

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU  
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**UM MODELO CONSTITUTIVO DE DANO COMPOSTO  
PARA SIMULAR O COMPORTAMENTO DE MATERIAIS  
QUASE-FRÁGEIS**

**EDUARDO ALEXANDRE RODRIGUES**

Bauru

2011

**EDUARDO ALEXANDRE RODRIGUES**

**UM MODELO CONSTITUTIVO DE DANO COMPOSTO  
PARA SIMULAR O COMPORTAMENTO DE MATERIAIS  
QUASE-FRÁGEIS**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Osvaldo Luís  
Manzoli

CO-ORIENTADOR: André Luís Gamino

Bauru

2011

Rodrigues, Eduardo Alexandre.

Um modelo constitutivo de dano composto para  
simular o comportamento de materiais quase-frágeis  
/ Eduardo Alexandre Rodrigues, 2011.  
98 f.

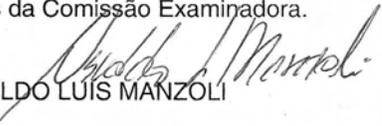
Orientador: Osvaldo Luís Manzoli  
Co-orientador: André Luís Gamino

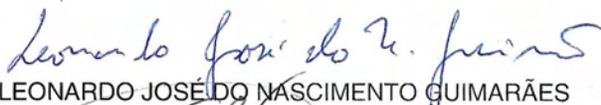
Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual  
Paulista. Faculdade de Engenharia de Bauru, Bauru,  
2011.

1. Mecânica do dano. 2. Descontinuidades fortes.  
3. Elementos finitos. 4. Materiais quase-frágeis. 5.  
Fratura. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade  
de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE Mestrado de EDUARDO ALEXANDRE RODRIGUES, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.**

Aos 21 dias do mês de março do ano de 2011, às 14:00 horas, no(a) ANFITEATRO DA SEÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI do(a) Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Bauru, Prof. Dr. LEONARDO JOSÉ DO NASCIMENTO GUIMARÃES do(a) Centro de Tecnologia e Geociências / Universidade Federal de Pernambuco, Prof. Dr. EDSON ANTONIO CAPELLO SOUSA do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE Mestrado de EDUARDO ALEXANDRE RODRIGUES, intitulado "UM MODELO CONSTITUTIVO DE DANO COMPOSTO PARA SIMULAR O COMPORTAMENTO DE MATERIAIS QUASE-FRÁGEIS". Após a exposição, o discente foi argüido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

  
Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI

  
Prof. Dr. LEONARDO JOSÉ DO NASCIMENTO GUIMARÃES

  
Prof. Dr. EDSON ANTONIO CAPELLO SOUSA

À minha Mãe, irmãos, amigo e à  
minha eterna namorada Suzi.

## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente a Deus pelas oportunidades e pelas pessoas especiais que tem colocado em minha vida.

Agradeço ao professor Osvaldo pela excelente orientação e amizade desenvolvidas ao longo deste trabalho.

Agradeço ao André pela co-orientação ao longo deste trabalho.

A todos os professores da Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, em especial, o professor Edison Capello pelo esforço para atender todas as solicitações.

A todos os funcionários, em especial, os funcionários do Departamento de Pós-Graduação pelo excelente atendimento.

Agradeço à minha Mãe, irmãos e à minha esposa Suzi pelo incentivo e motivação. Aos meus amigos, Murici, Tiago e Luis Manoel pela sincera amizade.

Agradeço ao Carlos pela importância do seu trabalho no desenvolvimento e tratamento dos resultados dessa dissertação.

Agradeço a CAPES pelo auxílio disponibilizado, sem ao qual o desenvolvimento desse trabalho não seria possível.

RODRIGUES, E. A. **Um modelo constitutivo de dano composto para simular o comportamento de materiais quase-frágeis.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2011.

## Resumo

No presente trabalho desenvolve-se um modelo constitutivo baseado na mecânica do dano contínuo para representar o comportamento de materiais que apresentam diferentes respostas quando solicitados à tração ou à compressão. Obtém-se uma representação constitutiva através da composição de modelos simples e específicos para tratar cada tipo de solicitação. Este modelo combinado é capaz inclusive de lidar com carregamentos alternados (tração e compressão), envolvendo fechamento e reabertura de fissuras existentes. Para modelar o comportamento em compressão emprega-se o modelo constitutivo que tem como critério de degradação o segundo invariante do tensor de tensão desviador (critério de Von Mises ou  $J_2$ ). Para simular o aparecimento de fissuras de tração, usa-se o modelo de dano com critério de degradação baseado na energia de deformação da parte positiva do tensor de tensões efetivas. A integração dos modelos é feita com base em tensões efetivas associadas a duas escalas distintas (escala grosseira e refinada). O modelo é apto para representar a formação de descontinuidades no campo de deslocamento (descontinuidades fortes) em materiais quase-frágeis. Nesse caso, a região de localização de deformação (zona de processo da fratura) pode ser descrita pelo modelo de dano combinado, com lei de abrandamento de tensões (softening) exponencial, que estabelece dissipação compatível com a energia de fratura. A região contínua pode ser descrita pelo modelo de dano  $J_2$ , com parâmetros ajustados com base no comportamento não-linear à compressão. Valida-se o modelo proposto mediante testes básicos, focando a capacidade do modelo em representar os principais aspectos do comportamento de materiais quase-frágeis. A aplicabilidade do modelo é demonstrada através do estudo da capacidade de rotação plástica de vigas de concreto armado, confrontando-se os resultados numéricos com os experimentais.

**Palavras-chave:** Mecânica do dano, descontinuidades fortes, elementos finitos, materiais quase-frágeis, fratura.

RODRIGUES, E. A. **A composed constitutive damage model to simulate the behavior of quasi-brittle materials**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2011.

## Abstract

A combined constitutive model based on the Continuum Damage Mechanics (CDM) is presented to represent the nonlinear behavior of quasi-brittle materials, which present different response when subjected to tension or compression. The constitutive model is a composition of two simple and specific models designed to treat each type of behavior. The combined model is able to deal with alternating load (tension- compression), involving formation, closure and reopening of cracks. To model the compressive behavior, a degradation criterion based on the second invariant of the deviatoric part of the effective stress tensor (Von Mises or  $J_2$  criterion) is used. To simulate cracking, a damage model with degradation criterion based on the strain energy associated to the positive part the effective stress tensor is adopted. The combination of the models is made on the basis of the effective stresses associated to two distinct scales (coarse and fine scales). The model is able to represent the formation of discontinuities in the displacement field (strong discontinuities) for quasi-brittle materials. The region of strain localization (fracture process zone) is described by a softening law which establishes dissipation energy compatible with the fracture energy. The continuous region is described by the  $J_2$  damage model, with parameters adjusted to describe the compressive nonlinear behavior in compression. Some basic tests are performed to assess the ability of the model to represent the main aspects of the behavior of quasi-brittle materials. The applicability of the model is demonstrated by the study of the plastic rotation capacity of reinforced concrete beams, comparing the numerical responses with the experimental ones.

**Keywords:** Continuum damage mechanics, strong discontinuities, finite elements, quasi-brittle materials.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Comportamento não-linear decorrente da formação de fissuras na região tracionada e esmagamento do concreto na região comprimida, em uma viga de concreto armado (VECCHIO E SHIM, 2004).....	2
Figura 1.2: Curva tensão-deslocamento para o concreto sob tração uniaxial (PETERSON, 1981 <i>apud</i> BONO, 2008).....	4
Figura 1.3: Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão uniaxial (KUPFER et al., 1969 <i>apud</i> BONO, 2008).....	5
Figura 1.4: Curva tensão-deformação para o concreto sob tração biaxial (KUPFER et al., 1969 <i>apud</i> BONO, 2008).....	6
Figura 1.5: Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão biaxial (KUPFER, 1969 <i>apud</i> BONO, 2008).....	6
Figura 1.6: Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão triaxial (IMRAN, 1994 <i>apud</i> CERVENKA et al., 2008).....	7
Figura 1.7: Curva tensão-deformação para o concreto de alta resistência sob compressão triaxial (XIE et al., 1995 <i>apud</i> CERVENKA et al., 2008).....	7
Figura 1.8: Distribuição das fissuras e a curva tensão-deformação para o concreto sob compressão multiaxial com diferentes níveis de confinamento ( SFER et al., 2002).....	8
Figura 2.1: Seção transversal: (a) nominal, (b) degradada.....	17
Figura 2.2: Hipótese de deformação equivalente (LEMAITRE , 1978).....	19
Figura 2.3: Diagrama de tensão <i>versus</i> deformação axial (GONÇALVES, 2003).....	22
Figura 2.4: Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento (PEDRINI, 2008).....	23
Figura 2.5: Curva tensão <i>versus</i> deformação para o modelo de dano isotrópico: (a) compressão, (b) tração, (C) tração compressão e (d) compressão tração.....	32
Figura 2.6: Curva tensão <i>versus</i> deformação para o modelo de dano diferenciado em tração e compressão: (a) compressão, (b) tração, (C) tração-compressão e (d) compressão-tração.....	34
Figura 2.7: Curva tensão <i>versus</i> deformação para o modelo de dano somente à tração.....	36
Figura 3.1: Elemento com uma região de localização de deformação.....	38

Figura 3.2: Elemento com um salto no campo de deslocamento .....	38
Figura 3.3: Equilíbrio de força do elemento .....	40
Figura 3.4: Curvas com cargas alternadas para o elemento com uma região de localização ..	47
Figura 3.5: Curvas para o modelo de dano somente à tração para o elemento com localização de deformação.....	49
Figura 4.1: Limite elástico à compressão ( $B = 1$ e $H = 0$ ).....	53
Figura 4.2: Limite elástico à tração .....	56
Figura 4.3: Composição geométrica do modelo de dano à compressão e à tração .....	59
Figura 4.4: Curva tensão <i>versus</i> deformação: (a) compressão, (b) tração, (C) tração-compressão e (d) compressão-tração .....	62
Figura 5.1: Elemento com banda de localização embebida (Manzoli e Shing, 2006).....	64
Figura 5.2: Elemento tetraédrico com localização de deformação.....	68
Figura 6.1: Malha de elementos finitos tetraédricos.....	73
Figura 6.2: Cubo deformado em tração .....	74
Figura 6.3: Cubo deformado em compressão.....	74
Figura 6.4: Cubo original com o cubo deformado em tração e compressão.....	75
Figura 6.5: Curva tensão <i>versus</i> deslocamento com fissura localizada para o estado de tensão biaxial.....	76
Figura 6.6: Curva tensão deslocamento para o estado de tensão em compressão.....	77
Figura 6.7: Modelo geométrico da viga Bosco & Debernardi (1992).....	78
Figura 6.8: Malha de elementos finitos e distribuição das barras de aço.....	79
Figura 6.9: Linhas de fissuras e o panorama da variável de dano à tração .....	80
Figura 6.10: Curva momento <i>versus</i> rotação comparando as respostas estruturais obtidas numericamente e experimentalmente .....	81
Figura 6.11: Panorama do dano à compressão sobre a configuração deformada da viga .....	81
Figura 6.12: Fases do comportamento estrutural ( $V1$ , $\rho_t = 1,71$ ).....	82
Figura 6.13: Curva momento <i>versus</i> rotação numérica e experimental para a viga V2 .....	83
Figura 6.14: Curva momento <i>versus</i> rotação numérica e experimental para a viga V3 .....	83

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Algoritmo do modelo constitutivo de dano isotrópico .....	26
Tabela 2.2: Algoritmo do modelo de dano diferenciado para tração e compressão.....	29
Tabela 2.3: Modelo de dano somente à tração .....	30
Tabela 3.1: O algoritmo do modelo constitutivo para o elemento com uma região de localização .....	43
Tabela 3.2: Algoritmo somente à tração para o elemento com uma região de localização de deformação .....	46
Tabela 4.1: Algoritmo do modelo à compressão.....	54
Tabela 4.2: Algoritmo do modelo de dano à tração.....	57
Tabela 4.3: Algoritmos para o modelo de dano composto.....	59
Tabela 6.1: Parâmetros mecânicos e geométricos .....	78

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução .....	1
1.1 Objetivos .....	3
1.3 Revisão Bibliográfica.....	4
1.4 Conteúdo dos capítulos desta dissertação .....	14
<b>2 MODELOS CONSTITUTIVOS BASEADOS NA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO .....</b>	<b>15</b>
2.1 Introdução .....	15
2.2 Conceitos fundamentais .....	16
2.3 Critério de degradação .....	20
2.4 Lei de evolução da variável de dano.....	22
2.5 Modelo de dano isotrópico.....	25
2.6 Modelo de dano diferenciado para tração e compressão .....	27
2.7 Modelo de dano somente à tração .....	30
2.8 Resultados numéricos .....	31
<b>3 ELEMENTO FINITO UNIDIMENSIONAL COM REGIÃO DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÃO .....</b>	<b>37</b>
3.1 Introdução .....	37
3.2 Formulação teórica .....	38
3.3 Modelo de dano somente à tração para o elemento com localização de deformação .....	43
3.4 Resultados numéricos .....	46
<b>4 FORMULAÇÃO E COMPOSIÇÃO DOS MODELOS DE DANO J2 E DE DANO À TRAÇÃO .....</b>	<b>51</b>
4.1 Introdução .....	51
4.2 Modelo de dano J2 .....	51

4.3 Modelo de dano à tração .....	55
4.4 Modelo de dano composto .....	58
4.5 Resultados numéricos .....	60
<b>5 ELEMENTO FINITO COM DESCONTINUIDADE INCORPORADA .....</b>	<b>63</b>
5.1 Introdução .....	63
5.2 Modelo de dano composto em elemento finito bidimensional com localização de deformação.....	64
5.3 Modelo de dano composto em elemento finito tridimensional com localização de deformação.....	67
<b>6 VALIDAÇÃO NUMÉRICA .....</b>	<b>72</b>
6.1 Introdução .....	72
6.2 Cubo estruturado com uma banda de localização .....	72
6.3 Capacidade de rotação plástica em viga de concreto armado .....	77
<b>7 CONCLUSÕES.....</b>	<b>84</b>
<b>8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>86</b>
<b>A1 APÊNDICE .....</b>	<b>89</b>

# Capítulo 1

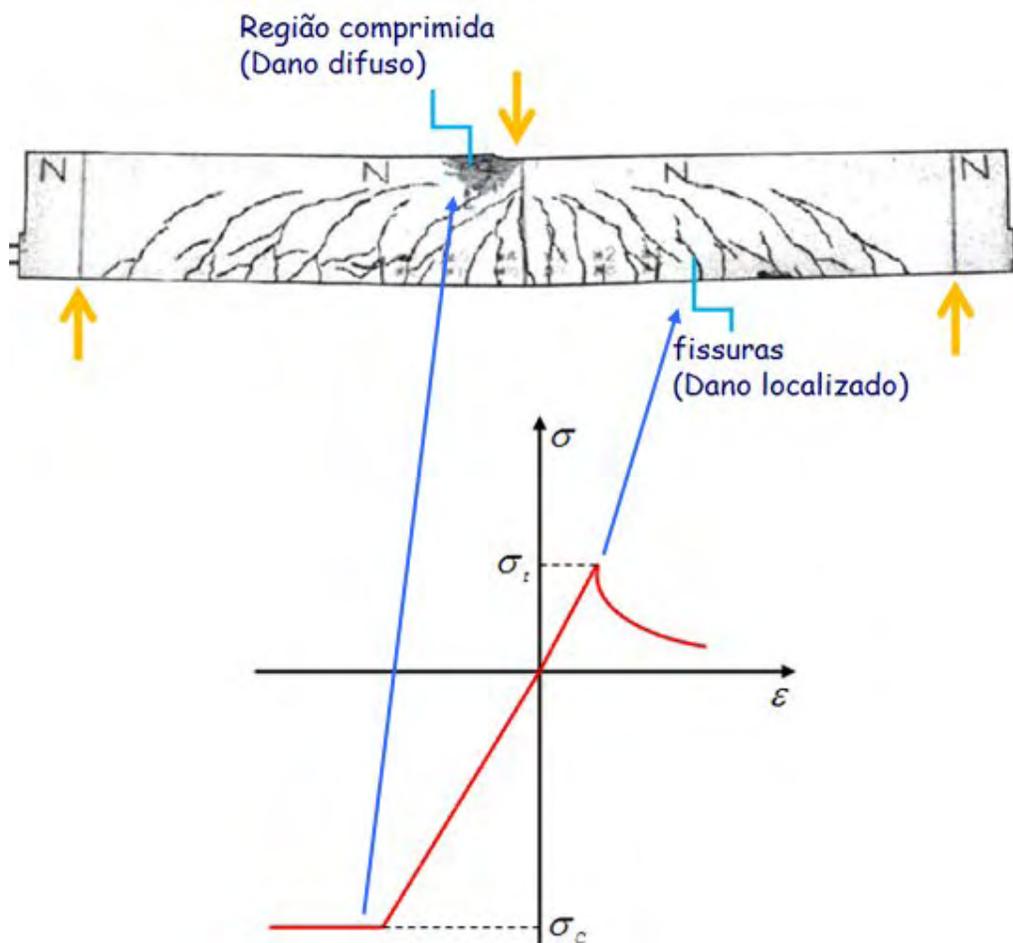
## INTRODUÇÃO

### 1.1 Introdução

O atual nível de complexidade dos projetos de estruturas compostas por materiais quase-frágeis, como é o caso de estruturas de concreto armado, exigem cada vez mais métodos acurados de predição da capacidade de trabalho e do nível de segurança estrutural, quando solicitadas a diferentes tipos de carregamento e condições ambientais.

Para representar de forma realística o estado de degradação desses materiais faz-se necessário o desenvolvimento de modelos constitutivos robustos e estáveis, capazes de representar o comportamento não-linear muito além do limite elástico.

Como é sabido, o comportamento não-linear de materiais quase-frágeis é caracterizado pela formação de fissuras na região tracionada, porém a região comprimida também pode apresentar um comportamento não-linear, como é ilustrado na fig. (1.1).



**Figura 1.1: Comportamento não-linear decorrente da formação de fissuras na região tracionada e esmagamento do concreto na região comprimida, em uma viga de concreto armado (VECCHIO E SHIM, 2004)**

Devido à importante influência que a região comprimida pode exercer sobre o comportamento estrutural, muitos pesquisadores têm despendido grandes esforços com o objetivo de simular numericamente a sua contribuição. Para representar o comportamento na região comprimida, de forma geral, tem-se empregado modelos constitutivos baseados na teoria da plasticidade, porém, estes modelos podem envolver algoritmos complexos, tornando inviável sua implementação computacional e aplicação prática. A complexidade desses algoritmos tem induzido os pesquisadores a buscarem outras teorias para representar a região de compressão, como os modelos constitutivos baseados na mecânica do dano contínuo, ou até mesmo a combinação de vários modelos constitutivos.

A Mecânica do Dano Contínuo, formalizada na teoria termodinâmica dos processos irreversíveis, tem sido usada como uma importante ferramenta para representar o estado de degradação dos materiais quase-frágeis, devido a sua relativa simplicidade, versatilidade e

consistência. Por estes motivos, o presente trabalho será completamente baseado nela, buscando constituir um modelo computacional para descrever os distintos aspectos do comportamento de materiais quase-frágeis.

Os diversos aspectos fenomenológicos que se pretende abordar com o modelo proposto têm inúmeras aplicações em problemas de engenharia. Podem-se citar os casos de problemas geomecânicos como túneis, fundações de barragens, poços de prospecção de petróleo ou água, entre outros. No contexto da mecânica estrutural, pode-se mencionar os elementos estruturais mistos, com fibras ou barras embebidas em matriz quase-frágeis, como é o caso do concreto armado e outros materiais compostos.

## 1.2 Objetivos

O objetivo desse trabalho é desenvolver e implementar um modelo constitutivo baseado na teoria do dano, capaz de representar o comportamento de materiais que apresentam diferentes respostas quando solicitados à tração ou a compressão.

O modelo deve ser apto para representar a formação de fissuras (descontinuidades fortes) em tração, dentro do contexto da aproximação contínua de descontinuidades fortes (OLIVER, 1996), para que possa ser implementado no programa computacional existente. Ao mesmo tempo, o modelo deve representar as principais características do comportamento não-linear em compressão da porção contínua, assim como descrever o comportamento proveniente de carregamento alternado, com possibilidades do fechamento e reabertura de fissuras existentes.

A implementação computacional deve ser efetuada através de algoritmos robustos e estáveis, para evitar problemas numéricos associados à elevada não-linearidade envolvida. As rotinas do modelo, em linguagem FORTRAN, devem ser adequadas para serem introduzidas no programa computacional de análise não-linear de sólidos pelo Método dos Elementos Finitos (M.E.F.), em desenvolvimento pelo grupo de pesquisa da Faculdade de Engenharia de Bauru, da UNESP.

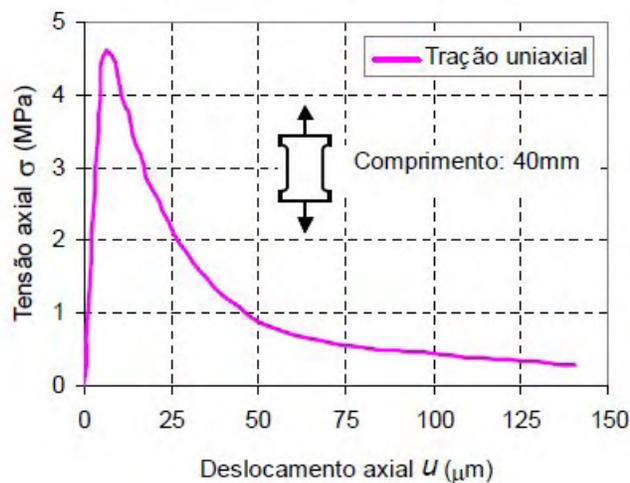
### 1.3 Revisão bibliográfica

Dentre os materiais quase-frágeis, o concreto é um dos mais importantes materiais usados em projetos estruturais, devido a sua fácil moldagem e boa resistência. Porém, o concreto é um material que apresenta alta resistência às tensões de compressão e baixa resistência à tração (aproximadamente uma ordem de grandeza).

Surge então a necessidade de aderir ao concreto um material com alta resistência à tração, com finalidade de absorver as tensões de tração. Em geral empregam-se barras de aço convenientemente distribuídas em seu interior. O comportamento do composto concreto-aço depende do comportamento de cada material e do tipo de interação entre eles. O comportamento mecânico é altamente influenciado pela disposição geométrica e a quantidade de cada um dos componentes.

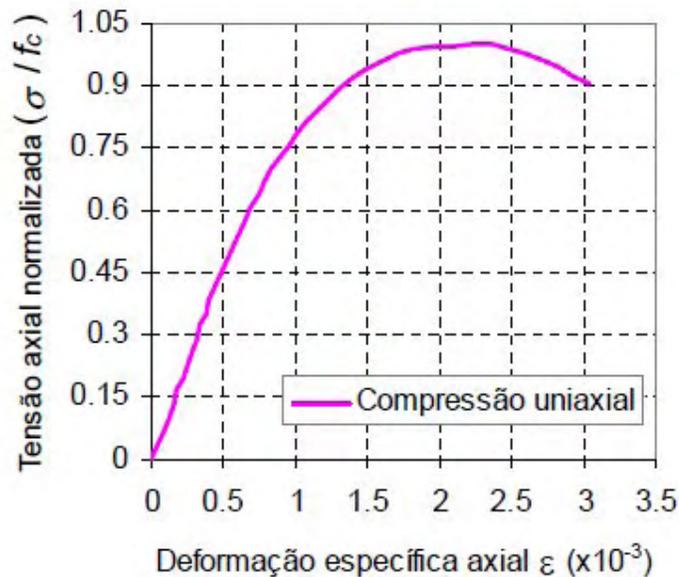
O concreto, mesmo antes da aplicação de cargas, já apresenta microfissuras sem uma direção principal, fazendo com que apresente um comportamento não-linear para níveis de tensão relativamente baixos.

Em estado de tensão uniaxial de tração, o concreto apresenta três fases distintas: comportamento elástico-linear, no qual as tensões são proporcionais as deformações, até aproximadamente um terço da resistência à tração; fase de início do comportamento não-linear até atingir a resistência inicial à tração; comportamento não-linear com redução das tensões (*softening*), devido ao crescimento acelerado das microfissuras, até a ruptura (KUPFER et al., 1969), como é ilustrado na fig. (1.2).



**Figura 1.2: Curva tensão-deslocamento para o concreto sob tração uniaxial (PETERSON, 1981 *apud* BONO, 2008)**

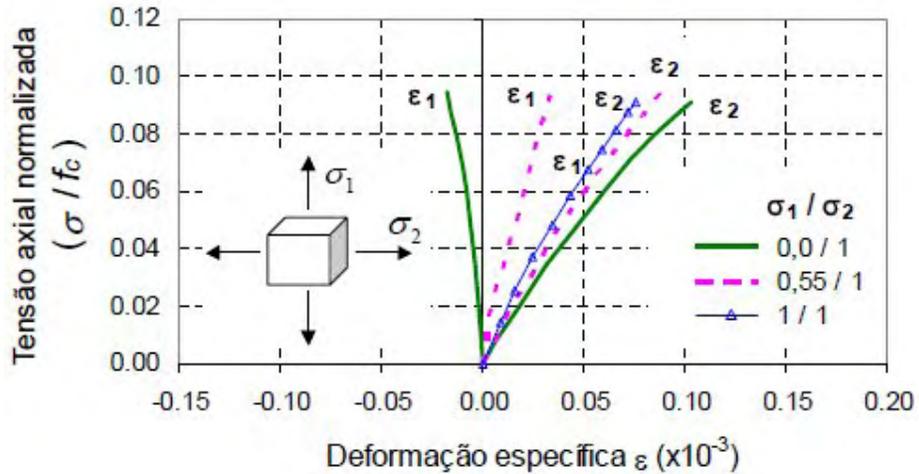
Quando submetido à compressão uniaxial, o concreto também apresenta três fases distintas, apresentando um comportamento elástico-linear até aproximadamente um terço da resistência à compressão. A partir deste intervalo, inicia-se um processo de desenvolvimento de um comportamento não-linear, decorrente do crescimento e evolução das microfissuras. O comportamento não-linear é mais acentuado após atingir o nível de tensão de resistência à compressão, caracterizado pela redução das tensões com o acréscimo das deformações, até a ruptura (KUPFER et al., 1969; DAHL, 1992), como é ilustrado na fig. (1.3).



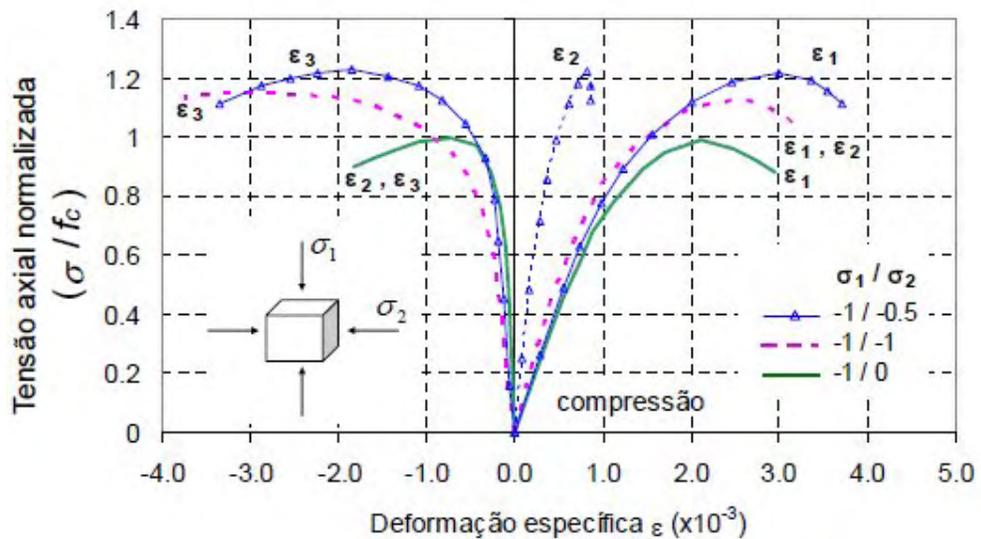
**Figura 1.3: Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão uniaxial (KUPFER et al., 1969 apud BONO, 2008)**

Quando solicitado por diferentes combinações de tensão biaxial e triaxial, o concreto apresenta um comportamento distinto das uniaxiais. Quando submetido ao estado equibiaxial de tração, não se observa uma variação significativa quanto à resistência, porém, a ruptura ocorre logo após atingir a resistência uniaxial de tração (ver fig. (1.4)). Para o estado equibiaxial de compressão, o concreto apresenta um seguimento elástico-linear, seguido de um comportamento “quase elástico-linear” até a resistência à compressão, exibindo um aumento significativo da resistência, de aproximadamente um sexto da resistência à compressão uniaxial, com posterior redução das tensões até a ruptura (KUPFER, 1969) (ver fig. (1.5)). Em um estado de compressão triaxial, o concreto apresenta um aumento da resistência à compressão, com o acréscimo das tensões de confinamento, exibindo um aumento de ductilidade antes da ruptura (IMRAN, 1994) (ver fig. (1.6)). O mesmo

comportamento pode ser observado para o concreto de alta resistência, porém, quando confinado, exibe um aumento de ductilidade mais pronunciado (XIE et al., 1995), como é ilustrado na fig. (1.7).



**Figura 1.4: Curva tensão-deformação para o concreto sob tração biaxial (KUPFER et al., 1969 apud BONO, 2008)**



**Figura 1.5: Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão biaxial (KUPFER, 1969 apud BONO, 2008)**

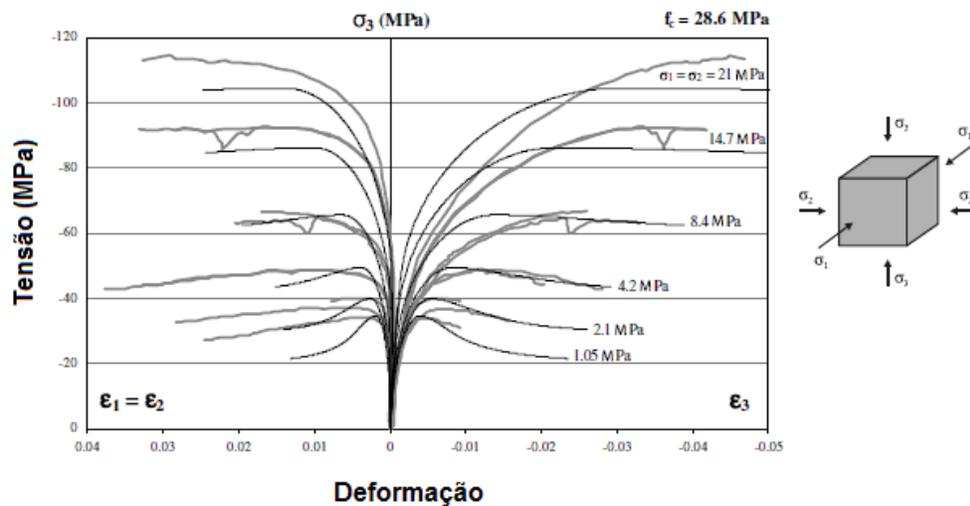


Figura 1.6: Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão triaxial (IMRAN, 1994 *apud* CERVENKA et al., 2008)

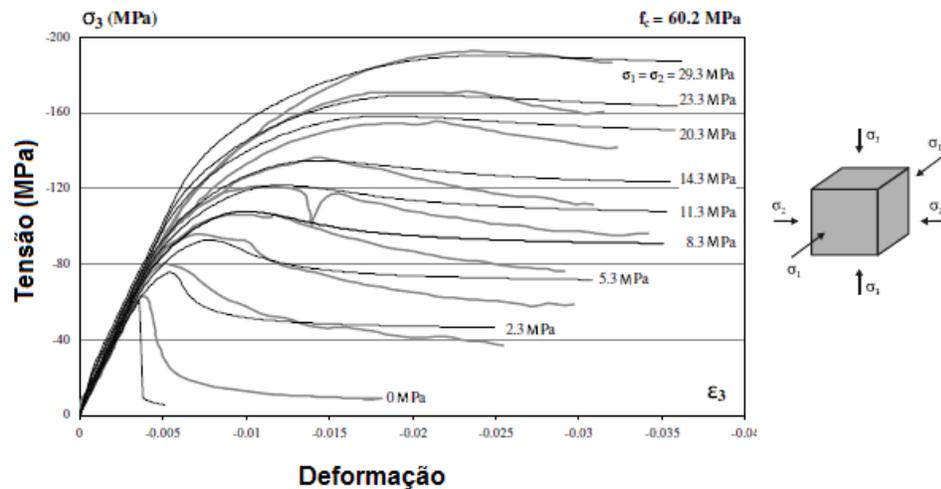
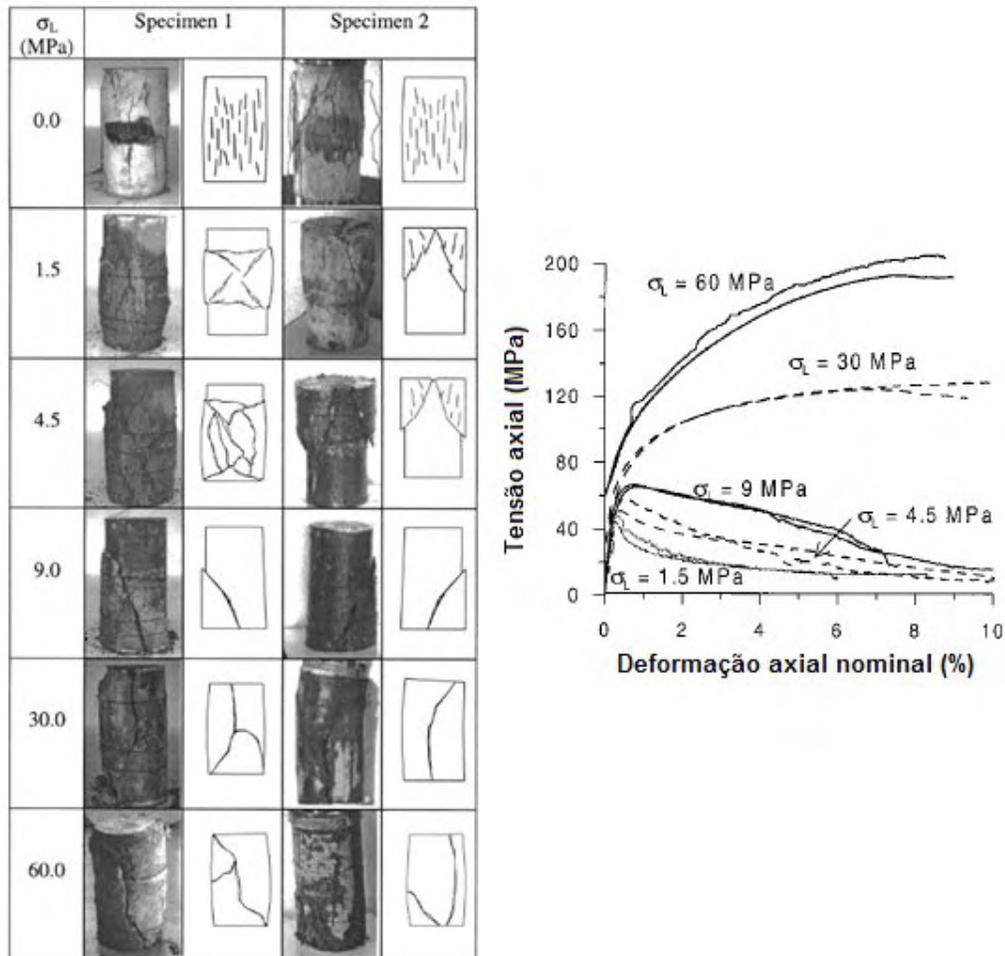


Figura 1.7: Curva tensão-deformação para o concreto de alta resistência sob compressão triaxial (XIE et al., 1995 *apud* CERVENKA et al., 2008)

A análise do concreto confinado é de grande importância para a busca de soluções a inúmeros problemas de engenharia. O seu interesse consiste principalmente nos estudos da transição do comportamento frágil para o dúctil com a elevação das tensões de confinamento.

Testes experimentais desenvolvidos por Sfer et al. (2002), nos quais cilindros são submetidos a vários níveis de confinamento lateral antes da aplicação do carregamento compressivo axial, mostram que, para um baixo nível de confinamento, as falhas ocorrem através de inúmeras fissuras distribuídas verticalmente e inclinadas. As curvas de tensão-

deformação exibem um “limite elástico” bem definido, com uma descendência tensional pós-pico bem acentuada. Para níveis altos de confinamento, a ruptura ocorre repentinamente de uma forma não simétrica, em duas ou três partes. As curvas mostram um aumento acentuado da resistência à compressão, mas sem um limite elástico bem definido, exibindo, relativamente, um alto grau de ductilidade (ver fig. (1.8)).



**Figura 1.8: Distribuição das fissuras e a curva tensão-deformação para o concreto sob compressão multiaxial com diferentes níveis de confinamento (SFER et al., 2002)**

De uma forma geral, o comportamento complexo dos materiais quase-frágeis (concreto, rochas, cerâmicas e solo) tem atraído atenção de muitos pesquisadores ao longo dos anos, a fim de simular as alterações microestruturais no comportamento mecânico desses materiais, e desenvolver métodos acurados para estimar o seu estado de degradação. Com o

propósito de representar o comportamento mecânico desses materiais, muitos modelos constitutivos foram desenvolvidos baseados na teoria da elasticidade, teoria da plasticidade, teoria do dano contínuo, mecânica da fratura e até mesmo a combinação entre esses modelos (SIMO and JU, 1987; YAZDANI and SCHREYER, 1990; CERVERA et al, 1996; PROENÇA e PITUBA, 2003; WU et al., 2006;). Apesar de serem capazes de prever as respostas mecânicas do ponto de vista qualitativo e quantitativo, nem sempre os modelos são simples e podem envolver algoritmos complexos.

No contexto do Método dos Elementos Finitos MEF, os modelos de fissuração discretos ou distribuídos (ROTS, 1991) têm sido empregados com o objetivo de representar o processo de fraturamento em solicitações predominantemente de tração. Ambos modelos apresentam inconvenientes, já que os modelos de fissura discreta são modelados como descontinuidades de deslocamento entre os elementos. Como as fissuras devem se desenvolver ao longo do contorno dos elementos, gera-se uma restrição na direção de propagação da fissura. Além disso, o modelo não é apropriado para representar o comportamento do material na presença de um número elevado de fissuras distribuídas numa região, devido ao alto custo computacional para a reconstrução da malha de elementos de interface na região de fraturamento. Os modelos de fissuras distribuídas sofrem fortes dependências da orientação da malha de elementos finitos, nos quais a formação de macro-fissura é modelada mediante o fenômeno de localização de deformação, já que as deformações tendem a concentrar ao longo de um elemento finito (MANZOLI, 2006). Além disso, os modelos não são adequados para representar fissuras localizadas, como em estruturas de concreto simples, ou mesmo estruturas armadas que rompem por cisalhamento.

Devido às limitações dos modelos propostos, desenvolveram-se novas formulações com fissuras incorporadas no interior do elemento finito (SHING, 1995; OLIVER, 1996c). Essa técnica combina os pontos favoráveis dos dois modelos anteriores, posto que as fissuras podem se propagar em qualquer direção e os resultados obtidos são independentes da malha de elementos finitos utilizada. Nessa mesma linha, Manzoli e Shing (2006) formularam uma técnica geral para incorporar descontinuidade de deslocamento (banda de localização de deformação para o caso bidimensional) no interior do elemento finito, baseado no método de enriquecimento de elementos.

Por outro lado, muitos modelos baseados na teoria da plasticidade têm sido propostos para representar os efeitos associados a solicitações por compressão ou cisalhamento (CERVENKA e PAPANIKOLAOU, 2008).

Muitos materiais apresentam simultaneamente esses dois tipos de respostas, dependendo da solicitação local imposta. Assim, para a análise de problemas complexos, envolvendo os dois tipos de fenômenos, é necessária a combinação entre esses diferentes tipos de abordagens constitutivas. De maneira alternativa, alguns autores propuseram tratar efeito de fratura e deslocamento com o emprego de uma única teoria constitutiva.

Ambas alternativas apresentam inconvenientes. Em geral, a combinação de distintas abordagens constitutivas não é simples, exigindo critérios empíricos para estabelecer qual delas se ativa, ou métodos iterativos de solução, que podem resultar em algoritmos instáveis. Por outro lado, a abordagem exclusivamente através de plasticidade pode gerar modelos muito complexos e numericamente instáveis, envolvendo múltiplas superfícies de plasticidade, com diferentes leis de evolução e um número elevado de parâmetros.

Embora as deformações plásticas induzidas por microfissuras possam ser tratadas pela teoria da plasticidade, a teoria não é capaz de simular o processo de degradação da rigidez dos materiais quase-frágeis, assim como a sua recuperação na inversão de carregamentos. Essa simulação tem sido conduzida por meio da Mecânica do Dano, que se baseia na hipótese de que o estado de degradação do material é mensurado por uma variável de dano que mede o nível de fissuração interna do material.

A Mecânica do Dano Contínuo (MDC), inicialmente introduzido por Kachanov (1958) e, posteriormente, formalizada na teoria termodinâmica dos processos irreversíveis por Lemaitre e Chaboche (1985), tem sido usada como uma importante ferramenta para representar o estado de degradação dos materiais quase-frágeis. A razão da sua popularidade se deve a sua simplicidade e versatilidade, assim como a sua consistência.

Segundo Lemaitre (1992), a mecânica do dano contínuo lida com a capacidade de carga de sólidos sem fissuras principais, mas onde o próprio material é danificado devido à presença de microdefeitos (dano), tais como microfissuras e microvazios. O dano em materiais é o processo progressivo pelo qual os materiais se degradam e rompem (LEMAITRE, 1996). A nucleação e crescimento de microfissuras e microvazios (em um nível de micro-escala) contribuem para o comportamento não-linear dos sólidos pós-pico, sendo evidenciados macroscopicamente por redução de rigidez e resistência do material.

Uma maneira de representar o comportamento diferenciado em tração e compressão, exclusivamente dentro da mecânica do dano contínuo foi desenvolvida por Cervera et al. (1996). Nesse modelo, define-se o conceito de tensor de tensões efetivas elásticas, que é dividido em partes contendo as componentes principais positivas e outra com as componentes principais negativas. Cada parte é utilizada para o cálculo da correspondente variável de dano

(de tração e compressão). Finalmente o tensor de tensões é então calculado somando-se as componentes positivas e negativas das tensões efetivas, multiplicadas pelo fator de redução associado ao correspondente dano.

Esse modelo dispensa os algoritmos de retorno (*return mapping*) comumente empregados em modelos de plasticidade (CERVENKA e PAPANIKOLAOU, 2008), dando lugar a um algoritmo de integração fechado, no qual as tensões são obtidas a partir das deformações atualizadas, sem a necessidade de processos iterativos. Outra vantagem decorrente disso é que as superfícies que delimitam o critério de dano em tração e em compressão, no espaço das tensões, podem ser tratadas independentemente, sem a necessidade de algoritmos especiais para lidar com múltiplas superfícies. Além de permitir representar os processos degradativos associados à formação de fissuras, essa abordagem com duas variáveis de dano, de tração e de compressão, permite inclusive representar os principais aspectos dos efeitos de fechamento e reabertura de fissuras, muitas vezes essenciais em análise de estruturas sob ações cíclicas.

Apesar desses bons atrativos, principalmente para análise de estruturas de grande porte, esse modelo ainda pode ser melhorado para representar mais precisamente os fenômenos que regem o comportamento mecânico de materiais quase-frágeis. Primeiramente deve-se ter em conta que esse modelo representa fissuras de maneira distribuídas. No contexto do método dos elementos finitos, as fissuras localizadas são tratadas por esse modelo local através da regularização baseada em energia, fazendo-se o módulo de abrandamento dependente da energia de fratura do material e do tamanho do elemento finito. Embora essa forma possa ser eficiente para garantir a correta dissipação, ela pode ser inadequada para prever os padrões de fissuração, já que o alinhamento da malha de elemento finito pode interferir muito na posição e orientação do dano localizado. Outra limitação corresponde ao comportamento não-linear em solicitações combinadas, envolvendo cisalhamento e compressão. Embora o modelo possa ajustar bem os limites de resistência oferecidos por ensaios experimentais sob diversos tipos de estado de tensão, o comportamento não-linear, além do limite elástico, não condiz com o mecanismo de falha material dos experimentos. O modelo não é capaz de representar predominância de deformações inelásticas desviadoras observadas, que, em situação de carga severa, dá lugar a formação de falhas através de superfícies de deslizamento com dilatância.

Entretanto merece destacar que o modelo é capaz de representar o processo de esmagamento, em situações confinadas. Sobre as limitações relacionadas ao tratamento de fissuras de maneira distribuída dos modelos de dano contínuos, alguns passos importantes já

foram dados para que os mesmos pudessem ser empregados na aproximação contínua de descontinuidades fortes (ACDM), proposto por Oliver e colaboradores (OLIVER, 1995; OLIVER et al., 1999; OLIVER, 2000; MANZOLI e SHING, 2006; OLIVER et al., 2008; MANZOLI et al., 2008), e, conseqüentemente, adaptados para representar fissuras localizadas com elementos finitos com descontinuidades incorporadas. Entretanto, as aplicações se restringem a modelos de dano escalares, bem simples, com apenas uma variável de dano para representar exclusivamente o processo de fissuração em solicitações para casos nos quais a não-linearidade estrutural provém predominantemente de estados de tração (MANZOLI, 2006; OLIVER et al., 1999).

Devido a problemas basicamente associados a instabilidades numéricas, as primeiras modelagens empregando elementos finitos com descontinuidades fortes incorporadas se limitavam a estudos de casos envolvendo uma ou poucas linhas de fissuras. A representação de múltiplas fissuras próximas entre si exige algoritmos de integração robustos e estáveis, posto que a abertura de uma nova fissura pode fazer com que as outras parem de progredir e até mesmo fechem. Essa interação entre fissuras pode causar fortes instabilidades computacionais no processo de solução não-linear.

Em problemas de materiais mistos, sobretudo os reforçados com fibras ou barras metálicas, o aparecimento de múltiplas fissuras em uma matriz quase-frágil rege o comportamento estrutural, mesmo com solicitações muito aquém das que produziram o colapso. No sentido de melhorar estabilidade e robustez numérica, Oliver e Huespe (2008) propuseram um algoritmo (IMPL-EX) de integração dos modelos constitutivos, tentando obter a estabilidade oferecida pelos métodos explícitos com precisão dos métodos implícitos. Esse algoritmo já foi testado para a representação de múltiplas fissuras utilizando um modelo de dano simples, somente em tração.

Esse tipo de modelagem é adequado para representar situações específicas, nas quais as fissuras de tração dominam o comportamento estrutural, podendo as regiões comprimidas serem consideradas elásticas e lineares. Porém, representar o comportamento não-linear além do limite elástico nas regiões comprimidas é de grande importância para predizer o estado de degradação do material, para o desenvolvimento de ferramentas apropriadas com a finalidade de mensurar sua funcionalidade estrutural.

Foi buscando representar o comportamento não-linear, principalmente de compressão, que Carpinteri (2008) propôs um modelo numérico, com o objetivo de representar a capacidade de rotação plástica em viga de concreto armado submetido à flexão. O modelo é

baseado no conceito de localização de deformação, que é capaz de representar o crescimento da fissura e do esmagamento do concreto no processo de carregamento.

Para representar o comportamento não-linear em compressão, a região comprimida é descrita segundo o modelo de fissura de interpenetração (*Overlapping Crack Model*), que descreve a localização de deformação devido ao esmagamento por meio da interpenetração do material. Assim, o modelo de fissura coesiva é proposto para representar o comportamento do concreto em tração e em compressão. O processo de fraturamento e esmagamento é completamente localizado na seção transversal central para o concreto representativo em flexão. O comportamento tensão-deformação na seção transversal central é linear elástica até que a resistência do concreto é atingida. As tensões na zona coesiva são então governadas por funções que descrevem a evolução das tensões com o deslocamento relativo, de abertura ou interpenetração, retornando um valor nulo quando o deslocamento atinge um valor crítico.

A fim de verificar a eficiência do modelo proposto, de representar a capacidade de rotação plástica, Carpinteri simulou numericamente os testes experimentais de Bosco e Debernardi (1992), Bigaj e Walraven (1993) e Pecce e Fabbrocino (1999). Os testes, em geral, são desenvolvidos variando as dimensões da viga e a taxa de armadura de tração e compressão.

Tanto os resultados experimentais como os resultados numéricos mostram a importância do efeito da compressão (região comprimida da viga), na capacidade de ductilidade da viga de concreto armado, já que o colapso da estrutura, para taxas elevadas de armadura de tração, ocorre quando a resistência última de compressão é atingida. Para taxas de armadura de tração pequenas, as tensões de escoamento do aço são atingidas quando as tensões de compressão na zona comprimida são ainda muito inferiores à resistência à compressão do concreto. Nesse caso a viga desenvolve grandes deformações antes do colapso. Assim, as vigas superarmadas ou superdimensionadas apresentam um ganho de resistência, porém com perda de ductilidade, proporcionado pelo esmagamento do concreto na região comprimida, mesmo antes do início do escoamento do aço da região tracionada.

O aumento da ductilidade fornece uma margem de segurança maior, já que corresponde à uma maior dissipação de energia durante o processo que antecede o colapso. Por isso que a análise da capacidade de rotação plástica, buscando principalmente conhecer e simular mais precisamente possível o comportamento não-linear de compressão dos materiais quase-frágeis, tem-se tornado de grande importância em projetos estruturais.

## 1.4 Conteúdo dos capítulos desta dissertação

Esta dissertação está organizada em sete capítulos. No *Capítulo 2* apresenta-se uma explicação sobre a teoria do dano contínuo e sua aplicação no campo da engenharia. O *Capítulo 3* é dedicado à formulação teórica de um elemento finito com uma região de localização de deformação para o caso unidimensional. Mostram-se os resultados numéricos considerando dois modelos constitutivos: elástico-linear para a região contínua e o modelo de dano isotrópico para a região de localização de deformação.

No *Capítulo 4* apresenta-se um modelo constitutivo de dano através da composição de dois modelos específicos, modelo de dano à compressão e modelo de dano à tração, associados a duas escalas distintas, a escala grosseira e a escala refinada.

No *Capítulo 5* desenvolve-se uma extensão do modelo unidimensional de elemento finito com descontinuidade incorporada do *Capítulo 3*, para o caso bidimensional e tridimensional.

No *Capítulo 6* são apresentadas análises numéricas do comportamento do modelo composto apresentado no *Capítulo 4*, a fim de validar a formulação proposta.

Por fim, as conclusões e as sugestões para a continuação da pesquisa são apresentadas no *Capítulo 7*.

## Capítulo 2

### MODELOS CONSTITUTIVOS BASEADOS NA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

#### 2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo expor os conceitos básicos da mecânica do dano contínuo, os modelos empregados, tendo como princípio o modelo de dano isotrópico.

Nos últimos anos foram desenvolvidos diversos modelos constitutivos formulados e amplamente aceitos, segundo a mecânica do dano contínuo, para simular os efeitos das alterações micro-estruturais no comportamento mecânico dos materiais. A mecânica do dano contínuo, segundo Lemaitre (1992), lida com a capacidade de carga de sólidos sem fissuras principais, mas onde o próprio material é danificado devido à presença de microdefeitos, tais como microfissuras e microvazios. Em um nível de micro-escala, o dano provém do acúmulo de microtensões ao redor das falhas ou interfaces inerentes ao material, levando ao rompimento das ligações no ponto danificando o material. Os microdefeitos e a evolução destes contribuem significativamente para a resposta não-linear dos sólidos, sendo evidenciado macroscopicamente por redução de rigidez e resistência do material.

A mecânica do dano contínuo é fundamentada nos princípios gerais da termodinâmica, dos processos irreversíveis, considerando um número finito de variáveis internas. Segundo Lemaitre (1996), o processo de danificação dos materiais é progressivo pelo qual os materiais se degradam e rompem.

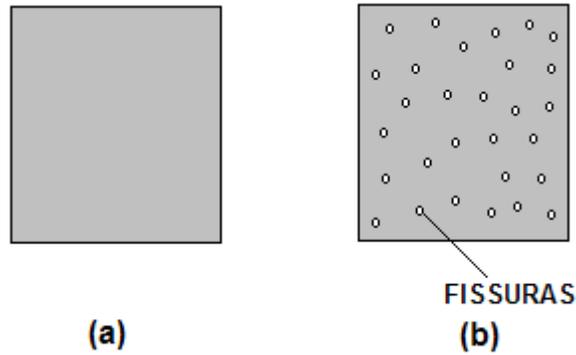
Os modelos constitutivos de dano têm sido usados como uma importante ferramenta de análise da perda de rigidez de estruturas, com a finalidade de prever a degradação do material. Seu interesse consiste na simulação da degradação mecânica de materiais quase-frágeis, tais como concreto, cerâmicas e rochas, que depois de percorrido o regime elástico, ocorre descendência tensional (abrandamento devido ao processo progressivo de evolução dos microdefeitos) a cada incremento de deformação, delineando o comportamento não-linear do material. Para o desenvolvimento de ferramentas apropriadas, é indispensável que o comportamento não-linear desses materiais seja conhecido e modelado precisamente, especialmente o seu estado de danificação.

## 2.2 Conceitos fundamentais

O modelo de dano isotrópico propõe que, independentemente da direção, as falhas têm o mesmo comportamento mecânico regido por uma variável escalar, chamada variável de dano,  $d$ . Assim, como pode ser observado na fig. (2.1), em uma seção transversal de um elemento danificado, a variável de dano é definida como:

$$d = \frac{A_D}{A} \quad (2.1)$$

onde  $A_D$  é a área dos defeitos e  $A$  é a área total da seção transversal.



**Figura 2.1: Seção transversal: (a) nominal, (b) degradada**

Nota-se que a variável de dano pertence ao intervalo  $0 \leq d \leq 1$ , sendo que a variável de dano é nula,  $d = 0$ , somente se  $A_D = 0$ , o que corresponde a um estado íntegro do material. Por outro lado,  $d = 1$  se  $A_D = A$ , correspondendo ao estado de degradação completa.

A área da seção que efetivamente resiste às forças aplicadas, então, pode ser expressa como:

$$\bar{A} = A - A_D \quad (2.2a)$$

ou

$$A_D = A - \bar{A} \quad (2.2b)$$

Assim, para um elemento unidimensional com carregamento axial  $F$ , podem-se definir dois valores de tensão: a tensão aparente,  $\sigma$ , que está associada à área total da seção transversal, e a tensão efetiva,  $\bar{\sigma}$ , que está associada à área que efetivamente resiste aos esforços solicitantes (área íntegra), ou seja:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.3)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{A}} \quad (2.4)$$

Substituindo a Eq. (2.2b) em (2.1), tem-se

$$d = \frac{A - \bar{A}}{A} = \frac{A}{A} - \frac{\bar{A}}{A} = 1 - \frac{\bar{A}}{A} \quad (2.5a)$$

então,

$$\frac{\bar{A}}{A} = 1 - d \quad (2.5b)$$

Dessa forma, a tensão aparente pode ser expressa em função da variável de dano e da tensão efetiva fazendo-se o quociente entre (2.3) e (2.4),

$$\frac{\sigma}{\bar{\sigma}} = \frac{\bar{A}}{A} = 1 - d \quad (2.6)$$

e, portanto, multiplicando ambos os membros por  $\bar{\sigma}$ , tem-se a seguinte lei constitutiva:

$$\sigma = (1 - d) \cdot \bar{\sigma} \quad (2.7)$$

Analisando a Eq. (2.7), nota-se que para o material em estado íntegro localmente a tensão efetiva é igual à tensão aparente, e que, para o material completamente degradado localmente a tensão efetiva tende ao infinito.

$$\sigma = \bar{\sigma} \quad \text{Para a variável de dano } d = 0 \text{ (material não degradado)}$$

$$\bar{\sigma} \rightarrow \infty \quad \text{Para a variável de dano } d = 1 \text{ (material totalmente degradado)}$$

Baseando-se no conceito de tensão efetiva e na hipótese de equivalência de deformação proposto por Lemaitre e Chaboche (1978), segundo a qual “a deformação associada a um estado danificado submetido à tensão,  $\sigma$ , é equivalente à deformação associada ao estado não danificado submetido à tensão efetiva,  $\bar{\sigma}$ ”, como mostra a fig. (2.2), pode-se escrever:

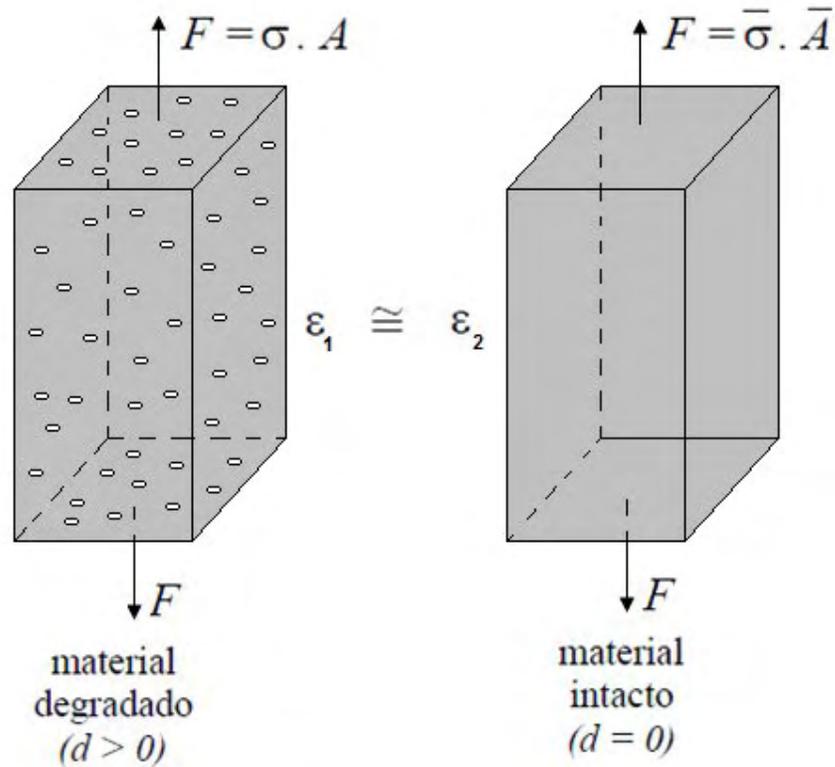


Figura 2.2: Hipótese de deformação equivalente (LEMAITRE, 1978)

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_D} \quad (2.8)$$

e

$$\varepsilon_2 = \frac{\bar{\sigma}}{E} \quad (2.9)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade intacto,  $E_D$  o módulo de elasticidade degradado. Substituindo a Eq. (2.7) em (2.8), e como, de acordo com a hipótese de equivalência de deformações,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , igualando-se as Eq. (2.8) e (2.9), tem-se a relação entre o módulo de elasticidade (módulo de Young) e o módulo de elasticidade degradado:

$$E_D = (1 - d)E \quad (2.10)$$

A partir da Eq. (2.8) e da Eq. (2.10), pode-se escrever a relação constitutiva total da seguinte forma:

$$\sigma = E_D \cdot \varepsilon \quad (2.11)$$

ou

$$\sigma = (1-d) \cdot E \cdot \varepsilon \quad (2.12)$$

Comparando a Eq. (2.12) com a Eq. (2.7), conclui-se que

$$\bar{\sigma} = E \cdot \varepsilon \quad (2.13)$$

### 2.3 Critério de degradação

O domínio elástico, que define os estados de tensões para os quais o comportamento do material é elástico linear, pode ser estabelecido através de uma função de dano,  $F$ , como:

$$F(\sigma) \leq 0 \quad (2.14)$$

Matematicamente, este critério pode ser escrito como uma função da norma da tensão equivalente,  $\tau$ , e da variável limite de dano,  $q$ ,  $F(\tau, r) \leq 0$ , obtendo-se assim a expressão geral:

$$F(\sigma) = \tau(\sigma) - q \leq 0 \quad (2.15)$$

No espaço das tensões efetivas, a Eq. (2.15) pode ser escrita como:

$$F(\bar{\sigma}) = \tau(\bar{\sigma}) - r \leq 0 \quad (2.16)$$

onde

$$r = \frac{q}{1-d} \quad (2.17)$$

Assim como na teoria da plasticidade, as relações de Kuhn-Tucker definem as condições de carga e descarga, ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{d} &\geq 0 \\ F(\bar{\sigma}) &\leq 0 \\ \dot{d} \cdot F(\bar{\sigma}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.18}$$

das quais pode-se deduzir que:

$$\text{Se } F < 0 \quad \Rightarrow \dot{d} = 0 \text{ (não há evolução de dano)}$$

$$\text{Se } F = 0 \text{ e } \dot{F} < 0 \quad \Rightarrow \dot{d} = 0 \text{ (descarga)}$$

mas se

$$F = 0$$

e

$$\dot{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{d} = 0 \\ \dot{d} > 0 \end{cases} \text{ (carga neutra ou carga, respectivamente)}$$

onde  $\dot{d}$  é a taxa de variação da variável de dano.

Repare que se a função  $F$  for menor que zero não há evolução na variável limite de dano  $r$  e, portanto, não há evolução de dano. Agora, se a função  $F$  for igual a zero e, a variação da função  $\dot{F}$  for menor que zero, implica que a lei de evolução da variável de dano é nula e, então, o processo é de descarregamento. Mas se a função,  $F$ , for igual a zero e a variação da função,  $\dot{F}$ , for igual a zero, pode-se implicar em duas condições: a lei de evolução de dano igual a zero e, então, tem-se carga neutra; se a lei de evolução da variável de dano maior que zero e, então, o processo é de carregamento.

Na fig. (2.3), que ilustra uma curva típica de tensão versus deformação, observam-se claramente os intervalos de carga, descarga e recarga do material.

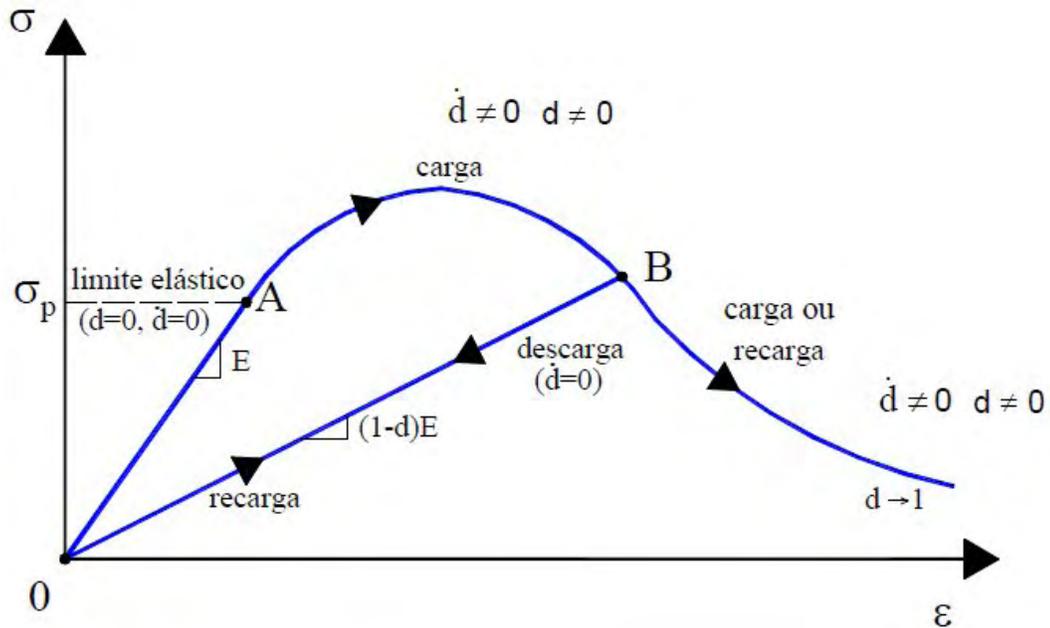


Figura 2.3: Diagrama de tensão *versus* deformação axial (GONÇALVES, 2003)

No regime elástico linear, que corresponde ao trecho  $\overline{OA}$ , não há evolução do dano ( $\dot{d} = 0$ ). No trecho  $\overline{AB}$  descreve o regime inelástico com evolução do dano ( $\dot{d} \neq 0$ ). Já no trecho  $\overline{BO}$  e  $\overline{OB}$  correspondem, respectivamente, às situações de descarga e recarga, ambas sem evolução do dano. Além disso, observa-se que o fator de redução da rigidez é  $(1 - d)$ .

## 2.4 Lei de evolução da variável de dano

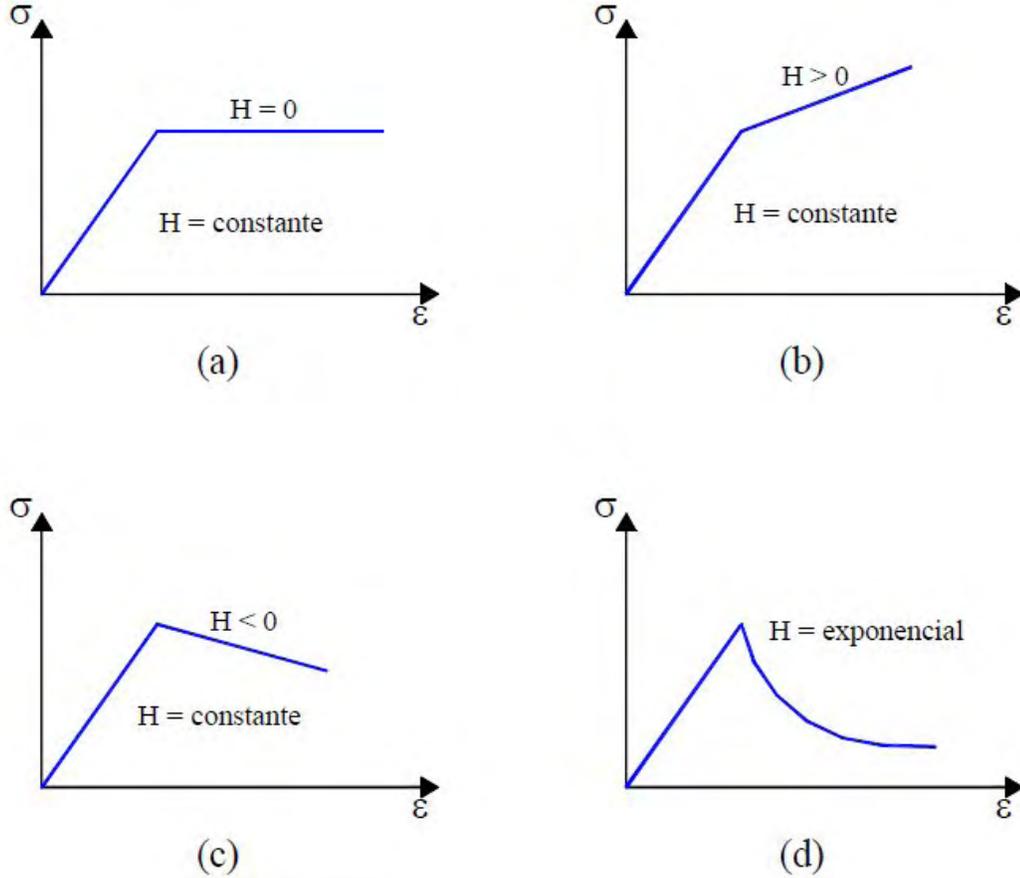
Dependendo da característica do material, a evolução do dano pode produzir diferentes comportamentos após o limite de elasticidade. Esse comportamento pode ser atribuído a uma variável  $H$ , chamada módulo de endurecimento/abrandamento.

Para o modelo de dano isotrópico a lei de endurecimento/abrandamento pode ser descrita em relação às variáveis internas do tipo tensão deformação (MANZOLI, 1998):

$$\dot{q} = \frac{H}{1+H} \dot{r} \tag{2.19}$$

onde  $\dot{r} \geq 0$ .

Na fig. (2.4) pode-se observar as diferentes leis de endurecimento/abrandamento.



**Figura 2.4: Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento (PEDRINI, 2008)**

Na fig. 2.4, em (a) tem-se o regime elastodegradável perfeito, em (b) o encruamento linear positivo (endurecimento), em (c) o encruamento linear negativo (abrandamento) e em (d) o abrandamento exponencial.

Tendo-se em conta que  $q = (1-d)r$  e utilizando-se a regra de endurecimento/abrandamento da Eq. (2.19), pode-se chegar à lei de evolução da variável de dano em função do módulo de endurecimento/abrandamento e da variável limite de dano, para carregamentos monotônicos, dada pela Eq. (2.20) (MANZOLI, 1998).

$$\dot{d} = \left( \frac{1}{1+H} - d \right) \cdot \frac{\dot{r}}{r} \quad (2.20)$$

Segundo o princípio da termodinâmica, que rege o fenômeno do dano, o processo de deformação deve ser irreversível implicando em  $(\dot{d} \geq 0)$ , e, portanto, a Eq. (2.20) deve estar contida, em qualquer instante do processo de carga, dentro do seguinte intervalo:

$$-1 < H < (1 - d) \quad (2.21)$$

onde o módulo de endurecimento/abrandamento pode variar através de qualquer função em termos da variável limite de dano. Assim, pode-se obter a expressão fechada da evolução da variável de dano solucionando a relação diferencial da Eq. (2.20).

$$d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (2.22)$$

e

$$q(r) = \int \frac{H(r)}{1 + H(r)} dr \quad (2.23)$$

Para um módulo  $H$  constante, tem-se a lei linear de dano em função de  $H$  e do limite de dano ( $r$ ), ou seja:

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)} \quad (2.24)$$

A fim de formular a expressão para a lei exponencial, considera-se  $H$  fornecida pela Eq. (2.25), obtendo-se a Eq. (2.26) proposta por Oliver et. al. (1999).

$$H(r) = \frac{1}{1 + A \cdot e^{A\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)}} - 1 \quad (2.25)$$

$$d = 1 - \frac{r}{r_0} \cdot e^{A\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} \quad (2.26)$$

O parâmetro  $A$  da lei de abrandamento exponencial depende da energia de fratura do material.

## 2.5 Modelo de dano isotrópico

Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial,  $F$ , a tensão efetiva é expressa por:

$$\bar{\sigma} = E \cdot \varepsilon \quad (2.27)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\varepsilon$  é a deformação.

O limite de dano inicial,  $r_0$ , é uma propriedade do material e pode ser relacionado com a tensão limite de proporcionalidade,  $f_0$ , da seguinte forma:

$$r_0 = \frac{f_0}{\sqrt{E}} \quad (2.28)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade.

Definindo-se a norma da tensão efetiva como:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}}{E}} \quad (2.29)$$

o critério de degradação é expresso da seguinte forma:

$$F(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{\sigma}}{E}} - \frac{f_0}{\sqrt{E}} \leq 0 \quad (2.30)$$

A partir das relações de Kuhn-Tucker (2.18), pode-se demonstrar que o limite de dano fica dado pelo máximo valor da variável  $\tau$  durante o processo de carregamento:

$$r = \max(r, \tau) \quad (2.31)$$

Note que, a partir das Eq. (2.27) e (2.29),  $\tau$  pode ser expresso em termos da deformação por:

$$\tau = \frac{E \cdot \varepsilon}{\sqrt{E}} = \sqrt{E} \cdot \varepsilon \quad (2.32)$$

E para carga tem-se que:

$$r = \tau \quad (2.33)$$

Para o caso de um procedimento incremental, as tensões no passo de carga  $n+1$  podem ser obtidas a partir das deformações nesse passo e das variáveis de estado do passo anterior,  $n$ , pelo algoritmo do modelo constitutivo de dano isotrópico, totalmente explícito, mostrado na tab. (2.1).

**Tabela 2.1: Algoritmo do modelo constitutivo de dano isotrópico**

<b>Algoritmo:</b> Obtenção das tensões a partir das deformações.
Entrada: $E, f_0, H, d_n, r_n, \varepsilon_{n+1}$
Saída: $d_{n+1}, r_{n+1}, \sigma_{n+1}$
(1) Calcular $\bar{\sigma}_{n+1} = E \cdot \varepsilon_{n+1}$
(2) Calcular $\tau_{n+1}$ de acordo com a Eq. (2.29)
(3) Verificar se $\tau_{n+1} > r_n$
VERDADEIRO: $r_{n+1} = \tau_{n+1}$
FALSO: $r_{n+1} = r_n$
(4) Calcular $d_{n+1}$ de acordo com a Eq. (2.24)
(5) Calcular a tensão final:
$\sigma_{n+1} = (1 - d_{n+1}) \cdot \bar{\sigma}_{n+1}$

## 2.6 Modelo de dano diferenciado para tração e compressão

Para representar o comportamento diferenciado em tração e compressão, desenvolve-se um modelo de dano diferenciado, decompondo-se a tensão efetiva,  $\bar{\sigma}$ , em uma parte positiva (tensão efetiva positiva),  $\bar{\sigma}^+$ , e outra negativa (tensão efetiva negativa),  $\bar{\sigma}^-$ , da seguinte forma:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^+ + \bar{\sigma}^- \quad (2.34)$$

onde

$$\bar{\sigma}^+ = \frac{\sqrt{(\bar{\sigma})^2 + \bar{\sigma}}}{2} \quad (2.35)$$

e

$$\bar{\sigma}^- = -\frac{\sqrt{(\bar{\sigma})^2 - \bar{\sigma}}}{2} \quad (2.36)$$

Os índices “+” e “-” referem-se às variáveis associadas às partes positiva e negativa da tensão efetiva, respectivamente.

Definem-se duas variáveis limite de dano inicial,  $r_0^+$  e  $r_0^-$ , para controlar o domínio elástico à tração e à compressão, respectivamente, em termos da tensão limite de proporcionalidade de tração inicial,  $f_0^t$ , e de compressão inicial,  $f_0^c$ , e do módulo de elasticidade.

$$r_0^+ = \frac{f_0^t}{\sqrt{E}} \quad (2.37)$$

$$r_0^- = \frac{f_0^c}{\sqrt{E}} \quad (2.38)$$

A norma do critério de degradação para tração e compressão é escrita em termos da tensão efetiva positiva e da tensão efetiva negativa, respectivamente, e do módulo de elasticidade.

$$\tau^+(\bar{\sigma}^+) = \frac{\bar{\sigma}^+}{\sqrt{E}} \quad (2.39)$$

$$\tau^-(\bar{\sigma}^-) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{|\bar{\sigma}^-|}{\sqrt{E}} \quad (2.40)$$

onde  $\alpha$  é a razão entre as tensões limite de compressão e de tração. Então, os critérios de degradação em tração e compressão podem ser escritos da seguinte forma:

$$F(\bar{\sigma}^+) = \frac{\bar{\sigma}^+}{\sqrt{E}} - \frac{f_0^t}{\sqrt{E}} \leq 0 \quad (2.41)$$

$$F(\bar{\sigma}^-) = \frac{1}{\alpha} \frac{|\bar{\sigma}^-|}{\sqrt{E}} - \frac{f_0^c}{\sqrt{E}} \leq 0 \quad (2.42)$$

onde para o processo de carregamento em tração  $r^+ = \max(r^+, \tau^+)$ , e para o processo de carregamento em compressão  $r^- = \max(r^-, \tau^-)$ .

Duas variáveis de dano são definidas,  $d^+$  que é aplicada na tensão efetiva positiva, e  $d^-$  que é aplicada na tensão efetiva negativa, em termos das variáveis limite de dano e do módulo de endurecimento/abrandamento,  $H$ .

$$d^+ = \frac{r^+ - r_0^+}{r^+ \cdot (1 + H^+)} \quad (2.43)$$

$$d^- = \frac{r^- - r_0^-}{r^- \cdot (1 - H^-)} \quad (2.44)$$

Por fim, a tensão nominal é obtida somando as tensões efetivas positiva e negativa reduzidas pela correspondente variável de dano atualizada.

$$\sigma = (1 - d^+) \cdot \bar{\sigma}^+ + (1 - d^-) \cdot \bar{\sigma}^- \quad (2.45)$$

O algoritmo do modelo é apresentado na tab. (2.2) para o caso de um procedimento incremental, no qual as tensões no passo de carga  $n+1$  podem ser obtidas a partir das deformações nesse passo e das variáveis de estado do passo anterior,  $n$ , de forma totalmente explícita.

**Tabela 2.2: Algoritmo do modelo de dano diferenciado para tração e compressão**

<b>Algoritmo:</b> Obtenção das tensões a partir das deformações.
Entrada: $E, f_0, H^+, H^-, d_n^+, d_n^-, r_n^+, r_n^-, \varepsilon_{n+1}, \alpha$
Saída: $d_{n+1}^+, d_{n+1}^-, r_{n+1}^+, r_{n+1}^-, \sigma_{n+1}$
(1) calcular $\bar{\sigma}_{n+1} = E \cdot \varepsilon_{n+1}$
(2) Calcular $\bar{\sigma}_{n+1}^+ = \frac{\sqrt{(\bar{\sigma}_{n+1})^2} + \bar{\sigma}_{n+1}}{2}$
(3) Calcular $\bar{\sigma}_{n+1}^- = -\frac{\sqrt{(\bar{\sigma}_{n+1})^2} - \bar{\sigma}_{n+1}}{2}$
(4) Calcular $\tau_{n+1}^+ = \frac{\bar{\sigma}_{n+1}^+}{\sqrt{E}}$
(5) Calcular $\tau_{n+1}^- = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{ \bar{\sigma}_{n+1}^- }{\sqrt{E}}$
(6) Verificar se $\tau_{n+1}^+ > r_n^+$
VERDADEIRO: $r_{n+1}^+ = \tau_{n+1}^+$
FALSO: $r_{n+1}^+ = r_n^+$
(7) Verificar se $\tau_{n+1}^- > r_n^-$
VERDADEIRO: $r_{n+1}^- = \tau_{n+1}^-$
FALSO: $r_{n+1}^- = r_n^-$

$$(8) \text{ Calcular } d_{n+1}^+ = \frac{r_{n+1}^+ - r_0^+}{r_{n+1}^+ \cdot (1 + H^+)}$$

$$(9) \text{ Calcular } d_{n+1}^- = \frac{r_{n+1}^- - r_0^-}{r_{n+1}^- \cdot (1 + H^-)}$$

(10) Calcular a tensão final:

$$\sigma_{n+1} = (1 - d_{n+1}^+) \cdot \bar{\sigma}_{n+1}^+ + (1 - d_{n+1}^-) \cdot \bar{\sigma}_{n+1}^-$$

## 2.7 Modelo de dano somente à tração

O modelo de dano somente à tração, para o caso de um elemento unidimensional, é obtido a partir da decomposição da tensão efetiva em tensão efetiva positiva e tensão efetiva negativa. Então, o fator de redução (variável de dano) é calculado e aplicado somente na tensão efetiva positiva. Como resultado, a degradação do elemento só ocorre quando tracionado, permanecendo elástico quando comprimido.

O algoritmo do modelo proposto é apresentado na tab. (2.3), especificando a decomposição da tensão efetiva em tensão efetiva de tração e tensão efetiva de compressão, o critério de degradação, a norma da tensão efetiva positiva, o limite de dano, as condições de carga, descarga e recarga, assim como a evolução da variável de dano,  $d^t$ , que é aplicada como fator de redução na parte positiva da tensão efetiva.

**Tabela 2.3: Modelo de dano somente à tração**

<b>Algoritmo:</b> Obtenção das tensões a partir das deformações.
Entrada: $E, f_0, A, d^t_n, r^t_n, \varepsilon_{n+1}$
Saída: $d^t_{n+1}, r^t_{n+1}, \sigma_{n+1}$
(1) Calcular $\bar{\sigma}_{n+1} = E \cdot \varepsilon_{n+1}$
(2) Calcular $\bar{\sigma}_{n+1}^+ = \frac{( \bar{\sigma}_{n+1}  + \bar{\sigma}_{n+1})}{2}$
(3) Calcular $\tau_{n+1} = \frac{\bar{\sigma}_{n+1}^+}{\sqrt{E}}$
(4) Verificar se $\tau_{n+1} > r^t_n$
VERDADEIRO: $r^t_{n+1} = \tau_{n+1}$

FALSO:  $r_{n+1}^t = r_n^t$

$$(5) \text{ Calcular } d_{n+1}^t = 1 - \left( \frac{r_0 e^{A \left( 1 - \frac{r_0}{r_{n+1}^t} \right)}}{r_{n+1}^t} \right)$$

(6) Calcular a tensão final:

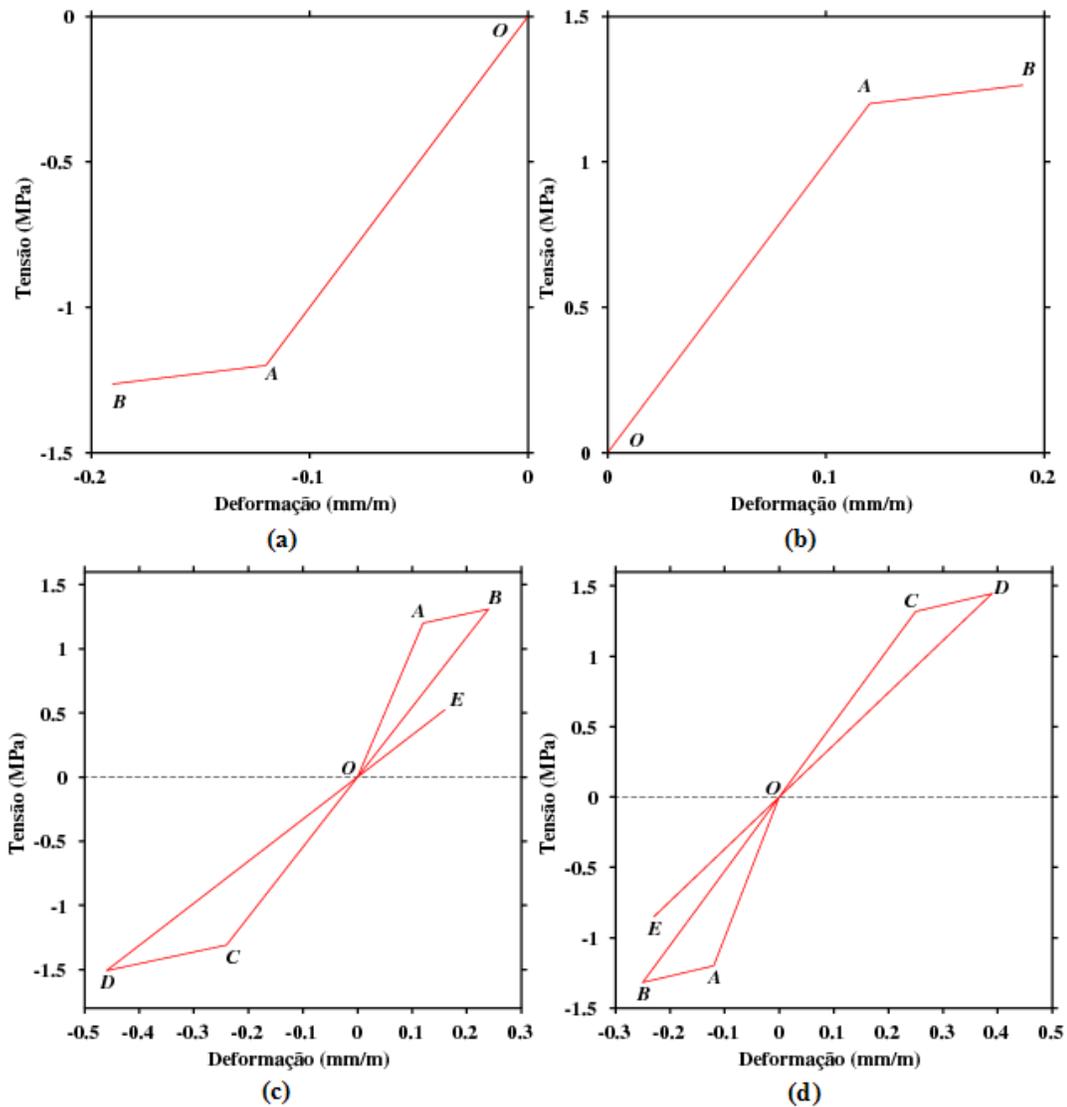
$$\sigma_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1} - d_{n+1}^t \cdot \bar{\sigma}_{n+1}^+$$

## 2.8 Resultados numéricos

A fim de visualizar o comportamento do modelo de dano isotrópico, segundo o algoritmo apresentado na tab. (2.1), simularam-se estados uniaxiais de tração, de compressão e alternados, impondo-se incrementos de deformação constantes (a rotina MATLAB/OCTAVE encontra-se no apêndice 1). Assumiu-se o módulo de endurecimento/abrandamento,  $H = 0,2$ . As propriedades do material usadas foram: módulo de elasticidade  $E = 10$  GPa, resistência à tração  $\sigma_t = 1,3$  MPa e, conseqüentemente, resistência à compressão,  $\sigma_c = 1,3$  MPa ( no modelo de dano isotrópico, a resistência à tração é igual a resistência à compressão).

Os resultados são apresentados, com as curvas tensão versus deformação para a variável de dano com lei de endurecimento, na fig. (2.5), com o elemento submetido à compressão uniaxial (fig. (2.5a)) e à tração uniaxial (fig. (2.5b)), assim como com solicitações alternadas (fig. (2.5c) e fig. (2.5d)).

Na fig. (2.5a), o seguimento  $\overline{OA}$  corresponde ao regime elástico linear, com a tensão proporcional à deformação, sem evolução da variável de dano ( $\dot{d} = 0$ ). No seguimento  $\overline{AB}$ , o material está no regime elastodegradável com encruamento linear positivo (endurecimento), já que  $H = 0,2$ . Na figura (2.5b) tem-se a curva tensão versus deformação, para o material em processo de carregamento em tração uniaxial, com as tensões proporcionais às deformações (regime elástico) no seguimento  $\overline{OA}$ , ( $d = 0, \dot{d} = 0$ ). No seguimento  $\overline{AB}$ , tem-se o regime elastodegradável com endurecimento e evolução da variável de dano ( $\dot{d} \neq 0$ ).



**Figura 2.5: Curva tensão *versus* deformação para o modelo de dano isotrópico: (a) compressão, (b) tração, (C) tração-compressão e (d) compressão-tração**

A curva tensão versus deformação mostrada na fig. (2.5c), corresponde à resposta quando o material é submetido primeiramente à tração e posteriormente à compressão. No processo de carregamento em tração, o material está no regime elástico no seguimento  $\overline{OA}$  e em processo de degradação no trecho  $\overline{AB}$ , com encruamento linear positivo. No seguimento  $\overline{BO}$ , o processo é de descarregamento com dano à tração não nulo e sem evolução das variáveis de dano. Na transição do processo de tração para compressão, o material não recupera a rigidez, caracterizando o regime elástico até o material atingir a resistência à compressão, seguimento  $\overline{OC}$ . No trecho “pós-pico”, tem-se o processo elastodegradável com endurecimento ( $\overline{CD}$ ), com evolução da variável de dano, promovendo a perda de rigidez do

material, que pode ser observado no processo de descarregamento mostrado no seguimento  $\overline{DO}$ . Quando o processo passa de compressão para tração, o comportamento do material reflete a perda de rigidez em tração e em compressão (seguimento  $\overline{OE}$ ).

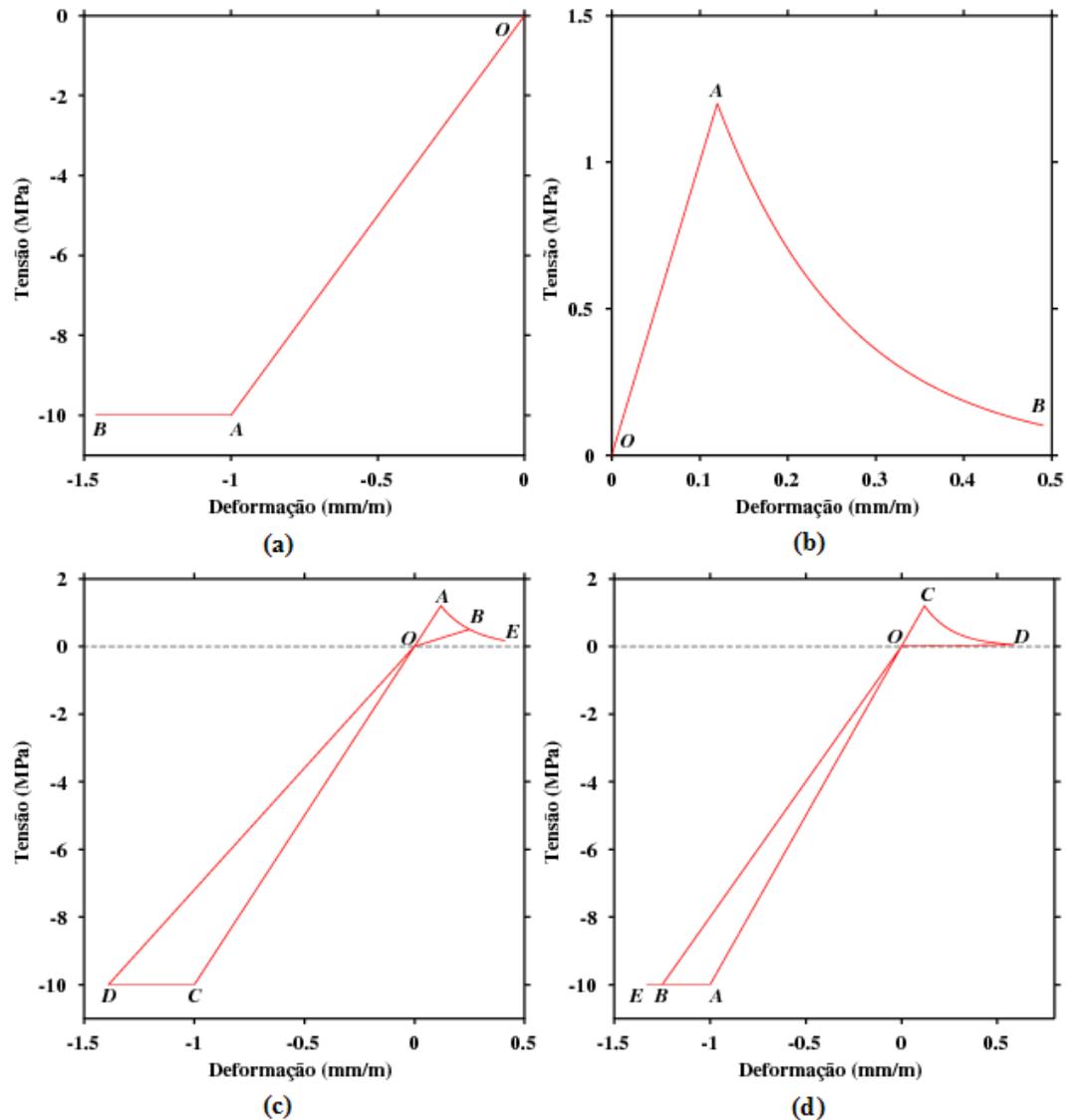
Na figura (2.5d) mostra-se a resposta quando o material é primeiramente submetido à compressão e posteriormente à tração (carregamento alternado inverso), apresentando compatibilidade com o carregamento alternado da fig. (2.5c). O regime é elástico linear no seguimento  $\overline{OA}$ , em processo de degradação (regime elastodegradável com encruamento linear positivo) no seguimento  $\overline{AB}$ , com evolução da variável de dano, e em processo de descarregamento no seguimento  $\overline{BO}$ . Na transição do processo de compressão para tração o material não recupera a rigidez, seguimento  $\overline{OC}$ . No trecho  $\overline{CD}$ , o processo é de degradação, com encruamento linear positivo, com evolução do dano. Novamente, tem-se o descarregamento, seguimento  $\overline{DO}$ , passando para o processo de carregamento em compressão, trecho  $\overline{OB}$ , no qual não há a recuperação da rigidez correspondente ao estado de compressão. O material volta novamente a danificar em compressão quando é atingida a resistência à compressão.

Para visualizar o comportamento do modelo de dano diferenciado para tração e compressão, segundo o algoritmo apresentado na tab. (2.2), simulou-se estados uniaxiais de tração, de compressão e alternados, impondo-se incrementos de deformação constantes. Para compressão assumiu-se o módulo de endurecimento/abrandamento nulo,  $H^- = 0,0$ , e, para tração, o parâmetro de abrandamento exponencial  $A = 0,8$ . As propriedades do material usadas foram: módulo de elasticidade  $E = 10$  GPa, resistência à tração  $\sigma_t = 1,2$  MPa e resistência à compressão,  $\sigma_c = 10$  MPa.

Os resultados são apresentados, com as curvas tensão versus deformação na fig. (2.6), com o elemento submetido à compressão uniaxial (fig. (2.6a)) e à tração uniaxial (fig. (2.6b)), assim como com solicitações alternadas (fig. (2.6c) e fig. (2.6d)).

Na fig. (2.6a), o seguimento  $\overline{OA}$  corresponde ao regime elástico linear, com a tensão proporcional à deformação, sem evolução da variável de dano ( $\dot{d}^- = 0$ ). No seguimento  $\overline{AB}$ , o elemento está no regime elastodegradável perfeito, com evolução da variável de dano à compressão ( $\dot{d}^- \neq 0$ ). Na figura (2.6b) tem-se a curva tensão versus deformação, para o elemento em processo de carregamento em tração uniaxial, com as tensões proporcionais às deformações (regime elástico) no seguimento  $\overline{OA}$  ( $\dot{d}^+ = 0$ ). No trecho  $\overline{AB}$ , tem-se o regime

elastodegradável com abrandamento exponencial e evolução da variável de dano à tração ( $\dot{d}^+ \neq 0$ ).



**Figura 2.6: Curva tensão versus deformação para o modelo de dano diferenciado em tração e compressão: (a) compressão, (b) tração, (C) tração-compressão e (d) compressão-tração**

A curva tensão versus deformação mostrada na fig. (2.6c), corresponde à resposta quando o elemento é submetido primeiramente à tração e posteriormente à compressão. No processo de carregamento em tração, o material está no regime elástico no seguimento  $\overline{OA}$  e em processo de degradação no trecho  $\overline{AB}$ , com abrandamento exponencial. No seguimento

$\overline{BO}$ , o processo é de descarregamento com dano à tração não nulo e sem evolução das variáveis de dano. Na transição do processo de tração para compressão, observa-se uma recuperação total da rigidez do material, caracterizando o regime elástico até o material atingir a resistência à compressão, seguimento  $\overline{OC}$ . No trecho “pós-pico”, tem-se o processo elastodegradável perfeito ( $\overline{CD}$ ), com evolução da variável de dano à compressão, promovendo a perda de rigidez do material, que pode ser observado no processo de descarregamento mostrado no seguimento  $\overline{DO}$ . Quando o processo passa de compressão para tração, o comportamento do material reflete a perda de rigidez em tração, mas não reflete a perda de rigidez em compressão (seguimento  $\overline{OB}$ ).

Na figura (2.6d) mostra-se a resposta quando o elemento é primeiramente submetido à compressão e posteriormente à tração (carregamento alternado inverso), apresentando compatibilidade com o carregamento alternado da fig. (2.6c). O regime é elástico linear no seguimento  $\overline{OA}$ , em processo de degradação (regime elastodegradável perfeito) no seguimento  $\overline{AB}$ , com evolução da variável de dano à compressão, e em processo de descarregamento no seguimento  $\overline{BO}$ . Na transição do processo de compressão para tração o material recupera totalmente a rigidez, seguimento  $\overline{OC}$ , já que este não traz a perda de rigidez devido à degradação em compressão. No trecho  $\overline{CD}$ , o processo é de degradação, abrandamento exponencial, com evolução do dano à tração. Novamente, tem-se o descarregamento, seguimento  $\overline{DO}$ , passando para o processo de carregamento em compressão, seguimento  $\overline{OB}$ , no qual recupera-se a rigidez correspondente ao estado de compressão. O material volta novamente a danificar em compressão quando é atingida a resistência à compressão.

A recuperação da rigidez total do material na passagem do processo de tração para compressão representa os efeitos decorrentes do fechamento das falhas e microfissuras, fazendo com que o material readquira suas propriedades mecânicas. Na passagem do processo de compressão para tração o material recupera totalmente a rigidez, mostrando a limitação do modelo que não reflete a degradação em compressão quando o elemento é tracionado (no caso do concreto seria o esmagamento em compressão, que induz uma perda de rigidez quando tracionado).

Para visualizar o comportamento do modelo de dano somente à tração, segundo o algoritmo apresentado na tab. (2.3), simulou-se estados uniaxiais de tração e compressão, impondo-se incrementos de deformação constantes. Assumiu-se parâmetro de abrandamento

exponencial  $A = 0,8$ . As propriedades do material usadas foram: módulo de elasticidade  $E = 10 \text{ GPa}$  e resistência à tração  $\sigma_t = 1,2 \text{ MPa}$ .

Os resultados são apresentados, com a curva tensão versus deformação na fig. (2.7), com o elemento com solitação alternada tração-compressão uniaxial.

A curva tensão versus deformação apresentada na fig. (2.7), corresponde a resposta para o elemento primeiramente submetido à tração e posteriormente à compressão. No processo de carregamento em tração, o elemento está no regime elástico linear, sem evolução da variável de dano ( $\dot{d}^+ = 0$ ) no seguimento  $\overline{OA}$ , em processo de degradação com abrandamento exponencial, com evolução da variável de dano ( $\dot{d}^+ \neq 0$ ) no trecho  $\overline{AB}$ . No seguimento  $\overline{BO}$ , o processo é de descarregamento, sem evolução da variável de dano. Na transição do processo de carregamento em tração para compressão o material recupera totalmente à rigidez, com as tensões sempre proporcionais às deformações (elástico em compressão), seguimento  $\overline{OC}$ .

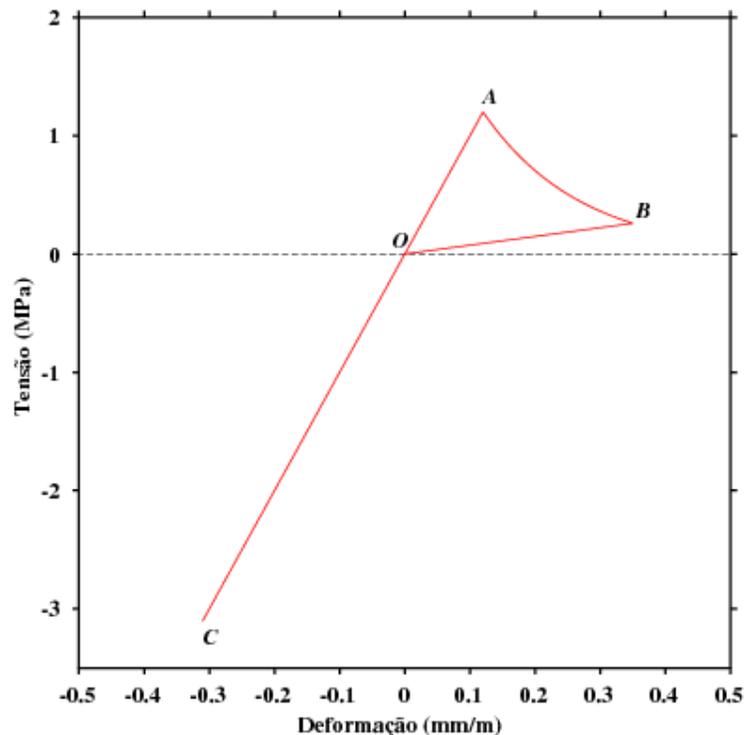


Figura 2.7: Curva tensão *versus* deformação para o modelo de dano somente à tração

## Capítulo 3

# ELEMENTO FINITO UNIDIMENSIONAL COM REGIÃO DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÃO

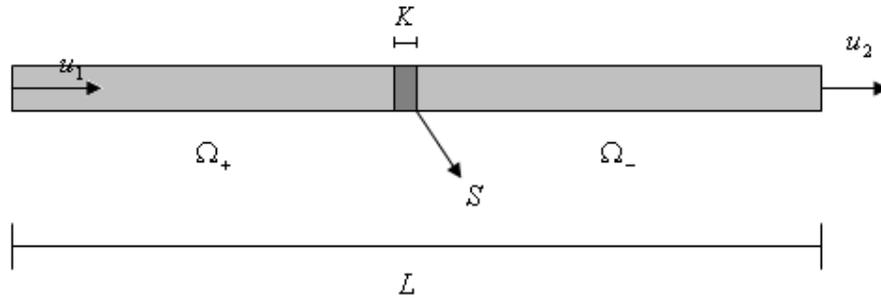
### 3.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma formulação teórica, para o caso unidimensional, para um elemento finito com uma região de localização de deformação, dentro da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) (OLIVER, 1995). Segundo Manzoli (2006), ACDF é a representação do processo de formação de descontinuidades com relações constitutivas do tipo contínuo (entre tensões e deformações).

Este capítulo também apresenta o desenvolvimento de alguns modelos, como o modelo de dano com uma região de localização de deformação e o modelo de dano somente à tração para o elemento com localização de deformação, assim como seus resultados numéricos.

### 3.2 Formulação teórica

Seja um elemento unidimensional de comprimento  $L$ , área de seção transversal  $A$ , e com uma região de localização de deformação,  $S$ , de comprimento  $K$  tendendo a zero. Sejam  $u_1$  e  $u_2$  os deslocamentos nas extremidades, como mostra a fig. (3.1).

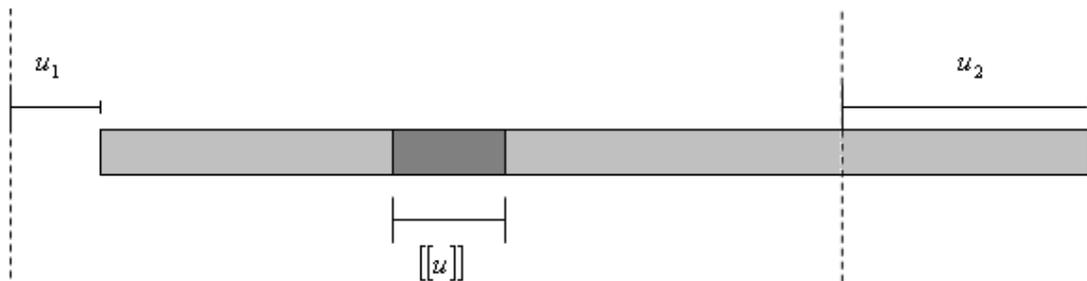


**Figura 3.1: Elemento com uma região de localização de deformação**

onde  $\Omega$  é a região contínua do elemento composta pelas partes  $\Omega_+$  e  $\Omega_-$ , divididas pela região  $S$ , tal que:

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_- \tag{3.1}$$

Após a formação da descontinuidade o elemento apresenta deslocamentos  $u_1$  e  $u_2$  e um salto no campo de deslocamento  $[[u]]$ , como mostra a fig. (3.2).



**Figura 3.2: Elemento com um salto no campo de deslocamento**

Com o salto no campo de deslocamento induz um relaxamento associado a um movimento relativo de corpo rígido imposto pela região de localização. Assim, a variação do comprimento na região contínua pode ser expressa como:

$$\Delta L_{\Omega} = u_2 - u_1 - \llbracket u \rrbracket \quad (3.2)$$

Então, a deformação na região contínua é obtida pelo quociente entre a variação do comprimento da região contínua pelo comprimento original (elemento não deformado),

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{u_2 - u_1}{L} - \frac{\llbracket u \rrbracket}{L} = \hat{\varepsilon} - \frac{\llbracket u \rrbracket}{L} \quad (3.3)$$

onde  $\hat{\varepsilon} = (u_2 - u_1)/L$  é a deformação regular do elemento. Da mesma forma, pode-se escrever a deformação na região de localização em função da deformação da região contínua  $\varepsilon_{\Omega}$ , do salto no campo de deslocamento  $\llbracket u \rrbracket$  e do comprimento da região de localização,  $K$ ,

$$\varepsilon_S = \varepsilon_{\Omega} + \frac{\llbracket u \rrbracket}{K} \quad (3.4)$$

Substituindo a Eq. (3.3) em (3.4), tem-se a Eq.(3.5).

$$\varepsilon_S = \hat{\varepsilon} + \frac{\llbracket u \rrbracket}{K} - \frac{\llbracket u \rrbracket}{L} \quad (3.5)$$

Colocando o salto no campo de deslocamento em evidência no segundo membro, a deformação na região de localização pode ser escrita como:

$$\varepsilon_S = \hat{\varepsilon} + \llbracket u \rrbracket \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{L} \right) \quad (3.6)$$

Define-se o modelo constitutivo contínuo para a região contínua,  $\Sigma_{\Omega}$ , em função da deformação  $\varepsilon_{\Omega}$ , no regime elástico. Analogamente, define-se o modelo constitutivo para a região de localização de deformação,  $\Sigma_S$ , em função da deformação  $\varepsilon_S$ .

$$\sigma_{\Omega} = \Sigma_{\Omega}(\varepsilon_{\Omega}) \quad (3.7)$$

e

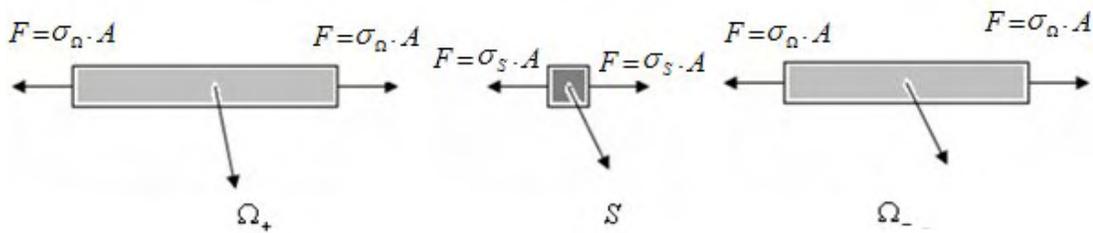
$$\sigma_s = \Sigma_s(\varepsilon_s) \quad (3.8)$$

Fazendo o equilíbrio de forças, tem-se que a tensão na região contínua deve ser igual à tensão na região descontínua, (fig.(3.3)).

$$\sigma_\Omega = \sigma_s \quad (3.9)$$

ou

$$\sigma_\Omega - \sigma_s = 0 \quad (3.10)$$



**Figura 3.3: Equilíbrio de força do elemento**

As leis constitutivas para a região contínua e para a região descontínua podem ser expressas pela Eq.(3.11) e pela Eq.(3.12), respectivamente.

$$\sigma_\Omega = \Sigma_\Omega \left( \frac{u_2 - u_1}{L} - \llbracket u \rrbracket \right) \quad (3.11)$$

$$\sigma_s = \Sigma_s \left( \frac{u_2 - u_1}{L} + \llbracket u \rrbracket \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{L} \right) \right) \quad (3.12)$$

Então, substituindo a Eq. (3.11) e a Eq. (3.12) na Eq.(3.10), e expressando esta como uma resultante  $R$  em função do salto no campo de deslocamento  $\llbracket u \rrbracket$ , tem-se a Eq. (3.13).

$$R(\llbracket u \rrbracket) = \Sigma_\Omega \left( \hat{\varepsilon} - \frac{\llbracket u \rrbracket}{L} \right) - \Sigma_s \left( \hat{\varepsilon} + \llbracket u \rrbracket \cdot \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{L} \right) \right) = 0 \quad (3.13)$$

Note que, a Eq. (3.13) é não-linear,  $\hat{\varepsilon}$  e  $K$  são dados e, o salto no campo de deslocamento  $[[u]]$  é a única incógnita.

Para resolução da Eq. (3.13) será empregado o método iterativo de Newton, que tem como objetivo estimar a raiz de uma função, permitindo uma aproximação melhorada a partir da resposta da interação interior, por meio de um processo recursivo. Para cada incremento de deslocamento pode-se obter o salto no campo de deslocamento que satisfaz a Eq. (3.13), da seguinte forma:

$$[[u]]_{i+1} = [[u]]_i - \left( \frac{\partial R}{\partial [[u]]} \right)^{-1} \cdot R([[u]]) \quad (3.14)$$

Até que:

$$|R([[u]]_{i+1})| < \text{tolerância estipulada (resíduo)}$$

A aplicação do método de Newton exige a derivada da Eq. no passo anterior. Portanto, a derivada da Eq. (3.13) fica expressa como:

$$\frac{\partial R}{\partial [[u]]} = \frac{\partial \Sigma_{\Omega}}{\partial \varepsilon_{\Omega}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{\Omega}}{\partial [[u]]} - \frac{\partial \Sigma_s}{\partial \varepsilon_s} \cdot \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial [[u]]} \quad (3.15)$$

Assim:

$$\frac{\partial R}{\partial [[u]]} = \frac{\partial \Sigma_{\Omega}}{\partial \varepsilon_{\Omega}} \cdot \left( -\frac{1}{L} \right) - \frac{\partial \Sigma_s}{\partial \varepsilon_s} \cdot \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{L} \right) \quad (3.16)$$

Considerando que, na região contínua  $\Omega$  o comportamento é elástico, então, para o caso unidimensional, a lei constitutiva pode ser escrita segundo a Eq. (3.17),

$$\Sigma_{\Omega}(\varepsilon_{\Omega}) = E \cdot \varepsilon_{\Omega} \quad (3.17)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade.

Na região de localização,  $S$ , considerando o modelo de dano escalar (isotrópico), a lei constitutiva pode ser escrita segundo a Eq. (3.18),

$$\Sigma_s(\varepsilon_s) = (1 - G(r)) \cdot E \cdot \varepsilon_s \quad (3.18)$$

onde  $G(r)$  é a lei de evolução do dano em função da variável limite de dano,  $r$ .

A derivada da lei constitutiva para a região de localização, Eq. (3.18), é expressa com:

$$\frac{\partial \Sigma_s}{\partial \varepsilon_s} = E \left( [1 - G(r)] - \frac{\partial G(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon_s} \cdot \varepsilon_s \right) \quad (3.19)$$

onde  $\tau$  é a norma do critério de degradação.

Partindo do conceito que  $r = \max(r, \tau)$ , então, no processo de carregamento  $r = \tau$ , e, seja a norma do critério de degradação expressa pela Eq. (3.20), então, a Eq. (3.19) pode ser escrita segundo a Eq. (3.21).

$$\tau = \frac{E \cdot \varepsilon_s}{\sqrt{E}} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \Sigma_s}{\partial \varepsilon_s} = E \left[ (1 - G(r)) - \frac{\partial G(r)}{\partial r} \cdot r \right] \quad (3.21)$$

No processo de descarregamento, não há evolução da variável limite de dano,  $r$ , portanto, a derivada de lei constitutiva para a região de localização expressa pela Eq. (3.19) é escrita como:

$$\frac{\partial \Sigma_s}{\partial \varepsilon_s} = E(1 - G(r)) \quad (3.22)$$

Expressando a variável de dano  $d$ , para tração e compressão, em função da variável limite de dano  $r$ , através da seguinte lei de evolução de dano exponencial:

$$G(r) = 1 - \frac{r_0}{r} e^{H \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right)} \quad (3.23)$$

A derivada da lei de evolução de dano em função do limite de dano fica:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = e^{H\left(1-\frac{r}{r_0}\right)} \cdot \left(\frac{H}{r} + \frac{r_0}{r^2}\right) \quad (3.24)$$

O algoritmo do modelo constitutivo para o elemento com uma região de localização de deformação, para o caso unidimensional, é apresentado na tab. (3.1).

**Tabela 3.1: O algoritmo do modelo constitutivo para o elemento com uma região de localização**

<b>Algoritmo:</b> obtenção das tensões a partir das deformações.	
ENTRADA: $L, K, E, f_0, H, d_n, r_n, \hat{\varepsilon}_{n+1}, \llbracket u \rrbracket_n$	
SAÍDA: $d_{n+1}, r_{n+1}, \llbracket u \rrbracket_{n+1}, \sigma_{n+1}$	
(1)	$\llbracket u \rrbracket_{n+1}^0 = \llbracket u \rrbracket_n$ $i = 0$
(2)	Enquanto $ R(\llbracket u \rrbracket^i)  > \text{tolerância}$  $\llbracket u \rrbracket_{n+1}^{i+1} = \llbracket u \rrbracket_{n+1}^i - \left(\frac{\partial R}{\partial \llbracket u \rrbracket_{n+1}^i}\right)^{-1} \cdot R(\llbracket u \rrbracket_{n+1}^i)$ $i = i + 1$
(3)	$\varepsilon_\Omega = \hat{\varepsilon}_{n+1} - \frac{\llbracket u \rrbracket_{n+1}}{L}$
(4)	$\sigma_{n+1} = \Sigma_\Omega(\varepsilon_\Omega) = E \cdot \varepsilon_\Omega$

### 3.3 Modelo de dano somente à tração para o elemento com localização de deformação

Baseando-se na definição do conceito de tensões efetivas, define-se o modelo constitutivo contínuo para a região contínua  $\Omega$  em função da tensão efetiva  $\bar{\sigma}_\Omega$ ,

$$\sigma_\Omega = \Sigma_\Omega(\bar{\sigma}_\Omega) \quad (3.25)$$

onde  $\Sigma_{\Omega}$  é a lei constitutiva elástica para a região contínua, no caso unidimensional. Nesse caso, na região de localização de deformação,  $S$ , a lei constitutiva é escrita, no espaço das tensões efetivas, aplicando o fator de redução somente na tensão positiva, conforme mostra a Eq. (3.26).

$$\Sigma_s(\bar{\sigma}_s) = \bar{\sigma}_s - d' \cdot \bar{\sigma}_s^+ \quad (3.26)$$

A variável de dano,  $d'$ , representa a lei de evolução do dano (fator de redução) em função do limite de dano  $r'$ .

Para aplicação do Método de Newton para obtenção da raiz (salto no campo de deslocamento) que satisfaz a Eq. (3.13) é preciso derivar as leis constitutivas,  $\Sigma_{\Omega}$  e  $\Sigma_s$ , em relação às tensões efetivas,  $\bar{\sigma}_{\Omega}$  e  $\bar{\sigma}_s$ , respectivamente.

$$\frac{\partial \Sigma_{\Omega}}{\partial \bar{\sigma}_{\Omega}} = 1 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \Sigma_s}{\partial \bar{\sigma}_s} = \frac{\partial \bar{\sigma}_s}{\partial \bar{\sigma}_s} - \left( \frac{\partial d'}{\partial \bar{\sigma}_s} \cdot \bar{\sigma}_s^+ + d' \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_s^+}{\partial \bar{\sigma}_s} \right) \quad (3.28)$$

Assim, as derivadas são expressas segundo as condições de carregamento, como mostra a Eq. (3.29).

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_s^+}{\partial \bar{\sigma}_s} = \begin{cases} 1 & (\bar{\sigma}_s > 0) \\ 0 & (\bar{\sigma}_s \leq 0) \end{cases} \quad (3.29)$$

A variável limite de dano à tração fica expressa como:

$$\frac{\partial d'}{\partial \bar{\sigma}_s} = \frac{\partial d'}{\partial r'} \cdot \frac{\partial r'}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\sigma}_s} \quad (3.30)$$

Então, para o processo de carregamento em tração, a Eq. (3.28) pode ser escrita segundo a Eq. (3.31).

$$\frac{\partial \Sigma_s}{\partial \bar{\sigma}_s} = 1 - \left( \frac{\partial d^t}{\partial r^t} \cdot r^t + d^t \right) \quad (3.31)$$

Note que para o processo de descarregamento a variação do limite de dano  $r$  em relação a norma da tensão efetiva,  $\tau$ , é nula,  $\partial r^t / \partial \tau = 0$ . Então, para o elemento em processo de descarregamento ou em processo de compressão, as derivadas das leis constitutivas para a região contínua e para a região de localização de deformação ficam expressas segundo a Eq. (3.32).

$$\frac{\partial \Sigma_s}{\partial \bar{\sigma}_s} = \frac{\partial \Sigma_\Omega}{\partial \bar{\sigma}_\Omega} = 1 \quad (3.32)$$

As Eq. (3.33) e (3.34) representam a lei de evolução da variável de dano e sua derivada, respectivamente.

$$d^t(r^t) = 1 - \frac{r_0}{r^t} e^{H \left( 1 - \frac{r^t}{r_0} \right)} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial d^t}{\partial r^t} = e^{H \left( 1 - \frac{r^t}{r_0} \right)} \cdot \left( \frac{H}{r^t} + \frac{r_0}{r^{t^2}} \right) \quad (3.34)$$

O algoritmo do modelo somente à tração para o elemento com uma região de localização de deformação, para o caso unidimensional, é apresentado na Tab. (3.2).

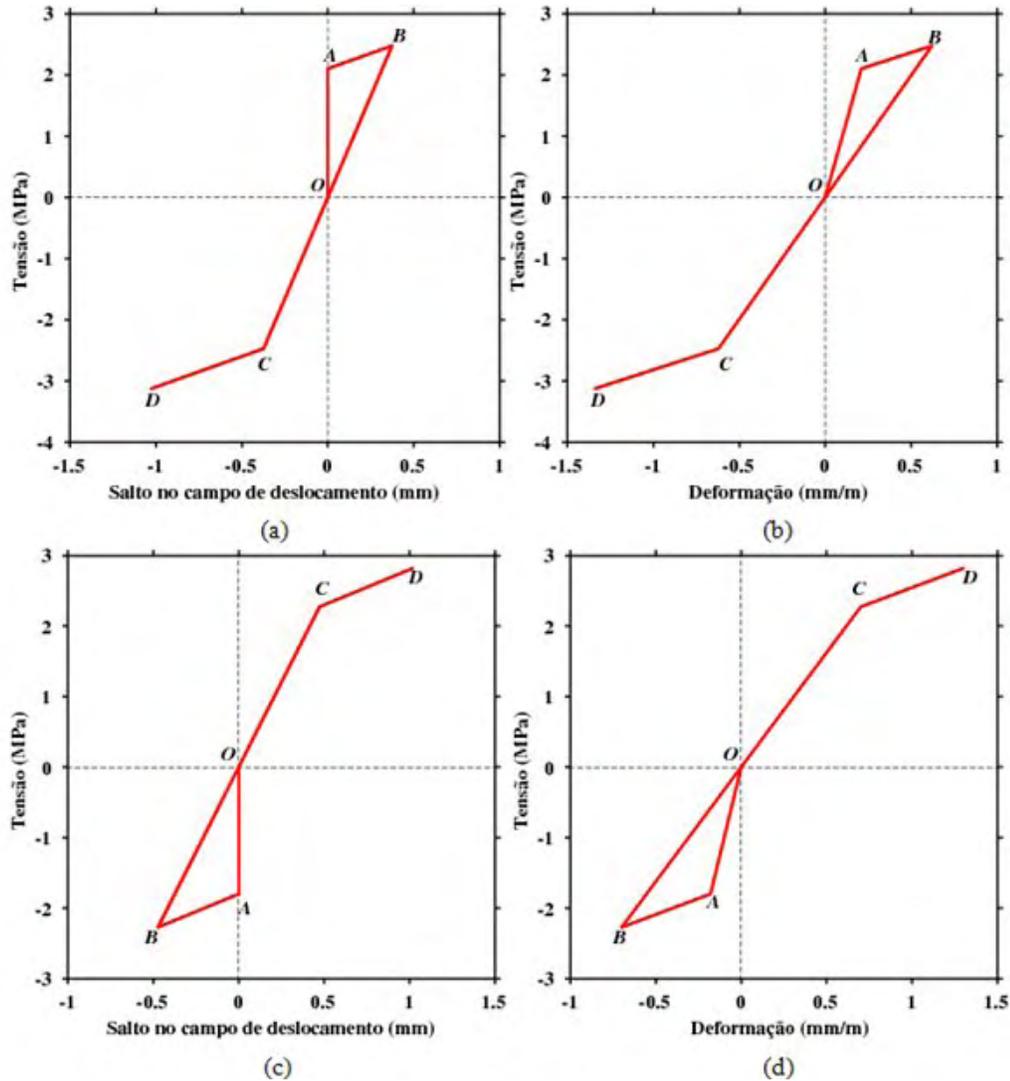
**Tabela 3.2: Algoritmo somente à tração para o elemento com uma região de localização de deformação**

<b>Algoritmo 2:</b> obtenção das tensões a partir das deformações.	
	ENTRADA: $L, K, E, f_0, H, d^n, r^n, \hat{\varepsilon}_{n+1}, \llbracket u \rrbracket_n$
	SAÍDA: $d^{n+1}, r^{n+1}, \llbracket u \rrbracket_{n+1}, \sigma_{n+1}$
(1)	$\llbracket u \rrbracket_{n+1}^0 = \llbracket u \rrbracket_n$ $i = 0$
(2)	Enquanto $ R(\llbracket u \rrbracket^i)  > \text{tolerância}$  $\llbracket u \rrbracket_{n+1}^{i+1} = \llbracket u \rrbracket_{n+1}^i - \left( \frac{\partial R}{\partial \llbracket u \rrbracket_{n+1}^i} \right)^{-1} \cdot R(\llbracket u \rrbracket_{n+1}^i)$ $i = i + 1$
(3)	$\varepsilon_\Omega = \hat{\varepsilon}_{n+1} - \frac{\llbracket u \rrbracket_{n+1}}{L}$
(4)	$\sigma_{n+1} = \Sigma_\Omega(\varepsilon_\Omega) = E \cdot \varepsilon_\Omega$

### 3.4 Resultados numéricos

A fim de ilustrar o comportamento do modelo de dano com uma região de localização, segundo o algoritmo apresentado na tab. (3.1), simulou-se estados uniaxiais de tração e compressão alternados, impondo-se incrementos de deformação constantes. Assumiu-se o módulo de endurecimento/abrandamento,  $H = 0,2$  e comprimento da região de localização,  $k = 0,1$ mm. As propriedades do material usadas foram: módulo de elasticidade  $E = 10$  GPa, resistência à tração  $\sigma_t = 2,3$  MPa e, conseqüentemente, resistência à compressão,  $\sigma_c = 2,3$  MPa, já que a região de localização de deformação é descrito segundo o modelo de dano isotrópico e na região contínua é descrita pela lei constitutiva elástica.

Os resultados são apresentados, com as curvas tensão versus deformação e tensão versus salto no campo de deslocamento para a variável de dano com lei de endurecimento, na fig. (3.4), com o elemento submetido à tração-compressão uniaxial (fig. (3.4a) e fig. (3.4b)) e à compressão-tração uniaxial (fig. (3.4c) e fig. (3.4d)).



**Figura 3.4: Curvas com cargas alternadas para o elemento com uma região de localização**

A curva tensão versus salto no campo de deslocamento mostrado na fig. (3.4a) corresponde à resposta quando o material é primeiramente submetido à tração e posteriormente à compressão. No processo de carregamento em tração, o seguimento  $\overline{OA}$  corresponde ao regime elástico, com o salto no campo de deslocamento nulo ( $[[u]] = 0$ ). No seguimento  $\overline{AB}$ , o processo é de degradação com encruamento linear positivo (endurecimento) em tração, ( $d \neq 0$ ), com evolução da variável de dano, ( $\dot{d} \neq 0$ ), e com o salto no campo de deslocamento não nulo, ( $[[u]] \neq 0$ ). No seguimento  $\overline{BO}$ , o processo é de descarregamento com dano à tração não nulo, sem evolução da variável de dano e com diminuição do salto no campo de deslocamento até atingir o comprimento  $k$  inicial. Na

transição do processo de tração para compressão, observa-se um salto no campo de deslocamento negativo, representando o processo físico de interpenetração do material (como se o material estivesse entrando um no outro), seguimento  $\overline{OC}$ . No seguimento  $\overline{CD}$  o processo é de degradação em compressão, com dano, encruamento linear positivo, com evolução da variável de dano e evolução do salto no campo de deslocamento.

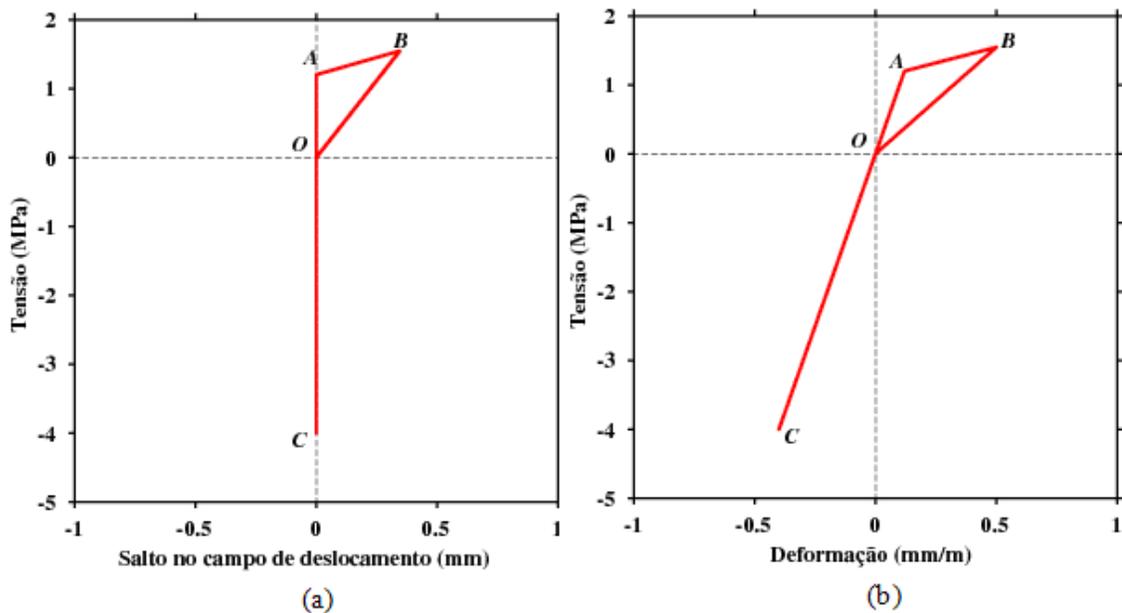
Na figura (3.4b), curva tensão deformação, o elemento é primeiramente submetido à tração e posteriormente à compressão. No seguimento  $\overline{OA}$  o regime é elástico, as tensões são proporcionais as deformações. No seguimento  $\overline{AB}$ , o processo continua sendo de incremento de carga com o elemento tracionado, em processo de degradação em tração com a variável de dano não nula, ( $d \neq 0$ ), e com evolução da variável de dano, ( $\dot{d} \neq 0$ ), e módulo de endurecimento/abrandamento com encruamento linear positivo,  $H > 0$ . No seguimento  $\overline{BO}$ , o processo é de descarregamento, com a variável de dano não nula, ( $d \neq 0$ ), e sem evolução da variável de dano, ( $\dot{d} = 0$ ). Na transição do processo de tração para compressão, observa-se uma não recuperação da rigidez do material, caracterizando o regime elástico até o material atingir a resistência inicial à compressão, seguimento  $\overline{OC}$ . No seguimento  $\overline{CD}$ , o processo é de degradação em compressão, com dano à compressão e com evolução da variável de dano.

Na figura (3.4c) e (3.4d), curva tensão versus salto no campo de deslocamento e tensão versus deformação, respectivamente, o material é primeiramente submetido à tração e posteriormente à compressão. No seguimento  $\overline{OA}$ , o regime é elástico linear, sem salto no campo de deslocamento (fig. 3.4c), sem dano e sem evolução da variável de dano (fig. 3.4d). No seguimento  $\overline{AB}$ , o processo é de degradação em compressão, com salto no campo de deslocamento (fig. 3.4c), com dano à compressão e com evolução da variável de dano (fig. 3.4d). O processo é de descarregamento, com dano à compressão, sem evolução da variável de dano e com diminuição do salto no campo de deslocamento até atingir o comprimento  $k$  inicial, seguimento  $\overline{BO}$ . Na transição do processo de compressão para tração, o material continua com a mesma rigidez degradada em compressão, correspondendo ao regime elástico linear até o material atingir a resistência inicial à tração (fig. 3.4d), com salto negativo no campo de deslocamento (fig. 3.4c), seguimento  $\overline{OC}$ . No seguimento  $\overline{CD}$ , o processo é de degradação em tração, com salto negativo no campo de deslocamento (fig. 3.4c), com dano à tração e com evolução da variável de dano (fig. 3.4d).

A fim de ilustrar o comportamento do modelo de dano somente à tração com uma região de localização, segundo o algoritmo apresentado na tab. (3.2), simulou-se estados

uniaxiais de tração-compressão, impondo-se incrementos de deformação constantes. Assumiu-se o módulo de endurecimento/abrandamento,  $H = 0,2$  e comprimento da região de localização,  $k = 0,1$  mm. As propriedades do material usadas foram: módulo de elasticidade  $E = 10$  GPa, resistência à tração  $\sigma_t = 1,2$  MPa e resistência à compressão  $\sigma_c = 2,3$  MPa. A região de localização de deformação é descrito segundo o modelo de dano somente à tração e a região contínua é descrita segunda a lei constitutiva elástica.

Os resultados são apresentados, com as curvas tensão versus salto no campo de deslocamento e tensão versus deformação, para a variável de dano com lei de endurecimento, na fig. (3.5), com o elemento submetido à tração-compressão uniaxial (fig. (3.5a) e fig. (3.5b)).



**Figura 3.5: Curvas para o modelo de dano somente à tração para o elemento com localização de deformação**

A curva tensão versus deformação mostrada na fig. (3.5b) corresponde à resposta quando o material é submetido primeiramente à tração e posteriormente à compressão. No processo de carregamento em tração, o material está no regime elástico no seguimento  $\overline{OA}$ , sem ativar o salto no campo de deslocamento, como pode ser observado na fig. (3.5a), curva tensão versus salto no campo de deslocamento. O processo é de degradação no seguimento  $\overline{AB}$ , com encruamento linear positivo, com evolução da variável de dano, fig. (3.5b), e com salto no campo de deslocamento, fig. (3.5a). No seguimento  $\overline{BO}$ , o processo é de descarregamento com dano à tração não nulo, sem evolução das variáveis de dano e com

diminuição do salto no campo de deslocamento até atingir o comprimento  $K$  inicial, correspondendo ao fechamento da descontinuidade. Na transição do processo de tração para compressão, observa-se uma recuperação da rigidez do material, caracterizando o regime sempre elástico em compressão, e sem evolução do salto no campo de deslocamento, seguimento  $\overline{OC}$ , caracterizando que a descontinuidade permanece fechada.

Note que os resultados, para o comportamento na região de localização de deformação segundo o modelo de dano isotrópico e elástico na região contínua, apresentam a não recuperação do estado de degradação na transição do processo de carregamento alternado tração-compressão e vice-versa, apresentando um salto negativo, representando o processo físico de interpenetração do material. Já os resultados que descrevem o comportamento na região de localização de deformação segundo o modelo de dano somente à tração e elástico na região contínua, mostram a recuperação do estado de degradação na transição do processo de carregamento alternado tração-compressão e compressão-tração, sempre elástico e sem ativar o salto no campo de deslocamento para o elemento em estado de carregamento compressivo.

## Capítulo 4

# FORMULAÇÃO E COMPOSIÇÃO DOS MODELOS DE DANO J2 E DE DANO À TRAÇÃO

### 4.1 Introdução

O presente capítulo apresenta um modelo constitutivo de dano através da composição de dois modelos específicos, modelo de dano à compressão e modelo de dano à tração, para tratar o comportamento diferenciado dos materiais quase-frágeis quando submetidos à tração ou à compressão, inclusive quando apresentam os dois tipos de sollicitação.

### 4.2 Modelo de dano J2

O modelo é formulado segundo as condições de carga, descarga e recarga associadas ao critério de dano no campo das tensões efetivas, baseado no segundo invariante do tensor das tensões desviadoras.

O tensor das tensões efetivas,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^J$ , pode ser dividido em parte volumétrica e desviadora,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^J = \bar{\mathbf{S}}^J + \bar{\sigma}_m^J \cdot \mathbf{I} \quad (4.1)$$

onde  $\bar{\mathbf{S}}^J$  é o tensor de tensão desviador,  $\bar{\sigma}_m^J = \frac{1}{3} \cdot \text{Tr}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^J)$  é a tensão média, obtida a partir do traço do tensor das tensões efetivas,  $\text{Tr}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^J)$ , e  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem.

O critério de dano ou critério de degradação pode ser expresso da seguinte forma:

$$F^J(\tau, r) = \tau^J - r_0^J \leq 0 \quad (4.2)$$

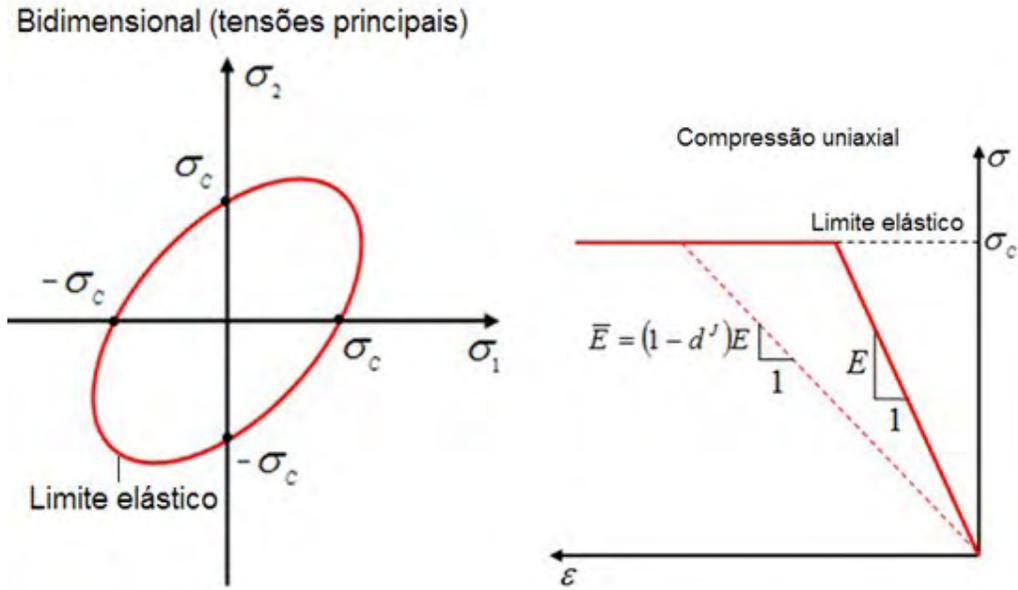
onde a variável escalar  $\tau^J$  é uma função da norma do tensor de tensão desviador,

$$\tau^J = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\bar{\mathbf{S}}^J\| \quad (4.3)$$

A variável  $r^J$  estabelece o limite de dano, controlando a dimensão do domínio elástico. A superfície limite de dano no espaço de tensões efetivas é expressa por  $F^J(\tau^J, r^J) = 0$ . No campo das tensões principais, para o caso bidimensional, a região elíptica delimita o regime elástico, que na curva tensão deformação, para o caso unidimensional, estabelece um limite de dano à compressão, como mostra a fig. (4.1). Define-se um valor inicial ao limite de dano,  $r_0^J$ , em função da tensão limite de compressão,  $\sigma_c$ ,

$$r_0^J = B\sigma_c \quad (4.4)$$

onde o parâmetro  $B$  estabelece o nível de tensão para qual tem início o processo de degradação.



**Figura 4.1: Limite elástico à compressão ( $B = 1$  e  $H = 0$ )**

A evolução do limite de dano pode ser expressa de forma fechada, tomando-se sempre o máximo valor atingido por  $\tau^J$  durante o processo de carregamento, ou seja,  $r^J = \max(r^J, \tau^J)$ .

Define-se a variável de dano em função da variável limite de dano e do módulo de endurecimento/abrandamento, estabelecendo uma lei de endurecimento/abrandamento linear,

$$d^J = \frac{r^J - r_0^J}{r^J(1+H)} \tag{4.5}$$

ou

$$d^J = 1 - \left[ A^J \cdot e^{-\frac{1}{A^J} \left( 1 - \frac{r^J}{r_0^J} \right)} + \frac{1}{B} \right] \cdot \frac{r_0^J}{r^J} \tag{4.6}$$

que estabelece uma lei de abrandamento exponencial, com o parâmetro de abrandamento do modelo à compressão  $A^J = 1 - 1/B$ .

Então, aplicando-se o dano somente ao tensor de tensão desviador, a expressão final do tensor de tensão fica dada por:

$$\boldsymbol{\sigma}^J = (1 - d^J) \bar{\mathbf{S}}^J + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_m^J \cdot \mathbf{I} \quad (4.7)$$

que também pode ser expressa como:

$$\boldsymbol{\sigma}^J = \bar{\boldsymbol{\sigma}} - d^J \cdot \bar{\mathbf{S}} \quad (4.8)$$

O algoritmo do modelo de dano a compressão é apresentado na tab. (4.1).

**Tabela 4.1: Algoritmo do modelo à compressão**

Modelo de dano $J_2(\Sigma^J)$
Entrada: $\sigma_c, H, d_n^J, r_n^J, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^J$ Saída: $d_{n+1}^J, r_{n+1}^J, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^J$
(1) Calcular $\tau_{n+1}^J = \sqrt{\frac{3}{2}} \ \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^J\ $
(2) Verificar se $\tau_{n+1}^J > r_n^J$
VERDADEIRO: $r_{n+1}^J = \tau_{n+1}^J$
FALSO: $r_{n+1}^J = r_n^J$
(3) Calcular $d_{n+1}^J = \frac{r^J - r_0^J}{r^J (1 + H)}$
(5) Calcular a tensão final: $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^J = (1 - d_{n+1}^J) \cdot \bar{\mathbf{S}}_{n+1}^J + (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m^J)_{n+1} \cdot \mathbf{I}$

### 4.3 Modelo de dano à tração

Decompõe-se o tensor de tensões efetivas em partes positiva e negativa (componentes positivas e componentes negativas do tensor de tensões efetivas, respectivamente),

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^t = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (4.9)$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+$  e  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^-$  são os tensores de tensão efetiva contendo as tensões principais de tração e de compressão, respectivamente:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad (4.10)$$

onde  $\bar{\sigma}_i$  denota o valor da *i*-ésima tensão principal do tensor  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\mathbf{p}_i$  representa o vetor unitário associado com a respectiva direção principal e o símbolo  $\otimes$  denota o produto tensorial. O símbolo  $\langle \cdot \rangle$  representa a função de Macaulay (retornando o valor da expressão quando positiva, e zero em caso contrário)

A componente negativa do tensor de tensão efetiva pode ser obtida fazendo-se:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^- = \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ \quad (4.11)$$

Para estabelecer as condições de carga, descarga e recarga, define-se o critério de dano, empregando-se o conceito de tensão efetiva para tração,

$$F^t(\bar{\tau}^t, r^t) = \bar{\tau}^t(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+) - r^t \leq 0 \quad (4.12)$$

onde  $\bar{\tau}^t$  retorna um valor escalar em função da componente positiva das tensões efetivas.

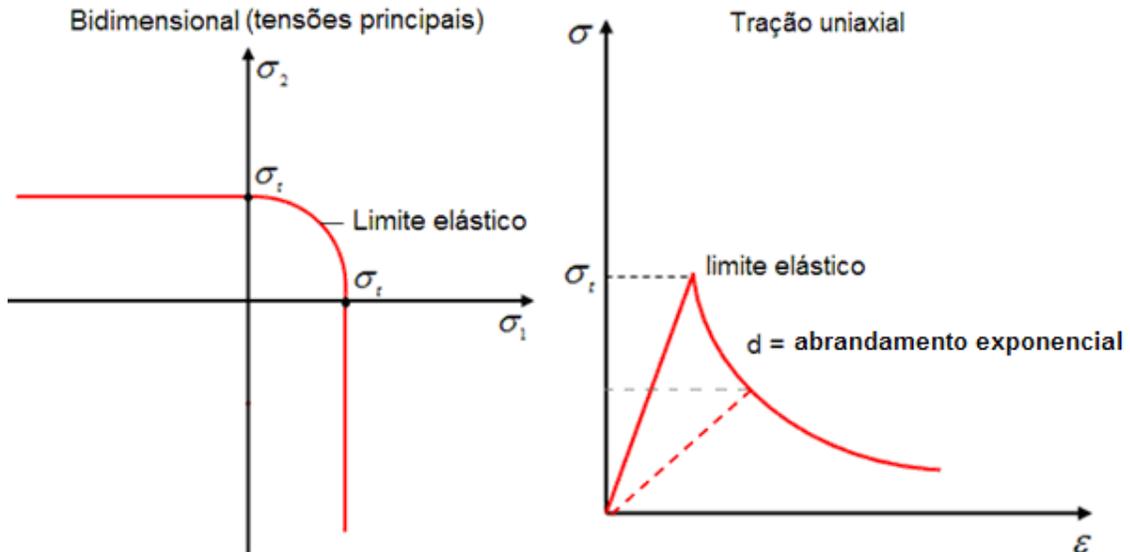
Adota-se a norma energética do tensor:

$$\bar{\tau}^t = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ : \mathbf{C}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+} = \bar{\tau}^t(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+) \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{C}$  é o tensor constitutivo elástico isotrópico de quarta ordem.

A variável  $r'$  estabelece o limite de dano, controlando a dimensão do domínio elástico no espaço das tensões efetivas. O limite de dano é delimitado pela superfície  $F'(r', r') = 0$ . No campo das tensões principais, para o caso bidimensional, o regime elástico é delimitado por uma região aberta, que na curva tensão deformação, para caso uniaxial, define-se um limite elástico à tração, como mostra a fig. (4.2). O valor inicial do limite de dano é expresso em termos da resistência à tração,  $\sigma_t$ ,

$$r'_0 = \frac{\sigma_t}{\sqrt{E}}. \tag{4.14}$$



**Figura 4.2: Limite elástico à tração**

Define-se a variável de dano para tração em função da variável limite de dano,

$$d'(r') = 1 - \frac{r'_0}{r'} e^{A \left(1 - \frac{r'}{r'_0}\right)} \tag{4.15}$$

que estabelece uma lei de abrandamento exponencial, em termos do parâmetro de abrandamento exponencial,  $A$ .

Portanto, a lei constitutiva finalmente pode ser expressa como:

$$\boldsymbol{\sigma}^t = (1 - d^t) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (4.16)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma}^t = \bar{\boldsymbol{\sigma}} - d^t \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ \quad (4.17)$$

O algoritmo do modelo de dano à tração é apresentado na tab. (4.2).

**Tabela 4.2: Algoritmo do modelo de dano à tração**

Modelo de dano somente à tração ( $\Sigma^t$ )
<p>Entrada: <math>\mathbf{C}, \sigma_t, d_n^t, r_n^t, A, \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}</math></p> <p>Saída: <math>d_{n+1}^t, r_{n+1}^t, \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t</math></p> <p>(1) Calcular <math>\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^+ = \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \rangle</math></p> <p>(2) Calcular <math>\tau_{n+1}^t = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^+ : \mathbf{C}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^+}</math></p> <p>(3) Verificar se <math>\tau_{n+1}^t &gt; r_n^t</math></p> <p>VERDADEIRO: <math>r_{n+1}^t = \tau_{n+1}^t</math></p> <p>FALSO: <math>r_{n+1}^t = r_n^t</math></p> <p>(4) Calcular <math>d_{n+1}^t = 1 - \left( \frac{r_0^t e^{A \left( 1 - \frac{r_0^t}{r^t} \right)}}{r^t} \right)</math></p> <p>(5) Calcular a tensão final:</p> $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^t = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^t - d_{n+1}^t \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^+$

#### 4.4 Modelo de dano composto

Os modelos de dano foram expressos a partir das tensões efetivas, que até agora não foram definidas. A tabela (4.3) resume as etapas de cálculo dos dois modelos, em um processo incremental, no qual calculam-se as tensões e as variáveis do modelo constitutivo no passo de carga  $n+1$ , a partir das deformações desse passo e das variáveis do modelo no passo anterior,  $n$ .

A composição entre os modelos é feita em série, aplicando-se primeiramente o modelo de dano J2, empregando-se como tensões efetivas as tensões puramente elásticas, calculadas a partir das deformações,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^J = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.18)$$

Posteriormente aplica-se o modelo de dano à tração, admitindo-se que as tensões efetivas para esse modelo são as tensões degradadas pela aplicação do modelo de dano J2, ou seja:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^t = \boldsymbol{\sigma}^J \quad (4.19)$$

Portanto, a lei constitutiva para o modelo composto, pode ser expressa da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^t \left( \boldsymbol{\Sigma}^J \left( \bar{\boldsymbol{\sigma}}^J \right) \right) \quad (4.20)$$

onde  $\boldsymbol{\Sigma}^J$  e  $\boldsymbol{\Sigma}^t$  representam a relação constitutiva para o modelo de dano J2 e a relação constitutiva somente à tração, respectivamente. A composição geométrica do modelo de dano à compressão e à tração, no campo das tensões principais e para o caso bidimensional, assim como a curva tensão deformação, para o caso unidimensional, com um limite elástico à compressão e um limite elástico à tração, são apresentados na fig. (4.3).

O modelo resultante é capaz de representar as principais características do comportamento de materiais quase-frágeis, submetidos a diferentes estados tensionais.

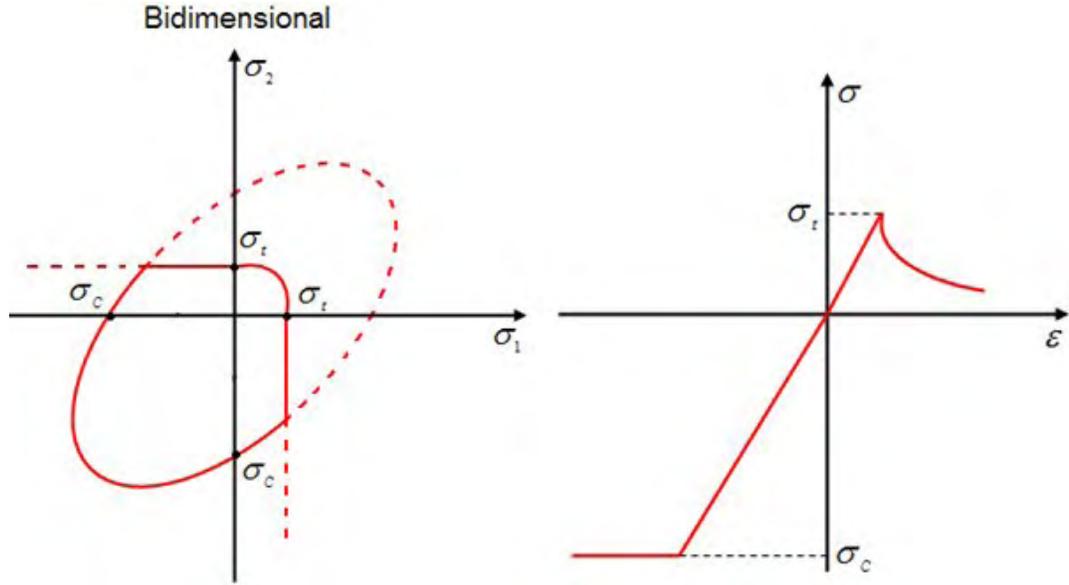


Figura 4.3: Composição geométrica do modelo de dano à compressão e à tração

Tabela 4.3: Algoritmos para o modelo de dano composto

Modelo de dano $J_2 (\Sigma^J)$	Modelo de dano somente à tração $(\Sigma^t)$
<p>Entrada: <math>C, \sigma_c, H, d_n^J, r_n^J, \epsilon_{n+1}</math></p> <p>Saída: <math>d_{n+1}^J, r_{n+1}^J, \sigma_{n+1}^J</math></p> <p>(1) Calcular <math>\bar{\sigma}_{n+1}^J = C : \epsilon_{n+1}</math></p> <p>(2) Calcular <math>\tau_{n+1}^J = \sqrt{\frac{3}{2} \ \bar{S}_{n+1}^J\ }</math></p> <p>(3) Verificar se <math>\tau_{n+1}^J &gt; r_n^J</math></p> <p>VERDADEIRO: <math>r_{n+1}^J = \tau_{n+1}^J</math></p> <p>FALSO: <math>r_{n+1}^J = r_n^J</math></p> <p>(4) Calcular</p> $d_{n+1}^J = \frac{r_n^J - r_0^J}{r_n^J(1+H)}$ <p>(5) Calcular a tensão final:</p> $\sigma_{n+1}^J = (1-d_{n+1}^J) \cdot \bar{S}_{n+1}^J + (\bar{\sigma}_m^J)_{n+1} \cdot \mathbf{I}$	<p>Entrada: <math>C, \sigma_t, d_n^t, r_n^t, A, \sigma_{n+1}^J</math></p> <p>Saída: <math>d_{n+1}^t, r_{n+1}^t, \sigma_{n+1}^t</math></p> <p>(1) Assumir <math>\bar{\sigma}_{n+1}^t = \sigma_{n+1}^J</math></p> <p>(2) Calcular <math>\bar{\sigma}_{n+1}^+ = \langle \bar{\sigma}_{n+1}^t \rangle</math></p> <p>(3) Calcular <math>\tau_{n+1}^t = \sqrt{\bar{\sigma}_{n+1}^+ : C^{-1} : \bar{\sigma}_{n+1}^+}</math></p> <p>(4) Verificar se <math>\tau_{n+1}^t &gt; r_n^t</math></p> <p>VERDADEIRO: <math>r_{n+1}^t = \tau_{n+1}^t</math></p> <p>FALSO: <math>r_{n+1}^t = r_n^t</math></p> <p>(5) Calcular <math>d_{n+1}^t = 1 - \left( \frac{r_0^t e^{A \left(1 - \frac{r_n^t}{r^t}\right)}}{r^t} \right)</math></p> <p>(6) Calcular a tensão final:</p> $\sigma_{n+1}^t = \bar{\sigma}_{n+1}^t - d_{n+1}^t \cdot \bar{\sigma}_{n+1}^+$

## 4.5 Resultados numéricos

A fim de visualizar o comportamento do modelo, segundo o algoritmo apresentado na tab. (4.1), simulou-se estados uniaxiais de tração, de compressão e alternados, implementado no programa MATLAB/OCTAVE, impondo-se incrementos de deformação constantes. Assumiu-se o módulo de endurecimento/abrandamento nulo para o modelo J2,  $H = 0,0$ , com  $B = 1,0$ , e o parâmetro de abrandamento do modelo à tração  $A = 0,4$ . As propriedades do material usadas foram: módulo de elasticidade  $E = 10$  GPa, resistência à tração  $\sigma_t = 2,45$  MPa e resistência à compressão,  $\sigma_c = 30$  MPa.

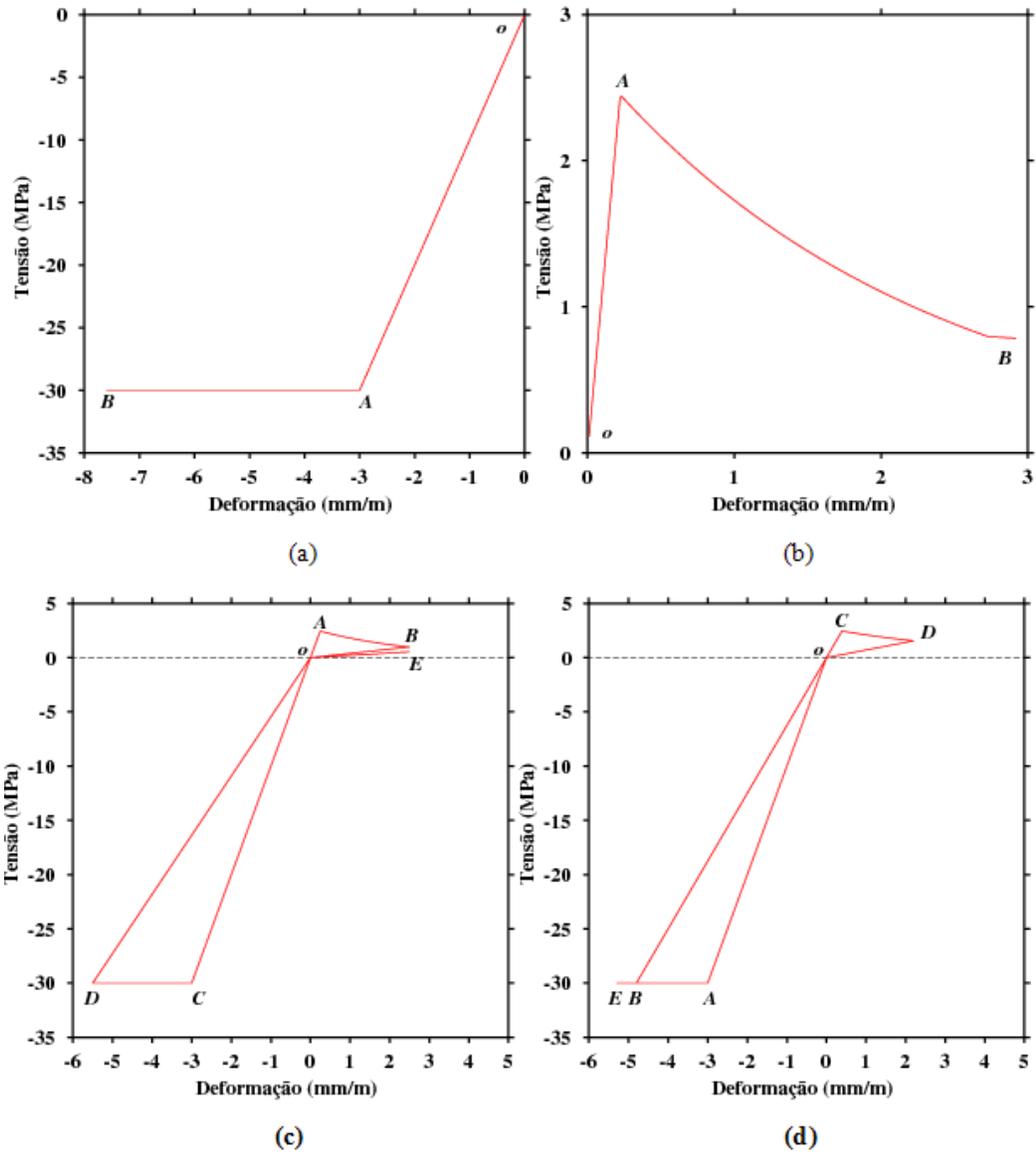
Os resultados são apresentados na fig. (4.4), com o material submetido à compressão uniaxial (fig. (4.4a)) e à tração uniaxial (fig. (4.4b)), assim como com solicitações alternadas (fig. (4.4c) e fig. (4.4d)).

Na fig. (4.4a), o seguimento  $\overline{OA}$  corresponde ao regime elástico linear, com a tensão proporcional à deformação, sem evolução das variáveis de dano ( $\dot{d}^J = 0, \dot{d}^t = 0$ ). No seguimento  $\overline{AB}$ , o material está no regime elastodegradável perfeito, já que  $H = 0$ , com evolução somente da variável de dano J2, ( $\dot{d}^t = 0, \dot{d}^J \neq 0$ ). Na figura (4.4b) tem-se a curva tensão versus deformação, para o material em processo de carregamento em tração uniaxial, com as tensões proporcionais às deformações (regime elástico) no seguimento  $\overline{OA}$  ( $\dot{d}^J = 0, \dot{d}^t = 0$ ). No seguimento  $\overline{AB}$ , tem-se o regime elastodegradável com abrandamento exponencial e evolução da variável de dano à tração ( $\dot{d}^J = 0, \dot{d}^t \neq 0$ ).

A curva tensão versus deformação mostrada na fig. (4.4c), corresponde à resposta quando o material é submetido primeiramente à tração e posteriormente à compressão. No processo de carregamento em tração, o material está no regime elástico no trecho  $\overline{OA}$  e em processo de degradação no trecho  $\overline{AB}$ , com abrandamento exponencial. No trecho  $\overline{BO}$ , o processo é de descarregamento com dano à tração não nulo e sem evolução das variáveis de dano. Na transição do processo de tração para compressão, observa-se uma recuperação da rigidez do material, caracterizando o regime elástico até o material atingir a resistência à compressão, trecho  $\overline{OC}$ . No trecho “pós-pico”, tem-se o processo elastodegradável perfeito ( $\overline{CD}$ ), com evolução da variável de dano do modelo J2, promovendo a perda de rigidez do material, que pode ser observado no processo de descarregamento mostrado no seguimento

$\overline{DO}$ . Quando o processo passa de compressão para tração, o comportamento de material reflete a perda de rigidez em tração e em compressão (seguimento  $\overline{OE}$ ).

Na figura (4.4d) mostra-se a resposta quando o material é primeiramente submetido à compressão e posteriormente à tração (carregamento alternado inverso), apresentando compatibilidade com o carregamento alternado da fig. (4.4c). O regime é elástico linear no seguimento  $\overline{OA}$ , em processo de degradação (regime elastodegradável perfeito) no seguimento  $\overline{AB}$ , com evolução da variável de dano do modelo J2, e em processo de descarregamento no seguimento  $\overline{BO}$ . Na transição do processo de compressão para tração o material não recupera totalmente a rigidez, seguimento  $\overline{OC}$ , já que este traz a perda de rigidez devido à degradação em compressão. No trecho  $\overline{CD}$ , o processo é de degradação, abrandamento exponencial, com evolução do dano à tração. Novamente, tem-se o descarregamento, seguimento  $\overline{DO}$ , passando para o processo de carregamento em compressão, trecho  $\overline{OB}$ , no qual recupera-se a rigidez correspondente ao estado de compressão. O material volta novamente a danificar em compressão quando é atingida a resistência à compressão.



**Figura 4.4: Curva tensão *versus* deformação: (a) compressão, (b) tração, (C) tração-compressão e (d) compressão-tração**

A recuperação da rigidez do material na passagem do processo de tração para compressão representa os efeitos decorrentes do fechamento das falhas e microfissuras, fazendo com que o material readquira suas propriedades mecânicas.

## Capítulo 5

### ELEMENTO FINITO COM DESCONTINUIDADE INCORPORADA

#### 5.1 Introdução

O presente capítulo apresenta uma formulação, como desenvolvido por Manzoli e Shing (2006), para o caso bidimensional e tridimensional, de elemento finito com descontinuidade incorporada. Trata-se de uma extensão do modelo unidimensional do capítulo 3.

Para representar o processo de fraturamento em tração, o comportamento não linear na região de localização de deformação (zona de processo da fratura) é descrito segundo o modelo de dano composto, com lei de abrandamento de tensões (*softening*) exponencial. A região contínua é descrita segundo o modelo de dano J2, com base no comportamento não-linear à compressão.

## 5.2 Modelo de dano composto em elemento finito bidimensional com localização de deformação

Considere-se o elemento triangular com três nós de domínio  $\Omega_e$ , comprimento  $l_e$ , com uma banda de localização de deformações,  $S_e$ , de largura  $k$ , que divide o elemento em duas partes, isolando o nó 1 dos nós 2 e 3, como mostra a fig. (5.1).

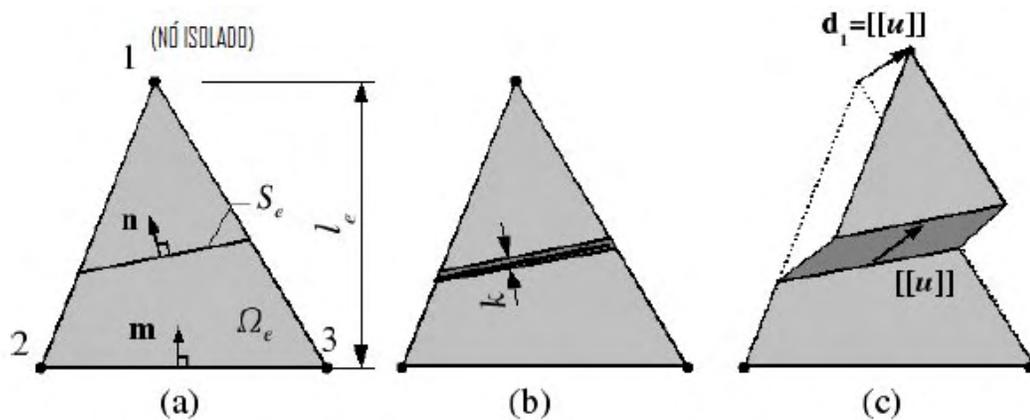


Figura 5.1: Elemento com banda de localização embebida (Manzoli e Shing, 2006)

Um salto no campo de deslocamento,  $[[\mathbf{u}]]$ , resultante sobre  $S_e$  produz um movimento relativo de corpo rígido, levando aos seguintes deslocamentos nodais (como pode ser visto na fig.(5.1c)),

$$\mathbf{d}_1 = [[\mathbf{u}]]; \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}; \mathbf{d}_3 = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{d}_i$  ( $i=1,2,3$ ) representa o vetor deslocamentos nodais do nó  $i$ , produzido pelo salto no campo de deslocamento.

A deformação na parte contínua,  $\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$ , pode ser obtida pela relação deformação-deslocamento convencional do elemento finito,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i (\mathbf{D}_i - \mathbf{d}_i) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{B}_i \mathbf{D}_i - \mathbf{B}_1 [[\mathbf{u}]] = \mathbf{B}\mathbf{D} - \boldsymbol{\varepsilon}^R \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{D}_i$  representa o vetor de deslocamentos nodais totais,  $\mathbf{B}_i$  é a matriz que estabelece a relação deformação-deslocamento e  $\boldsymbol{\varepsilon}^R = \mathbf{B}_i[[\mathbf{u}]]$  está associada com a deformação devido ao salto no campo de deslocamento e que proporciona um relaxamento da parte contínua.

Sejam os vetores  $\mathbf{n} = [n_x, n_y]^T$  normal à interface e  $\mathbf{m} = [m_x, m_y]^T$  normal ao lado do elemento oposto ao nó isolado, como mostra a fig. (5.1.a). As deformações devidas ao salto resultante no campo de deslocamento podem ser escritas como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \varepsilon_y^R \\ \gamma_{xy}^R \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \\ m_y & m_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [[u]]_x \\ [[u]]_y \end{Bmatrix} = \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \quad (5.3)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz formada pelas componentes do vetor  $\mathbf{m}$  e  $l_e$  é a distância entre o nó isolado e o lado oposto, como mostra a fig. (5.1.a).

A correspondente tensão,  $\boldsymbol{\sigma}_\Omega = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}^T$  na região contínua pode ser expressa da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_\Omega = \boldsymbol{\Sigma}^J(\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega) = \boldsymbol{\Sigma}^J \left( \mathbf{B}\mathbf{D} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \right) \quad (5.4)$$

onde  $\boldsymbol{\Sigma}^J$  representa o modelo constitutivo de dano J2 (modelo de dano que usa como critério de degradação Von Mises). Portanto, o vetor das forças internas, correspondente ao elemento finito de área  $A_e$ , fica dado por:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_\Omega d\Omega_e = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_\Omega A_e = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\Sigma}^J \left( \mathbf{B}\mathbf{D} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \right) A_e \quad (5.5)$$

A deformação e a correspondente tensão na banda de localização de deformações podem ser escritas da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{\varepsilon}_\Omega + \frac{\mathbf{N}}{k} [[\mathbf{u}]] = \mathbf{B}\mathbf{D} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] + \frac{\mathbf{N}}{k} [[\mathbf{u}]] \quad (5.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \boldsymbol{\Sigma}^C(\boldsymbol{\varepsilon}_s) \quad (5.7)$$

onde  $k$  representa a largura da banda de localização de deformações,  $\boldsymbol{\Sigma}^C$  representa a relação constitutiva combinada, ou seja, na região de localização o critério de degradação é segundo o modelo de dano combinado,  $\mathbf{N}$  é uma matriz obtida a partir das componentes do vetor normal  $\mathbf{n}$ , ou seja:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

As forças de superfície na região de localização de deformação devem estar em equilíbrio com as forças calculadas na adjacência (pontos na região contínua que faz fronteira com a região de localização de deformação), ou seja, no espaço vetorial de tensões deve-se ter:

$$\mathbf{N}^T (\boldsymbol{\sigma}_s - \boldsymbol{\sigma}_\Omega) = 0 \quad (5.9)$$

Substituindo as expressões (5.4) e (5.7) em (5.9), tem-se:

$$\mathbf{N}^T \boldsymbol{\Sigma}^C \left( \mathbf{B}\mathbf{D} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] + \frac{\mathbf{N}}{k} [[\mathbf{u}]] \right) - \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Sigma}^J \left( \mathbf{B}\mathbf{D} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \right) = 0 \quad (5.10)$$

O salto  $[[\mathbf{u}]]$  no elemento pode ser obtido resolvendo-se a Eq. (5.10), para um determinado estado de deformação, através do método iterativo de Newton-Raphson, que permite uma aproximação melhorada a partir da resposta da interação interior, buscando-se a solução da Eq. (5.11) por meio da fórmula recursiva da Eq. (5.12),

$$\mathbf{R}([[ \mathbf{u} ]]) = \mathbf{N}^T \left( \boldsymbol{\Sigma}^C \left( \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left( \frac{\mathbf{N}}{k} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} \right) [[\mathbf{u}]] \right) - \boldsymbol{\Sigma}^J \left( \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \right) \right) = 0 \quad (5.11)$$

$$[[\mathbf{u}]]^{i+1} = [[\mathbf{u}]]^i - \left[ \frac{\partial \mathbf{R}([[ \mathbf{u} ]])^i}{\partial [[ \mathbf{u} ]]^i} \right]^{-1} \mathbf{R}([[ \mathbf{u} ]])^i \quad (5.12)$$

onde  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\mathbf{D}$  é a deformação regular do elemento e a derivada da Eq. (5.11) é expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial [[ \mathbf{u} ]]} = \mathbf{N}^T \left( \boldsymbol{\Sigma}^c \left( \frac{\mathbf{N}}{k} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} \right) + \boldsymbol{\Sigma}^j \frac{\mathbf{M}}{l_e} \right) \quad (5.13)$$

onde  $\boldsymbol{\Sigma}^c = \partial \boldsymbol{\Sigma}^c / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}^j = \partial \boldsymbol{\Sigma}^j / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$  são as matrizes constitutivas tangentes do modelo combinado e do modelo  $J_2$ , respectivamente.

Uma vez calculas as componentes do salto através do processo iterativo, as tensões no elemento podem ser obtidas por meio da Eq. (5.4). Outros resultados obtidos com este modelo podem ser vistos em Gamino et al. (2010)

### 5.3 Modelo de dano composto em elemento finito tridimensional com localização de deformação

Seja o elemento finito tetraédrico de quatro nós, de domínio tridimensional  $\Omega_e$ , comprimento  $l_e$ , contendo uma superfície descontínua,  $S_e$ , com largura de banda  $k$  (ver figura (5.2b), que divide o elemento em duas partes, isolando um ou dois nós dos demais, como mostra a fig. (5.2a)).

Sejam  $\mathbf{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$  o vetor unitário normal à superfície  $S_e$ , e  $\mathbf{m} = [m_x, m_y, m_z]^T$  o vetor unitário correspondente ao gradiente da soma das funções de forma dos nós isolados, que, no caso de haver somente um nó isolado, corresponde a um vetor normal à base do elemento referente ao nó isolado, como mostra à fig. (5.2a). Um salto no campo de deslocamento,  $[[ \mathbf{u} ]]$ , induz a um relaxamento entre as duas partes do elemento, associado a um movimento relativo de corpo rígido, levando ao seguinte deslocamento nodal (como pode ser visto na fig.(5.2c)),

$$\mathbf{d}_1 = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket; \mathbf{d}_2 = \mathbf{0}; \mathbf{d}_3 = \mathbf{0}; \mathbf{d}_4 = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

onde  $\mathbf{d}_i (i = 1, 2, 3, 4)$  representa o vetor deslocamento nodal para o respectivo nó, produzido pelo salto no campo de deslocamento.

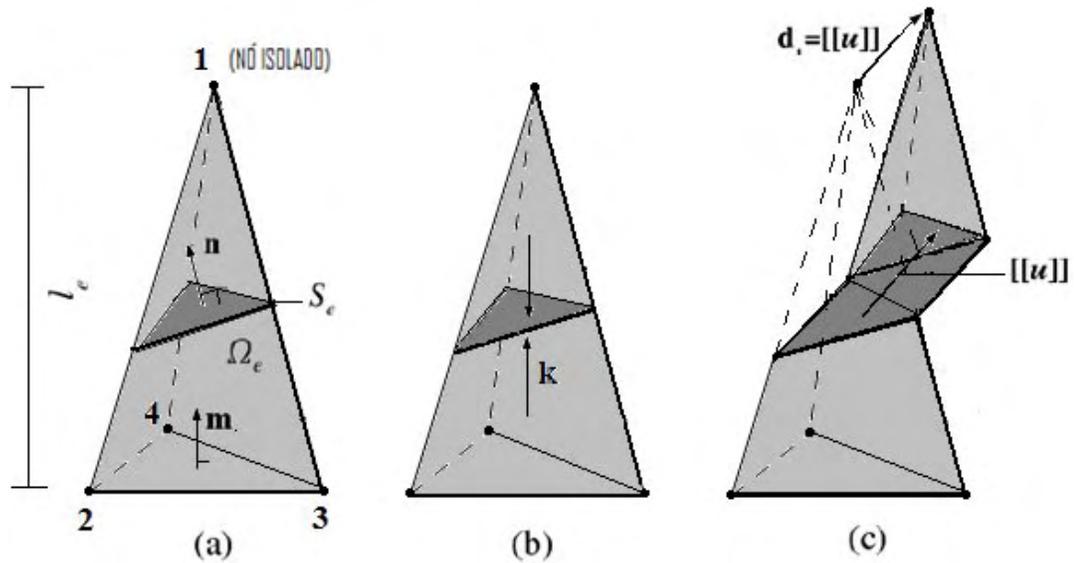


Figura 5.2: Elemento tetraédrico com localização de deformação

A deformação na parte contínua,  $\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$ , pode ser obtida pela relação deformação-deslocamento do elemento finito, subtraindo a deformação devido ao movimento de corpo rígido da parte contínua, ou seja:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i (\mathbf{D}_i - \mathbf{d}_i) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{D}_i - \mathbf{B}_1 \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \mathbf{B} \mathbf{D} - \boldsymbol{\varepsilon}^R \quad (5.15)$$

onde  $\mathbf{D}_i$  representa o vetor deslocamento total,  $\mathbf{B}_i$  é a matriz da relação deformação-deslocamento e  $\boldsymbol{\varepsilon}^R = \mathbf{B}_1 \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  está associada com a deformação devido ao salto no campo de deslocamento, que causa um relaxamento da parte contínua:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \varepsilon_y^R \\ \gamma_{xy}^R \\ \varepsilon_z^R \\ \gamma_{yz}^R \\ \gamma_{xz}^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [[u]]_x \\ [[u]]_y \\ [[u]]_z \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \varepsilon_y^R \\ \gamma_{xy}^R \\ \varepsilon_z^R \\ \gamma_{yz}^R \\ \gamma_{xz}^R \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ m_y & m_x & 0 \\ 0 & 0 & m_z \\ 0 & m_z & m_y \\ m_z & 0 & m_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [[u]]_x \\ [[u]]_y \\ [[u]]_z \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

onde  $N_1$  é a função de forma convencional do M.E.F., associada ao nó isolado. Na Eq. (5.17),  $l_e$  é o inverso da norma do vetor gradiente da soma das funções de forma dos nós isolados, que no caso ilustrado com apenas um nó isolado, corresponde à distância entre o nó isolado e a face oposta, denominada aqui “comprimento característico” do elemento. Portanto, na Eq. (5.16) e (5.17) teve-se em conta que:

$$\left\{ \frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_1}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{m_x}{l_e}, \frac{m_y}{l_e}, \frac{m_z}{l_e} \right\} \quad (5.18)$$

Assim, o correspondente vetor de tensões,  $\boldsymbol{\sigma}_\Omega = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T$  na região contínua pode ser expressa da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_\Omega = \boldsymbol{\Sigma}^J(\boldsymbol{\varepsilon}_\Omega) = \boldsymbol{\Sigma}^J \left( \mathbf{BD} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \right) \quad (5.19)$$

$$\mathbf{M}^T = l_e \mathbf{B}_1^T = \begin{bmatrix} m_x & 0 & m_y & 0 & 0 & m_z \\ 0 & m_y & m_x & 0 & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_z & m_y & m_x \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

onde  $\Sigma^J$  representa o modelo constitutivo de dano J2 (modelo de dano que usa como critério de degradação), e  $\mathbf{M}$  é a matriz formada pelas componentes do vetor  $\mathbf{m}$ . Portanto, o vetor das forças internas correspondente ao elemento finito de volume  $V_e$ , é obtido da seguinte forma:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{\Omega} d\Omega_e = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{\Omega} V_e = \mathbf{B}^T \Sigma^J \left( \mathbf{B}\mathbf{D} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] \right) V_e \quad (5.21)$$

onde  $V_e$  é o volume do elemento finito.

A deformação e a correspondente tensão na região de localização de deformação podem ser escritas da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{\varepsilon}_{\Omega} + \frac{\mathbf{N}}{k} [[\mathbf{u}]] = \mathbf{B}\mathbf{D} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [[\mathbf{u}]] + \frac{\mathbf{N}}{k} [[\mathbf{u}]] \quad (5.22)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \Sigma^C(\boldsymbol{\varepsilon}_s) \quad (5.23)$$

onde  $k$  representa a largura da banda de localização de deformação,  $\Sigma^C$  representa a relação constitutiva combinada, ou seja, na região de localização de deformação o critério de degradação é segundo o modelo de dano combinado, e  $\mathbf{N}$  é uma matriz obtida a partir das componentes do vetor normal  $\mathbf{n}$ , ou seja:

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y & 0 & 0 & n_z \\ 0 & n_y & n_x & 0 & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_z & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

As forças de superfície na região de localização de deformação devem estar em equilíbrio às forças calculadas na adjacência (pontos na região contínua que faz fronteira com a região de localização de deformação), ou seja, no espaço vetorial de tensões tem-se:

$$\mathbf{N}^T (\boldsymbol{\sigma}_s - \boldsymbol{\sigma}_\Omega) = 0 \quad (5.25)$$

Substituindo as expressões (5.19) e (5.23) em (5.25), chega-se a:

$$\mathbf{N}^T \boldsymbol{\Sigma}^C \left( \mathbf{B}\mathbf{D} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [\mathbf{u}] + \frac{\mathbf{N}}{k} [\mathbf{u}] \right) - \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Sigma}^J \left( \mathbf{B}\mathbf{D} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [\mathbf{u}] \right) = 0 \quad (5.26)$$

A solução da Eq.(5.26), para um determinado estado de deformação, pode ser obtida pelo esquema iterativo de Newton-Raphson, que permite uma aproximação melhorada a partir da resposta da interação interior, buscando-se a solução da Eq. (5.27) por meio da formula recursiva da Eq. (5.28),

$$\mathbf{R}([\mathbf{u}]) = \mathbf{N}^T \left( \boldsymbol{\Sigma}^C \left( \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left( \frac{\mathbf{N}}{k} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} \right) [\mathbf{u}] \right) - \boldsymbol{\Sigma}^J \left( \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} [\mathbf{u}] \right) \right) = 0 \quad (5.27)$$

$$[\mathbf{u}]^{i+1} = [\mathbf{u}]^i - \left[ \frac{\partial \mathbf{R}([\mathbf{u}]^i)}{\partial [\mathbf{u}]^i} \right]^{-1} \mathbf{R}([\mathbf{u}]^i) \quad (5.28)$$

onde  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}\mathbf{D}$  é a deformação regular do elemento, a derivada da Eq. (5.27) é expressa da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial [\mathbf{u}]} = \mathbf{N}^T \left( \boldsymbol{\Sigma}^{C'} \left( \frac{\mathbf{N}}{k} - \frac{\mathbf{M}}{l_e} \right) + \boldsymbol{\Sigma}^{J'} \frac{\mathbf{M}}{l_e} \right) \quad (5.29)$$

onde  $\boldsymbol{\Sigma}^{C'} = \partial \boldsymbol{\Sigma}^C / \partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é a matriz constitutiva de dano combinado,  $\boldsymbol{\Sigma}^{J'} = \partial \boldsymbol{\Sigma}^J / \partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  é a matriz constitutiva de dano  $J_2$ .

Uma vez calculas as componentes do salto através do processo iterativo, as tensões no elemento podem ser obtidas por meio da Eq. (5.19).

## Capítulo 6

### VALIDAÇÃO NUMÉRICA

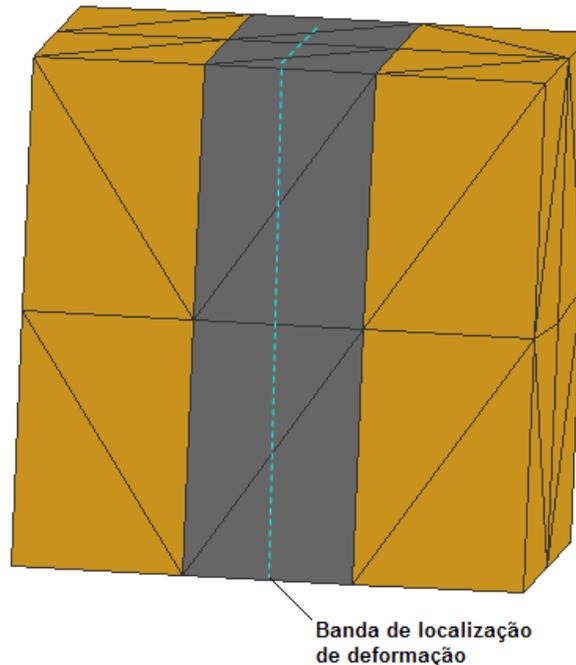
#### 6.1 Introdução

Este capítulo apresenta alguns exemplos numéricos, focando a capacidade do modelo de dano combinado em representar os principais aspectos do comportamento de materiais quase-frágeis. A região de localização de deformação (zona de processo de fratura) é descrita segundo o modelo de dano combinado, com lei de abrandamento exponencial. A região contínua é descrita pelo modelo J2, com parâmetros ajustados com base no comportamento não-linear à compressão.

#### 6.2 Cubo estruturado com uma banda de localização

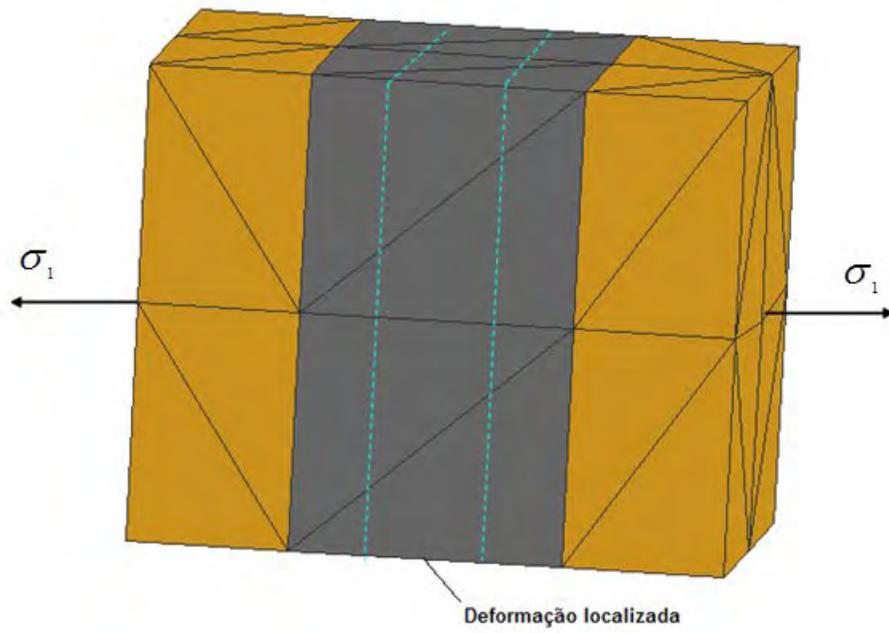
Apresenta-se uma análise numérica do processo de fissuração de um elemento cúbico, seguido por aplicação de compressão na direção do plano de fissura, registrando-se as respostas tensão-deslocamento para as diferentes direções, como desenvolvido por Cervenka e Papanikolaou (2008).

Analisou-se um cubo de aresta  $L=200$  mm, com uma potencial banda de localização plana de largura 0,5 mm, seccionando transversalmente o cubo em sua região central, como mostra a fig. (6.5). Empregou-se uma malha de 86 elementos finitos tetraédricos de 4 nós, como ilustra a fig. (6.1). Os elementos finitos permitem simular os efeitos de uma banda de localização plana em seu interior, de acordo com formulação de elementos finitos com descontinuidades incorporadas proposta por Manzoli e Shing (2006), descrita no capítulo 5. As figuras (6.2), (6.3) e (6.4) ilustram o cubo deformado em tração, com a respectiva localização de deformação, o cubo deformado em compressão, onde pode-se observar o fechamento da fissura (banda de localização), e o cubo deformado primeiramente em tração e posteriormente em compressão comparado com o cubo original (não deformado), a fim de mostrar o efeito Poisson, respectivamente.

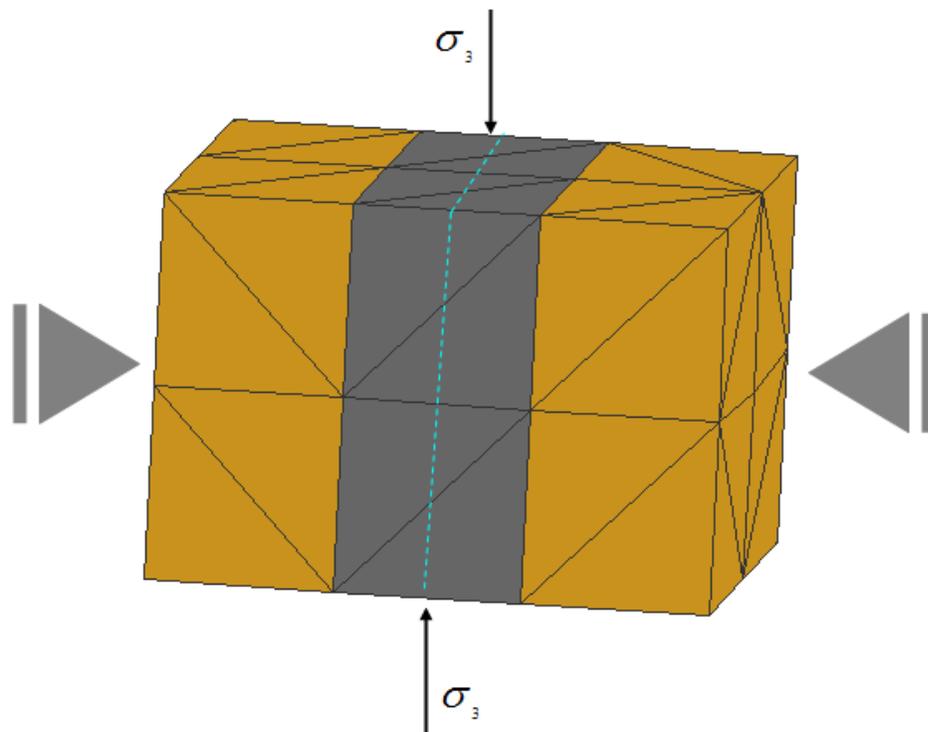


**Figura 6.1: Malha de elementos finitos tetraédricos**

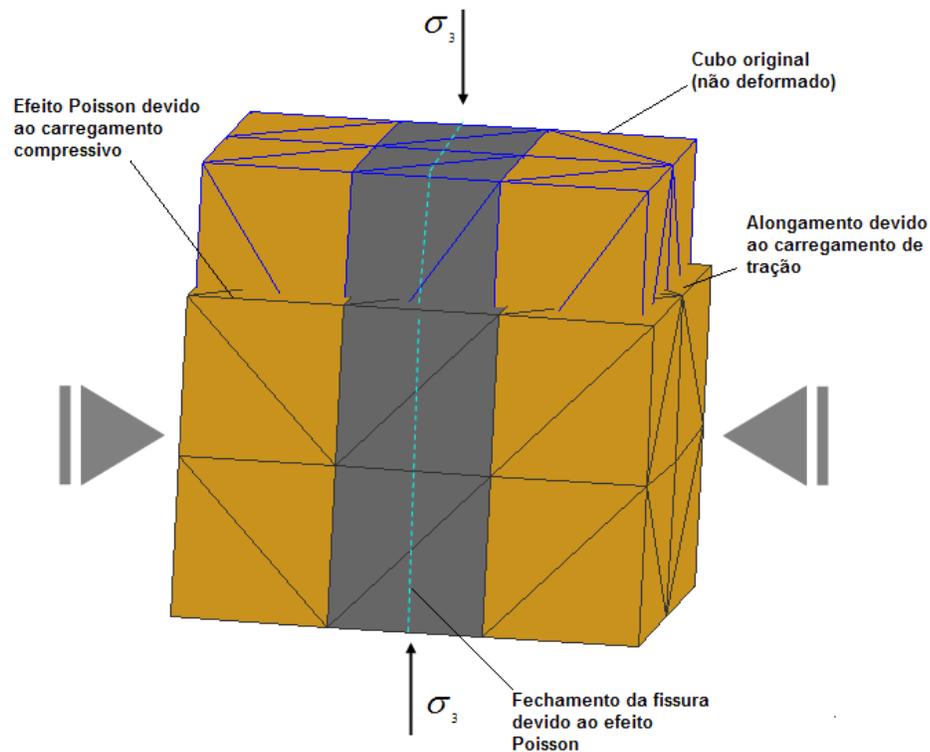
As propriedades do modelo constitutivo assumidas são: módulo de Young  $E = 30$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  resistência à tração  $\sigma_t = 2,0$  MPa; resistência à compressão  $\sigma_c = 20$  MPa; variável de dano com abrandamento de compressão exponencial, com  $B = 0,25$ ; e parâmetro de abrandamento exponencial de tração  $A = 0,015$ .



**Figura 6.2: Cubo deformado em tração**

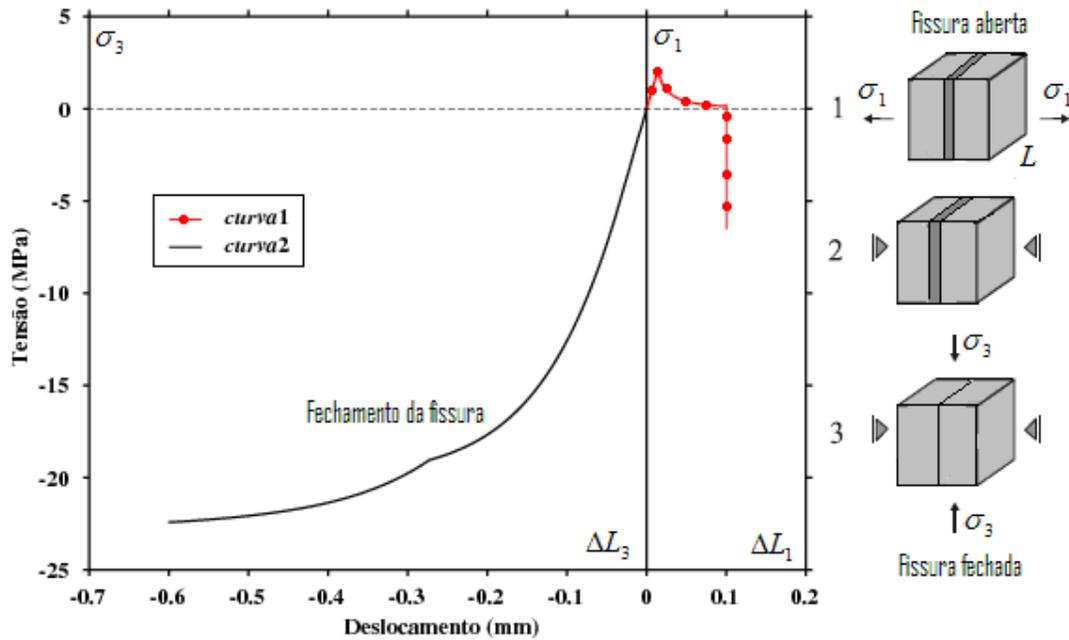


**Figura 6.3: Cubo deformado em compressão**



**Figura 6.4: Cubo original com o cubo deformado em tração e compressão**

Primeiramente, o cubo é submetido ao estado de tração uniaxial na direção 1, abrindo-se a fissura ortogonal após percorrer-se o regime elástico, atingindo uma abertura de 0.1 mm, como mostra curva 1 da fig. (6.5). Em seguida é aplicada compressão na direção 3, impedindo-se os deslocamentos das faces na direção 1. O processo é de compressão uniaxial na direção 3, acompanhado de movimentos da direção 1, no sentido de fechamento da fissura, produzido pelo efeito Poisson e pelo efeito inelástico do modelo J2. Após o fechamento da fissura, o cubo passa a estado biaxial em compressão (confinado), com ganho de rigidez proporcionado pela compressão na direção 1, devido às reações nas faces vinculadas, como ilustra a curva 2 da fig. (6.5).



**Figura 6.5: Curva tensão versus deslocamento com fissura localizada para o estado de tensão biaxial**

Para efeito de comparação, a curva 2 da fig. (6.5) é apresentada como curva 1 na fig. (6.6) e comparada com outras duas curvas, obtida para o cubo sem fissura em processo de compressão simples na direção 3 (curva 2), e para o cubo submetido à compressão biaxial, com os movimentos das faces impedidas na direção 1 (situação confinada).

Como se pode observar, o comportamento à compressão do cubo fissurado é similar ao correspondente à compressão simples até que a fissura se feche. A partir de então o comportamento tende progressivamente à situação de compressão biaxial confinada (ver fig. (6.6)).

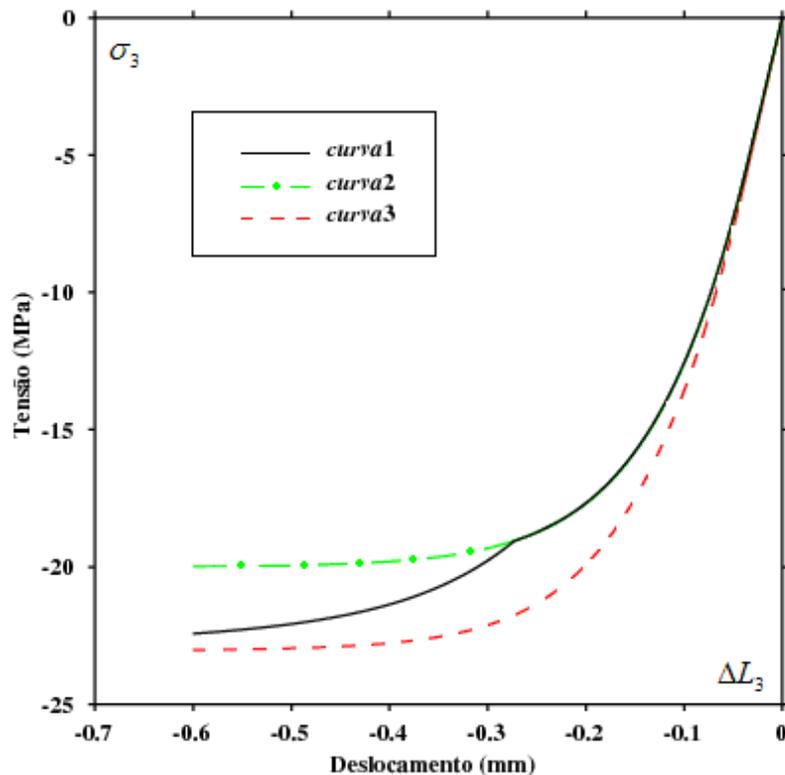


Figura 6.6: Curva tensão deslocamento para o estado de tensão em compressão

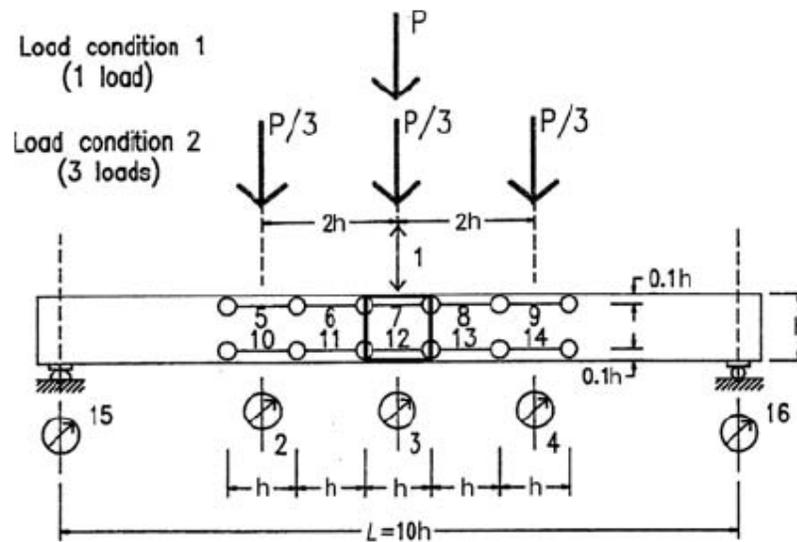
### 6.3 Capacidade de rotação plástica em viga de concreto armado

A fim de investigar o comportamento do modelo constitutivo de dano combinado, analisa-se capacidade de rotação plástica de vigas de concreto armado, tentando reproduzir os testes experimentais reportados por Bosco e Debernardi (1992).

Primeiramente, optou-se por simular numericamente os testes experimentais desenvolvidos com a viga V1, de comprimento  $L=2000$  mm, altura  $h=200$  mm e largura  $b=100$  mm, armadas com estribos de diâmetro de 6 mm, espaçados de 150 mm. A taxa de armadura longitudinal de tração,  $\rho_t$ , e de compressão,  $\rho_c$ , é de 0,57% e 0,25% para o primeiro teste, de 1,13% e 0,50% para o segundo teste e de 1,71% para o terceiro teste, respectivamente. A tabela (6.1) apresenta os parâmetros mecânicos e geométricos para as vigas V1, V2 e V3. Posteriormente, buscou-se analisar numericamente os testes experimentais para as vigas V2 e V3 (ver tab. (6.1)). A fig. (6.7) ilustra o modelo geométrico com o esquema dos testes realizados, que, por questão de simetria, tiveram apenas sua metade modelada.

**Tabela 6.1: Parâmetros mecânicos e geométricos**

vigas	h (mm)	b (mm)	L (mm)	$\rho_t$ (%)	$\rho_c$ (%)	Estribo
V1	200	100	2000	0,57	0,25	ø6/150
				1,13	0,50	ø6/150
				1,71	0,50	ø6/150
V2	400	200	4000	0,28	0,20	ø6/200
				0,57	0,20	ø6/200
				1,13	0,20	ø6/200
V3	600	300	6000	0,13	0,12	ø6/150
				0,25	0,12	ø6/150
				0,57	0,12	ø6/150
			1,13	0,12	ø6/150	

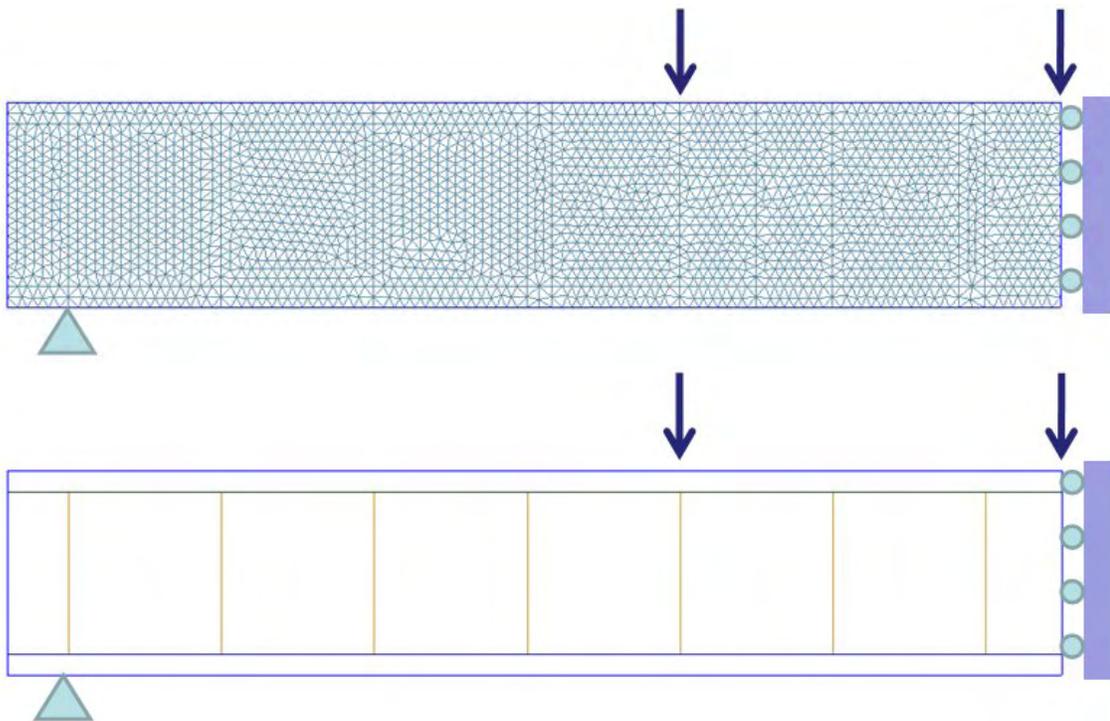


**Figura 6.7: Modelo geométrico da viga Bosco & Debernardi (1992)**

A fig. (6.8) mostra a malha de elementos finitos, a forma de distribuição das barras de aço e estribos e as condições de contorno para o modelo numérico da viga. O concreto é representado com elementos finitos triangular de três nós, enquanto que as barras da armadura são representadas com elementos lineares de dois nós, conectados aos nós dos elementos sólidos. Para a obtenção da curva estrutural (momento-rotação) o processo de carregamento foi realizado controlando-se o deslocamento vertical do ponto de carregamento situado na seção central (ver fig. (6.8)).

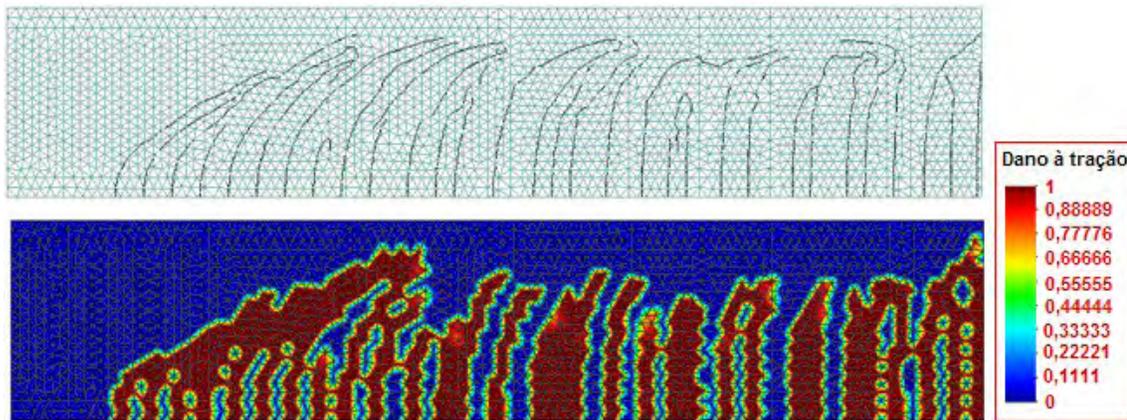
Para representar o comportamento não linear do concreto utilizou-se o modelo de dano composto. Assumiu-se o módulo de endurecimento/abrandamento  $H = -0,01$  para o modelo J2,  $B = 1,0$ , e o parâmetro de abrandamento exponencial do modelo à tração  $A = 0,025$ . As propriedades do material usadas foram: módulo de elasticidade  $E = 34,690$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$ , resistência à tração  $\sigma_t = 2,66$  MPa e resistência à compressão,  $\sigma_c = 26,60$  MPa.

Para o aço, assumiu-se comportamento elástico-perfeitamente plástico. As propriedades do material usadas foram: módulo de elasticidade  $E = 200,0$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,2$  e tensão de escoamento,  $\sigma = 562,0$  MPa.



**Figura 6.8: Malha de elementos finitos e distribuição das barras de aço**

O padrão de fissuras obtido numericamente sobre a configuração deformada da viga V1, com taxa de armadura 1,13, pode ser observado na fig. (6.9), na qual são mostrados as linhas de fissuras e o panorama da variável de dano à tração.



**Figura 6.9: Linhas de fissuras e o panorama da variável de dano à tração**

Na figura (6.10) apresentam-se as curvas momento x rotação para as diferentes taxas de armadura. Observa-se que os resultados numéricos reproduzem bem o comportamento experimental, caracterizado pela redução da ductilidade com o aumento da armadura longitudinal.

Um fator importante da modelagem é a capacidade de representar a ruptura por esmagamento do concreto, que de fato define a máxima rotação que pode ser atingida após o escoamento da armadura de tração. A fig. (6.11) mostra o panorama do dano à compressão no final da análise da viga, quando a região comprimida sofre esmagamento, que se caracteriza por um mecanismo de deslizamento de uma cunha delimitada por bandas cisalhantes. Na fig. (6.12) podem-se observar as fases do comportamento estrutural, caracterizado pelo processo de fissuração do concreto, escoamento do aço e esmagamento do concreto.

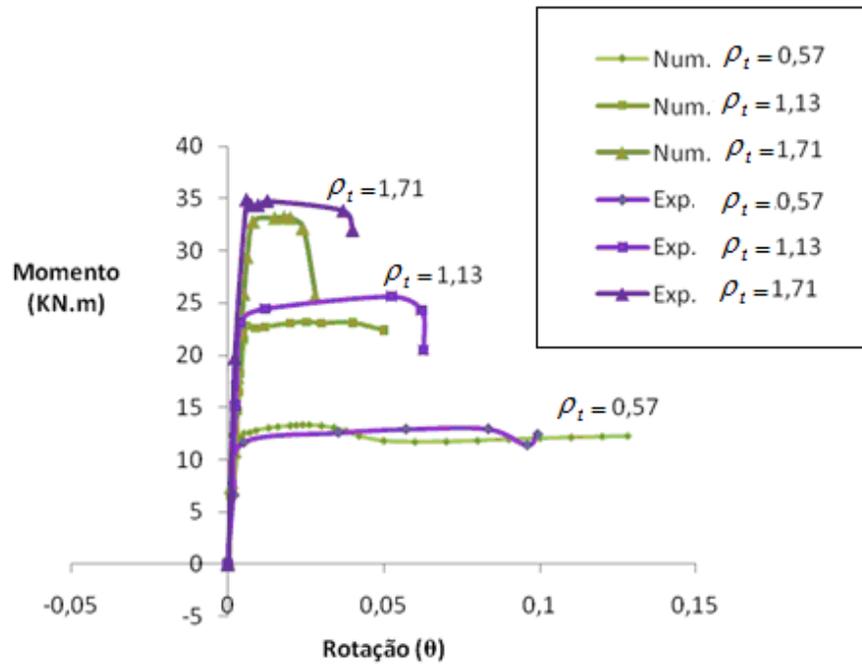


Figura 6.10: Curva momento *versus* rotação comparando as respostas estruturais obtidas numericamente e experimentalmente

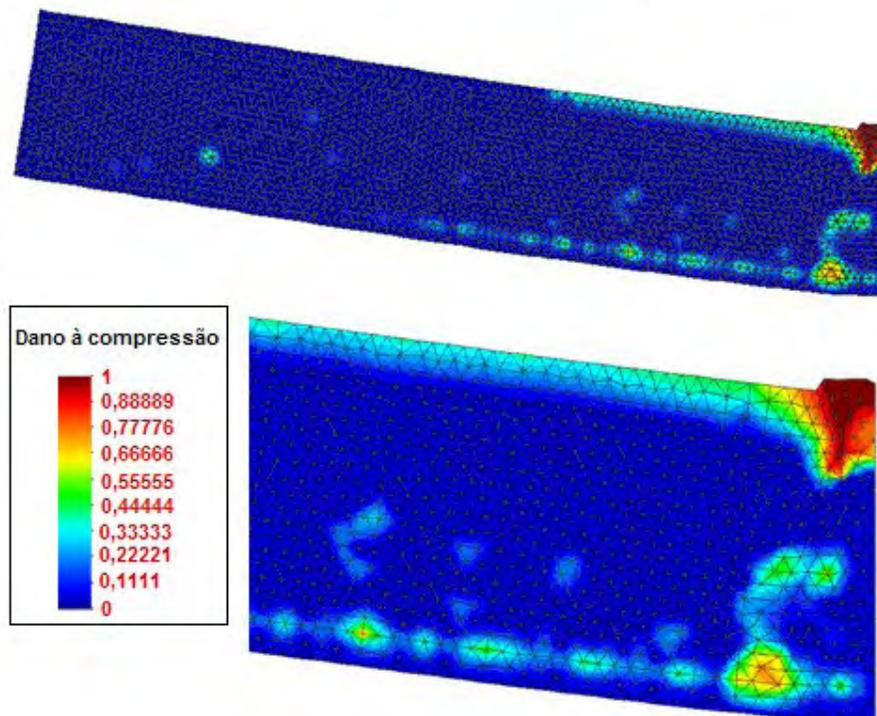
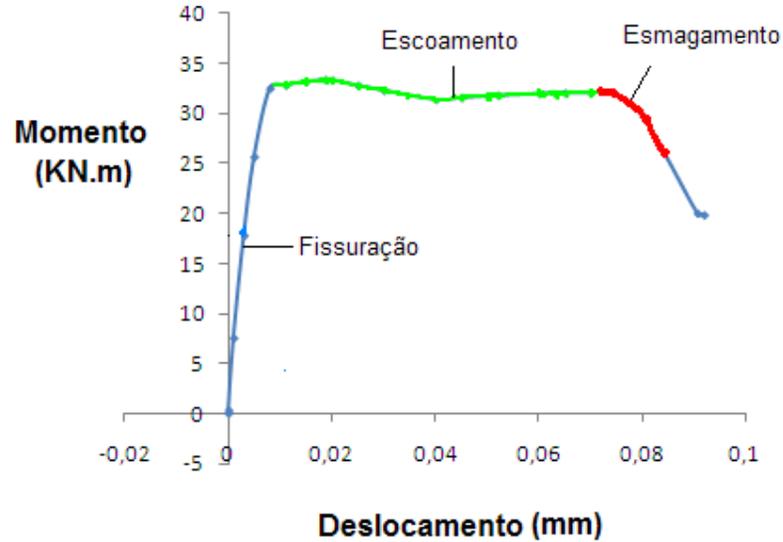


Figura 6.11: Panorama do dano à compressão sobre a configuração deformada da viga



**Figura 6.12: Fases do comportamento estrutural (V1,  $\rho_t = 1,71$ )**

Nas figuras (6.13) e (6.14) apresentam-se as respostas estruturais, momento-rotação, para os testes desenvolvidos com as vigas V2 e V3 para diferentes taxas de armadura (ver tab. (6.1)). De uma forma geral, os resultados numéricos simularam de forma eficiente os testes experimentais desenvolvidos por Bosco e Debernardi (1992). Variando a taxa de armadura para as vigas V2 e V3 os resultados são semelhantes aos observados para a viga V1, já que com o aumento das taxas de tração tem-se um aumento considerável da resistência e diminuição da ductilidade. Contudo, pode-se observar que com o aumento nas dimensões da viga, tem-se um aumento expressivo de resistência e perde-se em ductilidade (comparar as fig. (6.10), (6.13) e (6.14)).

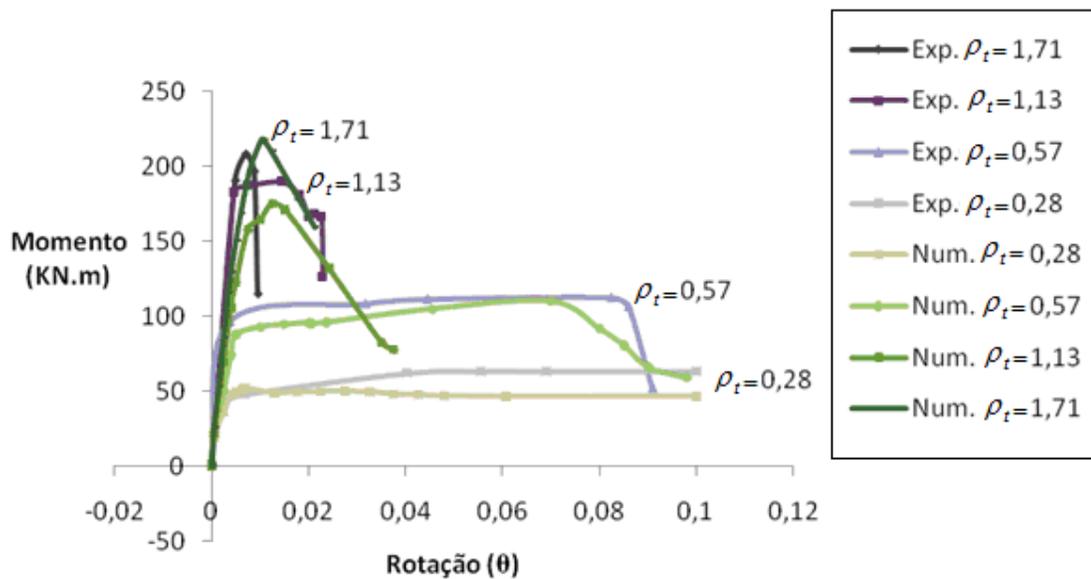


Figura 6.13: Curva momento *versus* rotação numérica e experimental para a viga V2

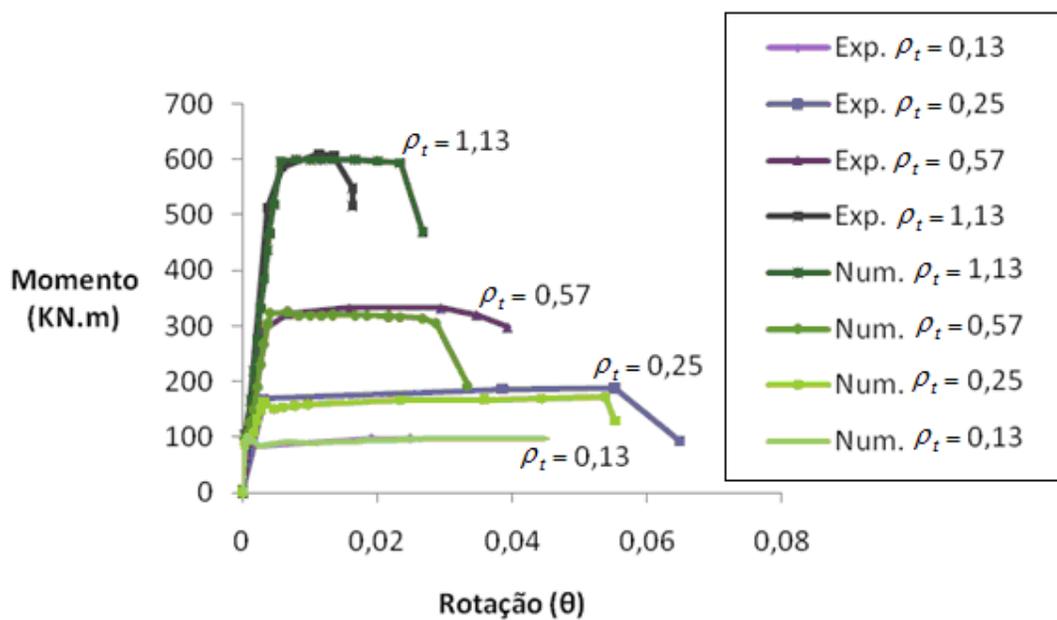


Figura 6.14: Curva momento *versus* rotação numérica e experimental para a viga V3

## Capítulo 7

### CONCLUSÕES

No presente trabalho apresentou-se um modelo constitutivo de dano composto capaz de representar o comportamento diferenciado de materiais quase-frágeis, quando solicitados à tração ou compressão, inclusive para cargas alternadas, tração-compressão ou compressão-tração.

O modelo é obtido mediante a composição de modelos independentes, baseados somente na mecânica do dano contínuo, projetados para representar fenômenos de degradação distintos, associados a estados compressivos ou de tração, mediante uma interpretação envolvendo comportamentos em distintas escalas. A forma de composição proposta se mostrou adequada para representar as principais características mecânicas de materiais quase-frágeis, refletindo as mudanças comportamentais conforme o tipo de solicitação.

A composição proposta se mostrou também eficaz para a simulação de processos de fraturamento, já que o modelo resultante é compatível com a formulação de elementos finitos com fissuras incorporadas, no contexto da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes. Nesse caso o modelo manteve sua capacidade de representar também as principais características do comportamento não-linear da porção contínua.

Os exemplos apresentados demonstram que o modelo proposto é capaz de tratar situações envolvendo não linearidades proporcionadas simultaneamente pelo aparecimento de

fissuras de tração e por processos dissipativos em compressão, que podem ocorrer em elementos estruturais reforçados, como os de concreto armado.

A fim de aperfeiçoar a modelagem para representar de forma mais realística o comportamento de materiais quase-frágeis ficam aqui algumas sugestões:

- Estender o modelo de compressão para representar efeitos associados ao atrito interno do material, através da introdução da dependência do critério de dano com relação à tensão média, como é o caso do modelo de Drucker-Prager;

- Definir leis de endurecimento/abrandamento que reflitam com mais realismo o comportamento não-linear de materiais quase-frágeis;

- Adequar o modelo de dano proposto para desenvolver deformações plásticas ou residuais após ciclos de carregamento, com base na teoria da plasticidade.

## Capítulo 8

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BIGAJ A. AND WALRAVEN J. C. Size effect on rotational capacity of plastic hinges in reinforced concrete beams. *CEB Bulletin d'Information* 218:7-23, 1993.
- BONO, G. F. F. Modelos constitutivos para análise tridimensional de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos. Dissertação de Doutorado, Escola de Engenharia do Rio Grande do Sul, 2008.
- BOSCO C. and DEBERNARDI P. G. Experimental investigation on the ultimate rotational capacity of R.C. beams. Report no. 36, Atti del Dipartimento, Politecnico di Torino, *Ingegneria Strutturale*, 1992.
- CARPINTERI, A.; CORRADO, M.; MANCINI, G. AND PAGGI, M. A numerical approach to modelling size effects on the flexural ductility of RC beams. *Materials and Structures*, 42:1353-1367, 2009.
- CERVENKA, J. AND PAPANIKOLAOU, V. K. Three dimensional combined fracture-plastic material model for concrete. *International Journal of Plasticity*, 24(12):2192-2220, December 2008.
- CERVERA, M.; OLIVER, J. AND MANZOLI, O. A rate-dependent isotropic damage model for the seismic analysis of concrete dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 25(9): 987-1010, 1996.

- CERVERA, M.; CHIUMENTI, M. AND AGELET DE SARACIBAR, C. Shear band localization via local  $j_2$  continuum damage mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(9-11):849-880, 2004.
- GAMINO, A. L.; BITTENCOURT, T. N. & SOUSA, J. L. A. O. “Finite element computational modeling of externally bonded CFRP composites flexural behavior in RC beams”. *Computers and Concrete*, Vol. 6, No. 3, pp. 187-202, (2009).
- GAMINO, A. L.; MANZOLI, O. L.; SOUSA, J. L. A. O. & BITTENCOURT, T. N. “2D Evaluation of Crack Openings using Smearred and Embedded Crack Models”. *Computers and Concrete*, Vol. 7, No. 6, pp. 483-496, (2010).
- GAMINO, A. L. & MANZOLI, O. L. “Dependência Estrutural da Capacidade de Rotação Plástica em Vigas de Concreto Armado”. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 26, No. 4, (2010). (In Press).
- GONÇALVES, R. Análise de propagação de fissuras por fadiga em concreto pelo MEF mediante a mecânica do dano contínuo. Dissertação de Mestrado, *Departamento de Estruturas*, Escola de Engenharia de São Carlos, 2003.
- LEMAITRE, J. AND CHABOCHE, J. L. ‘Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement’. *J. méca. appl.* 2, 317-365, 1978.
- LEMAITRE, J. AND CHABOCHE, J. L. *Mechanics of solid materials*. Cambridge: *University Press*, 1985.
- LEMAITRE, J. *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag, 1992.
- MANZOLI, O. L. AND SHING, P. B. A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. *Computers and Structures*, v. 84, p. 742-757, 2006.
- MANZOLI, O. L. Um modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes em la mecânica de sólidos. Tese de Doutorado, Escola Tècnica Superior D’Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.
- MANZOLI, O. L. Análise numérica de fraturamento em estruturas de concreto e alvenaria. Tese de livre Docência, *Departamento de Engenharia Civil*, Faculdade de Engenharia de Bauru, 2006.
- OLIVER, J. ‘Continuum modeling of strong discontinuities in solid mechanics’. *Proc. IV Int. conf. on computational plasticity*, CMNE, p. 455-479, 1995.
- OLIVER, J.; CERVERA, M. AND MANZOLI, O. Strong discontinuities and continuum plasticity model: The strong. discontinuity approach. *International journal of plasticity*, v. 15, n. 3, p. 319-351, 1999.
- OLIVER, J.; HUESPE, A. E. AND CANTE, J. C. An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21-24):1865-1889, 2008.

- OLIVER, J. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39(21):3575-3600, 1996.
- OLIVER, J. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. part 2: Numerical Simulation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39(21):3575-3600, 1996.
- OLIVER, J. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 2: Numerical Simulation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39(21):3601-3623, 1996.
- PECCE, M. AND FABBRICINO, G. Plastic rotation capacity of beams in normal and high-performance concrete. *ACI Struct J* 96:290-296, 1999.
- PEDRINI, R. A. A. Análise de propagação arbitrária de descontinuidades fortes em sólidos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno. Dissertação de Mestrado, *Departamento de Estruturas*, Escola de Engenharia de São Carlos, 2008.
- PROENÇA, S. P. B. AND PITUBA, J. J. C. A damage constitutive model accounting for induced anisotropy and bimodular elastic response. *Latin American J. Solids struct*, 1:101-117, 2003.
- PETERSON, P. E. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. Report No TVBM-1106, Division of Building Materials, University of Lund, Lund, Sweden, 1981.
- SIMO, J. C. AND JU, J. W. 'Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation', *Int. j. solids struct*. V. 23, p. 821-840, 1987.
- SPENCER, B. W. Finite elements with embedded discontinuities for modeling reinforced concrete members. Doctoral Thesis, Department of Civil, *Environmental, and Architectural Engineering*. University of Colorado, 2002.
- VECCHIO, F. J. AND SHIM, W. Experimental and analytical reexamination of classic concrete beam tests. *Journal of Structural Engineering*, 2004.
- WU, J. Y.; LI, J. AND FARIA, R. An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. *Int. J. Solids Struct*, 43:583-612, 2006.
- XIAO, Y.; PRIESTLEY, M. J. N. AND SEIBLE, F. "Steel jacket retrofit for enhancing shear strength of short rectangular reinforced concrete columns." Report No. SSRP-92/97, *Department of Applied Mechanics and Engineering Sciences*, University of California-San Diego, La Jolla, California.
- YAZDANI, S. AND SCHREYER, H.C. Combined plasticity and damage mechanics model for plain concrete. *J. Engrg. Mech., ASCE*, 116(7):1450, 1990.

# Apêndice 1

## ROTINAS MATLAB/OCTAVE

### A.1.1 Introdução

Apresenta-se as rotinas para os modelos constitutivos de dano elástico 1D, dano 1D, dano à tração 1D, dano combinado 1D, dano com região de localização de deformação, SD, dano SD à tração 1D, dano SD combinado 1D, respectivamente, e com suas respectivas matrizes tangentes.

### A1.2 Elástico 1D

```
function [stres] = \  
    elastic_1D(young, stran)  
%  
% ROTINA  
% MODELO DE DANO 1D  
%  
%-----  
% ENTRADA  
%   stran :      Deformação  
%   young :      Módulo de Elasticidade(E)  
%  
% SAIDA
```

```

% stress:          Tensao do incremento atual
%-----
%
% stress=young*stran;
%
endfunction

```

### A1.3 Dano 1D

```

function [damag,thres,stres,fload] = \
    damage_1D(young,ftult,hmodl,damag_N,thres_N,stran,alpha)
%
% ROTINA
% MODELO DE DANO 1D
%-----
% ENTRADA
% young :          Módulo de Elasticidade(E)
% ftult :          Resistencia inicial (f)
% damag_N :        Variavel de dano(d_n)
% thres_N :        variavel interna t. tensao (r_n)
% stran :          Deformacao do incremento atual (E_n+1)
% hmodl :          modulo de endurecimento/abrandamento
%
% SAIDA
% damag :          Variavel de dano(d_n+1)
% thres :          variavel interna t. tensao (r_n+1)
% fload :          status de carregamento
% stress:          Tensao do incremento atual
%-----
%
% PREVISAO ELASTICA
%
% Tensao efetiva
%
% stress_E=young*stran;
%
% damag=damag_N;
% thres=thres_N;
%
% thre0=ftult/sqrt(young);
% if (thres<=0)
%     thres=thre0;
% endif
%
% equiv=sqrt(stres_E^2/young);
%
% equiv=(sqrt(stres_E^2)+stres_E)/(2*sqrt(young))+(1/alpha)*(sqrt(stres_E^2)-
% stres_E)/(2*sqrt(young));
%
% Verificacao do criterio de dano
%
% F_DM=equiv-thres;
%
% CORRECAO (se necessario)
%
% fload=0;
% if (F_DM>=0)
%     fload=1;

```

```

    thres=equiv;

%   damag=(1-thre0/thres)/(1.0+hmodl);
    damag=1-(thre0*exp(hmodl*(1-thres/thre0))/thres);
endif
%
    stres=(1-damag)*stres_E;
%
endfunction

```

#### A1.4 Dano somente à tração 1D

```

function [damag,thres,stres,fload] = \
    damage_t_1D(young,ftult,hmodl,damag_N,thres_N,stran,alpha)
%
% ROTINA
% MODELO DE DANO 1D
%
%-----
% ENTRADA
%   young :      Módulo de Elasticidade(E)
%   ftult :      Resistencia inicial (f)
%   damag_N :    Variavel de dano(d_n)
%   thres_N :    variavel interna t. tensao (r_n)
%   stran :      Deformacao do incremento atual (E_n+1)
%   hmodl :      modulo de endurecimento/abrandamento
%
% SAIDA
%   damag :      Variavel de dano(d_n+1)
%   thres :      variavel interna t. tensao (r_n+1)
%   fload :      status de carregamento
%   stress:      Tensao do incremento atual
%-----
%
% PREVISAO ELASTICA
%
% Tensao efetiva
%
    stres_E=young*stran;
    stret_E= (sqrt(stres_E^2)+stres_E)/2;
    strec_E=(stres_E)-(stret_E);
%
    damag=damag_N;
    thres=thres_N;

%
    thre0=ftult/sqrt(young);
    if (thres<=0)
        thres=thre0;

    endif
%
    equiv=stret_E/(sqrt(young));

%
% Verificacao do criterio de dano traçao
%
    F_DM=equiv-thres;
%
% CORRECAO (se necessario)

```

```

%
fload=0;
if (F_DM>=0)
    fload=1;
    thres=equiv;
%   damag=(1-thre0/thres)/(1.0+hmodl);
    damag=1-(thre0*exp(hmodl*(1-thres/thre0))/thres);
endif
%
%
    stres=stres_E-damag*stret_E
%
endfunction

```

### A1.5 Dano combinado 1D

```

function [damag,thres,damat,thret,stres,fload,float] = \
    damage_comb_1D(young,ftult,hmodl,damag_N,thres_N,hmodt,damat_N,thret_
        N,stran,alpha)
%
% ROTINA
% MODELO DE DANO COMBINADO 1D
%
%-----
% ENTRADA
%   young :      Módulo de Elasticidade(E)
%   ftult :      Resistencia inicial (f)
%   damag_N :    Variavel de dano(d_n)
%   thres_N :    variavel interna t. tensao (r_n)
%   stran :      Deformacao do incremento atual (E_n+1)
%   hmodl :      modulo de endurecimento/abrandamento
%
% SAIDA
%   damag :      Variavel de dano(d_n+1)
%   thres :      variavel interna t. tensao (r_n+1)
%   fload :      status de carregamento
%   stress:      Tensao do incremento atual
%-----
%
% PREVISAO ELASTICA
%
% Tensao efetiva
%
    stres_E=young*stran;
    fcult=alpha*ftult;
%
    [damag,thres,stres,fload] = \
        damage_elD(young,fcult,hmodl,damag_N,thres_N,stres_E,alpha);
    [damat,thret,stres,float] = \
        damage_t_elD(young,ftult,hmodt,damat_N,thret_N,stres,alpha);
%
endfunction

```

### A1.6 Dano SD 1D

```

function [damag,thres,stres,fload,jump] = \
    damage_SD(L,k,young,ftult,hmodl,damag_N,thres_N,stran,alpha,jump_N)
%
% ROTINA
% MODELO DE DANO 1D

```

```

%
%-----
% ENTRADA
% young :      Módulo de Elasticidade(E)
% ftult :      Resistencia inicial (f)
% damag_N :    Variavel de dano(d_n)
% thres_N :    variavel interna t. tensao (r_n)
% stran :      Deformacao do incremento atual (E_n+1)
% hmodl :      modulo de endurecimento/abrandamento
%
% SAIDA
% damag :      Variavel de dano(d_n+1)
% thres :      variavel interna t. tensao (r_n+1)
% fload :      status de carregamento
% stress:      Tensao do incremento atual
%-----
%
toler=0.001*ftult;
miter=30;
iiter=1;

jump=jump_N;
damag=damag_N;
thres=thres_N;
strao=stran-jump/L;
strai=strao+jump/k;
[streo] = \
elastic_1D(young,strao);
[damag,thres,strei,fload] = \
damage_1D(young,ftult,hmodl,damag,thres,strai,alpha);
resid=streo-strei;

while(abs(resid)>toler)
  [dmato] = \
  M_elastic_1D(young);
  [dmati] = \
  M_damage_1D(young,hmodl,ftult,damag,thres,alpha,fload);
  dmatj=-dmato/L-dmati*(1/k-1/L);
  jump=jump-resid/dmatj

  damag=damag_N;
  thres=thres_N;
  strao=stran-jump/L;
  strai=strao+jump/k;
  [streo] = \
  elastic_1D(young,strao);
  [damag,thres,strei,fload] = \
  damage_1D(young,ftult,hmodl,damag,thres,strai,alpha);
  resid=streo-strei

  if(abs(resid)<=toler)
    break;
  endif
  iiter=iiter+1
  if (iiter>miter)
    printf ("Nao foi encontrada convergencia em %d iteracoes \n", \
           iiter);
    return
  endif
endwhile
stres=streo;

```

```
endfunction
```

## A1.7 Dano SD à tração 1D

```
function [damag,thres,stres,fload,jump] = \
    damage_t_SD(L,k,young,ftult,hmodl,damag_N,thres_N,stran,alpha,jump_N)
%
% ROTINA
% MODELO DE DANO 1D
%
%-----
% ENTRADA
%   young :      Módulo de Elasticidade(E)
%   ftult :      Resistencia inicial (f)
%   damag_N :    Variavel de dano(d_n)
%   thres_N :    variavel interna t. tensao (r_n)
%   stran :     Deformacao do incremento atual (E_n+1)
%   hmodl :     modulo de endurecimento/abrandamento
%
% SAIDA
%   damag :      Variavel de dano(d_n+1)
%   thres :      variavel interna t. tensao (r_n+1)
%   fload :      status de carregamento
%   stress:      Tensao do incremento atual
%-----
%
    toler=0.001*ftult;
    miter=60;
    iiter=1;

    jump=jump_N;
    damag=damag_N;
    thres=thres_N;
    strao=stran-jump/L;
    strai=st rao+jump/k;
    [streo] = \
    elastic_1D(young, strao);
    [damag,thres,strei,fload] = \
    damage_t_1D(young,ftult,hmodl,damag,thres,strai,alpha);
    resid=streo-strei;

    while(abs(resid)>toler)
        [dmato] = \
        M_elastic_1D(young);
        [dmati] = \
        M_damage_t_1D(young,hmodl,ftult,damag,thres,alpha,fload);
        dmatj=-dmato/L-dmati*(1/k-1/L);
        jump=jump-resid/dmatj

        damag=damag_N;
        thres=thres_N;
        strao=stran-jump/L;
        strai=st rao+jump/k;
        [streo] = \
        elastic_1D(young, strao);
        [damag,thres,strei,fload] = \
        damage_t_1D(young,ftult,hmodl,damag,thres,strai,alpha);
        resid=streo-strei
```

```

        if(abs(resid)<=toler)
            break;
        endif
        iiter=iiter+1
        if (iiter>miter)
            printf ("Nao foi encontrada convergencia em %d iteracoes \n", \
                iiter);
            return
        endif
    endwhile
    stres=streo;
endfunction

```

## A1.8 Dano SD combinado 1D

```

function[damao, threo, floao, damag, thres, damat, thret, stres, fload, float, jump]
= \
    damage_comb_SD(L,k,young,ftult,hmodl,damao_N,threo_N,floao_N,damag_N,t
        hres_N,hmodt,damat_N,thret_N,stran,alpha,jump_N)
%
% ROTINA
% MODELO DE DANO 1D
%
%-----
% ENTRADA
%   young :           Módulo de Elasticidade(E)
%   ftult :           Resistencia inicial (f)
%   damag_N :        Variavel de dano(d_n)
%   thres_N :        variavel interna t. tensao (r_n)
%   stran :          Deformacao do incremento atual (E_n+1)
%   hmodl :          modulo de endurecimento/abrandamento
%
% SAIDA
%   damag :          Variavel de dano(d_n+1)
%   thres :          variavel interna t. tensao (r_n+1)
%   fload :          status de carregamento
%   stress:         Tensao do incremento atual
%-----
%
    toler=0.001*ftult;
    miter=60;
    iiter=1;
    damao=damao_N;
    threo=threo_N;
    floao=floao_N;
    damat=damat_N;
    thret=thret_N;
    jump=jump_N;
    damag=damag_N;
    thres=thres_N;
    strao=stran-jump/L;
    strai=strao+jump/k;
%   [streo] = \
%   elastic_1D(young,strao);

    stres_E=young*strao;
    [damao,threo,streo,floao] = \
    damage_elD(young,ftult,hmodl,damao,threo,stres_E,alpha);

```

```

[damag, thres, damat, thret, strei, fload, float] = \
damage_comb_1D(young, ftult, hmodl, damag, thres, hmodt, damat, thret, strai, alpha)

resid=streo-strei;

while(abs(resid)>toler)
% [dmato] = \
% M_elastic_1D(young);

[dmato] = \
M_damage_1D(young, hmodl, ftult, damao, threo, alpha, floao);
[dmati] = \
M_damage_comb_1D(young, hmodl, ftult, damag, damat, thres, alpha, fload);
dmatj=-dmato/L-dmati*(1/k-1/L);
jump=jump-resid/dmatj;
damao=damao_N;
threo=threo_N;
floao=floao_N;
damat=damat_N;
thret=thret_N;
damag=damag_N;
thres=thres_N;
strao=stran-jump/L;
strai=strao+jump/k;
#[streo] = \
#elastic_1D(young, strao)

stres_E=young*strao;
[damao, threo, streo, floao] = \
damage_elD(young, ftult, hmodl, damao, threo, stres_E, alpha);

[damag, thres, damat, thret, strei, fload, float] = \
damage_comb_1D(young, ftult, hmodl, damag, thres, hmodt, damat, thret, strai, alpha)

resid=streo-strei;

if(abs(resid)<=toler)
break;
endif
iiter=iiter+1;
if (iiter>miter)
printf ("Nao foi encontrada convergencia em %d iteracoes \n", \
iiter);
# stop;
return
endif
endwhile
stres=streo;
iiter
endfunction

```

## A1.9 Matriz tangente elástica 1D

```

function [dmatx] = \
M_elastic_1D(young)
%
% ROTINA
% MODELO DE DANO 1D

```

```

%
%-----
% ENTRADA
%   stran :
%   young :      Módulo de Elasticidade(E)
%
% SAIDA
%   dmatx:      Módulo tangente
%-----
%
% PREVISAO ELASTICA
%
% Tensao efetiva
%
%   dmatx=young;
%
endfunction

```

### A1.10 Matriz tangente dano 1D

```

function [dmatx] = \
    M_damage_1D(young,hmodl,ftult,damag,thres,alpha,fload)
%
% ROTINA
% MODELO DE DANO 1D
%
%-----
% ENTRADA
%   young :      Módulo de Elasticidade(E)
%   damag_N :    Variavel de dano(d_n)
%   thres_N :    variavel interna t. tensao (r_n)
%   hmodl :      modulo de endurecimento/abrandamento
%
% SAIDA
%   dmatx :      Nodulo Tangente
%-----
%
%   thre0=ftult/sqrt(young);
%   if (thres<=0)
%       thres=thre0;
%   endif
%
% Verificacao do criterio de dano
%
%   dmatx=young*(1-damag);
%   if (fload!=0)
%       dmatx=dmatx-young*((thre0/thres)*(1/(1+hmodl)));
%   dmatx=dmatx-young*exp(hmodl*(1-thres/thre0))*(hmodl+thre0/thres);
%   endif
%
endfunction

```

### A1.11 Matriz tangente dano somente à tração 1D

```

function [dmatx] = \
    M_damage_t_1D(young,hmodl,ftult,damag,thres,alpha,fload)
%
% ROTINA
% MODELO DE DANO 1D
%
%-----

```

```

% ENTRADA
% young :      Módulo de Elasticidade(E)
% damag_N :    Variavel de dano(d_n)
% thres_N :    variavel interna t. tensao (r_n)
% hmodl :      modulo de endurecimento/abrandamento
%
% SAIDA
% dmatx :      Nodulo Tangente
%-----
%
thre0=ftult/sqrt(young);
if (thres<=0)
    thres=thre0;
endif
%
% Verificacao do criterio de dano
%
dmatx=young*(1-damag);
if (fload!=0)
    dmatx=dmatx-young*exp(hmodl*(1-thres/thre0))*(hmodl+thre0/thres)
endif
%
endfunction

```

### A1.12 Matriz tangente dano combinado 1D

```

function [dmatx] = \
    M_damage_comb_1D(young,hmodl,ftult,damag,damat,thres,alpha,fload)
%
% ROTINA
% MODELO DE DANO 1D
%-----
% ENTRADA
% young :      Módulo de Elasticidade(E)
% damag_N :    Variavel de dano(d_n)
% thres_N :    variavel interna t. tensao (r_n)
% hmodl :      modulo de endurecimento/abrandamento
%
% SAIDA
% dmatx :      Nodulo Tangente
%-----
%
thre0=ftult/sqrt(young);
if (thres<=0)
    thres=thre0;
endif
%
% Verificacao do criterio de dano
%
dmatx=young*(1-damag)*(1-damat);
if (fload!=0)
    dmatx=young*((1-damag)-((thre0/thres)*(1/(1+hmodl))))*((1-damat)-
exp(hmodl*(1-thres/thre0))*(hmodl+thre0/thres));
endif
%
endfunction

```