o consumo de combustível. Zanetti (2011) usa uma matriz transformação para obter as equações em coordenadas que dependem da direção da linha de aproximação, coordenada radial, e outra coordenada contida no plano perpendicular a essa linha, coordenada transversal. Lee; Cochran; Jo (2007) realizaram os cálculos da posição relativa e da velocidade por integração numérica. Russell; Lantoine (2012) apresentam uma estratégia de solução numérica para o problema de movimento relativo, eles incorporam no modelo as perturbações da não esfericidade da Terra, a pressão de radiação solar e a perturbação do terceiro corpo. Outra modelagem da dinâmica relativa é baseada na metodologia hamiltoniana, usando coordenadas canônicas. A vantagem dessa abordagem é a possibilidade incluir o efeito do J_2 no movimento relativo em órbitas equatoriais (KASDIN; GURFIL; KOLEMEN, 2005).

Por outro lado, as equações de Clohessy-Wiltshire podem ser usadas para estudar manobras evasivas. O primeiro trabalho com essa perspectiva foi realizado por Jesus et al. (2012), que solucionou as equações de Clohessy-Wiltshire adotando um modelo exponencial para o decaimento da massa de combustível do veículo. Essa solução foi obtida colocando-se a força de propulsão atuando no veículo que se encontra em órbita circular e centrado no sistema de referência que gira em torno da Terra, a partir do qual é dada a posição relativa entre o veículo e o detrito espacial. Mantendo-se o sistema de propulsão acionado, no instante em que ocorreria colisão é observado afastamento efetivo entre o veículo e o detrito espacial. Em Jesus; Sousa (2015) enfatizou-se simulações computacionais para o caso em que não há acionamento de propulsão. Neste trabalho foram produzidos mapas de condições iniciais de colisão para órbitas em MEO, LEO e GEO. Essas condições garantem que ao final de um dado intervalo de tempo ocorra colisão entre veículo e detrito espacial, com velocidade relativa alta o suficiente para danificar o veículo. Outro estudo sobre manobras evasivas foi realizado por Sousa (2015), que incluiu o efeito do arrasto atmosférico na dinâmica relativa.

Considerando a existência de um problema tão grave como o do lixo espacial, vemos que a aplicação do estudo da dinâmica relativa em manobras evasivas de veículos espaciais ainda é muito escassa.

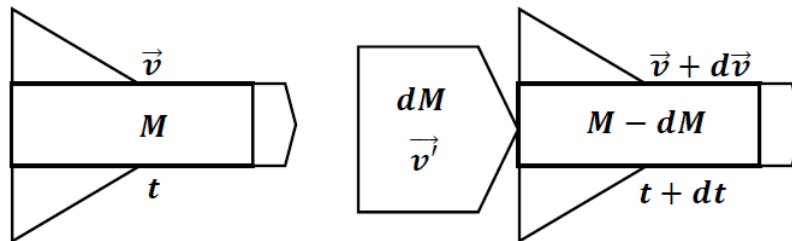
3 PARÂMETROS DE PERFORMANCE DE VEÍCULOS ESPACIAIS

Neste capítulo estudaremos os principais parâmetros de desempenho de propulsão. As equações e conceitos apresentados aqui foram usados nos testes e na interpretação dos resultados da dinâmica relativa fornecida pelo modelo linear.

3.1 EQUAÇÃO DE TSIOLKOVSKY

Consideremos o movimento de um foguete acelerando no espaço sendo observado de um referencial inercial na Terra. Admitindo que ele não esteja sujeito a força da gravidade e nem a força de arrasto atmosférico, num dado instante t sua massa é M e sua velocidade $\vec{v}$. Após um intervalo de tempo dt sua massa passa a ser $M - dM$ com velocidade $\vec{v} + d\vec{v}$, onde dM representa a massa expelida com velocidade $\vec{v}'$, devido à queima do propelente. Essa situação é ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Ilustração da queima do combustível de um veículo espacial, visto por um referencial inercial na Terra.



Fonte: Produção do próprio autor.

Supondo ainda que o sistema foguete e massa expelida seja um sistema fechado e isolado, o momento linear $\vec{P}$ é conservado no intervalo de tempo dt :

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad (1)$$

em que os índices i e f indicam, respectivamente, os valores no início e no fim do intervalo de tempo dt .

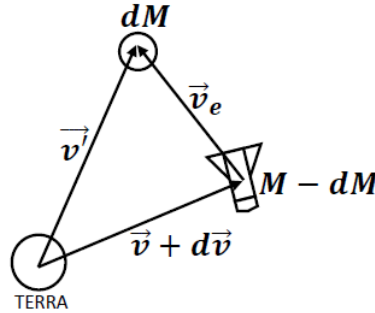
Então temos:

$$M\vec{v} = dM\vec{v}' + (M - dM)(\vec{v} + d\vec{v}) \quad (2)$$

O primeiro termo do lado direito representa o momento linear de dM e o segundo termo representa o momento linear do foguete no fim do intervalo dt .

Observando a Figura 2 podemos escrever $\vec{v}'$ em função de $\vec{v}_e$ que representa a velocidade de dM em relação ao foguete ou velocidade de exaustão.

Figura 2: Vetor $\vec{v}'$ sendo representado pela soma dos vetores $\vec{v}_e$ e $\vec{v} + d\vec{v}$.



Fonte: Produção do próprio autor.

$$\vec{v}' = \vec{v} + d\vec{v} + \vec{v}_e \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2) obtemos:

$$d\vec{v} = -\vec{v}_e \frac{dM}{M} \quad (4)$$

Integrando (4) obtemos a equação de Tsiolkovsky:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_e \ln \frac{M_i}{M_f} \quad (5)$$

A equação (5) relaciona a quantidade de massa de propelente necessária para que o foguete tenha o incremento Δv na sua velocidade final.

3.2 EMPUXO E IMPULSO ESPECÍFICO

Em termos da taxa de variação da massa de propelente $\dot{m}$, o empuxo $\vec{T}$ é expresso simplesmente por:

$$\vec{T} = \dot{m}\vec{v}_e \quad (6)$$

Segundo Chobotov (2002) no estudo de manobras impulsivas, o empuxo é dividido em três categorias, de acordo com o valor da razão entre os módulos do empuxo ($|\vec{T}| = T$) e do peso (W):

- Alto empuxo ($T/W \approx 0,5 - 1,0$)
- Baixo empuxo ($T/W \approx 10^{-2} - 10^{-1}$)
- Empuxo muito baixo ($T/W \approx 10^{-5}$)

Já o impulso específico (I) é o tempo necessário para acelerar o satélite, considerando o uso de um determinado sistema de propulsão, na condição gravitacional da superfície da Terra. Ele é medido pela razão entre o módulo do empuxo e a taxa de peso por segundo:

$$I = \frac{T}{\dot{m}g} = \frac{v_e}{g}, \quad (7)$$

onde g é a aceleração da gravidade da Terra.

O impulso específico pode ser interpretado também como sendo a medida do tempo no qual o veículo espacial pode ser acelerado com a utilização de um dado tipo de propelente. A equação (7) nos diz que, quanto maior o impulso específico de um sistema de propulsão, menor será a taxa de variação de massa do propelente necessário para produção de empuxo e a aceleração do sistema poderá ser mantida por mais tempo. Na seção seguinte mostraremos alguns tipos de propulsores com seus respectivos valores de impulso específico e velocidade de exaustão.

3.3 PROPULSORES

A aceleração de veículos espaciais pode ser implementada por diferentes tipos de propulsores, cada um com suas vantagens, desvantagens e indicações para missões espaciais específicas.

3.3.1 Propulsores Químicos

Sistemas de propulsão química transportam o combustível e o comburente (oxidante) gerando a propulsão. Esse sistema de propulsão não depende de meios externos para que ocorra a combustão e são geralmente utilizados tanto para colocar veículos espaciais em órbita quanto para transportar mísseis a altas velocidades. O sistema de propulsão química é classificado de acordo com suas fases ou estados físicos dos propelentes: sólidos, líquidos híbridos (SOUZA, 2006). Os propelentes químicos mais comuns estão resumidos na Tabela 1.

Tabela 1: Valores típicos de velocidades de exaustão de foguetes químicos

Propelente	v_e (km/s)
Monopropelentes líquido	1,7-2,9
Propelente sólido	2,1-3,2
Bipropelentes líquidos (combustível oxidante)	2,9-4,5
Outros bipropelentes	4,0-6,0
Fonte: Jahn (1968).	

Monopropelentes são substâncias que se decompõem quando aquecidas ou quando entram em contato com a superfície de um catalisador, gerando gases a temperaturas elevadas. Os propulsores que usam esse tipo de substância produzem empuxo a partir de um único tipo de propelente. Já os propulsores que usam bipropelentes, o empuxo é gerado pela reação química entre propelentes diferentes (HENNEMANN; ANDRADE; SOUSA COSTA, 2014). Os propelentes sólidos são formados por diversas substâncias tais como o perclorato de amônio (oxidante granular), alumínio em pó (combustível) e polibutadieno terminado por hidroxila, ou HTPB (um combustível que é líquido durante a mistura e que polimeriza em um aglutinante emborrachado durante a cura) (BIBLARZ; PRICE, 2017).

3.3.2 Propulsão Elétrica

Sistemas de propulsão elétrica podem apresentar maior razão entre a carga útil e a massa total inicial. Além disso, eles são uma forma limpa de explorar o espaço, pois não deixam resíduos como óxido de alumínio. Outra vantagem desta tecnologia é a redução de combustível, o que pode alongar o tempo de vida útil dos satélites. Os valores de empuxo alcançados por esses propulsores são menores que os propulsores químicos, mas fornecem maior velocidade de exaustão e conseqüentemente, alcançam elevados impulsos específicos. Devido ao baixo empuxo os propulsores elétricos permitem a realização de manobras com maior precisão e controle quando comparado com propulsores químicos (RAMOS, 2009). Para efeito de comparação a Tabela 2 mostra valores de impulso específico de alguns tipos de propulsores, químicos e elétricos.

Tabela 2: Impulso específicos típicos de propulsores

Propulsor	Impulso Específico (s)	Propelente
Gás frio	50-75	Vários
Monopropelente químico	150-225	N_2H_4
Bipropelente químico	300-450	H_2O_4
Resistojet	300	N_2H_4 monoprop.
Arcjet	500-600	N_2H_4 monoprop.
Ion	2500-3600	Xenon
Hall	1500-2000	Xenon
PPTs	850-1200	Telflon

Fonte: Goebel; Katz (2008).

Assim finalizamos esse capítulo onde os dados das tabelas foram usados para cálculos de velocidades de exaustão e os conceitos usados para interpretar os resultados fornecidos pelo modelo linear.

4 EQUAÇÕES DE CLOHESSY-WILTSHIRE

Nesse capítulo faremos um resumo do estudo das equações de Clohessy-Wiltshire, mostraremos que essas mesmas equações podem ser usadas em manobras evasivas. Exibiremos alguns resultados fornecidos pelas soluções do caso homogêneo e pelas soluções do modelo exponencial para o decaimento de massa do combustível.

4.1 EQUAÇÕES DA DINÂMICA DE RENDEZVOUS

Em 1960, Clohessy-Wiltshire publicaram um trabalho que tinha como objetivo construir um satélite em órbita terrestre sem o auxílio de uma missão espacial tripulada. O desafio nesse tipo de missão é fazer com que as partes do satélite unam-se sem colidir. Para isso inicialmente é posto um satélite em órbita circular, esse satélite é chamado de satélite de controle. Ele é rastreado por um radar em solo terrestre que é o responsável por transmitir os elementos orbitais necessário para que ocorra a manobra de rendezvous.

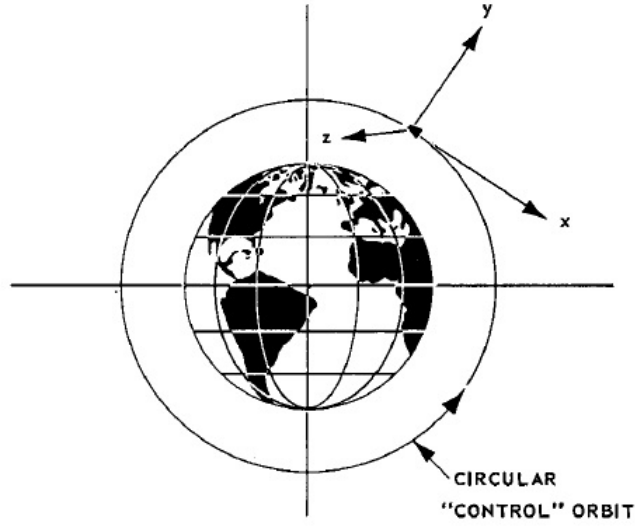
Para analisar o problema um referencial girante (Figura 3) é colocado no centro de massa do satélite de controle e a partir do estudo do movimento relativo é possível obter equações diferenciais que, quando solucionadas, possibilitam determinar o movimento relativo entre o satélite de controle e as partes que irão juntar-se a ele. Essas partes são denominadas de satélites de rendezvous, que são lançados no espaço em órbita elíptica.

O radar na Terra interage constantemente com os satélites, auxiliando nos cálculos e ajustes de coordenadas de posição e velocidade, para que o acoplamento ocorra quando o apogeu da órbita elíptica for aproximadamente igual ao raio da órbita circular. As soluções das equações diferenciais permitem realizar o ajuste das velocidades relativas com as quais os satélites irão se encontrar. Esse ajuste é obtido pelo acionamento de um sistema de propulsão presente no satélite de rendezvous.

Para essa dinâmica o referencial girante é posto de forma que y esteja apontando na direção do centro da Terra para o satélite de controle, z é perpendicular ao plano da órbita circular e mesma direção do momento angular. O eixo x é tangente à órbita, sendo que sua direção positiva é contrário à direção do movimento.

No sistema de coordenadas (x, y, z) as equações de movimento relativo são:

Figura 3: Esquema mostra o sistema de coordenada dos satélites.



Fonte: Clohessy; Wiltshire (1960).

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = f_x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = f_y \\ \ddot{z} + \omega^2 z = f_z \end{cases} \quad (8)$$

em que f_x , f_y e f_z representam as componentes da força de propulsão do satélite de rendezvous. Em cada instante o módulo do vetor posição relativa ($\vec{r}$) deverá obedecer à seguinte condição:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 322km \quad (9)$$

O valor $322km$ é obtido a partir do conhecimento das limitações de tecnologias de comunicação empregadas no ano de 1960, tais como tempo de resposta entre os radares da Terra e satélites e também do rastreo via infra-vermelho.

A condição (9) também garante que os satélites obedeçam à condição de rendezvous dada por (10), ela é imposta para manter os satélites em órbitas próximas. A consequência da obediência a essa condição é que obtém-se velocidades relativas no instante do acoplamento muito próximas de zero, o que evita uma colisão com velocidade relativa capaz de danificar os satélites.

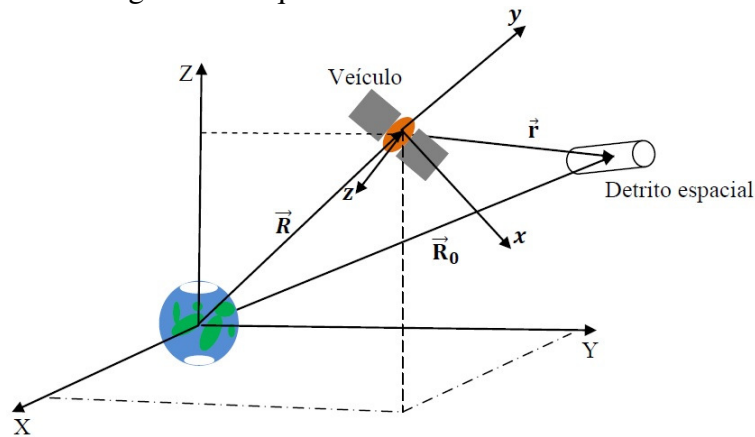
$$\frac{\vec{r}}{\bar{R}} \ll 1 \quad (10)$$

4.2 EQUAÇÕES DA DINÂMICA RELATIVA PARA MANOBRAS EVASIVAS

Em vez de manobra rendezvous, agora vamos adaptar as equações de Clohessy-Wiltshire para manobras evasivas. O satélite de controle será substituído por um veículo espacial, sob o qual agirá uma força de propulsão. Já o satélite de rendezvous será substituído por um detrito espacial. Sendo assim, com o acionamento do sistema de propulsão, as soluções das equações (8) nos fornecerá a posição relativa entre esses objetos, onde desejamos que ao final de um intervalo de tempo essa posição relativa seja diferente de zero, condição que caracteriza a manobra evasiva.

A Figura 4 mostra o referencial com coordenadas (x, y, z) centrado no veículo espacial, que realiza movimento circular uniforme em relação à Terra. Os vetores $\vec{R}_0$ e $\vec{R}$ são, respectivamente, os vetores posição do detrito espacial e do veículo, medidos a partir do referencial inercial (X, Y, Z) com origem no centro na Terra. O vetor posição em relação ao referencial girante é dado por $\vec{r}$. Com base nessas informações vamos adaptar as equações (8) da manobra rendezvous para manobra evasiva.

Figura 4: Esquema da dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor.

A partir do estudo do movimento relativo, os vetores aceleração $\ddot{R}_0$ e $\ddot{R}$ no referencial inercial relacionam-se pela equação (CURTIS, 2013):

$$\ddot{R}_0 = \ddot{R} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel.} + \vec{a}_{rel.} \quad (11)$$

onde ω é a velocidade angular do veículo. O termo $2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel.}$ é a aceleração de Coriolis e o termo $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ corresponde à aceleração centrípeta. Como a órbita do referencial girante é circular temos:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k} \quad (12)$$

Dado o fato de que $\vec{R}_0 = \vec{R} + \vec{r}$ e $\vec{\omega}$ ser constante, a equação (11) nos permite escrever:

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + (2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel.}) + \vec{a}_{rel.} \quad (13)$$

Os vetores posição ($\vec{r}$), velocidade ($\vec{v}_{rel.}$) e aceleração ($\vec{a}_{rel.}$) do lixo espacial em relação ao veículo são dadas por:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (14)$$

$$\vec{v}_{rel.} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} \quad (15)$$

$$\vec{a}_{rel.} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \quad (16)$$

Com isso, efetuando-se os cálculos dos produtos vetoriais em (13) obtemos:

$$(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}) = \ddot{\vec{r}} + (\omega^2 x + 2\omega\dot{y})\hat{i} + (\omega^2 y - 2\omega\dot{x})\hat{j} \quad (17)$$

As equações de movimento do veículo e do detrito espacial, medidos em relação à Terra, são obtidos a partir da 2ª Lei de Newton. Essas equações depois de linearizadas nos permitem obter uma representação para $\ddot{\vec{r}}$.

A equação de movimento do veículo é dada por:

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{-\mu\vec{R}}{R^3} - \vec{f} \quad (18)$$

onde vetor $\vec{f} = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}$ representa força de propulsão por unidade de massa e $\vec{R} = R\hat{j}$.

Analogamente à equação (18) obtemos para o detrito espacial a equação (19):

$$\ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}} = \frac{-\mu(\vec{R} + \vec{r})}{R_0^3} \quad (19)$$

e substituindo (18) em (19) tem-se:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-\mu(\vec{R} + \vec{r})}{R_0^3} + \frac{\mu\vec{R}}{R^3} + \vec{f} \quad (20)$$

Podemos ainda simplificar (20). Para isso, notamos que

$$R_0^2 = \vec{R}_0 \cdot \vec{R}_0 = (\vec{R} + \vec{r}) \cdot (\vec{R} + \vec{r}) = R^2(1 + \frac{2\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} + (\vec{r}/\vec{R})^2) \quad (21)$$

Mas podemos escrever

$$R_0^{-3} = (R_0^2)^{-3/2} = R^{-3}(1 + \frac{2\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} + (\vec{r}/\vec{R})^2)^{-3/2} \quad (22)$$

Desprezando $(\vec{r}/\vec{R})^2$ podemos expandir em série de Taylor o termo gravitacional R_0^{-3} obtendo:

$$R_0^{-3} = \frac{1}{R^3} - \frac{3(\vec{R} \cdot \vec{r})}{R^5} \quad (23)$$

onde negligenciamos todas as potências maiores que um.

Substituindo (23) em (20) temos:

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{-\mu\vec{r}}{R^3} + \frac{3\mu(\vec{R} \cdot \vec{r})\vec{R}}{R^5} + \vec{f} \quad (24)$$

onde $\frac{\vec{r}}{R^5}$ foi desprezado.

Escrevendo $\omega^2 = \mu/R^3$ e efetuando o produto escalar na equação (24) obtemos:

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2\vec{r} + 3\omega^2 y \hat{j} + \vec{f} \quad (25)$$

Substituindo (25) em (17) encontramos a seguinte representação para a aceleração relativa:

$$(\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}) = (2\omega\dot{y} + f_x)\hat{i} + (3\omega^2 y - 2\omega\dot{x} + f_y)\hat{j} + (-\omega^2 z + f_z)\hat{k} \quad (26)$$

Finalmente obtemos as equações de Clohessy-Wiltshire, organizando (26) da seguinte forma:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = f_x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 y = f_y \\ \ddot{z} + \omega^2 z = f_z \end{cases} \quad (27)$$

Assim mostramos que as equações de Clohessy-Wiltshire para manobras rendezvous também podem ser usadas para realizarmos manobras evasivas, pois o fato de colocarmos o propulsor no veículo espacial não altera as equações.

4.3 DINÂMICA RELATIVA DE COLISÃO

Na ausência da força de propulsão temos

$$f_x = f_y = f_z = 0$$

Isso significa que o satélite está sujeito somente à força gravitacional da Terra e que a posição relativa em relação ao detrito espacial será dada pela solução das equações (27) para o caso homogêneo. Essas equações podem ser resolvidas facilmente com condições iniciais no tempo (t) igual a zero dadas por $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ e $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$ obtendo-se

$$x(t) = \left(\frac{4\dot{x}_0}{\omega} - 6y_0 \right) \sin \omega t - \frac{2\dot{y}_0}{\omega} \cos \omega t + (6\omega y_0 - 3\dot{x}_0) t + \left(x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\omega} \right) \quad (28)$$

$$y(t) = \left(\frac{2\dot{x}_0}{\omega} - 3y_0 \right) \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t + \left(4y_0 - \frac{2\dot{x}_0}{\omega} \right) \quad (29)$$

$$z(t) = z_0 \cos \omega t + \frac{\dot{z}_0}{\omega} \sin \omega t \quad (30)$$

onde x_0 , y_0 e z_0 são componentes da posição inicial relativa e $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ e $\dot{z}_0$ são componentes da velocidade inicial relativa. O módulo da posição relativa (r) em cada instantes é dada por

$$r = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} \quad (31)$$

No instante de colisão, que chamaremos de tempo de colisão (t_c), temos $x(t_c) = y(t_c) = z(t_c) = 0$. Isso significa que os centros das massas do veículo e detrito espacial estão coincidindo na origem do referencial girante. Com essas condições podemos encontrar as componentes da velocidade inicial relativa $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ e $\dot{z}_0$, dadas pelas equações (32-34), que no instante t_c chamamos de componentes da velocidade de colisão.

$$\dot{y}_0 = \frac{2\dot{x}_0[1 - \cos\omega t_c] - \omega y_0[4 - 3\cos\omega t_c]}{\sin\omega t_c} \quad (32)$$

$$\dot{x}_0 = \frac{[6y_0(\sin\omega t_c - \omega t_c) - x_0]\omega \sin\omega t_c + 2\omega y_0[4 - 3\cos\omega t_c](1 - \cos\omega t_c)}{(4\sin\omega t_c - 3\omega t_c)\sin\omega t_c + 4[1 - \cos\omega t_c]^2} \quad (33)$$

$$\dot{z}_0 = -\frac{z_0\omega \cos\omega t_c}{\sin\omega t_c} \quad (34)$$

O módulo da velocidade relativa de colisão é dado por

$$V_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2} \quad (35)$$

As equações (32-34) garantem que haverá colisão para qualquer valor de t_c diferente de zero e declaram que os números de estados que o veículo e o detrito espacial podem assumir são infinitos. Devido a limitações tecnológicas o número de estados será reduzido consideravelmente. Uma das limitações é a capacidade de detectar a posição inicial dos detritos em relação ao veículo e também a possibilidade de obter velocidades relativas de colisões realmente típicas de colisões com os detritos espaciais. O estudo de algumas condições iniciais de colisão foram estudadas computacionalmente por Jesus et al. (2012) adotando uma estratégia, chamaremos essa estratégia de Estratégia I, que segue os seguintes passos

Passo 1 Assume-se que é possível detectar em torno do veículo um detrito a uma dada posição inicial relativa ($r(0) = r_0$), escreve-se x_0 , y_0 e z_0 como sendo as componentes de r_0 em coordenadas esféricas, equação (36), com varredura angular no plano igual a $0 \leq \theta < 2\pi$ e no espaço igual a $0 \leq \phi < \pi$.

$$\begin{cases} x_0 = r_0 \sin\phi \cos\theta \\ y_0 = r_0 \sin\phi \sin\theta \\ z_0 = r_0 \cos\phi \end{cases} \quad (36)$$

Passo 2 Calculando o valor de ω de acordo com a região orbital (LEO, MEO e GEO) em que o veículo se encontra e variando-se diversos tempos de colisão no intervalo $1 \leq t_c \leq 10^6$ ao passo de um segundo. Esses tempos de colisão são escolhidos de forma que não ultrapasse o valor do período orbital do veículo.

Passo 3 Atribuindo um valor a r_0 na equação (36) cada combinação de θ e ϕ fornecerá valores de x_0 , y_0 e z_0 que são substituídos nas equações (32-34) e nas equações (28-30) para calcular V_0 no instante t_c e r que varia no intervalo de tempo igual a $0 \leq t \leq t_c$. O valor da posição relativa máxima (r_{max}) obedece à seguinte condição

$$\frac{r_{max}}{R} < 1 \quad (37)$$

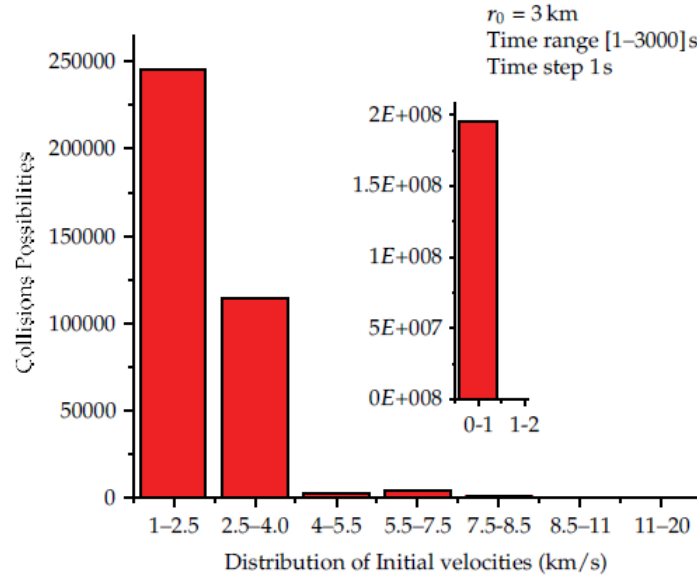
onde R é o módulo do vetor posição em relação ao centro da Terra que é dado pela soma do raio da Terra (R_T) com a altitude (h) do veículo em relação à superfície da Terra. A condição (37) foi incluída na estratégia para garantir a validade das soluções das equações (27).

Passo 4 São excluídas muitas condições iniciais do estudo da dinâmica relativa. Como o valor de r_{max} tem dependência direta das componentes de r_0 as combinações de θ e ϕ que violam (37) são descartadas e então é feito um novo teste com outra combinação, satisfazendo (37) as condições iniciais das por (36) devem fornecer também velocidades relativas, V_0 , típicas de satélites artificiais com detritos espaciais que podem chegar a $20 km/s$ (KESSLER; COUR-PALAIS, 1978).

Passo 5 As condições iniciais que obedecem à condição 37 e que também fornecem velocidades relativas típicas de colisões com detritos espaciais são catalogadas. As Figuras 5 e 6 mostram a distribuição do número de configurações possíveis de condições iniciais que favorecem à colisão na região LEO em função de V_0 . O número de configurações possíveis ou estados que o veículo e o detrito podem assumir no instante $t = 0s$ é chamado de "Possibilidades de Colisão".

Na Figura 5 vemos que a maior parte das Possibilidades de Colisões ocorrem com velocidades relativas na faixa de 0 a $1 km/s$, colisões com velocidades relativas de magnitude iguais ou muito próximas de zero podem não causar dano algum ao veículo. Nota-se também que não foi possível obter condições iniciais que fornecessem velocidades relativas de colisão nas faixas de 8,5 a $11 km/s$ e 11 a $20 km/s$.

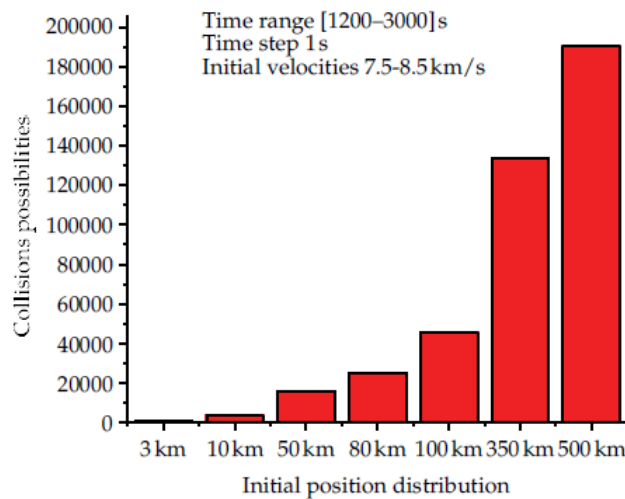
Figura 5: Possibilidades de Colisão versus velocidade relativa de colisão.



Fonte: Jesus et al. (2012). Os dados usados no cálculo das condições iniciais dadas por (36) foram $r_0 = 3km$ e $h = 220km$.

Na Figura 6 temos o número de Possibilidades de Colisão com velocidades relativas na faixa entre $7,5 - 8,5 km/s$ para diferentes valores de r_0 . O número de condições iniciais de colisão com essa faixa de velocidade relativa aumenta quanto maior for o valor de r_0 .

Figura 6: Possibilidades de Colisão versus posição inicial.



Fonte: Jesus et al. (2012). Nesse caso adotou-se diferentes valores para r_0 na altitude $h = 220km$.

Na próxima seção será apresentado um breve resumo sobre o estudo de manobras evasivas adotando o modelo exponencial para taxa de decaimento da massa do veículo.

4.4 MANOBRAS EVASIVAS: MODELO EXPONENCIAL PARA O DECAIMENTO DA MASSA DE COMBUSTÍVEL

Com o objetivo de analisar a viabilidade de manobra evasiva Jesus et al. (2012) solucionou a equação (27), modelando a força de propulsão ($\vec{f}$) por unidade de massa pela seguinte equação vetorial

$$\vec{f} = -\frac{1}{M(t)}\vec{v}_e \frac{dM(t)}{dt} = -\vec{v}_e \frac{d}{dt} \ln(M(t)) \quad (38)$$

sendo $\vec{v}_e$ a velocidade de exaustão dos gases e $M(t)$ é a massa total do veículo, incluindo a massa do combustível que obedece a seguinte função

$$M(t) = m_0(\chi + e^{-\gamma t}) \quad (39)$$

ou seja, considera-se um decaimento exponencial para a massa de combustível. O controle da manobra evasiva se dá a partir de parâmetros que dependem da tecnologia utilizada para a construção do sistema propulsor. Estes parâmetros tecnológicos são

- a) γ o fator de potência do propulsor, medido em unidades de frequência.
- b) χ o fator de massa, que é a razão entre a massa do corpo do veículo pela massa inicial de combustível a bordo.

Admitindo-se que após o acionamento do propulsor as componentes de $\vec{f}$ no referencial que gira permaneçam iguais em todos os instantes, obtém-se as soluções x , y e z das equações (27)

$$x(t) = 2A\sin(\omega t) - 2B\cos(\omega t) + Et + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-n\gamma t} + G \quad (40)$$

$$y(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\gamma t} + D \quad (41)$$

$$z(t) = H\cos(\omega t) + I\sin(\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} J_n e^{-n\gamma t} \quad (42)$$

onde

$$A = \frac{2\dot{x}_0}{\omega} - 3y_0 + \frac{2v_{ex}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(\frac{2v_{ex}}{\omega} + \frac{n\gamma v_{ey}}{\omega^2} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (43)$$

$$B = \frac{\dot{y}_0}{\omega} + \frac{v_{ey}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(\frac{2n\gamma v_{ex}}{\omega^2} + \frac{v_{ey}}{\omega} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (44)$$

$$E = 6\omega y_0 - 3\dot{x}_0 - 3v_{ex} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) \quad (45)$$

$$F_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(\frac{4v_{ex}}{n\gamma} + \frac{2v_{ey}}{\omega} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} - \frac{v_{ex}}{n\gamma} \quad (46)$$

$$G = \frac{2\dot{y}_0}{\omega} + x_0 + \frac{2v_{ey}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\chi^n} \frac{3v_{ex}}{\omega} \quad (47)$$

$$C_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n} \left(v_{ex} + \frac{n\gamma v_{ey}}{\omega^2} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (48)$$

$$D = 4y_0 - \frac{2x_0}{\omega} - \frac{2v_{ex}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) \quad (49)$$

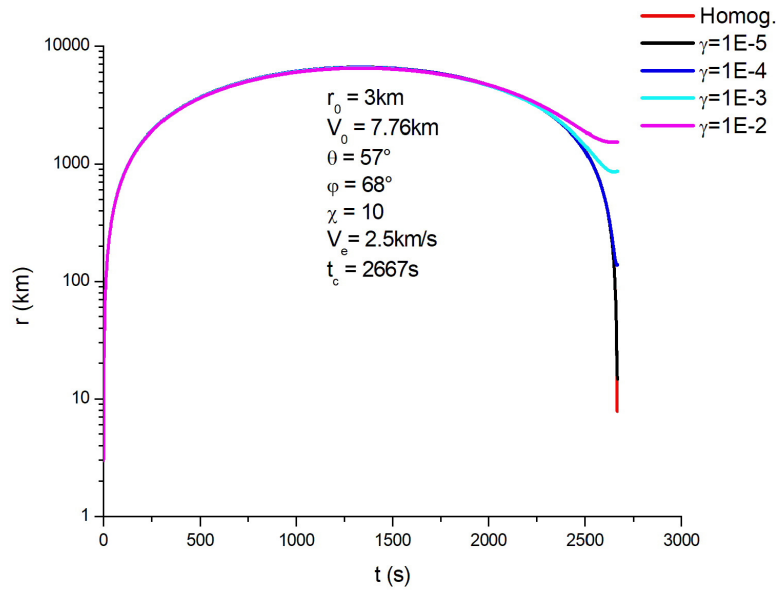
$$H = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} v_{ez} \gamma}{\chi^n \omega^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (50)$$

$$I = \frac{\dot{z}_0}{\omega} - \frac{v_{ez}}{\omega} \ln\left(\frac{\chi+1}{\chi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\chi^2\omega} v_{ez} \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (51)$$

$$J_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\chi^n\omega} v_{ez} \frac{1}{1 + \left(\frac{n\gamma}{\omega}\right)^2} \quad (52)$$

A Figura 7 mostra a distância relativa entre os centros de massa do veículo e do detrito espacial, adotando o modelo exponencial, a uma altitude $h = 220 \text{ km}$. A curva vermelha representa a posição relativa dada pelas soluções do caso homogêneo que no instante t_c registra zero indicando que houve colisão, as demais representam a posição relativa após o acionamento da propulsão que obedece o modelo exponencial e registram $r(t_c)$ diferente de zero o que caracteriza a manobra de evasão. Para visualizar a posição relativa final registrou-se r em escala logarítmica. Nota-se que para valores crescentes de γ a posição relativa final é cada vez maior. Nessa simulação admitiu-se que o veículo e o detrito são duas partículas pontuais, em outras palavras, não foi incluído os raios dos objetos.

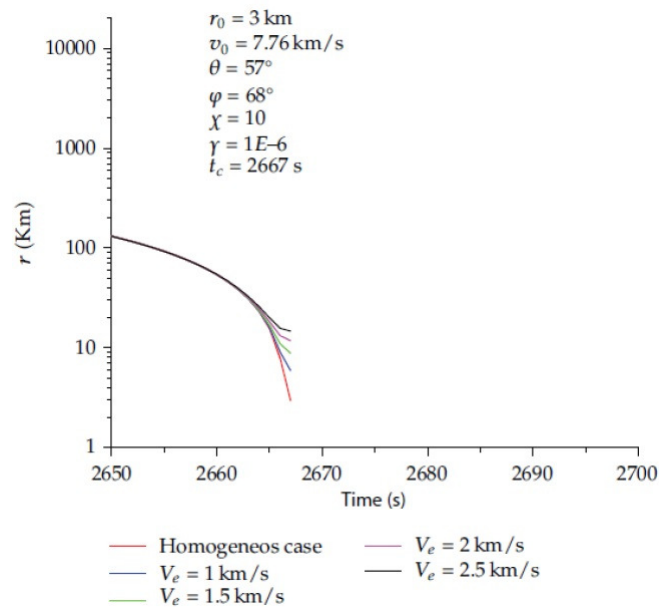
Figura 7: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Gráfico reproduzido de Jesus et al. (2012), com valores de γ corrigidos por Sousa (2015). Nesse caso V_e representa velocidade de exaustão e V_0 representa a velocidade relativa de colisão.

Na dinâmica relativa mostrada na Figura 8 adotou-se diferentes valores de velocidades de exaustão (V_e), para um dado valor de γ . Nota-se que $r(t_c)$ é diferente de zero, caracterizando o escape da colisão e é cada vez maior quanto maior for o valor da velocidade de exaustão. Para visualizar $r(t_c)$ registrou-se os valores de r em escala logarítmica a partir do instante $2650s$.

Figura 8: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Jesus et al. (2012). Manobras evasivas para diferentes valores de V_e .

Nota-se nas Figuras 7 e 8 que o modelo exponencial é efetivo para realizar manobras evasivas, considerando o veículo e o detrito como partículas pontuais. No próximo capítulo resolveremos as equações de Clohessy-Wiltshire adotando o modelo linear para implementação de manobras evasivas.

5 EQUAÇÕES DE CLOHESSY-WILTSHIRE: MODELO LINEAR PARA VARIAÇÃO DE MASSA NAS MANOBRAS EVASIVAS DE VEÍCULOS ESPACIAIS

As soluções das equações de Clohessy-Wiltshire adotando o modelo linear são encontradas nos trabalhos de Teles (2006) e Pinheiro (2014). Mas ao investigarmos detalhadamente as soluções analíticas e as simulações computacionais nesses trabalhos encontramos alguns erros que comprometem a aplicação do modelo linear no estudo de manobras evasivas. Por essa razão, em vez de dar continuidade a esses trabalhos refizemos todos os cálculos a fim de chegarmos a um consenso de sobre qual seriam as soluções das equações de Clohessy-Wiltshire adotando o modelo linear. Encontrar essas soluções não foi uma tarefa trivial, uma vez que ao resolver as equações encontramos muitas integrais cujo as soluções são obtidas por aproximação em séries e apesar de ser possível encontrar as soluções dessas integrais em tabelas, ainda assim requer certa acuidade visual para identificá-las e aplicar algumas substituições para solucioná-las em concordância com a tabela. Então fazendo as devidas substituições e usando as soluções da tabela de integrais obtivemos soluções similares as obtidas por Pinheiro (2014), porém a solução de uma das coordenadas trouxe problemas para fazê-la convergir computacionalmente. No entanto encontramos uma forma de contornar o problemas da convergência adotando um caminho de integração não muito convencional quando temos que integrar termos de séries.

Nesse capítulo resolvemos as equações de Clohessy-Wiltshire adotando o modelo linear para o decaimento da massa de combustível. Apresentamos também as principais operações matemáticas necessárias para obtermos a solução para a dinâmica relativa de manobra evasiva.

5.1 SOLUÇÃO PARTICULAR DO MODELO LINEAR

Para realização de manobras evasivas é necessário que o sistema de propulsão do veículo espacial seja acionado. Sendo assim, as componentes de $\vec{f}$ que atuam no veículo são diferentes de zero, tornando possível solucionar as equações de Clohessy-Wiltshire (27) para o caso não-homogêneo e com isso obtermos as funções que nos mostram a posição relativa entre o veículo e o detrito espacial. Lembrando que $\vec{f}$ é fixada de forma que suas componentes em x , y e z sejam sempre iguais.

Substituindo a equação (38) na equação (27) temos

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -v_{ex}\frac{d}{dt}\ln[M(t)] \quad (53a)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - 3\omega^2y = -v_{ey}\frac{d}{dt}\ln[M(t)] \quad (53b)$$

$$\ddot{z} + \omega^2z = -v_{ez}\frac{d}{dt}\ln[M(t)] \quad (53c)$$

Reduzindo a ordem da derivada em (5.1a) e substituindo em (5.1b) obtemos:

$$\ddot{y} + 2\omega[-v_{ex}\ln[M(t)] + c_1 + 2\omega y] - 3\omega^2y = -v_{ey}\frac{d}{dt}\ln[M(t)] \quad (54)$$

ou ainda

$$\ddot{y} + \omega^2y = 2\omega v_{ex} - v_{ey}\frac{d}{dt}\ln[M(t)] - 2\omega c_1 \quad (55)$$

em que c_1 é uma constante de integração.

Usando o método da variação dos parâmetros podemos encontrar uma solução particular para $y(t)$. Para isso reescrevemos (55) da forma

$$\ddot{y} + \omega^2y = F(t) \quad (56)$$

A solução y_h de (56) para o caso homogêneo é dada por

$$y_h(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \quad (57)$$

e solução particular y_p terá a forma

$$y_p = u_1(t)\sin\omega t + u_2(t)\cos\omega t \quad (58)$$

com u_1 e u_2 funções ainda desconhecidas.

Fazendo $v_1 = \sin\omega t$ e $v_2 = \cos\omega t$ e prosseguindo com o método da variação dos parâmetros obtem-se o sistema:

$$\begin{cases} \dot{u}_1v_1 + \dot{u}_2v_2 = 0 \\ \dot{u}_1\dot{v}_1 + \dot{u}_2\dot{v}_2 = f(t) \end{cases} \quad (59)$$

Aplicando a regra de Cramer encontramos $\dot{u}_1(t)$ e $\dot{u}_2(t)$, e então podemos calcular y_p . E finalmente temos a solução para (55) dada por:

$$y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t G(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \quad (60)$$

onde $G(\tau) = 2\omega v_{ex} \ln[M(\tau)] - v_{ey} \frac{d}{d\tau} \ln[M(\tau)]$.

Para continuarmos a integração temos de escolher um modelo de variação de $M(\tau)$. Neste trabalho assumimos que $M(\tau)$ decai linearmente no tempo. Temos então

$$M(\tau) = M_V + m(\tau) \quad (61)$$

$m(\tau) = m_0 + \dot{m}\tau$, m_0 é a massa inicial de combustível, $\dot{m}$ é a taxa de variação de massa do combustível com o tempo e M_V representa massa do veículo.

Sendo assim escrevemos

$$M(\tau) = M_V + m_0 + \dot{m}\tau \quad (62)$$

Queremos ainda que $M(\tau)$ dependa somente da variação da massa de combustível, então fazemos a seguinte relação

$$\chi = \frac{M_V}{m_0} \quad (63)$$

Temos então o modelo linear para $M(\tau)$

$$M(\tau) = M_0 + \dot{m}\tau, \quad (64)$$

onde $M_0 = m_0(\chi + 1)$.

Substituindo a equação (64) na equação (60) e integrando encontramos $y(t)$

$$\begin{aligned}
y(t) = & A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{2v_{ex}}{\omega} \left\{ \ln(M_0 + \dot{m}t) - \ln(M_0) \cos \omega t \right. \\
& + \cos \left(\frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t) \right) \left[\ln \left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} [M_0^{2k} - (M_0 + \dot{m}t)^{2k}] }{(2k)(2k)! \dot{m}^{2k}} \right] \\
& - \sin \left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t] \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k-1} [M_0^{2k-1} - (M_0 + \dot{m}t)^{2k-1}] }{(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k-1}} \left. \right\} \\
& + \frac{v_{ey}}{\omega} \left\{ \sin \left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t] \right) \left[\ln \left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} [M_0^{2k} - (M_0 + \dot{m}t)^{2k}] }{(2k)(2k)! \dot{m}^{2k}} \right] \right. \\
& + \cos \left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t] \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k-1} [M_0^{2k-1} - (M_0 + \dot{m}t)^{2k-1}] }{(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k-1}} \left. \right\} + \frac{2c_1}{\omega} (\cos \omega t - 1)
\end{aligned} \tag{65}$$

Temos então a solução para a coordenada $y(t)$ com alguns termos em séries. Essas séries surgem da integração da equação (60), onde nos deparamos com integrais dos tipos (66) e (67), solucionadas por Gradshteyn; Ryzhik (2007), cujo as soluções são dadas em função de seno integral $si(u)$ e cosseno integral $ci(u)$.

$$\int \frac{\sin k\tau}{a + b\tau} d\tau = \frac{1}{b} \left\{ \cos \frac{ka}{b} si(u) - \sin \frac{ka}{b} ci(u) \right\} \tag{66}$$

$$\int \frac{\cos k\tau}{a + b\tau} d\tau = \frac{1}{b} \left\{ \cos \frac{ka}{b} si(u) + \sin \frac{ka}{b} ci(u) \right\} \tag{67}$$

onde u , $si(u)$, $ci(u)$ são dados, respectivamente por (68), (69), (70) e a , b e k são constantes.

$$u = \frac{k}{b}(a + b\tau) \tag{68}$$

$$si(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} u^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!} - \frac{\pi}{2} \tag{69}$$

$$ci(u) = C + \ln u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{2k}}{(2k)(2k)!} \tag{70}$$

e C representa constante de Euler.

Aplicando as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$, calculamos os valores de A e B com y_0 e $\dot{y}_0$ constantes,

$$A = y_0$$

$$\begin{aligned} B = & \left[\frac{\dot{y}_0}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} M_0^{2(k-1)} \omega^{2k-1}}{(2k-1)! \dot{m}^{2(k-1)}} \left(2v_{ex} \sin\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) - v_{ey} \cos\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \right) \right. \right. \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} M_0^{2k-1} \omega^{2k}}{(2k)! \dot{m}^{2k-1}} \left(2v_{ex} \cos\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) + v_{ey} \sin\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \right) \\ & \left. \left. + \frac{\dot{m}}{M_0} \left[2v_{ex} \left(\cos\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) - 1 \right) \right] + v_{ey} \sin\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \right\} \right] \end{aligned}$$

Podemos encontrar $x(t)$ a partir da equação (65). Como integramos (5.1a) temos:

$$\dot{x} - 2\omega y = -v_{ex} \ln[M(t)] + c_1 \quad (71)$$

Integrando (71):

$$x(t) - x_0 = 2\omega \int_0^t y(\tau) d\tau - v_{ex} \int_0^t \ln[M(\tau)] d\tau + c_1 t \quad (72)$$

Aplicando a condição $\dot{x}(0) = x_0$ em (71) determinamos c_1 :

$$c_1 = \dot{x}_0 - 2\omega y_0 + v_{ex} \ln M_0 \quad (73)$$

Substituindo (65) e (64) em (72) e fazendo algumas integrais elementares escrevemos:

$$\begin{aligned} x(t) = & \left(2A + \frac{4c_1}{\omega} - \frac{4v_{ex} \ln M_0}{\omega} \right) \sin(\omega t) + 2B \left(1 - \cos(\omega t) \right) + 3v_{ex} I_3 \\ & + 4v_{ex} \left\{ I_4 + I_5 - I_6 \right\} + 2v_{ey} \left\{ I_7 + I_8 + I_9 \right\} - 3c_1 t + x_0 \end{aligned} \quad (74)$$

onde

$$I_3 = \int_0^t \ln[M_0 + \dot{m}\tau] d\tau \quad (75)$$

$$I_4 = \int_0^t \ln\left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}\tau}\right) \cos\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}\tau]\right) d\tau \quad (76)$$

$$I_5 = \int_0^t \cos\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}\tau]\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [M_0^{2k} - (M_0 + \dot{m}\tau)^{2k}] \omega^{2k}}{(2k)(2k)! \dot{m}^{2k}} d\tau \quad (77)$$

$$I_6 = \int_0^t \sin\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}\tau]\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [M_0^{2k-1} - (M_0 + \dot{m}\tau)^{2k-1}] \omega^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k-1}} d\tau \quad (78)$$

$$I_7 = \int_0^t \sin\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}\tau]\right) \ln\left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}\tau}\right) d\tau \quad (79)$$

$$I_8 = \int_0^t \sin\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}\tau]\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [M_0^{2k} - (M_0 + \dot{m}\tau)^{2k}] \omega^{2k}}{(2k)(2k)! \dot{m}^{2k}} d\tau \quad (80)$$

$$I_9 = \int_0^t \cos\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}\tau]\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [M_0^{2k-1} - (M_0 + \dot{m}\tau)^{2k-1}] \omega^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k-1}} d\tau \quad (81)$$

Resolvendo analiticamente as integrais (75) a (81) e substituindo em (74) encontramos:

$$\begin{aligned}
x(t) = & \left(\frac{4\dot{x}_0}{\omega} - 6y_0 \right) \text{sen}\omega t + 2B(1 - \cos\omega t) \\
& - (3\dot{x}_0 - 6\omega y_0 + 3v_{ex} \ln M_0) t + x_0 \\
& + 3v_{ex} \left\{ \frac{M_0}{\dot{m}} \ln \left(\frac{M_0 + \dot{m}t}{M_0} \right) + (\ln(M_0 + \dot{m}t) - 1) t \right\} \\
& + \frac{4v_{ex}}{\omega} \left\{ \sin \left(\frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \right) \ln \left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}t} \right) \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} ((M_0 + \dot{m}t)^{2k-1} - M_0^{2k-1}) \omega^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k-1}} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} M_0^{2k}}{(2k)(2k)! \dot{m}^{2k}} \left(\sin \left(\frac{\omega}{\dot{m} (M_0 + \dot{m}t)} \right) - \sin \left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}} \right) \right) \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} \left\{ \sin \left(\frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \right) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i \omega^{2k-2i} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i}}{(2k-2i)! \dot{m}^{2k-2i}} \right. \\
& + \cos \left(\frac{\omega}{\dot{m}} (M_0 + \dot{m}t) \right) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i \omega^{2k-2i-1} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i-1}}{(2k-2i-1)! \dot{m}^{2k-2i-1}} \\
& \left. - \sin \left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}} \right) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i (\omega M_0)^{2k-2i}}{(2k-2i)! \dot{m}^{2k-2i}} - \cos \left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}} \right) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i (\omega M_0)^{2k-2i-1}}{(2k-2i-1)! \dot{m}^{2k-2i-1}} \right\} \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k-1} M_0^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k-1}} \left[\cos \left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}} \right) - \cos \left(\frac{\omega}{\dot{m}} [M_0 + \dot{m}t] \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t]\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} (M_0 + \dot{m}t)^{2k}}{2k(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k}} \\
& - \sin\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega M_0)^{2k}}{2k(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k}} \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \left[\sin\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t]\right) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i \omega^{2k-2i} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i}}{(2k-2i)! \dot{m}^{2k-2i}} \right. \\
& + \cos\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t]\right) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i \omega^{2k-2i-1} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i-1}}{(2k-2i-1)! \dot{m}^{2k-2i-1}} \\
& - \sin\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i (\omega M_0)^{2k-2i}}{(2k-2i)! \dot{m}^{2k-2i}} \\
& \left. - \cos\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i (\omega M_0)^{2k-2i-1}}{(2k-2i-1)! \dot{m}^{2k-2i-1}} \right] \Bigg\} \\
& + \frac{2v_{ey}}{\omega} \left\{ \ln\left(\frac{M_0 + \dot{m}t}{M_0}\right) \left[\cos\left(\frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t)\right) - 1 \right] \right. \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} [(M_0 + \dot{m}t)^{2k} - M_0^{2k}]}{2k(2k)! \dot{m}^{2k}} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} M_0^{2k}}{2k(2k)! \dot{m}^{2k}} \left[\cos\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) - \cos\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t]\right) \right] \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} \left\{ \cos\left(\frac{\omega}{\dot{m}}(M_0 + \dot{m}t)\right) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} \omega^{2k-2i} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i}}{(2k-2i)! \dot{m}^{2k-2i}} \right. \\
& + \sin\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t]\right) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i \omega^{2k-2i-1} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i-1}}{(2k-2i-1)! \dot{m}^{2k-2i-1}} \\
& - \cos\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} (\omega M_0)^{2k-2i}}{(2k-2i)! \dot{m}^{2k-2i}} - \sin\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i (M_0 \omega)^{2k-2i-1}}{(2k-2i-1)! \dot{m}^{2k-2i-1}} \Bigg\} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k-1} M_0^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k-1}} \left[\sin\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t]\right) - \sin\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \right] \\
& - \cos\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t]\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} (M_0 + \dot{m}t)^{2k}}{2k(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} M_0^{2k}}{2k(2k-1)(2k-1)!\dot{m}^{2k}} \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \left[\cos\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t]\right) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} \omega^{2k-2i} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i}}{(2k-2i)!\dot{m}^{2k-2i}} \right. \\
& + \sin\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t]\right) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i \omega^{2k-2i-1} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i-1}}{(2k-2i-1)!\dot{m}^{2k-2i-1}} \\
& + \sin\left(\frac{\omega}{\dot{m}}[M_0 + \dot{m}t]\right) \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i \omega^{2k-2i-1} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i-1}}{(2k-2i-1)!\dot{m}^{2k-2i-1}} \\
& - \cos\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} (M_0 \omega)^{2k-2i}}{(2k-2i)!\dot{m}^{2k-2i}} \\
& \left. - \sin\left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}}\right) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i (M_0 \omega)^{2k-2i-1}}{(2k-2i-1)!\dot{m}^{2k-2i-1}} \right] \Bigg\} \quad (82)
\end{aligned}$$

Quando integramos os termos que dependem do tempo nas séries em (77), (78), (80) e (81), encontramos soluções também em séries onde os seus termos são escritos em forma de somatórios, como mostrado nas seguintes equações:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i} \omega^{2k-2i}}{(2k-2i)!\dot{m}^{(2k-2i)}} \quad (83)$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} (M_0 + \dot{m}t)^{2k-2i} \omega^{2k-2i}}{(2k-2i)!\dot{m}^{(2k-2i)}} \quad (84)$$

O problema é que dessa forma temos complicações computacionais para essas séries convergirem. Os termos em forma de soma são obtidos devido as integrais do tipo (85) e (86), que foram solucionadas por Gradshteyn; Ryzhik (2007):

$$\int \theta'^{2k} \sin \theta' d\theta' = (2n)! \left\{ \cos \theta' \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} \theta'^{2k-2i}}{(2k-2i)!} + \sin \theta' \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i \theta'^{2k-2i-1}}{(2k-2i-1)!} \right\} \quad (85)$$

$$\int \theta'^{2k} \cos \theta' d\theta' = (2n)! \left\{ \sin \theta' \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} \theta'^{2k-2i}}{(2k-2i)!} + \cos \theta' \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^i \theta'^{2k-2i-1}}{(2k-2i-1)!} \right\} \quad (86)$$

Porém, é possível obter outra solução para $x(t)$ sem o problema de convergência das

séries. Primeiro destacamos a parte das integrais (77), (78), (80) e (81) que dependem do tempo:

$$I_{52} = \int_0^t \cos \left[\frac{\omega}{\dot{m}} (Mo + \dot{m}\tau) \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} (Mo + \dot{m}\tau)^{2k}}{(2k)(2k)! \dot{m}^{2k}} d\tau \quad (87)$$

$$I_{62} = \int_0^t \sin \left[\frac{\omega}{\dot{m}} (Mo + \dot{m}\tau) \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k-1} (Mo + \dot{m}\tau)^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k-1}} d\tau \quad (88)$$

$$I_{82} = \int_0^t \sin \left[\frac{\omega}{\dot{m}} (Mo + \dot{m}\tau) \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} (Mo + \dot{m}\tau)^{2k}}{(2k)(2k)! \dot{m}^{2k}} d\tau \quad (89)$$

$$I_{92} = \int_0^t \cos \left[\frac{\omega}{\dot{m}} (Mo + \dot{m}\tau) \right] \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k-1} (Mo + \dot{m}\tau)^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)! \dot{m}^{2k-1}} d\tau \quad (90)$$

onde aplicamos a seguinte substituição:

$$\begin{cases} \theta' = \frac{\omega}{\dot{m}} (Mo + \dot{m}\tau) \\ \theta'_0 = \frac{\omega M_0}{\dot{m}}, \text{ quando } \tau = 0 \\ \theta'_1 = \frac{\omega}{\dot{m}} (Mo + \dot{m}\tau), \text{ quando } \tau = t \end{cases} \quad (91)$$

Feito isso, fazemos integração por partes e então identificamos as integrais:

$$I_{53} = \int_{\theta'_0}^{\theta'_1} \sin \theta' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta'^{2k-1}}{(2k)!} d\theta' \quad (92)$$

$$I_{63} = \int_{\theta'_0}^{\theta'_1} \cos \theta' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta'^{2k-2}}{(2k-1)!} d\theta' \quad (93)$$

$$I_{83} = \int_{\theta'_0}^{\theta'_1} \cos \theta' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta'^{2k-1}}{(2k)!} d\theta' \quad (94)$$

$$I_{93} = \int_{\theta'_0}^{\theta'_1} \sin \theta' \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta'^{2k-2}}{(2k-1)!} d\theta' \quad (95)$$

Podemos eliminar as séries dessas integrais. Para isso escrevemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta'^{2k}}{(2k)!} = -\frac{\theta'^2}{2!} + \frac{\theta'^4}{4!} - \frac{\theta'^6}{6!} + \frac{\theta'^8}{8!} - \frac{\theta'^{10}}{10!} + \dots \quad (96)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta'^{2k-1}}{(2k-1)!} = \theta' - \frac{\theta'^3}{3!} + \frac{\theta'^5}{5!} - \frac{\theta'^7}{7!} + \frac{\theta'^9}{9!} - \dots \quad (97)$$

Comparando com as séries $\sin \theta'$ e $\cos \theta'$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta'^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{\theta'^2}{2!} + \frac{\theta'^4}{4!} - \frac{\theta'^6}{6!} + \frac{\theta'^8}{8!} - \frac{\theta'^{10}}{10!} + \dots = \cos \theta' \quad (98)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta'^{2k+1}}{(2k+1)!} = \theta' - \frac{\theta'^3}{3!} + \frac{\theta'^5}{5!} - \frac{\theta'^7}{7!} + \frac{\theta'^9}{9!} - \dots = \sin \theta' \quad (99)$$

Então, concluímos que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta'^{2k}}{(2k)!} = \cos \theta' - 1 \quad (100)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta'^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sin \theta' \quad (101)$$

Depois dessa substituição, obtemos:

$$I_{53} = \int_{\theta'_0}^{\theta'_1} \frac{\sin \theta'}{\theta'} (\cos \theta' - 1) d\theta' \quad (102)$$

$$I_{63} = \int_{\theta'_0}^{\theta'_1} \frac{\cos \theta'}{\theta'} \sin \theta' d\theta' \quad (103)$$

$$I_{83} = \int_{\theta'_0}^{\theta'_1} \frac{\cos \theta'}{\theta'} (\cos \theta' - 1) d\theta' \quad (104)$$

$$I_{93} = \int_{\theta'_0}^{\theta'_1} \frac{\sin \theta'}{\theta'} \sin \theta' d\theta' \quad (105)$$

Aplicando relações trigonométricas e realizando as devidas operações matemáticas, chegamos às soluções dessas integrais. Depois de fazer as substituições de suas soluções em seus devidos lugares, acontecem muitas simplificações devido a somas de termos opostos. Por fim, obtemos outra solução para $x(t)$ sem o problema de ter que calcular um somatório para cada termo da série:

$$\begin{aligned} x(t) = & \left(\frac{4\dot{x}_0}{\omega} - 6y_0 \right) \text{sen}\omega t + 2B(1 - \cos\omega t) - (3\dot{x}_0 - 6\omega y_0 + 3v_{ex} \ln M_0) t + x_0 \\ & + 3v_{ex} \left\{ \frac{M_0}{\dot{m}} \ln \left(\frac{M_0 + \dot{m}t}{M_0} \right) + (\ln(M_0 + \dot{m}t) - 1) t \right\} \\ & + \frac{4v_{ex}}{\omega} \left\{ \sin \theta'_1 \left[\ln \left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\theta_0'^{2k} - \theta_1'^{2k})}{(2k)(2k)!} \right] \right. \\ & \left. - \cos \theta'_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\theta_1'^{2k-1} - \theta_0'^{2k-1})}{(2k-1)(2k-1)!} \right\} \\ & + \frac{2v_{ex}}{\omega} \left\{ \ln \left(\frac{M_0 + \dot{m}t}{M_0} \right) (\cos \theta'_1 - 1) + \cos \theta'_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\theta_1'^{2k} - \theta_0'^{2k})}{(2k)(2k)!} \right. \\ & \left. + \sin \theta'_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\theta_0'^{2k-1} - \theta_1'^{2k-1})}{(2k-1)(2k-1)!} \right\} \end{aligned} \quad (106)$$

Para o cálculo de $z(t)$ usamos também o método da variação dos parâmetros. As constantes são determinadas pelas condições iniciais $z(0) = z_0$ e $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$. Então, efetuando-se as devidas operações matemáticas encontramos:

$$\begin{aligned}
z(t) = & z_0 \cos \omega t \\
& + \left\{ \frac{\dot{z}_0}{\omega} - \frac{v_{ez}}{\omega^2} \frac{\dot{m}}{M_0} \cos \left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \omega^{2k-1} M_0^{2k-1}}{(2k-1)! \dot{m}^{2k-1}} \right. \\
& + \sin \left(\frac{\omega M_0}{\dot{m}} \right) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \omega^{2k} M_0^{2k}}{(2k)! \dot{m}^{2k-1}} - 1 \right] \left. \right\} \sin \omega t \\
& + \frac{v_{ez}}{\omega} \left\{ \cos \left(\frac{\omega}{\dot{m}} [M_0 + \dot{m}t] \right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k-1} [M_0^{2k-1} - (M_0 + \dot{m}t)^{2k-1}]}{\dot{m}^{2k-1} (2k-1)! (2k-1)} \right. \\
& + \sin \left(\frac{\omega}{\dot{m}} [M_0 + \dot{m}t] \right) \left[\ln \left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}t} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k} [M_0^{2k} - (M_0 + \dot{m}t)^{2k}]}{(2k)! \dot{m}^{2k}} \right] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{107}$$

Devemos notar que as soluções de (53a), (53b) e (53c) ficaram condicionadas à condição de existência de logaritmo. Observa-se que essa condição de existência limita a escolha do valor de $\dot{m}$. Então, sempre que formos executar uma manobra evasiva com as soluções do modelo linear, devemos tomar o cuidado na escolha de $\dot{m}$ que deverá obedecer à condição:

$$\dot{m} > -\frac{M_0}{t_c} \tag{108}$$

Sendo assim, o valor de $\dot{m}$ é cada vez menor quanto maior for o tempo de colisão. A condição (108) também implica que um valor de $\dot{m}$ implementado a um veículo espacial, pode não ser aplicável a outro veículo, pois M_0 depende da proporção do corpo do veículo pela massa de combustível que está a bordo.

6 RESULTADOS

Nesse capítulo mostraremos mapas de condições iniciais de colisão com velocidades relativas na faixa de km/s e que fornecem posição relativa máxima que não viole as condições de expansão. Em seguida investigamos valores de $\dot{m}$ que devem satisfazer a condição de existência do logaritmo, possibilitar a convergência das séries e aplicar um Δv_x adequado para o veículo não se afastar de sua órbita nominal. Obtemos também equações que possibilitaram a mudança das coordenadas do referencial girante para o referencial da Terra esse fato permitiu a visualização da trajetória de colisão. E finalmente mostramos as curvas de dinâmica relativa do modelo linear, obtendo êxito na manobra de evasão. Nesses cálculos quando foi necessário o raio da Terra adotamos 6378 km .

Vale ressaltar que os resultados registrados nesse capítulo é fruto de uma árdua investigação, sem o conhecimento prévio dos problemas solucionados aqui. A ordem em que os resultados foram registrados nas seções não significa que a investigação se deu exatamente na ordem em que estão dispostos.

6.1 DINÂMICA DE COLISÃO E POSIÇÃO RELATIVA MÁXIMA

A condição (37) foi colocada na estratégia I acreditando-se que as soluções das equações (27) seriam válidas para qualquer valor de posição relativa máxima, desde que não ultrapassasse a distância entre o veículo e o centro da Terra. Porém analisando o processo de dedução das equações (27) nota-se que os valores assumidos pela posição relativa máxima devem ser limitados, pois os termos desprezados por serem considerados pequenos e as condições de expansão devem ser obedecidas na medida em que a posição relativa varia no tempo.

Na equação (22) tivemos que expandir o termo gravitacional em série de Taylor, após desprezarmos o termo $(\frac{\vec{r}}{R})^2$. A condição de rendezvous (10) favorece a esse procedimento, pois essa razão negligenciada assume um valor muito pequeno.

No problema de manobras evasivas temos que tomar cuidado com o valor do módulo de $\vec{r}$, porque na medida em que ele varia no tempo o seu valor máximo não pode assumir um valor que favoreça à condição de rendezvous. Se isso acontecer teremos o detrito e o veículo espacial em órbitas muito próximas e no caso de uma colisão ela ocorreria com velocidade relativa próxima de zero, e assim o detrito espacial apenas encostaria no veículo sem um impacto com poder destrutivo e a realização de uma manobra evasiva seria desnecessária. Por outro lado, o valor máximo do módulo de $\vec{r}$ não pode assumir

um valor muito grande a ponto de fazer a razão $(\frac{\vec{r}}{R})^2$ se aproximar de um, nesse caso essa razão se tornaria um termo muito significativo na operação (22) e não poderia ser negligenciado e assim as soluções do modelo linear não teria precisão alguma.

O responsável por fazer o módulo de $\vec{r}$ assumir valores que satisfazem ou não a operação feita em (22) e pela ocorrência de velocidades relativas de colisão com poder destrutivo são as condições iniciais aplicadas na dinâmica relativa, ou seja, os valores das coordenadas da posição inicial (x_0, y_0, z_0) . Com o objetivo rastrear as condições iniciais adequadas ao problema de manobras evasivas, primeiramente adotamos um valor para a posição relativa máxima (r_{max}) e selecionamos as condições iniciais que fornecem valores para a posição relativa (r) menor ou igual ao r_{max} desejado. Para essa investigação adotamos uma estratégia que chamaremos de Estratégia II e obedece os seguintes passos

Passo 1 Assume-se que é possível detectar em torno do veículo um detrito a uma dada posição inicial relativa $(r(0) = r_0)$, escreve-se x_0, y_0 e z_0 como sendo as componentes de r_0 em coordenadas esféricas, equação (109), com varredura angular no plano igual a $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ e no espaço igual a $0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$ ao passo de 5° .

$$\begin{cases} x_0 = r_0 \sin \phi \cos \theta \\ y_0 = r_0 \sin \phi \sin \theta \\ z_0 = r_0 \cos \phi \end{cases} \quad (109)$$

Passo 2 É Calculado o valor de ω de acordo com a altitude na região LEO. Depois é atribuído um valor a r_0 na equação (109) e cada combinação de θ e ϕ fornecerá valores de x_0, y_0 e z_0 que são substituídos nas equações (32-34) e nas equações (28-30) para calcular V_0 no instante t_c e r que varia no intervalo de tempo igual a $0 \leq t \leq t_c$. Esses cálculos são feitos para diversos tempos de colisão no intervalo $1200 \leq t_c \leq 3000$ ao passo de $5s$. O intervalo de valores atribuídos a t_c é escolhido de forma que não ultrapasse o valor do período orbital do veículo.

Passo 3 São selecionados x_0, y_0 e z_0 de forma que a razão (110) não assuma valores próximo de um.

$$\left(\frac{\vec{r}_{max}}{R}\right)^2 \quad (110)$$

onde $\vec{R}$ é o vetor posição em relação ao centro da Terra cujo o módulo é dado pela soma do raio da Terra (R_T) com a altitude (h) do veículo em relação à superfície da Terra.

Passo 4 As condições iniciais que obedecem à condição 110 são catalogadas, elas representam o número de configurações possíveis ou estados que o veículo e o detrito podem assumir no instante $t = 0s$.

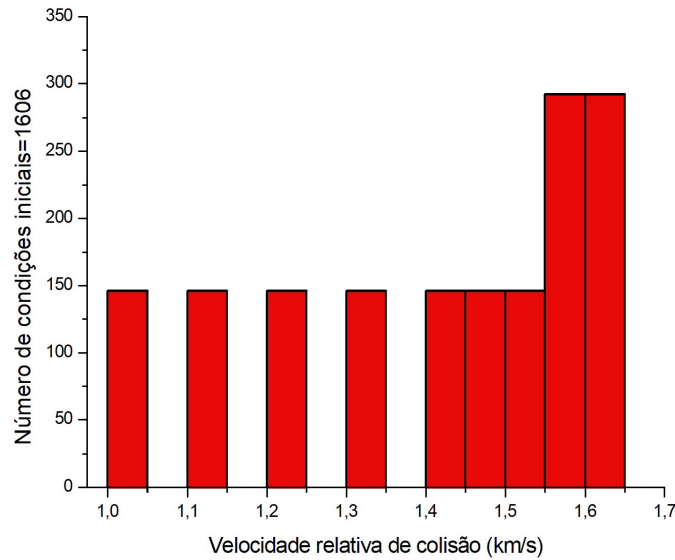
Seguindo a estratégia II e limitando a posição relativa máxima em 610 km para tornar a razão 110 uma grandeza desprezível, obtivemos um total de 971849 condições iniciais, porém as velocidades de colisão obtidas foram abaixo de 1 km/s , isso na altitude $h = 220 \text{ km}$ e adotando $r_0 = 3 \text{ km}$. Sabemos que os detritos espaciais viajam com velocidades da ordem de km/s e desejamos obter velocidades relativa de colisão nessa faixa e por essa razão procuramos outras condições iniciais adotando $r_{max} \leq 2000 \text{ km}$. Caso r_{max} assumia esse valor na altitude $h = 220 \text{ km}$ temos

$$\left(\frac{r_{max}}{R}\right)^2 = \left(\frac{2000}{6598}\right)^2 \simeq 0,1 \quad (111)$$

que é um valor distante de um e pode ser desprezado em (22). O valor dessa razão é cada vez menor quanto maior for a altitude adotada tornando os resultados mais precisos.

Seguindo novamente a Estratégia II na altitude $h = 220 \text{ km}$ e adotando $r_0 = 3 \text{ km}$, registramos um total de 975061 condições iniciais que fornecem $r_{max} \leq 2000 \text{ km}$, mas somente 1606 delas fornecem velocidades relativas de colisão iguais ou maiores que 1 km/s . Na Figura 9 encontra-se a distribuição das 1601 condições iniciais em função da velocidade relativa de colisão. Essa distribuição mostra para quais valores de velocidade relativa de colisão as soluções das equações (27) são aplicáveis. Lembrando que essa distribuição depende do valor de r_0 adotado na Estratégia II. Na prática a distribuição do número de condições iniciais depende da capacidade do veículo de detectar a posição inicial relativa do detrito espacial.

Figura 9: Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.

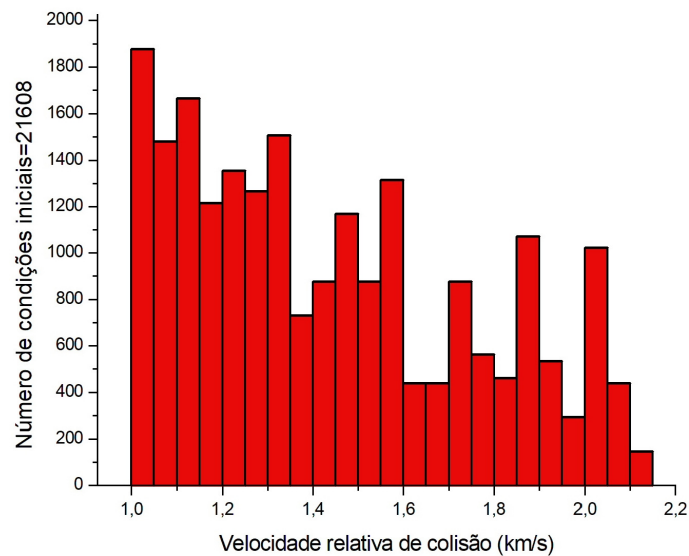


Fonte: Produção do próprio autor. Dados usados na Estratégia II: $h = 220 \text{ km}$, $r_0 = 3 \text{ km}$. O total de condições iniciais obtidas foi de 975061, mas somente 1606 desse total fornecem colisões com velocidade relativa na ordem de km/s .

Um veículo espacial na altitude $h = 220 \text{ km}$, em relação à superfície da Terra, já está quase no limite de altitude na qual é possível realizar uma missão espacial. Isso torna algumas condições iniciais de colisão impossíveis de serem observadas na prática, por exemplo, se adotarmos um valor de posição relativa inicial $r_0 = 100 \text{ km}$ dependendo dos valores de θ e ϕ assumidos na Estratégia II é possível posicionar matematicamente o detrito na atmosfera da Terra e nessa região o detrito pode incendiar e ser destruído. Para podermos usar r_0 maiores que 3 km adotamos $h = 700 \text{ km}$ e registramos nas Figuras 10-12 a distribuição do número de condições iniciais em função da velocidade relativa de colisão para três valores de r_0 .

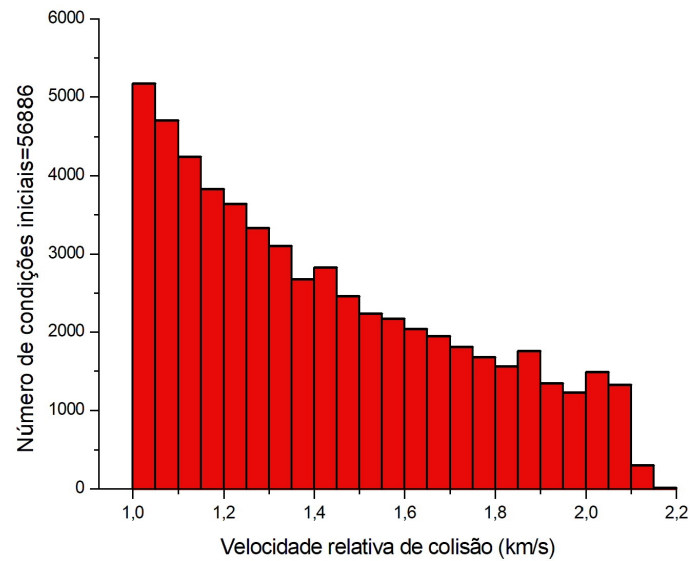
Fazendo uma análise geral nas Figuras 10-12 nota-se que o número de colisões com velocidade relativa maior que 2 km/s aumenta na medida em que adotamos valores de r_0 cada vez maiores. Percebe-se também que com o aumento no valor de r_0 a distribuição do número de condições iniciais tem tendência a se aproximar de uma função exponencial que decresce com o aumento do valor da velocidade relativa de colisão.

Figura 10: Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.



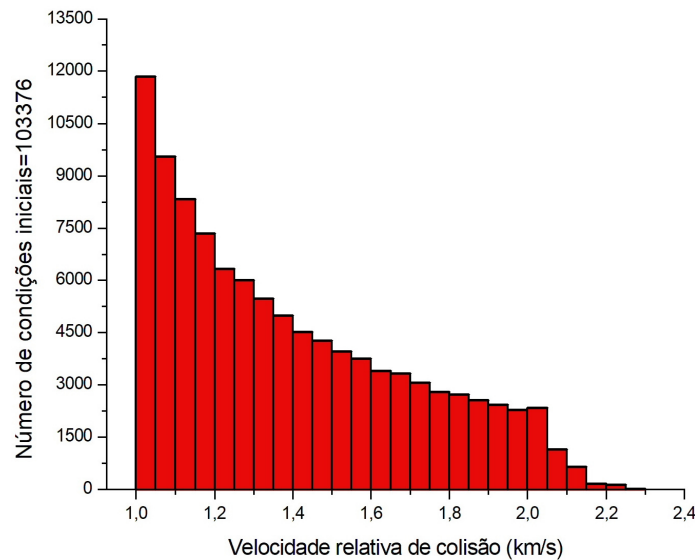
Fonte: Produção do próprio autor. Dados usados na Estratégia II: $h = 700 \text{ km}$, $r_0 = 100 \text{ km}$. O total de condições iniciais obtidas foi de 943087, mas somente 21608 desse total fornecem colisões com velocidade relativa na ordem de km/s .

Figura 11: Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.



Fonte: Produção do próprio autor. Dados usados na Estratégia II: $h = 700 \text{ km}$, $r_0 = 300 \text{ km}$. O total de condições iniciais obtidas foi de 906009, mas somente 56886 desse total fornecem colisões com velocidade relativa na ordem de km/s .

Figura 12: Distribuição do número condições iniciais versus velocidade relativa de colisão.



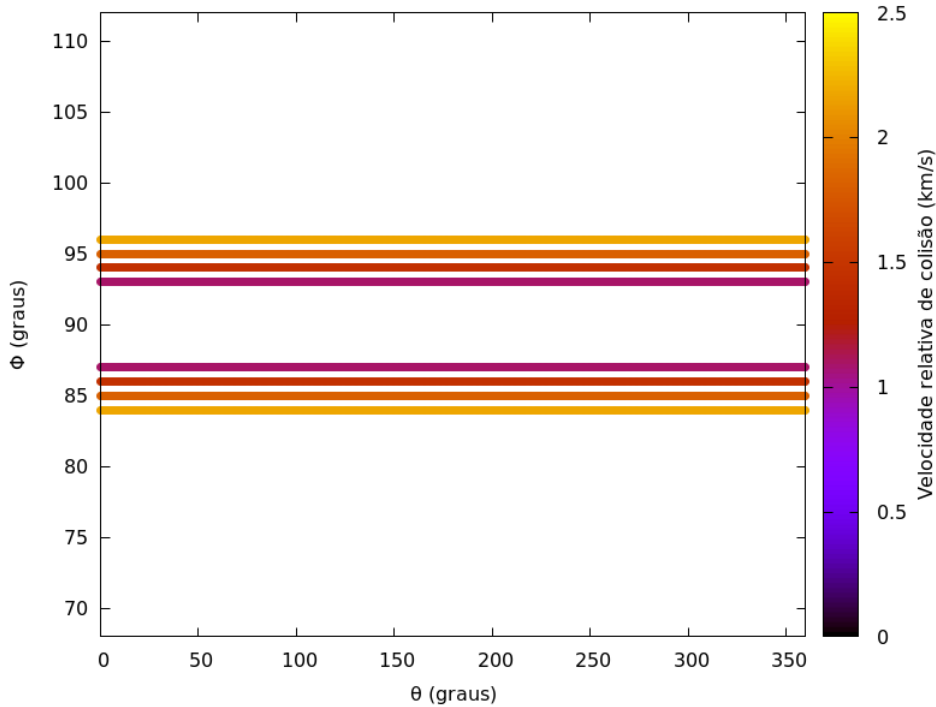
Fonte: Produção do próprio autor. Dados usados na Estratégia II: $h = 700 \text{ km}$, $r_0 = 500 \text{ km}$. O total de condições iniciais obtidas foi de 871529, mas somente 103376 desse total fornecem colisões com velocidade relativa na ordem de km/s .

Em termos de aplicações tecnológica as Figuras 10-12 nos leva a concluir que para escapar de colisões com velocidade relativa maior que 2 km/s o radar do veículo tem que ser capaz de detectar detritos a uma posição inicial relativa igual ou superior a 100 km .

Após sabermos que a aplicação das soluções das equações (27) são limitadas a obediência do valor de posição relativa máxima e a determinadas faixas de velocidades relativas de colisão, identificamos nas Figuras 13-16 algumas condições iniciais. O objetivo dessas Figuras, que chamaremos de mapa de cores, é identificar com exatidão condições iniciais devido os valores assumidos por θ e ϕ na Estratégia II para um determinado tempo de colisão posteriormente escolhemos algumas dessas condições iniciais para aplicar manobras evasivas usando as soluções do modelo linear. As cores servem para identificar a faixa de velocidade de colisão equivalente à combinação dos ângulos θ e ϕ .

Na Figura 13 identificamos condições iniciais referentes a altitude de 220 km . Nota-se algumas faixas velocidades relativas de colisão superiores a 1 km/s duas dessas faixas têm velocidades superiores a 2 km/s .

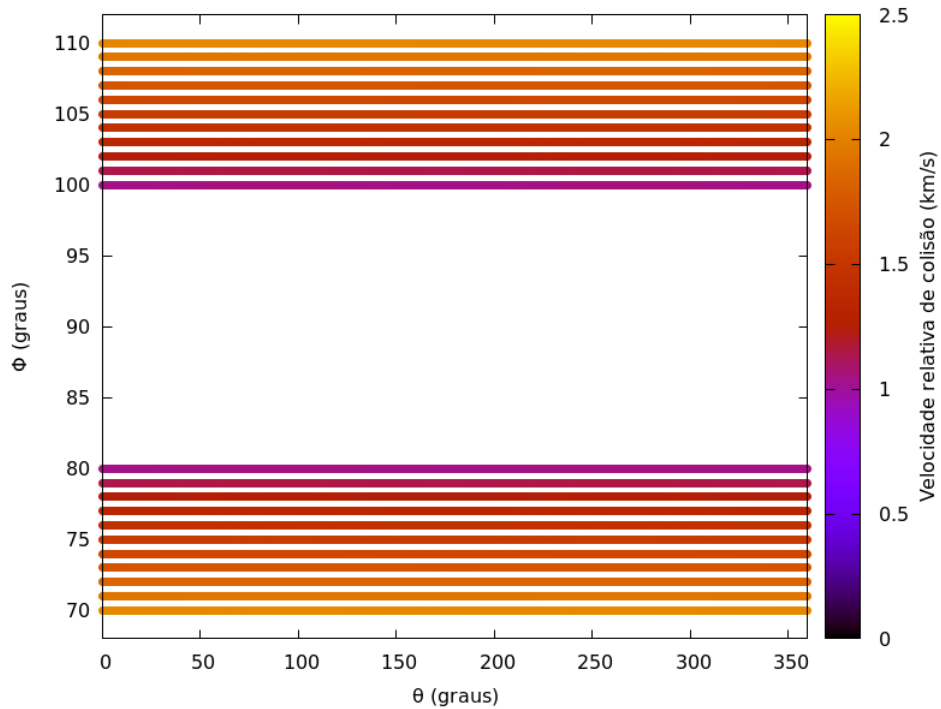
Figura 13: Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000\text{ km}$.



Fonte: Produção do próprio autor. Altitude em relação à superfície da Terra 220 km , $r_0 = 3\text{ km}$ e $t_c = 2667\text{ s}$.

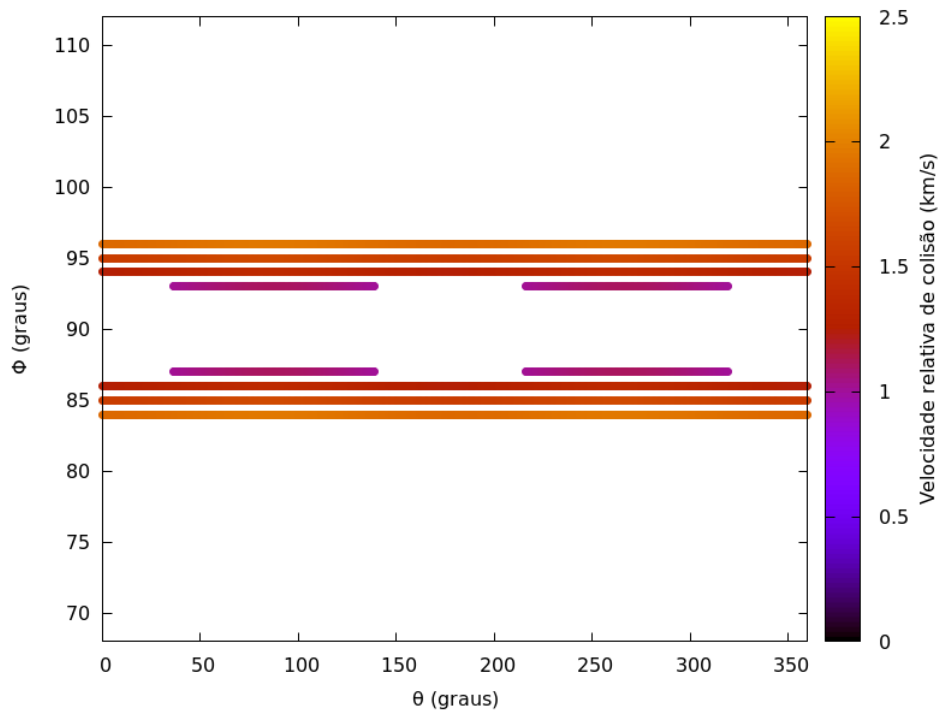
Na altitude $h = 700\text{ km}$, obtemos para $r_0 = 100\text{ km}$ a Figura 14, onde a maior parte das combinações fornecem colisões nas faixas em torno de $1,5\text{ km/s}$. Já na Figura 15 nota-se uma diminuição no número de condições iniciais quando comparamos com a Figura 14 e as combinações de θ e ϕ fornecem velocidades relativa de colisão nas faixas em torno de $1,5\text{ km/s}$ e algumas combinações próximas de 2 km/s .

Figura 14: Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000km$.



Fonte: Produção do próprio autor. Altitude em relação à superfície da Terra $700km$, $r_0 = 100km$ e $t_c = 2980s$.

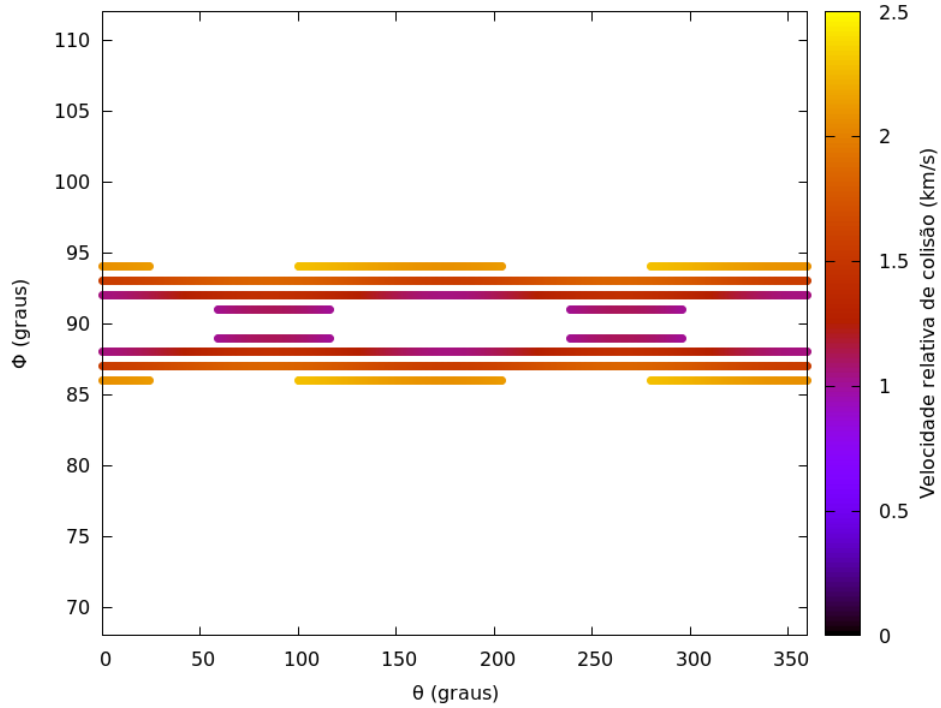
Figura 15: Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000km$.



Fonte: Produção do próprio autor. Altitude em relação à superfície da Terra $700km$, $r_0 = 300km$ e $t_c = 2980s$.

Quando adotamos $r_0 = 500 \text{ km}$ observamos que a predominância de condições iniciais com velocidades de colisão em torno de $1,5 \text{ km/s}$.

Figura 16: Condições iniciais em coordenadas esféricas que fornecem $r_{max} \leq 2000 \text{ km}$.



Fonte: Produção do próprio autor. Altitude em relação à superfície da Terra 700 km , $r_0 = 500 \text{ km}$ e $t_c = 2980 \text{ s}$.

Identificamos nos mapas de cores as condições iniciais que fornecem um valor limite para satisfazer às condições de expansão em (22). O próximo passo foi investigar o produto escalar em (22) que também precisa obedecer a condição de ser muito menor do que um. Para fazer essa verificação efetuamos o produto escalar em (22) e o resultado revela que a obediência da condição de expansão fica a cargo do valor máximo da coordenada y . Aplicando condições iniciais mapeadas na equação (29), registramos nas Tabelas 3 e 4 os valores de y_{max} .

Tabela 3: Análise da condição de expansão para altitude de 220 km , para o caso homogêneo.

r_0 (km)	θ ($^\circ$)	ϕ ($^\circ$)	y_{max} (km)	$\frac{2y_{max}}{R}$
3	27	84	1,35451	$4,11 \times 10^{-4}$

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 4: Análise da condição de expansão para altitude de $700km$, para o caso homogêneo.

r_0 (km)	θ ($^\circ$)	ϕ ($^\circ$)	y_{max} (km)	$\frac{2y_{max}}{R}$
100	50	80	75,44065	$2,13 \times 10^{-2}$
300	300	96	44,50896	$1,26 \times 10^{-2}$
500	108	86	474,36989	$1,34 \times 10^{-1}$

Fonte: Produção do próprio autor.

Como podemos ver nas Tabelas 3 e 4 o maior valor para a razão $\frac{2y_{max}}{R}$ foi de $0,134km$, que consideramos ainda ser muito menor que um. Sendo assim, as condições iniciais aplicadas não provocam um aumento significativo na coordenada y a ponto de violar as condições de expansão. Se as condições iniciais fornecessem $\frac{2y_{max}}{R} = 0,5$ as interpretações da dinâmica relativa teriam precisão muito baixa. Consideramos que metade de um é uma grandeza muito representativa para satisfazer a condição de expansão.

Mostramos nessa seção que existem limites matemáticos que devem ser respeitados para obtermos resultados em concordância com as considerações e condições de expansão feitas na adaptação das equações Clohessy-Wiltshire para manobras evasivas. Elaboramos mapas que mostram combinações de θ e ϕ que satisfazem a condição de $r_{max} \leq 2000km$ e também fornecem condições iniciais de colisão com velocidade relativa na ordem de km/s . Mas, não é descartado a possibilidade de que alguma dessas combinações, mesmo satisfazendo $r_{max} \leq 2000km$, provoque um aumento em y_{max} grande a ponto de violar as condições de expansão. Por isso sempre que for feita a escolha de condições iniciais nos mapas é necessário avaliar sua influência na coordenada y . As soluções obtidas para o modelo linear também requerem os mesmos cuidados mostrados nessa seção, além disso existem outros fatores que devem ser cuidadosamente analisados antes de aplicar o modelo em manobras evasivas.

6.2 CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA, CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES EM SÉRIES E INCREMENTO NA VELOCIDADE DO VEÍCULO ESPACIAL

Já destacamos que as funções (65), (106) e (107) dependem da condição de existência de logaritmo que limita a escolha de $\dot{m}$. Mas temos também soluções em séries com fatoriais que podem precisar de muitos termos para convergir, dependendo da escolha do módulo do valor de $\dot{m}$ e ainda existe a possibilidade de aplicarmos um empuxo cujo a magnitude seja capaz de tirar o veículo de sua orbita nominal. Então, devemos investigar a condição de existência do logaritmo e escolhermos valores de $\dot{m}$ que satisfaça a todas essas limitações. Para essa investigação seguimos os seguintes passos:

- Escolhemos massas de veículos operacionais que já foram usadas em missões espaciais.

- Adotamos $\chi = 5$, esse valor significa que o veículo foi abastecido com uma quantidade de combustível equivale 20% da massa do veículo. Com isso calculamos valores para M_0 . Lembrando que

$$M_0 = mo(\chi + 1)$$

onde mo é a massa inicial de combustível que para fins práticos sua quantidade deve ser inferior à massa do satélite.

- E por fim calculamos a razão (108) para tempos de colisão maiores que a metade do período orbital nas altitudes de $220km$ e $700km$, e registramos nas Tabelas 5 e 6 os dados necessários para escolha de $\dot{m}$.

Tabela 5: Dados para avaliar a condição de existência do logaritmo na altitude de $220km$, onde $t_c = 2667s$ e $\chi = 5$.

Veículo	Massa (kg)	M_0 (kg)	M_0/t_c (kg/s)
Marte 1M	650	780	-0,29246344
Sputnik 22	893,5	1072,2	-0,40202475
Mariner 3	260,8	312,96	-0,11734533
Zond 3	960	1152	-0,43194601
Mariner 6	411,8	494,16	-0,18528684
Voyager 1	721,9	866,28	-0,3248144
SOHO	1850	2220	-0,83239595
MAVEN	809	970,8	-0,3640045
SCDs	115	138	-0,05174353
CBERS 2B	1540	1848	-0,69291339

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 6: Dados para avaliar a condição de existência do logaritmo na altitude de $700km$, onde $t_c = 2980kms$ e $\chi = 5$.

Veículo	Massa (kg)	M_0 (kg)	M_0/t_c (kg/s)
Marte 1M	650	780	-0,261744966
Sputnik 22	893,5	1072,2	-0,359798658
Mariner 3	260,8	312,96	-0,105020134
Zond 3	960	1152	-0,386577181
Mariner 6	411,8	494,16	-0,165825503
Voyager 1	721,9	866,28	-0,29033557
SOHO	1850	2220	-0,744966443
MAVEN	809	970,8	-0,325771812
SCDs	115	138	-0,046308725
CBERS 2B	1540	1848	-0,620134228

Fonte: Produção do próprio autor.

Agora temos para cada veículo, faixas de valores que podemos atribuir a $\dot{m}$ que irão satisfazer à condição de existência do logaritmo. Entretanto, para um dado valor de ω a convergência das séries é afetada de acordo com o valor de $\dot{m}$ e M_0 . Os testes computacionais realizados nas séries mostraram que quanto mais alto for o módulo do valor de $\dot{m}$ a convergência acontece com a soma de menos de quinze termos. Já no caso dos valores de M_0 dos veículos SOHO e CBERS 2B foi necessário diminuir o número de termos nos somatórios para 45, isso porque para esses dois casos o valor de M_0 fazia o algoritmo simplesmente para de calcular as séries.

Por conta dos fatoriais que dependem do valor que os índices dos somatórios assumem o ideal seria adotar sempre os maiores módulos de $\dot{m}$ possíveis, porém um módulo de $\dot{m}$ muito alto pode aplicar um empuxo capaz de mudar a órbita nominal do veículo e assim as soluções obtidas com o modelo linear não seriam aplicáveis. Por outro lado, se usarmos um $\dot{m}$ muito pequeno é necessário somar muitos termos nas séries para que haja convergência e dessa forma as limitações computacionais com relação aos fatoriais começam a ficar evidentes, somar muitos termos significar calcular fatoriais de números cada vez maiores. Então tivemos que investigar valores de $\dot{m}$ que, além de satisfazer a condição de existência do logaritmo, também satisfizesse as limitações de convergência das séries e que acrescentasse ao veículo velocidade suficiente para acelera-lo dentro de sua órbita nominal.

A equação do foguete (5) mostra que além de $\dot{m}$ a velocidade de exaustão também contribui para o incremento Δv_x na velocidade orbital do veículo. Então, para manter o veículo em sua órbita nominal quando acionamos os sistema de propulsão, analisamos o menor $\dot{m}$ possível para as séries convergir e que juntamente com v_e adicionasse um Δv_x pequeno, mas suficiente para acelerar que o veículo em sua órbita nominal. Substituindo equação (64) em (5) obtemos

$$\Delta v_x = \frac{v_e}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{M_0}{M_0 + \dot{m}t_c}\right) \quad (112)$$

dividimos a equação (112) por $\sqrt{3}$ porque equacionamos o problema de forma que as componentes (x, y, z) de $\vec{v}_e$ sejam iguais e lembrando que a velocidade orbital do veículo que tem direção da componente x que é tangente à órbita circular.

Testamos para cada veículo os menores valores passíveis de $\dot{m}$ para as séries convergir, da Tabela 1 escolhemos a velocidade de exaustão mais baixa e então calculamos Δv_x . Também tomamos o cuidado com relação à equação (64), que no final da manobra deve ser fornecer $M(t_c)$ sempre um valor maior que a massa do veículo com alguma sobra de combustível. Os resultados desses procedimentos para a altitude de $220km$ e $v_e = 1,7km/s$ se encontram na Tabela 7.

Tabela 7: Dados usados na equação (112) e cálculo da velocidade final (v_{xf}) para $v_e = 1,7km/s$ e $t_c = 2667s$.

Veículo	$\dot{m}$ (kg/s)	Δv_x (km/s)	v_{xf} (km/s)	$M(t_c)$ (kg)
Marte 1M	0,029	0,10	7,87	702,66
Sputnik 22	0,04	0,10	7,87	965,52
Mariner 3	0,012	0,10	7,87	280,96
Zond 3	0,043	0,10	7,87	1037,32
Mariner 6	0,019	0,10	7,88	443,49
Voyager 1	0,032	0,10	7,87	780,94
SOHO	0,092	0,11	7,88	1974
MAVEN	0,036	0,10	7,87	874,79
SCDs	0,0051	0,10	7,87	124,39
CBERS 2B	0,078	0,11	7,88	1639

Fonte: Produção do próprio autor.

Para uma altitude de $220km$ a velocidade orbital do veículo é $7,77km/s$. Os resultados registrados na Tabela 7 mostram um acréscimo Δv_x médio de um décimo na sua velocidade orbital no instante t_c . Uma vez que os valores de $\dot{m}$ já são os mínimos possíveis para a convergência das séries, pudemos baixar o valor da velocidade de exaustão para obter um valor de Δv_x menor ainda. Usando a equação (7) e os valores de impulso específico da Tabela 2 encontramos um valor menor para v_e que é $0,5km/s$. Feito isso, refizemos os cálculos de Δv_x para as altitudes de $220km$ e $700km$. Os resultados dos cálculos encontram-se registrados nas Tabelas 8 e 9.

Tabela 8: Dados usados na equação (112) e cálculo da velocidade final (v_{xf}) para $v_e = 0,5 km/s$. Altitude de 220km e $t_c = 2667s$. Δv_x são valores aproximados.

Veículo	$\dot{m}$ (kg/s)	Δv_x (km/s)	v_{xf} (km/s)	$M(t_c)$ (kg)
Marte 1M	0,029	0,03	7,80	702,66
Sputnik 22	0,04	0,03	7,80	965,52
Mariner 3	0,012	0,03	7,80	280,96
Zond 3	0,043	0,03	7,80	1037,32
Mariner 6	0,019	0,03	7,80	443,49
Voyager 1	0,032	0,02	7,79	780,94
SOHO	0,092	0,03	7,80	1974,64
MAVEN	0,036	0,03	7,80	874,79
SCDs	0,0051	0,03	7,80	124,39
CBERS 2B	0,078	0,03	7,80	1639,97

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 9: Dados usados na equação (112) e cálculo da velocidade final (v_{xf}) para $v_e = 0,5 km/s$. Altitude de 700km e $t_c = 2980s$. Δv são valores aproximados.

Veículo	$\dot{m}$ (kg/s)	Δv_x (km/s)	v_{xf} (km/s)	$M(t_c)$ (kg)
Marte 1M	0,027	0,03	7,53	699,54
Sputnik 22	0,036	0,03	7,53	964,92
Mariner 3	0,011	0,03	7,53	280,18
Zond 3	0,04	0,03	7,53	1032,8
Mariner 6	0,017	0,03	7,53	443,5
Voyager 1	0,029	0,03	7,53	779,86
SOHO	0,084	0,03	7,53	1969,68
MAVEN	0,033	0,03	7,53	872,46
SCDs	0,0048	0,03	7,53	123,7
CBERS 2B	0,071	0,035	7,535	1636,42

Fonte: Produção do próprio autor.

Aplicando $v_e = 0,5 km/s$ obtivemos acréscimos na velocidade orbital dos veículos na casa dos centésimos e por esse motivo vamos adotar nas manobras evasivas os dados das Tabelas 8 e 9.

Até agora investigamos valores de $\dot{m}$ que satisfazem a condição de existência de logaritmo, que implique em convergência das séries e também acrescente Δv_x pequeno na velocidade orbital. Esses fatores foram investigados individualmente, ou seja, separados da solução do modelo linear. Mostraremos agora esses fatores interagindo em conjunto, juntamente com as condições iniciais na solução do modelo linear, com objetivo de verificar uma possível violação na condição de expansão binomial da mesma forma que

fizemos para o caso homogêneo.

Sob as mesmas condições iniciais da Tabela 3 obtemos os registros da Tabela 10 onde vemos que a razão $\frac{2y_{max}}{R}$ assume valores da ordem de 10^{-4} e 10^{-3} . Essas ordens de grandezas são valores muito distantes de um o que torna esses resultados em concordância com a condição de expansão.

Tabela 10: Análise da condição de expansão para veículos espaciais na altitude de 220 *km*.

Veículo	y_{max} (<i>km</i>)	$\frac{2y_{max}}{R}$
Marte 1M	1,37168	$4,16 \times 10^{-4}$
Sputnik 22	1,36848	$4,15 \times 10^{-4}$
Mariner 3	1,35451	$4,11 \times 10^{-4}$
Zond 3	1,3687	$4,15 \times 10^{-4}$
Mariner 6	2,82997	$8,58 \times 10^{-4}$
Voyager 1	1,3567	$4,11 \times 10^{-4}$
SOHO	4,82812	$1,46 \times 10^{-3}$
MAVEN	1,35519	$4,11 \times 10^{-4}$
SCD-1	1,35451	$4,11 \times 10^{-4}$
CBERS 2B	1,40947	$4,27 \times 10^{-4}$

Fonte: Produção do próprio autor.

Na Tabela 11 encontram-se a análise das condições de expansão na altitude de 700 *km* sob as mesmas condições iniciais da Tabela 4, para o caso $r_0 = 300$ *km*, onde constatamos que os resultados obtidos estão em concordância com a condição de expansão. O valor de $\frac{2y_{max}}{R}$ assume valores com ordens de grandezas de 10^{-2} e 10^{-3} .

Tabela 11: Análise da condição de expansão para veículos espaciais na altitude de 700 *km*, para o caso $r_0 = 300$ *km*.

Veículo	y_{max} (<i>km</i>)	$\frac{2y_{max}}{R}$
Marte 1M	43,4477	$1,22 \times 10^{-2}$
Sputnik 22	26,80092	$7,57 \times 10^{-3}$
Mariner 3	37,27296	$1,05 \times 10^{-2}$
Zond 3	43,40379	$1,22 \times 10^{-2}$
Mariner 6	41,9156	$1,18 \times 10^{-2}$
Voyager 1	26,13494	$7,38 \times 10^{-3}$
SOHO	-50,84875	$-1,43 \times 10^{-2}$
MAVEN	34,67084	$9,79 \times 10^{-3}$
SCD-1	43,13995	$1,21 \times 10^{-2}$
CBERS 2B	-6,85459	$-1,93 \times 10^{-3}$

Fonte: Produção do próprio autor.

Para os casos $r_0 = 500 \text{ km}$ e $r_0 = 100 \text{ km}$ o valor de y_{max} são os mesmos do caso homogêneo, isso significa que para esses dois casos os valores de y caem a partir dos valores máximos do caso homogêneo registrados na Tabela 4.

Os resultados registrados nas Tabelas 10 e 11 servem para mostrar que as condições iniciais empregadas nas simulações a seguir estão de conformidade com a condição de expansão realizada na dedução das equações de Clohessy-Wiltshire.

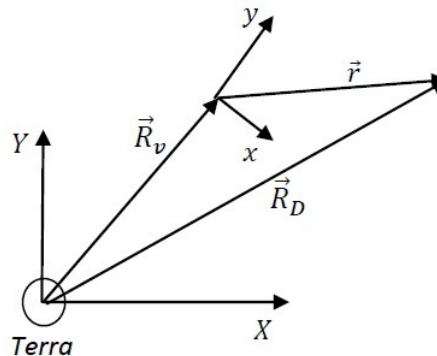
Depois detectar os problemas computacionais e encontrar valores que se enquadrem dentro de tantos detalhes não tão visíveis num primeiro contato com o problema, finalmente estamos prontos para implementar as soluções para o modelo linear nas manobras evasivas. Mas antes disso, um resultado adicional obtido para ser usado com as soluções do caso homogêneo foi a possibilidade de podermos fazer uma mudança de referencial e encontrar os elementos orbitais do detrito espacial.

6.2.1 Trajetória de colisão

Nessa seção mostraremos um mecanismo geométrico para fazer a mudança do referencial girante com coordenadas (x, y, z) , para um referencial inercial com coordenadas (X, Y, Z) centrado na origem da Terra. O que nos possibilita usar o método de Gibbs para determinar os elementos orbitais do detrito em relação à Terra e também projetar graficamente a trajetória de colisão entre o detrito e veículo espacial. O fator que possibilitou usar esse mecanismo é o fato do vetor posição do veículo em relação Terra estar na mesma direção da coordenada y do referencial que gira.

A Figura 17 ilustra os dois referenciais, onde consideramos que o veículo está em órbita circular no plano equatorial da Terra, centrado no referencial girante. Sob essas condições as coordenadas Z e z são iguais e ortogonais ao plano XY .

Figura 17: Representação dos vetores posição do veículo espacial $\vec{R}_v$ e do detrito espacial $\vec{R}_D$ em relação ao referencial inercial na Terra.



Fonte: Produção do próprio autor.

Sendo $\vec{R}_v = (X_1, Y_1, Z_1)$ o vetor posição do veículo espacial, $\vec{R}_D = (X_2, Y_2, Z_2)$ o vetor posição do detrito em relação a Terra e $\vec{r}$ o vetor posição do detrito em relação ao veículo, podemos escrever

$$\vec{R}_D = \vec{R}_v + \vec{r} \quad (113)$$

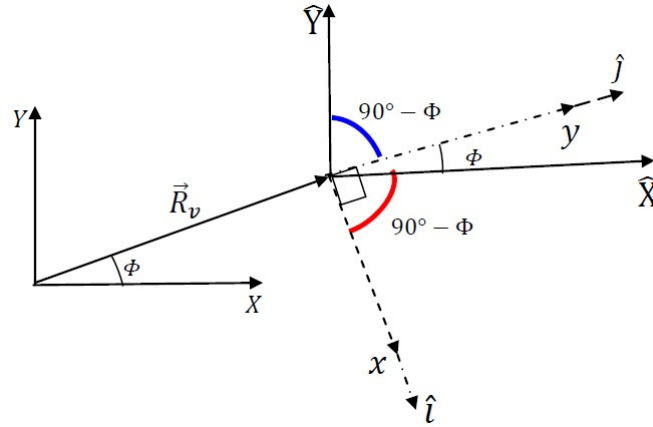
Escrevendo as componentes individuais do vetor $\vec{R}_D$ podemos eliminar a dependência dos versores $\hat{i}$ e $\hat{j}$ fazendo o produto escalar com os versores $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ que apontam, respectivamente, nas direções dos eixos X e Y . Assim obtemos

$$X_2 = X_1 + x\hat{i} \cdot \hat{X} + y\hat{j} \cdot \hat{X} \quad (114)$$

$$Y_2 = Y_1 + x\hat{i} \cdot \hat{Y} + y\hat{j} \cdot \hat{Y} \quad (115)$$

O vetor $\vec{R}_v$ aponta sempre na mesma direção de y o que nos permite calcular o produto escalar entre os versores dos dois referenciais, a partir da Figura 18.

Figura 18: Representação do vetor posição do veículo em relação à Terra.



Fonte: Produção do próprio autor.

Calculando os produtos vetoriais obtemos equações para realizar a mudança da posição do detrito espacial do referencial que gira para o referencial da Terra.

$$X_2 = X_1 + x \cos(90^\circ - \Phi) + y \cos \Phi \quad (116)$$

$$Y_2 = Y_1 + x \cos(180^\circ - \Phi) + y \cos(90^\circ - \Phi) \quad (117)$$

A posição do veículo em relação à Terra pode dada em coordenadas polares, assim

podemos reescreve as equações (116) e (117) da seguinte forma

$$X_2 = (R_v + y) \cos \Phi + x \sin \Phi \quad (118)$$

$$Y_2 = (R_v + y) \sin \Phi - x \cos \Phi \quad (119)$$

Com essas equações podemos visualizar graficamente a trajetória de colisão de um veículo com um detrito espacial a partir do referencial inercial da Terra. Sabendo a posição geocêntrica de três vetores, em instantes consecutivos torna possível aplicamos o método de Gibbs e encontrar o elementos orbitais do detrito espacial (CURTIS, 2013). As figuras da trajetória de colisão são mostradas na seção seguinte sempre antes de realizarmos as manobras evasivas.

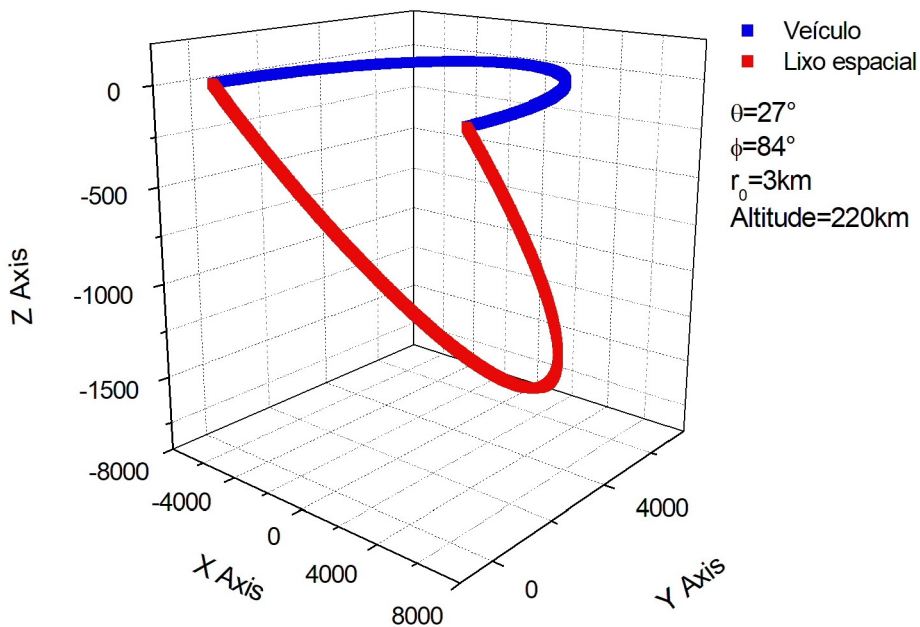
6.3 DINAMICA RELATIVA DE MANOBRAS DE EVASÃO: MODELO LINEAR PARA VARIAÇÃO DE MASSA DO COMBUSTÍVEL

Depois de termos todo o conhecimento sobre as limitações das soluções do modelo linear e da influencia das condições iniciais na dinâmica relativa, mostraremos nessa seção as simulações das soluções das equações de Clohessy-Wiltshire para o modelo linear.

Na prática a manobra evasiva iniciaria a partir do instante em que os radares localizados na Terra ou no veículo identificasse a possibilidade de haver colisão. Os radares informariam em tempo real as condições iniciais V_0 e r_0 , com base nessas informações o computador de bordo com um banco de dados contendo os mapas das condições iniciais de colisão, calcularia a trajetória do detrito em relação ao veículo usando as equações estudadas na dinâmica relativa de colisão, verificaria se ocorreria colisão, $r(t_c) = 0$, e informaria t_c que é igual ao tempo disponível que o veículo teria para escapar da colisão. O acionamento do sistema de propulsão para a implementação da manobra evasiva ocorreria logo após o computador de bordo realizar todos os cálculos da dinâmica relativa de colisão.

A partir das equações (118) e (119) obtemos a Figura 19 que mostra a trajetória de colisão em relação a Terra numa altitude de $220km$. Os elementos orbitais do detrito foram calculados usando o método de Gibbs.

Figura 19: Trajetória de colisão em relação a Terra



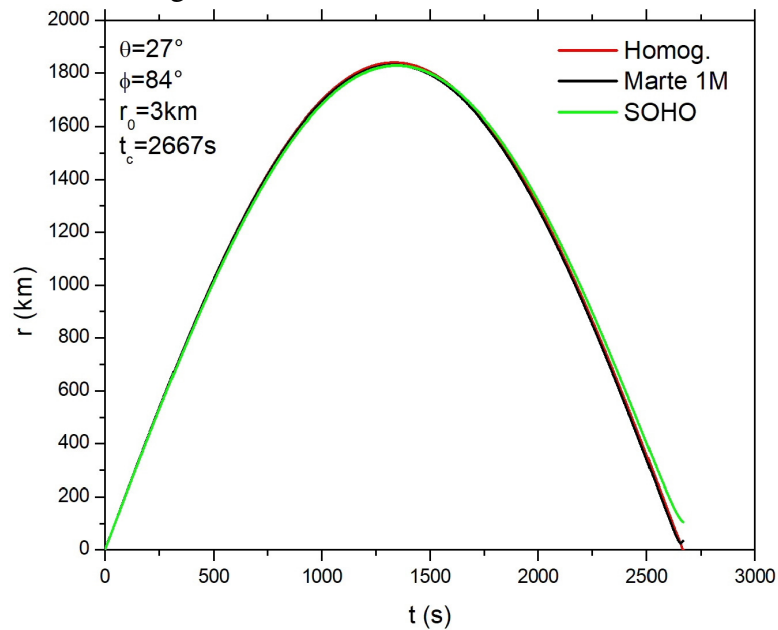
Fonte: Produção do próprio autor. Elementos orbitais do detrito calculados entre os instantes $1000s$, $1001s$ e $1002s$. Semi-eixo maior ($a \simeq 6479,6km$), excentricidade ($e \simeq 0,06$), Inclinação da órbita ($i \simeq 15,6^\circ$), longitude do nodo ascendente ($\Omega \simeq 180^\circ$), argumento do pericentro $\bar{\omega} \simeq 94^\circ$ e anomalia verdadeira ($f \simeq 154,5^\circ$).

Sob as condições de colisão apresentada na Figura 19 usamos as soluções do modelo linear para realizar as manobras evasivas dos veículos espaciais já mencionados.

Em linhas gerais a primeira observação que fazemos nas curvas de dinâmica relativa, Figuras 20-24, é o valor da posição relativa máxima que está inferior a $2000km$, como desejamos. Nessas curvas depois que o veículo e o detrito atingem uma posição relativa máxima eles começam a se aproximar do ponto de colisão e por esse motivo a posição relativa passa a diminuir. Se não houver acionamento da propulsão do veículo espacial num dado instante ocorrerá colisão. Essa dinâmica de colisão é representada pelas curvas de cor vermelha que também servem como referência para identificar os pontos onde o veículo começa a ganhar aceleração e são dada pelas soluções do caso homogêneo. No instante t_c as curvas de cor vermelha estão marcando uma posição relativa igual a zero, isso significa que o centro de massa do veículo espacial e do detrito estão na origem do referencial que gira. Notamos também que durante um certo intervalo de tempo a posição relativa fornecida pela solução do modelo linear contorna a curva da solução para o caso homogêneo. Isso implica que após o acionamento do propulsor o veículo demora um intervalo de tempo para ganhar aceleração e assumir valores de posições relativas diferentes de quando está com o propulsor desligado. Essa aceleração depende da massa do veículo e do valor de $\dot{m}$ e como esperado interfere também na posição final $r(t_c)$ dos centros de massa do veículo e do detrito. Devido a limitações do software empregado no registro da dinâmica relativa, a posição inicial $r(0) = r_0$ nas Figuras 20-24 parece partir da origem, mas o valor verdadeiro é $r_0 = 3 km$. A escala adotada foi o melhor ajuste encontrado para interpretar a evolução da dinâmica relativa no tempo.

Na Figura 20 notamos que o veículo Marte 1M mesmo como propulsor acionado, ejetando $0,029kg/s$, sua posição relativa em relação ao detrito se mantém praticamente a mesma de quando estava com o propulsor desligado até no instante $1000s$, a partir desse instante ele assume uma posição relativa mais próxima do detrito, mantendo-se assim até os instantes finais da manobra, onde $r(t_c)$ é diferente de zero o que caracteriza que a manobra de evasão aconteceu. Já SOHO ejeta $0,092kg/s$ e começa a acelerar antes do instante $500s$ e também assume uma posição relativa mais próxima do detrito até que entre os instantes $1500s$ e $2000s$ começa a ganhar ainda mais aceleração e passa a assumir uma posição relativa cada vez mais afastada do detrito até o instante t_c quando notamos que a posição relativa dos objetos é diferente de zero, caracterizando a manobra de evasão.

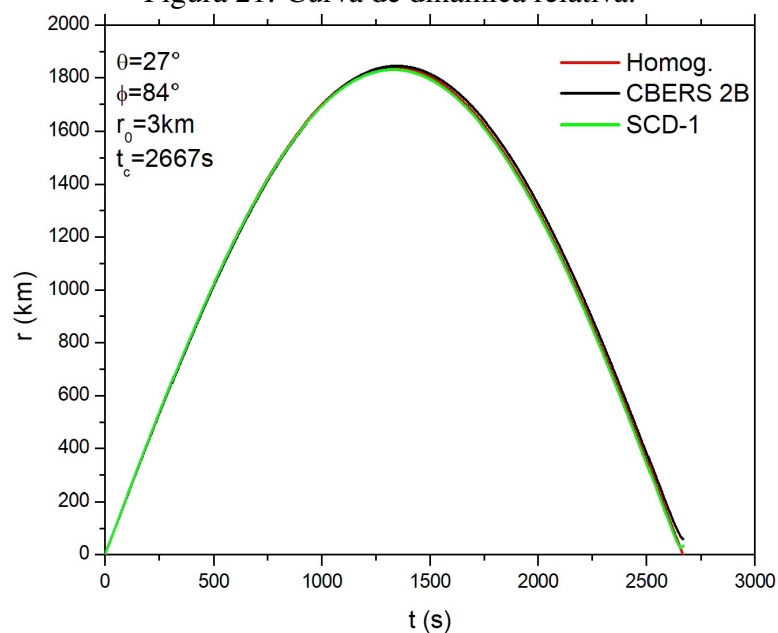
Figura 20: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor. Marte 1M $\dot{m} = 0,029\text{kg/s}$ e SOHO $\dot{m} = 0,092\text{kg/s}$.

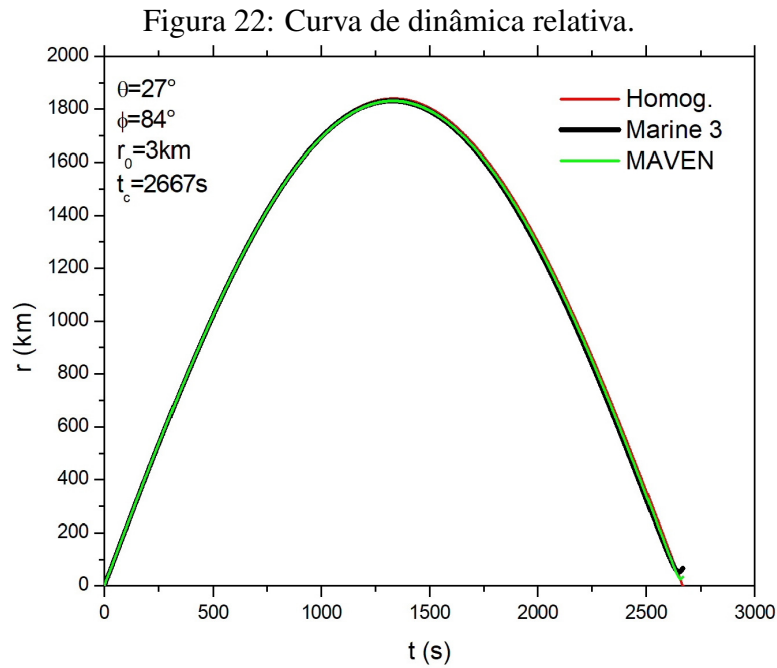
Tomando como referência a curva para o caso homogêneo, observa-se na Figura 21 que os veículos CBERS 2B e SCD-1 começam a ganhar aceleração depois de 1000s . Sendo que o CBERS 2B por ter $\dot{m}$ maior ganha mais aceleração e se distancia do detrito, enquanto SCD-1 sua aceleração o faz se aproxima do detrito, porém os dois veículos conseguem escapar da colisão.

Figura 21: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor. CBERS 2B $\dot{m} = 0,078\text{kg/s}$ e SCD-1 $\dot{m} = 0,0051\text{kg/s}$.

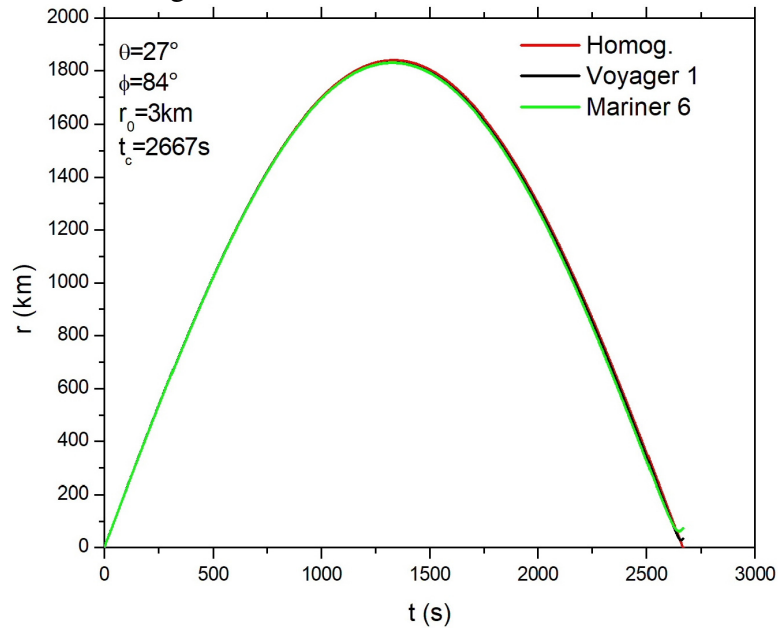
Na Figura 22 só é possível notar as acelerações de Mariner 3 e MAVEN nos instantes finais da dinâmica relativa quando a posição relativa final para os dois casos é diferente de zero, com Mariner 3 tendo um afastamento maior do que MAVEN mesmo tendo menor $\dot{m}$.



Fonte: Produção do próprio autor. Mariner 3 $\dot{m} = 0,012 \text{ kg/s}$ e MAVEN $\dot{m} = 0,036 \text{ kg/s}$.

Na Figura 23 as curvas da dinâmica relativa de Voyager 1 e Mariner 6 até um pouco depois do instante 2500 s tem interpretação semelhante ao da Figura 21. Alguns segundos antes do tempo de colisão Mariner 6 começa ganhar mais aceleração que Voyager 1 e conseqüentemente assume uma posição final maior que Voyager 1, mesmo tendo $\dot{m}$ inferior ao da Voyager 1.

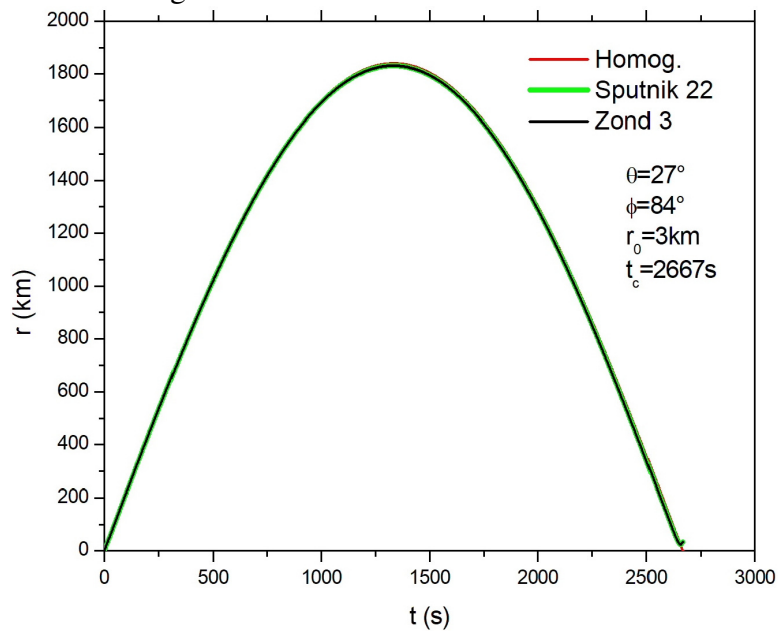
Figura 23: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor. Voyager 1 $\dot{m} = 0,032 \text{ kg/s}$ e Mariner 6 $\dot{m} = 0,019 \text{ kg/s}$.

Na Figura 24 Sputnik 22 e Zond 3 possuem praticamente o mesmo $\dot{m}$ e como é esperado as suas curvas de dinâmica relativa são iguais, atingindo um valor máximo menor quando comparado com a curva para o caso homogêneo e também a posição relativa dos dois veículos nesse caso praticamente tem o mesmo valor.

Figura 24: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor. Sputnik 22 $\dot{m} = 0,04 \text{ kg/s}$ e Zond 3 $\dot{m} = 0,043 \text{ kg/s}$.

Quanto maior for $r(t_c)$ maior será o tamanho do detrito espacial que o veículo consegue escapar. Dizemos que um veículo é mais eficiente do que outro de acordo com o tamanho do detrito que ele consegue escapar. Para fazer uma análise comparativa registramos na Tabela 12 as massas dos veículos com os seus respectivos empuxos e posições finais.

Tabela 12: Posição relativa final dos veículos espaciais para as mesmas condições iniciais. Empuxo aplicado na mesma direção de $\vec{v}_e$.

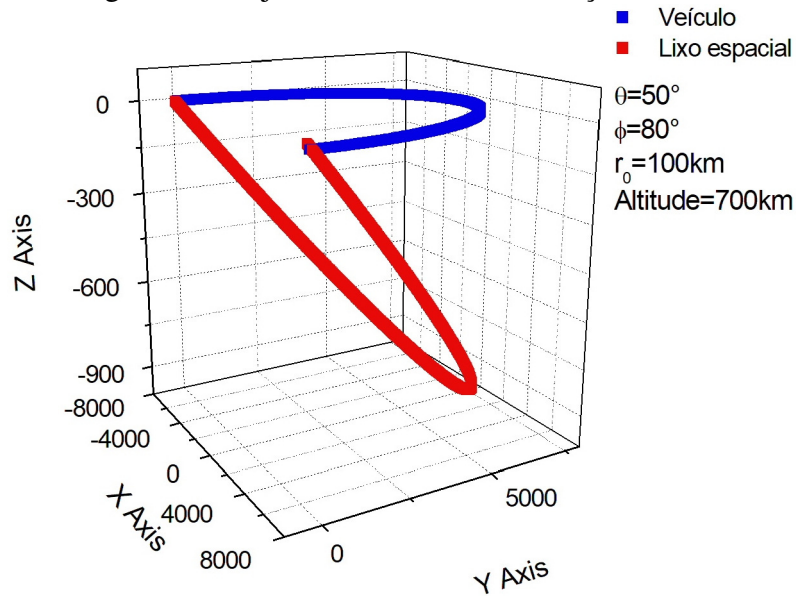
Veículo	Massa (kg)	$r(t_c)$ (km)	T (N)
Marte 1M	650	33,91	14,5
Sputnik 22	893,5	34,33	20
Mariner 3	260,8	66,31	6
Zond 3	960	34,46	21,5
Mariner 6	411,8	73,55	9,5
Voyager 1	721,9	33,84	16
SOHO	1850	105,92	46
MAVEN	809	33,72	18
SCD-1	115	33,78	2,55
CBERS 2B	1540	59,44	39

Fonte: Produção do próprio autor.

Se compararmos Marte 1M, Sputnik 22 e SOHO, nota-se que o veículo que aplicou maior empuxo obteve maior posição relativa final, diferente do que acontece quando comparamos Mariner 3 com Zond 3, vemos que Mariner 3 tem valor de empuxo menor que o de Zond 3 e ainda assim tem posição final maior que Zond 3. Esperava-se que Zond 3 por ter maior empuxo obtivesse maior posição relativa final quando comparado com Mariner 3. Notamos o mesmo comportamento quando fizemos comparações entre Mariner 6, Voyager 1 e MAVEN. Devemos lembrar de outra grandeza que não está explícita na solução do modelo linear. A posição relativa final também é condicionada a massa dos veículos que estão submetidos ao mesmo impulso específico. A massa de Mariner 3 é menor que a massa de Zond 3, por isso obteve posição final maior mesmo usando um empuxo mais baixo que o de Zond 3. Quanto a eficiência da manobra evasiva o veículo SOHO foi mais eficiente na altitude de $220km$, a posição relativa final desse veículo nos permite escapar de lixo espacial de maior tamanho que os demais.

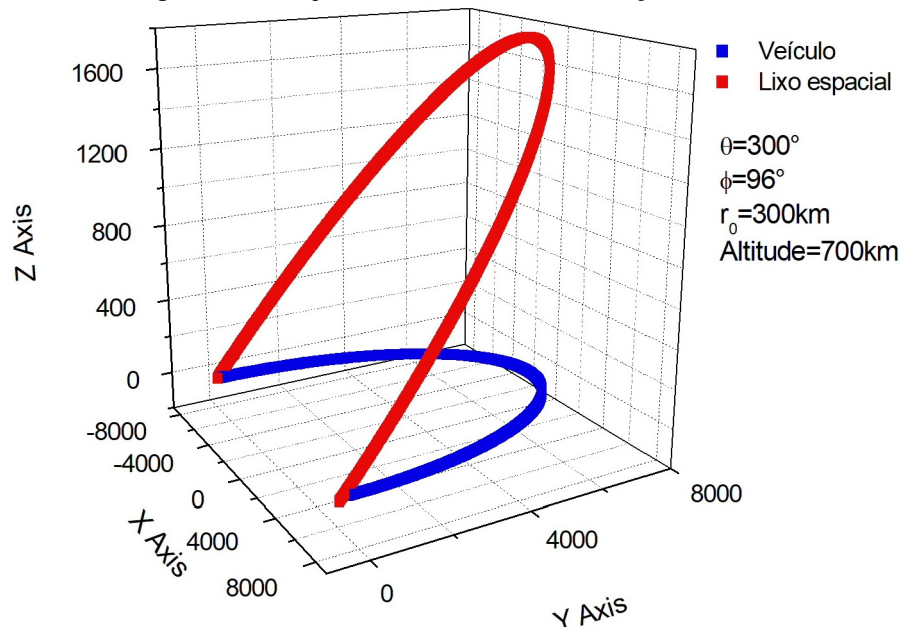
Para a altitude de $700km$ simulamos para todos os veículos, três condições iniciais diferentes. Com posições relativas iniciais de $100km$, $300km$ e $500km$. Pelo fato das curvas de dinâmica relativa serem muito parecidas mostramos apenas os casos para Mariner 3 e SOHO, os demais casos encontram-se no Apêndice A. As Figuras 25-27 mostram a trajetória de colisão de duas partículas pontuais juntamente com as condições iniciais de colisão e os elementos orbitais do detrito. As manobras de evasão dos veículos foram realizadas sob essas circunstâncias.

Figura 25: Trajetória de colisão em relação a Terra



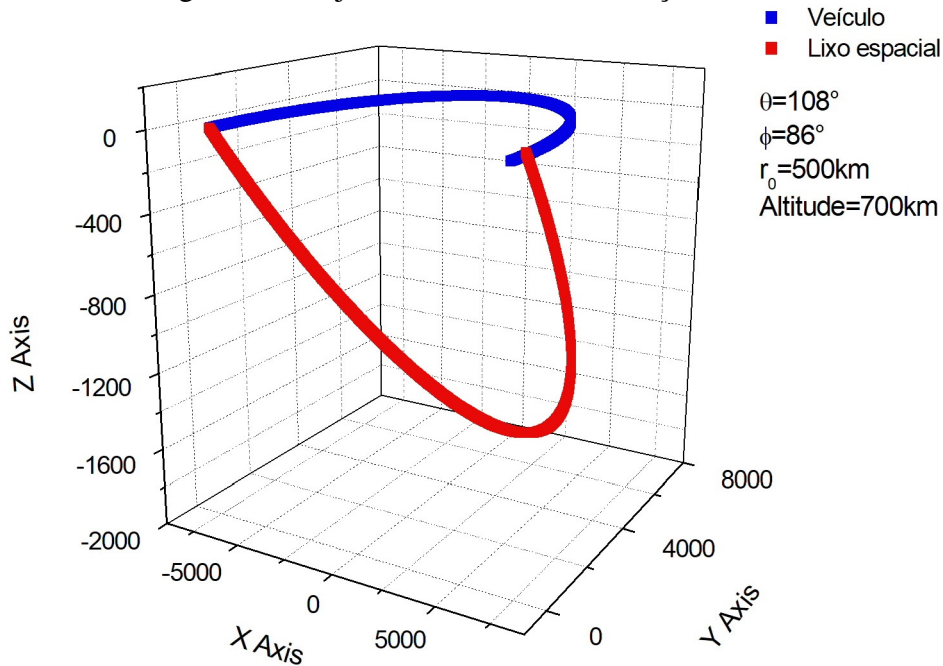
Fonte: Produção do próprio autor. Elementos orbitais do detrito calculados entre os instantes 1000s, 1001s e 1002s. Semi-eixo maior ($a \simeq 7098,5\text{km}$), excentricidade ($e \simeq 0,005$), Inclinação da órbita ($i \simeq 8^\circ$), longitude do nodo ascendente ($\Omega \simeq 180^\circ$), argumento do pericentro $\bar{\omega} \simeq 51,51^\circ$ e anomalia verdadeira ($f \simeq 172^\circ$).

Figura 26: Trajetória de colisão em relação a Terra.



Fonte: Produção do próprio autor. Elementos orbitais do detrito calculados entre os instantes 1000s, 1001s e 1002s. Semi-eixo maior ($a \simeq 6916,54\text{km}$), excentricidade ($e \simeq 0,06$), Inclinação da órbita ($i \simeq 14^\circ$), longitude do nodo ascendente ($\Omega \simeq 0,92^\circ$), argumento do pericentro $\bar{\omega} \simeq 65^\circ$ e anomalia verdadeira ($f \simeq 127^\circ$).

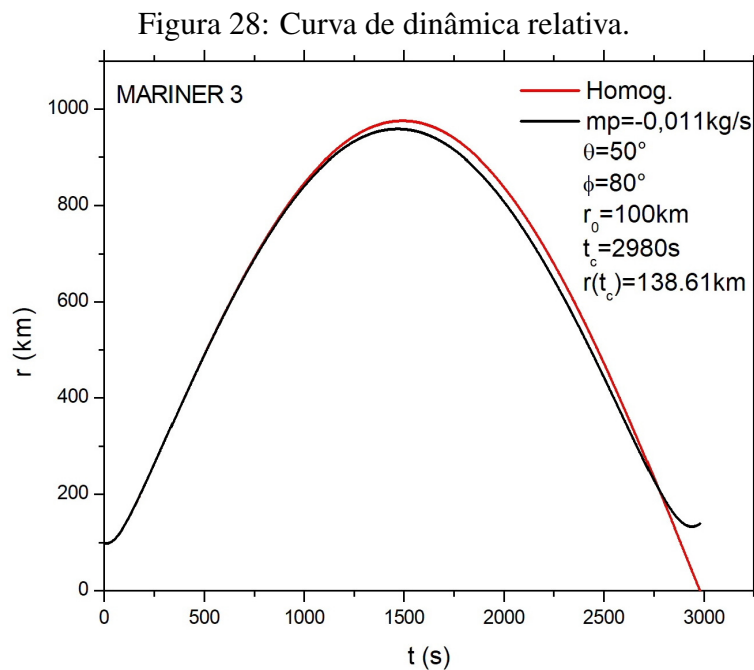
Figura 27: Trajetória de colisão em relação a Terra



Fonte: Produção do próprio autor. Elementos orbitais do detrito calculados entre os instantes 1000s, 1001s e 1002s. Semi-eixo maior ($a \simeq 7240,34\text{km}$), excentricidade ($e \simeq 0,03$), Inclinação da órbita ($i \simeq 15,46^\circ$), longitude do nodo ascendente ($\Omega \simeq 179,6^\circ$), argumento do pericentro $\bar{\omega} \simeq 34^\circ$ e anomalia verdadeira ($f \simeq 156^\circ$).

Fazendo uma análise de forma geral nas Figuras 28-33 notamos que as curvas de dinâmica relativa do modelo linear estão mais afastadas do caso homogêneo, quando comparadas às curvas de dinâmica relativa na altitude de 220km , isso se deve ao fato de que na altitude de 700km a força gravitacional da Terra é menos intensa e os veículos se movem com mais facilidade. Também notamos que as curvas oscilam antes dos primeiros 250s, essas oscilações ocorrem porque no início do movimento relativo o veículo e o detrito se aproximam de um determinado ponto da órbita circular, porém o detrito não intercepta esse ponto, nas Figuras 25-27 é possível observar com precisão o ponto onde eles se aproximam sem se tocar. Logo após a posição relativa atingir seu valor máximo o veículo e o detrito começaram a se aproximar do ponto de colisão, mas como propulsor do veículo está acionado ele passa pelo ponto de colisão antes do detrito evitando a colisão. Notamos ainda mais uma oscilação entre os instantes 2750 e 2980s, ela ocorre porque depois que o veículo passa pelo ponto de colisão a distância relativa começa a aumentar. Uma outra observação importante a se fazer é influência das condições iniciais sobre o valor da posição relativa máxima. Nos casos simulados o valor máximo das curvas aumentaram na média em que aumentamos a posição inicial dos objetos. Para $r_0 = 500\text{km}$, todos os veículos com propulsor acionado atingiram posições relativas muito perto de $r_{max} = 2000\text{km}$.

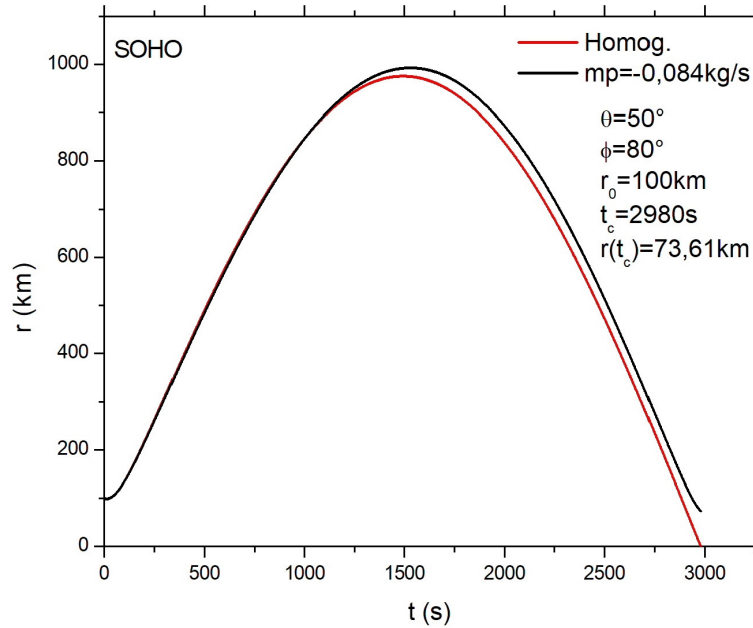
Na Figura 28 só começamos a notar uma aceleração significativa entre os instantes $1000s$ e $1500s$ onde o veículo Mariner 3 se aproxima do detrito e depois de atingir a posição relativa máxima começa ganhar mais aceleração até que depois do instante $2500s$ ele atinge valores de posições relativas equivalentes a que teria sem propulsor ligado e pelo ponto de colisão antes do detrito realizando com sucessor a manobra de evasão.



Fonte: Produção do próprio autor.

Na Figura 29, SOHO começa a ter uma aceleração perceptível a partir do instante $1250s$ quando assume uma posição relativa mais afastada do detrito até atingir um valor máximo próximo de 1000km e então a posição relativa começa a diminuir e é notório também que ao final da dinâmica relativa a manobra de evasão acontece, pois $r(t_c)$ é diferente de zero.

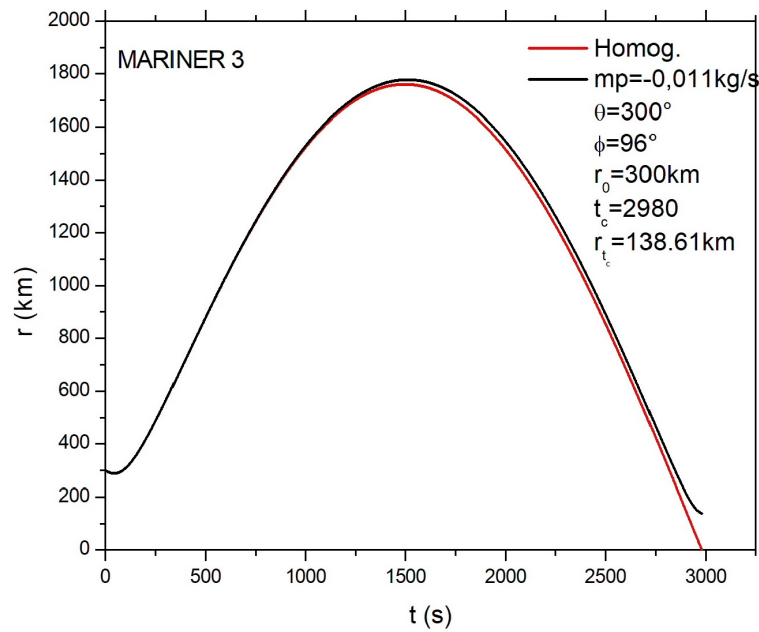
Figura 29: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor.

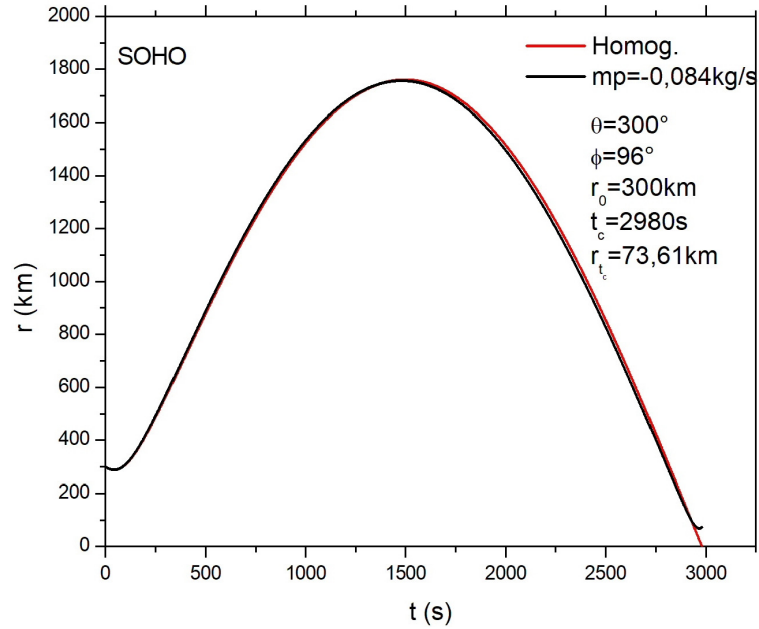
Nas Figuras 30 e 31 temos curvas com os mesmos comportamento e interpretações que as Figuras 28 e 29, só que nesse caso as condições iniciais aplicadas fazem Mariner 3 assumir uma posição relativa mais afastada do detrito e SOHO uma posição relativa mais próxima do detrito só que para valores de posição relativa muito próximos da posição relativa que teria se o propulsor tivesse desligado, observa-se que a curva da solução do modelo linear praticamente contorna a curva do caso homogêneo. O r_{max} atingido nesses casos são aproximadamente 1800km e nesses dois casos os veículos também realizam a manobra evasiva com sucesso.

Figura 30: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 31: Curva de dinâmica relativa.

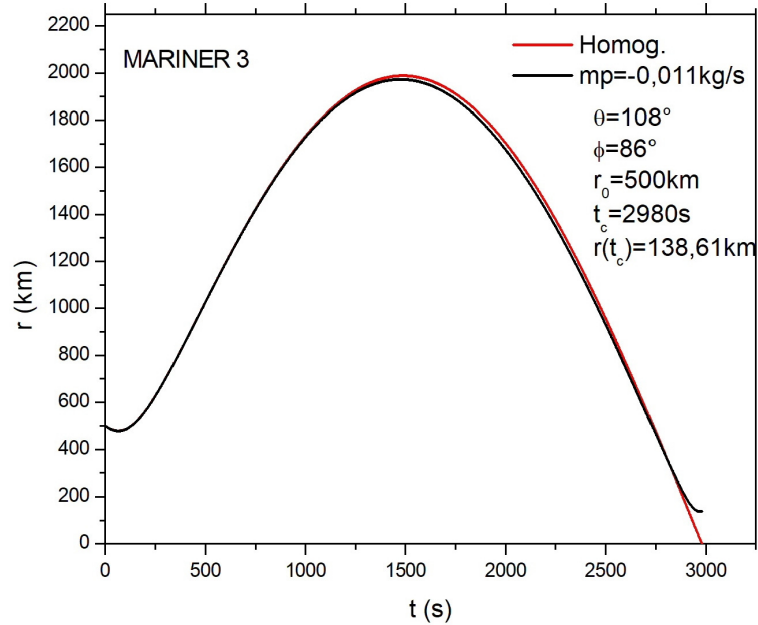


Fonte: Produção do próprio autor.

As Figuras 32 e 33 em termos de comportamento elas têm exatamente as mesmas interpretações de comportamentos das Figuras 28 e 29 as únicas diferenças é que as curvas da solução do modelo linear estão mais próximas do caso homogêneo e também valor de r_{max} que chega próximo de 2000km . Os demais veículos para essas mesmas condições iniciais têm as mesmas interpretações em alguns casos a curva do modelo linear prati-

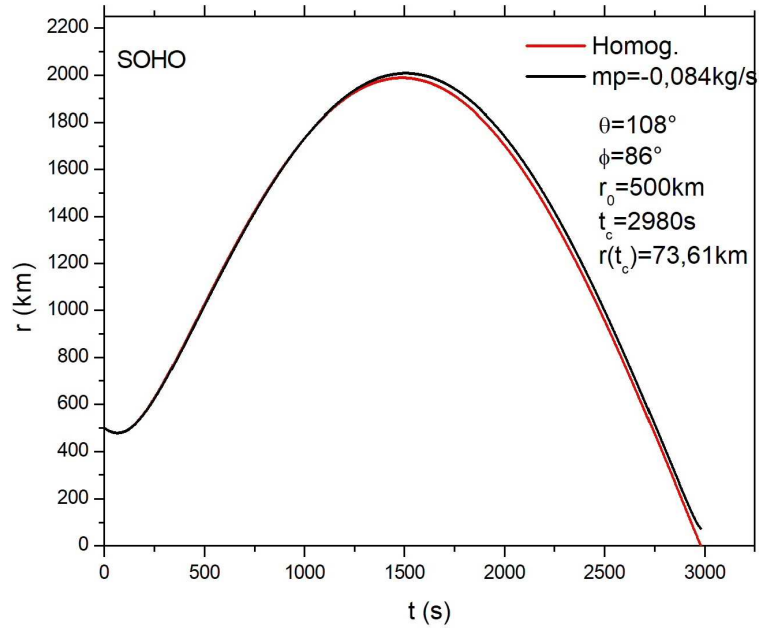
camente contorna a curva do caso homogêneo, esses gráficos por terem interpretações repetidas estão no Apêndice A.

Figura 32: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 33: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor.

Registrados na Tabela 13 o afastamento final de todos os veículos para determinar qual deles é mais eficiente na altitude de $700km$. Notamos que alguns veículos aumentaram significativamente os seus valores de $r(t_c)$, porém o veículo com maior $r(t_c)$ é o Mariner 3. Quando esse veículo estava na altitude de $220km$ seu empuxo era de $6N$ e na altitude de $700km$ caiu para $5,5N$ e mesmo com essa diminuição do empuxo sua eficiência foi maior do que quando estava mais próximo da Terra.

Tabela 13: Posição relativa final dos veículos espaciais para condições iniciais diferentes na altitude de $700km$. Empuxo aplicado na mesma direção de $\vec{v}_e$.

Veículo	Massa (kg)	$r(t_c)$ (km)	T (N)
Marte 1M	650	84,38	13,5
Sputnik 22	893,5	38,86	18
Mariner 3	260,8	138,61	5,5
Zond 3	960	94,49	20
Mariner 6	411,8	66,98	8,5
Voyager 1	721,9	38,56	14,5
SOHO	1850	73,61	42
MAVEN	809	46,18	16,5
SCD-1	115	100,49	2,4
CBERS 2B	1540	56,38	35,5

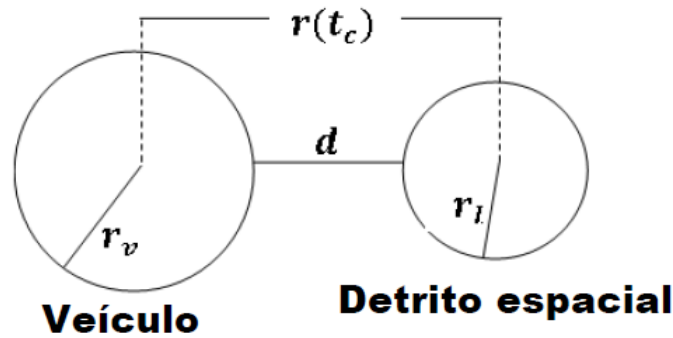
Fonte: Produção do próprio autor.

Pela Lei da Gravitação Universal podemos pensar que um veículo usando o modelo linear é mais eficiente quanto maior for a altitude em que ele se encontra. Assim o veículo tem menos influência da força gravitacional da Terra e por esse motivo ele se moverá com mais facilidade, atingindo um $r(t_c)$ maior que numa altitude mais próxima da Terra. Essa explicação se aplica muito bem a alguns veículos quando comparamos os $r(t_c)$ registrados na Tabela 12 com os $r(t_c)$ da Tabela 13, porém é falha quando comparamos os $r(t_c)$ de Mariner 6, SOHO e CBERS 2B. Esses três veículos foram menos eficiente quando os afastamos da Terra e a princípio podemos pensar que os resultados fornecidos pelo modelo linear são inconsistentes com a Lei da Gravitação Universal de Newton, mas nessa questão devemos levar em conta também a condição de existência do logaritmo que tem interferência direta na escolha do valor de $\dot{m}$. Quando aumentamos a altitude aumentamos também t_c e como consequência temos a diminuição dos valores de $\dot{m}$ causando a diminuição dos empuxos de todos os veículos. Com a diminuição de seus empuxos os veículos Mariner 6, SOHO e CBERS 2B não aceleraram o suficiente para manter a mesma eficiência que teriam se estivessem na altitude de $220km$, pois eles tiveram que percorrer um arco de órbita maior com um empuxo menor. A consistência física dos resultados fornecidos pelas soluções do modelo linear só é notada se analisarmos em conjunto a massa, o empuxo e a altitude em que o veículo é colocado. Por exemplo, se formos comparar

$r(t_c)$ dos veículos Marte 1M e SCD-1 na Tabela 13 considerando somente os empuxos e desprezando as massas dos veículos não poderíamos explicar o motivo de SCD-1 obter uma posição final maior que Marte 1M aplicando um empuxo muito inferior.

Nas simulações da solução do modelo linear consideramos o veículo e o detrito espacial como partículas pontuais, mas numa situação real a manobra evasiva acontece quando a distância (d) entre as bordas do veículo e do detrito é maior que a diferença entre a posição final e a soma dos raios do veículo e do detrito, como é ilustrado na Figura 34. Havendo a possibilidade de o veículo espacial colidir com outros detritos ao realizar uma manobra evasiva o escape da colisão pode ser feito visando evitar a colisão com uma nuvem formada por esses detritos.

Figura 34: Ilustração de uma manobra evasiva numa situação real. Onde r_v é o raio do veículo e r_l é o raio do lixo espacial.



Fonte: Produção do próprio autor.

O estudo da dinâmica relativa de manobras de evasão com as soluções do modelo linear foi realizado mantendo o sistema de propulsão acionado durante todo tempo de manobra. Na prática esse procedimento é desnecessário pois gasta-se muito combustível.

Se ao final de um intervalo de tempo inferior ao tempo total disponível para a realização da manobra desligássemos o sistema de propulsão, a dinâmica relativa passaria a ser regida pelas soluções das equações de Clohessy-Wiltshire para o caso homogêneo, com condições iniciais diferentes das usadas na solução do modelo linear (caso particular). Porém não obtivemos equações para determinar essas condições iniciais e por esse motivo realizou-se manobras evasivas com o propulsor ligado durante todo intervalo de disponível para escapar da colisão.

Uma outra maneira de realizar manobras evasivas com o modelo linear seria obtendo soluções para a dinâmica relativa colocando a força de propulsão somente em uma coordenada, na coordenada x , por exemplo, em vez de posicioná-la de forma a ter as três componentes x , y e z iguais.

Pelo fato de o modelo linear possuir parâmetros tecnológicos diferentes do exponencial não faremos uma comparação entre esses dois modelos, pois o parâmetro de maior interesse seria valores de $\dot{m}$ que no modelo exponencial varia com o tempo e no modelo linear

ele é constante e influi diretamente na convergência das séries e condição de existência de logaritmo. Para fazer algo do tipo teríamos encontrar alguma relação matemática entre os valores de m dos dois modelos e que também completasse a taxa de frequência γ do modelo exponencial e não existe esse fator de frequência no modelo linear. E portanto depois de cumprirmos com o objetivo de realizarmos manobras evasivas com as soluções do modelo linear finalizamos nosso trabalho.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi investigada a viabilidade da implementação de manobras evasivas de veículos espaciais usando as soluções das equações de Clohessy-Wiltshire, admitindo o modelo linear para o decaimento da massa de combustível. No processo de resolver essas equações analiticamente encontrou-se integrais que possuem soluções em séries. Devido à forma como foram feitas as escolhas para aplicar o método da substituição obteve-se uma solução com problemas para convergir computacionalmente, porém fazendo escolhas mais adequadas para aplicar o método da substituição e usando o método de integração por partes para manipular as séries foi possível reescrevê-las em forma de funções muito estudadas na literatura e assim obteve-se uma solução que converge dentro de alguns limites impostos pela condição de existência de logaritmo.

As soluções de todas as coordenadas ficaram dependentes de séries que contêm fatoriais e isso impôs limitações computacionais para calculá-las. Os valores inseridos nelas podem requerer a soma de muitos termos para a série convergir e fazer o computador ultrapassar a capacidade de realizar os cálculos de fatoriais. Nessas séries os fatoriais dependem dos valores que os índices dos somatórios assumem, somar muitos termos significa calcular somatórios de números cada vez maiores. Como a condição de existência do logaritmo limitou a escolha de $\dot{m}$ e todas as séries têm dependência direta desse fator, então teve-se que encontrar valores de $\dot{m}$ dentro desse intervalo de condição de existência do logaritmo que também se adequasse a convergência das séries.

A escolha inadequada do valor de $\dot{m}$, mesmo que este esteja satisfazendo à condição de existência do logaritmo, também pode causar inconsistências físicas. Nas simulações de manobra evasivas dependendo do valor escolhido para $\dot{m}$ pode fazer o combustível do veículo acabar antes de finalizar a manobra e quando isso acontece pelo fato de o valor estar dentro da condição de existência do logaritmo, o algoritmo continua com o cálculo da posição relativa e ao final da manobra o veículo tem massa final inferior a sua massa sem combustível. A escolha de $\dot{m}$ também tem influência direta no acréscimo da velocidade orbital do veículo, e se esse acréscimo for muito alto pode fazer o veículo começar a ir para longe da sua órbita nominal fazendo sua velocidade angular não ser constante invalidando as soluções das equações de Clohessy-Wiltshire.

Devido às limitações impostas ao modelo linear e com base nos resultados obtidos chega-se à conclusão de que o modelo é aplicável somente em órbitas próximas da Terra. Como o modelo foi aplicado assumindo que o propulsor do veículo permaneceu ligado durante toda a manobra evasiva, durante um intervalo de tempo maior que a metade do

seu período orbital, quanto maior for a altitude maior será esse tempo e pela condição de existência do logaritmo o valor de $\dot{m}$ será cada vez menor e esse fato pode trazer limitações computacionais para a convergência das séries.

Por causa de todos esses fatores não é possível definir um $\dot{m}$ que seja comum a qualquer veículo, pois os resultados mostraram que para cada massa de veículo espacial existe um determinado $\dot{m}$ para satisfazer às limitações do modelo linear. Essas limitações têm interferência direta no empuxo aplicado ao veículo e conseqüentemente interfere na posição relativa final e isso significa que existem tamanhos específicos de detritos espaciais que cada veículo consegue escapar.

Além das limitações com relação à convergência de séries, as curvas de posição relativa dadas pelas soluções do caso homogêneo e do modelo linear têm que obedecer às condições de expansão e essa obediência depende das condições iniciais que são implementadas nas soluções. As condições iniciais também podem colocar o veículo e o detrito em órbitas tão próximas que a colisão ocorreria com velocidade relativa igual a zero tornando desnecessário a realização de uma manobra evasiva, por isso houve a necessidade mapear condições iniciais que fornecessem velocidade de colisão com poder destrutivo e que também fizesse com que a posição relativa obedecesse às condições de expansão.

Quanto ao tipo de propulsão, o modelo linear se mostrou aplicável somente quando foi usada velocidade de exaustão típica de propulsores com propelente de gás frio, os demais tipos de propulsão fornecem velocidades de exaustão muito alta dando acréscimo muito alto na velocidade orbital do veículo e também violando as condições de expansão. Seria ideal se fosse possível aplicar velocidades de exaustão típicas de propulsores que utilizam plasma, pois esses propulsores não deixam resíduos que contribuem para o aumento do detrito espacial.

Nas manobras apresentadas aqui foram desprezadas forças de perturbação tais como o arrasto atmosférico e achatamento da Terra, a implicação física disso é que o detrito espacial permanecerá na órbita em que foi condicionado pelas condições iniciais e por isso, após a manobra evasiva o veículo espacial não poderá retornar a sua órbita nominal este deverá ir para uma outra órbita, próxima o suficiente para manter a velocidade angular que estava antes da manobra e ainda deve realizar correções na inclinação de sua órbita porque uma componente da força de propulsão foi aplicada perpendicularmente ao plano da órbita circular, em razão dessas correções foi importante ter no final da manobra evasiva uma certa quantidade de combustível para realizar essa tarefa.

A existência de determinadas condições iniciais que quando aplicadas ao modelo linear fornecem curvas de dinâmica relativa que satisfazem às condições de expansão e o fato de também existir dentro da condição de existência de logaritmo determinados valores de $\dot{m}$ que possibilitam as convergências das séries presentes nas soluções das equações de Clohessy-Wiltshire para o modelo linear, podemos concluir que se a tecnologia do veículo espacial contemplar a todas essas limitações é possível obter sucesso na implementação dessas soluções em manobras evasivas, pois os resultados fornecidos por elas podem ser

interpretados físicamente.

REFERÊNCIAS

- BIBLARZ, O.; PRICE, E. W. Rocket jet-propulsion device and vehicle. **Encyclopedia Britannica**. 2017. Disponível em: <https://www.britannica.com/technology/rocket-jet-propulsion-device-and-vehicle>. Acesso em: 17 dez. 2017.
- CHOBOTOV, V. A. **Orbital mechanics**. 3. ed. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002. 451 p.
- CLOHESSY, W. H.; WILTSHIRE, R. S. Terminal guidance system for satellite rendezvous. **Journal of the Aerospace Sciences**, v. 27, jan. 1960. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/8.8704?journalCode=jasps>. Acesso em: 05 dez 2017.
- CORDELLI, A.; FARINELLA, P.; ROSSI, A. The influence of the fragmentation threshold on the long term evolution of the orbital debris environment. **Planetary and Space Science**, v. 46, fev. 1998. Disponível em: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998P%26SS...46..691C>. Acesso em: 05 dez 2017.
- CURTIS, H. D. **Orbital mechanics for engineering students**. 3. ed. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013. 687 p.
- ESA. **Position space debris mitigation: implementing zero debris creation zones**. 1. ed. Noordwijk: ESA Publications Division, 2006. Disponível em: <http://www.esa.int/esapub/sp/sp1301/sp1301.pdf>. Acesso em: 13 dez. 2017.
- GOEBEL, D. M.; KATZ, I. **Fundamentals of electric propulsion: ion and hall thrusters**. 1. ed. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2008. 486 p.
- GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of integrals, series, and products**. 7. ed. Califórnia: Elsevier, 2007. 1140 p.
- GURFIL, P. Relative Motion between Elliptic Orbits: Generalized Boundedness Conditions and Optimal Formationkeeping. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 28, jul. 2005. Disponível em: <http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.9439>. Acesso em: 05 dez 2017.
- HALL, L. The History of Space Debris. **Space Traffic Management Conference**, v. 1, jun. 2014. Disponível em: <http://commons.erau.edu/stm/2014/thursday/19>. Acesso em: 18 mar 2016.
- HENNEMANN, L.; ANDRADE, J. C.; SOUSA COSTA, F. Experimental investigation of a monopropellant thruster using nitrous oxide. **Journal of Aerospace Technology and Management**, v. 6,

out. 2014. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S2175-91462014000400363&script=sci_abstract>. Acesso em: 05 dez 2017.

HILL, G. W. Researches in the Lunar Theory Author. **American Journal of Mathematics**, v. 1, jan. 1878. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2369430>>. Acesso em: 05 dez 2017.

JAHN, R. G. **Physics of electric propulsion**. 1. ed. Nova Iorque: McGRAW-Hill, 1968. 339 p.

JESUS, A. D. C. et al. Evasive maneuvers in space debris environment and technological parameters. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2012, aug. 2012. Disponível em: <<https://www.hindawi.com/journals/mpe/2012/126521/cta/>>. Acesso em: 05 dez 2017.

JESUS, A. D. C.; SOUSA, R. R. Processing optimized for symmetry in the problem of evasive maneuvers. **Computational and Applied Mathematics**, v. 34, jul. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40314-014-0147-6>>. Acesso em: 05 dez 2017.

KAPLAN, M. H. **Modern spacecraft dynamics and control**. 1. ed. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1976. 415 p.

KASDIN, N. J.; GURFIL, P.; KOLEMEN, E. Canonical modelling of relative spacecraft motion via epicyclic orbital elements. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 92, ago. 2005. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s10569-004-6441-7>>. Acesso em: 05 dez 2017.

KESSLER, D. J. Orbital Debris Environment and Data Requirements. **NASA Johnson Space Center**, v. 3035, jun. 1989. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19890014176.pdf>>. Acesso em: 05 dez 2017.

KESSLER, D. J. Collisional cascading: The limits of population growth in low earth orbit. **Advances in Space Research**, v. 11, jan. 1991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/027311779190543S>>. Acesso em: 05 dez 2017.

KESSLER, D. J.; COUR-PALAIS, B. G. Collision frequency of artificial satellites: The creation of a debris belt. **Journal of Geophysical Research**, v. 83. 1978. Disponível em: <<http://webpages.charter.net/dkessler/files/Collision%20Frequency.pdf>>. Acesso em: 05 dez 2017.

LEE, D.; COCHRAN, J. E.; JO, J. H. Solutions to the variational equations for relative

motion of satellites. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 123 I, may. 2007. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/1.24373>>. Acesso em: 05 dez 2017.

LIU, J.-C.; JOHNSON, N. L. Risks in space from orbiting debris. **Science**, v. 311, jan. 2006. Disponível em: <<http://science.sciencemag.org/content/311/5759/340>>. Acesso em: 05 dez 2017.

PENG, B. Space debris: The hubris of humanity. **Berkeley Scientific Journal**, v. 19, jul. 2015. Disponível em: <<https://bsj.berkeley.edu/wp-content/uploads/2015/10/Complete-Spring-2015-BSJ-Waste.pdf>>. Acesso em: 05 dez 2017.

PINHEIRO, E. C. **Manobras evasivas e propulsão plama linear**. 2014. 75.f. Monografia (Licenciatura em Física) - UEFS (Universidade Estadual de Feira de Santana), Feira de Santana, Bahia. 2014.

PÔRTO, C. D. S. Os foguetes: história e desenvolvimento. **Astronomia, Astronáutica e Ciências Espaciais na Escola**. 2010. Disponível em: <https://educacaoespacial.files.wordpress.com/2010/10/os-foguetes-ii_revisado.pdf>. Acesso em: 05 dez 2017.

RAMOS, T. S. SOUZA COSTA, F. Investigação teórica de um propulsor eletrotérmico-catalítico usando peróxido de hidrogênio. **Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Cachoeira Paulista. São Paulo**, v. 1. 2009. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/47444521_Investigacao_Teorica_de_Um_Propulsor_Eletermico-Catalitico_Usando_Peroxido_de_Hidrogenio>. Acesso em: 05 dez 2017.

ROA, J.; PELAEZ, J. The elliptic rendezvous problem in dromo formulation. **Advances in the Astronautical Sciences**, v. 152, jan. 2014. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/280134802_The_elliptic_rendezvous_problem_in_DROMO_formulation>. Acesso em: 05 dez 2017.

RUSSELL, R. P.; LANTOINE, G. Optimal control of relative motion in arbitrary fields: Application at deimos. **The Journal of the Astronautical Sciences**, v. 59, jun. 2012. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s40295-013-0013-6>>. Acesso em: 05 dez 2017.

SALTER, A. W. Space debris: A law and economics analysis of the orbital commons. **Mercatus Working Paper, Mercatus Center at George Mason University, Arlington, VA**, v. 1, set. 2015. Disponível em: <<https://www.mercatus.org/system/files/Salter-Space-Debris.pdf>>. Acesso em: 05 dez 2017.

SANTOS, C. C. C. D. P. **Estudo da dinâmica de pequenos detritos espaciais e mete-**

oróides. 2007. 263.f. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica e Controle) - INPE (Instituto de Pesquisas Espaciais), São José dos Campos, São Paulo. 2007.

SCHAUB, H. Relative orbit geometry through classical orbit element differences. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 27, sep. 2004. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.12595>>. Acesso em: 05 dez 2017.

SOUSA, R. R. **Estudo de manobras evasivas com perturbações orbitais.** 2015. 83.f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, São Paulo. 2015.

SOUZA, J. H. C. **Estudo da dinâmica de partículas em um propulsor a plasma do tipo Hall com imãs permanentes.** 2006. 60.f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal. 2006.

TELES, T. N. **Análise algébrica e numérica de manobras de rendezvous num ambiente com detritos e em formation flying.** 2006. 79.f. Monografia (Bacharel em Física)-UEFS (Universidade Estadual de Feira de Santana), Feira de Santana, Bahia. 2006.

WINTER, O. C.; MELO, C. F. D. **A conquista do espaço: do Sputnik à missão centenário.** 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007. 315 p. Disponível em: <http://www.cdcc.usp.br/cda/oba/aeb/a-conquista-do-espaco/index.html>. Acesso em: 10 out. 2015.

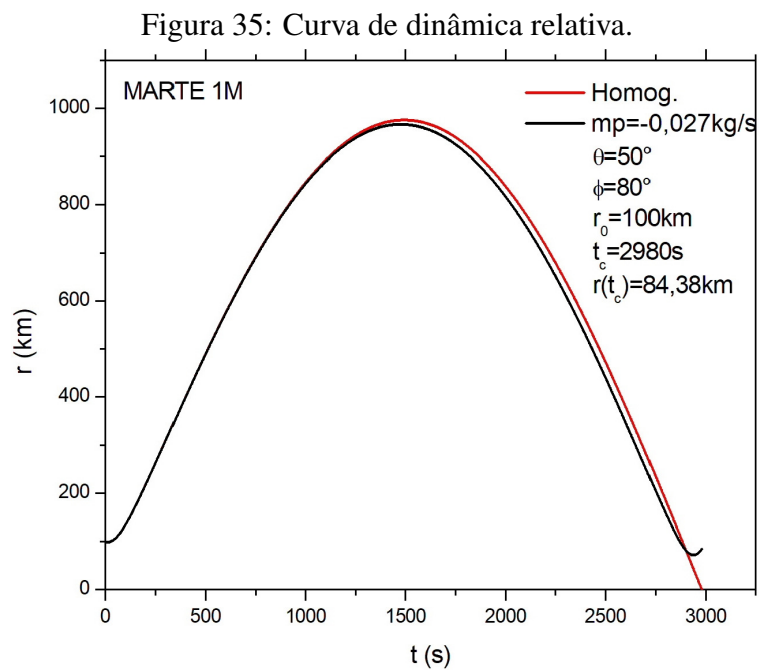
WORMNES, K. et al. Esa technologies for space debris remediation. In: 6th European Conference on Space Debris, 6, 2013, Darmstadt. **Anais...** Darmstadt: ESA, 1994. p.85-93. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2013ESASP.723E..85W>>. Acesso em: 05 dez 2017.

YAMANAKA, K.; ANKERSEN, F. New State Transition Matrix for Relative Motion on an Arbitrary Elliptical Orbit. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 25, jan. 2002. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/2.4875>>. Acesso em: 05 dez 2017.

ZANETTI, R. Optimal glideslope guidance for spacecraft rendezvous. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 34, sep. 2011. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.54103>>. Acesso em: 05 dez 2017.

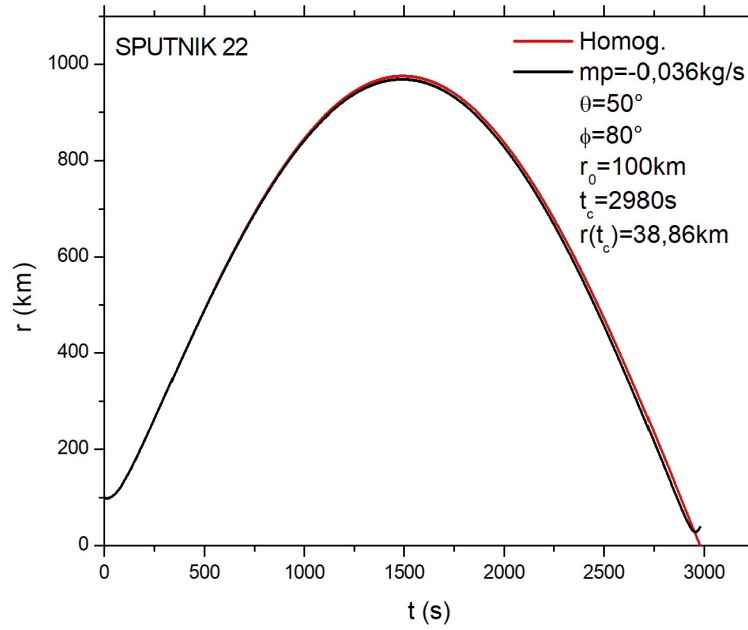
APÊNDICE A: CURVAS DE DINÂMICA RELATIVA I

Nas Figuras 35-42 constam as curvas de dinâmica relativa para condições iniciais com $r_0 = 100km$.



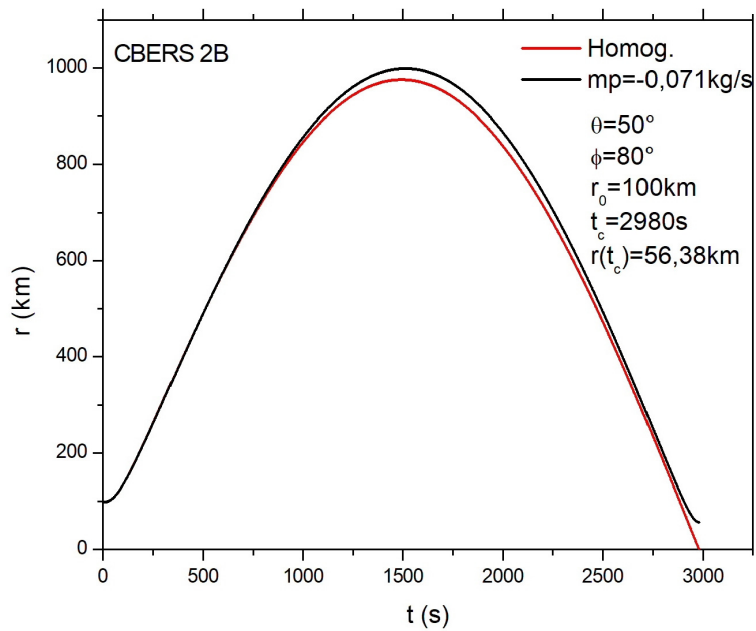
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 36: Curva de dinâmica relativa.



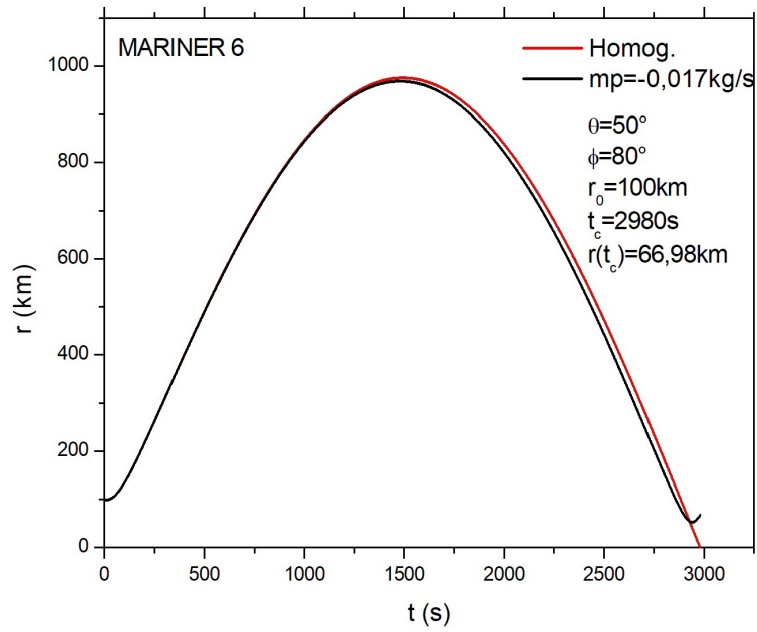
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 37: Curva de dinâmica relativa.



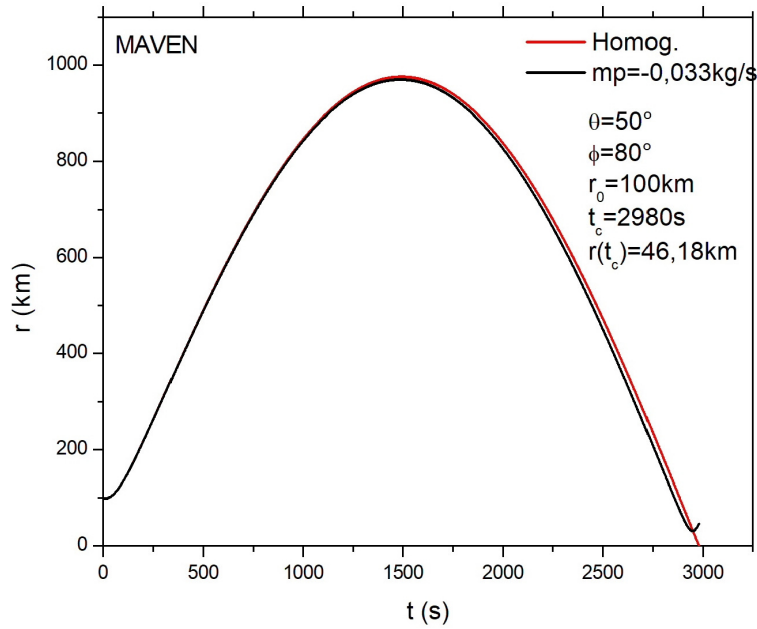
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 38: Curva de dinâmica relativa.



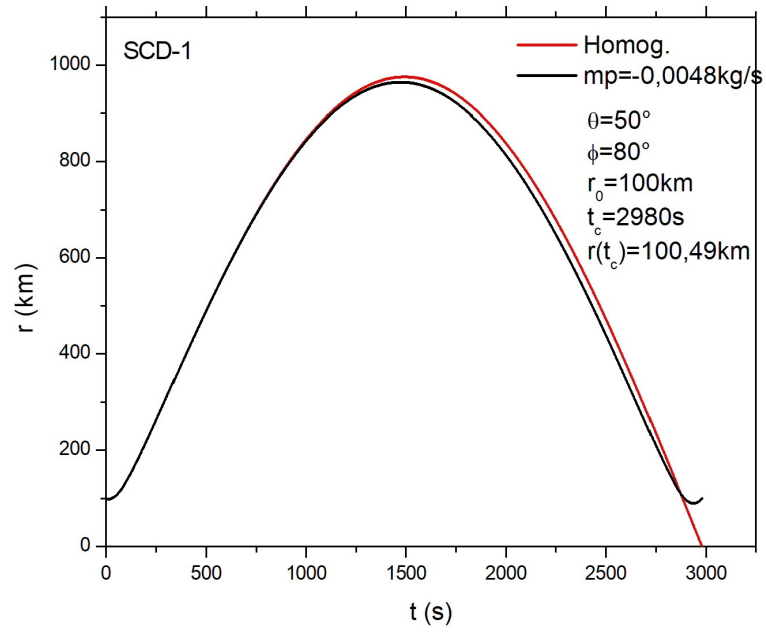
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 39: Curva de dinâmica relativa.



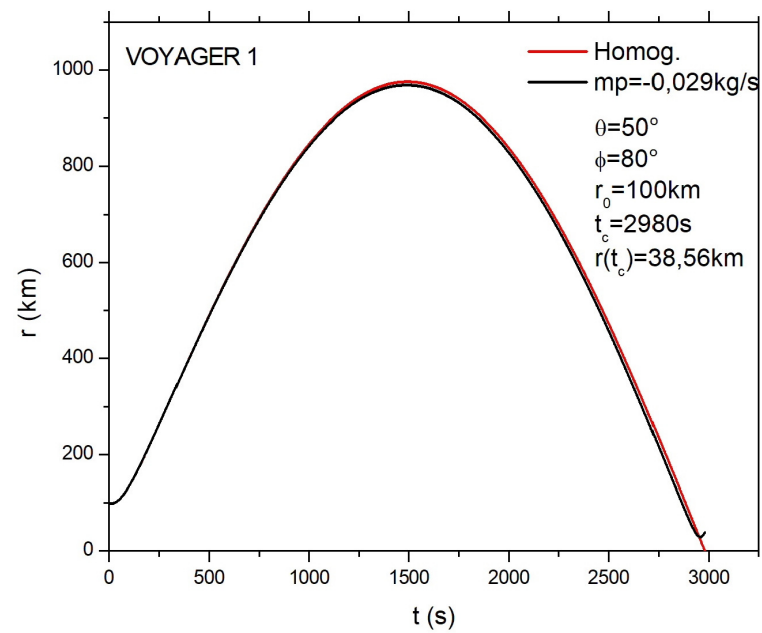
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 40: Curva de dinâmica relativa.



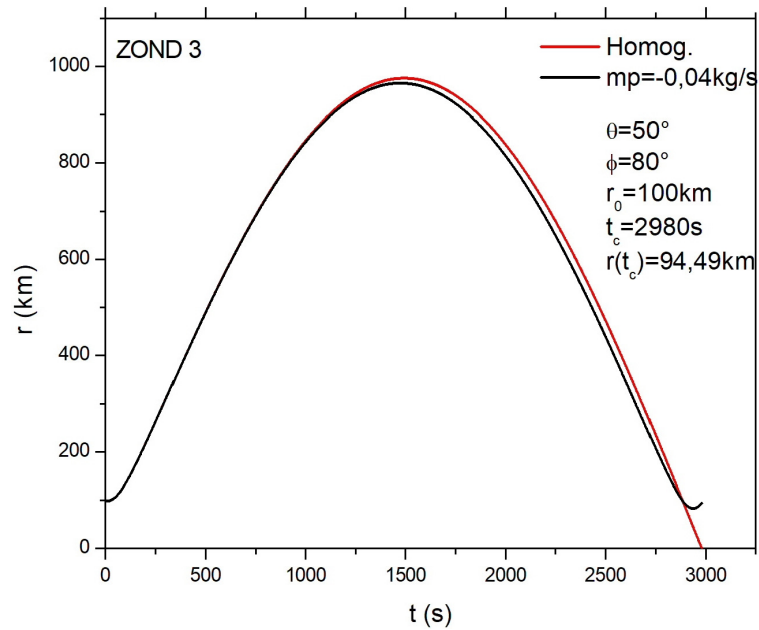
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 41: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor.

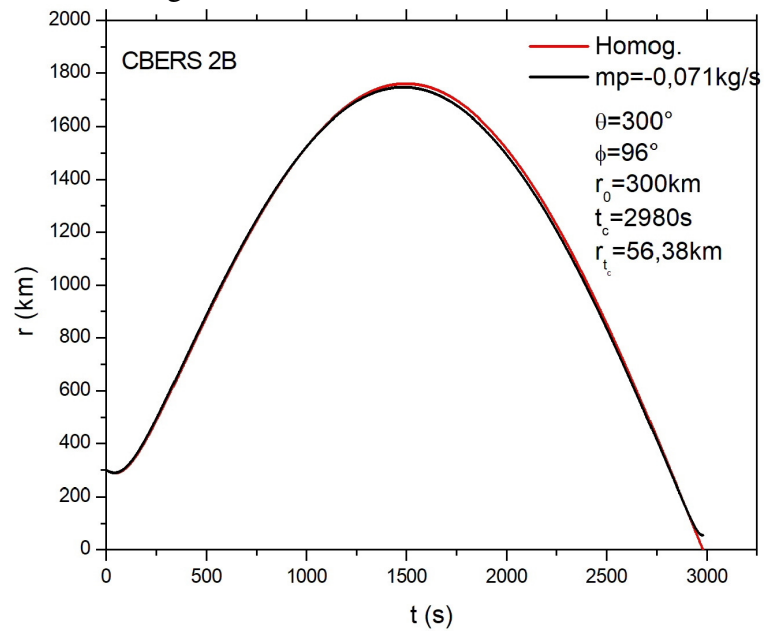
Figura 42: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor.

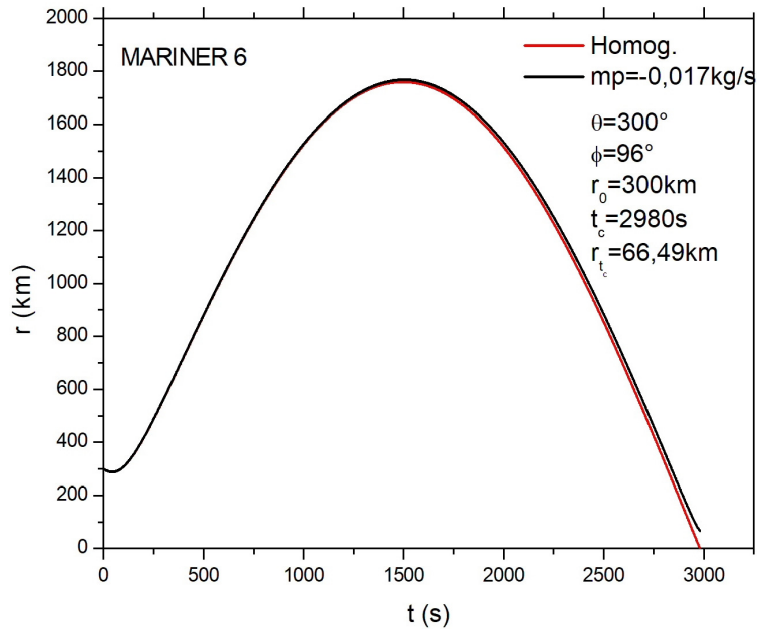
Nas Figuras 43-50 constam as curvas de dinâmica relativa para condições iniciais com $r_0 = 300$ km.

Figura 43: Curva de dinâmica relativa.



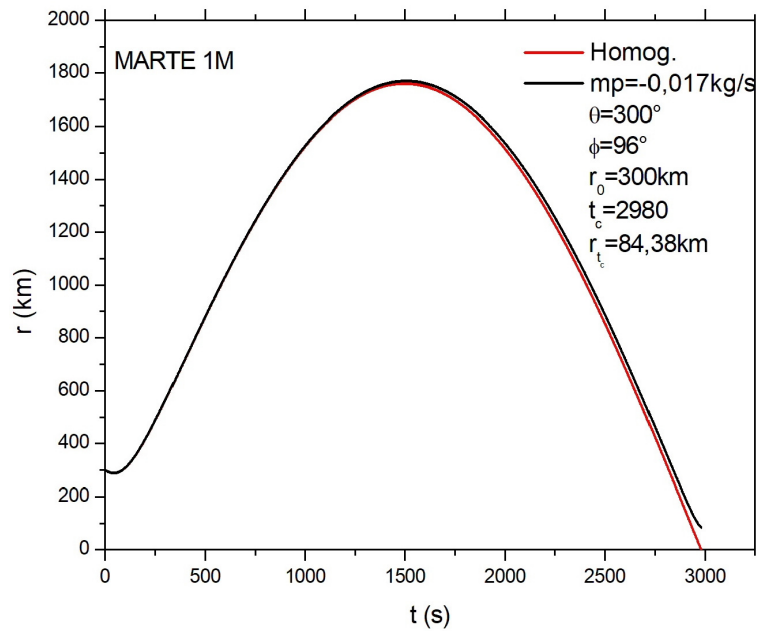
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 44: Curva de dinâmica relativa.



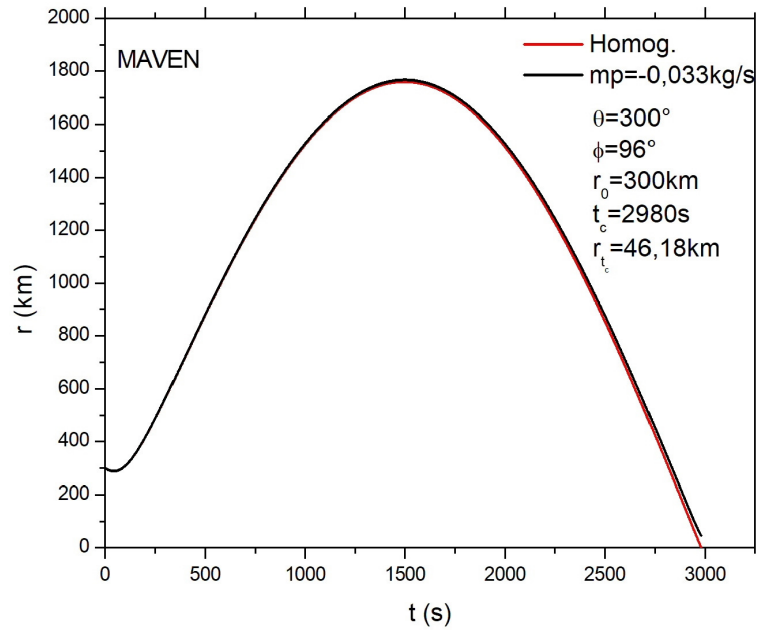
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 45: Curva de dinâmica relativa.



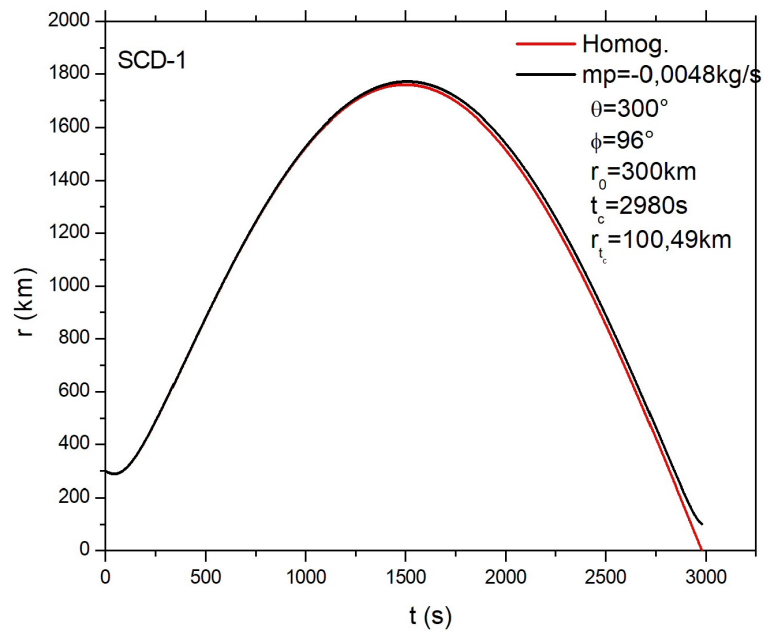
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 46: Curva de dinâmica relativa.



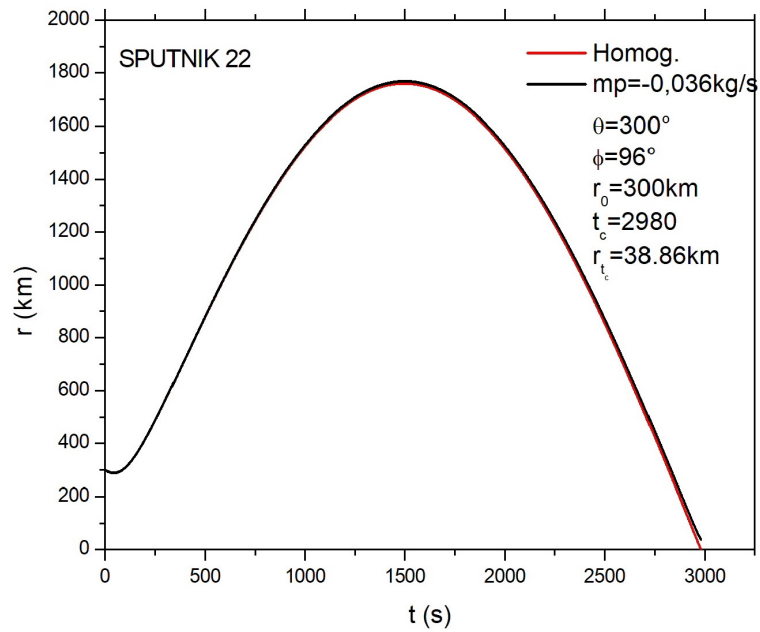
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 47: Curva de dinâmica relativa.



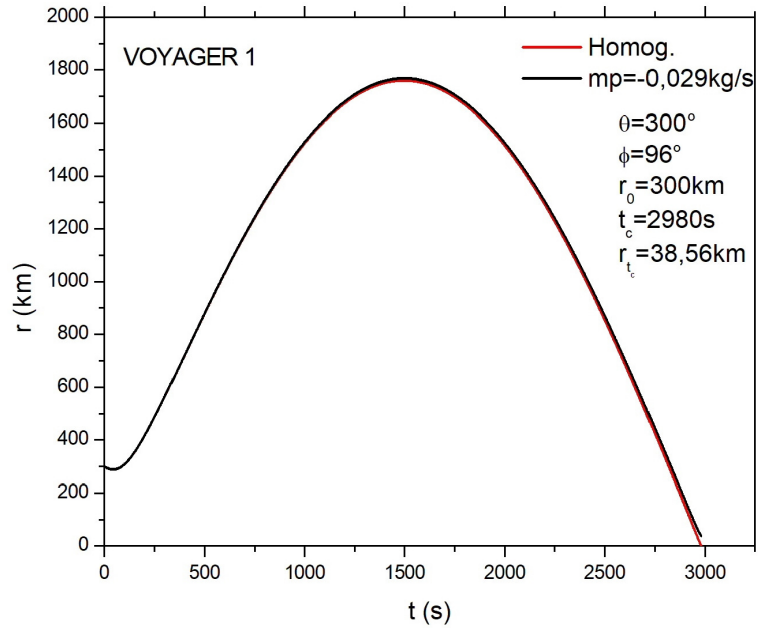
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 48: Curva de dinâmica relativa.



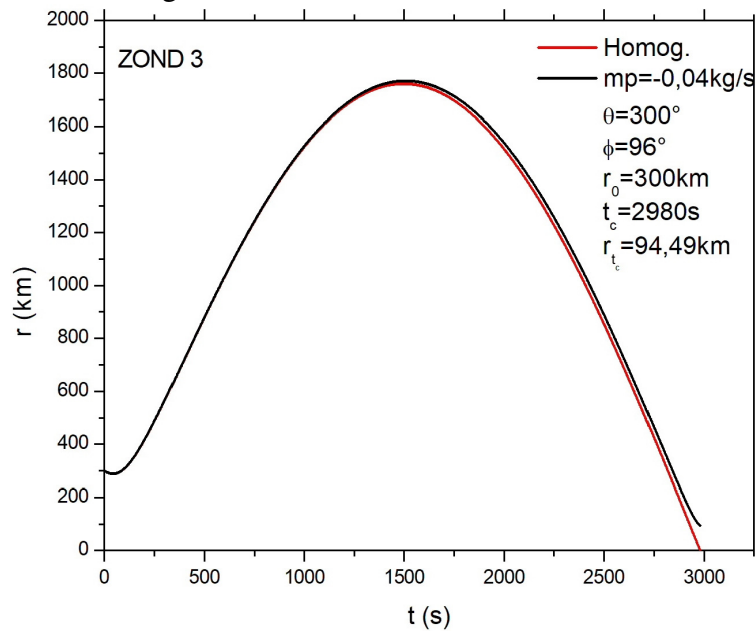
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 49: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor.

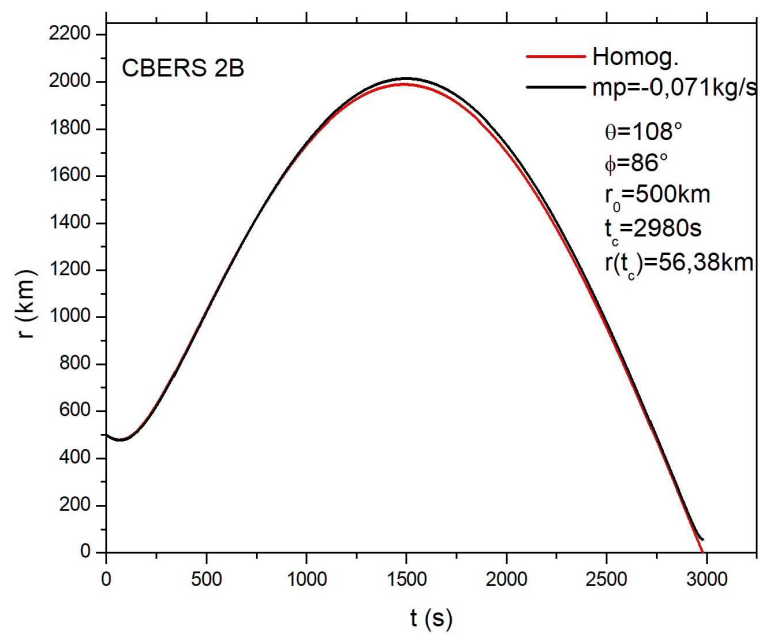
Figura 50: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor.

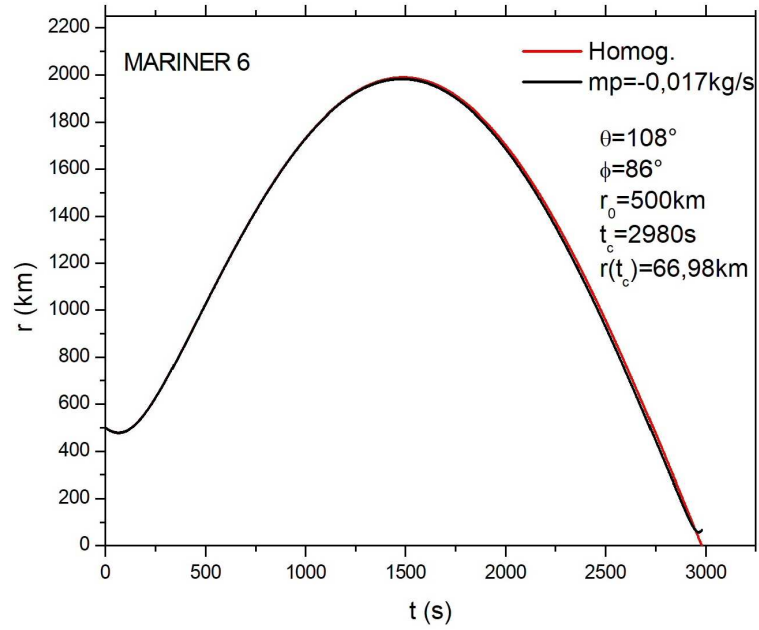
Nas Figuras 51-58 constam as curvas de dinâmica relativa para condições iniciais com $r_0 = 500\text{km}$.

Figura 51: Curva de dinâmica relativa.



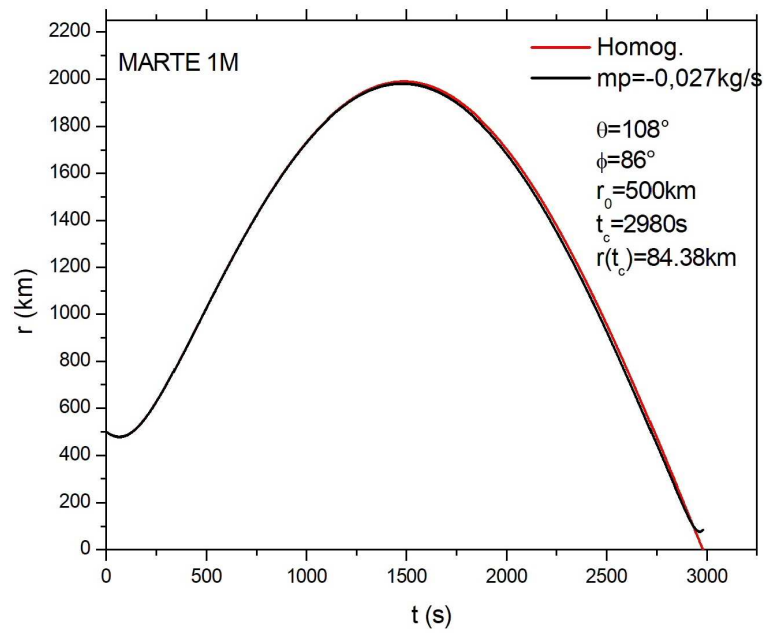
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 52: Curva de dinâmica relativa.



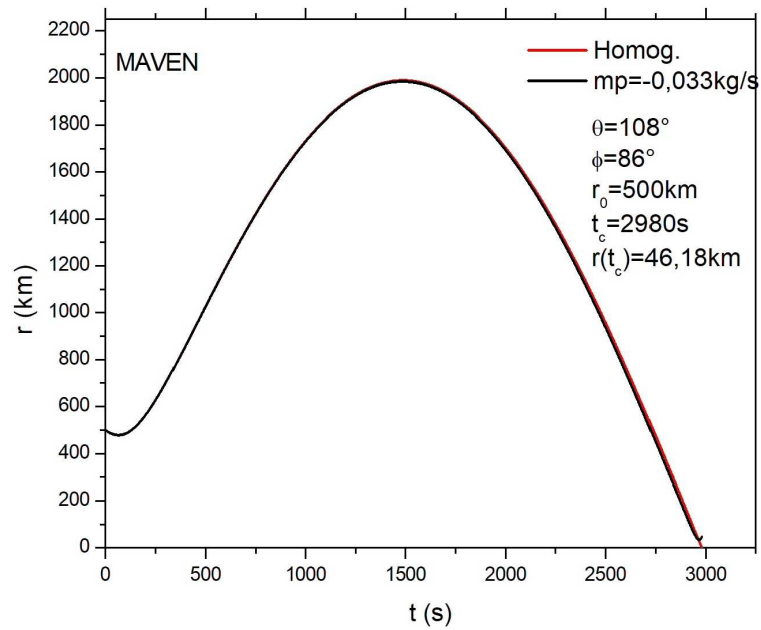
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 53: Curva de dinâmica relativa.



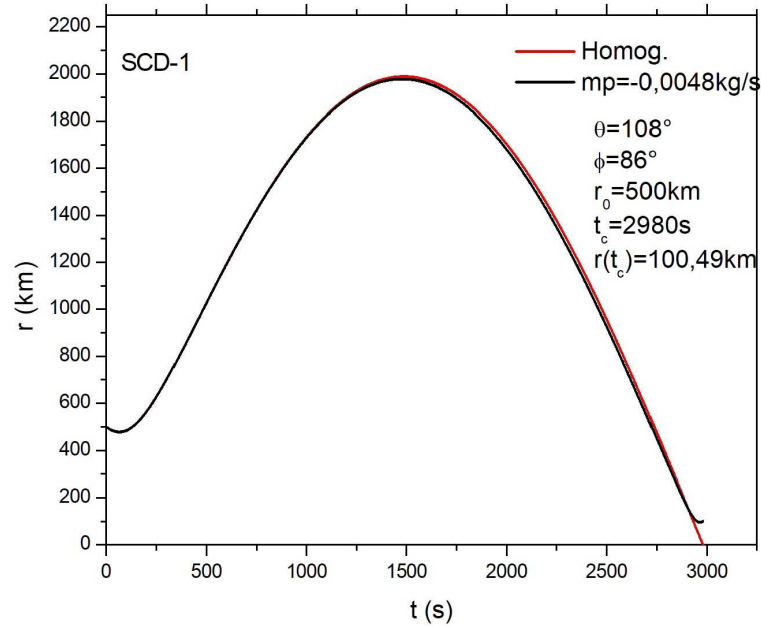
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 54: Curva de dinâmica relativa.



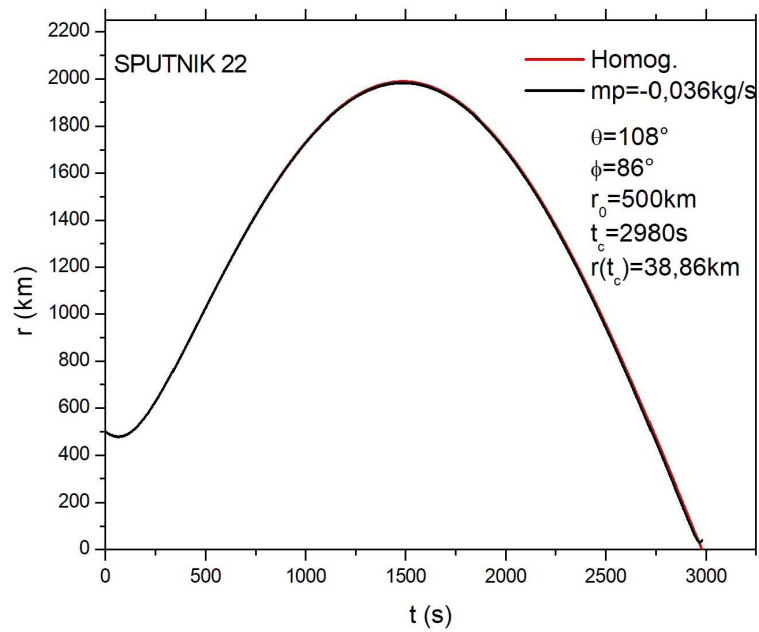
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 55: Curva de dinâmica relativa.



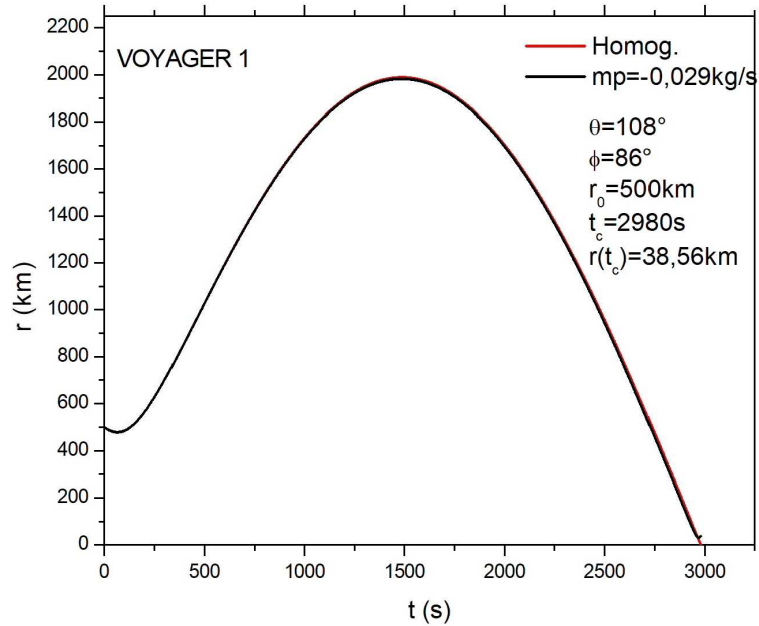
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 56: Curva de dinâmica relativa.



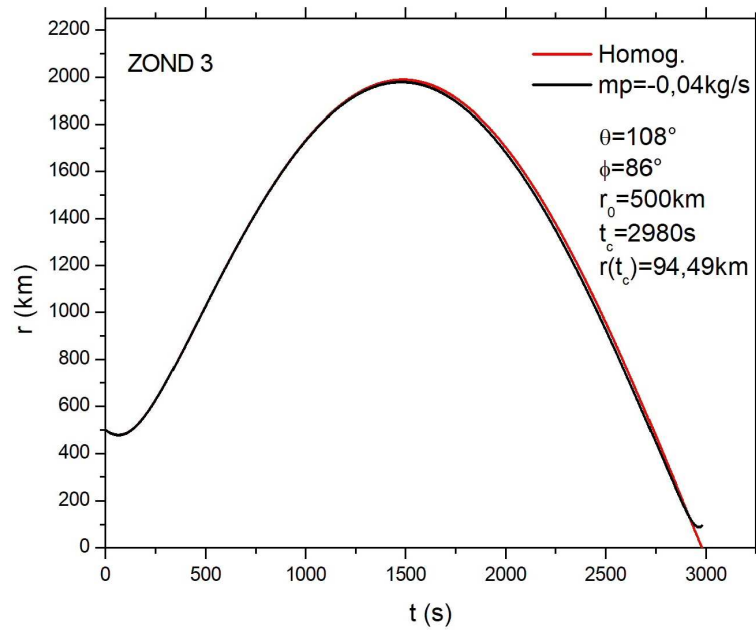
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 57: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 58: Curva de dinâmica relativa.



Fonte: Produção do próprio autor.