



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.010/02

Modelos de Universo e Equação de Estado na Cosmologia

Rodrigo Rocha Cuzinatto

Orientador

Prof. Dr. Ruben Aldrovandi

Outubro de 2002

Dedicado à minha vovó Lídia

Os dois felizes

O moleque sai de casa descalço
para brincar no campinho do outro lado da rua.
No final da tarde, ele gira,
olhando para o céu azul e redondo sem núvens.
No chão, observa a Lua branca, clara,
dançando...
“Um dia vou lá.”

O garoto, hoje,
da mesa da sala,
vai além de galáxias,
à tempos remotos...
e quer explicar “por quês”.
Qual dos dois é mais ambicioso?
...mas a resposta também está lá em cima.

Agradecimentos

Aos meus amados pais José e Maria Rita e a minha irmã Fernanda.

Agradeço aos meus grandes amigos Cássius, Léo e Pegé, que caminharam comigo desde a graduação, e são os co-responsáveis pelas minhas vitórias. Ao CR, pela amizade e confiança.

Ao meu orientador, Prof. Ruben Aldrovandi, que me ensinou uma postura e dirigiu meus passos.

Ao Prof. Diógenes Galetti, pelas discussões frutíferas acerca do potencial nuclear.

Ao Cássius e ao Prof. Bruto Max Pimentel Escobar que me aproximaram do IFT e ao Prof. José Geraldo Pereira que possibilitou o contato com o Prof. Ruben. Agradeço ao Prof. Pimentel pela sua amizade.

À Prof. Márcia C. A. Fantini, minha orientadora durante a iniciação científica.

À Prof. Zara Issa Abud, por todo o apoio durante a graduação e pela professora excelente que é.

Aos colegas de sala Eduardo, Esdras e Lúcio, pelo companheirismo. Ao Paulo, à Hebe, ao Vagner e às pessoas que me ajudaram com o LaTeX.

Aos meus amigos da Massagem e do Tai Chi, que colocaram alguns referenciais na minha vida.

Aos amigos de República, Adriano, Beto, Binho, Diego, Rafael, pela convivência.

Ao IFT. Parabéns pelos seus 50 anos!

À FAPESP, pelo apoio financeiro (processo 00/08425-0).

Resumo

Neste trabalho fazemos uma revisão do modelo cosmológico padrão, o modelo de Friedmann, e estudamos o modelo de universo de de Sitter, que é o paradigma de uma expansão acelerada para o fator de escala cósmico – fato que caracteriza a Inflação e parece ocorrer hoje, segundo indicam observações recentes. Tendo em vista essas mesmas observações, que atribuem uma importância cabal à constante cosmológica como fonte da gravitação em escala cósmica, extendemos o modelo de Friedmann para incluir o termo Λ . A necessidade de entender o significado físico da constante cosmológica leva-nos a discutir o papel da pressão na cosmologia em contraponto com a pressão na mecânica estatística. Mostramos, ao final, um mecanismo para a geração de pressão negativa, o que pode ser equivalente à presença da constante cosmológica. Tal mecanismo é baseado na introdução de uma interação do tipo nuclear entre os constituintes do fluido que se supõe como conteúdo do cosmo. O tratamento que culmina na obtenção de uma equação $p(T)$ envolve a teoria das expansões em cluster e a do equilíbrio químico sob a hipótese de simetria entre matéria e antimatéria.

Palavras Chaves: soluções das equações de Friedmann; espaços-tempos de de Sitter; constante cosmológica; equação de estado na cosmologia.

Áreas do conhecimento: 1.05.01.03-7

Abstract

We make a review of the standard model of physical cosmology, the Friedmann model, and study the de Sitter's universe, which is the paradigm of an accelerated expansion of the cosmic scale factor – fact that characterizes the Inflation which seems to happen today, according to recent observations. Keeping in mind these observations, which give a major importance to the cosmological constant as the source of gravitation, we perform an extension of the Friedmann model to include the Λ -term. The will to understand the physical meaning of the cosmological constant leads us to discuss the role of pressure in cosmology in counterpoint to that of pressure in statistical mechanics. One shows, finally, a mechanism to the generation of negative pressure, which can be equivalent to the presence of Λ . This mechanism is based on the introduction of nuclear interactions among the constituents of the fluid which is supposed to fill the universe. The treatment by which we obtain an equation $p(T)$ involves the theory of cluster expansions and the theory of chemical equilibrium under the hypothesis of symmetry between matter and antimatter.

Índice

1	O Modelo Padrão da Cosmologia	1
1.1	Quadro Geral	2
1.2	Desvio para o Vermelho	5
1.3	Conexão com as Medidas Astrofísicas de Distâncias	7
1.4	O Fator de Escala	13
1.5	Dinâmicas de Friedmann	15
1.5.1	Modelo Dominado pela Matéria	18
1.5.2	Modelo Dominado Pela Radiação	22
1.5.3	Um Panorama da História Térmica e o Problema da Assimetria entre Matéria e Anti-matéria	25
1.5.4	Densidade de Energia no Universo em Expansão	27
2	Espaço-Tempo de de Sitter	29
2.1	Introdução	30
2.2	Abordagem Via Coordenadas Conformes	30
2.2.1	Equação da Geodésica para de Sitter	32
2.2.2	A Equação de Desvio da Geodésica	33
2.2.3	Inflação	35
2.2.4	Significado Físico de Λ	36
2.2.5	O Campo de Tetradas em de Sitter	37
2.3	A Abordagem Clássica Via Simetria Esférica	40
2.3.1	O Elemento de Linha Estático para Sistemas com Simetria Esférica	41
2.3.2	A Geometria do Universo de de Sitter	43
2.3.3	Ausência de Fontes ou Equação de Estado Exótica no Universo de de Sitter	46
2.3.4	O Comportamento de Partículas e Raios de Luz no Espaço de de Sitter	48

3	Extensões do Modelo Padrão	54
3.1	Os Modelos Vazios de Lemaître	54
3.2	Nova Condição Inicial nas Soluções de Referência	59
3.2.1	As Novas Equações da Era da Matéria	60
3.2.2	As Novas Equações da Era da Radiação	60
3.3	Solução Tipo Friedmann para o Modelo Dominado pela Matéria com $k = 0$ e $\Lambda \neq 0$	61
3.3.1	A Função $H(t)$	61
3.3.2	O Redshift em Função de $H(t)$	62
3.3.3	O Red-shif em Função do Tempo Cósmico t	63
3.3.4	O Fator de escala $a(t)$	63
3.4	Solução de Friedmann para o Modelo Dominado pela Radiação com $k \neq 0$ e $\Lambda = 0$	64
3.4.1	O Fator de Escala $a(t)$	64
3.4.2	O Red-shif em Função do Tempo Cósmico t	66
3.4.3	A Função $H(t)$	67
3.5	Solução Geral para um Universo Termalizado	68
4	A Equação de Estado na Cosmologia	71
4.1	A Pressão Volumétrica na Equação de van der Waals	71
4.2	A Pressão Interna em um Sistema com Interação	75
4.2.1	A Expansão em Cluster	75
4.2.2	A Integração Direta de Fowler	76
4.2.3	O Caráter de p no Método de Mayer	79
4.3	A Equação do Virial de um Sistema com Potencial Nuclear	81
4.3.1	O Potencial Nuclear	82
4.3.2	Equação $p(n, T)$	83
4.4	A Equação de Estado de um Sistema com Interação e o Modelo Cos- mológico	84
4.4.1	A Determinação de $n(T)$ pela Abordagem do Equilíbrio Químico na Produção de Pares	85
4.4.2	A Função Pressão $p(kT)$	86
4.4.3	Conclusões e Problemas do Modelo	88
5	Considerações Finais	90
	Referências	94

Capítulo 1

O Modelo Padrão da Cosmologia

A percepção da universalidade da interação gravitacional conduziu Albert Einstein ao princípio de equivalência e às equações da relatividade geral, no final de 1915. Estas equações significaram a geometrização da gravitação: duas massas não sofreriam mais a ação de uma força à distância, como havia proposto Newton. Agora, a presença de matéria (ou, segundo a relatividade restrita, de energia) curvaria o espaço-tempo, tornando a sua geometria diferente da Euclidiana. Essa sofisticação teórica constituiu uma reinterpretação da interação gravitacional, a qual se tornou compatível com a finitude da velocidade de transmissão de informações. Ademais, a relatividade geral pode explicar fenômenos como o avanço no periélio de Mercúrio, a deflexão gravitacional da luz, e o deslocamento de linhas espectrais originadas na superfície do Sol ou de outras estrelas [1].

Mas a aplicação mais ousada da teoria da gravitação de Einstein viria com a *cosmologia física*. Caso fôssemos capazes de modelar o conteúdo de matéria e energia de todo universo, poderíamos, resolvendo as equações da relatividade geral, determinar a geometria do cosmo e a sua dinâmica; poderíamos opinar com o apoio da ciência sobre questões fundamentais como: “Para onde vamos?”. Homens como W. de Sitter, A. Friedmann, Abbé G. Lemaître e o próprio Einstein seguiram esse programa – [2], [3], [4], [5], a ponto de em meados do século passado já termos formado o quadro do *Big Bang*. O modelo cosmológico dinâmico do *Big Bang* torna-se incontornável quando, através das contribuições de G. Gamow, R.A. Alpher, H.A. Bethe e R.C. Hermann – [6], [7] e [8], explica-se a nucleossíntese dos elementos leves no universo primordial e se faz a previsão do fundo de radiação em microondas observado por A.A. Penzias e R.W. Wilson em 1965 [9].

Apesar desse sucesso existem problemas que ainda motivam a pesquisa na área, como a necessidade de uma expansão inflacionária do fator de escala cósmico no período anterior à nucleossíntese e a justificativa teórica para a expansão acelerada do universo atual, observada hoje – [10], [11] e [12], e que reacende o problema da

constante cosmológica. É neste contexto que se insere o presente trabalho.

1.1 Quadro Geral

Um modelo de universo razoável deve ser consistente com as observações que, desde aquelas levadas a cabo por Hubble nas primeiras décadas do século passado, apontam para um cosmo não-estático e em expansão. As galáxias, tomadas como unidades básicas, estão se afastando espacialmente uma das outras à medida que o tempo evolui. Portanto, suas histórias podem ser adequadamente descritas por geodésicas que não se interceptam (caso contrário, haveria colisão entre galáxias) e, ademais, formam uma estrutura do tipo funil em um diagrama espaço-temporal*. Tal propriedade permite aos cosmólogos construir uma seqüência de superfícies do tipo espaço ortogonais às linhas de mundo das galáxias, definindo um tempo cósmico; cada seção espacial está associada a um único valor do parâmetro tempo. Este quadro ordenado compõe o *postulado de Weyl*: as linhas de mundo das galáxias designadas como observadores fundamentais formam um conjunto de geodésicas não-intersectantes ortogonais a uma série de superfícies do tipo espaço.

Um dado valor de $x^0 = \text{constante}$ localiza uma das hipersuperfícies do tipo espaço, e uma certa galáxia desta seção espacial, com sua própria geodésica, é encontrada fixando-se $x^i = \text{constante}$ ($i = 1, 2, 3$). Para um adequado tratamento matemático, fazemos a aproximação suave para um fluido contínuo de galáxias, embora na prática as galáxias formem um conjunto discreto. A ortogonalidade entre as linhas de mundo e as seções espaciais levam a $g_{0i} = 0$. O fato de que $x^i = \text{constante}$ satisfaz uma geodésica [14]

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (1.1)$$

com $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$, leva a

$$\Gamma^i_{00} = 0,$$

pois $\frac{dx^i}{ds} = 0$. Empregando o resultado $g_{0i} = 0$ e a expressão para a conexão em termos da métrica,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (1.2)$$

concluimos que

$$\partial_i g_{00} = 0,$$

*Existem casos de possíveis colisões entre galáxias apontados na referência [13], que são rejeitados pela maioria dos astrônomos.

ou seja, g_{00} depende apenas de x^0 . Essa dependência de g_{00} na coordenada x^0 pode ser eliminada pela redefinição do parâmetro temporal que ela representa, de maneira que é possível fazer, sem perda de generalidade, $g_{00} = 1$.[†]

O elemento de linha do universo não-estacionário toma, então, a forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \\ &= c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j. \end{aligned}$$

onde $x^0 = ct$. O tempo cósmico t é o tempo próprio medido a partir de qualquer galáxia, e com respeito ao qual todas as seções espaciais são superfícies de simultaneidade.

Para determinar os elementos g_{ij} do tensor métrico invocamos o *princípio cosmológico* ou *princípio de Copérnico*. Este estabelece que o universo é homogêneo e isotrópico para qualquer valor do tempo cósmico. Qual deveria ser a geometria de um universo com tais propriedades? Note-se que a pergunta diz respeito unicamente a seção espacial do universo. Três possibilidades se apresentam como resposta à pergunta. Uma superfície tri-dimensional S^3 de uma hiperesfera com curvatura positiva e representando um universo fechado apresenta as características requeridas. Um universo aberto homogêneo e isotrópico pode ser descrito por superfície tri-dimensional plana de curvatura nula e constante, ou por uma hiper-superfície hiperbólica de curvatura constante mas negativa. A constância da curvatura espacial é necessária porque, caso ela assim não o fosse, observadores em pontos diferentes reconheceriam o universo de maneira distinta, quebrando a homogeneidade.

Em coordenadas cartesianas uma superfície tri-dimensional de curvatura negativa constante, imersa em um espaço quadri-dimensional pseudo-Euclideano, tem a forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -a^2, \quad (1.3)$$

onde a é uma constante. Usando coordenadas intrínsecas à superfície, definidas por

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sinh \chi \cos \theta, \\ x_2 &= a \sinh \chi \sin \theta \cos \phi, \\ x_3 &= a \sinh \chi \sin \theta \sin \phi, \\ x_4 &= a \cosh \chi, \end{aligned} \quad (1.4)$$

[†]Empregaremos esse recurso de redefinição da coordenada temporal extensamente quando discutirmos o modelo de de Sitter no próximo capítulo e, então, o leitor tomará com naturalidade o fato de fazermos $g_{00} = 1$ aqui.

escrevemos as diferenciais de cada coordenada e, com elas,

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 = a^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] .$$

Fazendo ainda a substituição

$$r = \sinh \chi, \quad (1.5)$$

obtemos

$$d\sigma^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] . \quad (1.6)$$

Por outro lado, a equação para a superfície tri-dimensional de uma hiper-esfera quadri-dimencional de raio a , em coordenadas cartesianas é

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2 ,$$

análoga a equação (1.3) para a hiper-superfície hiperbólica. Usando as mesmas transformações de coordenadas (1.4) e (1.5) da superfície de curvatura negativa para o caso da de curvatura positiva, mas usando $\sin \chi$ ao invés de $\sinh \chi$, obtemos o elemento de linha espacial

$$d\sigma^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] , \quad (1.7)$$

idêntico, a menos de um sinal no denominador, a (1.6). Devido a essa semelhança podemos agregar os elementos de linha espaciais (1.6) e (1.7) de ambos os tipos de superfície em uma única expressão se definirmos o parâmetro de curvatura que distinguirá uma ou outra superfície. Temos:

$$d\sigma^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] , \quad (1.8)$$

onde $k = 1$ para a 3-superfície esférica e $k = -1$ para a 3-superfície hiperbólica.

Para descrever o caso de uma 3-superfície plana basta anular o parâmetro de curvatura, $k = 0$, em (1.8), o que equivale a escrever o elemento de linha Euclideano em coordenadas esféricas (com a dando a dimensão de comprimento à coordenada radial através do produto ar).

Ao escrevermos o intervalo quadrático global $ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2$ devemos notar que a pode, agora, depender do tempo cósmico. Isto acontece porque durante a determinação de $d\sigma^2$ fixamos t , tomando a superfície do tipo espaço associada a este valor fixado; quando consideramos a evolução temporal, vale uma expressão mais geral para ds^2 , aquela em que $a = a(t)$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] . \quad (1.9)$$

Este é o intervalo quadrático de Robertson-Walker, derivado nos anos 30 pelas duas pessoas que o nomeiam.

As coordenadas intrínsecas r , θ , ϕ são co-móveis no sentido que caminham com a expansão ditada pelo crescimento monotônico do fator de escala $a(t)$ com o tempo cósmico t . Elas localizam os observadores fundamentais, as galáxias, que tem posições fixas; o distanciamento galáctico mútuo é decorrente da evolução de $a(t)$. Todas essas conclusões decorrem da exigência das invariâncias do elemento de linha ds^2 com respeito a “quasi-translações” (homogeneidade) e rotações (isotropia)[‡].

Pela transformação da coordenada radial adimensional r segundo

$$r^2 = \frac{\bar{r}^2}{\mathcal{R}^2}$$

incluímos a dimensão de comprimento na nova coordenada $\bar{r}$. $\mathcal{R}$ pode ser tomado como o fator de escala $a(t)$ calculado para um valor fixo da coordenada temporal, $t = t_f$, tal que $a(t_f) \neq 0$. O elemento de linha (1.9) passa a

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{\mathcal{R}^2} \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k(\bar{r}^2/\mathcal{R}^2)} + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right].$$

Redefinindo o fator multiplicativo adimensional

$$\frac{a^2(t)}{\mathcal{R}^2} \equiv e^{g(t)}, \quad (1.10)$$

escrevemos o ds^2 numa forma conveniente para posterior compação com o elemento de linha que caracteriza o espaço-tempo de de Sitter,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{g(t)} \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k(\bar{r}^2/\mathcal{R}^2)} + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (1.11)$$

1.2 Desvio para o Vermelho

A fonte mais importante de informação a respeito de $a(t)$ advém das medidas do deslocamento em frequência sofrido pela radiação emitida por fontes distantes. Localizamos uma tal fonte pelas coordenadas r_1 , θ_1 , ϕ_1 enquanto atribuímos os valores $r = \theta = \phi = 0$ para a nossa posição. Se a onda eletromagnética é emitida no tempo t_1 e viaja até nós ao longo da direção $-r$, com θ e ϕ fixos, a sua equação de movimento é

$$0 = ds^2 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \quad (1.12)$$

[‡]Ver referência [15] à página 413.

(fizemos $c = 1$) e, portanto, a crista da onda nos alcançará no instante t_0 dado por

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = f(r_1) \quad (1.13)$$

onde

$$f(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \sin^{-1} r_1, & k = +1 \\ r_1, & k = 0 \\ \sinh^{-1} r_1, & k = -1 \end{cases}. \quad (1.14)$$

A próxima crista de onda que deixa r_1 no instante $t_1 + \delta t_1$ irá chegar aqui no tempo $t_0 + \delta t_0$, que é dado por uma relação análoga a (1.13):

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} = f(r_1), \quad (1.15)$$

$f(r_1)$ é independente do tempo pois as coordenadas r_1, θ_1, ϕ_1 são constantes. Subtraindo a eq. (1.13) da (1.15) e notando que $a(t)$ muda muito pouco no período típico de um sinal de luz, obtemos

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}$$

e, com isso, a frequência de emissão ν_1 fica relacionada a frequência ν_0 observada por

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad (1.16)$$

Definindo o *red-shift* z pelo acréscimo fracional no comprimento de onda,

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}, \quad (1.17)$$

e substituindo a relação $\lambda_0/\lambda_1 = \nu_1/\nu_0$ nesta equação, obtemos

$$z \equiv \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1, \quad (1.18)$$

com base em (1.16).

Note-se que $z > 0$ para $\lambda_0 > \lambda_1$ [ver igualdade (1.17)] e neste caso falamos de um deslocamento do comprimento de onda para o vermelho, *i.e.*, de um *red shift*; se $z < 0$, temos $\lambda_0 < \lambda_1$, e ocorre um deslocamento para o azul, ou *blue shift*. A eq. (1.18) permite concluir que, se o universo estiver se expandindo, então $a(t_0) > a(t_1)$ e resulta um red shift, enquanto que se o universo está se contraindo $a(t_0) < a(t_1)$ e temos um blue shift. Em 1929 Hubble sedimentou a idéia da preponderância de um red shift em todas as partes do céu, levando à conclusão de um universo em expansão.

1.3 Conexão com as Medidas Astrofísicas de Distâncias

Outras fontes de informação acerca do fator de escala são as relações entre a distância coordenada r_1 do objeto observado e as distâncias cosmológicas. Estas são de dois tipos: aquelas que funcionam para objetos relativamente próximos do sistema solar e as que são efetivas, pelo menos em princípio, a distâncias arbitrariamente grandes. Na primeira categoria enquadram-se a distância de paralaxe e a de movimento próprio; na segunda, incluímos as distâncias de luminosidade e de diâmetro angular.

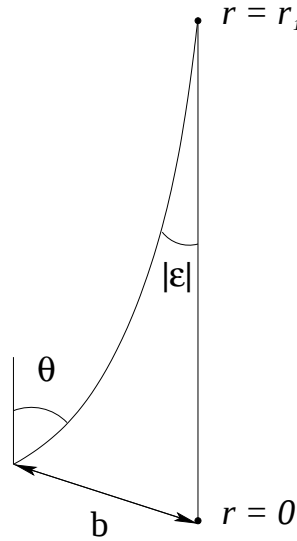


Figura 1.1: *Representação exagerada da curvatura da luz e dos ângulos usados no cálculo das paralaxes e distância de luminosidade.*

A *distância de paralaxe* é aquela obtida a partir da observação do deslocamento na posição aparente do objeto no céu devido ao movimento translacional da Terra em torno do Sol. Para determiná-la devemos, portanto, conhecer o comportamento dos caminhos dos raios luminosos que deixam a fonte em r_1 , θ_1 , ϕ_1 e passam próximos a nós (centro do sol ou centro do espelho do telescópio) na origem $r = 0$. Se a origem fosse fixada no sistema x'^μ centrado na fonte, então, a equação para o raio luminoso seria

$$\mathbf{x}'(\rho) = \mathbf{n}\rho, \quad (1.19)$$

onde $\mathbf{n}$ é um versor fixo que determina a direção do caminho, ρ é um parâmetro que identifica as posições ao longo da curva, e $\mathbf{x}'$ é um tri-vetor composto pelas

coordenadas co-móveis r', θ', ϕ' . A transformação do sistema de coordenadas x'^μ para um sistema em que a fonte é localizada por $\mathbf{x}_1$ (translação da origem até o observador) é obtida pela fórmula das quasi-translações[§]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}_1 \left((1 - k\mathbf{x}'^2)^{1/2} - \left\{ 1 - (1 - k\mathbf{x}_1^2)^{1/2} \right\} \frac{(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}_1)}{\mathbf{x}_1^2} \right). \quad (1.20)$$

Como o raio de luz é suposto passar próximo do ponto de observação, o vetor unitário $\mathbf{n}$ deve apontar em uma direção próxima a de $-\mathbf{x}_1$, qual seja

$$\mathbf{n} \simeq -\hat{\mathbf{x}}_1 + \varepsilon, \quad (1.21)$$

onde ε é um vetor muito pequeno na direção perpendicular à do versor $\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1/|\mathbf{x}_1| = \mathbf{x}_1/r_1$. Lembrar que $|\varepsilon|$ é o valor do ângulo entre a direção $-\hat{\mathbf{x}}_1$ da fonte e o caminho de luz desde o referencial x'^μ . O caminho do raio de luz é obtido substituindo as equações (1.19) e (1.21) na expressão (1.20) e desprezando termos de ordem ε^2 . Temos:

$$\mathbf{x}(\rho) \simeq -\hat{\mathbf{x}}_1 \left[\rho (1 - kr_1^2)^{1/2} - r_1 (1 - k\rho^2)^{1/2} \right] + \varepsilon\rho. \quad (1.22)$$

O raio de luz passa próximo à origem no instante t_0 para um valor $\rho \simeq r_1$ do parâmetro de distância. A distância própria da origem até este ponto de máxima aproximação é o parâmetro de impacto b dado pelo produto do ângulo $|\varepsilon|$ pela distância até a fonte:

$$b \simeq a(t_0) r_1 |\varepsilon|, \quad (1.23)$$

onde $a(t_0)$ aparece para dar a dimensão de comprimento necessária.

A direção do raio de luz próximo à origem é

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\rho}(r_1) \simeq \varepsilon - (1 - kr_1^2)^{-1/2} \hat{\mathbf{x}}_1,$$

e a direção de visada é um versor na direção contrária,

$$\hat{u} \simeq - (1 - kr_1^2)^{1/2} \frac{d\mathbf{x}}{d\rho}(r_1) = \hat{\mathbf{x}}_1 - (1 - kr_1^2)^{1/2} \varepsilon. \quad (1.24)$$

O ângulo θ entre a linha de visada real $\hat{u}$ e a linha de visada $\hat{x}_1$ que seria observada a partir da origem vale

$$\theta \simeq |\hat{u} - \hat{x}_1| \simeq (1 - kr_1^2)^{1/2} |\varepsilon| \simeq (1 - kr_1^2)^{1/2} \frac{b}{a(t_0) r_1}, \quad (1.25)$$

[§]Ver referência [15] à página 218, e também o Capítulo 13 do mesmo livro.

onde usamos a eq. (1.23). A paralaxe astronômica leva em conta medidas da direção do caminho do raio de luz como função do parâmetro de impacto, identificado com a projeção da distância Terra-Sol no plano perpendicular à linha de visada. Importamos, agora, a definição da distância de paralaxe da geometria euclideana, $d_p \equiv \frac{b}{\theta}$ (construído com o resultado $b = \theta d$), para obter

$$d_p = a(t_0) \frac{r_1}{(1 - k r_1^2)^{1/2}}. \quad (1.26)$$

Uma nova medida de distância, a *distância de luminosidade*, é encontrada considerando um telescópio, cujo centro do espelho corresponde à origem do sistema de coordenadas e cuja normal neste ponto tenha a direção da linha de visada $\hat{\mathbf{x}}_1$ até a fonte. Neste caso, o parâmetro de impacto corresponde ao raio do telescópio e a trajetória dos raios luminosos que atingem a borda do espelho formam um cone de meio ângulo $|\varepsilon|$ no referencial da fonte. Forma-se, assim, um ângulo sólido de valor

$$\pi |\varepsilon|^2 = \frac{\pi b^2}{a^2(t_0) r_1^2}.$$

Supomos que a radiação seja emitida de maneira isotrópica pela fonte. Os fótons que atingirem o espelho caminharão necessariamente no interior do ângulo $\pi |\varepsilon|^2$ que representa uma fração

$$\frac{|\varepsilon|^2}{4} = \frac{\pi b^2}{4\pi a^2(t_0) r_1^2}$$

do ângulo sólido total de valor 4π .

Chamemos de luminosidade absoluta L a potência total, energia por unidade de tempo, emitida pela fonte. Ao escrever a potência total P coletada pelo espelho, devemos levar em conta que (i) somente os fótons dentro de $|\varepsilon|^2/4$ atingirão a área πb^2 do telescópio; (ii) os fótons emitidos com energia $h\nu_1$ chegarão à origem com energia $h\nu_1 a(t_1)/a(t_0)$, em conformidade com (1.16); e, (iii) fótons emitidos no intervalo de tempo δt_1 serão medidos com um intervalo de $\delta t_1 a(t_0)/a(t_1)$. Dessa forma,

$$P = L \left(\frac{a(t_1)}{a(t_0)} \right)^2 \frac{|\varepsilon|^2}{4}$$

e a potência por unidade de área do espelho é

$$l \equiv \frac{P}{\pi b^2} = \frac{L a^2(t_1)}{4\pi a^4(t_0) r_1^2}. \quad (1.27)$$

A quantidade l é denominada luminosidade aparente. A uma distância d da fonte, e num espaço euclidiano, esta luminosidade é calculada pela razão $L/4\pi d^2$, o que nos leva a definir a distância de luminosidade como

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2}, \quad (1.28)$$

que com a utilização de (1.28) leva a

$$d_L = a^2(t_0) \frac{r_1}{a(t_1)}. \quad (1.29)$$

Podemos escrever (1.28) na forma

$$d_L = 10^{1+(m-M)/5} pc \quad (1.30)$$

onde $1 pc = 3,3 \text{ ano-luz}$, e m e M são as magnitudes bolométricas aparente e absoluta definidas através das relações $l = 10^{-2m/5} \times 2,52 \times 10^{-5} \text{ erg/s cm}^2$ e $L = 10^{-2M/5} \times 3,02 \times 10^{35} \text{ erg/s}$.

Suponhamos que a fonte de luz localizada por $r = r_1$ e $t = t_1$ tenha um diâmetro angular próprio D . Digamos que um observador situado em $r = 0$ a $t = t_0$ perceba esta fonte subendendida por um ângulo δ .

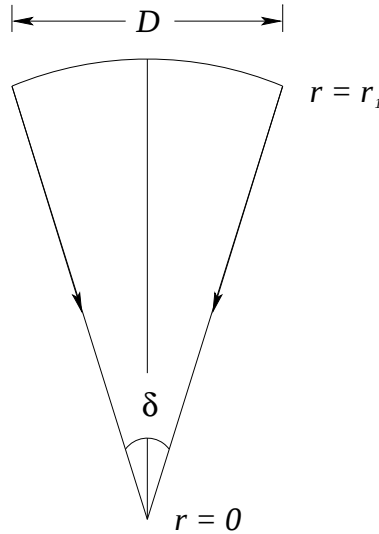


Figura 1.2: *Quantidades empregadas no cálculo da distância de diâmetro angular.*

Na geometria euclidiana calcularíamos a distância d até a fonte pela relação $D = \delta d$, o que nos induz a definir a *distância de diâmetro angular* como

$$d_A = \frac{D}{\delta}. \quad (1.31)$$

É também com base na geometria euclideana que escrevemos o arco D como o produto do ângulo δ pela distância até a fonte no instante da emissão $a(t_1) r_1$ (o fator de escala aparece para dar dimensão à distância pois r_1 é adimensional). Logo, $D = a(t_1) r_1 \delta$ e

$$d_A = a(t_1) r_1. \quad (1.32)$$

Por considerações geométricas acerca do movimento transversal da fonte com relação à linha de visada, encontramos a *distância de movimento próprio*:

$$d_M = a(t_0) r_1. \quad (1.33)$$

Usando a expressão (1.18) para o red-shift conjuntamente para as eqs. (1.29), (1.32) e (1.33) estabelecemos as relações

$$\frac{d_A}{d_L} = (1 + z)^{-2}, \quad (1.34)$$

$$\frac{d_M}{d_L} = (1 + z)^{-1}, \quad (1.35)$$

as quais nos informam que, para pequenas distâncias, $z \ll 1$, deve haver uma identificação nas distâncias envolvidas. Nesta situação, a equivalência também deve se estabelecer para d_P e as demais distâncias.

Alguns poucos milhares de estrelas são próximas o suficiente da Terra para se encontrar suas distâncias d_P através do método de paralaxe descrito anteriormente. Podemos, também, nos utilizar de observações do movimento próprio de aglomerados próximos para a determinação de sua distância d_M ; para isso precisamos conhecer a velocidade radial do aglomerado, bem como a sua velocidade transversal à linha de visada, e ainda obtermos uma estatística da distribuição angular ϕ (ângulo entre a velocidade das estrelas e a linha de visada) para os componentes do aglomerado. Esses *métodos cinemáticos* são efetivos para a localização de objetos distâtes algumas centenas de parsecs. Além desse limite, os movimentos próprios de aglomerados ou o deslocamento aparente de estrelas contra o fundo celeste quando da translação da Terra passam a ser imperceptíveis e outro método de medida de distância deve ser empregado.

A eq. (1.28) informa que se conhecermos a luminosidade absoluta L da fonte e medirmos a luminosidade aparente l da mesma, calculamos a distância d_L até ela. A grande dificuldade é determinar L . Para as fontes próximas, porém, podemos obter

L procedendo da seguinte maneira: obtemos a distância d_P ou d_M das estrelas, e a identificamos com d_L em conformidade com a equação (1.35) e o comentário subsequente a elas; medimos a luminosidade l das fontes; usamos d_L e l para obter L . Foi realizando esse procedimento que Hertzsprung e Russell descobriram existir uma relação entre a luminosidade absoluta, recém calculada, e o tipo espectral da fonte observada. Construíram, então, um gráfico de L como função do tipo espectral e passaram a usá-lo como padrão. Identificando o tipo espectral de estrelas distâtes, lê-se a luminosidade absoluta no gráfico de calibração, e obtém-se sua distância. As estrelas da seqüência principal, aquelas que têm o tipo espectral catalogado e estão no estado intermediário de sua evolução, não são particularmente brilhantes, por isso, este método de *fotometria da seqüência principal* funciona para distâncias de até cerca de $10^5 pc$.

Para a escala de distâncias extragaláticas, o método de medida adequado é o que emprega *estrelas variáveis*, cuja magnitude varia no tempo. Empregam-se dois tipos de estrelas dessa categoria: as *RR Lyrae* e as *Cefeidas clássicas*. As RR Lyrae são estrelas antigas de baixo conteúdo metálico e com períodos que variam de algumas horas a um dia; têm aproximadamente a mesma magnitude absoluta. Esta última conclusão decorre de estudos estatísticos do movimento próprio e de paralaxe de exemplares próximos a nós – daí já temos uma idéia da interdependência dos métodos de determinação de distâncias: um erro nos métodos cinemáticos contamina irremediavelmente as demais escalas. Uma vez identificada uma estrela RR Lyrae pelo seu curto período de pulsação, usamos sua conhecida L para, com a l medida, estimar sua distância. Estas estrelas variáveis não são visíveis além de $3 \times 10^5 pc$ e, então entram em cena as Cefeidas clássicas, uma categoria muito mais brilhante. O problema das Cefeidas é o fato de sua luminosidade variar amplamente; só encontramos L com o auxílio de uma curva de calibração relacionando o período de pulsação observado e a luminosidade absoluta. As Cefeidas têm brilho suficiente, no momento de luz máxima, para que possam ser identificadas a distâncias de $4 \times 10^6 pc$, correspondentes ao grupo local de galáxias.

O degrau seguinte na ladeira de distâncias cósmicas é construído com a escolha de uma nova “vela padrão” (indicador de distância) que seja mais brilhante que as Cefeidas; tais objetos precisam ser numerosos em nosso grupo local o suficiente para permitir uma calibração. *Novas, Estrelas Mais Brilhantes, e Aglomerados Globulares* são exemplos desses indicadores, que nos levam a distâncias $\lesssim 3 \times 10^7 pc$. Notou-se que as estrelas mais brilhantes de várias galáxias do grupo local possuíam aproximadamente a mesma luminosidade absoluta. Adotando o princípio de que as estrelas mais brilhantes de outras galáxias também possuam o mesmo valor de L , encontramos um meio de determinar as distâncias das galáxias em que ainda se

pode assegurar que os objetos mais brilhantes são estrelas e não aglomerados delas. O raciocínio é análogo para o caso das Novas e dos aglomerados globulares, assim como para o próximo e último degrau, que emprega *Galáxias Mais Brilhantes* para determinar distância de aglomerados de galáxias, alcançando distâncias de $10^{10}pc$.

1.4 O Fator de Escala

Veremos, agora, o que podemos aprender acerca do fator de escala $a(t)$ quando estabelecemos uma relação entre o red-shift e as distâncias. Usaremos a distância de luminosidade em nossas futuras considerações (já que nenhuma informação adicional é fornecida pelos demais tipos). Sabemos que d_L é melhor determinado para objetos relativamente próximos, com z pequeno, e portanto $t_1 - t_0$ e r_1 também pequenos. Com isso em mente, fazemos uma expansão em série do fator de escala em torno do tempo t_0 de recepção do sinal luminoso:

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{[n]}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n = \\ &= a(t_0) \left[1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} (t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)} (t - t_0)^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Definindo a constante de Hubble

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \quad (1.36)$$

e o parâmetro de desaceleração

$$q_0 = -\ddot{a}(t_0) \frac{a(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}, \quad (1.37)$$

temos

$$a(t) = a(t_0) \left[1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right]. \quad (1.38)$$

Substituindo este resultado na eq. (1.18) para o red-shift obtemos:

$$z = H_0 (t_0 - t_1) + \left(1 + \frac{1}{2} q_0 \right) H_0^2 (t_0 - t_1)^2 + \dots$$

Inverte-se esta série de potências para obter o tempo em termos do red-shift:

$$(t_0 - t_1) = \frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{1}{2} q_0 \right) z^2 + \dots \right]. \quad (1.39)$$

Retomemos a equação (1.13), colocando nela a expansão (1.38). Aproximemos também o valor de $f(r_1)$ para que resulte o seguinte:

$$r_1 = \frac{1}{a(t_0)} \left[(t_0 - t_1) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t_1)^2 + \dots \right].$$

Usando (1.39) nesta equação, vem

$$r_1 = \frac{1}{a(t_0) H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right],$$

e a relação da distância de luminosidade (1.29),

$$d_L = r_1 \frac{a^2(t_0)}{a(t_1)} = r_1 a(t_0) (1 + z), \quad (1.40)$$

fica reescrita na forma

$$d_L = H_0^{-1} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right]. \quad (1.41)$$

As informações acerca de $a(t)$ estão contidas nas constantes H_0 e q_0 , determinadas da equação (1.41) depois que se constrói a curva $d_L(z)$ a partir das medidas de distâncias e do red-shift. Os valores do red-shift devem ser grandes o suficiente para que a velocidade radial do objeto reflita a expansão geral do universo e não uma velocidade anômala local; $z \gtrsim 0,01$ é um valor bom para a determinação de H_0 . Entretanto, para que o termo em z^2 na eq. (1.41) seja importante e possamos calcular q_0 , devemos medir objetos com $z \gtrsim 0,1$. Então, uma estimativa confiável de H_0 e q_0 é feita somente com o uso de todos os cinco degraus da ladeira de distâncias cósmicas, estando, portanto, sujeita a grandes erros. As estimativas atuais fixam o valor da constante de Hubble em

$$H_0 = 100 \, h \, \text{km} \, \text{s}^{-1} \, \text{Mpc}^{-1} = 3,24 \times 10^{-18} \, h \, \text{s}^{-1} \quad (1.42)$$

onde o parâmetro h dá conta das incertezas nas medidas atuais e assume valores no intervalo $0,45 \leq h \leq 1$. O valor atribuído para o parâmetro de desaceleração é $q_0 \approx 1$,[¶] mas as incertezas neste valor são enormes porque se percebeu que a evolução galáctica afeta as observações, e este fato deve ser considerado em adição às dificuldades já existentes; não há, porém, uma teoria de evolução galáctica satisfatória a ser empregada.

A despeito de todas essas dificuldades, suponhamos que fosse possível determinar exatamente a curva $d_L(z)$. O conhecimento de $d_L(z)$ levaria a determinação

[¶]Segundo um estudo de Gurvits (1994), citado na referência [16], o parâmetro de desaceleração vale $q_0 = 0,16 \pm 0,71$.

unívoca de $a(t)$ e k ? Vejamos. Da equação de movimento (1.12) para uma onda eletromagnética que viaja até nós, encontramos a equação diferencial

$$-\frac{1}{a(t_1)} \frac{dt_1}{dz} = (1 - kr_1^2)^{-1/2} \frac{dr_1}{dz},$$

com a condição inicial que $t_1 = t_0$ para $r_1 = 0$. Utilizamos as eqs. (1.18) e (1.40) para eliminar as incógnitas r_1 e $a(t_1)$ da eq. diferencial e calculamos t_1 por integração simples:

$$\begin{aligned} t_1(z) &= t_0 - \int_0^z (1+z')^{-1} \left[1 - ka^{-2}(t_0)(1+z')^{-1} d_L^2(z) \right]^{-1/2} \times \\ &\quad \times \frac{d}{dz'} \left[(1+z')^{-1} d_L(z') \right] dz', \end{aligned}$$

e a função $a(t)$ é determinada pela solução da equação funcional

$$\begin{aligned} t(z) &= t_0 - \int_0^{a(t_0)/a(t)-1} (1+z)^{-1} \left[1 - ka^{-2}(t_0)(1+z)^{-1} d_L^2(z) \right]^{-1/2} \times \\ &\quad \times \frac{d}{dz} \left[(1+z)^{-1} d_L(z) \right] dz. \end{aligned}$$

Este processo dará uma solução para quaisquer valores assumidos pelas constantes k , $a(t)$, e t_0 . Então, não há como medidas de distâncias de luminosidade e redshifts determinarem k ou $a(t)$, a menos que, além do elemento de linha ds^2 de Robertson-Walker, consideremos equações dinâmicas para o fator de escala.

1.5 Dinâmicas de Friedmann

As equações dinâmicas para o fator de escala são obtidas com o tensor métrico extraído de ds^2 , e as equações de campo de Einstein [17],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.43)$$

depois que consideramos o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ do universo como sendo o que descreve o conteúdo energético de um fluido homogêneo e isotrópico^{||},

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} \quad (1.44)$$

^{||}Isto é consistente com a geometria de um universo descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Para uma dedução do tensor energia-momento ver, por exemplo, referência [15], págs. 47-48.

onde p e ρ são a pressão e a densidade de matéria do fluido, respectivamente; u_μ é a quadri-velocidade de um elemento do fluido (em um referencial co-móvel, em que o sistema de réguas e relógios acompanha o movimento do fluido, $u_\mu = \delta_0^\mu$). As componentes do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ são calculadas através das conexões de Levi-Civita, as quais são obtidas pela métrica $g_{\mu\nu}$. De fato, conforme a eq. (1.2),

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}),$$

e

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\sigma{}_{\lambda\sigma} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\lambda\nu} \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}. \quad (1.45)$$

Substituindo

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1, \\ g_{11} &= -a^2 (1 - kr^2)^{-1}, \\ g_{22} &= -a^2 r^2, \\ g_{33} &= -a^2 r^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (1.46)$$

em que

$$\begin{aligned} x^0 &= ct, \\ x^1 &= r, \\ x^2 &= \theta, \\ x^3 &= \phi, \end{aligned} \quad (1.47)$$

nas eqs. (1.44), (1.2), e (1.45), somos levados a

$$\dot{a}^2 = \left[2 \left(\frac{4\pi G}{3} \right) \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} \right] a^2 - kc^2, \quad (1.48)$$

$$\ddot{a} = \left[\frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \right] a, \quad (1.49)$$

que são as duas equações de Friedmann para $a(t)$. Combinando ambas as equações obtemos a relação

$$\frac{d\rho}{dt} = -3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right), \quad (1.50)$$

que reflete a conservação covariante do tensor energia-momento, e é equivalente a

$$\frac{d}{da} (\varepsilon a^3) = -3pa^2, \quad (1.51)$$

obtida diretamente de $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Em (1.51) a quantidade $\varepsilon = \rho c^2$ é a densidade de energia, a qual em unidades naturais fica identificada com a densidade equivalente em massa ρ .

As equações da dinâmica de Friedmann podem ser expressas em termos da função de Hubble, definida em analogia a (1.36) –

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (1.52)$$

assumindo a forma

$$H^2 = 2 \left(\frac{4\pi G}{3} \right) \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (1.53)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) + \frac{kc^2}{a^2}, \quad (1.54)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right). \quad (1.55)$$

Introduzimos a nova definição

$$\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (1.56)$$

cujo significado ficará claro na próxima seção, e extraímos de (1.53) o resultado

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{crit}} - \frac{kc^2}{a^2 H_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} = \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda, \quad (1.57)$$

vinculando o valor atual ($t = t_0$) das novas funções

$$\Omega_{m0} + \Omega_{k0} + \Omega_\Lambda = 1, \quad (1.58)$$

definidas por $\Omega_m \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}}$, $\Omega_k \equiv -\frac{kc^2}{a^2 H_0^2}$ e $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$.

Dois comentários: se quisermos considerar bárions e radiação como os componentes do conteúdo total da fonte da gravitação no modelo, então devemos tomar $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_\gamma$; existem evidências atuais em favor de um valor grande de Ω_Λ e um pequeno valor para $\Omega_{k0} = -\frac{kc^2}{a_0^2 H_0^2}$, e é justamente (1.58) que aparece nos resultados recentes [10], [11], [12].

1.5.1 Modelo Dominado pela Matéria

Vamos estudar um *universo dominado pela matéria*, e neste processo consideraremos $\Lambda = 0$, *i.e.*, tomaremos o Modelo Puro de Friedmann. De acordo com as observações, nos tempos atuais a matéria domina sobre a radiação (o que será justificado na seção 1.5.2, eq. (1.81) e comentários seguintes), e podemos escrever $\Omega_m = \Omega_b$.

A equação de estado para a matéria é aquela de um gás ideal, $p = nkT$. Acontece que, no regime não-relativístico para os nucleons, a pressão é sempre desprezível em comparação com a densidade: $(\rho + \frac{p}{c^2}) = \frac{n}{c^2}(mc^2 + kT) \simeq \rho$, pois $mc^2 \gg kT$. Colocando $p = 0$ na igualdade (1.51), e também $c = 1$, resulta

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3, \quad (1.59)$$

onde a_0 e ρ_0 são os valores atuais do fator de escala e da densidade, duas constantes. Equivalentemente, usando a definição de red-shift (1.18),

$$\rho = \rho_0 (1 + z)^3. \quad (1.60)$$

Perceba-se que a igualdade acima foi obtida sem que tivéssemos imposto $\Lambda = 0$ ou $k = 0$, a única restrição recai sobre o conteúdo dominante no modelo; tendo estabelecido esse vínculo, o resultado segue diretamente da conservação do tensor energia momento.

Escrevemos a densidade bariônica atual ρ_0 , ou ρ_{b0} , em função da densidade crítica,

$$\rho_0 = \rho_{b0} = \Omega_{b0} \rho_{crit}. \quad (1.61)$$

Nesta equação, aparece a quantidade Ω_{b0} , introduzida como constante de proporcionalidade entre ρ_{b0} e ρ_{crit} , e que tem a função de quantificar a diferença entre densidade atual e a densidade crítica. Dados observacionais dão

$$0,0052 \leq \Omega_{b0} \leq 0,026 \quad (1.62)$$

para a matéria em objetos visíveis. Existem fortes evidências para matéria invisível, chamada “matéria escura”. Sua contribuição como fonte de gravitação é indicada por um parâmetro Ω_{me} (por analogia a Ω_{b0}), e vale $\approx 0,3$ se tanto. De qualquer forma, $\Omega_m = \Omega_{b0} + \Omega_{\gamma 0} + \Omega_{me}$ parece ser insuficiente para fechar o universo, no sentido definido abaixo.

Ao fixarmos $\Lambda = 0$ na eq. (1.48), somos levados a

$$\dot{a}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_0 a_0^3}{a^3} a^2, \quad (1.63)$$

onde usamos (1.59). Reescrevemos esta equação na forma

$$\frac{k}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \frac{a_0}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a_0^2},$$

que para valores atuais ($t = t_0$) resulta em

$$\frac{k}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_0 - \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \right).$$

Se empregarmos a definição da densidade crítica para o universo, eq. (1.56), obteremos uma equação que permite determinar o tipo de hipersuperfície associada ao universo (conheceremos o sinal de k) a partir do seu conteúdo em massa:

$$\frac{k}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_0 - \rho_{crit}). \quad (1.64)$$

A segunda equação de Friedmann (1.49), calculada em $t = t_0$, leva ao parâmetro de desaceleração atual q_0 [ver eq. (1.37)] em função das densidades atual e crítica:

$$q_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_{crit}} = \frac{1}{2} \Omega_{b0}. \quad (1.65)$$

Das relações (1.56), (1.64) e (1.65) concluímos que basta medirmos H_0 e q_0 (ou Ω_{b0}) para decidirmos o destino do cosmo. H_0 determina ρ_{crit} e, com ρ_{crit} e q_0 , encontramos ρ_0 ; daí afirmamos:

- $k > 0$ para $\rho_0 > \rho_{crit}$, o que nos leva a $k = +1$, e ao modelo fechado;
- $k = 0$ para $\rho_0 = \rho_{crit}$, e temos o modelo plano;
- $k < 0$ para $\rho_0 < \rho_{crit}$, e estamos num universo aberto.

Analisemos a dinâmica de cada um desses possíveis universos, retomando a eq. (1.63). Em cada um dos casos precisaremos resolver uma equação diferencial de primeira ordem, e, portanto, teremos de adotar uma condição inicial. Seguiremos o padrão, que é admitir o *Big Bang*, *i.e.*, no instante inicial $t = 0$ o fator de escala se anula, $a(t = 0) = 0$.

O Modelo Fechado ($k = +1$, $q_0 > \frac{1}{2}$, $\rho_0 > \rho_{crit}$)

Fazendo $k = +1$ na relação (1.63), e usando a definição

$$A^2 \equiv \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^3 \quad (A > 0) \quad (1.66)$$

na mesma, obtemos a equação diferencial

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{A^2 - a}{a} \right)^{1/2}.$$

A substituição de variável $a = A^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}$ permite a integração da equação diferencial, resultando

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} A^2 (\psi - \sin \psi); \\ a &= \frac{1}{2} A^2 (1 - \cos \psi), \end{aligned} \tag{1.67}$$

e essas duas equações dão $a(t)$ via o parâmetro ψ . O gráfico de $a(t)$ é a cicloide. Esse modelo parte de $a = 0$ em $t = 0$, expande-se até um valor máximo de a , correspondente a $\psi = \pi$, igual a

$$a_m = \frac{2q_0}{H_0 (2q_0 - 1)^{3/2}}$$

no instante

$$t_m = \frac{\pi q_0}{H_0 (2q_0 - 1)^{3/2}},$$

e retorna à singularidade para $\psi = 2\pi$ em $t = 2t_m$.

Entendemos agora o significado de ρ_{crit} . Esta quantidade representa a quantidade de energia (ou seu equivalente em massa) necessária para fechar o universo, no sentido que um valor de densidade maior do que ρ_{crit} torna eficaz o modelo que interrompe a expansão, limitando a um valor máximo o volume possível para o modelo.

O Modelo Plano ou de Einstein-de Sitter ($k = 0$, $q_0 = \frac{1}{2}$, $\rho_0 = \rho_{crit}$)

Parâmetro de Escala Tomando $k = 0$ e empregando a definição (1.66) na equação diferencial (1.63) resulta:

$$a = \left(\frac{3}{2} A t \right)^{2/3}.$$

Porém, calculando (1.63), em $t = t_0$, obtemos:

$$\dot{a}_0^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^2,$$

ou seja,

$$A = a_0^{3/2} H_0.$$

Então,

$$a(t) = a_0 \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (1.68)$$

Perceba-se que o fator de escala cresce indefinidamente com o tempo cósmico, $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \infty$, e a velocidade de expansão tende assintoticamente a zero, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{da}{dt}(t) = 0$. A idade do universo fornecida por este modelo é obtida tomando $a(t) = a_0$ em (1.68):

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} = 6,531 \times 10^9 \text{ h}^{-1} \text{ anos}, \quad (1.69)$$

para o valor de H_0 dado acima.

Do Red-Shift e da Densidade Bariônica De (1.57) com $\Lambda = k = 0$, resulta a densidade de matéria

$$\rho_b = \rho_{crit} \frac{H^2}{H_0^2} = \rho_{crit} (1+z)^3, \quad (1.70)$$

tendo sido usada a eq. (1.18) que estabelecer a relação entre o fator de escala e o red-shift e a solução (1.68) para o fator de escala do modelo particular em questão.

A equação acima é consistente com o resultado (1.60) [e (1.61)], que segue imediatamente à partir da conservação de $T^{\mu\nu}$ (1.51), desde que $\rho_0 = \rho_{crit}$. Isso significaria tomar $\Omega_{b0} = 1$, o que dedutível da equação de vínculo $\Omega_{b0} + \Omega_{\gamma 0} + \Omega_{k0} + \Omega_{\Lambda} = 1$ [eq. (1.58)], ao fazermos $\Omega_{\gamma 0} = \Omega_{k0} = \Omega_{\Lambda} = 0$ consoante as suposições do modelo. Tendo em mente esta observação, vamos optar por manter Ω_{b0} nas equações que vão se seguir, tomando o formato padrão de (1.60).

O valor atual para a função de Hubble – $H_0 = 100 \text{ h km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 3,24 \times 10^{-18} \text{ h s}^{-1}$ – leva, de acordo com (1.56), a $\rho_{crit} = 1,88 \times 10^{-26} h^2 \text{ kg m}^{-3}$, e ao valor numérico de (1.70) em função de z :

$$\rho_b = 1,878 \times 10^{-26} \Omega_{b0} h^2 (1+z)^3 \text{ kg m}^{-3}. \quad (1.71)$$

A concentração de bárions é obtida dividindo-se (1.71) pela massa do proton e vale

$$n_b = 11,2 \Omega_{b0} h^2 (1+z)^3 \text{ m}^{-3}. \quad (1.72)$$

Outros resultados deste modelo são aqueles que relacionam a função de Hubble e o tempo cósmico,

$$H(t) = \frac{2}{3t}, \quad (1.73)$$

o qual segue de (1.52) e (1.68), e o tempo t com o red-shift

$$t = \frac{2}{3H_0(1+z)^{3/2}}, \quad (1.74)$$

que segue de (1.18) e (1.52).

O Modelo Aberto ($k = -1$, $q_0 < \frac{1}{2}$, $\rho_0 < \rho_{crit}$)

Novamente com o auxílio de (1.63) e (1.66), escrevemos

$$\frac{da}{dt} = \left(\frac{A^2 + a}{a} \right)^{1/2},$$

que resolvemos com a parametrização $a \equiv A^2 \sinh^2(\psi/2)$. O resultado é:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2}A^2 (\sinh \psi - \psi); \\ a &= \frac{1}{2}A^2 (1 - \cos \psi), \end{aligned} \quad (1.75)$$

e temos $a(t)$ via o parâmetro ψ . O modelo leva à singularidade inicial,

$$\psi = 0 \implies t = 0 \implies a(t=0) = 0,$$

conforme o esperado, e implica uma expansão,

$$\psi \rightarrow \infty \implies t \rightarrow \infty \implies \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \infty,$$

cujas velocidade tende a um valor constante:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{da}{dt} = 1.$$

1.5.2 Modelo Dominado Pela Radiação

Da Temperatura e da Densidade

Um *universo dominado pela radiação*, *i.e.*, por partículas relativísticas como fótons, apresentará uma equação de estado $p = \varepsilon_\gamma/3 = \rho_\gamma c^2/3$ [18] e, portanto, uma dinâmica diferente dos modelos acima. Escrevemos aqui $\Omega_m = \Omega_\gamma$, desprezando a matéria.

A teoria da radiação de corpo negro estabelece uma relação entre a energia média por fóton e a temperatura,

$$\langle h\nu \rangle = k_B T,$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Para fótons, a temperatura T se comporta como uma frequência ν , e usando este fato, reescrevemos o red-shift (1.17) na forma

$$T_\gamma = T_{\gamma 0} (1 + z). \quad (1.76)$$

A energia estimada para cada fóton é encontrada justamente por esta expressão, quando se substitui $k_B T_{\gamma 0} = 2,3 \times 10^{-4} eV$,

$$k_B T_\gamma = k_B T_{\gamma 0} (1 + z) = 2,32 \times 10^{-10} (1 + z) MeV. \quad (1.77)$$

A recombinação do hidrogênio (evento em que próton e elétron, antes livres, agregam-se para formar o átomo H) acontece à temperatura $T_\gamma = T_b = 3000 K$. Supõe-se que matéria e energia estejam em equilíbrio térmico devido ao pequeno caminho livre médio dos fótons. Isto, com o valor atual $T_{\gamma 0} = 2,7 K$ medido para a radiação de fundo, significa $z \simeq 1100$.

A equação de estado para a radiação de fundo [18]

$$\varepsilon_\gamma = \frac{48\pi}{(hc)^3} \zeta(4) (k_B T)^4,$$

juntamente com a definição (1.56) e a relação (1.76) levam a

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho_{crit}} = \Omega_{\gamma 0} (1 + z)^4, \quad (1.78)$$

onde $\Omega_{\gamma 0}$ é a quantidade adimensional

$$\Omega_{\gamma 0} \equiv 128 \zeta(4) \frac{\pi^2 G}{(h^3 c^5)} \frac{(k_B T_{\gamma 0})^4}{H_0^2} \approx 2,38 \times 10^{-5} h^{-2}, \quad (1.79)$$

pois $\zeta(4) = \pi^4/90 \simeq 1,082$.

Dividindo (1.78) pela eq. (1.77) encontramos a concentração de fótons como função do red-shift

$$n_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma}{k_B T} = \frac{48\pi}{(hc)^3} \zeta(4) (k_B T)^3 = 1,08 \times 10^9 (1 + z)^3 m^{-3}.$$

Por outro lado, a densidade numérica de fótons na cavidade que constitui o corpo negro é calculada por**

$$n_\gamma = \frac{2\zeta(3) (k_B T)^3}{\pi^2 \hbar^3 c^3},$$

sendo $\zeta(3) = 1,202$, o que leva a

$$n_\gamma = 2,0235 \times 10^7 T_\gamma^3 m^{-3} = 3,98 \times 10^8 (1 + z)^3 m^{-3}. \quad (1.80)$$

**Ver referência [18] às págs. 170-2 e 506.

E, fazendo a razão de (1.78) e (1.71), obtemos:

$$\frac{\rho_\gamma}{\rho_b} = 2,38 \times 10^{-5} (1+z) \Omega_{b0}^{-1}. \quad (1.81)$$

Esta última identidade mostra que à época da recombinação ($z \simeq 1100$)

$$\frac{\rho_b}{\rho_\gamma} \simeq 38,2 \Omega_{b0},$$

a densidade bariônica já superava o equivalente em massa da densidade de energia fotônica; e mostra que, a despeito disso, a radiação torna-se dominante para altos valores de z . A mudança de regime, ou *turning point*, em que o domínio da matéria dá lugar ao domínio da radiação – olhando rumo ao passado – acontece quando $\rho_\gamma \simeq \rho_b$, ou seja,

$$1+z \simeq 4,2 \times 10^4 \Omega_{b0},$$

que corresponde a $t \simeq 7,7 \times 10^{-8} \Omega_{b0}^{-3/2} / H_0 \simeq 2,4 \times 10^{10} h^{-1} \Omega_{b0}^{-3/2} s \simeq 759 h^{-1} \Omega_{b0}^{-3/2} \text{ anos}$, onde empregamos (1.74). (Caso usarmos a relação tempo-red-shift (1.85) derivada abaixo para o modelo dominado pela radiação, obteremos para o *turning point* o instante $t \simeq 2,8 \times 10^{-10} \Omega_{\gamma 0}^{-1/2} \Omega_{b0}^{-2} / H_0 \simeq 2,78 \Omega_{\gamma 0}^{-1/2} \Omega_{b0}^{-2} h^{-1} \text{ anos} = 570 \Omega_{b0}^{-2} \text{ anos}$; que difere em 189 *anos* da contagem com (1.74), algo aceitável na escala cósmica.)

O Parâmetro de Escala

Retomemos (1.57),

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{crit}} - \frac{kc^2}{a^2 H_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2},$$

fixando $k = 0$ e $\Lambda = 0$ como caso de referência. Substituindo, ademais, a eq. (1.78) na forma

$$\frac{\rho}{\rho_{crit}} = \Omega_{\gamma 0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4,$$

ficamos com $H^2 = H_0^2 \Omega_{\gamma 0} a_0^4 / a^4$, ou

$$\dot{a} = H_0 \sqrt{\Omega_{\gamma 0}} \frac{a_0^2}{a}. \quad (1.82)$$

Resolvemos a equação diferencial acima utilizando a condição de inicial $a(0) = 0$. O resultado é

$$a(t) = a_0 \sqrt{2\sqrt{\Omega_{\gamma 0}} H_0 t}. \quad (1.83)$$

Agora encontramos facilmente a relação entre o red-shift e o tempo cosmológico no modelo:

$$(1+z) = \frac{a_0}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\Omega_{\gamma 0}}H_0 t}}, \quad (1.84)$$

ou

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\Omega_{\gamma 0}}H_0 (1+z)^2}. \quad (1.85)$$

Segundo a eq. (1.83), a função de Hubble do modelo, $H = \dot{a}/a$, é

$$H(t) = \frac{1}{2t}, \quad (1.86)$$

ou

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_{\gamma 0}} (1+z)^2. \quad (1.87)$$

Esta última equação confere com a própria equação (1.57), $\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{crit}}$, pois vale (1.78).

O resultado (1.86) – ou a eq. (1.85) com $z = 0$ e $\Omega_{\gamma 0} = 1$ ^{††} – implica

$$t_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{H_0} \approx 4,898 \times 10^9 h^{-1} \text{ anos} \quad (1.88)$$

Note-se que a idade para o universo conforme o modelo dominado pela radiação difere do resultado dado pelo modelo em que a matéria domina. O motivo é, claramente, a diferença entre o intervalo de validade de ambos os modelos. O último é efetivo para red-shifts baixos e o segundo para red-shifts maiores e da ordem de 10^4 . De qualquer forma, idade do universo, segundo o modelo padrão e as estimativas atuais para H_0 , deve variar entre 5 e $6,5 h^{-1}$ bilhões de anos.

Na figura 1.3 confrontamos graficamente a solução (1.83) com a solução análoga (1.68) para o universo dominado pela matéria.

1.5.3 Um Panorama da História Térmica e o Problema da Assimetria entre Matéria e Anti-matéria

A história térmica do universo segundo o modelo padrão de Friedmann pode ser classificada em eras, qualificadas de acordo com o domínio de um ou outro tipo de fonte para a gravitação. Desenvolvemos acima as equações relativas a duas dessas eras: a da matéria e da radiação.

^{††}Fixamos $\Omega_{\gamma 0} = 1$, porque, no modelo padrão de Friedmann dominado pela radiação, usamos (1.58) desprezando as outras possíveis formas de energia.

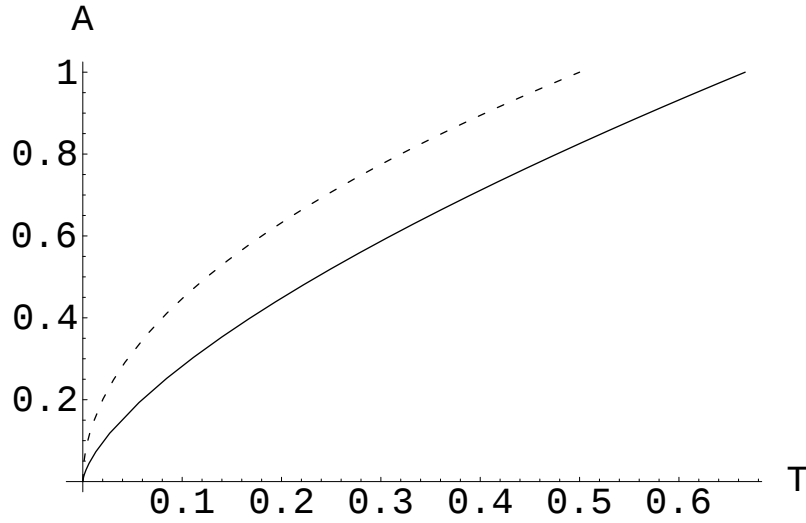


Figura 1.3: Gráfico comparativo das soluções para o fator de escala do modelo preenchido pela matéria ($p = 0$) – linha contínua – e pela radiação ($p = \epsilon/3$) – linha tracejada. Definimos o tempo adimensional $T \equiv H_0 t$ do qual o fator de escala adimensional $A \equiv a/a_0$ é função. Ambas as soluções são apresentadas de $A(0) = 0$ a $A(T_0 = H_0 t_0)$ onde t_0 é dado por (1.69) ou por (1.88) de acordo com o modelo relacionado. Para a solução do modelo preenchido exclusivamente por radiação usamos $\Omega_{\gamma 0} = 1$, o que é consistente com a equação que vincula os valores atuais de omega, eq. (1.58).

As observações nos mostram que a radiação contribui com uma fração desprezível da densidade de energia atual – o que é consistente com o resultado (1.81). A matéria hadrônica domina hoje – *Era da Matéria*, mas o fator de escala (1.68) diminui conforme t diminui, e o red-shift e, conseqüentemente, a temperatura aumentam nessa marcha para o passado [eq. (1.74)]. A energia da radiação, que respeita a equação de estado de corpo negro ($\epsilon_\gamma \propto T^4$), aumenta mais rapidamente com T do que a energia da matéria, a qual respeita a equação de estado para um gás ideal de nucleons. Então, a dominação da matéria dá lugar a predominância da radiação em um *turning point* (em $z \approx 10^4$). Antes porém (em nossa marcha para o passado) da passagem à *Era da Radiação*, em um red-shift $z \simeq 1100$, a matéria, na forma de hidrogênio, se ioniza e os elétrons ficam livres para interagir com a radiação via espalhamento Thomson, termalizando todo o sistema. Além desse ponto, matéria e radiação possuem uma única temperatura de equilíbrio (1.76).

A concentração dos fótons vai progressivamente aumentando com o red-shift

até que se atinge valores de energia próximos ao da massa de repouso do elétron (511KeV), quando ocorre a *criação de pares* (e^-, e^+) como processo estável. Um pouco mais para o passado, encontramos a *nucleossíntese* dos elementos leves (deutério, hélio e lítio); e para $k_B T \approx 4\text{MeV}$ os fótons já possuem energia suficiente para quebrar o núcleo composto. No intervalo de energia $0, 1\text{GeV} \leq k_B T \leq 1\text{GeV}$, fótons produzem, além de e^- e e^+ pares (μ^-, μ^+), é a *Era Leptônica*. Quando energias de 1GeV são alcançadas os nucleons provenientes da radiação ($p^-, p^+, n, \bar{n}$) passam a dominar o conteúdo do universo, no que chamamos de *Era Hadrônica*.

Existe a possibilidade de os nucleos se dissociarem, e os quarks e gluons tornarem-se livres. Esse processo, denominado desconfinamento, não foi, porém, verificado experimentalmente e parece não ocorrer a energias abaixo de 200MeV . A teoria (Cromodinâmica Quântica) também não oferece um mecanismo que leve ao desconfinamento e tampouco resolve a questão em favor do confinamento. A questão está em aberto.

Um outro mistério é a assimetria entre matéria e anti-matéria. A vida do próton supera em várias ordens de magnitude a idade do universo, qualquer que seja o modelo cosmológico usado para calculá-la. Para que haja um excesso de matéria hoje, deve ter havido uma pequena superioridade numérica da matéria sobre anti-matéria que assumiu o controle com o passar do tempo. A origem do excesso é desconhecida.

Quantificamos o excesso da matéria sobre anti-matéria, indicando a relação entre concentração bariônica, eq. (1.72), e a concentração da radiação, eq. (1.80):

$$\eta = \frac{n_\gamma}{n_b} = 3,6 \times 10^7 \Omega_{b0}^{-1} h^{-2}. \quad (1.89)$$

Lembremos que a concentração n_γ fotônica dá origem aos nucleons e anti-nucleons via produção de pares, e em igual número portanto. Por outro lado, n_b é relativo aos bárions atuais. Embora n_γ seja sete ordens de grandeza maior que a concentração dos bárions atuais, a aniquilação preserva apenas os nucleons contados em n_b na era atual.

1.5.4 Densidade de Energia no Universo em Expansão

As soluções para o fator de escala que o modelo padrão oferece indicam a expansão do volume cósmico com o aumento do tempo cósmico. De fato, empregando (1.9), escrevemos

$$\delta V = \frac{a^3(t)}{\sqrt{1 - kr^2}} r^2 \sin \theta \delta r \delta \theta \delta \phi. \quad (1.90)$$

Se admitirmos que não existe criação de matéria e energia, então esperamos que a densidade $\epsilon = \rho c^2$ diminua à medida que o universo se expande. A taxa com que isto ocorre é fornecida por (1.50),

$$\frac{d\epsilon}{dt} = -3c^2 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{\dot{a}}{a}.$$

Para que tenhamos $\frac{d\epsilon}{dt} < 0$, é necessário

$$p > -\rho c^2, \quad (1.91)$$

se $\dot{a}(t) > 0, \forall t$.

Embora fiquemos tentados a empregar $p > 0$, restringindo ainda mais a condição (1.91), argumentando que apenas valores positivos da pressão são providos de significado físico, veremos que uma equação exótica do tipo $p = -\rho c^2$ provoca uma expansão exponencial do fator de escala, correspondendo ao período de evolução cósmica que denominamos *inflação*. Derivar esta solução é um dos tópicos do próximo capítulo. Mas antes de irmos a ele, vale dizer que (1.91) estabelece uma restrição sobre o tipo de equação de pressão que pode gerar inflação: não é possível, por exemplo, esperar que $p = -3\rho c^2$ leve a algum tipo de solução $a(t) = e^{g(t)}$, com $g(t)$ assumindo valores positivos. Diga-se também que (1.49), com $\Lambda = 0$, estabelece

$$\rho + \frac{3p}{c^2} < 0$$

como condição para expansão do cosmo, *i.e.*, $\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} > 0$ – sabendo-se que $\dot{a}(t) > 0$. Portanto, a inflação deve ocorrer para valores de pressão coerentes com

$$-\rho c^2 < p < -\frac{1}{3}\rho c^2. \quad (1.92)$$

Capítulo 2

Espaço-Tempo de de Sitter

Ao estabelecer as suas equações para o campo gravitacional, Einstein acreditava haver implementado a idéia de Mach de que o movimento não poderia ser percebido sem um fundo de matéria com relação ao qual as posições de um objeto e suas derivadas temporais pudessem ser definidas. Mach criticava a necessidade de um referencial inercial absoluto inicial em relação ao qual se estabelece a classe de referenciais inerciais, conceito fundamental na dinâmica newtoniana.

É razoável o argumento que se alinha com a opinião inicial de Einstein: o lado direito de $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ fixa o conteúdo de matéria e energia que servirá de fonte ao campo; a solução das equações é o tensor métrico, que fixa a geometria do espaço-tempo e com o qual se calcula a trajetória da partícula teste sob ação do campo. Sinteticamente: o conteúdo de matéria determina a dinâmica da partícula.

Esse argumento, entretanto, é incompleto: foi logo depois da publicação do artigo de Einstein que, em 1917, W. de Sitter encontrou uma solução das equações da relatividade geral sem fontes. A geometria do espaço-tempo pode ser não trivial em um universo *vazio*. Mais do que isso, a solução de de Sitter mostrou que partículas-teste no modelo seguem geodésicas do tipo tempo que se separam mutuamente.

Citando Narlikar [14] em um comentário sobre a solução apresentada por de Sitter: no sentido dinâmico o universo é vazio, enquanto que no sentido cinemático ele está se expandindo. O modelo antecipa uma característica dos modelos de Friedmann de 1922. Ademais, a solução de de Sitter promove a constante cosmológica a protagonista do modelo cosmológico; importância que Λ tem hoje na cosmologia física.

É desse espaço-tempo peculiar que trata o presente capítulo.

2.1 Introdução

Os espaços-tempos de de Sitter são hiperbólicos, pseudo-euclidianos em 5 dimensões. São de dois tipos, classificados de acordo com o sinal da curvatura escalar de Ricci (contração do tensor de Ricci pela métrica: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$). O *espaço-tempo de de Sitter* $dS(4, 1)$ possui curvatura escalar negativa, sua projeção em duas dimensões corresponde ao hiperbolóide de 1-folha, e sua inclusão no espaço pseudo-euclidiano satisfaz

$$\eta_{AB} \xi^A \xi^B = \eta_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta - (\xi^4)^2 = -\mathcal{R}^2, \quad (2.1)$$

onde ξ^A representam as coordenadas cartesianas no espaço em questão ($A, B = 0, 1, 2, 3, 4$), $\eta_{\alpha\beta}$ é a métrica do espaço-tempo de Minkowski ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) e $\mathcal{R}$ é o pseudo-raio de de Sitter. O segundo tipo é o *espaço-tempo de anti-de Sitter* $dS(3, 2)$, e consiste de uma 4-superfície hiperbólica satisfazendo

$$\eta_{AB} \xi^A \xi^B = \eta_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta + (\xi^4)^2 = \mathcal{R}^2. \quad (2.2)$$

Corresponde, em duas dimensões, ao hiperbolóide de duas folhas; tem curvatura escalar positiva*. Podemos escrever uma única relação para os dois espaços de de Sitter se

$$\eta_{44} = s.$$

Então,

$$\eta_{AB} \xi^A \xi^B = \eta_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta + s (\xi^4)^2 = s \mathcal{R}^2 \quad (2.3)$$

com

$$s = \begin{cases} -1, & dS(4, 1) \\ +1, & dS(3, 2) \end{cases}.$$

2.2 Abordagem Via Coordenadas Conformes

O elemento de linha de de Sitter $d\Sigma^2$ pode ser obtido mediante uma transformação das coordenadas euclidianas ξ^A para as estereográficas conformes x^α [20], [21],

$$\begin{aligned} \xi^\alpha &= \Omega x^\alpha; \\ \xi^4 &= \mathcal{R} (1 - 2\Omega), \end{aligned} \quad (2.4)$$

*O sinal do escalar de curvatura de Ricci depende da maneira que definimos o tensor de Riemann. Se escrevermos $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = -\partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} + \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma} \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}$ diferentemente do que usamos neste trabalho, eq. (2.8), nos alinharmos com [19], e $dS(4, 1)$ terá curvatura escalar positiva, enquanto $dS(3, 2)$ possuirá curvatura escalar negativa.

com $\Omega = \Omega(x^\alpha)$ a ser determinada. Usando (2.3) e (2.4) concluímos que

$$\Omega = \frac{1}{1 + \frac{\rho^2}{4s\mathcal{R}^2}},$$

onde introduzimos $\rho^2 = \eta_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$. Calculando a diferencial de Ω percebemos que

$$2\eta_{\alpha\beta}x^\alpha dx^\beta = -s\frac{4\mathcal{R}^2}{\Omega^2}d\Omega.$$

Por outro lado,

$$d\xi^4 = 4\mathcal{R}^2 d\Omega^2.$$

Esses dois últimos resultados são combinados para encontrar $d\Sigma^2 = \eta_{AB}d\xi^A d\xi^B$. Temos:

$$d\Sigma^2 = \Omega^2 \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.5)$$

em que o tensor métrico é

$$g_{\alpha\beta} = \frac{1}{\left(1 + s\frac{\rho^2}{4\mathcal{R}^2}\right)^2} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.6)$$

Portanto, os espaços de de Sitter são conformalmente planos no sentido que diferem da métrica de Minkowski por um fator conforme $\Omega^2(x)$. Com (2.6) e a equação (1.2)

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(\partial_\nu g_{\rho\lambda} + \partial_\rho g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\rho})$$

para a conexão, vem:

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = -s\frac{\Omega}{2\mathcal{R}^2} [\delta^\mu_\nu \eta_{\rho\lambda} + \delta^\mu_\rho \eta_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\rho} \delta^\mu_\lambda] x^\lambda. \quad (2.7)$$

O tensor de curvatura,

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma} \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho}, \quad (2.8)$$

no caso de de Sitter, fica

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = -\frac{s}{\mathcal{R}^2} [\delta^\mu_\sigma g_{\nu\rho} - \delta^\mu_\rho g_{\nu\sigma}], \quad (2.9)$$

onde utilizamos (2.7). A contração de (2.9) pela métrica dá o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = 3\frac{s}{\mathcal{R}^2} g_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

que leva à curvatura escalar

$$R = \frac{12s}{\mathcal{R}^2}. \quad (2.11)$$

Se os espaços-tempos de de Sitter são soluções homogêneas das equações de Einstein ($T_{\mu\nu} = 0$),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0,$$

então (2.10) e (2.11) conduzem a

$$\Lambda = -\frac{3s}{\mathcal{R}^2}. \quad (2.12)$$

Caso a constante cosmológica seja positiva, teremos $s = -1$ e o espaço de de Sitter que descreve o universo é o $dS(4, 1)$. Entretanto, se $\Lambda < 0$, $s = -1$ e a geometria é a do espaço de anti-de Sitter $dS(3, 2)$.

Colocamos essas conclusões no quadro

$\Lambda > 0$	$s = -1$	espaço de de Sitter, $dS(4, 1)$
$\Lambda < 0$	$s = +1$	espaço de anti-de Sitter, $dS(3, 2)$

Tabela 2.1: *Seleção do tipo de espaço hiperbólico a partir do sinal da constante cosmológica.*

2.2.1 Equação da Geodésica para de Sitter

Substituindo a expressão (2.7) para o símbolo de Christoffel na equação geral de uma curva auto-paralela

$$\frac{dU^\mu}{d\Sigma} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} U^\nu U^\rho = 0$$

– $\Sigma = (g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu)^{1/2}$ é o parâmetro da curva – obtemos a expressão para a geodésica em um espaço-tempo de de Sitter

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\Sigma^2} - s \frac{\Omega}{2\mathcal{R}^2} \left[2x_\nu \frac{dx^\nu}{d\Sigma} \frac{dx^\beta}{d\Sigma} - x^\mu \right] = 0, \quad (2.13)$$

ou

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\Sigma^2} + s \frac{\Omega}{2\mathcal{R}^2} \left[x^\mu - 2\Sigma \frac{dx^\mu}{d\Sigma} \right] = 0, \quad (2.14)$$

pois $\Sigma^2 d\Sigma^2 = (x_\mu dx^\mu)^2$.

2.2.2 A Equação de Desvio da Geodésica

A equação de desvio da geodésica[†]

$$\frac{D^2 \eta^\alpha}{Du^2} = R^\alpha{}_{\epsilon\gamma\beta} U^\epsilon U^\gamma \eta^\beta \quad (2.15)$$

constitui um guia qualitativo para o comportamento relativo das auto-paralelas de um espaço-tempo.

Na equação (2.15), u é o parâmetro a localizar um ponto na curva geodésica $\gamma_v(u) = \gamma(u, v = \text{constante})$;

$$U^\epsilon = \frac{dx^\epsilon}{du} \quad (2.16)$$

é o vetor tangente a curva; η^β é o parâmetro vetorial que mede o desvio entre duas geodésicas vizinhas – $\gamma_{a_1}(u) = \gamma(u, v = a_1)$ e $\gamma_{b_1}(u) = \gamma(u, v = b_1)$, por exemplo. Definimos o *vetor desvio* como

$$\eta^\beta = V^\beta \delta V, \quad (2.17)$$

sendo δV uma constante, e

$$V^\beta = \frac{dx^\beta}{dv}. \quad (2.18)$$

O parâmetro v localiza diferentes curvas da família de geodésicas a dois parâmetros $\gamma(u, v)$.

Segundo (2.15), partículas teste tendem a se aproximar umas das outras em regiões de curvatura positiva e a se afastar mutuamente em regiões de curvatura negativa.

Para os espaços-tempos de de Sitter, identificaremos o parâmetro u com o comprimento de arco $\Sigma = (g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu)^{1/2}$. Esta identificação é possível desde que o elemento de linha não se anule, ou seja, desde que não estejamos lidando com trajetórias de partículas sem massa, para as quais $d\Sigma = 0$. A escolha que fizemos permite ainda um contato com a relatividade especial, pois então, $U^\mu = \frac{dx^\mu}{du}$ é a quadri-velocidade e

$$U^2 = U_\mu U^\mu = g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1. \quad (2.19)$$

Usando, ademais, o resultado (2.9) calculamos (2.15) assim:

$$\frac{D^2 X^\mu}{D\Sigma^2} = -\frac{s}{\mathcal{R}^2} [\delta_\sigma^\mu g_{\nu\rho} - \delta_\rho^\mu g_{\nu\sigma}] U^\nu U^\rho X^\sigma = -\frac{s}{\mathcal{R}^2} [\delta_\sigma^\mu - U_\sigma U^\mu] X^\sigma,$$

[†]Para a derivação desta equação, consultar [22], parágrafo 3.46.

ou

$$\frac{D^2 X^\mu}{D\Sigma^2} = -\frac{s}{\mathcal{R}^2} h_\sigma^\mu X^\sigma, \quad (2.20)$$

onde substituímos o *projektor transversal*

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu, \quad (2.21)$$

cujas transversalidade é evidente

$$h_{\mu\nu} U^\nu = U_\mu - U_\mu U_\nu U^\nu = U_\mu - U_\mu = 0. \quad (2.22)$$

Por consistência com a definição de η^α – eq. (2.17), um campo vetorial X^α que satisfaz a equação de desvio da geodésica terá apenas a parte transversal $X_\perp$ aparecendo na equação (2.20). De fato, (i) dada a propriedade (2.22),

$$X_\perp^\mu = h_\sigma^\mu X^\sigma;$$

(ii) Pela equação da geodésica (com $u = \Sigma$)

$$\frac{D}{D\Sigma} U^\mu = \frac{dU^\mu}{d\Sigma} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} U^\nu U^\rho = 0,$$

a derivada da componente ao longo da curva $X_\parallel^\alpha \propto U^\alpha$ se anula,

$$\frac{DX_\parallel^\mu}{D\Sigma} = 0,$$

e então

$$\frac{D^2 X^\mu}{D\Sigma^2} = \frac{D^2}{D\Sigma^2} (X_\parallel^\mu + X_\perp^\mu) = \frac{D^2 X_\perp^\mu}{D\Sigma^2}.$$

Como resultado, a eq. (2.20) dá

$$\frac{D^2 X_\perp^\mu}{D\Sigma^2} = -\frac{s}{\mathcal{R}^2} X_\perp^\mu = -\frac{R}{12} X_\perp^\mu, \quad (2.23)$$

onde foi usada a relação (2.11).

De (2.23) fica claro que uma curvatura escalar positiva faz curvas aproximarem-se mutuamente: a segunda derivada do vetor de desvio é negativa, a tendência é restaurar o campo à curva.

Com (2.12) escrevemos também

$$\frac{D^2 X_\perp^\mu}{Ds^2} - \frac{\Lambda}{3} X_\perp^\mu = 0. \quad (2.24)$$

Valores negativos de Λ levam a soluções oscilatórias em torno da curva para o campo transversal, ao fenômeno de *focusing* da família de geodésicas, solução de (2.13). Valores positivos de Λ podem resultar em expansão ou contração da congruência entre as geodésicas da família. Se duas curvas estão se separando inicialmente, assim permanecerão indefinidamente[†].

[†]Veja-se a seção 2.3.4

2.2.3 Inflação

O elemento de linha dos espaços de de Sitter, sendo este conformalmente plano, evidencia a característica de homogeneidade e isotropia que lhes é própria. Consequentemente, encontra-se uma transformação de coordenadas que converte $d\Sigma^2$ no elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker, o qual resulta nas equações de Friedmann. Como no modelo de de Sitter não há fontes, $p = \rho = 0$, ficamos com

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} a^2 - kc^2, \quad (2.25)$$

$$\ddot{a} = \frac{\Lambda c^2}{3} a, \quad (2.26)$$

que resolvidas para $k = 0$ dão

$$a(t) = a_0 e^{c\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t-t_0)}. \quad (2.27)$$

O sinal positivo no argumento da exponencial é consistente com a expansão observada no universo, caso valha $\Lambda > 0$. A solução (2.27) é denominada “inflacionária do tipo exponencial”.

Comentário *Se mantivermos o parâmetro de curvatura k não nulo, a solução é dada por*

$$a(t) = \frac{\left[a_0 + \sqrt{a_0^2 - 3k/\Lambda}\right]^2 e^{\pm 2c\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t-t_0)} + 3k/\Lambda}{2 \left[a_0 + \sqrt{a_0^2 - 3k/\Lambda}\right] e^{\pm c\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t-t_0)}}, \quad (2.28)$$

com o sinal positivo garantindo a expansão. Esta solução resume os modelos vazios de Lemaître, estudados em detalhe no capítulo seguinte.

Há um cenário equivalente ao que acabamos de considerar. De fato, se anularmos a constante cosmológica e tomarmos uma equação de estado exótica

$$p = -\epsilon, \quad (2.29)$$

as equações de Friedmann ($k = 0$) terão por solução

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{8\pi G}{3c^2}}\epsilon(t-t_0)}, \quad (2.30)$$

que é análoga a (2.27) já que a densidade de energia ϵ é constante. Para ver isso, basta substituir a equação de estado (2.29) na equação de conservação

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right),$$

lembrando que $\rho = \epsilon/c^2$. Para um fluido homogêneo e isotrópico, caracterizado pelo tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho c^2) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu},$$

vale $T = \epsilon - 3p$, conforme trivialmente obtido pela contração com a métrica. Se vale $p = -\epsilon$ resulta $T = 4\epsilon > 0$. Além disso, a equação de Einstein contraída com $g_{\mu\nu}$ oferece o resultado

$$R = - (8\pi G/c^4) T.$$

Logo, $R = - (32\pi G/c^4) \epsilon < 0$, conforme esperado para o espaço de de Sitter $dS(4, 1)$.

Voltando ao primeiro cenário (com $\Lambda \neq 0$ e sem fontes): a contração da equação de Einstein leva a

$$R = -4\Lambda. \quad (2.31)$$

Se os modelos inflacionários dados por (2.27) e (2.30) levam a uma mesma curvatura escalar, então (2.31) e (2.31) permitem-nos escrever uma constante cosmológica

$$\Lambda = \left(\frac{8\pi G}{c^4} \right) \epsilon > 0.$$

Daí usamos a relação (2.12) para concluir que $s = -1$, e que também no primeiro cenário temos o espaço $dS(4, 1)$. Desse modo, apenas o espaço de de Sitter pode levar a inflação.

2.2.4 Significado Físico de Λ

Consideremos uma região do modelo cosmológico descrito pelas equações de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2},$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right),$$

limitada por uma esfera de raio $a(t)r_0$. Lembremos que, uma vez que a coordenada radial r é adimensional em nossa parametrização, apenas o produto de r pelo fator de escala pode dar a *distância física* entre o centro da esfera e os pontos em sua superfície.

O comportamento da referida região é dado, por exemplo, pela segunda das equações acima:

$$\frac{d^2 (ar_0)}{dt^2} = \frac{\Lambda c^2}{3} (ar_0) - \frac{GM}{(ar_0)^2}, \quad (2.32)$$

onde identificamos

$$M = \frac{4\pi}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) (ar_0)^3, \quad (2.33)$$

a *massa total* dentro da esfera: de todo o conteúdo energético $(\rho + \frac{3p}{c^2})$ distribuído homogeneamente e isotropicamente no universo, retiramos a parcela contida no volume $\frac{4\pi}{3} (ar_0)^3$ da região considerada.

O segundo termo do lado direito de (2.32) é a lei de Newton da gravitação

$$F_N = -\frac{GM}{(ar_0)^2},$$

e o primeiro termo pode ser entendido como uma força peculiar causada pela constante cosmológica

$$F_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3} ar_0.$$

Este campo de força é global e homogêneo variando sua intensidade com o tempo cósmico – através do fator de escala $a(t)$ – ou pela distância ar_0 entre as partículas interagentes. Note-se que a dependência é linear com a distância: quanto mais apartadas estiverem as partículas, maior será a intensidade de F_Λ .

2.2.5 O Campo de Tetradas em de Sitter

Descreveremos o campo de tetradas em de Sitter, discutindo a aceleração de um gênero desse campo. O escopo é fixar resultados para posterior comparação com o campo de tetradas de Friedmann, o que supostamente forneceria uma ligação entre ambos. Procuraremos futuramente esta ligação, pois os dados observacionais indicam Λ como a componente de energia dominante do cosmo, insinuando que o modelo padrão seria apenas uma perturbação do modelo de de Sitter.

Como vimos, a métrica de Sitter em coordenadas estereográficas assume a forma conformalmente plana (2.6),

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}.$$

Por outro lado, um tensor métrico pode ser escrito em função do campo de tetradas[§]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_{\mu} h^b{}_{\nu}, \quad (2.34)$$

onde $h^a{}_{\mu}(x)$ são as componentes da base $h^a = h^a{}_{\mu} dx^{\mu}$ do espaço de Minkowski tangente ao espaço-tempo. Note que as componentes $h^a{}_{\mu}$ possuem um índice no espaço de Minkowski – o índice contravariante ($a = 0, 1, 2, 3$) – e o outro no espaço-tempo – o covariante ($\mu = 0, 1, 2, 3$).

Comparando (2.34) e (2.6) encontramos

$$h^a{}_{\mu} = \Omega \delta^a_{\mu}. \quad (2.35)$$

De fato, se substituirmos (2.35) na eq. (2.34) obteremos (2.6):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \Omega \delta^a{}_{\mu} \Omega \delta^b{}_{\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}.$$

Podemos calcular $h_b{}^{\nu}$, isto é, as componentes da base dual $h_b = h_b{}^{\nu} \partial_{\nu}$, as componentes da tetrada com o índice de espaço-tempo contravariante e o índice de álgebra covariante. Para isso avaliamos $g^{\mu\nu}$.

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu})^{-1} = \frac{1}{\Omega^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore g^{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2} \eta^{\mu\nu}, \quad (2.36)$$

a qual, comparada com

$$g^{\mu\nu} = \eta^{ab} h_a{}^{\mu} h_b{}^{\nu}, \quad (2.37)$$

leva a

$$h_a{}^{\mu} = \frac{1}{\Omega} \delta_a^{\mu}. \quad (2.38)$$

Conhecemos o símbolo de Christoffel para de Sitter (2.7),

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} = -s \frac{\Omega}{2\mathcal{R}^2} [\delta^{\alpha}_{\beta} \eta_{\nu\gamma} + \delta^{\alpha}_{\nu} \eta_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\nu} \delta^{\alpha}_{\gamma}] x^{\gamma},$$

[§]O formalismo de tetradas é tratado em detalhe no capítulo 5 de [22].

ou,

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} = [\delta^\alpha_\beta \delta^\sigma_\nu + \delta^\alpha_\nu \delta^\sigma_\beta - \eta_{\beta\nu} \eta^{\alpha\sigma}] \partial_\sigma \ln \Omega(x), \quad (2.39)$$

e com ele construímos a conexão de spin $w^a{}_{b\nu}$ para a tetrada – a maneira com que um campo de tetradas percebe a conexão de Levi-Civita. De

$$w^a{}_{b\nu} = h^a{}_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu} h_b{}^\beta + h^a{}_\gamma \partial_\nu h_b{}^\gamma \quad (2.40)$$

calculamos

$$w^a{}_{b\nu} = [\delta^\alpha_\nu \delta^\sigma_b - \eta_{b\nu} \eta^{a\sigma}] \partial_\sigma \ln \Omega. \quad (2.41)$$

E então,

$$w^a{}_{bc} = h_c{}^\nu w^a{}_{b\nu} = \frac{1}{\Omega} [\delta^a{}_c \delta^\sigma{}_b - \eta_{bc} \eta^{a\sigma}] \partial_\sigma \ln \Omega. \quad (2.42)$$

Com esta conexão em mãos, perguntamo-nos se o campo de tetradas satisfazem a equação da geodésica. Caso isso não aconteça e haja uma aceleração, que aceleração sofrerá uma tetrada $\{h_a\}$? Tome-se o membro do gênero tempo h_0 e a sua curva integral $U^\nu = h_0{}^\nu$. Definimos a aceleração

$$a^\lambda = U^\nu \partial_\nu U^\lambda + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} U^\mu U^\nu$$

e a avaliamos com o uso de (2.39):

$$\begin{aligned} a^\lambda &= h_0{}^\nu \partial_\nu h_0{}^\lambda + [\delta^\lambda_\mu \delta^\sigma_\nu + \delta^\lambda_\nu \delta^\sigma_\mu - \eta_{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma}] \partial_\sigma \ln \Omega h_0{}^\mu h_0{}^\nu \\ &= \frac{1}{\Omega^2} [\delta_0^\lambda \delta_0^\sigma - \eta_{00} \eta^{\lambda\sigma}] \partial_\sigma \ln \Omega \end{aligned}$$

De (2.42) vemos que:

$$\begin{aligned} h_a{}^\lambda w^a{}_{00} &= \frac{1}{\Omega} \delta_a^\lambda \frac{1}{\Omega} [\delta_0^\sigma \delta_0^\sigma - \eta_{00} \eta^{a\sigma}] \partial_\sigma \ln \Omega \\ &= \frac{1}{\Omega^2} [\delta_0^\lambda \delta_0^\sigma - \eta_{00} \eta^{\lambda\sigma}] \partial_\sigma \ln \Omega = a^\lambda. \end{aligned}$$

A aceleração é, portanto:

$$a^\lambda = h_a{}^\lambda w^a{}_{00} = h_0{}^\lambda w^0{}_{00} + h_i{}^\lambda w^i{}_{00}.$$

Como $w^0{}_{00} = 0$ e $w^i{}_{00} = -\frac{1}{\Omega} \delta^{ij} \partial_j \ln \Omega$ temos

$$a^\lambda = h_i{}^\lambda w^i{}_{00} = \frac{1}{\Omega} \delta_i^\lambda \partial^i \ln \Omega.$$

$$\therefore a^0 = 0 \text{ e somente } a^k \neq 0.$$

A aceleração na direção temporal se anula para a escolha $U^\nu = h_0^\nu$.

Segue que

$$a^k = -\frac{3s}{\mathcal{R}^2} \frac{1}{3} \frac{1}{2\Omega} x^k.$$

Porém, $\Lambda = -\frac{3s}{\mathcal{R}^2}$. Por conseguinte,

$$a^k = -\frac{\Lambda}{6} \frac{x^k}{\Omega}. \quad (2.43)$$

Mas qual é o significado da aceleração de um campo de tetradas do gênero tempo? A escolha de h_0 foi arbitrária, mas conveniente: o vetor h_0 é tangente à linha de mundo de uma partícula do espaço-tempo, de modo que a velocidade de uma tal partícula descrita por $U^\nu = h_0^\nu$ permanece no interior de seu cone de luz. Veja-se que nessas condições, a aceleração só terá componentes não nulas em direções ortogonais à do tempo, $x^0 = ct$, e que a^k depende de Λ .

Se a^k for a aceleração de partículas teste em de Sitter, existe uma descrição equivalente em relatividade geral, sem tetradas, conforme veremos à seguir.

Comentário *Um campo de tetradas consiste em quatro campos vetoriais solidários, satisfazendo (2.34) e (2.37). Uma delas, por convenção h_0 é do gênero tempo. É esta que poderá ser ligada a um observador. A aceleração encontrada é a de h_0 , mas os h_i são solidários e por isso podemos falar em “aceleração da tetrada”.*

2.3 A Abordagem Clássica Via Simetria Esférica

Há uma abordagem equivalente ao estudo do modelo de de Sitter que empreendemos acima. Então, usamos coordenadas estereográficas conformes para encontrar o elemento de linha de de Sitter, partindo da equação para uma superfície hiperbólica inclusa no espaço pseudo-Euclidiano a cinco dimensões. Com o ds^2 conformalmente plano em mãos, pudemos calcular as conexões de Levi-Civita, os tensores de Riemann e Ricci e a curvatura escalar; que substituídas nas equações de Einstein levaram à relação entre a constante cosmológica e o pseudo-raio da superfície a representar o modelo:

$$\Lambda = -\frac{3s}{\mathcal{R}^2}, \quad (2.44)$$

em que s é um sinal que seleciona o tipo de espaço hiperbólico considerado. Concluímos então que, se medirmos o sinal da constante cosmológica, poderemos decidir o tipo de espaço-tempo de de Sitter mais adequado à realidade que pretendemos modelar. Depois, usando argumentos de simetria para o modelo, empregamos as

equações de Friedmann sem fontes para encontrar as soluções inflacionárias admitidas pelo modelo.

Neste novo enfoque ao assunto, vamos construir o elemento de linha de de Sitter partindo de um sistema com simetria esférica[¶].

2.3.1 O Elemento de Linha Estático para Sistemas com Simetria Esférica

Examinemos o caso invariante por rotação. Os elementos invariantes por rotações no espaço euclidiano tri-dimensional são:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2},$$

$$dr,$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

$$x dx + y dy + z dz = r dr,$$

$$t,$$

$$dt.$$

(a dimensão temporal não participa da rotação). Com estes invariantes construímos o elemento de linha mais geral possível para um sistema com simetria de rotação no espaço,

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) + e^\nu dt^2 + 2a dr dt \quad (2.45)$$

onde λ , μ , ν , e a são funções de r e t apenas. Os sinais dos coeficientes e^λ , e^μ , e e^ν foram escolhidos de maneira a distinguir entre as coordenadas espaciais e a coordenada temporal e a permitir que haja um limite onde (2.45) se reduza a métrica do espaço-tempo de Minkowski, qual seja $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$, consoante o Princípio de Equivalência.

Duas transformações de coordenadas sucessivas permitem simplificar o ds^2 geral acima, retirando o produto cruzado $dr dt$. De fato, introduzindo a coordenada $r'^2 = e^\mu r^2$ obtemos

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - r'^2 d\theta^2 - r'^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + e^\nu dt^2 + 2a dr dt,$$

[¶] Nesta seção, seguindo [1], empregaremos unidades naturais, onde $c = 1$.

onde omitimos as linhas e λ , ν , e a são novas funções de r e t . Fazendo a seguir a transformação para um novo t de acordo com

$$dt' = \eta(adr + e^\nu dt),$$

onde η é um fator de integração, resulta a forma padrão

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.46)$$

$$\lambda = \lambda(r, t) \quad \text{e} \quad \nu = \nu(r, t),$$

em que novamente omitimos as linhas e λ e ν são outras funções de r e t . Perceba-se que o tensor métrico associado a este elemento de linha possui entradas que dependem explicitamente da coordenada temporal t :

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} e^{\nu(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

e essa dependência só se manifesta nas funções $\lambda(r, t)$ e $\nu(r, t)$. Se, por simplicidade, tomarmos

$$\lambda = \lambda(r) \quad \text{e} \quad \nu = \nu(r), \quad (2.48)$$

o elemento de linha será dito estático.

Suponhamos que o nosso sistema estático e de simetria esférica seja constituído por um *fluido perfeito*. Então, será descrito pelo tensor energia momento (1.44)

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p, \quad (2.49)$$

e as componentes de velocidade do fluido serão

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0, \quad \frac{dt}{ds} = e^{-\nu/2}. \quad (2.50)$$

Lembramos que ρ é a densidade e p é a pressão do fluido; e tomamos $c = 1$.

Com as informações (2.47), (2.48), (2.49), e (2.50) pode-se, depois de um extenso trabalho de cálculo, expressar as equações de Einstein na forma

$$\begin{aligned} 8\pi p &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Lambda \\ 8\pi p &= e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) + \Lambda \\ 8\pi \rho &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde as linhas representam derivação com relação a r e a constante da gravitação universal G é tomada igual a 1.

Igualando as duas primeiras das equações acima, obtemos a equação

$$\frac{dp}{dr} + (\rho + p) \frac{\nu'}{2} = 0 \quad (2.52)$$

para o gradiente de pressão, que é o análogo relativístico da expressão Newtoniana para a dependência da pressão com relação ao potencial gravitacional.

O universo em larga escala é tido como homogêneo, pois admite-se que diferentes observadores em diferentes partes do cosmo o veriam com o mesmo aspecto. Ao adotarmos a *hipótese de homogeneidade* para nosso modelo estamos a exigir que: (i) a pressão seja a mesma em todos os pontos do espaço; (ii) a densidade macroscópica de matéria seja igual para cada valor do conjunto de coordenadas (t, r, θ, ϕ) do modelo; (iii) o elemento de linha esférico (2.46) se reduza ao ds^2 da relatividade especial com $\lambda = \nu = 0$ para pequenos valores de r , já que o campo gravitacional deve se anular em regiões do espaço pequenas o suficiente. Em acordo com a exigência (i) a derivada $\frac{dp}{dr}$ deve se anular, e, com isto, a equação (2.52) oferece três possibilidades:

$$\begin{aligned} \nu' &= 0, \\ \rho + p &= 0, \\ \nu' &= 0 \quad \text{e} \quad \rho + p = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

A primeira possibilidade leva ao universo de Einstein; a segunda, ao modelo de de Sitter; a terceira, ao elemento de linha de Minkowski da relatividade especial.

2.3.2 A Geometria do Universo de de Sitter

Manipulando convenientemente as equações (2.51) em conjunto com a condição $\rho + p = 0$ encontra-se

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{\Lambda + 8\pi\rho}{3} r^2, \quad (2.54)$$

que substituída em (2.46) levam à solução completa para ds^2 . Definindo uma nova constante $\mathcal{R}$ pela equação

$$\frac{\Lambda + 8\pi\rho}{3} = \frac{1}{\mathcal{R}^2}, \quad (2.55)$$

especificamos completamente o elemento de linha de de Sitter como

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}\right) dt^2. \quad (2.56)$$

Por transformações adequadas de coordenadas podemos encontrar outras formas do elemento de linha acima que nos esclarecem propriedades geométricas subjacentes ao modelo^{||}. A transformação dada por

$$\begin{aligned}\alpha &= r \sin \theta \cos \phi, \\ \beta &= r \sin \theta \sin \phi, \\ \gamma &= r \cos \theta, \\ \delta + \epsilon &= \mathcal{R} e^{t/\mathcal{R}} \sqrt{1 - r^2/\mathcal{R}^2}, \\ \delta - \epsilon &= \mathcal{R} e^{-t/\mathcal{R}} \sqrt{1 - r^2/\mathcal{R}^2},\end{aligned}\tag{2.57}$$

leva à forma

$$ds^2 = d\epsilon^2 - d\delta^2 - d\alpha^2 - d\beta^2 - d\gamma^2.\tag{2.58}$$

Esta forma de elemento de linha corresponde àquela do *espaço-tempo hiperbólico de de Sitter* $dS(4, 1)$, com a qual nos deparamos na abordagem através das coordenadas estereográficas e cuja superfície é parametrizada por

$$\epsilon^2 - \delta^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = -\mathcal{R}^2.$$

Mais adiante ficará claro porque não apareceu, nesse tratamento, o elemento de linha representativo do universo de anti-de Sitter $dS(3, 2)$.

A transformação para as novas variáveis

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{r}{\sqrt{1 - r^2/\mathcal{R}^2}} e^{-t/\mathcal{R}} \quad \text{e} \\ \bar{t} &= t + \frac{1}{2}\mathcal{R} \ln \left(1 - \frac{r^2}{\mathcal{R}^2} \right),\end{aligned}\tag{2.59}$$

que resulta no elemento de linha

$$ds^2 = d\bar{t}^2 - e^{2\bar{t}/\mathcal{R}} (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2),$$

foi descoberta independentemente por Lemaître e Robertson. Omitindo as barras sobre $\bar{r}$ e $\bar{t}$ e introduzindo a definição

$$K = \frac{1}{\mathcal{R}},\tag{2.60}$$

escrevemos o ds^2 acima como

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Kt} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2),\tag{2.61}$$

^{||} Lembramos nesse momento que a abordagem de coordenadas conformes já forneceu uma forma possível para o elemento de linha de de Sitter.

ou

$$ds^2 = dt^2 - e^{2t/\mathcal{R}} (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.62)$$

O elemento de linha de de Sitter nessa forma tem duas propriedades evidentes. A primeira: observemos (2.62) e notemos que as três coordenadas espaciais contribuem da mesma maneira na expressão do ds^2 ; por isso podemos afirmar que o modelo é realmente homogêneo, conforme exigimos ao anularmos a derivada $\frac{dp}{dr}$. A segunda: o tensor métrico associado (2.61) é explicitamente dependente da coordenada temporal atual, $(g_{\mu\nu}) = \text{diag} \{1, -e^{2t/\mathcal{R}}, -e^{2t/\mathcal{R}}, -e^{2t/\mathcal{R}}\}$, o que significa que o elemento de linha não é mais estático e sim *estacionário*. Isto não deve ser motivo de surpresa, uma vez que sempre podemos passar de um elemento de linha estático para um não-estático (ou estacionário) por transformações em que as novas coordenadas incluam tanto as coordenadas originais do tipo-tempo como aquelas do tipo-espço. Não obstante, na forma (2.61), notamos o fator exponencial a multiplicar as diferenciais espaciais, o que vem a ser indicativo de um universo em expansão; tudo coerente com a solução inflacionária permitida pelo modelo.

Comentários sobre a relação entre os elementos de linha de de Sitter e de Friedmann

As propriedades de homogeneidade e isotropia são comuns aos modelos de Friedmann e de Sitter. Este fato foi empregado como justificativa para a utilização das equações de dinâmica de Friedmann – equações diferenciais para $a(t)$ – na dedução da expansão inflacionária do fator de escala admitida pelo modelo de de Sitter [ver eqs. (2.27) ou (2.30)]. Entretanto, o fator de escala $a(t)$ não apareceu de maneira natural no tratamento que demos até aqui para o modelo cosmológico de de Sitter. Não obstante, podemos mostrar a equivalência dos intervalos quadráticos de Friedmann-Robertson-Walker e de Sitter sob certas condições, o que nos autoriza a usar o fator de escala, típico de um modelo não-estático, no caso de de Sitter. Vejamos como isso acontece.

Tomemos o elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker na forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - e^{g(t)} \left[\frac{dr^2}{1 - k(r^2/\mathcal{R}^2)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.63)$$

onde

$$\frac{a^2(t)}{\mathcal{R}^2} \equiv e^{g(t)}, \quad (2.64)$$

conforme devivado no capítulo anterior – eqs. (1.11) e (1.10). O parâmetro de curvatura k pode assumir os valores $+1, 0, -1$ de acordo com a geometria da seção espacial do modelo padrão.

Fixar $k = 0$ significa dotar o espaço de geometria plana, fazendo cada seção espacial infinita e ilimitada. É nessa circunstância que o elemento de linha acima escreve-se

$$ds^2 = dt^2 - e^{g(t)} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.65)$$

com $c = 1$. Comparando (2.65) com o elemento de linha estacionário de de Sitter, eq. (2.61),

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Kt} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2),$$

notamos a equivalência dos intervalos quadráticos se valer a relação

$$g(t) = 2Kt,$$

ou seja, se

$$a(t) = \mathcal{R}e^{t/\mathcal{R}}. \quad (2.66)$$

Este resultado é idêntico a (2.27),

$$a(t) = \mathcal{R}e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}, \quad (2.67)$$

onde $c = 1$, $t_0 = 0$, $a_0 = \mathcal{R}$, pois a identificação

$$\frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{\Lambda}{3} \quad (2.68)$$

é consistente com a ausência de fontes no universo de de Sitter [conforme eq. (2.55) e a vindoura eq. (2.72)], assunto da próxima seção.

Existe, portanto, um mapeamento do *modelo não-estático de Friedmann de seção espacial de geometria plana* para o *modelo estacionário de de Sitter*, associado a um espaço-tempo necessariamente curvo e hiperbólico para $\Lambda \neq 0$.

2.3.3 Ausência de Fontes ou Equação de Estado Exótica no Universo de de Sitter

O modelo de de Sitter resultou da imposição da condição $\rho + p = 0$ sobre o modelo de universo estático e com simetria esférica. A densidade de matéria, por sua natureza física, pode ser positiva ou zero. Para vermos a condição citada respeitada, resta à pressão assumir valores negativos,

$$p = -\rho. \quad (2.69)$$

Entretanto, uma equação de estado deste tipo é pelo menos exótica. Mesmo que se permita que o fluido ideal a constituir o modelo tenha forças coesivas, nenhum material conhecido apresenta uma pressão negativa igual à densidade. Falamos em pressão negativa associada a forças coesivas porque a noção de pressão a que estamos habituados é aquela de variação do trabalho realizado pelo fluido por variação do volume do recipiente que o encerra,

$$p = \frac{dW}{dV}. \quad (2.70)$$

Pictoricamente, as moléculas do fluido ideal, que não interagem entre si mas apenas com as paredes do envólucro, batem nas paredes do recipiente e transferem momento a elas, deformando-as e expandindo-as se forem elásticas, empurrando êmbolos, etc.. O sentido positivo é o de expansão. Uma pressão negativa seria, por outro lado, aquela realizada pelo fluido no sentido de agregar os seus elementos constituintes; alternativamente, pressão negativa seria o trabalho realizado pelas paredes do envólucro sobre o fluido. Mas esta explicação não basta para o caso da gravitação.

Para aplicarmos a termodinâmica ao nosso modelo de universo, além da necessidade de equilíbrio térmico entre os constituintes do sistema – o que nem sempre se pode esperar ou exigir – falta solucionar estas questões: o que faria o papel das paredes do recipiente no caso do universo; e, mesmo que o sinal negativo pudesse ao cabo ser entendido sem controvérsias, como explicar a identificação entre pressão e densidade? (Qual matéria ou energia seria responsável por tal equação de estado?)

Uma resposta possível para a primeira pergunta talvez fosse: o campo gravitacional é que funciona como recipiente do próprio material que lhe serve de fonte. Se for desse modo, depreenderíamos da equação de estado exótica (2.69) que tanto maior a força de coesão do campo gravitacional quanto maior a quantidade de matéria existente no universo. Isto não soa em desacordo com a teoria da gravitação, mas é apenas uma conjectura. Mas então se coloca o problema de como confirmar esta hipótese. O fato surpreendente é que a equação de estado proporcional a densidade de energia, que promoveria a coesão das fontes da gravitação e que caracteriza o modelo de de Sitter, gere uma solução de expansão exponencial ou inflacionária para o fator de escala do universo (uma medida de distância entre dois pontos do espaço no modelo) em razão do sinal negativo. Isto se vê com maiores detalhes no desenvolvimento da seção 2.2.3, apresentada acima.

Para evitar as dificuldades que comentamos é de praxe satisfazer a condição do modelo de de Sitter $\rho + p = 0$ adotando a pressão e a densidade ambas iguais a zero,

$$\rho = 0 \quad \text{e} \quad p = 0, \quad (2.71)$$

correspondente ao universo vazio, sem quantidades apreciáveis de matéria e energia.

Como consequência de se tomar $\rho = 0$ obtemos uma simplificação da equação (2.55) que relaciona o pseudo-raio do universo** $\mathcal{R}$ e a constante cosmológica,

$$\frac{1}{\mathcal{R}^2} = \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.72)$$

que é a mesma relação desenvolvida na primeira abordagem ao modelo de de Sitter,

$$\Lambda = -\frac{3s}{\mathcal{R}^2}. \quad (2.73)$$

O sinal $s = -1$ é consistente com uma constante cosmológica positiva. As observações parecem indicar que de fato $\Lambda > 0$. Neste caso, a expressão (2.72), ou equivalentemente (2.73), indica que o modelo é o do espaço-tempo $dS(4, 1)$ de de Sitter. Se, eventualmente, a constante cosmológica for nula, o modelo degenera no espaço-tempo plano e aberto da relatividade restrita. Caso a constante cosmológica se revele negativa, então $\mathcal{R}$ não é um número real e o universo de de Sitter é espacialmente aberto mas curvo [de acordo com (2.72)] e $s = +1$ [segundo (2.73)]; o universo é representado pela geometria $dS(3, 2)$ do espaço de anti-de Sitter. Nós tomaremos $\Lambda > 0$.

Há mais uma observação interessante a fazer a respeito da hipótese de ausência de matéria e radiação no modelo de de Sitter. A solução exterior de Schwarzschild na presença de um termo cosmológico, que trata da geometria do espaço vazio ao redor de um sistema estático finito de simetria esférica††,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - (2m/r) - (\Lambda r^2/3)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.74)$$

se reduz ao elemento de linha de de Sitter para um universo sem fontes,

$$ds^2 = \left(1 - r^2/\mathcal{R}^2\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2/\mathcal{R}^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.75)$$

se anulamos a massa m da esfera de matéria na origem e aplicamos (2.72).

2.3.4 O Comportamento de Partículas e Raios de Luz no Espaço de de Sitter

O modelo de de Sitter representa um universo sem fontes. A introdução de qualquer forma de matéria ou energia provocaria um desvio no elemento de linha padrão

**O fato de $\mathcal{R}$ ser chamado de pseudo-raio do universo será justificado a seu tempo.

††Ver referência [1] à página 245.

(2.56). Entretanto, seguindo o exemplo do que se faz no eletromagnetismo, usamos partículas-teste, que por hipótese não alteram o modelo, para estudar equações de movimento de objetos no espaço-tempo de de Sitter. As referidas partículas seguirão geodésicas no espaço tempo; estas curvas tem a forma geral $\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0$, e quando especificadas para o caso do modelo em questão levam a

$$\begin{aligned}\frac{dr}{ds} &= \pm \sqrt{\kappa^2 - 1 + \frac{r^2}{\mathcal{R}^2} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^2}{\mathcal{R}^2}}, \\ \frac{d\phi}{ds} &= \frac{h}{r^2}, \\ \frac{dt}{ds} &= \frac{\kappa}{1 - r^2/\mathcal{R}^2},\end{aligned}\tag{2.76}$$

se admitimos que o movimento da partícula se inicia no plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ e a partir do repouso com respeito ao ângulo θ , $\frac{d\theta}{ds} = 0$. Nas eqs. (2.76) os parâmetros h e κ são constantes de integração, sendo que κ deve assumir valores positivos porque consideramos aumento da coordenada temporal t à medida que o tempo próprio s aumenta.

Órbitas das partículas

A órbita das partículas terá a sua forma determinada pela equação diferencial

$$d\phi = \frac{h dr}{r^2 \sqrt{\frac{r^2}{\mathcal{R}^2} + \left(\kappa^2 - 1 + \frac{h^2}{\mathcal{R}^2}\right) - \frac{h^2}{r^2}}},\tag{2.77}$$

encontrada facilmente pela combinação das eqs. (2.76). Esta combinação é possível, pois segundo a equação para $\frac{d\phi}{ds}$, ϕ é função monotônica crescente ou decrescente de s (dependendo do sinal de h) e por isso é possível fazer a inversão, escrevendo s em função de ϕ , para a posterior substituição em $\frac{dr}{ds}$. A eq. (2.77) é o análogo da equação diferencial que descreve o movimento de uma partícula sob ação de uma força central repulsiva proporcional ao raio r que aparece em mecânica clássica Newtoniana [23]; e estabelecemos, assim, uma conexão com a interpretação dada na seção 2.2.4 para o significado da constante cosmológica. Então, no modelo de de Sitter, a órbita de partículas livres expressa em termos das coordenadas r , θ , ϕ é em geral curvada para fora da origem como se os corpos fossem repelidos por ela.

As eqs. (2.76) também permitem o cálculo da velocidade e da aceleração das partículas no modelo. É conveniente obtê-las como derivadas (de primeira e segunda ordem) em relação ao tempo t e não em relação ao tempo próprio s . A justificativa para isto é que iremos nos fixar como observadores em repouso na origem, para quem o tempo coordenado t é igual ao tempo próprio, como se vê do elemento de linha (2.56).

Eliminando ds das duas primeiras equações em (2.76) obtemos a *velocidade* orbital:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \pm \frac{1 - r^2/\mathcal{R}^2}{\kappa} \sqrt{\kappa^2 - 1 + \frac{r^2}{\mathcal{R}^2} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^2}{\mathcal{R}^2}}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{h(1 - r^2/\mathcal{R}^2)}{\kappa r^2}.\end{aligned}\quad (2.78)$$

Note-se que ambas as velocidades se anulam em $r = \mathcal{R}$, e isso é um indício do por que chamamos $\mathcal{R}$ de raio do universo. No periélio, quando a partícula mais se aproxima da origem, a velocidade radial se anula e, portanto, vale $\kappa^2 - 1 + \frac{r^2}{\mathcal{R}^2} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{h^2}{\mathcal{R}^2} = 0$.

Diferenciando as relações (2.78) com respeito ao tempo encontramos a *aceleração* orbital:

$$\begin{aligned}\frac{d^2r}{dt^2} &= -\frac{2r/\mathcal{R}^2}{1 - r^2/\mathcal{R}^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{1 - r^2/\mathcal{R}^2}{\kappa}\right)^2 \left(\frac{r}{\mathcal{R}} + \frac{h^2}{r^3}\right), \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} &= -\frac{2h}{\kappa r^3} \frac{dr}{dt}.\end{aligned}\quad (2.79)$$

A aceleração também desaparece em $r = \mathcal{R}$. A aceleração radial de uma partícula que tem velocidade radial nula é sempre positiva entre $r = 0$ e $r = \mathcal{R}$, o que significa que uma partícula que atinge o periélio e começa a se afastar da origem nunca mais retorna a ela. Veja também que uma partícula em repouso na origem, com $r = 0$ e $h = 0$, terá aceleração nula e nela permanecerá, justificando o fato de nos termos posicionado na origem, tomada como ponto privilegiado de observação neste sistema de coordenadas. Por outro lado, estas coordenadas não evidenciam o caráter homogêneo do espaço, propriedade que já demonstramos.

Caminho dos raios de luz

A trajetória dos raios de luz é encontrada mediante uma equação semelhante a (2.77), mas que é consistente com o fato de o intervalo invariante dos raios de luz se anular, $ds = 0$, qual seja^{‡‡}

$$d\phi = \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{\kappa^2 - 1}{h^2} + \frac{1}{\mathcal{R}^2} - \frac{1}{r^2}}}, \quad (2.80)$$

e que corresponde ao análogo Newtoniano da partícula sob a ação de uma força central que tende a zero. A integração da equação acima oferece a solução $r \cos \phi +$

^{‡‡}Como ds se anula no caso da luz, as eqs. (2.76) perdem o significado e devemos adotar um outro parâmetro variacional, que não o intervalo s , para determinar as equações geodésicas obedecidas pela luz. Combinando, então, os resultados desse procedimento encontramos (2.80). Para detalhes, ver ref. [24], capítulo II.

$ar \sin \phi = b$, onde a e b são constantes. Ao colocarmos esta solução em coordenadas cartesianas ao invés da forma polar em que se apresenta, percebemos que a trajetória da luz é uma reta.

A velocidade da luz no modelo é obtida fazendo $ds^2 = 0$ no elemento de linha (2.56). Temos:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}\right) \left[r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right], \quad (2.81)$$

que se reduz a

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{r^2}{\mathcal{R}^2}\right) \quad (2.82)$$

no caso de movimento puramente radial. Ao integramos esta identidade de $r = 0$ a $r = \mathcal{R}$ percebemos que leva um tempo infinito para um raio de luz que deixa o ponto $r = \mathcal{R}$ atingir um observador na origem. Logo, não podemos obter nenhuma informação de possíveis eventos ocorrendo em $r = \mathcal{R}$ ou além desse ponto. Com essa conclusão, justificamos cabalmente a afirmação de que $\mathcal{R}$ é o pseudo-raio do universo (*pseudo* pois se trata de um espaço pseudo-euclidiano, que pode ser aberto).

Efeito Doppler

Espera-se que luz emitida por fontes em movimento sofra um desvio em comprimento de onda segundo a perspectiva de um observador na origem. Vejamos: seja t_1 o instante em que um pulso de luz deixa a fonte localizada em r e t_0 o instante em que o mesmo sinal é percebido pelo observador; a igualdade (2.82) pode ser integrada para dar o intervalo de tempo:

$$t_0 = t_1 + \int_0^r \frac{dr}{1 - r^2/\mathcal{R}^2},$$

em que usamos o sinal negativo da velocidade porque a luz viaja no sentido do decréscimo de r . Uma nova crista de onda chegará à origem no tempo $t_0 + \delta t_0$ tendo partido da fonte em $t_1 + \delta t_1$ (de acordo com o observador na origem). Para contabilizar estes pequenos acréscimos, tomamos a diferencial temporal da expressão acima calculando cada membro no seu respectivo tempo:

$$\delta t_0 = \left(1 + \frac{1}{1 - r^2/\mathcal{R}^2} \frac{dr}{dt}\right) \Big|_{t=t_1} \delta t_1. \quad (2.83)$$

O intervalo de tempo próprio δt_1^0 para um observador na fonte que mede a diferença temporal entre duas cristas relaciona-se ao intervalo δt_1 de acordo com

a última das eqs. (2.76):

$$\delta t_1^0 = \frac{1 - r^2/\mathcal{R}^2}{\kappa} \delta t_1; \quad (2.84)$$

enquanto que o intervalo de tempo próprio na recepção δt_0^0 é igual ao intervalo de tempo coordenado δt_0 , tendo em vista a já comentada igualdade entre s e t na origem:

$$\delta t_0^0 = \delta t_0. \quad (2.85)$$

A razão entre os intervalos de tempo próprio (2.85) e (2.84) dá o desvio relativo no comprimento de onda. Empregando (2.83) temos:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{\kappa}{1 - r^2/\mathcal{R}^2} + \frac{\kappa}{(1 - r^2/\mathcal{R}^2)^2} \frac{dr}{dt}, \quad (2.86)$$

com a posição r e a velocidade dr/dt sendo calculadas no tempo de emissão.

Lembramos que constante κ que aparece na expressão do *red-shift* (2.86) é necessariamente positiva. Dependendo, então, do sinal e da magnitude da velocidade radial perceberemos um desvio no sentido de comprimentos de onda maiores (*red-shift*) ou menores (*blue-shift*).

Embora a eq. (2.86) permita a ocorrência de desvio tanto para o vermelho quanto para o azul, existe um favorecimento do primeiro tipo de desvio: mesmo que a fonte esteja se aproximando da origem ($\frac{dr}{dt} < 0$) a intensidade da velocidade da fonte deve ser alta o suficiente para que o segundo termo supere o primeiro termo de (2.86). Porém, ao se aproximar da origem $\frac{dr}{dt}$ vai diminuindo de magnitude até anular-se no periélio. Consequentemente, o red-shift começará antes da passagem da fonte pelo periélio e continuará permanentemente depois desse acontecimento. Esta característica é conveniente, uma vez que observa-se um enorme predomínio de red-shifts sobre blue-shifts em todas as observações da astronomia extragaláctica. Porém, a identidade (2.86) não explica a relação linear entre o desvio em comprimento de onda e a distância da fonte, $\frac{\delta\lambda}{\lambda} \simeq kr$, estabelecida empiricamente e extensivamente por Hubble.

Esta última desvantagem pode ser eliminada com o emprego simultâneo do elemento de linha de de Sitter na versão estacionária de Robertson (2.61) e da *hipótese de Weyl*. Segundo a hipótese de Weyl as galáxias seguem geodésicas não interseptantes e um único tempo cósmico próprio é definido. Não mostraremos aqui mas, aplicando a equação da geodésica a partículas tendo componentes espaciais da velocidade nulas vemos que a aceleração delas é nula. Tais partículas permanecem em repouso com respeito a r , θ , e ϕ . Isto não significa que não haja efeito Doppler

gravitacional. De fato, depreendemos de (2.61) a velocidade radial da luz nas coordenadas de Robertson e Lemaître,

$$\frac{dr}{dt} = \pm e^{-kt}. \quad (2.87)$$

Desta equação segue o red-shift na parametrização estacionária do modelo de de Sitter

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = e^{k(t_0 - t_1)}, \quad (2.88)$$

por um procedimento análogo ao que utilizamos antes.

Na aproximação de pequenas distâncias até a fonte, a eq. (2.88) dá a lei de Hubble

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \simeq k(t_0 - t_1) \simeq kr, \quad (2.89)$$

como desejado.

Esse sucesso e a grande possibilidade de o universo estar se expandindo de maneira acelerada podem decretar a validade desse modelo – ou de uma variante sua – na fase atual da dinâmica cósmica. As matérias luminosa e escura seriam responsáveis por uma perturbação na forma do elemento de linha (2.56): o modelo de de Sitter não admite fontes mas sabemos das observações recentes que a constante cosmológica (ou a equação de estado $p = -\rho$) domina em larga escala. Direcionaremos o discurso na tentativa de interpretação dessa fonte de energia escura ou Λ .

Capítulo 3

Extensões do Modelo Padrão

3.1 Os Modelos Vazios de Lemaître

Há outro modelo vazio e com constante cosmológica: o modelo de Lemaître. Ele também fornece soluções interessantes para a equação de Einstein, como a que permite aceleração para o estágio atual da história do nosso universo, algo condizente com alguns dados de supernovas obtidos em 1997 [25].

Como vimos, $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$ é significativamente maior do que a quantidade análoga relacionada à matéria Ω_m , seja ela bariônica ou não-bariônica (escura). Além disso, existem indícios de que uma parte importante da matéria do universo, cerca de 30%, seja escura*, o que significaria afirmar com segurança que $\Omega_{b0} < \Omega_{me}$, e podemos certamente dizer que $\Omega_\Lambda \gg \Omega_{b0}$.[†] Assim,

$$\frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \gg \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0,$$

ou seja,

$$\Lambda \gg \frac{8\pi G}{c^2} \rho_0, \quad (3.1)$$

quando se trata do universo em larga escala. Obviamente, em escalas menores, como o sistema solar, a condição (3.1) não pode ser válida, uma vez que o valor de Λ local é da ordem de $10^{-50} m^{-2}$.[‡] Desse modo, nos sentimos justificados ao fazer um estudo negligenciando a densidade de matéria nas equações de Friedmann do

*As curvas de rotação de galáxias espirais mostram que deve existir uma quantidade de matéria não-bariônica maior do que a própria matéria luminosa, nas fronteiras do disco galático, para que o sistema seja, conforme se observa, gravitacionalmente ligado e estável.

[†]Segundo [10] $\Omega_\Lambda \simeq 0,7$ e $\Omega_m \simeq 0,3$. Existem também medidas que apontam para $h \simeq 0,7$.

[‡]Esse resultado segue dos cálculos feitos com as observações astronômicas afim de testar a Relatividade Geral.

modelo cosmológico padrão,

$$\begin{cases} \dot{a}^2 = \left[2 \left(\frac{4\pi G}{3} \right) \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} \right] a^2 - kc^2 \\ \ddot{a} = \left[\frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \right] a \end{cases}, \quad (3.2)$$

mantendo porém a constante cosmológica Λ e a curvatura k não nulas – fazer $k = 0$ é recuperar a solução inflacionária obtida no modelo de de Sitter, conforme vimos no capítulo anterior. O comportamento do universo será, pois, governado pela constante cosmológica.

A primeira das igualdades em (3.2) com $\rho \approx 0$ fica:

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} a^2 - kc^2, \quad (3.3)$$

e seguem-se os casos abaixo.

(i) *Curvatura Positiva e $\Lambda \neq 0$.* Tomando $k = +1$ em (3.3) avaliamos

$$\dot{a}^2 = c^2 \left(\frac{\Lambda}{3} a^2 - 1 \right), \quad (3.4)$$

e desta relação concluímos que $\left(\frac{\Lambda}{3} a^2 - 1 \right)$ deve ser sempre maior ou igual a zero,

$$\left(\frac{\Lambda}{3} a^2 - 1 \right) \geq 0,$$

e que, portanto,

$$a \geq \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}. \quad (3.5)$$

Esta inequação mostra que a constante cosmológica deve ser positiva

$$\Lambda > 0,$$

e que o fator de escala do universo nunca se anula, e conseqüentemente *não há Big Bang* neste modelo.

Integrando a equação diferencial (3.4) obtemos a solução do modelo

$$a(t) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct \right], \quad (3.6)$$

onde tomamos a condição inicial $a(t=0) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ consistente com a relação (3.5) exigida pela forma da equação diferencial. Para $t > t_{\min}$ (lembrando que tomamos $t_{\min} = 0$) o universo expande-se monotonicamente.

Reescrevemos a eq. (3.6), expressando-a em termos de $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$ e H_0 , assim:

$$a(t) = \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \cosh \left[H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t \right]. \quad (3.7)$$

(ii) *Curvatura Negativa e $\Lambda \neq 0$.* Tomando $k = -1$ em (3.3) encontramos

$$\dot{a}^2 = c^2 \left(\frac{\Lambda}{3} a^2 + 1 \right),$$

que integrada dá

$$a(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh \left[\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct \right] & \text{para } \Lambda > 0, \\ \sqrt{\frac{3}{-\Lambda}} \sin \left[\sqrt{\frac{-\Lambda}{3}} ct \right] & \text{para } \Lambda < 0 \end{cases}. \quad (3.8)$$

Vemos que para $t = 0$ ambas as soluções possíveis para o fator de escala se anulam, $a(0) = 0$, implicando a existência do *Big Bang*. A primeira solução, por apresentar um seno hiperbólico de uma função linear em t com $t > 0$, é monotonicamente crescente representando um universo sempre em expansão. A segunda solução é do tipo seno, e assim sendo, apresenta um universo oscilante de período $\tau = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{3}{-\Lambda}}$. Dito de outra forma, em um universo com um valor positivo de Λ , a expansão será acelerada; enquanto em um universo com valor negativo de Λ , a expansão irá diminuir, parar e se reverter.

Portanto, um valor positivo de Λ corresponde a uma densidade de massa efetiva negativa (repulsão), e um valor negativo de Λ corresponde a uma densidade de massa efetiva positiva (atração).

Embora este modelo tenha previsto a existência do Big Bang, ele não pode ser empregado para valores de tempo próximos de $t = 0$, pois então a densidade de matéria e energia do universo real seria alta demais para ser desprezível em comparação com a constante cosmológica.

A eq. (3.8) pode ser escrita de uma segunda maneira:

$$a(t) = \begin{cases} \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}} \sinh \left[H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t \right] & \text{para } \Omega_\Lambda > 0, \\ \frac{c}{H_0 \sqrt{-\Omega_\Lambda}} \sin \left[H_0 \sqrt{-\Omega_\Lambda} t \right] & \text{para } \Omega_\Lambda < 0 \end{cases}. \quad (3.9)$$

Com as equações (3.7) e (3.9), construímos o gráfico das soluções de Lemaître, apresentado na figura 3.1.

Note-se que as soluções hiperbólicas convergem a altos valores de T , quando a constante cosmológica domina sobre a curvatura. A solução senoidal tem período $7,51/H_0 = 7,36 \times 10^{10} \text{ h}^{-1} \text{ anos}$.

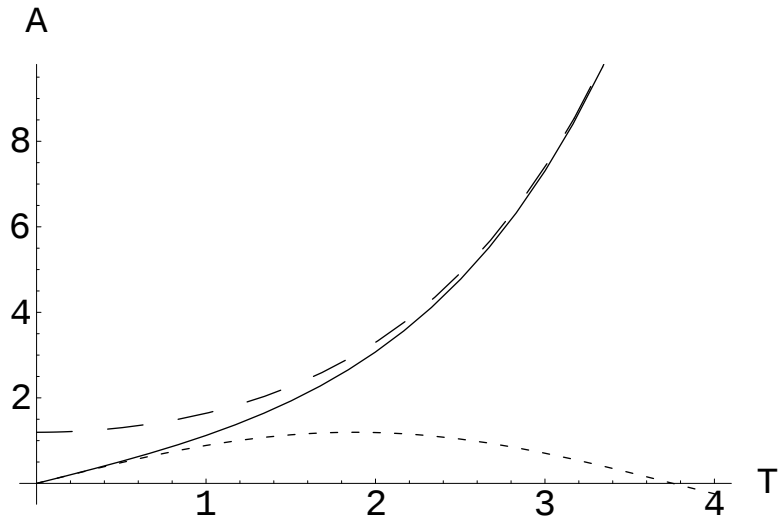


Figura 3.1: Gráfico das soluções para o fator de escala conforme os modelos vazios de Lemaître. Empregamos as quantidades adimensionais $A \equiv (H_0/c)a$ e $T \equiv H_0 t$, e também o valor de Ω_Λ mais favorecido pelas observações atuais [10], $\Omega_\Lambda = 0,7$. A curva tracejada superior representa a solução de $k = +1$ um cosseno hiperbólico, a curva contínua é a solução correspondente a $k = -1$ e $\Lambda > 0$ um seno hiperbólico, e a curva tracejada inferior dá a solução correspondente a $k = -1$ e $\Lambda < 0$ uma função senoidal.

Estabelecemos, então, o quadro geral resumido na tabela a seguir:

<i>Modelo de Friedmann, $\Lambda = 0$</i>		
<i>Curvatura</i>	<i>Tri-volume</i>	<i>Dependência temporal de $a(t)$</i>
$k = +1$	finito	oscilatório (de período $\frac{\pi q_0}{H_0(2q_0-1)^{3/2}}$)
$k = -1$	infinito	monotônico crescente (para $t > 0$)
$k = 0$	infinito	monotônico crescente (para $t > 0$)
<i>Modelo de Lemaître, $\Lambda \neq 0$</i>		
<i>Curvatura e Λ</i>	<i>Tri-volume</i>	<i>Dependência temporal de $a(t)$</i>
$k = +1, \Lambda > 0$	infinito	monotônico crescente (para $t > t_{\min}$)
$k = -1, \Lambda > 0$	infinito	monotônico crescente (para $t > 0$)
$k = -1, \Lambda < 0$	finito	oscilatório (de período $\frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{3}{-\Lambda}}$)
<i>Modelo de de Sitter, $\Lambda > 0, k = 0$</i>		
<i>Tri-volume</i>	<i>Dependência temporal de $a(t)$</i>	
infinito	monotônico crescente, tipo exponencial	

Tabela 3.1: *Modelos de Universo Estacionários Homogêneos e Isotrópicos. A grandeza $q_0 = -\left(1 + \frac{\dot{H}_0}{H_0^2}\right)$ é o parâmetro de desaceleração do universo.*

Vemos na tabela acima que não existem modelos vazios de Lemaître com $\Lambda < 0$ monotonicamente crescentes. Isso é consistente com a interpretação que demos para a constante cosmológica negativa como densidade de energia de vácuo positiva: a medida que o volume do universo aumenta, a energia efetiva de vácuo precisa crescer para manter a densidade constante; esse acréscimo em energia contribui como fonte da gravitação interrompendo a expansão e, ao cabo, levando a contração de $a(t)$. Concluimos, por extensão, que *Modelos Não-Vazios de Lemaître* com $\Lambda < 0$ devem necessariamente ser oscilantes. Por outro lado, para decidir o comportamento de $a(t)$ para modelos não-vazios com $\Lambda > 0$ devemos considerar se a densidade de matéria (bariônica e escura) é mais importante que a densidade de energia de vácuo: se sim, o universo sofrerá contração, se não – conforme indicam as observações – haverá expansão monotônica.

Diante deste quadro geral e das observações mais recentes, façamos algumas conjecturas acerca da história térmica do universo. Um universo que começa com Big Bang possui uma fase inicial de alta densidade de matéria, em relação à qual a constante cosmológica é desprezível, e o modelo adequado a descrever o universo deve ser o de Friedmann. Porém, tendo em vista a grande probabilidade de ocorrência da inflação no universo primordial, a solução para o fator de escala nesse período deve

ser do tipo exponencial, o que nos leva a admitir uma equação de estado exótica para o modelo de Friedmann $p = -\epsilon$ (ϵ é a densidade de energia), e a recair no modelo de de Sitter. A inflação terminaria com a passagem da equação de estado exótica para a equação convencional $p = \epsilon/3$ de um gás de fótons (a qual posteriormente daria lugar a $p = nkT$ de um gás de matéria ideal); à partir daí, teríamos o modelo cosmológico padrão de Friedmann com expansão em desaceleração.

À medida que o tri-volume do universo vai aumentando, a densidade de matéria diminui e a importância da constante cosmológica aumenta, até que eventualmente Λ passa a dominar a dinâmica cósmica e a sua descrição adequada torna-se a dos modelos vazios de Lemaître, com curvatura negativa ou positiva.

A solução inflacionária e as medidas indicam uma constante cosmológica positiva. Se for desse modo, o modelo de Lemaître (seja de curvatura positiva ou negativa) possivelmente dará conta da aceleração observada na expansão do fator de escala.

Esse quadro de evolução, que termina com um modelo de Lemaître monotônico crescente – de constante cosmológica positiva, será realista apenas no caso de as observações indicarem um parâmetro de curvatura que não seja nulo. Porém, as medidas apontam para o anulamento de k . A alternativa é tratar a fase final da história do universo como um modelo de Friedmann dominado pela matéria em detrimento da radiação e na presença de constante cosmológica, mas com parâmetro de curvatura nulo. Esta abordagem alternativa é assunto da seção 3.3.

3.2 Nova Condição Inicial nas Soluções de Referência

No primeiro capítulo resolvemos as equações de Friedmann para $a(t)$ integrando equações diferenciais de primeira ordem. Então, precisamos de uma condição inicial para selecionarmos uma solução particular na família de soluções possíveis. Fixamos, naquela ocasião, que o instante inicial $t = 0$ implicaria $a(t = 0) = 0$, ou equivalentemente, $H(t = 0) \rightarrow \infty$. Esta hipótese não é a saída mais confiável uma vez que não temos acesso direto ao suposto *Big Bang* via observação. Todavia, medimos o valor atual da constante de Hubble, de modo que julgamos mais adequado adotar a “condição atual” $H(t_0) = H_0$ em lugar da condição inicial anterior[§]. Quando fazemos isso as soluções são ligeiramente modificadas, embora o procedimento de cálculo seja idêntico ao desenvolvido anteriormente (e ao realizado nos outros modelos desse capítulo). Por isso apresentamos apenas os resultados.

[§]O índice zero refere-se sempre a quantidades atuais.

3.2.1 As Novas Equações da Era da Matéria

A função de Hubble:

$$H(t) = \frac{H_0}{1 + \frac{3}{2}H_0(t - t_0)}. \quad (3.10)$$

O parâmetro de escala:

$$a(t) = a_0 \left[1 + \frac{3}{2}H_0(t - t_0) \right]^{2/3}. \quad (3.11)$$

Veja-se que $a(t = 0) = 0$ – o que chamamos *Big Bang* – somente se

$$t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}, \quad (3.12)$$

i.e., apenas se a idade do universo é calculada mediante a equação (1.69) obtida na solução de Friedmann que assume a singularidade inicial.

Com a função $a(t)$ escrevemos o red-shift:

$$(1 + z) = \frac{a_0}{a(t)} = \frac{1}{\left[1 + \frac{3}{2}H_0(t - t_0) \right]^{2/3}}. \quad (3.13)$$

3.2.2 As Novas Equações da Era da Radiação

O parâmetro de escala:

$$a(t) = a_0 \sqrt{1 + 2H_0 \sqrt{\Omega_{\gamma 0}}(t - t_0)}, \quad (3.14)$$

e recuperamos o *Big Bang* – $a(t = 0) = 0$ – se

$$t_0 = \frac{1}{2H_0 \sqrt{\Omega_{\gamma 0}}}, \quad (3.15)$$

como em (1.85) com $z = 0$.

O red-shift em função do tempo cósmico:

$$(1 + z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\sqrt{\Omega_{\gamma 0}}H_0(t - t_0)}}. \quad (3.16)$$

A função de Hubble:

$$H(t) = \frac{\sqrt{\Omega_{\gamma 0}}H_0}{1 + 2\sqrt{\Omega_{\gamma 0}}H_0(t - t_0)}. \quad (3.17)$$

3.3 Solução Tipo Friedmann para o Modelo Dominado pela Matéria com $k = 0$ e $\Lambda \neq 0$

Medidas recentes das inomogeneidades na radiação cósmica de fundo em microondas [10] mostram evidências para um universo plano em que domina a contribuição da constante cosmológica como fonte da gravitação. Portanto, o modelo cosmológico, em que a matéria domina sobre a radiação com $k = 0$ e $\Lambda \neq 0$, que ora resolvemos é, em tese, o mais adequado para a descrição do universo atual.

Essa solução difere dos Modelos Vazios de Lemaître porque naquele caso mantivemos $k \neq 0$ e também $\Lambda \neq 0$. A solução que apresentaremos a seguir também difere do Modelo de de Sitter. Em de Sitter anulamos o tensor energia momento das equações de Einstein e isso não acontece aqui. No cenário equivalente de de Sitter, anulamos Λ para considerar a equação de estado exótica $p = -\epsilon$, e também isso é diferente da sistemática da solução abaixo.

3.3.1 A Função $H(t)$

A equação de Friedmann em termos da função de Hubble obtida pela substituição de (1.53) em (1.54),

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}H^2 - 4\pi G \frac{p}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{2}, \quad (3.18)$$

fica

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}H^2 + \frac{\Lambda c^2}{2},$$

quando fazemos a aproximação de poeira $p \simeq 0$ empregada usualmente ao lidarmos com um modelo preenchido por matéria bariônica, e também fixamos $k = 0$ e $\Lambda \neq 0$. A equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dH}{dt} = \frac{3}{2} \left(\frac{\Lambda c^2}{3} - H^2 \right)$$

pode ser integrada apropriadamente, com a condição inicial (ou rigorosamente, atual) de que a função de Hubble assume o valor H_0 no tempo t_0 presente. Depois de algum trabalho de cálculo segue:

$$H(t) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} \frac{\left(\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} + H_0 \right) \exp \left[3 \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{2}} (t - t_0) \right] - \left(\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} - H_0 \right)}{\left(\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} + H_0 \right) \exp \left[3 \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{2}} (t - t_0) \right] + \left(\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} - H_0 \right)}. \quad (3.19)$$

Lembrando que

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2},$$

rescrevemos (3.19):

$$H(t) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} \frac{(\sqrt{\Omega_\Lambda} + 1) e^{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_0)} - (\sqrt{\Omega_\Lambda} - 1)}{(\sqrt{\Omega_\Lambda} + 1) e^{3H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_0)} + (\sqrt{\Omega_\Lambda} - 1)}. \quad (3.20)$$

No limite em que $\Lambda \rightarrow 0$, *i.e.*, $\Omega_\Lambda \rightarrow 0$, a equação acima se reduz à solução esperada no caso de referência em que se emprega a condição inicial $H(t_0) = H_0$, qual seja (3.10).

3.3.2 O Redshift em Função de $H(t)$

Usando a já conhecida densidade bariônica em função do red-shift, $\rho_b = \rho_{crit} \Omega_{b0} (1+z)^3$, na equação de Friedmann (1.53),

$$H^2 = 2 \left(\frac{4\pi G}{3} \right) \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3},$$

encontramos:

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{b0} (1+z)^3 + \Omega_\Lambda].$$

Ou

$$(1+z)^3 = \frac{1}{\Omega_{b0}} \left(\frac{H^2}{H_0^2} - \Omega_\Lambda \right). \quad (3.21)$$

E, fazendo $H^2 = H_0^2$, vem

$$\Omega_{b0} + \Omega_\Lambda = 1,$$

um vínculo já esperado para um modelo dominado pela matéria e pelo termo cosmológico. Ele é a redução de $\Omega_{b0} + \Omega_{\gamma 0} + \Omega_{me} + \Omega_{k0} + \Omega_\Lambda = 1$: estamos fazendo $k = 0$ e desprezando a energia da radiação e de uma eventual matéria escura[¶].

[¶]Uma situação mais realista exige que consideremos Ω_{me} como o conteúdo dominante sobre Ω_{b0} : se $\Omega_m \simeq 0,3$, $\Omega_{b0} \simeq 0,03$ e $\Omega_{\gamma 0} \simeq 0$, temos $\Omega_{me} \simeq 0,27$. Neste caso, a solução (3.20) só é válida caso possamos atribuir a equação de estado $p \simeq 0$ também para a matéria escura, *i.e.*, se estivermos lidando com matéria escura fria.

3.3.3 O Red-shif em Função do Tempo Cósmico t

Do resultado $(1+z) = a_0/a(t)$ e da definição da função de Hubble conclui-se que:

$$(1+z) = e^{-\int_{t_0}^t H(t)dt}. \quad (3.22)$$

Basta substituir a função $H(t)$ calculada acima [eq. (3.20)] nesta expressão para encontrarmos a relação entre o red-shift e o tempo cósmico no modelo:

$$(1+z) = (4\Omega_\Lambda)^{\frac{1}{3}} \frac{e^{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_0)}}{[(\sqrt{\Omega_\Lambda}+1)e^{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_0)} + (\sqrt{\Omega_\Lambda}-1)]^{\frac{2}{3}}}. \quad (3.23)$$

No limite em que $\Lambda \rightarrow 0$ a expressão (3.23) deve se reduzir ao resultado (3.13). É fácil verificar que isto de fato acontece, sendo suficiente expandir as exponenciais em série até primeira ordem antes de tomarmos o limite $\Omega_\Lambda \rightarrow 0$.

3.3.4 O Fator de escala $a(t)$

Do red-shift (3.23) e sua relação com $a(t)$ vem:

$$(1+z) = \frac{a_0}{a(t)} = (4\Omega_\Lambda)^{\frac{1}{3}} \frac{e^{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_0)}}{[(\sqrt{\Omega_\Lambda}+1)e^{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_0)} + (\sqrt{\Omega_\Lambda}-1)]^{\frac{2}{3}}}.$$

Portanto,

$$a(t) = \frac{a_0}{(4\Omega_\Lambda)^{1/3}} \frac{[(\sqrt{\Omega_\Lambda}+1)e^{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_0)} + (\sqrt{\Omega_\Lambda}-1)]^{2/3}}{e^{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_0)}}, \quad (3.24)$$

que naturalmente se reduz a (3.11) no limite $\Omega_\Lambda \rightarrow 0$.

O fator de escala nesse modelo se anulará para

$$(\sqrt{\Omega_\Lambda}+1)e^{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}(t-t_0)} + (\sqrt{\Omega_\Lambda}-1) = 0,$$

i.e.,

$$t - t_0 = \frac{1}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln \frac{(1 - \sqrt{\Omega_\Lambda})}{(1 + \sqrt{\Omega_\Lambda})}. \quad (3.25)$$

Empregando $\Omega_\Lambda \simeq 0,7$ encontramos o valor $9,44 \times 10^9$ *h anos* para a idade do universo.

Na figura 3.2 fazemos uma comparação gráfica entre as soluções $a(t)$ para o domínio da matéria dadas (i) pelo modelo padrão – quando $\Lambda = k = 0$ – e (ii) pela extensão do modelo padrão em que se toma $\Lambda \neq 0$ e $k = 0$.

Fica claro a partir da figura acima a ocorrência de uma expansão acelerada do fator de escala ($\ddot{a} > 0$) na presença de uma constante cosmológica não nula e positiva; diferente do que acontece no caso padrão, onde existe uma desaceleração no crescimento de a .

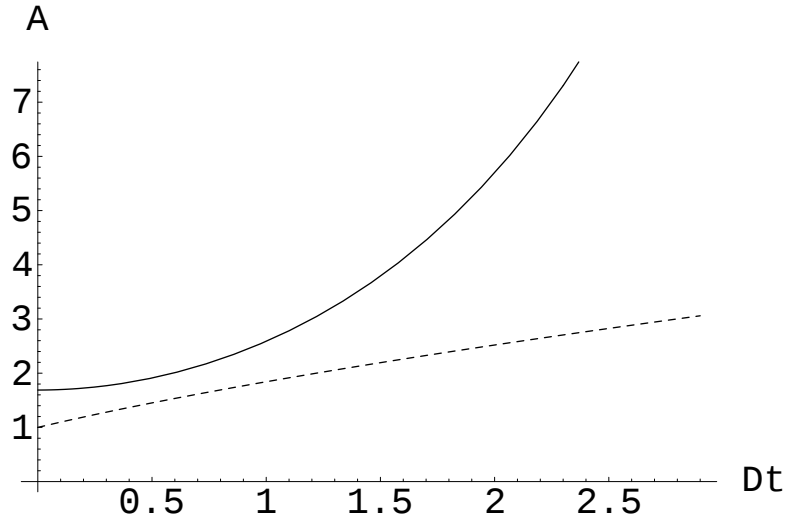


Figura 3.2: Gráfico do parâmetro de escala adimensional $A \equiv a/a_0$ em função do intervalo de tempo adimensional $\Delta t = H_0(t - t_0)$ para o modelo de Friedmann preenchido pela matéria (i) com $k = 0$ mas com $\Lambda \neq 0$ curva superior contínua e (ii) com $k = 0$ e $\Lambda = 0$ curva inferior tracejada.

3.4 Solução de Friedmann para o Modelo Dominado pela Radiação com $k \neq 0$ e $\Lambda = 0$

É comum na abordagem do modelo padrão estudar-se os destinos possíveis para um modelo de universo dominado pela matéria, com $\Lambda = 0$, e $k \neq 0$. Para um modelo preenchido de maneira dominante pela radiação, entretanto, não se faz uma análise semelhante. Pretendemos corrigir essa lacuna aqui.

3.4.1 O Fator de Escala $a(t)$

A eq. (3.18)

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}H^2 - 4\pi G \frac{p}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{2},$$

com a equação de estado típica da radiação $p = \frac{1}{3}\epsilon = \epsilon_0(1+z)^4 = \rho_{\gamma 0}c^2(a_0/a)^4$ e o anulamento da constante cosmológica leva à equação diferencial

$$\dot{a} = \sqrt{H_0^2 \Omega_{\gamma 0} \frac{a_0^4}{a^2} - kc^2}, \quad (3.26)$$

onde $\Omega_{\gamma 0} = \frac{\rho_{\gamma 0}}{\rho_{crit}}$.

A integração de (3.26) leva a

$$a(t) = \sqrt{\frac{H_0^2 \Omega_{\gamma 0} a_0^4}{kc^2} \left[1 - \left(\sqrt{1 - \frac{kc^2}{H_0^2 \Omega_{\gamma 0} a_0^2}} - \frac{kc^2}{\sqrt{H_0^2 \Omega_{\gamma 0} a_0^4}} (t - t_0) \right)^2 \right]}, \quad (3.27)$$

No processo de integração, tomamos $H(t_0) = H_0$ e desprezamos a solução negativa para $a(t)$.

Lembrando que

$$\Omega_{k0} = -\frac{kc^2}{a_0^2 H_0^2},$$

escreve-se

$$a(t) = a_0 \sqrt{1 + 2\sqrt{\Omega_{\gamma 0} + \Omega_{k0}} H_0 (t - t_0) + \Omega_{k0} H_0^2 (t - t_0)^2}. \quad (3.28)$$

Fazendo, agora, o limite $k \rightarrow 0$, *i.e.*, $\Omega_{k0} \rightarrow 0$, resulta:

$$a(t) = a_0 \sqrt{1 + 2\sqrt{\Omega_{\gamma 0}} H_0 (t - t_0)}, \quad (3.29)$$

que é a solução (3.14) esperada para um modelo dominado pela radiação em que a constante de curvatura se anula.

O fator de escala (3.28) anula-se para

$$(t - t_0) = \frac{1}{H_0} \frac{\sqrt{\Omega_{\gamma 0}}}{\Omega_{k0}} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\Omega_{k0}}{\Omega_{\gamma 0}}} \right), \quad (3.30)$$

que assume valor negativo pois o instante do Big Bang é anterior ao instante atual t_0 .

O gráfico da solução (3.28) pode ser construído desde que se forneçam valores para $\Omega_{\gamma 0}$ e Ω_{k0} . Apenas para conhecermos a forma de $a(t)$ dado por (3.28) fixemos arbitrariamente $\Omega_{\gamma 0} = 0,05$ e $\Omega_{k0} = 0,7$, atribuindo aos parâmetros os valores assumidos respectivamente por Ω_m e Ω_Λ segundo as medidas recentes. O resultado é a figura 3.3.

O Big Bang é previsto para $t = t_0 - 8,99 \times 10^9 h^{-1}$ anos de acordo com o valor corrente para H_0 ; ou seja, ocorreu a $8,99 \times 10^9 h^{-1}$ anos atrás, de acordo com o modelo em questão e os valores arbitrários dados a $\Omega_{\gamma 0}$ e Ω_{k0} .

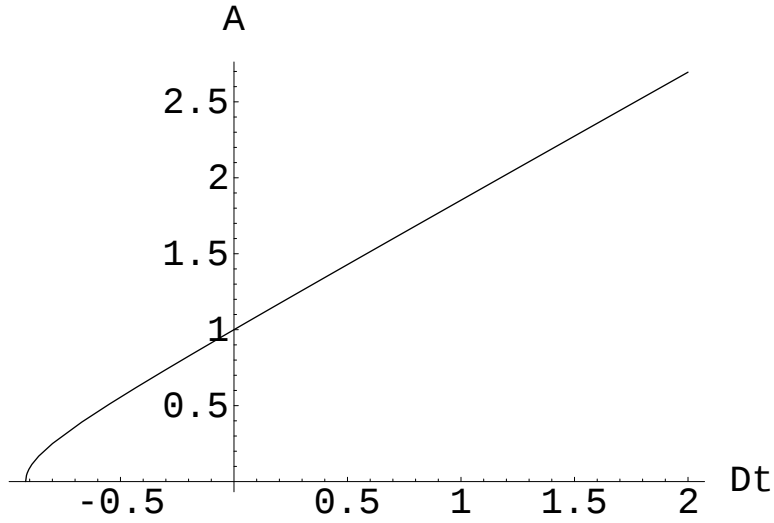


Figura 3.3: Gráfico do parâmetro de escala adimensional $A \equiv a/a_0$ em função do intervalo de tempo $\Delta t = H_0(t - t_0)$ para o modelo de Friedmann preenchido pela radiação com curvatura não nula e $\Lambda = 0$.

Comentário Embora tenhamos mostrado a alteração da solução $a(t)$ em um universo dominado pela radiação com parâmetro de curvatura k diferente de zero, é interessante notar que a curvatura escalar de Ricci R é nula e assim permanece quando empregamos a equação de estado típica da radiação $p = \frac{\epsilon}{3}$, independentemente do valor de k . Para vermos isso, consideremos a contração da equação de Einstein sem constante cosmológica, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$, com o tensor métrico:

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T,$$

onde

$$T = \epsilon - 3p \quad (3.31)$$

no sistema de coordenadas co-móveis que empregamos. De (3.31) 'é imediato que T , e portanto R , anula-se quando tomamos $p = \frac{\epsilon}{3}$.

3.4.2 O Red-shif em Função do Tempo Cósmico t

Empregando a equação (3.28):

$$(1+z) = \frac{a_0}{a(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\sqrt{\Omega_{\gamma 0} + \Omega_{k0}}H_0(t - t_0) + \Omega_{k0}H_0^2(t - t_0)^2}}. \quad (3.32)$$

Para $\Omega_{k0} \rightarrow 0$,

$$(1+z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\sqrt{\Omega_{\gamma 0}} H_0 (t - t_0)}}, \quad (3.33)$$

como deveria ser [vide (3.16)].

3.4.3 A Função $H(t)$

É imediato da definição da função de Hubble e de (3.28) que

$$H(t) = \frac{\sqrt{\Omega_{\gamma 0} + \Omega_{k0}} H_0 + \Omega_{k0} H_0^2 (t - t_0)}{1 + 2\sqrt{\Omega_{\gamma 0} + \Omega_{k0}} H_0 (t - t_0) + \Omega_{k0} H_0^2 (t - t_0)^2}. \quad (3.34)$$

No limite $\Omega_{k0} \rightarrow 0$,

$$H(t) = \frac{\sqrt{\Omega_{\gamma 0}} H_0}{1 + 2\sqrt{\Omega_{\gamma 0}} H_0 (t - t_0)}. \quad (3.35)$$

Com esta equação e (3.33),

$$(1+z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\sqrt{\Omega_{\gamma 0}} H_0 (t - t_0)}},$$

concluimos que

$$H(t) = H_0 \sqrt{\Omega_{\gamma 0}} (1+z)^2, \quad (3.36)$$

conforme esperado no caso em que $k = 0$.

Uma outra confirmação da validade da solução que encontramos: a primeira equação de Friedmann, na forma (1.53), dá, para $k = \Lambda = 0$,

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho}{\rho_{crit}}; \quad (3.37)$$

e, empregando (3.36) na equação acima, recuperamos o resultado

$$\frac{\rho}{\rho_{crit}} = \Omega_{\gamma 0} (1+z)^4, \quad (3.38)$$

que segue diretamente da conservação do tensor energia-momento para um universo preenchido pela radiação; bastando estabelecer a identidade $\rho = \rho_\gamma = \rho_{crit} \Omega_{\gamma 0}$.

3.5 Solução Geral para um Universo Termalizado

No universo termalizado todo o sistema, constituído de bárions e radiação mais energia de vácuo, possui a mesma temperatura. Como a temperatura relaciona-se com o red-shift através de

$$kT = kT_0 (1 + z),$$

o red-shift é uma boa variável para localizar o ponto da história evolutiva (térmica) do modelo – z substitui o tempo cósmico t na presente descrição. Também sabemos relacionar a função de Hubble ao red-shift via eq. (3.22),

$$(1 + z) = \exp \left[- \int_{t_0}^t H(z) dt \right].$$

Ou seja,

$$H(z) = - \frac{1}{(1 + z)} \frac{dz}{dt}. \quad (3.39)$$

Definindo, ademais,

$$f(z) \equiv \frac{H^2(z)}{H_0^2}, \quad (3.40)$$

com $f(0) = 1$, e lembrando que

$$a(z) = \frac{a_0}{(1 + z)},$$

reescrevemos a equação de Friedmann (3.18) como

$$(1 + z) \frac{d}{dz} f(z) = 3f + \frac{8\pi G}{H_0^2} \frac{p}{c^2} + \frac{kc^2}{a^2 H_0^2} - \frac{\Lambda c^2}{H_0^2},$$

pois segue da definição de $f(z)$ e de (3.39) que

$$(1 + z) \frac{d}{dz} f(z) = -2 \frac{\dot{H}}{H_0^2}.$$

Ficamos, então, com a equação diferencial

$$(1 + z) \frac{d}{dz} f(z) = 3f + 3 \frac{p}{\rho_{crit} c^2} - \Omega_{k0} (1 + z)^2 - 3\Omega_{\Lambda}, \quad (3.41)$$

na qual usamos as definições prévias $\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$, $\Omega_{k0} = -\frac{kc^2}{a^2 H_0^2}$ e $\Omega_{\Lambda} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$.

Para resolver (3.41) precisamos ainda da equação de estado para o conteúdo do universo. A pressão de matéria é desprezível, $p \simeq 0$, e a pressão de radiação, dada por $p = \frac{\epsilon_\gamma}{3} = \frac{\rho_\gamma c^2}{3}$. Substituiremos, então, o resultado (1.78) em (3.41). Além disso, definimos

$$x = (1 + z), \quad (3.42)$$

$f(x = 1) = 1$, para escrever

$$x \frac{df}{dx} = 3f - 3\Omega_\Lambda + \Omega_{\gamma 0} x^4 - \Omega_{k0} x^2. \quad (3.43)$$

A solução é obtida, por exemplo, via método de Frobenius. A substituição de

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad (3.44)$$

na equação diferencial (3.43) vincula os valores dos coeficientes da série:

$$\begin{aligned} a_0 &= \Omega_\Lambda; \\ a_1 &= 0; \\ a_2 &= \Omega_{k0}; \\ a_3 &\rightarrow \text{indeterminado}; \\ a_4 &= \Omega_{\gamma 0}; \\ a_m &= 0, \quad \text{para } m \geq 5. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Portanto,

$$f(x) = \Omega_\Lambda + \Omega_{k0} x^2 + a_3 x^3 + \Omega_{\gamma 0} x^4. \quad (3.46)$$

Agora, empregamos a condição inicial $f(x = 1) = 1$, para encontrarmos a_3 :

$$a_3 = 1 - \Omega_{\gamma 0} - \Omega_\Lambda - \Omega_{k0}. \quad (3.47)$$

Apresentamos o resultado:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = \Omega_\Lambda + \Omega_{k0} (1+z)^2 + (1 - \Omega_{\gamma 0} - \Omega_\Lambda - \Omega_{k0}) (1+z)^3 + \Omega_{\gamma 0} (1+z)^4. \quad (3.48)$$

Em particular, quando tomamos $k = 0$ e $\Lambda = 0$ obtemos

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = (1 - \Omega_{\gamma 0}) (1+z)^3 + \Omega_{\gamma 0} (1+z)^4, \quad (3.49)$$

que se reduz a equação (3.37) com (1.78) quando o último termo do lado direito domina o primeiro, o que acontece para baixos red-shifts, e corrige levemente o resultado (1.78), quando o primeiro termo domina.

A solução (3.48) dá conta de um universo com constante cosmológica e constante de curvatura k que pode assumir qualquer um dos três valores $-1, 0, +1$, desde que o conteúdo esteja em equilíbrio térmico. Esta exigência não é satisfeita hoje, já que matéria e radiação estão desacopladas em radiação de fundo de micro-ondas e galáxias; mas deve valer para valores de red-shifts próximos aquele da superfície de último espalhamento (tempo de recombinação do hidrogênio), $z \approx 10^3$.

Desta solução, podemos encontrar o comportamento dinâmico de um universo dominado pela radiação (afinal, fizemos $p \simeq 0$) – com constante cosmológica e dotado de um parâmetro de curvatura k diferente de zero. Com isso, abrangemos a seção deste capítulo em que tratamos a Era da Radiação fixando $k \neq 0$ e $\Lambda = 0$, e também completamos a seção 1.5.2 do capítulo sobre o Modelo Padrão da Cosmologia em que discutimos a Era da Radiação mantendo $k = \Lambda = 0$ para referência.

Note-se que, quanto mais sofisticada for a equação de estado que adotarmos para o sistema, mais dificuldade teremos em resolver a equação diferencial (3.41). Um exemplo claro dessa dificuldade aparece no trabalho de R. Aldrovandi, *et al.* [26], onde uma simples alteração na equação de estado, feita de modo a incluir um potencial de interação do tipo esferas duras entre os nucleons, complicou muito a solução de (3.41), embora ainda tenha sido possível encontrá-la analiticamente.

Seguindo a idéia de [26], no próximo capítulo, mostraremos uma nova equação de estado que leva em conta a interação nuclear e analisaremos suas consequências para a cosmologia. Mas antes, vamos retomar a discussão sobre o significado da pressão, que está longe de ser óbvio no contexto da cosmologia.

Capítulo 4

A Equação de Estado na Cosmologia

A cosmologia física está alicerçada em quatro equações: as duas de Friedmann, a que expressa a conservação do tensor energia momento de um fluido perfeito e, finalmente, uma equação de estado. Usa-se por simplicidade equações de estado para gases ideais: equação de estado $p = nkT \simeq 0$ corresponde ao modelo de universo dominado pela matéria; se adotamos $p = \epsilon_\gamma/3$ estaremos encontrando o comportamento do fator de escala de um universo preenchido apenas por fótons. Um tal conteúdo sem interação entre os constituintes não poderá dar conta da inflação nem simular qualquer constante cosmológica.

Uma solução que admite $\ddot{a} > 0$ é consistente com $-\epsilon \leq p \leq -\epsilon/3$. Deseja-se, portanto, uma pressão negativa. Como obter tal pressão a partir de interações entre os constituintes? Será uma atração ou uma repulsão que poderá criar $p < 0$? Pretendemos estudar a viabilidade de uma equação de estado $p(T)$ de sistemas com interação para a descrição da dinâmica do cosmo*.

4.1 A Pressão Volumétrica na Equação de van der Waals

Uma primeira tentativa de incluir interação no tratamento de gases foi feita por van der Waals. Um gás de van der Waals é caracterizado pela equação

$$p = \frac{kT}{(v - b)} - \frac{a}{v^2}, \quad (4.1)$$

onde $v = V/N$ e a e b são constantes empíricas positivas, e descreve qualitativamente as características de um fluido real mediante duas alterações introduzidas na equação de estado de um gás ideal,

$$p = \frac{kT}{v}, \quad (4.2)$$

*Neste capítulo k é a constante de Boltzmann e não o parâmetro de curvatura.

em que as moléculas são consideradas pontuais e não interagentes exercendo uma pressão p contra as paredes do recipiente [28]. Note que p é entendido como a taxa de transferência de momento das moléculas do gás para as paredes do recipiente via colisões.

A primeira correção que podemos fazer em (4.2) é fundamentada na idéia de que as partículas possuem dimensão, cada partícula ocupando um volume b ; portanto, o volume que estará disponível para as partículas interagirem e se movimentar dentro do recipiente é $(V - Nb)$, o volume excluído a ser substituído na equação do gás ideal.

A segunda alteração em (4.2) surge em função da interação inter-partículas. A força molecular tem o efeito de atrair as partículas do gás, duas a duas, uma em direção às outras. Porém, argumenta-se que no interior do recipiente a força, que atua em todas as direções, tende a se cancelar: a partícula que sofre uma atração para a esquerda devido a presença de uma molécula deste lado, sentirá a mesma atração de outra molécula no sentido oposto[†]. Entretanto, as partículas do gás próximas à parede do recipiente não terão essa compensação na média e serão atraídas para o interior do volume, de modo que os choques com as paredes diminuam, e também a pressão p . A magnitude dessa diminuição deve ser proporcional ao número de pares interagentes, i.e., proporcional a $n^2 = (N/V)^2 = 1/v^2$, o que explica o segundo termo de (4.1).

Lembramos que a equação de van der Waals, embora tenha sido obtida através desses argumentos heurísticos, pode também ser derivada através da mecânica estatística, com aproximações adequadas – uma combinação de expansão em clusters até segunda ordem, emprego do potencial de Lenard-Jones simplificado, e limite de fluido diluído [18].

Passemos o termo $(-a/v^2)$ para o primeiro membro de (4.1)

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right) = \frac{kT}{(v - b)}.$$

Uma nova interpretação para a pressão é possível. Definamos:

$$p_{volume} = \left(p + \frac{a}{v^2}\right). \quad (4.3)$$

A chamada pressão no volume é o efeito global de transferência de momento para a parede mais contribuição da força inter-molecular que age sobre as partículas distribuídas no volume do invólucro. Pode ser interpretada como pressão relacionada ao volume, embora o efeito resultante da força manifeste-se apenas em um volume no entorno das paredes (sobre as partículas do gás próximas à parede). A atração

[†]Atacaremos este raciocínio adiante.

molecular diminui a pressão nas paredes, de acordo com (4.1), mas aumenta a pressão “volumétrica” (4.3).

Gostaríamos de responder à pergunta: um aumento (diminuição) da pressão significa atração ou repulsão entre os constituintes do fluido? Nosso raciocínio até aqui indica que a resposta depende do tipo de pressão que adotamos para descrever o sistema. Qualitativamente, uma atração inter-molecular reduziria a velocidade com que as moléculas colidem contra as paredes e levaria a uma diminuição da pressão nas paredes; por outro lado, a atração provocaria uma concentração das moléculas do fluido no interior do recipiente, e elas estariam mais próximas para colidir entre si, aumentando a pressão no volume. Se é assim, qual a pressão boa no caso da cosmologia?

A pressão que se mede é a pressão na parede do recipiente, o que indica que na termodinâmica a pressão boa é a dada por (4.2), ou por (4.1) no caso de considerarmos uma primeira correção com respeito ao caso ideal. Na cosmologia, a história é um pouco mais intrincada, afinal, o sistema não é tão simples quanto um recipiente fechado repleto de fluido. O universo pode não ter paredes. Os modelos de Friedmann permitem um universo finito mas sem limites, ou um universo cujo volume se expande sempre. Se o universo realmente tiver fronteiras, coloca-se a questão do que há além; caso não haja fronteiras fica prejudicado o entendimento da correção $(-a/v^2)$ que aparece em van der Waals, pois lembre-se, precisamos de uma borda onde as partículas sentem o saldo da força de interação.

Talvez os grávitons funcionem como paredes, mas testar essa hipótese significa trabalhar com cálculos de seção de choque (fóton-gráviton, por exemplo) e evitaremos essas dificuldades. Mas podemos recorrer à dedução da equação de van der Waals da mecânica estatística para adiar nossas preocupações com as “paredes” e concentrar atenção em outro fato.

A pressão entra na cosmologia através da equação de Friedmann para o parâmetro de expansão

$$\ddot{a} = \left[\frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) \right] a, \quad (4.4)$$

que exige a adoção de uma equação de estado. Veja-se que $\frac{p}{c^2}$ deve ter dimensões de densidade de massa e, portanto, a pressão deve atuar como uma densidade de energia. Ademais, ela se soma à legítima densidade de energia ρ . Isso indicaria que a pressão adequada em cosmologia é a pressão “volumétrica”. Todavia, o padrão é inserir a equação de estado convencional (4.2) em (4.4) para obter o parâmetro de escala como função do tempo cosmológico $a(t)$. No caso do fluido ideal isso não é importante porque a noção de pressão volumétrica se confunde com a de pressão

termodinâmica (na parede) – o que se percebe ao fazermos as constantes a e b de (4.1) tenderem a zero. Porém, ao tomarmos gases com interação, a diferença entre as pressões é fundamental para o cálculo de $a(t)$.

Se vamos substituir

$$p_{volume} = \frac{kT}{(v - b)},$$

na equação de Friedmann, então estaremos obtendo, via van der Waals, os mesmos resultados que encontramos no tratamento de esferas duras de R. Aldrovandi *et al.* [26], onde foi usada como equação de estado a parametrização

$$p = \frac{nkT}{1 - n/n_c} = \frac{kT}{(v - 1/n_c)},$$

sendo $n_c = \frac{\sqrt{2}}{D^3}$ e D , o diâmetro da esfera.

Em gravitação, uma pressão positiva contribui para a curvatura do espaço-tempo, ou, no limite newtoniano, para o aumento da atração dos constituintes da fonte do campo, como se vê das equações de Einstein e da forma do tensor energia momento. A pressão positiva da termodinâmica significa repulsão entre as moléculas do sistema. Estabelece-se então uma incompatibilidade de interpretação: uma pressão de mesmo sinal gera efeitos diversos nos dois cenários. Outrossim, a pressão volumétrica positiva representa atração entre as partículas, como a gravitação, e parece haver concordância.

Concluimos que devemos empregar a pressão volumétrica como equação de estado ao descrever um fluido com interação em cosmologia. Mas sabemos calcular a referida pressão somente para o gás de van der Waals; apenas neste caso fica claro qual o termo de superfície (à excessão do volume excluído) que deve ser subtraído da pressão termodinâmica. Em casos mais gerais – como o de um potencial nuclear – precisaríamos encontrar uma maneira de calcular uma equação de estado que descrevesse a pressão volumétrica do sistema. Este problema é assunto da próxima seção.

Comentário *Pressão volumétrica (no sentido desta seção do capítulo) é igual a pressão interna (no sentido da seção seguinte)? A pressão interna abaixo é aquela que se mede sobre uma superfície imaginária dentro do gás e a pressão volumétrica é a pressão na borda menos um termo de interação, e a priori está relacionada ao volume do gás como um todo. A resposta à pergunta é SIM. A superfície imaginária pode ser disposta em qualquer região dentro do fluido. A pressão que se medir nesta superfície arbitrária será a mesma em toda parte e, portanto, tem o sentido de pressão volumétrica.*

4.2 A Pressão Interna em um Sistema com Interação

Façamos uma pequena digressão sobre pressão em gases com interação sem nos preocuparmos, por enquanto, se a equação para p que encontrarmos é a pressão interna do gás ou sua pressão superficial[‡].

4.2.1 A Expansão em Cluster

O Método de Expansão em Cluster ou método de Mayer é um meio aproximativo de obtermos a equação de estado de um fluido cujos constituintes interagem entre si e não apenas com as paredes do recipiente, como acontece no caso de um gás ideal onde as partículas são pontuais. A natureza da interação pode ser modelada de diversas formas: pode-se usar um potencial que considere efeitos eletromagnéticos, como o potencial de Lenard-Jones, ou, em um caso mais simples, adotar o potencial de esferas duras, quando a interação só acontece mediante choques; uma outra possibilidade é empregar um potencial nuclear.

Como o método utiliza a noção de potencial, trata de gás não-relativístico. O gás é, ademais, considerado monoatômico e a energia potencial do sistema é dada pela soma das interações $u_{ij} = u_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$, função da distância relativa entre as partículas do gás tomadas duas a duas. A parte cinética do núcleo da integral que dá a função de partição é facilmente integrada, enquanto a integração da parte associada ao potencial depende de todo um desenvolvimento baseado na contagem de todos os estados acessíveis ao sistema: estados em que interagem partículas duas a duas, estados em que ocorrem interações três a três, e assim sucessivamente, até o caso limite onde as N partículas do fluido interagem.

O resultado é o par de equações [18]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} b_l (gz)^l \\ n = \frac{N}{V} = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} l b_l (gz)^l \end{array} \right. , \quad (4.5)$$

onde g é o número de graus de liberdade interno do sistema; $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m kT}}$ é o comprimento de onda térmico que resulta da integração no espaço dos momentos; $z = e^{\frac{\mu}{kT}}$ é a fugacidade, definida como função do potencial químico termodinâmico $\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}$; e os coeficientes da expansão b_l são as integrais de cluster do sistema.

[‡]Esta seção e a seguinte apenas antecipam, de maneira muito sintética, os resultados derivados por Léo Gouvêa Medeiros em sua Dissertação de Mestrado, em preparação.

Alguns coeficientes:

$$\begin{aligned} b_1 &= 1; \\ b_2 &= -\frac{2\pi}{\lambda^3} \int_0^\infty (1 - e^{-u(r)/kT}) dr; \\ b_3 &= 2b_2^2 + \frac{1}{6\lambda^6} \int \int f_{12} f_{13} f_{23} d^3 r_{12} d^3 r_{13}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

tendo definido a *função de Mayer* $f_{ij} = e^{-\beta u_{ij}} - 1$, para a descrição da interação da i – *ésima* com a j – *ésima* partícula.

O par de equações (4.5) pode ser convertido em uma equação de estado do tipo $p(n, T)$ se formos capazes de inverter a segunda equação do par, encontrando $z(n)$, e fazer a substituição deste resultado na primeira das equações. Quando isso é levado a cabo vem a *expansão do virial*:

$$\frac{pv}{kT} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l(T) \left(\frac{\lambda^3}{v} \right)^{l-1}, \quad (4.7)$$

onde $v = V/N = 1/n$ denota o volume por partícula no sistema, e os coeficientes a_l relacionam-se diretamente com os coeficientes b_l da expansão em cluster,

$$\begin{aligned} a_1(T) &= b_1 = 1; \\ a_2(T) &= -b_2; \\ a_3(T) &= 4b_2^2 - 2b_3. \end{aligned} \quad (4.8)$$

O problema de determinar a equação de estado para um sistema com interação é equivalente a determinar todos os coeficientes de (4.7). Teremos esperança de calcular apenas as primeiras ordens de correção com respeito ao caso ideal ($b_m = 0$, $m \geq 2$); para um gás clássico não muito denso submetido a um potencial de alcance finito as primeiras ordens de correção já dão uma boa descrição do comportamento do sistema.

4.2.2 A Integração Direta de Fowler

O *Método de Mayer da Expansão em Clusters* é um dos caminhos apontados no texto de Fowler [29] para encontrarmos a pressão interna de um sistema com interação. Outra maneira, que chamaremos de *Método Direto*, é efetuar a integração direta da contribuição do potencial de interação para obter a força total por unidade de área, e somar com a contribuição da transferência de momento por unidade de área – a pressão convencional leva em conta apenas a transferência de momento. Esse último método, como se depreende do resultado que derivaremos, é equivalente a considerar a expansão do virial até segunda ordem.

A abordagem do Método Direto emprega uma definição estendida de pressão necessária a um caso com potencial de interação entre os constituintes: divide-se o sistema por uma parede imaginária interna. A pressão interna é definida como “a força resultante por unidade de área exercida pelos sistemas do lado A sobre o lado B [devido ao potencial], em conjunto com a transferência de momento por unidade de área por segundo de A para B de sistemas que cruzam a superfície de A para B e de B para A”[§].

Vamos calcular a média da força por unidade de área exercida por todas as partículas de um lado de uma interface geométrica sobre aquelas do outro lado.

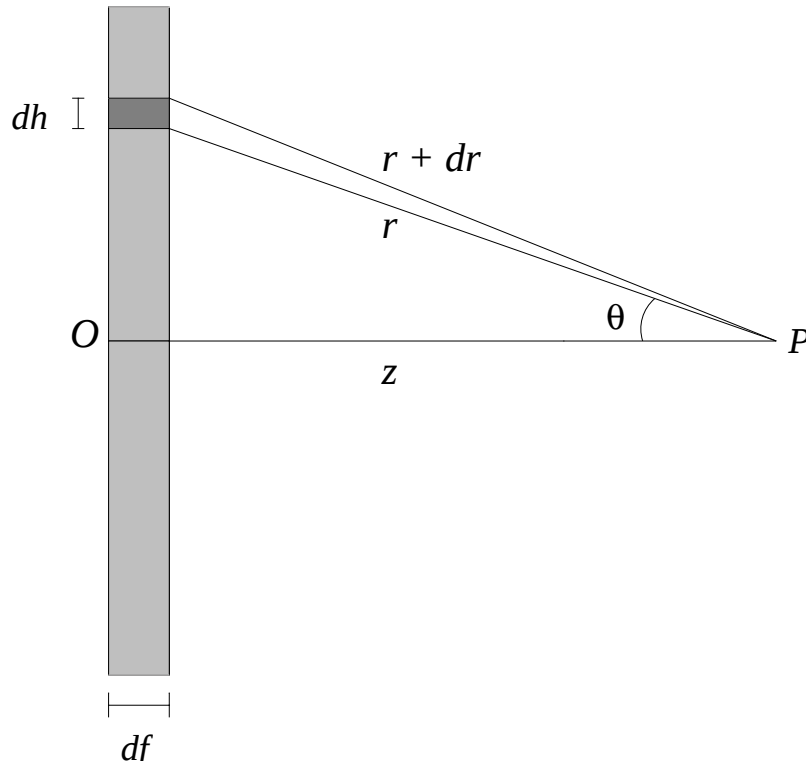


Figura 4.1: *Fatia (plano com espessura df) do volume ocupado pelo gás com interação usada no cálculo da pressão do sistema. Uma figura mais realista é obtida pela rotação da figura em relação ao eixo $\overline{OP}$.*

Tomemos uma fatia plana (infinita) do gás e com espessura df . Encontraremos a força média dF exercida por todas as partículas que estão na fatia sobre uma

[§]Pode-se entender expressões do tipo “sistemas do lado A” e “sistemas que cruzam” como “partículas do lado A” e “partículas que cruzam”. O autor não usa “partícula” para ser geral em seu raciocínio.

partícula no ponto P a uma distância z da origem O fixada na faixa – figura 4.1.

As partículas de um elemento dh da fatia exercem uma força em P cuja resultante é ao longo do eixo $\overline{PO}$ (a componente vertical é anulada pela força impressa pelo elemento simetricamente oposto) e vale

$$n(r) \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right) \cos \theta, \quad (4.9)$$

onde $n(r)$ é o número de partículas entre r e $r + dr$ na fatia,

$$n(r) = \frac{N}{V} e^{-u(r)/kT} (2\pi r) dr df. \quad (4.10)$$

A função

$$f(r) = \frac{N}{V} e^{-u(r)/kT},$$

que aparece em (4.10), é a lei de distribuição de Boltzmann para pares de moléculas[¶].

Integrando a coordenada r de z a ∞ obtemos a força média dF exercida pelas partículas da fatia sobre uma partícula em P :

$$dF = -2\pi \frac{N}{V} z df \int_z^\infty \frac{\partial u}{\partial r} e^{-u(r)/kT} dr = -2\pi \frac{NkT}{V} z df [e^{-u(z)/kT} - 1]. \quad (4.11)$$

Agora, a força média por unidade de área sobre todas as partículas em uma fatia com espessura dz construída com origem em P – figura 4.2, é

$$dp_{\text{interação}} = \frac{dF}{dS} = -2\pi \frac{N^2 kT}{V^2} z dz df (e^{-u(z)/kT} - 1), \quad (4.12)$$

já que nessa nova fatia há $\frac{N}{V} dz$ moléculas.

Note-se: em (4.11) encontramos a força média por unidade de área associada a uma partícula em P ; portanto, basta multiplicarmos pelo número de partículas na faixa de espessura dz para obtermos a força média por unidade de área na faixa, dada em (4.12).

A fatia de espessura df está fixada na origem. Se fizermos a passagem de z para $z + f$ eliminaremos este caráter privilegiado da localização da fatia. Com esta substituição, e a integração da eq. (4.12) com respeito a z e f no intervalo $[0, \infty]$, terminamos o cálculo da contribuição da interação $u(r)$ para o valor da pressão interna:

$$p_{\text{interação}} = -2\pi \frac{N^2 kT}{V^2} \int_0^\infty \int_0^\infty (z + f) dz df (e^{-u(z+f)/kT} - 1),$$

[¶]Vide referência [29] à pág. 255.

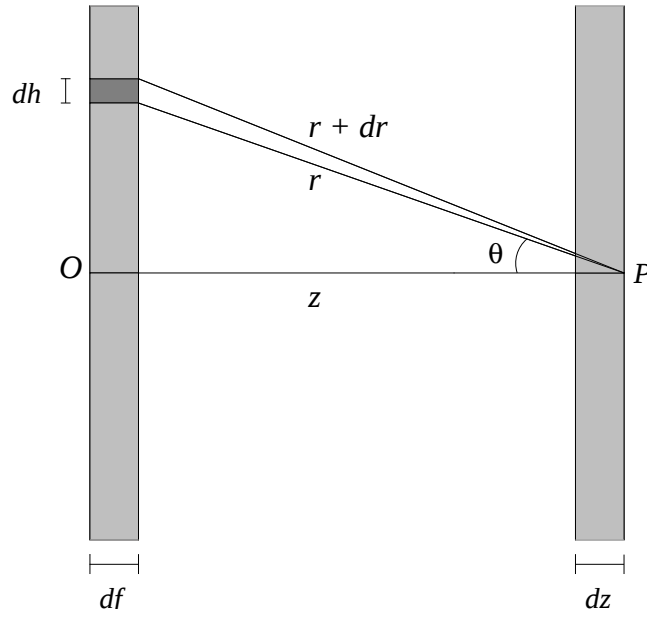


Figura 4.2: *Fatias do volume ocupado por um gás com interação usadas no cálculo da pressão devida ao potencial, $p_{\text{interação}}$.*

ou

$$p_{\text{interação}} = -2\pi \frac{N^2 kT}{V^2} \int_0^\infty r^2 dr \left(e^{-u(r)/kT} - 1 \right), \quad (4.13)$$

que é idêntica a correção de primeira ordem da expansão do virial,

$$a_2(T) \frac{\lambda^3 kT}{v^2} = \left[\frac{2\pi}{\lambda^3} \int_0^\infty (1 - e^{-u(r)/kT}) dr \right] \lambda^3 \frac{N^2 kT}{V^2}, \quad (4.14)$$

conforme as equações (4.7), (4.8) e (4.6).

Se adicionarmos a (4.13) a contribuição para a pressão vinda da transferência de momento, a pressão convencional, recuperaremos a expansão do virial (4.7) até o termo de segunda ordem.

4.2.3 O Caráter de p no Método de Mayer

Vamos discutir, agora, o caráter da equação para p , se a pressão que encontramos via Método de Expansão em Cluster e/ou Método de Integração de Fowler é a pressão interna do gás ou sua pressão superficial.

A vantagem que o Método Direto, uma segunda forma de derivar p , traz é apenas conceitual: ele supõe o caráter de homogeneidade do sistema. Cada fatia de volume

do gás com interação usada na integração é equivalente a outra e duas fatias exercem uma força de mesma intensidade sobre uma partícula do gás a uma mesma distância arbitrária de ambas. Com esta característica, somos levados a concluir que *a pressão interna de um gás com interação é idêntica a pressão na borda do recipiente* que o contém, *i.e.*, a pressão volumétrica é igual a pressão termodinâmica nas paredes do recipiente. Com isso estamos dizendo que a pressão interna não é nula!

Argumenta-se^{||} que a pressão interna de um gás com interação deveria se anular porque uma partícula arbitrária no gás sofre tanta ação à sua esquerda quando à sua direita, tanto ação acima quanto ação abaixo, e assim por diante, de modo que o resultado líquido é o anulamento da força sobre ela e, conseqüentemente, da força sobre uma dada unidade de área interna (pressão interna). No nosso entender, não é a pressão interna que se anula, mas os seus efeitos dinâmicos. Como vale a lei de Newton, a força exercida pelo lado A sobre o lado B é necessariamente igual e oposta à exercida de B para A, e a superfície de interfase não entrará em movimento.

A medição da pressão superficial é feita observando o deslocamento de êmbolos. Medimos a pressão termodinâmica pela diferença entre a força exercida pelo gás na parede e a força externa (atmosférica, por exemplo), tudo associado a trocas de momento. Na medição da pressão volumétrica não podemos esperar o deslocamento de superfícies internas porque, sendo o fluido homogêneo, a força de interação exercida de um lado da parede imaginária (sistemas do lado A sobre o lado B) será idêntica à impressa do outro (sistemas do lado B sobre o lado A), e a taxa de transferência de momento de sistemas que passam de A para B é a mesma que a taxa de transferência de momento de sistemas que passam de B para A. Porém, a pressão interna não se anula porque a contribuição da interação só é contada em um lado da superfície interna: a força por unidade de área do lado A sobre o lado B.

Adotamos esta definição peculiar de pressão interna porque acreditamos ser ela a importante na cosmologia. Com ela evitamos o problema de borda para o universo e estabelecemos uma coerência com as equações de Friedmann, onde a pressão possui o mesmo *status* que a densidade de energia, uma quantidade volumétrica. Além do mais, esse tipo de pressão volumétrica tem um método de cálculo claro e bem estabelecido: a expansão em cluster.

Terminamos dizendo que considerar a equação de estado para um gás com interação na cosmologia não torna necessária uma alteração no tensor energia-momento de fluido ideal que usamos para encontrar as equações de Friedmann^{**}. O $T_{\mu\nu}$ de um fluido ideal é válido enquanto houver homogeneidade no sistema, mesmo

^{||} Como na primeira seção deste capítulo e em [28].

^{**} Ver [30] à página 335 e seguintes.

que se considere interações.

4.3 A Equação do Virial de um Sistema com Potencial Nuclear

A técnica de Mayer sugere um caminho para justificarmos por mecanismos físicos simples uma equação de estado exótica em que a pressão assume valores negativos. Qual seria o comportamento de uma equação de pressão $p(T)$ para um gás eletricamente neutro e de partículas (nucleons) sujeitas a um potencial nuclear?

A história térmica do universo segundo a cosmologia padrão tem períodos caracterizados pelo conteúdo de matéria-energia dominante. Como vimos, em uma marcha para o passado, passamos de uma época dominada pela matéria à época da radiação e enfim para o domínio da inflação, em que vale a energia escura – constante cosmológica – ou equação de estado exótica – $p = -\epsilon$.

À medida que o meio termalizado de matéria e radiação vai esquentando com a diminuição do volume do universo, os fótons da radiação passam a ter energias progressivamente maiores, eventualmente atingindo o suficiente para a produção de pares prótons-antiprótons. A 60MeV a reação $\gamma + \gamma \longleftrightarrow p + \bar{p}$ entra em equilíbrio químico [31]. Energias dessa ordem já correspondem ao período *pré-nucleossíntese*, de interesse para nós.

No período *pré-nucleossíntese* o universo está termalizado a energias maiores do que a energia de ligação do dêuteron ($E_d = -2,225\text{MeV}$), energias tipicamente maiores do que 4MeV , $z \geq 10^{10}$. Então, os constituintes básicos são prótons, nêutrons, fótons e elétrons livres. O papel destes últimos será apenas o de manter o universo eletricamente neutro, o chamado *cenário de Debye*. Iremos modelar o conteúdo do universo por prótons, neutrons e fótons, portanto, levando em conta também as antipartículas relacionadas.

O número de bárions presentes no universo atual pode ser comparado com o número de nucleons provenientes da radiação, bastando usar as equações $n_b = 11,2 \Omega_{b0} h^2 (1+z)^3 \text{ m}^{-3}$ e $n_\gamma = 2,0235 \times 10^7 T_\gamma^3 \text{ m}^{-3} = 3,98 \times 10^8 (1+z)^3 \text{ m}^{-3} = n_{\bar{p}}$ desenvolvidas no primeiro capítulo. A 100MeV o número de barions atuais n_b é $8,2 \times 10^{-10} \text{ fm}^{-3}$, quatro ordens de grandeza menor que o de bárions vindos da radiação, $n_{\bar{p}}$, que vale $1,5 \times 10^{-6} \text{ fm}^{-3}$. Isto justifica desprezarmos os bárions atuais no estudo de uma equação de estado válida para o período *pré-nucleossíntese*, quando consideramos apenas a radiação e os nucleons que os fótons podem gerar.

Portanto, a hipótese que fazemos é a de que a equação de estado do sistema

cósmico no período pré-nucleossíntese seja

$$p(n, T) = p_\gamma + p_{\bar{p}}, \quad (4.15)$$

i.e., a soma da pressão dos fótons mais a pressão de um gás de nucleons que interagem através do potencial nuclear.

4.3.1 O Potencial Nuclear

Precisamos definir a forma do potencial nuclear para encontrarmos $p_{\bar{p}}$ pelo método da expansão em cluster. A fenomenologia de espalhamentos nucleon-nucleon aponta para um potencial central com a forma dada na figura 4.3 [32].

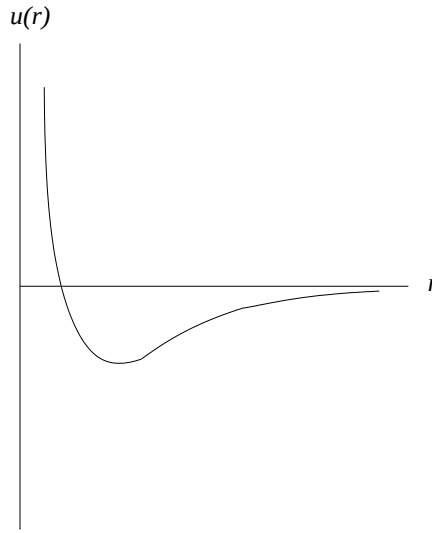


Figura 4.3: *Esboço da forma do potencial nuclear fenomenológico como função da distância de separação entre os nucleons.*

Sabe-se que a extensão da parte repulsiva vale $r \simeq 0,4 \text{ fm}$, a profundidade do poço atrativo é da ordem de dezenas de MeV (entre 30 e 75 MeV) e seu alcance varia entre $1,3 \text{ fm} \leq r \leq 2 \text{ fm}$.

Para que a integração dos coeficientes do virial seja possível de forma analítica, simplificamos o potencial acima para uma variação do poço quadrado, conforme mostra a figura 4.4 [33].

O potencial simplificado é facilmente tratado por mecânica quântica. Podemos resolver a equação de Schrödinger para este potencial de maneira a permitir um estado ligado, a energia de ligação do deuteron $E_d = -2,225 \text{ MeV}$, e isto vincula o

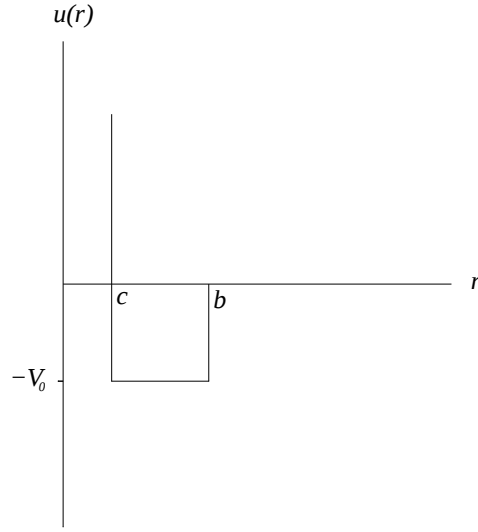


Figura 4.4: *Forma do potencial nuclear simplificado $u(r)$ com os parâmetros de profundidade V_0 e alcance c e b a serem determinados experimentalmente.*

valor dos parâmetros V_0 e b . Um par de valores que explica E_d e o raio quadrático médio do deuteron $\langle r_{rms} \rangle$ – obtido por espalhamento de elétrons) – é

$$V_0 = 73 \text{ MeV} \quad \text{e} \quad b = 1,737 \text{ fm}. \quad (4.16)$$

A constante c que determina o alcance da parte repulsiva do potencial é encontrado através de experimentos de espalhamento a altas energias, $\simeq 350 \text{ MeV}$, e sua determinação está associada à medição da defasagem de onda S, δ_0 . Seu valor:

$$c = 0,4 \text{ fm}. \quad (4.17)$$

Façamos a seguinte advertência: os valores para os parâmetros V_0 , b e c que adotamos não dão conta de explicar outros dados da física nuclear. De fato, não são compatíveis com a energia de ligação do trítio.

4.3.2 Equação $p(n, T)$

Calcula-se analiticamente os coeficientes do virial a_2 e a_3 de (4.8) com o emprego das definições das integrais de cluster (4.6) e da forma do potencial nuclear simplificado

$$u(r) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq r \leq c \\ -V_0, & c \leq r \leq b \\ 0, & r > b \end{cases} \quad (4.18)$$

da figura 4.4. Encontrar a correção de primeira ordem $a_2(kT)$ é trivial. Resolve-se

$$a_2 = -\frac{2\pi}{\lambda^3} \int_0^c (-1) r^2 dr + \int_c^b (e^{V_0/kT} - 1) r^2 dr,$$

para obter

$$a_2 = -b_2 = \frac{2\pi}{3} \frac{c^3}{\lambda^3} [1 + (1 - e^{V_0/kT}) (b^3/c^3 - 1)]. \quad (4.19)$$

Note-se que processo de integração é consistente com $c \leq b$.

O cálculo de a_3 é um pouco mais sofisticado, e baseia-se na intersecção de esferas correspondentes à região de atuação de cada parte do potencial nuclear: temos a esfera de influência da parte repulsiva do potencial ($0 \leq r \leq c$), a esfera onde atua o poço atrativo ($c \leq r \leq b$) e a região onde não há o potencial que se anula ($r > b$)^{††}. Dependendo do valor assumido por r teremos a intersecção de um ou outro tipo de esferas. No processo de integração exige-se que a condição $b \geq 3c$ seja satisfeita, o que é coerente com os valores que estamos usando para esses parâmetros [veja-se eqs. (4.16) e (4.17)]. A expressão de $a_3(kT)$ é extensa e não apresentaremos sua equação, mas discutiremos a importância da correção de segunda ordem em relação à de primeira ordem quando estudarmos indícios de convergência da equação de estado $p(n, T)$ na próxima seção [mais especificamente em (4.26)].

Com as correções de primeira e segunda ordem explicitamos (4.15), a equação de estado de um gás de fótons termalizado mais um gás de nucleons (prótons, anti-prótons, neutrons e anti-neutrons) sob interação nuclear:

$$p(n, T) = \frac{\epsilon}{3} + nkT [1 + a_2(T) n \lambda^3 + a_3(T) n^2 \lambda^6]. \quad (4.20)$$

ϵ é a densidade de energia da radiação no universo termalizado, tomada como a densidade de radiação de um corpo negro, $\epsilon = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4$.

4.4 A Equação de Estado de um Sistema com Interação e o Modelo Cosmológico

Discutiremos, agora, a adequação da equação $p(T)$, construída pela eliminação de $n(T)$ na equação $p(n, T)$, obtida do método de expansão em clusters da mecânica estatística com a ação do potencial nuclear na seção anterior. Para estabelecer como varia a densidade de nucleons n em função da temperatura T valêmo-nos do

^{††}Este método é desenvolvido no capítulo 9 da referência [18] para o caso de esferas duras, o equivalente a fazer $V_0 = 0$ em nosso potencial nuclear.

equilíbrio químico na produção de pares $\gamma + \bar{\gamma} \leftrightarrow p + \bar{p}$ que ocorre no período pré-nucleossíntese. Fazemos uma correção de segunda ordem ao caso ideal de fluido sem interação, o que pode constituir a explicação para uma equação de estado exótica em que a pressão assume valores negativos.

4.4.1 A Determinação de $n(T)$ pela Abordagem do Equilíbrio Químico na Produção de Pares

Acima de $60 MeV$, já no período pré-nucleossíntese, encontramos fótons com energias suficientes para garantir o equilíbrio das reações de produção de pares de nucleons [31],

$$\gamma + \gamma \longleftrightarrow p + \bar{p},$$

$$\gamma + \gamma \longleftrightarrow n + \bar{n}.$$

O equilíbrio químico é expresso numa relação de igualdade entre os potenciais químicos $\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}$ dos componentes das reações [28]:

$$4\mu_\gamma = \mu_p + \mu_{\bar{p}} + \mu_n + \mu_{\bar{n}}, \quad (4.21)$$

onde o potencial químico é, como vimos, relacionado com a fugacidade $z = e^{\frac{\mu}{kT}}$.

Um gás com interação, de acordo com a eq. (4.5), terá o par de quantidades termodinâmicas:

$$\begin{cases} \frac{p}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} [b_1(gz) + b_2(gz)^2 + O(z^3)] \\ n = \frac{1}{\lambda^3} [b_1(gz) + 2b_2(gz)^2 + O(z^3)] \end{cases}, \quad (4.22)$$

onde,

$$b_2 = b_2(kT) = -\frac{2\pi}{3} \frac{c^3}{\lambda^3} [1 + (1 - e^{V_0/kT}) (b^3/c^3 - 1)] \quad (4.23)$$

Com a segunda das equações (4.22), encontramos a correção de segunda ordem para a fugacidade $z = z(n, T)$, e portanto, para o potencial químico μ :

$$\mu = kT \ln \left\{ \frac{(b_1/b_2)}{4g} \left[\sqrt{1 + \frac{8(\lambda^3 n)}{(b_1^2/b_2)}} - 1 \right] \right\}. \quad (4.24)$$

Escreveremos o potencial químico corrigido (4.24) para cada uma das espécies das reações de produção de pares, levando em conta:

(i) a igualdade na concentração de nucleons e anti-nucleons, *i.e.*, $n_p = n_{\bar{p}} = n_n = n_{\bar{n}}$;

- (ii) equilíbrio térmico e igualdade entre as massas dos nucleons, o que implica $\lambda_p = \lambda_{\bar{p}} = \lambda_n = \lambda_{\bar{n}}$;
- (iii) o caráter fermiônico dos nucleons, *i.e.*, $g = 2$ para cada espécie;
- (iv) que os fótons devem suprir a energia para a constituição dos nucleons, *i.e.*, $\mu_\gamma = -mc^2$ onde m é a massa do próton.

Substituindo, então, (4.24) na eq. (4.21) encontramos:

$$n = \frac{1}{\lambda^3} \frac{(b_1^2/b_2)}{8} \left\{ \left[1 + \frac{4g}{(b_1/b_2)} e^{-mc^2/kT} \right]^2 - 1 \right\}, \quad (4.25)$$

e obtemos a concentração como função da temperatura, $n(T)$, já que $b_2 = b_2(kT)$.

4.4.2 A Função Pressão $p(kT)$

Com (4.23), (4.16), (4.17)– lembrando que $b_1 = 1$ – e (4.25), podemos escrever a equação de estado para um sistema com interação, que é, até terceira ordem, dada por (4.20), como função exclusiva da temperatura, ou da energia kT .

Para não escrever explicitamente a equação $p(kT)$ graficamos essa função na figura 4.5.

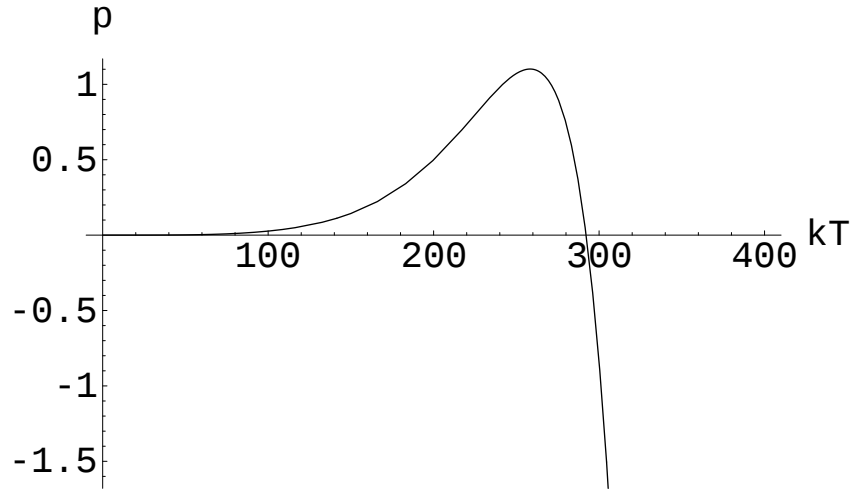


Figura 4.5: Gráfico da função $p(kT)$. A pressão p é medida em MeV/λ_C^3 e a energia kT em MeV . λ_C é o comprimento de onda Compton, definido por $\lambda_C = \frac{hc}{mc^2}$. Note-se a existência de uma pressão negativa para energias superiores a cerca de 320 MeV .

Um dos objetivos do cálculo de $a_3(T)$ é fundamentar um argumento em favor da convergência da equação para a pressão, *i.e.*, apontar um indício da convergência da expansão do virial. Vamos comparar o módulo do terceiro termo da expansão de p_b em (4.20) com o segundo, definindo para isso a função

$$f(T) = 1 - \sqrt{\left(\frac{a_3(T) n^2 \lambda^6}{a_2(T) n \lambda^3}\right)^2}. \quad (4.26)$$

Quanto mais próximo $f(T)$ estiver da unidade, maior será nossa confiança na expansão de Mayer, e maior será a importância da correção de primeira ordem em detrimento da correção de segunda ordem. $f(T)$ é mostrada na fig. 4.6.

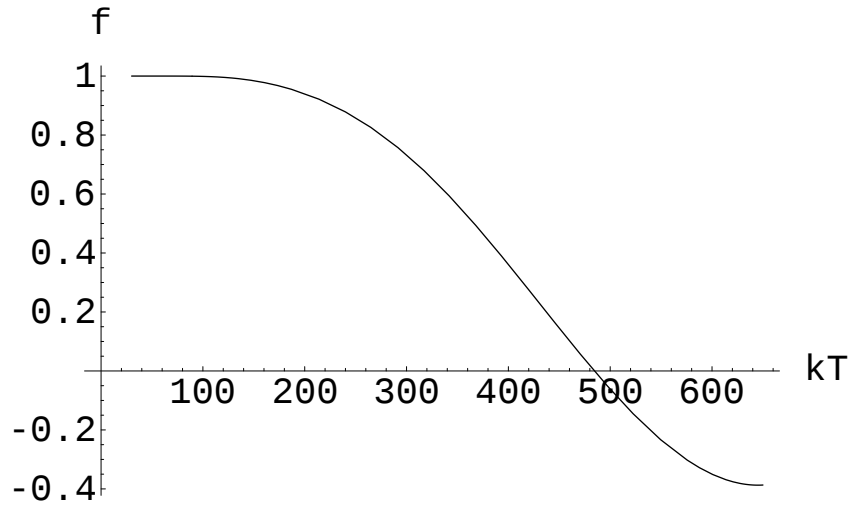


Figura 4.6: Comparação entre $a_3 n^2 \lambda^6$ e $a_2 n \lambda^3$. Escrevemos kT em MeV.

Percebemos que no intervalo de energia de interesse para $p(T)$, mostrado na fig. 4.5, o termo $a_3(T) n^2 \lambda^6$ é menos importante que o termo $a_2(T) n \lambda^3$. A 300 MeV $a_3(T) n^2 \lambda^6$ é, em módulo, cerca de 25% do valor de $a_2(T) n \lambda^3$. Já a 370 MeV, o módulo de $a_3(T) n^2 \lambda^6$ vale aproximadamente 50% do valor de $a_2(T) n \lambda^3$. A medida que kT cresce, aumenta a importância dos termos de ordem superior: a 480 MeV o terceiro termo da expansão é comparável à magnitude do segundo termo.

Uma vez que $a_3(T) n^2 \lambda^6 < a_2(T) n \lambda^3$ para valores de energias $kT < 480$ MeV temos um indício da validade da expansão (4.20).

4.4.3 Conclusões e Problemas do Modelo

A correção que fizemos na forma da equação da pressão é uma tentativa de encontrar um mecanismo físico para uma pressão negativa, responsável por uma eventual inflação no universo primordial. O modelo cosmológico de de Sitter, construído no espaço-tempo $dS(4, 1)$, oferece uma solução inflacionária exponencial para o fator de escala cósmico quando se põe $p = -\epsilon$ (ϵ é a densidade de energia da radiação no universo primordial). Mas há outros tipos de inflação possíveis, consistentes com a equação barotrópica [34], [35]

$$p = (\gamma - 1) \epsilon, \quad (4.27)$$

onde o fator numérico γ pode assumir valores no intervalo

$$0 \leq \gamma \leq \frac{2}{3}, \quad (4.28)$$

uma vez que devemos obedecer a condição (1.92).

Se usarmos em (4.27) a função pressão corrigida $p(T)$ da fig. 4.5 encontramos o gráfico da figura 4.7 para o parâmetro γ .

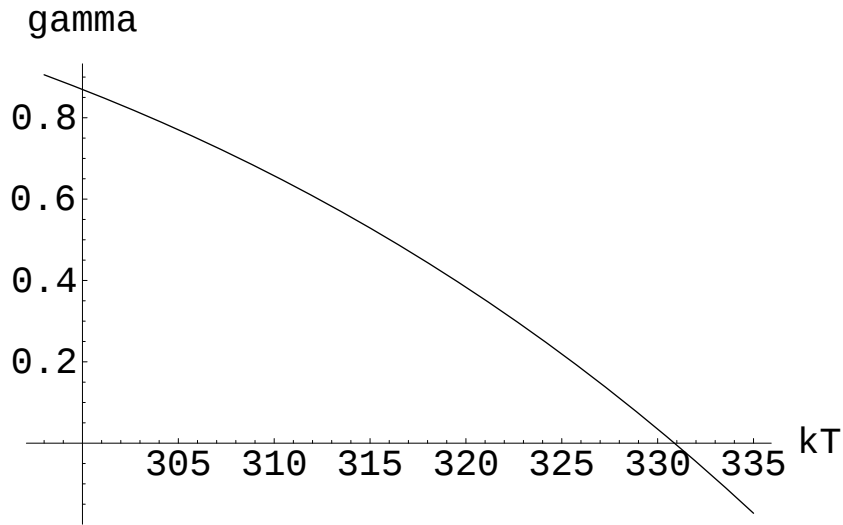


Figura 4.7: A dependência do fator numérico γ com a energia. Os valores de energia onde pode ocorrer inflação polinomial gerada por $p = (\gamma - 1) \epsilon$ são aqueles no intervalo $311 \text{ MeV} \lesssim kT \lesssim 331 \text{ MeV}$.

Os valores de kT que respeitam a condição (4.28) para γ são $311 \text{ MeV} \lesssim kT \lesssim 331 \text{ MeV}$, e para esses valores obtemos a pressão negativa que incidentalmente pode levar a uma inflação do tipo lei de potência.

O modelo tem dois problemas claros:

(i) não admite desconfinamento; e

(ii) a validade da noção de potencial em energias da ordem de centena de MeV é pelo menos duvidosa.

O primeiro problema pode ser minimizado se levarmos em conta que a experiência ainda não decidiu de maneira incontroversa pelo desconfinamento ou confinamento. Nem mesmo a teoria (cromodinâmica) oferece um mecanismo para mostrar a existência do fenômeno.

O segundo problema é mais delicado; no entanto, o sucesso fenomenológico dos modelos nucleares que usam a noção de potencial é um argumento favorável à sua utilização. Provavelmente, um tratamento mais realista exija o emprego de uma abordagem relativística. Um atenuante é que o potencial nuclear fenomenológico usado no modelo procura ajustar espalhamentos de baixas e altas energias. No livro de Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, admite-se mesmo uma extrapolação do potencial para processos de espalhamento neutron-neutron de $350MeV$ no cálculo da defasagem de onda S, δ_0 .

O que vimos nesta seção é que uma equação de estado que leve em conta interação pode fornecer um indício, e apenas um indício, de inflação. Não fizemos um estudo que permita dizer que o nosso modelo conduz realmente a um modelo inflacionário que resolve os problemas de horizonte e de planura apresentados pelo modelo padrão. Nossa linguagem, sustentada sobre a mecânica estatística, é diferente da abordagem convencional dos modelos inflacionários que usam campos escalares para obterem soluções de expansão acelerada, $\ddot{a} > 0$, para o fator de escala cósmico. É uma tentativa de simplificação, uma tentativa de compreender a equação de estado exótica $p = -\epsilon$, ou equivalentemente, de dar um significado para a constante cosmológica, usando fundamentos da Física.

Se houver realmente uma transição de fase hadron-quark (se os quarks puderem ser livres) e a simetria eletrofraca puder ser estabelecida a inflação deverá supostamente acontecer no intervalo $10^{13\pm3} GeV \leq kT \leq 10^{18} GeV$, valores de kT incrivelmente superiores aos encontrados em nosso modelo para uma pressão negativa, e onde certamente a aproximação que adotamos não vale. Caso, porém, exija-se apenas o sucesso dos cálculos de nucleossíntese, a inflação fica restrita a valores de energias maiores que $\approx 1 MeV$; algo mais coerente com os nossos resultados [36].

Capítulo 5

Considerações Finais

A solução (3.24) de um universo dominado pela matéria e na presença de constante cosmológica é, como vimos, o melhor candidato para descrever o universo atual. Este modelo particular está sujeito ao vínculo $\Omega_{b0} + \Omega_{\Lambda} = 1$ obtido pela redução da equação $\Omega_{b0} + \Omega_{\gamma0} + \Omega_{me} + \Omega_{k0} + \Omega_{\Lambda} = 1$ que vincula as diferentes fontes da gravitação em larga escala. Temos bons motivos, vindos das observações, para anularmos $\Omega_{\gamma0}$ e Ω_{k0} , mas não parece realista fazer $\Omega_{me} \simeq 0$, desprezando a matéria escura. Ao contrário, temos indicações de que $\Omega_{me} \simeq 0,27$ e $\Omega_{\Lambda} \simeq 0,7$ restando apenas uma participação irrisória à matéria bariônica, $\Omega_{b0} \simeq 0,03$. O modelo consistente com o vínculo $\Omega_{me} + \Omega_{\Lambda} = 1$, mais adequado, leva justamente a solução (3.24) se pudermos atribuir a equação de estado $p = 0$, característica da matéria ordinária, também à matéria escura. Isto terá sentido caso a massa de repouso da matéria escura for muito maior do que sua energia térmica, $mc^2 \gg kT$. E voltamos ao problema da natureza da equação de estado na cosmologia.

A constante cosmológica pode ser alternativamente descrita por uma equação de estado exótica $p = -\epsilon$. Entender a natureza da constante cosmológica é explicar esse tipo de pressão negativa. Propusemos neste trabalho um mecanismo físico capaz de gerar pressão negativa, como mostra a figura 4.5. Para obtê-la, empregamos um modelo em que os nucleons, oriundos da radiação altamente energética ($kT \gtrsim 2,2 \text{ MeV}$) do período pré-nucleossíntese, interagem via potencial nuclear simplificado, um potencial do tipo esferas duras mais um poço atrativo – figura 4.4. A interação nuclear é a única levada em conta, pois, supostamente, os elétrons e pósitrons anulam as cargas de prótons e anti-prótons presentes no sistema termalizado.

Para quantificar a interação, utilizamos o método clássico de expansão em cluster, corrigindo a equação de estado do gás ideal de nucleons até segunda ordem (terceiro termo da expansão). Sabemos que os fótons interagem entre si, afinal, produzem os nucleons computados no modelo*, entretanto, consideramos a equação de estado

*Os nucleons atuais são residuais e, como tal, desprezados.

ideal de fótons $p_\gamma = \frac{\epsilon}{3}$, pois não sabemos se, e de que maneira, esta equação se altera na presença de interações entre fótons.

A pressão negativa por nós obtida não é constante. Não justificamos Λ , mas o fato de gerarmos pressão negativa a partir de fundamentos de física (mecânica estatística e fenomenologia em física nuclear) é estimulante. Ademais, se encontrada uma equação $p(n, T)$ que assumisse progressivamente as formas $p_\Lambda = -\epsilon$, $p_\gamma = \frac{\epsilon}{3}$, $p_b = nkT \simeq 0$, poderíamos ter justificado de maneira natural uma eventual passagem de um cenário inflacionário *a la* de Sitter ao modelo de Friedmann padrão na medida da evolução do universo.

Dito isso, cabe ressaltar também que a investigação do significado da pressão em cosmologia não está esclarecido.

Usamos a expansão do virial $p(n, T)$, eq. (4.7), para construir a equação de estado com interação (4.20) da qual resulta a figura 4.5. Esta solução leva a conclusão de que *é a atração entre as partículas do fluido que provoca a pressão negativa, e conseqüentemente a expansão acelerada do fator de escala*. É imediato ver isso: quando se faz $V_0 = 0$ eliminando o poço atrativo do potencial nuclear, o gráfico de $p(kT)$ é uma função monotônica crescente: a altas temperatura tentamos acessar a região de esferas duras (barreira infinita) do potencial, o que provoca a divergência da pressão.

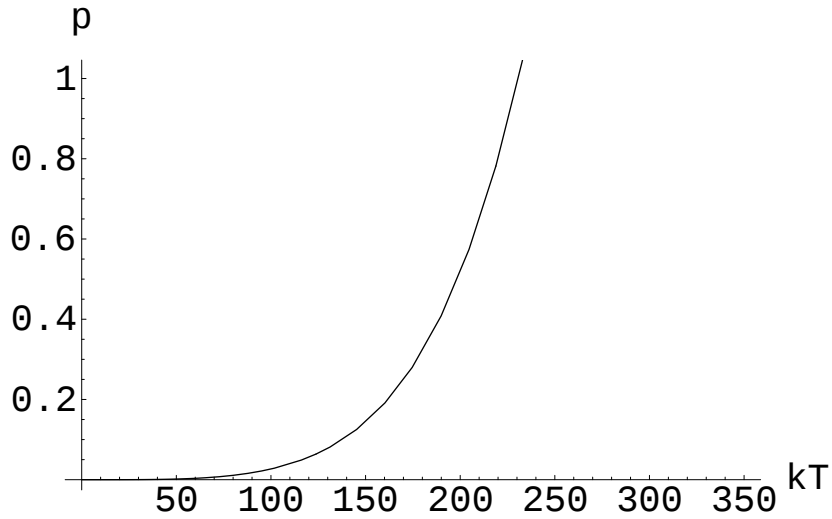


Figura 5.1: Gráfico da pressão em unidades de MeV/λ_C em função de kT (em MeV) no caso em que a parte atrativa do potencial nuclear se anula, i.e., $V_0 = 0$.

No gráfico da figura 4.5 mostramos regiões de energia acima de 260 MeV , onde

começamos a acessar o poço do potencial: a pressão cai de valores positivos acabando por assumir valores negativos a partir de $kT \approx 290 \text{ MeV}$. Se aumentássemos ainda mais os valores de kT nesse gráfico, veríamos a pressão divergir para valores positivos de MeV/λ_C , um efeito da região de barreira infinita do potencial.

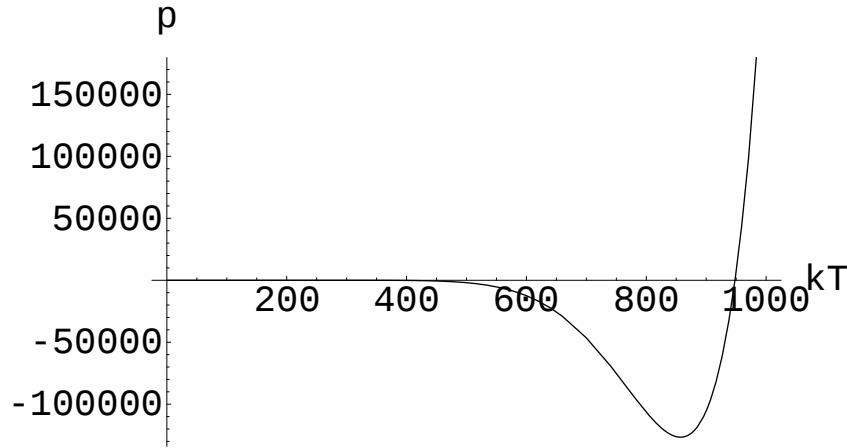


Figura 5.2: Gráfico da pressão em função da energia, levado a valores altos de kT .

Observe a figura 5.2: a valores tão altos de energia certamente perdemos a noção de potencial e não podemos esperar nem a convergência da série. O gráfico, que mostra a divergência da pressão para valores altos de kT é apenas ilustrativo, portanto.

Neste trabalho, chamamos de equação de estado a equação obtida a partir da expansão do virial. Será que a conclusão de que “a atração provoca expansão” permanece válida quando empregamos o par de equações (4.5) ao invés de (4.7) como equação de estado? Considere (4.5) até o segundo termo da expansão:

$$\begin{cases} \frac{p}{kT} = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} b_l (gz)^l \simeq \frac{2}{\lambda^3} (b_1 z + 2b_2 z^2) \\ n = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} l b_l (gz)^l \simeq \frac{2}{\lambda^3} (b_1 z + 4b_2 z^2) \end{cases} ;$$

com $b_1 = 1$ e

$$b_2 = -\frac{2\pi}{\lambda^3} \int_0^{\infty} (1 - e^{-u(r)/kT}) dr.$$

A fugacidade $z = e^{\mu/kT}$ é sempre positiva, assim como o comprimento de onda térmico ($\lambda \propto \sqrt{1/T}$). Portanto, o sinal de b_2 ditará o sinal da pressão. Um coeficiente b_2 negativo consistente com a condição $(b_1 z + 2b_2 z^2) < 0$, ou

$$b_2 < -\frac{1}{2z}, \quad (5.1)$$

significará pressão negativa. Mas um poço atrativo, em que o potencial vale $-V_0$, é inconsistente com essa exigência pois impõe que $V_0 < 0$, o que contradiz a definição de V_0 como quantidade positiva[†]. Então, temos indicações de que com essa nova equação para pressão, atração não significa pressão negativa, tampouco expansão. Para resolver esse impasse precisamos decidir qual equação de pressão é a real equação de estado do sistema. Veja-se que esse questionamento é uma pergunta sobre mecânica estatística, anterior a preocupação de como fazer sua aplicação na cosmologia.

Argumentamos em favor da equação do virial para a verdadeira equação de estado do sistema de gás com interação. Fazemos isso, baseados em [18], que chama a eq. (4.7) de equação de estado. Além disso, o método de Fowler e mesmo a equação de van der Waals expressam a pressão em função da densidade n e da temperatura. E estes resultados, além de mais intuitivos, são derivados expansão do virial. A própria equação de estado do gás ideal $p = nkT$ é função de n e T .

De qualquer forma, resta claro como um assunto tão fundamental como o da equação de pressão é intrincada e demanda investigação.

A mudança de um modelo de de Sitter para o cenário cosmológico padrão de Friedmann também pode ser tratada de um ponto de vista mais geométrico. O primeiro consiste de um espaço-tempo maximalmente simétrico; e o segundo apresenta um número menor de simetrias. Resta saber se o modelo de Friedmann pode ser derivado do de de Sitter através de um processo de perda de simetrias. Essa pesquisa, relacionada com a seção 2.2.5, fica como trabalho futuro.

[†] $b_2 < 0 \Rightarrow \int_c^b (1 - e^{V_0/kT}) dr > 0 \Rightarrow (b - c) (1 - e^{V_0/kT}) > 0 \Rightarrow (1 - e^{V_0/kT}) > 0$, pois $b > 0$ por construção. Assim, para satisfazermos $b_2 < 0$, devemos ter:

$e^{V_0/kT} < 1 \Rightarrow V_0/kT < 0 \Rightarrow V_0 < 0$, para $kT \neq 0$.

Referências

- [1] R.C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Dover Publications, Inc., New York, 1987.
- [2] W. de Sitter, *On the relativity of inertia: remarks concerning Einstein's latest hypothesis*, Proc. Akad. Weteusch. Amsterdam **19**, 1217 (1917).
- [3] A. Friedmann, *Über die krummung des reumes*, Z. Phys. **10**, 377 (1924) and Z. Phys. **21**, 326 (1924).
- [4] A. Einstein and W. de Sitter, *On the relation between the expansion and the mean density of the universe*, Proc. Natl. Acad. Sci. (USA) **18**, 213 (1932).
- [5] Abbé G. Lemaître, *A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae*, MNRAS **91**, 483 (1931).
- [6] G. Gamow, *Expanding universe and the origin of elements*, Phys. Rev. **70**, 570 (1946).
- [7] R.A. Alpher and R.C. Herman, *Evolution of the universe*, Nature **162**, 774 (1948).
- [8] R.A. Alpher, H.A. Bethe and G. Gamow, *The origin of chemical elements*, Phys. Rev. **73**, 80 (1948).
- [9] A. Penzias and R. W. Wilson, *Mesurements of excess antenna temperature at 4080 Mc/s*, Ap. J. **142**, 419 (1965).
- [10] P. de Bernardis *et al*, *A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation*, Nature **404**, 955 (2000).
- [11] S. Perlmutter *et al*, *Discovery of a supernova explosion at half the age of the Universe*, Nature **391**, 51 (1998); A. G. Riess *et al*, *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astronomical. J. **116**(3) 1009 (1998).

- [12] S. Perlmutter *et al*, *Measurements of Omega and Lambda from 42 high-redshift supernovae*, *Astrophys. J.* **517**(2), 565 (1999).
- [13] G.R. Burbidge, F. Hoyle, J.V. Narlikar, *A different approach to cosmology*, *Phys. Today* **52**(4), 38 (1999).
- [14] J.V. Narlikar, *Introduction to Cosmology*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [15] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology. Principles and Applications of The General Theory of Relativity*, J. Wiley, New York, 1972.
- [16] P.Coles & G.F.R. Ellis, *Is the Universe Open or Closed?*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [17] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed., Pergamon, Oxford, 1975.
- [18] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 2nd. ed., Butterworth Heinemann, Oxford, 2001.
- [19] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [20] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics*, World Scientific, Cingapura, 1995.
- [21] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Physical Cosmology*, notas internas do IFT, 2000, disponível no site www.ift.unesp.br/gcg/.
- [22] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *An Introduction to Gravitation Theory*, notas internas do IFT, 2001, disponíveis no site www.ift.unesp.br/gcg/.
- [23] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980.
- [24] E. Schrödinger, *Expanding Universes*, Cambridge University Press, 1956.
- [25] A.G. Riess *et al*, *The Farthest Known Supernova: Support for an Accelerating Universe and a Glimpse at the Epoch of Deceleration*, reprint arXiv/astro-ph/0104455.
- [26] R. Aldrovandi, J. Gariel and G. Marçilhacy, *On the Pre-nucleosynthesis Cosmological Period*, gr-qc/0203079 (2002).

- [27] H.C. Ohanian, *Gravitation and Spacetime*, W. W. Norton & Co., New York, 1976.
- [28] H. Callen, *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*, 2nd. Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1985.
- [29] Fowler, *Statistical Mechanics*, 2nd. ed., Cambridge, 1955.
- [30] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, 2nd. ed., McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [31] Ya.B. Zel'dovich and I. D. Novikov, *Relativistic Astrophysics II: The Structure and Evolution of the Universe*, University of Chicago Press, 1981.
- [32] W.E. Burcham and M. Jobes, *Nuclear and Particle Physics*, Longman Scientific & Technical, 1995.
- [33] H. Enge, *Introduction to Nuclear Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1966.
- [34] F. Lucchin and S. Matarrese, *Power-law Inflation*, Phys. Rev. **D32**(6), 1316 (1985).
- [35] G.F.R. Ellis, *Standard and Inflationary Cosmologies*, Lectures given at the Summer Research Institute, Banff, Alberta, Canada, 1990.
- [36] A.R. Liddle and D.H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, New York, 2000.
- [37] J. Foster & J. D. Nightingale, *A Short Course in General Relativity*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1995.
- [38] C. Moller, *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, London, 1952.