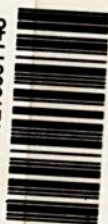


# unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

*DISSERTAÇÃO DE MESTRADO*  
*EM*  
*ENGENHARIA ELÉTRICA*

1210001148



Nº 45

WAVELETS: UM ESTUDO E APLICAÇÃO À  
DETECÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DE DISTURBIOS  
EM SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA  
ALUNO: ROBIM PEREIRA KOSLOSKI  
ORIENTADOR: FRANCISCO VILLARREAL ALVARADO

Te.1148

unesp



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA – UNESP  
FACULDADE DE ENGENHARIA – CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**"WAVELETS: UM ESTUDO E APLICAÇÃO À DETECÇÃO E  
CARACTERIZAÇÃO DE DISTÚRBIOS EM SISTEMAS DE  
ENERGIA ELÉTRICA"**

Dissertação submetida à faculdade de  
Engenharia de Ilha Solteira – UNESP  
como parte dos requisitos necessários  
para obtenção do título de Mestre em  
Engenharia Elétrica (ME).

**ALUNO : ROBIM PEREIRA KOSLOSKI  
ORIENTADOR: PROF. DR. FRANCISCO VILLARREAL ALVARADO**

ILHA SOLTEIRA  
FEVEREIRO DE 2000

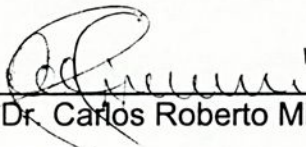
BCpIS - FEIS - UNESP

# “Wavelets: Um Estudo e Aplicação à Detecção e Caracterização de Distúrbios em Sistemas de Energia Elétrica”

**Robim Pereira Kosloski**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA (ME).



  
Prof. Dr. Carlos Roberto Minussi - Coordenador

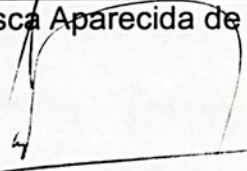
## COMISSÃO EXAMINADORA:

Proc. 017/2000-URD 093-GISA

UNESP - "CARLOS RIBEIRO DE OLIVEIRA" SOLTEIRA	
SERVIÇO TÉCNICO DE DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
13. 09. 00	29. 09. 00
RECEBIDA POR	TOMBO
Aleza	Te. 1148
ACERCA DE	CLASSIFICAÇÃO
Wloraço Antal R\$ 10,00	K86w

  
Prof. Dr. Francisco Villarreal Alvarado - orientador

  
Prof.ª Dr.ª Francisca Aparecida de Camargo Pires

  
Prof. Dr. Luís Carlos Origa de Oliveira

30400007 ENGENHARIA ELÉTRICA

Ilha Solteira – SP, fevereiro de 2000

Ce  
Sup 207985  
Sup 55656

Nov 314

BCpIS - FEIS - UNESP

unesp



12 13 14 15 16 17 18 19

## **Abstract**

Analyzing the Fourier Transform and the windowed Fourier Transform, we have realized that they show a deficiency in the treatment of certain kinds of signal.

The deficiencies shown by these transforms justify the development of the wavelet transform.

Here, taking the basic concepts as a starting point, we “built” the wavelet transform, showing a mathematic fundamentation.

Using the wavelet definition we found, we show that the Lorentzian derivatives are wavelets.

In sequence, we show the mathematics concepts which conduct to the decomposition and reconstruction algorithms of the discreet wavelet transform.

Using the symlet wavelet, we show that the wavelet transform is an adequate tool for the detection and characterization of disturbs in electrical energy systems.

**Key words:** Wavelets Analysis, Signal Processing.

## Resumo

Realizando uma análise da transformada de Fourier e da transformada de Fourier com janela, constatamos a deficiência que elas apresentam no tratamento de determinados tipos de sinal.

As deficiências apresentadas por estas transformadas, justificam o surgimento da transformada wavelet.

Aqui, partindo dos conceitos básicos elementares, "construímos" a transformada wavelet, apresentando a fundamentação matemática.

Fazendo uso da definição encontrada para wavelet, demonstramos que as derivadas da Lorentziana são wavelets.

Na seqüência apresentamos os conceitos matemáticos que conduzem aos algoritmos de decomposição e reconstrução da transformada wavelet discreta.

Utilizando a wavelet symlet mostramos que a transformada wavelet constitui-se numa ferramenta adequada para a detecção e caracterização de distúrbios em sistemas de energia elétrica.

Palavras chaves: Análise Wavelet, Processamento de Sinal.



## Agradecimentos

Ao Professor Dr. Washington Luiz de Barros Melo por ter-me colocado em contato com assunto tão bonito e promissor.

Ao Professor Dr. Francisco Villarreal Alvarado pela serenidade e incentivo com que orientou-me.

Ao Professor Dr. Luis Carlos Origa de Oliveira pela sugestão e esclarecimentos quanto a aplicação.

Ao Professor MsC. Ernandes Rocha de Oliveira pela lição maior que os esclarecimentos dos conceitos da Análise Funcional, a fraternidade de auxiliar um simples desconhecido.

Ao Professor Dr. Jozué Vieira Filho pelo incentivo, que ele não sabe que me deu. Muitas vezes uma única palavra vale mais que um discurso.

Ao "companheiro" Marco Livio Trajano dos Santos pelo incentivo constante.

A minha esposa e as minhas filhas Pollyana e Raissa por terem me suportado neste período.

A Arlete Martins Kosloski; a forma que o Senhor encontrou para colocar-me em pé n vezes.



# Índice

<b>Abstract</b>	ii
<b>Resumo</b>	iii
<b>Agradecimentos</b>	iv
<b>Índice</b>	v
<b>Prefácio</b>	vii
<b>Capítulo 1: Introdução</b>	1
1.1 Análise Wavelet	1
1.2 Processamento Computacional	2
1.3 Um Pouquinho de História	4
1.4 Qualidade de Energia e Wavelet	5
1.5 Notações	6
<b>Capítulo 2: Da Transformada de Fourier a Transformada Wavelet</b>	8
2.1 Transformada de Fourier	8
2.2 Transformada de Fourier com Janela	11
2.3 Transformada Wavelet	13
<b>Capítulo 3: Wavelets e Transformada Wavelet</b>	20
3.1 Wavelets	20
3.2 A Lorentziana	21
3.3 Discretização da Transformada Wavelet e Fórmulas de Reconstrução	24
3.4 Análise de Multiresolução	29
3.5 Decomposição e Reconstrução Wavelet	35



<b>Capítulo 4:</b>	Aplicação sobre Distúrbios em Sistemas de Energia Elétrica	41
4.1	Caracterização de Distúrbios em Sistemas de Energia Elétrica	41
4.2	Detecção e Caracterização de Distúrbios em Sistemas de Energia Elétrica	43
<b>Conclusões</b>		52
<b>Apêndice A:</b>	Demonstrações e Definições	54
<b>Apêndice B:</b>	Implementação Computacional da Transformada Wavelet Discreta	57
<b>Apêndice C:</b>	Implementação Computacional Utilizada	74
<b>Bibliografia</b>		82



## Prefácio

O presente trabalho originou-se da proposta inicial de demonstrar que a Lorentziana, ou uma de suas derivadas, serve como wavelet e, em caso afirmativo realizar uma aplicação

Uma vez conhecido o que seja uma Lorentziana, o próximo passo é saber o que é wavelet.

Wavelets é um tema recente, por este motivo talvez, os livros e artigos encontrados que tratam do assunto não o fazem de forma unificada.

O tema é extenso, abrangente e com aplicação em várias áreas da ciência e tecnologia.

Para uma compreensão ainda que superficial da Análise Wavelet como um todo, faz-se necessário uma boa noção de Análise de Fourier, Análise de Multiresolução e filtragem. Entretanto, noções de Análise Funcional é o pré-requisito para um estudo a qualquer nível.

Porém os estudos realizados sobre o assunto mostraram que para chegar a uma aplicação, muito mais teria que ser feito, no sentido que, uma aplicação ao ser implementada certamente exigiria um processamento computacional, ou seja estaria tratando com sinais digitais, assim para dar prosseguimento ao trabalho proposto, dever-se-ia dar continuidade aos estudos visando a discretização do processo.

Considerando ainda que o maior interesse atualmente é o processamento de sinais digitais, e que a bibliografia consultada trata o assunto com esta visão, foi dado continuidade aos estudos visando compreender o algoritmo que realiza a transformada discreta de wavelets.



O assunto é extenso, e complexo. Para uma compreensão do assunto deve-se ter pelo menos familiaridade com a teoria de Processamento de Sinais.

Tendo em vista a extensão e complexidade dos fundamentos teóricos do assunto, que seria mais da alçada dos matemáticos, e tendo observado que o interesse demonstrado, pelos profissionais das áreas de engenharia, no assunto, é sua aplicabilidade. Este trabalho foi conduzido no sentido de apresentar o caminho, da forma mais clara e compreensível possível para aqueles que não estão familiarizados com a teoria matemática envolvida, que leva aos algoritmos para os processos de decomposição (análise) e reconstrução (síntese) por wavelets. A fundamentação teórica é apenas indicada com a intenção de dar um suporte e possibilitar aos interessados um aprofundamento no assunto e ainda auxiliar na compreensão do mesmo. O objetivo principal é apresentar uma interpretação dos conceitos matemáticos envolvidos no desenvolvimento da teoria.

Ao contrário do que se imagina, antes de um contato com o assunto, a análise wavelet não depende exclusivamente da wavelet. Existe uma função adicional associada com a wavelet. Esta função, chamada função escala, define uma análise de multiresolução donde se origina os algoritmos acima mencionados.

Uma vez compreendido o que vem a ser uma wavelet, demonstrar que a Lorentziana, ou uma de suas derivadas, pode ser considerada como uma é uma tarefa relativamente simples, quando se trata do caso contínuo. Na situação atual ela serve para realizar análise contínua, porém sem esclarecer possíveis vantagens ou desvantagens. Para ter alguma utilidade, um estudo teórico muito mais aprofundado deverá ser realizado, mesmo porque a construção de uma wavelet não é realizada a partir de uma forma de onda.

Desta forma a aplicação a ser realizada será com alguma das wavelets já existentes.

A aplicação será na detecção de distúrbios em sistema de energia elétrica.

Este Trabalho foi estruturado em 4 capítulos e 3 apêndices.

No capítulo 1, é apresentada uma visão geral da análise wavelet, seu processamento computacional, e da relação entre esta análise e a qualidade de energia.

No capítulo 2 apresenta-se as deficiências da transformada de Fourier e da transformada de Fourier com janela conduzindo a introdução da transformada wavelet.

No capítulo 3, partindo da definição de wavelet demonstra-se que as derivadas da Lorentziana são wavelets. Ainda neste capítulo, desenvolve-se a parte teórica da discretização da transformada wavelet até obter-se os algoritmos de decomposição e reconstrução por wavelets.

O capítulo 4 é destinado a aplicação, onde realiza-se a detecção e caracterização de distúrbios em sistemas de energia elétrica.

Para não tornar a leitura desta cansativa, demonstrações e algumas definições foram deixadas para o apêndice A, mesmo porque isto não deve ser o principal numa primeira leitura pelos interessados no assunto.

Os apêndices B e C tem a finalidade de possibilitar aos interessados uma melhor compreensão dos algoritmos de decomposição e reconstrução, iniciar-se na utilização da ferramenta e reproduzir os resultados aqui obtidos.



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Análise Wavelet

No estudo de sinais (funções) as técnicas freqüentemente utilizadas decorrem da Análise de Fourier; em que qualquer sinal pode ser representado como uma superposição de ondas senoidais de várias freqüências que oscilam indefinidamente. Com isto ela é mais apropriada no estudo de sinais com comportamentos senoidais naturais – o tipo observado em sinais de fala – e sinais que não sofrem variações muito bruscas, chamados sinais estacionários.

Muito recentemente surgiu a Análise Wavelet que tem atraído muito a atenção de matemáticos, engenheiros e cientistas em geral. A teoria das wavelets é uma ferramenta muito versátil com conteúdo matemático muito rico.

Em contraste com a senóide que oscila indefinidamente utilizada na Análise de Fourier as wavelets utilizadas na Análise Wavelet são localizadas no tempo, duram por apenas um ou poucos ciclos. Com isto, esta nova forma de análise é muito mais eficiente que a Análise de Fourier para tratar sinais dominados por discontinuidades ou comportamento de transição, freqüências que variam com o tempo.

Análogo à Análise de Fourier, na Análise Wavelet também existem duas ferramentas importantes a "Transformada (integral) Wavelet" e a "Série de wavelet".

A transformada wavelet de uma função  $f$  localiza  $f$  com a capacidade de redução e ampliação e simultaneamente sua transformada de Fourier; mais



claramente, a transformada wavelet transforma um sinal do domínio do tempo no domínio tempo-escala. Escalas de valores grandes fornecem termos de tempo longo do sinal, fornecendo uma visão global do mesmo e, escalas de valores pequenos fornecem os detalhes do sinal, como se realiza-se uma ampliação do mesmo. A escala está relacionada com o inverso da frequência, escalas de valores grandes correspondem as componentes de baixa frequência do sinal e inversamente escalas pequenas correspondem as altas frequências, assim informando da transformada de Fourier do sinal.

Diante dessa característica da transformada wavelet e como existem algoritmos em tempo real para obter as seqüências de coeficientes, a lista de aplicações da Análise Wavelet é muito extensa.

A técnica tem sido aplicada em diferentes áreas como comunicações digitais, sensoriamento remoto, processamento de sinais biomédicos, imagens médicas, astronomia, análise numérica, etc. As wavelets estão sendo usadas para compressão de sinais e imagens, para aumentar a velocidade de algoritmos científicos fundamentais e para remoção de ruídos de sinais e imagens, entre outros.

Atualmente existem muitos "softwares" comerciais de engenharia para os vários ambientes de computação, que permitem ao usuário explorar as potencialidades da análise wavelet em processamento de imagens e sinais.

## **1.2 Processamento computacional**

A decomposição de um sinal em wavelets envolve apenas um par de formas de ondas, wavelet de escala fina correspondente as altas frequências para representar os detalhes do sinal e wavelet de escala grossa correspondente as baixas frequências para representar as partes suaves do sinal. As duas formas são transladadas e escaladas para produzir wavelets em diferentes posições e escalas.



A transformada de Fourier representa um sinal como uma superposição de senóides com diferentes frequências e os coeficientes de Fourier medem a contribuição das senóides nessas frequências. De modo semelhante, a transformada wavelet representa um sinal como uma soma de wavelets com diferentes posições e escalas e os coeficientes das wavelets essencialmente quantificam a força da contribuição das wavelets nessas posições e escalas.

Tanto a transformada de Fourier quanto a transformada wavelet decompõe um sinal em "blocos de construção", senóides e wavelets, respectivamente. A diferença está na eficiência que cada uma apresenta para determinadas tarefas. A eficiência das wavelets, por exemplo, está em representar sinais e imagens com descontinuidades, na remoção de ruídos de sinais e compactação de dados. Também, em algumas situações, as transformadas wavelet são de fácil interpretação. Singularidades e bordas, que são difíceis de discernir através da transformada de Fourier, são mais realçadas em uma transformada wavelet. Desta maneira a Análise Wavelet ajuda a identificar mais rapidamente detalhes importantes localizados em imagens.

A eficiência e rapidez da Análise wavelet deve-se ao algoritmo piramidal rápido. Este algoritmo é constituído de duas partes principais: o algoritmo "forward" serve para computar a transformada wavelet (decompor o sinal nas wavelets componentes) e o algoritmo "backward" serve para computar a transformação inversa (reconstrói o sinal original a partir das wavelets componentes).

O algoritmo "forward" utiliza uma série de filtros lineares, passa-alta e passa-baixa para decompor o sinal em componentes de altas e baixas frequências, combinados com operações de "downsampling" por dois (de cada duas amostras uma é abandonada), reduzindo assim as computações a



cada iteração, após  $j$  iterações o número de amostras manipuladas se reduz em  $2^j$ .

Para computar a transformada wavelet de um sinal de  $n$  amostras a quantidade de ciclos da unidade central de processamento (CPU) necessária é apenas  $n$  vezes a constante  $C$ , que é determinada pela wavelet escolhida. O valor de  $C$  é determinado em parte pela quantidade de termos que a wavelet tem em seu filtro linear. Esta transformada pode ser muito mais breve do que uma transformada rápida de Fourier, que requer tipicamente  $n \log n$  ciclos.

O algoritmo "backward" simplesmente inverte o processo combinando operações "upsampling" por dois (insere um zero entre cada duas amostras) com uma série de filtros lineares.

### 1.3 Um Pouquinho de História

O primeiro registro do termo "wavelet" data de 1909, numa tese de Alfred Haar.

O conceito de wavelet em sua forma teórica presente foi proposto em meados dos anos oitenta por Jean Morlet (geofísico), Yves Meyer (matemático) e equipe do Centro de Física Teórica de Marseille trabalhando sob orientação de Alex Grossmann (físico teórico) na França.

Os métodos de análise wavelet foram desenvolvidos principalmente por Yves Meyer e seus colegas que asseguraram a disseminação do método.

A atenção da comunidade de processamento de sinal foi atraída quando Ingrid Daubechies e Stephane Mallat, além de suas contribuições a teoria de wavelets, estabeleceram conexão e resultados com o processamento de sinal discreto.

O algoritmo principal devido ao trabalho de Mallat data de 1988. Desde então, pesquisas em wavelets tornaram-se internacionais. Tais



pesquisas são particularmente ativas nos Estados Unidos onde é encabeçado pelo trabalho de cientistas como Ingrid Daubechies, Ronald Coifman, e Victor Wickerhauser.

#### **1.4 Qualidade de Energia e Wavelet**

Com o crescimento da aplicação de dispositivos eletrônicos não linear em equipamentos e sistemas de energia, a quantia de distorções da forma de onda está mais significativa hoje em dia. Tais distorções significam que a qualidade de energia é uma preocupação crescente para os usuários e as indústrias. Qualidade aqui se refere a relação dos sinais de tensão e corrente com as formas de ondas puramente senoidais.

Um problema de qualidade de energia pode ser visto como qualquer ocorrência manifestada na tensão, corrente, ou alteração da frequência, que resultem em fracasso ou má operação de equipamento elétrico. Sem determinar os níveis existentes da qualidade de energia, os fornecedores não podem adotar estratégias satisfatórias para prover um serviço melhor. Conseqüentemente, uma forma mais eficiente para analisar estas perturbações da qualidade de energia elétrica é requerida.

O caminho da transformada wavelet é uma proposta para classificar vários distúrbios de sistema de energia elétrica. Ao encontrar-se vários distúrbios, o método proposto é útil para categoriza-los em grupos diferentes de forma que o operador pode decidir em estratégias para suprimi-las ou elimina-las efetivamente.

Diferente das transformadas baseadas em Fourier, a aproximação da transformada wavelet é mais eficiente em determinar o comportamento do sinal no decorrer do tempo.

A implementação da transformada de Fourier discreta através de vários algoritmos tem sido construído como a base da análise espectral



moderna. Tais transformada foram aplicadas com sucesso a sinais estacionários onde as propriedades dos sinais não evoluem no tempo. Porém, para sinais não estacionário, qualquer mudança abrupta pode estender-se por todo o eixo da frequência. Nesta situação, a transformada de Fourier é menos eficiente para localizar a dinâmica do sinal.

Recentemente, com o aparecimento das wavelets, desenvolveu-se uma estrutura uniforme para processamento de sinais e suas aplicações. Enquanto a transformada de Fourier utiliza uma janela uniforme para frequências variadas, a transformada wavelet pode aplicar várias durações de janelas de acordo com as frequências do sinal. Perturbações de características não estacionaria são melhor monitoradas através de wavelets. Comportamentos passageiros, cavidades e descontinuidades dos sinais podem ser investigados pela transformada de wavelet. Por exemplo, uma perturbação de impulso instantânea que ocorre em um certo intervalo de tempo, pode contribuir para a transformada de Fourier, mas sua localização no eixo do tempo é perdida. Porém, através das wavelets, podem ser obtidas informações de tempo e de frequência. Em outras palavras, a transformada wavelet é mais localizada. Em vez de transformar uma descrição pura no tempo em uma descrição pura na frequência, a transformada wavelet encontra um ajuste bom da descrição no tempo com a descrição na frequência

## 1.5 Notações

Aqui serão adotadas as seguintes notações.

Para o produto interno de  $f(t)$  por  $g(t)$ :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

onde  $\overline{g(t)}$  representa o complexo conjugado de  $g(t)$ .

Para a norma de  $f(t)$  em  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

Para a transformada de Fourier da função  $f(t)$ :

$$(1.1) \quad \mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

onde  $i$  representa a unidade imaginária e  $\omega$  a frequência em rad./seg.

Para a inversa da transformada de Fourier da função  $f(t)$ :

$$(1.2) \quad \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\omega)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

Para a derivada n-ésima da função  $f(t)$ :

$$f^{(n)}(t).$$

Para a convolução das funções  $f$  e  $g$ :

$$f(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx.$$

## Capítulo 2

# Da Transformada de Fourier a Transformada Wavelet

### 2.1 Transformada de Fourier

A técnica mais utilizada para a análise e síntese de funções tem sido a análise de Fourier. Para se ter uma melhor compreensão da análise wavelet e uma visão de suas capacidades e potencialidades, e mesmo por que ela se propõe a sanar as deficiências da análise de Fourier nosso estudo se iniciará através desta.

Se uma função no domínio do tempo,  $s(t)$ , é olhada como um sinal analógico de energia finita, decorre da definição de energia que:

$$\|s\| = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty .$$

Matematicamente diz-se que  $s \in L^2(\mathbb{R})$ , sendo  $L^2(\mathbb{R})$  o espaço das funções mensuráveis definidas sobre  $\mathbb{R}$ , de quadrado integrável. Doravante assume-se estar trabalhando no espaço  $L^2(\mathbb{R})$ .

Como  $s \in L^2(\mathbb{R})$  a sua transformada de Fourier (TF) existe e é determinada por:

$$(2.1) \quad \mathcal{F}\{s(t)\}(\omega) = \hat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} dt = \langle s(t), e^{i\omega t} \rangle .$$

A operação  $s(t)e^{-i\omega t}$  no integrando dessa expressão é chamada modulação da função  $s$ .

A exponencial,  $e^{-i\omega t}$ , é chamada função moduladora. É conveniente lembrar que a exponencial complexa pode ser decomposta em componentes senoidais real e imaginária.

A TF representa o espectro de frequência do sinal. Desta forma,  $\hat{s}(\omega)$  mede a ocorrência da frequência  $\omega$  no sinal. Como  $\omega$  varia nos reais podemos interpretar (2.1) como descrevendo uma densidade de frequência do sinal  $s$ . Para uma dada frequência  $\omega$ ,  $\hat{s}(\omega) \neq 0$  significa que esta frequência se encontra presente no sinal, distribuída ao longo do mesmo. O valor maior ou menor de  $\hat{s}(\omega)$  informa sobre a ocorrência maior ou menor da frequência  $\omega$  no sinal, sem informar onde (quando) ela ocorreu.

A transformada inversa é definida como

$$(2.2) \quad \mathcal{F}^{-1}\{\hat{s}(\omega)\}(t) = s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega .$$

Interpreta-se as duas expressões anteriores, (2.1) e (2.2), dizendo-se que a análise de Fourier é uma transformação matemática que muda nossa visão baseada no tempo para uma visão baseada na frequência, ou seja  $\hat{s}(\omega)$  é uma representação igualmente válida do sinal em outro domínio, o domínio da frequência. Diz-se ainda que a análise de Fourier decompõe um sinal em constituintes senoidais de diferentes frequências.

A transformada inversa permite reconstruir o sinal como uma superposição de funções periódicas, onde a contribuição (coeficiente) de cada função componente na superposição é dada pela transformada de Fourier,  $\hat{s}(\omega)$ .

Para muitos sinais, a análise de Fourier é extremamente útil porque o conteúdo em frequência dos sinais é de grande importância.



A análise de Fourier apresenta uma séria desvantagem. Na transformação para o domínio da frequência, a informação no tempo é perdida. Quando se olha para a TF de um sinal, é impossível dizer quando ocorreu um determinado evento. "Por exemplo, não é o suficiente somente saber todas as notas de uma obra específica de música, elas também deveriam ser tocadas na ordem correta"[17].

O maior interesse em geral é a localização dessa frequência no domínio do tempo ou, determinar os intervalos de tempo que produzem a informação espectral numa faixa de frequência desejada.

Se o sinal não apresenta muitas variações no tempo, sinais estacionários, esta desvantagem não é muito importante. Uma noção de estacionaridade é apresentada mais a frente. Entretanto muitos sinais de interesse contem numerosas características não estacionárias ou seja apresentam características transitórias: tendências, variações abruptas, início e fim do evento, etc. Frequentemente estas características são a parte mais importante do sinal, e a análise de Fourier não é apropriada para localizá-los.

Um parâmetro importante no estudo dos sinais é o seu comportamento no decorrer do tempo. De acordo com a variação deste parâmetro, os sinais são classificados em sinais estacionários e sinais não estacionários.

Um sinal é estacionário se suas propriedades são estatisticamente invariantes com o tempo. Um sinal estacionário pode exibir eventos inesperados, mas a probabilidade de ocorrência destes eventos é conhecida.

Um sinal não estacionário é aquele para o qual aparecem eventos transitórios que não podem ser previstos. Estacionaridade é formalizada precisamente na literatura de processamento estatístico de sinal.



A localização de frequências com a transformada de Fourier na maioria das vezes é impossível; devido que a função (exponencial) moduladora utilizada ser caracterizada por ondas que oscilam indefinidamente, não tendo suporte compacto (não são concentradas na vizinhança de nenhum ponto). As funções básicas da TF têm duração infinita. Como resultado a análise de Fourier trabalha bem com sinais estacionários.

A falta do suporte compacto da moduladora faz com que as mudanças bruscas no sinal (por exemplo, descontinuidades), apesar de detectadas, sejam computadas ao longo de todo o domínio da frequência. A análise de Fourier é portanto mais eficiente no estudo de sinais estacionários.

## 2.2 Transformada de Fourier com Janela

A dificuldade em localizar frequências no domínio do tempo, torna a transformada de Fourier deficiente para a análise de funções.

Num esforço para corrigir esta deficiência, Dennis Gabor (1946) adaptou a transformada de Fourier, com a técnica chamada janelamento, que analisa o sinal em pequenas seções do tempo.

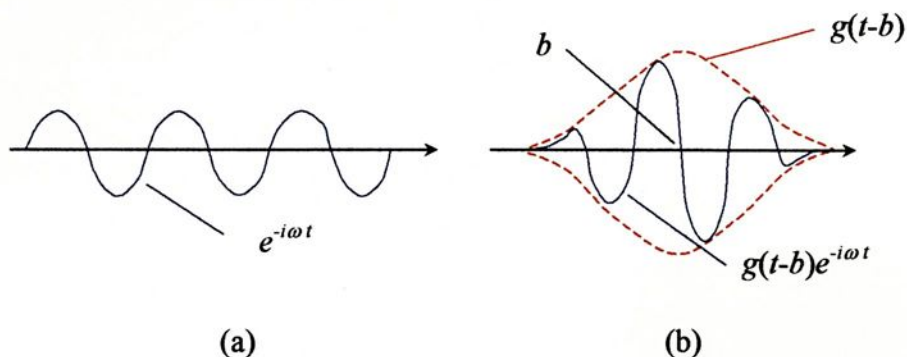
Esta adaptação conhecida como transformada de Fourier em tempo curto (STFT) ou transformada de Fourier com janela, transforma um sinal em uma função bidimensional do tempo e da frequência. Ela representa um tipo de ajuste entre a visão baseada no tempo com a visão baseada na frequência.

Para obter uma transformada que possibilite o cálculo da densidade de frequência de forma localizada no domínio do tempo, a função moduladora utilizada deve ter seus valores concentrados numa região, i.é, a moduladora deve ser localizada em  $t$ .

Para localizar no tempo a função moduladora utilizada na transformada de Fourier; toma-se uma função auxiliar  $g(t)$  que concentra seus



valores numa vizinhança de  $t$ , ou seja uma função de extensão limitada centrada em  $t$ , e para cada  $b \in \mathbb{R}$  translada-se a origem para o ponto  $b$  e multiplica-se a exponencial pela função transladada  $g(t-b)$ . Afigura 2.1 ilustra esse processo. Na verdade o que se faz é uma mudança da função básica de Fourier,  $e^{-i\omega t}$ , para a função básica  $g(t-b)e^{-i\omega t}$ .



**Figura 2.1:** Processo de localização. (a) Funções básicas de Fourier, (b) Funções básicas da STFT

Com esta nova função básica obtém-se a transformada de Fourier com janela

$$(2.3) \quad \mathcal{F}\{s(t)\}(\omega, b) = \hat{s}(\omega, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t-b)e^{-i\omega t} dt = \langle s(t), g(t-b)e^{i\omega t} \rangle.$$

Esta transformada fornece informação quando e a que frequência um evento do sinal ocorreu. Entretanto a precisão dessa informação é limitada pelo tamanho da janela, e uma vez escolhido o tamanho da janela no tempo esta janela é a mesma para todas as frequências.

Muitos sinais requerem uma aproximação mais flexível, onde se pode variar o tamanho da janela para obter maior precisão tanto no tempo quanto na frequência.

A transformada de Fourier com janela é inadequada porque a janela tem largura fixa. Esta desvantagem da STFT pode ser vista pela capacidade

dela discriminar duas senóides puras. Duas senóides serão discriminadas somente se estiverem separadas por mais que  $\Delta\hat{g}$  (largura da janela na frequência ou largura da banda). Dois pulsos no tempo podem ser discriminados somente se estiverem separados por mais que  $\Delta g$  (largura da janela no tempo).

Não se consegue obter uma função janela que tenha boas propriedades de localização no tempo e na frequência simultaneamente é o que afirma o princípio da incerteza [Apêndice A.11], conhecido através da expressão

$$(2.4) \quad \Delta g \Delta \hat{g} \geq \frac{1}{2}.$$

Se um sinal possui frequências de valores muito variáveis não se pode obter uma janela de largura adequada que tenha boas propriedades de localização no domínio tempo-frequência para todos os valores de frequências envolvidas. Considerando que, a frequência do sinal é inversamente proporcional ao período, segue que para se ter informação espectral de alta frequência, o intervalo de tempo deve ser relativamente pequeno, para obter-se uma melhor precisão, e para se ter informação espectral de baixa frequência, o intervalo de tempo deve ser relativamente longo, para fornecer informações completas. Em outras palavras, é importante que se tenha janelas de tempo-frequência flexíveis, que automaticamente estreitam-se para altas frequências e alargam-se para baixas frequências.

### 2.3 Transformada Wavelet

Para resolver as deficiências da transformada de Fourier e da transformada de Fourier com janela, deve-se obter uma transformada em que a escala (largura da janela) seja flexível, ou seja, que se estreita para altas frequências.



A transformada Wavelet tem o objetivo de eliminar estas deficiências, procurando obter decomposições em domínios tempo-freqüência, ou seja obter decomposições por funções que possuem boas propriedades de localização no espaço tempo-freqüência.

Como no caso da transformada inversa de Fourier que tinha uma única função que "gerava" as funções de reconstrução, aqui também tem-se uma única função nesse sentido.

Considerando uma função  $\Psi(t)$  que seja localizada no tempo como uma função de modulação. Dados  $p \geq 0$  e  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  defini-se:

$$(2.5) \quad \Psi_a(t) = |a|^{-p} \Psi\left(\frac{t}{a}\right).$$

Observa-se que:

1. O fator  $|a|^{-p}$  faz com que a amplitude de  $\Psi_a$  aumente quando a escala  $a$  diminui e vice-versa.

2. Se  $\Psi$  tem largura  $T$  então  $\Psi_a$  tem largura  $aT$ , [Apêndice A.3]. Como a largura da função define a largura da janela, para valores grandes de escala, tem-se janelas mais largas no tempo e vice-versa.

3. Em termos de freqüência, pode-se dizer que para valores pequenos de escala  $a$ ,  $a < 1$ ,  $\Psi_a$  possui freqüências altas, e a medida que a escala aumenta,  $a > 1$ , a freqüência de  $\Psi_a$  diminui. Deste modo a freqüência varia de modo inversamente proporcional a escala.

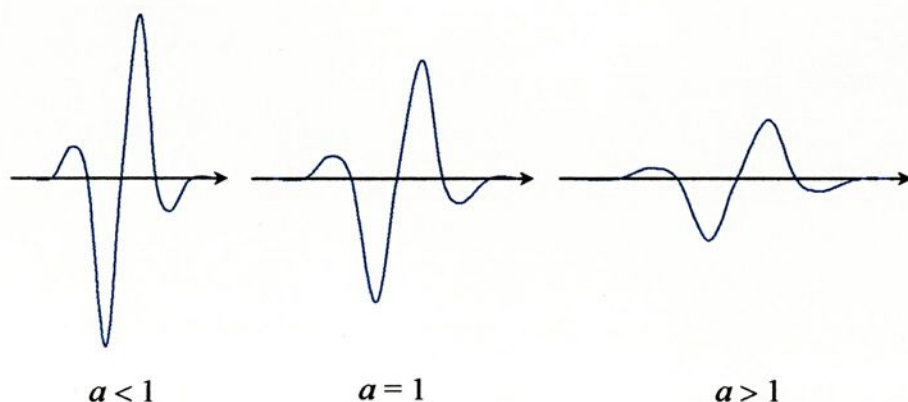
Ilustramos estas observações na figura 2.2.

Sendo  $\Psi(t)$  uma função localizada no tempo, i.é., função com seus valores concentrados numa determinada vizinhança de um ponto no tempo, a fim de cobrir toda a reta real, de modo análogo ao que se faz na transformada



de Fourier com janela, translada-se a origem para o ponto  $b$ , com  $b$  variando nos reais, ou seja, desliza-se  $\Psi$  ao longo do eixo da variável tempo. Assim defini-se a função

$$(2.6) \quad \Psi_{a,b}(t) = |a|^{-p} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$



**Figura 2.2:** Escalamento da função de modulação.

Note que, se  $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$  então  $\Psi_{a,b} \in L^2(\mathbb{R})$  e, [ Apêndice A.4],

$$(2.7) \quad \|\Psi_{a,b}\|^2 = |a|^{1-2p} \|\Psi\|^2.$$

Desta maneira se  $p = 1/2$  tem-se

$$(2.8) \quad \|\Psi_{a,b}\|^2 = \|\Psi\|^2$$

assim se  $\Psi$  tem comprimento unitário,  $\Psi_{a,b}$  também terá.

Considere um sinal  $s(t)$ . Utilizando as funções  $\Psi_{a,b}$  como funções moduladoras *defini-se* a transformada

$$(2.9) \quad Ws(a,b) = \langle s, \Psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) |a|^{-p} \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

denominada *transformada wavelet* (TW).

Com esta expressão pode-se fazer uma analogia do fator de escala  $a$  com a escala utilizada em mapas. Se a escala aumenta,  $\Psi_{a,b}(t)$  "estica" no tempo, capturando comportamentos de tempo longo. Escala grande "significa" visão global, enquanto que escala pequena "significa" visualização de detalhes.

De maneira semelhante ao que ocorre com a transformada de Fourier, em que a transformada inversa reconstrói o sinal  $s$  através dos valores de  $\hat{s}(\omega)$ , será possível reconstruir  $s$  a partir dos valores  $Ws(a,b)$ ? Ou seja, a transformada wavelet é invertível?

A resposta a esta questão é dada pelo teorema enunciado a seguir, cuja demonstração se encontra no apêndice A.6.

**Teorema da admissibilidade.** Se  $\Psi$  satisfaz a condição

$$(2.10) \quad C = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

então

$$(2.11) \quad s(t) = \frac{1}{C} \iint_{\mathbb{R}^2} |a|^{2p-3} Ws(a,b) \Psi_{a,b}(t) da db .$$

Portanto pode-se reconstruir o sinal  $s$  a partir de sua transformada wavelet através da expressão (2.11).

Pode-se interpretar esta expressão de duas maneiras diferentes:

1. expressão para obter  $s$  a partir de sua transformada wavelet, ou
2. expressão que permite reconstruir  $s$  como uma superposição das funções de modulação  $\Psi_{a,b}(t)$ .



A hipótese do teorema anterior, expressão (2.10), é chamada de *condição de admissibilidade*.

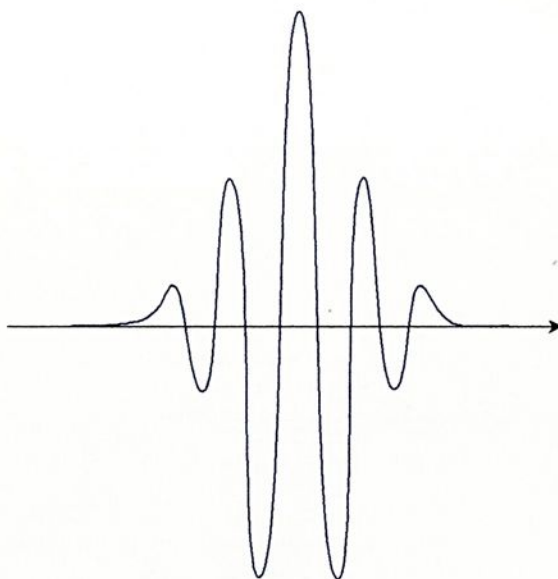
Segue da condição de admissibilidade que  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \hat{\Psi}(\omega) = 0$ .

Assim, se  $\hat{\Psi}(\omega)$  é contínua, então  $\hat{\Psi}(0) = 0$ , ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0.$$

Geometricamente, essa condição estabelece que o gráfico da função  $\Psi$  deve oscilar de modo a cancelar áreas positivas e negativas a fim de anular a integral. Portanto o gráfico de  $\Psi$  tem a forma de uma onda.

Como  $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ , então  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Psi(t) = 0$ , e desde que  $\Psi$  deve ter a propriedade de boa localização no tempo, este decaimento deve ser muito rápido. Assim ela terá a forma de uma onda pequena (ver Figura 2.3).



**Figura 2.3:** Gráfico de uma wavelet.

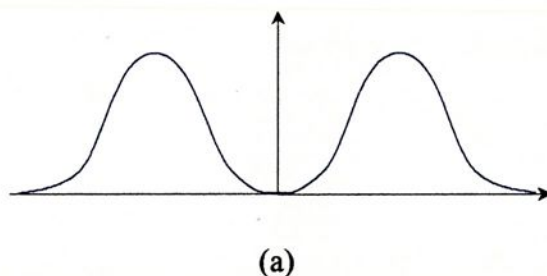
Por essa razão uma função  $\Psi$  que satisfaz a condição de admissibilidade é chamada *wavelet* (do inglês: onda pequena).

A equação (2.9) que define a transformada wavelet pode ser escrita como um produto de convolução

$$Ws(a,b) = s * \Psi_a$$

onde  $\Psi_a(t)$  é definida em (2.5). Assim a transformada wavelet é um filtro linear invariante no tempo.

Desde que  $\hat{\Psi}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ , então  $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{\Psi}(\omega) = 0$ . Juntamente com o fato que  $\hat{\Psi}(0) = 0$ , conclui-se que o gráfico de  $\hat{\Psi}$  é semelhante ao esboçado na figura 2.4.



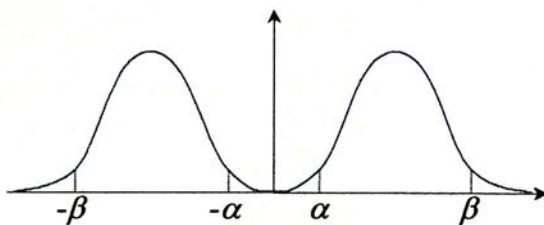
**Figura 2.4:** Transformada de Fourier de uma wavelet.

Se  $\hat{\Psi}$  tem um decaimento rápido quando  $\omega \rightarrow 0$  e quando  $\omega \rightarrow \infty$ , então  $\hat{\Psi}(\omega)$  é pequena fora de uma pequena faixa de frequência  $\alpha \leq |\omega| \leq \beta$  (ver figura 2.5). Segue da equação (A.2) que  $\hat{\Psi}_{a,b}(\omega) \approx 0$  fora da faixa de frequência  $\frac{\alpha}{|a|} \leq |\omega| \leq \frac{\beta}{|a|}$ .

Além disso, da equação (A.4) a transformada wavelet  $Ws(a,b)$  não contém informações sobre  $s$  fora desse intervalo do espectro. Em resumo, os



cálculos acima mostram que a transformada wavelet é um filtro linear passa-banda invariante no tempo.



**Figura 2.5:** Banda de frequência do filtro wavelet.

## Capítulo 3

### Wavelets e Transformada Wavelet

#### 3.1 Wavelets

Uma função  $\Psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$  é denominada uma *wavelet* se e somente se sua transformada de Fourier  $\hat{\Psi}(\omega)$  satisfaz

$$C = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty.$$

Esta condição implica que  $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0$ . Geometricamente, isto significa que o gráfico da função  $\Psi$  deve oscilar, ou seja o gráfico de  $\Psi$  tem a forma de uma onda.

O conjunto de funções

$$\Psi_{a,b}(t) = |a|^{-p} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right), t \in \mathbf{R}, a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}, p \geq 0$$

geradas por dilatações, através do parâmetro  $a$ , e translações, através do parâmetro  $b$ , de uma única wavelet mãe (ou wavelet básica)  $\Psi(t)$  é chamada uma *família de wavelets*.

A *Transformada Wavelet Contínua* de um sinal  $s \in L^2(\mathbf{R})$  é definida como:

$$Ws(a,b) = \langle s, \Psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) |a|^{-p} \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt.$$

A análise wavelet permite o uso de intervalos de tempo longo onde se necessita de informação a baixa frequência, e intervalos mais curtos para alta frequência.

Uma das maiores vantagens oferecida pelas wavelets é a habilidade para realizar análise local, isto é, analisar regiões localizadas de um sinal longo.

A análise wavelet é capaz de revelar aspectos dos dados que outras técnicas omitem, aspectos semelhantes a tendências, pontos de descontinuidades, descontinuidades em derivadas de ordem superior, e outros. Além disso, pode frequentemente compactar ou remover ruídos de um sinal sem apreciáveis degradações.

### 3.2 A Lorentziana

Em física a Lorentziana aparece no estudo do Oscilador Harmônico. Para frequências próximas a frequência de ressonância a resposta do Oscilador Harmônico Forçado Levemente Amortecido é aproximada pela Lorentziana, cuja expressão matemática é

$$(3.1) \quad L(\omega) = \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

sendo  $\omega$  frequência e  $\omega_0$  a frequência de ressonância e  $\gamma$  uma constante que depende da resistividade e da massa num sistema mecânico (massa mola).

Esta função é encontrada em óptica com o nome de "forma de linha de Lorentz", em espectroscopia com o nome de Lorentziana, em física nuclear como "curva de ressonância de Breit-Wigner", é claro que as variáveis representam grandezas físicas diferentes em cada área e, em matemática como função de Cauchy.

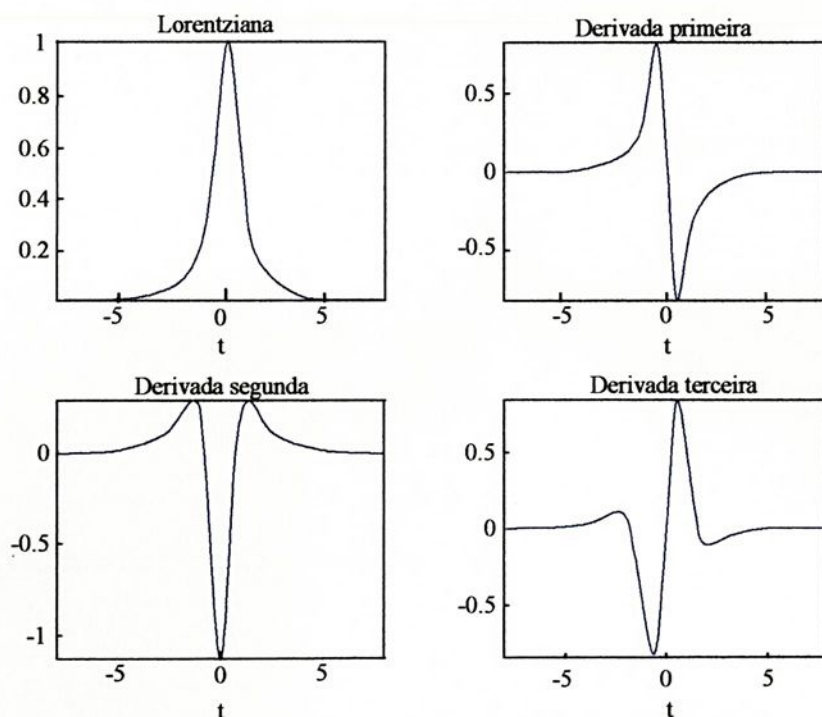


No momento o interesse na Lorentziana é como uma função. Para colocá-la em uma forma mais simples retira-se o deslocamento dado por  $\omega_0$ , faz-se  $\frac{\gamma}{2} = a$  e muda-se os nomes das variáveis de  $L$  e  $\omega$  para  $f$  e  $t$  respectivamente, ficando

$$(3.2) \quad f(t) = \frac{a^2}{a^2 + t^2}; t \in \mathbf{R}, a > 0.$$

O propósito aqui é demonstrar que a Lorentziana, ou uma de suas derivadas, serve como uma wavelet.

A figura 3.1, a seguir, mostra os gráficos da Lorentziana normalizada e de suas três primeiras derivadas, também normalizadas. A normalização é desenvolvida no Apêndice A.8.



**Figura 3.1:** Lorentziana e suas três primeiras derivadas.

Da definição de wavelet, pelo gráfico da Lorentziana torna-se claro que ela não é uma wavelet.

Resta examinar suas derivadas. Fazendo

$$(3.3) \quad \Psi_n(t) = f^{(n)}(t), \quad n=1,2,3,\dots$$

A transformada de Fourier de  $f(t)$  é dada por, [12],

$$(3.4) \quad \mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega) = a\pi e^{-a|\omega|}.$$

Sabendo que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ , fazendo uso da propriedade

$$(3.5) \quad \mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (i\omega)^n \mathcal{F}\{f(t)\} = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$$

da transformada de Fourier, para encontrar  $\hat{\Psi}_n(\omega)$ , ou seja,

$$(3.6) \quad \hat{\Psi}_n(\omega) = \mathcal{F}\{\Psi_n(t)\} = \mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\}$$

assim

$$(3.7) \quad \hat{\Psi}_n(\omega) = (i\omega)^n a\pi e^{-a|\omega|}.$$

Desta forma a condição de admissibilidade, expressão (2.10), para as derivadas da Lorentziana,  $\Psi_n(t)$ , é

$$(3.8) \quad C_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{a^2 \pi^2 \omega^{2n} e^{-2a|\omega|}}{|\omega|} d\omega, \quad n = 1, 2, \dots$$

e desenvolvendo [Apêndice A.9] obtém-se

$$C_n = \frac{2a^2 \pi^2}{(2a)^{2n}} (2n-1)!.$$

Sendo  $a$  e  $n$  finitos tem-se que  $C_n < \infty$ , satisfazendo assim o teorema da admissibilidade. Isto quer dizer que todas as derivadas da Lorentziana são wavelets.

### 3.3 Discretização da Transformada Wavelet e Fórmulas de Reconstrução

Doravante, pelo exposto em (2.7), assume-se  $p = \frac{1}{2}$  passando a ter

$$(3.9) \quad Ws(\alpha, b) = \langle s(t), \Psi_{\alpha, b}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) |\alpha|^{-\frac{1}{2}} \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{\alpha}\right)} dt$$

para a transformada wavelet.

A fim de construir algoritmos eficientes para determinar a transformada wavelet  $Ws(\alpha, b)$  de um sinal  $s(t)$  e para a reconstrução do mesmo através de sua TW, deve-se realizar sua discretização.

Inicialmente observa-se que a operação de escalamento é multiplicativa, ou seja, a composta de dois escalamentos é dado pelo produto de cada uma das escalas.

Portanto a discretização do fator de escala é simples: fixa-se uma escala inicial  $\alpha_0 > 1$ , e considera-se as escalas discretas

$$(3.10) \quad \alpha = \alpha_0^j; j \in Z.$$

Valores positivos de  $j$  produzem escalas grandes (maiores do que 1), e valores negativos de  $j$  fornecem escalas pequenas (menores do que 1).

Como visto anteriormente, quando a escala aumenta, a largura da wavelet também aumenta, portanto pode-se tomar amostras mais separadas no tempo, a fim de minimizar a redundância. Por outro lado, quando a largura da wavelet diminui com a redução da escala, deve-se aumentar a frequência de amostragem.

Para obter a relação correta do fator de escalamento com a discretização do tempo, deve-se levar em consideração que a transformada



wavelet é invariante por mudança de escala. Isto significa que uma mudança de escala na função  $f$  com simultânea mudança das coordenadas do espaço pelo mesmo fator de escala, não altera a transformada wavelet. Em linguagem matemática isto significa que, se

$$(3.11) \quad f_{a_0}(t) = a_0^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{t}{a_0}\right),$$

então, após um cálculo (usando (3.9)), tem-se

$$(3.12) \quad Wf_{a_0}(a_0 a, a_0 b) = Wf(a, b).$$

Esta é uma propriedade fundamental da transformada wavelet. Para manter esta propriedade válida para a transformada discreta de wavelet, quando se passa de uma escala  $a_0^j$  para uma escala  $a_0^{j+1}$ , deve-se também incrementar o tempo pelo mesmo fator de escala  $a_0$ .

Desse modo, fixando  $b_0 > 0$ , chamada "taxa de amostragem", pode-se tomar o comprimento dos intervalos de amostragem do tempo como  $\Delta b = a_0^j b_0$ . Portanto, para cada escala  $a_0^j$  a discretização no tempo é dada por

$$(3.13) \quad b = k a_0^j b_0, k \in \mathbb{Z}$$

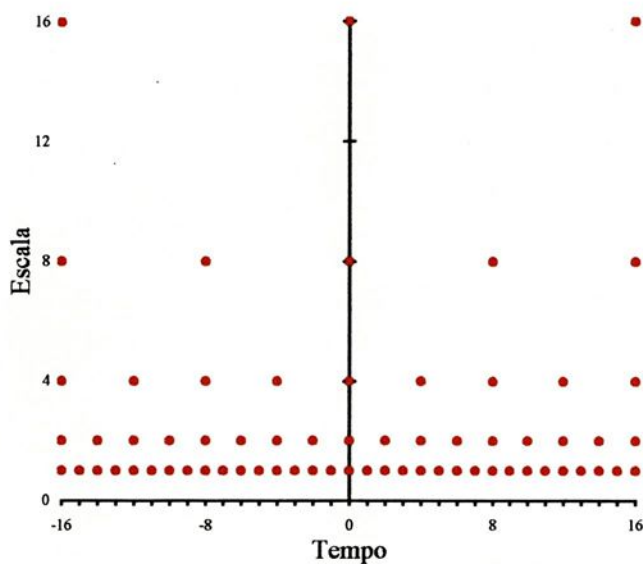
desta maneira, obtém-se o reticulado de discretização, ou grade de amostragem, no domínio tempo-escala dado por

$$(3.14) \quad \Delta_{a,b} = \{(a_0^j, k a_0^j b_0), j, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Com vista a eficiência computacional adota-se  $a_0 = 2$  e  $b_0 = 1$  resultando em

$$(3.15) \quad \Delta_{a,b} = \{(2^j, k 2^j), j, k \in \mathbb{Z}\} \text{ (ver figura 3.2).}$$

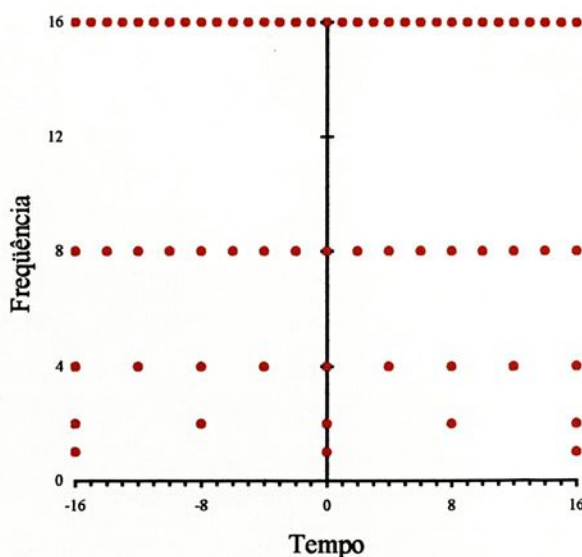




**Figura 3.2:** Grade de amostragem tempo-escala ou reticulado tempo-escala.

Para obter o reticulado no domínio tempo-frequência, observa-se que a frequência varia de modo inversamente proporcional com a escala. Desse modo, fixada uma frequência inicial  $\omega_0$  o reticulado será dado por

$$(3.16) \quad \Delta_{\omega,b} = \left\{ \left( 2^{-j} \omega_0, k 2^{-j} \right), j, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ (ver figura 3.3).}$$



**Figura 3.3:** Grade de amostragem tempo-frequência.

Com isto, a discretização da transformada wavelet  $Ws(a, b) = \langle s, \Psi_{a,b} \rangle$ , com  $a = 2^j$  e  $b = k2^j$  será dada por

$$(3.17) \quad Ws(2^j, k2^j) = \langle s, \Psi_{j,k} \rangle,$$

onde

$$(3.18) \quad \Psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \Psi\left(\frac{t-2^j k}{2^j}\right) = 2^{-j/2} \Psi(2^{-j}t - k).$$

Por questão de comodidade adota-se a notação

$$(3.19) \quad c_{j,k} = Ws(2^j, k2^j) = \langle s, \Psi_{j,k} \rangle.$$

Pode-se fazer uma analogia entre os coeficientes wavelet e um microscópio. Primeiro escolhendo a resolução, isto é,  $2^j$ . Depois movendo para a localização escolhida, ou seja  $k$ . Olhando para detalhes muito pequenos, então a resolução escolhida deve ser grande o que corresponde a  $j$  negativo de valor absoluto grande. Assim,  $\Delta b = 2^j$  corresponde a passos pequenos, que serão utilizados para apanhar detalhes pequenos.

Agora surge a questão: Quais as condições para que esta discretização tenha algum valor prático? Ou seja, que condições devem ser satisfeitas para que se possa reconstruir um sinal a partir de sua transformada wavelet discreta?

Se o conjunto  $\Psi_{j,k}$  gerar um "frame" [Apêndice A.10.1], qualquer  $s \in L^2(\mathbb{R})$  pode ser recuperado através dos valores de sua TW, (3.17), através de

$$(3.20) \quad s(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle s(t), \Psi_{j,k}(t) \rangle \Psi^{j,k}(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle s(t), \Psi^{j,k}(t) \rangle \Psi_{j,k}(t)$$



sendo  $\{\Psi^{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ , denominado frame dual ou recíproco do frame  $\{\Psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Observe que neste caso as funções de síntese ( $\Psi^{j,k}$  na primeira somatória e  $\Psi_{j,k}$  na segunda) são diferentes das funções de análise ( $\Psi_{j,k}$  na primeira somatória e  $\Psi^{j,k}$  na segunda).

As funções  $\Psi^{j,k}$  são determinadas por

$$(3.21) \quad \Psi^{j,k} = T^{-1}\Psi_{j,k}$$

sendo  $T$  o operador linear definido por

$$(3.22) \quad Ts = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle s, \Psi_{j,k} \rangle \Psi_{j,k}; s \in L^2(\mathbb{R})$$

Note que se  $\{\Psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$  é um frame, então  $T$  é um operador linear bijetor (e limitado), o que garante a existência de  $T^{-1}$ .

Para se ter unicidade na representação de  $Ts$ , a família  $\{\Psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$  deve ser linearmente independente.

Se o frame não é constituído por vetores linearmente independentes, existe então uma redundância na representação. Essa redundância pode ser utilizada para se obter uma certa robustez nas técnicas de representação/reconstrução.

Recentemente tem-se desenvolvido esquemas de reconstrução para estes casos, conduzindo às chamadas wavelets biortogonais.

Se  $\{\Psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$  é um frame de cotas igual a unidade e  $\|\Psi\|=1$ , tem-se uma base ortogonal. Neste caso a função  $\Psi$  é "auto dual", no sentido que (usando o delta de Kronecker)

$$(3.23) \quad \langle \Psi_{j,k}, \Psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m},$$

ou seja  $\Psi^{j,k} = \Psi_{j,k}$ , e as fórmulas de reconstrução reduzem-se a (ver 3.19 e 3.20)

$$(3.24) \quad s(t) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \Psi_{j,k}(t).$$

### 3.4 Análise de Multiresolução

Se  $\Psi$  gerar um frame, e além disso as funções  $\Psi_{j,k}$  forem linearmente independentes, tem-se então uma base de Riesz.

Seja  $\{\Psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$  a base de Riesz gerada por qualquer wavelet  $\Psi$ . Para cada  $j$ ,  $W_j$  representará o fecho em  $L^2(\mathbb{R})$  da expansão linear de  $\{\Psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ , i.é.,

$$(3.25) \quad W_j = \overline{[\Psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}]}$$

Nesse caso diz-se que  $W_j$  é o subespaço (fechado) gerado por  $\{\Psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ , ou que, o subespaço  $W_j$  é gerado por  $\Psi$ .

Então vê-se claramente que  $L^2(\mathbb{R})$  pode ser decomposto como uma soma direta dos espaços  $W_j$ :

$$(3.26) \quad L^2(\mathbb{R}) = \dot{\sum}_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \dots + W_{-1} + W_0 + W_1 + \dots,$$

no sentido de que toda função  $s \in L^2(\mathbb{R})$  terá uma única decomposição:

$$(3.27) \quad s(t) = \dots + g_{-1} + g_0 + g_1 + \dots; \quad g_j \in W_j.$$



A partir de uma base de Riesz, pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt obtém-se uma base ortonormal.

Se  $\Psi$  gera uma base ortonormal, então os subespaços  $W_j$  de  $L^2(\mathbf{R})$  são mutuamente ortogonais, significando que

$$(3.28) \quad \langle g_j, g_l \rangle = 0, \quad j \neq l, \text{ onde } g_j \in W_j \text{ e } g_l \in W_l.$$

Consequentemente, a soma direta torna-se uma soma ortogonal

$$(3.29) \quad L^2(\mathbf{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} W_j = \dots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \dots.$$

De especial interesse, particularmente na área de engenharia, são: (i) a decomposição do espaço  $L^2(\mathbf{R})$  como uma soma de subespaços ortogonais e (ii) a existência de uma base ortonormal de  $L^2(\mathbf{R})$ .

Para cada  $j \in \mathbf{Z}$  considera-se o seguinte subespaço fechado

$$(3.30) \quad V_j = W_{j+1} \oplus W_{j+2} \oplus \dots,$$

de  $L^2(\mathbf{R})$ . Estes espaços claramente apresentam as seguintes propriedades (conseqüência de (3.25), (3.26) e (3.30)):

$$(1^\circ) \quad V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1};$$

$$(2^\circ) \quad V_{j+1} \subset V_j; \text{ ou equivalente } \dots V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \dots$$

$$(3^\circ) \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R});$$

$$(4^\circ) \quad \bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{0\};$$

$$(5^\circ) \quad s(t) \in V_{j+1} \Leftrightarrow s(2t) \in V_j.$$



Os subespaços  $V_j$  formam uma seqüência de subespaços "encaixados" como descrito por (2 °). Estas seqüências tem a propriedade de que toda função  $s \in L^2(\mathbb{R})$  pode ser representada tão aproximadamente quanto desejável por suas projeções  $P_{V_j}s$  em  $V_j$ , como descrito por (3 °). Por outro lado, aumentando  $j$ , as projeções  $P_{V_j}s$  podem ter energia arbitrariamente pequena, como é garantido por (4 °). A propriedade intrínseca mais importante desses espaços é que mais e mais "detalhes" de  $P_{V_j}s$  são removidos conforme  $j \rightarrow \infty$ . De fato, estes detalhes são "descascados", nível por nível em ordem crescente de "faixa de freqüência" e armazenada nos subespaços complementares  $W_j$ , como é mostrado por (1 °). Este processo pode ser realizado de maneira muito eficiente pela aplicação da propriedade (5 °).

Realmente, se o subespaço de referência,  $V_0$ , é gerado por uma função  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  no sentido que  $V_0$  é o fecho em  $L^2(\mathbb{R})$  da expansão linear de  $\{\phi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ :

$$(3.31) \quad V_0 = \overline{[\phi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}]};$$

ou seja  $V_0$  é o subespaço gerado por  $\{\phi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$  onde

$$(3.32) \quad \phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) \text{ e } \phi_{0,k}(t) = \phi(t - k) = \phi_k(t)$$

então todos os subespaços  $V_j$  também são gerados pela mesma  $\phi$ ; da mesma maneira que os subespaços  $W_j$  são gerados por  $\Psi$ , a saber:

$$(3.33) \quad V_j = \overline{[\phi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}]}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Mais detalhadamente, se  $V_0$  é gerado por  $\phi_{0,k}(t) = \phi_k(t); k \in \mathbb{Z}$ , então aplicando sucessivamente a propriedade (5 °) conclui-se que  $V_j$  é gerado por  $\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k)$ .

A seqüência de subespaços e suas propriedades mencionadas anteriormente *definem* uma *análise de multiresolução* em  $L^2(\mathbf{R})$ , os espaços  $V_j$  são chamados espaços de escala  $2^j$  e a função  $\phi$  de função de escala.

A representação de uma função  $s \in L^2(\mathbf{R})$  por projeção ortogonal em  $V_j$  é dada por

$$(3.34) \quad \text{Proj}_{V_j} s = s_j = \sum_k \langle s(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \phi_{j,k}(t).$$

Os termos  $\langle s(t), \phi_{j,k}(t) \rangle$  da seqüência de representação de  $s$ , são obtidos fazendo a filtragem de  $s$  com o filtro passa baixa cujo núcleo é  $\phi_{j,k}$  e amostrando a função resultante. Mais claramente

$$(3.35) \quad \langle s(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = S(k) \quad \text{e} \quad S = s * \phi$$

O que a propriedade (3<sup>o</sup>) garante é que

$$(3.36) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} s_j = s$$

ou seja, partindo-se da representação de  $s$  numa determinada escala, pode-se reobter o sinal  $s$  acrescentando-lhe "detalhes" em escalas mais baixas.

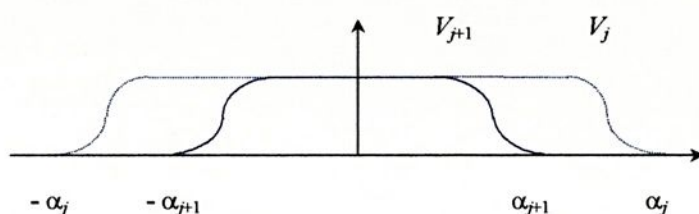
A propriedade  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$  (ver (1<sup>o</sup>)) informa que o subespaço  $W_j$  contém os "detalhes" do sinal na escala  $V_j$ . Mais e mais "detalhes" de  $\text{Proj}_{V_j} s$  são removidos conforme  $j \rightarrow \infty$  e armazenados nos subespaços complementares  $W_j$ .

Uma boa visualização das propriedades da seqüência de subespaços "encaixados" da análise de multiresolução é obtida no domínio da freqüência; descrita a seguir. Esta descrição é de grande auxílio na compreensão dos processos de decomposição e reconstrução por wavelets.



A projeção ortogonal de uma função  $s \in L^2(\mathbb{R})$  em  $V_j$  é obtida através da filtragem de  $s$  pelas funções  $\phi_{j,k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  que definem filtros passa-baixa. Indicando a frequência de corte desse filtro por  $\alpha_j$ , conclui-se que cada espaço  $V_j$  é constituído pelas funções cujas frequências estão contidas no intervalo  $[-\alpha_j, \alpha_j]$ ;  $\alpha_j > 0$ , esquematizado na figura 3.4.

Quando se passa de  $V_j$  para  $V_{j+1}$  a escala aumenta de  $2^j$  para  $2^{j+1}$ , portanto, a banda de frequência diminui para um intervalo  $[-\alpha_{j+1}, \alpha_{j+1}]$ .

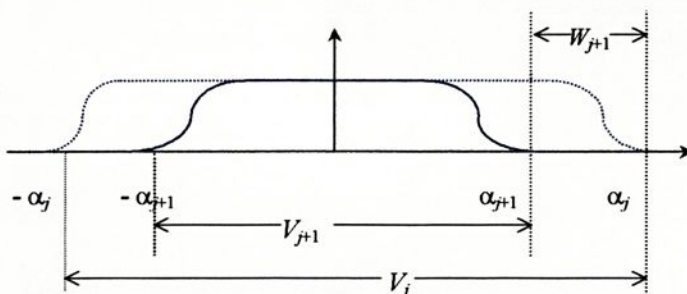


**Figura 3.4:** Espectro da função escala.

O gráfico do espectro de  $\phi_{j,k}$  é a curva pontilhada da figura 3.4, a curva cheia corresponde ao gráfico de  $\phi_{j+1,k}$ .

O espaço de escala  $V_{j+1}$  consiste de todas as funções cujo espectro está contido em  $[-\alpha_{j+1}, \alpha_{j+1}]$ .

Vê-se que o espaço  $V_j$  é obtido a partir do espaço  $V_{j+1}$ , acrescentando-se as funções de  $L^2(\mathbb{R})$ , com frequências na banda  $[\alpha_{j+1}, \alpha_j]$  do espectro, que formam o espaço  $W_{j+1}$ , mostrado na figura 3.5.



**Figura 3.5:** Banda de frequências entre  $V_{j+1}$  e  $V_j$ .



Sabe-se que  $W_{j+1}$  é ortogonal a  $V_{j+1}$ , como descrito por (1°). Para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $W_{j+1}$  é o complemento ortogonal de  $V_{j+1}$  em  $V_j$ .

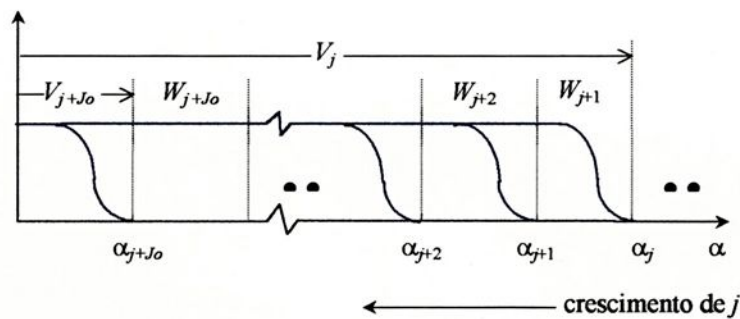
O espaço  $W_j$  contém os detalhes do sinal na escala  $V_j$ . Ele é obtido usando uma filtragem de passa-banda, cuja banda de passagem é exatamente o intervalo  $[\alpha_j, \alpha_{j-1}]$ . Foi visto anteriormente que as wavelets constituem filtros passa-banda e que os espaços  $W_j$  são formados por wavelets.

Da propriedade (1°) da análise de multiresolução tem-se que

$$(3.37) \quad V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$$

em que  $W_{j+1}$  é o complemento ortogonal de  $V_{j+1}$  em  $V_j$  e que os  $W_j$  são mutuamente ortogonais. Portanto fixando  $j = J_0 \in \mathbb{Z}$ , para todo  $j < J_0$  iterando repetidas vezes esta relação, pode-se escrever

$$(3.38) \quad V_j = V_{j+J_0} \oplus \bigoplus_{k=1}^{J_0} W_{j+k}$$



**Figura 3.6:** Bandas de frequência entre  $V_{j+J_0}$  e  $V_j$ .

Ou seja, os sinais cujo espectro está na banda de frequência de  $V_j$ , é a soma de sinais com banda de frequência em  $V_{j+J_0}$  com os sinais com banda de frequência em  $W_{j+1}, W_{j+2}, \dots, W_{j+J_0}$ , conforme mostra a figura 3.6.

É interessante observar que a distância entre os subespaços  $W_j$  não é linear como pode parecer na figura 3.6. Quando se passa de um espaço de escala  $2^j$  para outro de escala  $2^{j+1}$  a frequência muda por um fator de dois, i.é.,  $\alpha_{j+1} = \alpha_j / 2$ , como mostrado na figura 3.7.

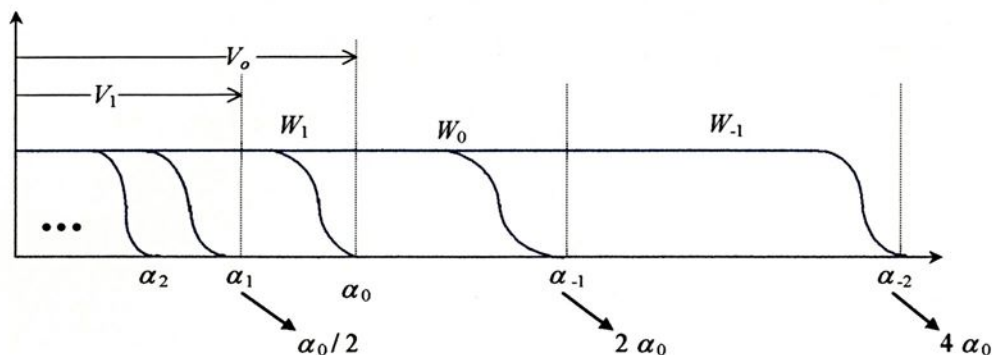


Figura 3.7: Bandas de frequência entre  $V_1$  e  $V_2$ .

### 3.4 Decomposição e Reconstrução Wavelet

Considerando a estrutura geral de wavelets e a análise de multiresolução originada por (3.30), onde  $\{V_j\}$  é gerada por alguma função escala  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  e  $\{W_j\}$  é gerada por alguma wavelet  $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ , neste caso, pela propriedade (3º), toda função em  $L^2(\mathbb{R})$  pode ser aproximada tanto quanto desejado por uma  $s_{J_0} \in V_{J_0}$  para algum  $J_0 \in \mathbb{Z}$ .

Desde que  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$  para qualquer  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $s_j$  terá uma única decomposição

$$(3.39) \quad s_j = s_{j+1} + g_{j+1}$$

onde  $s_j \in V_j$  e  $g_j \in W_j$ . Repetindo este processo, tem-se

$$(3.40) \quad s_j = s_{j+J_0} + g_{j+1} + g_{j+2} + \dots + g_{j+J_0}.$$

Escolhendo-se  $J_0$  de tal forma que  $s_{j+J_0}$  tenha poucos detalhes. Entretanto, os detalhes estão relacionados às altas frequências.



Está decomposição, que é única, é chamada *decomposição wavelet*.

Desde que a função escala  $\phi \in V_0$  e a wavelet  $\Psi \in W_0$  estão em  $V_{-1}$ , e desde que  $V_{-1}$  é gerado por  $\phi_{-1,k}(t) = 2^{1/2} \phi(2^1 t - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , pode-se escrever

$$(3.41) \quad \phi(t) = \sum_k p_k \phi_{-1,k}(t)$$

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k p_k \phi(2t - k)$$

sendo  $p_k = \langle \phi, \phi_{-1,k} \rangle$ . E também

$$(3.42) \quad \Psi(t) = \sum_k q_k \phi_{-1,k}(t)$$

$$\Psi(t) = \sqrt{2} \sum_k q_k \phi(2t - k)$$

sendo  $q_k = \langle \Psi, \phi_{-1,k} \rangle$ .

As expressões (3.41) e (3.42) são chamadas *relação de escala dupla* da função de escala e da função wavelet, respectivamente.

Desde que,  $\phi(2t)$  e  $\phi(2t-1)$  estão em  $V_{-1}$  e  $V_{-1} = V_0 \oplus W_0$ . Como,  $s_j \in V_j$  e  $g_j \in W_j$  têm as representações (sendo que cada uma é única)

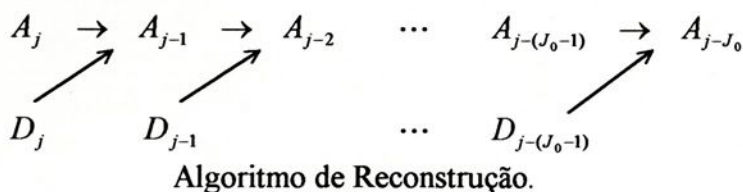
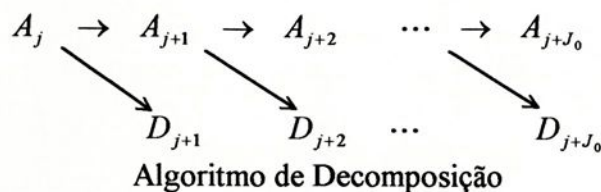
$$(3.43) \quad s_j(t) = \sum_k a_k^j \phi_{j,k}(t)$$

$$(3.44) \quad g_j(t) = \sum_k d_k^j \Psi_{j,k}(t)$$

fazendo

$$(3.45) \quad A_j = \{a_k^j\} \text{ e } D_j = \{d_k^j\},$$

obtém-se, [7], os seguintes algoritmos



Levando a relação (3.42) em (3.18), tem-se

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \left( \sqrt{2} \sum_n q_n \phi(2(2^{-j}t - k) - n) \right)$$

$$\Psi_{j,k}(t) = \sum_n q_n 2^{(-j+1)/2} \phi(2^{-j+1}t - (2k + n))$$

$$\Psi_{j,k}(t) = \sum_n q_n \phi_{j-1, 2k+n}(t)$$

sendo  $q_n = \langle \Psi, \phi_{-1, n} \rangle$ .

Fazendo uma mudança de índices, obtém-se

$$\Psi_{j,k}(t) = \sum_n q_{n-2k} \phi_{j-1, n}(t),$$

desta forma

$$(3.46) \quad d_k^j = \langle s(t), \Psi_{j,k}(t) \rangle = \sum_n \overline{q_{n-2k}} \langle s, \phi_{j-1, n} \rangle,$$

usando a linguagem de processamento de sinal, tem-se

$$(3.47) \quad d_k^j = \langle s(t), \Psi_{j,k}(t) \rangle = (\downarrow 2) \left[ \langle s, \phi_{j-1, n} \rangle * \overline{q_{-n}} \right],$$

onde  $(\downarrow 2)$  representa o operador "downsampling" de ordem 2 (decimação de ordem 2), e  $*$  a operação de convolução.

Levando (3.41) em (3.32), cálculos inteiramente semelhantes aos que foram feitos anteriormente, fornecem

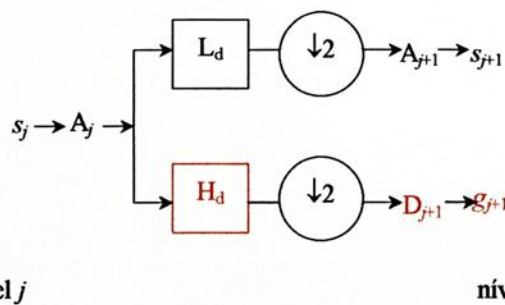
$$(3.48) \quad \alpha_k^j = \langle s(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \sum_n \overline{p_{n-2k}} \langle s, \phi_{j-1,n} \rangle.$$

Utilizando os operadores de convolução e "downsampling", escreve-se

$$(3.49) \quad \alpha_k^j = \langle s(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = (\downarrow 2) \left[ \langle s, \phi_{j-1,n} \rangle * \overline{p_{-n}} \right].$$

"Se o sinal  $s(t)$  (contínuo no tempo) for substituído por uma seqüência  $s(n)$ , correspondente a amostras igualmente espaçadas de  $s(t)$ , então as equações (3.46) e (3.48) correspondem ao que convencionou-se chamar *Método Wavelet Multiresolução*"[4].

Desta forma, os algoritmos de decomposição e reconstrução, mostrados anteriormente, podem ser interpretados claramente como um banco de filtros, onde um dos filtros (passa-baixa) representa a função de escala, e o outro (passa-alta) representa a função wavelet.



**Figura 3.8:** Banco de análise. Decomposição à um nível.

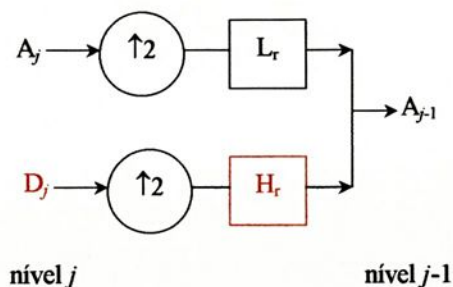
A figura 3.8 mostra o esquema básico da decomposição realizada em um nível apenas. Este sistema composto pelos filtros  $L_d$  e  $H_d$  e dos



operadores de decimação,  $\downarrow 2$ , é chamado banco de análise ou banco de decomposição.

Cada sinal de entrada ( $s_j$ ) é processado pelo filtro passa-baixa de decomposição  $L_d$  para obter suas componentes de baixas frequências ( $s_{j+1}$ ) e pelo filtro passa-alta de decomposição  $H_d$  para obter suas componentes de altas frequências. Após essa primeira etapa de processamento as saídas dos filtros, juntas constituem uma representação do sinal original, porém com o dobro de amostras. A operação de decimação,  $\downarrow 2$ , elimina metade das amostras em cada uma dessas componentes. O sinal de saída é portanto uma representação do sinal de entrada por suas componentes de baixas e altas frequências, e o total do número de amostras nas duas componentes é igual ao número de amostras no sinal de entrada.

A figura 3.9 exhibe o processo de reconstrução realizada em um nível apenas. Este sistema é chamado banco de síntese ou banco de reconstrução.

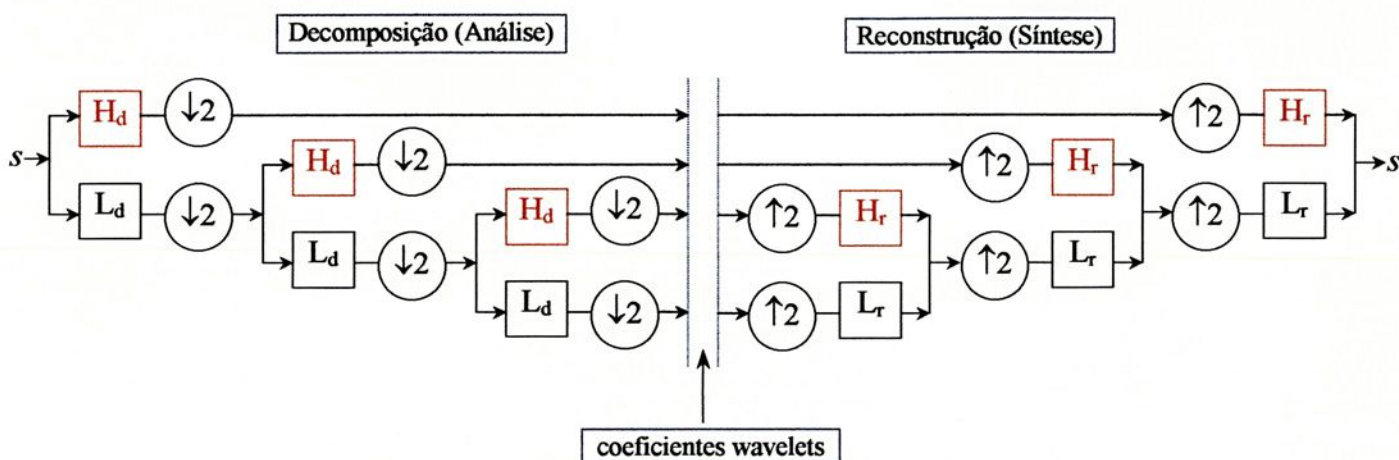


**Figura 3.9:** Banco de síntese. Reconstrução à um nível.

Utiliza-se os operadores de "upsampling" (interpolação),  $\uparrow 2$ , nos dois sinais de saída, juntamente com os filtros passa-baixa e passa-alta de reconstrução,  $L_r$  e  $H_r$  respectivamente, que processam os sinais resultantes e os combina de forma a reconstruir o sinal de entrada.

Na figura 3.10 vários bancos de filtros são combinados de maneira a formar a estrutura da Transformada Wavelet Discreta.

O processo de "downsampling" das componentes do sinal realizado durante a fase de decomposição introduz a distorção chamada "aliasing" o que poderia acarretar em perda irreversível de informação, porém estes filtros são projetados de maneira a cancelar os efeitos de "aliasing", para que juntos mantenham toda a informação para que após a etapa de síntese haja reconstrução perfeita. Este foi o grande avanço realizado pelo trabalho de Ingrid Daubechies. O projeto destes filtros, os filtros passa-baixa e passa-alta de decomposição juntos com os seus filtros associados de reconstrução, formam um sistema que é chamado Quadrature Mirror Filter (QMF).



**Figura 3.10:** Estrutura da transformada wavelet discreta.

No espaço entre as etapas de análise e síntese são realizadas operações como codificação, transmissão, compressão, remoção de ruídos, etc.

Quando a reconstrução é realizada a partir dos próprios filtros de decomposição,  $(H_r, L_r) = (H_d, L_d)$ , o banco de filtro é dito ortogonal. Quando para isto são necessários filtros distintos,  $(H_r, L_r) \neq (H_d, L_d)$ , o banco de filtros é dito biortogonal.

No Apêndice B apresenta-se a implementação computacional desses algoritmos de decomposição e reconstrução por wavelets, desenvolvidos para o Matlab. Esses algoritmos constituem a análise wavelet discreta.

## Capítulo 4

# Aplicação sobre Distúrbios em Sistemas de Energia Elétrica

## 4.1 Caracterização de Distúrbios em Sistemas de Energia Elétrica

Aqui é apresentado o conceito de distúrbios em sistema elétrico de potência e as características típicas da categoria de distúrbios selecionada para estudo.

### 4.1.1 Conceituação

Os distúrbios no sistema elétrico de potência caracterizam-se por uma alteração manifestada nos níveis de tensão, nas formas de onda da tensão ou da corrente, etc., que possam resultar em insuficiência, má operação, falha ou defeito permanente em equipamentos pertencentes a sistema elétrico.

### 4.1.2 Caracterização

Os distúrbios que podem ocorrer no valor eficaz da tensão são:

#### **Variações de tensão de curta duração**

São aquelas que ocorrem no valor eficaz da tensão num intervalo de tempo compreendido entre 0,5 ciclos a 1 minuto, e podem ser um estado de sobretensão ou subtensão.



### Interrupções

É uma redução a valores inferiores a 10% do valor eficaz da tensão com duração entre 0,5 ciclos a 1 minuto.

### Mergulho de tensão ou Sag

É um estado de subtensão, uma redução da amplitude do valor eficaz da tensão de 10% a 90%, com duração entre 0,5 ciclos a 1 minuto. É o resultado, por exemplo, de alguma falta em algum ponto do sistema, normalmente, de sistemas adjacentes, da partida de grandes motores, etc.

### Salto de tensão ou Swell

É definido como um estado de sobretensão, um aumento no valor eficaz da tensão de duração entre 0,5 ciclos a 1 minuto. É o resultado, por exemplo, de uma rejeição de carga em algum ponto do sistema.

Estes distúrbios são classificados conforme a tabela 4.1 a seguir, definida na norma IEEE Std 1159-1995, [18], aqui adotada.

<b>Categoria</b>	<b>Duração Típica</b>	<b>Amplitude de Tensão Típica</b>
<b>Variações de curta duração</b>		
<b>1 Instantânea</b>		
1.1 "Sag"	0,5 – 30 ciclos	0,1 – 0,9 pu
1.2 "Swell"	0,5 – 30 ciclos	1,1 – 1,8 pu
<b>2 Momentânea</b>		
2.1 Interrupção	0,5 ciclos – 3 s	< 0,1 pu
2.2 "Sag"	30 ciclos – 3 s	0,1 – 0,9 pu
2.3 "Swell"	30 ciclos – 3 s	1,1 – 1,4 pu
<b>3 Temporária</b>		
3.1 Interrupção	3 s – 1 minuto	< 0,1 pu
3.2 "Sag"	3 s – 1 minuto	0,1 – 0,9 pu
3.3 "Swell"	3 s – 1 minuto	1,1 – 1,2 pu

Tabela 4.1: Características Típicas dos distúrbios variações de curta duração



## 4.2 Detecção e Caracterização de Distúrbios em Sistemas de Energia Elétrica

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos utilizando o pacote Wavelet toolbox versão 1.0.2 do Matlab (for windows) versão 5.1.0.421, [Apêndice C], rodados em um PC Pentium I 100 MHz.

Com o Wavelet toolbox pode-se realizar a transformada wavelet contínua e a transformada discreta.

Qualquer processamento de sinal realizado em um computador é realizado com sinais discretos. Assim a transformada wavelet contínua opera em tempo discreto. Desta forma o que há de contínuo na transformada wavelet contínua? A diferença entre a transformada discreta e a contínua está na escala e no tempo que elas operam. Diferente da transformada discreta, a transformada contínua pode operar em toda escala, desde um mínimo até uma escala máxima determinado pelo balanço entre detalhes da análise necessária e a potência computacional. A transformada contínua é contínua também em termos do deslocamento no tempo; pois no processamento, a wavelet de análise é deslocada sobre todo o domínio do sinal analisado.

A transformada discreta assegura economia de espaço e redução no tempo de processamento e é suficiente para a síntese.

A transformada contínua em geral é mais fácil de interpretar, uma vez que sua redundância tende a reforçar os traços e torna toda informação mais visível. Ela é especialmente útil para captar informação sutil.

Os sinais fornecidos para análise são sinais sintéticos gerados no Excel.

O primeiro passo foi colocar os sinais no formato aceito pelo Matlab.



Inicialmente fez-se a transformada contínua do sinal mergulho de tensão utilizando primeiro a wavelet db4 (Waveles Daubechies), depois a sym4 (Waveles Symlet), a seguir a coif4 (Wavelets Coiflet) e finalmente a morl (Wavelet Morlet). Numa primeira avaliação percebeu-se que os resultados (expressos pelos escalogramas) obtidos pela db4, sym4 e coif4 não apresentam grandes diferenças entre si, apenas a morl apresenta diferenças marcantes em relação as outras.

Considerando-se as propriedades das wavelets, tais como: suporte, possibilidade de realizar a transformada discreta, e outras, trabalhou-se com a wavelet Symlet, sym4. Na figura 4.1 é mostrada a wavelet sym4 e a correspondente função escala.

As wavelets de suporte compacto são melhor para análise local, quanto menor o suporte detalhes mais finos são captados.

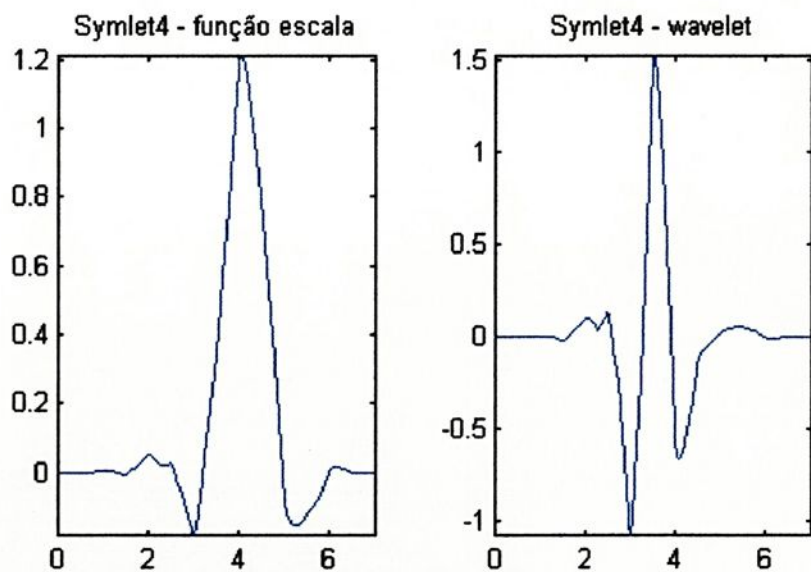


Figura 4.1: Symlet, sym4, função escala e wavelet.

A grande maioria dos artigos consultados utilizam a wavelet db4, dando a falsa impressão ao leigo no assunto que existe apenas esta wavelet. Assim, a sym4 é uma maneira de fugir do "coloquial" mas não distanciar

muito do habitual, mesmo porque as symlets são as db's com melhor simetria. As symlets foram propostas por Daubechies como modificação para as suas wavelets, a família db, de maneira que a simetria pode ser aumentada enquanto mantém a simplicidade. As propriedades das duas famílias de wavelets são quase idênticas.

#### 4.2.a Analisando um mergulho de tensão

O primeiro sinal a ser analisado é um "Sag" ou mergulho de tensão, figura 4.2.

Os dados estão amostrados a 8000 amostras por segundo.

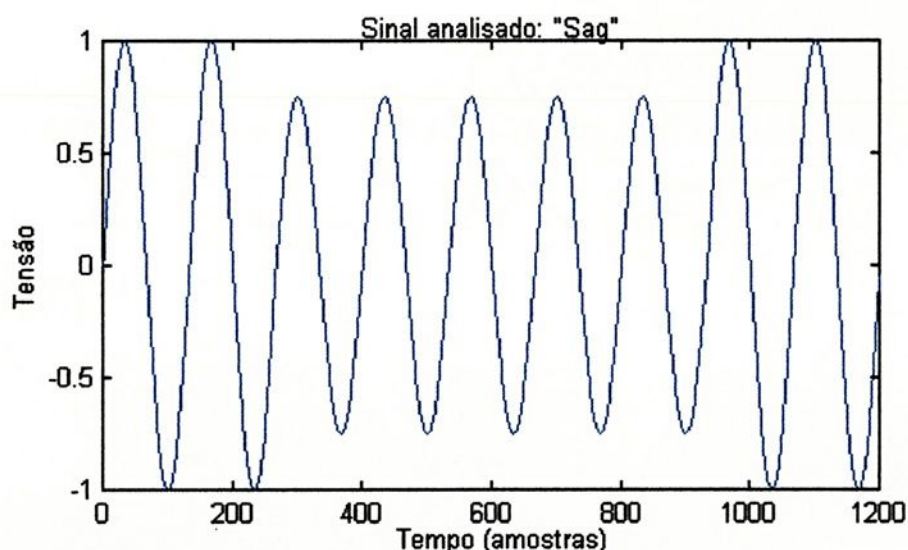
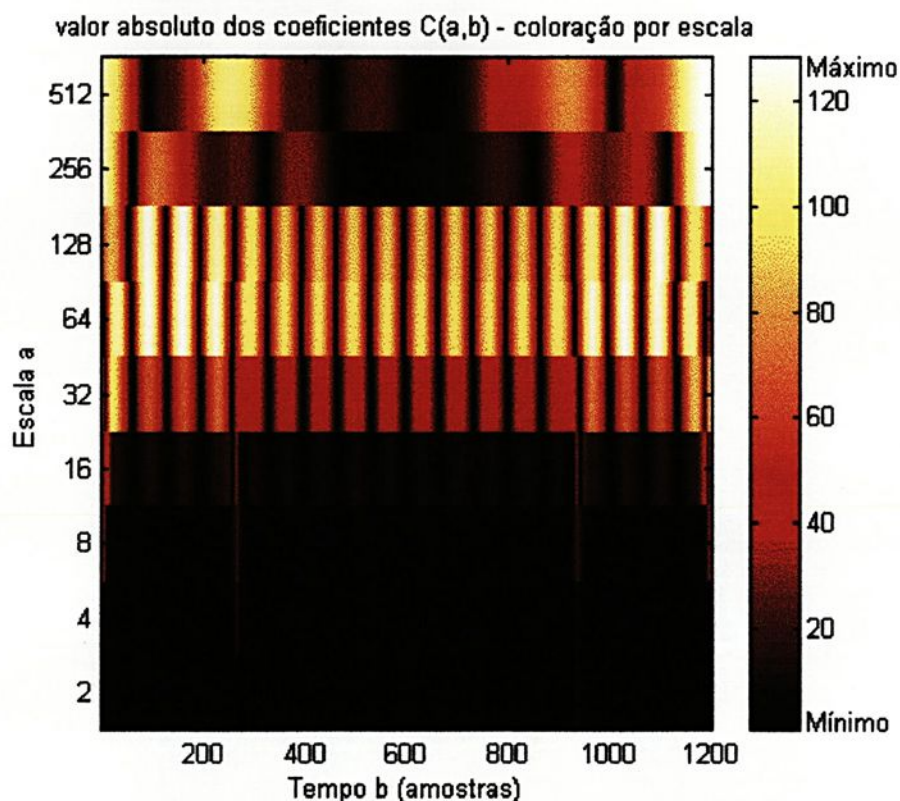


Figura 4.2: Sinal analisado, "Sag" ou mergulho de tensão.

Realizando a transformada contínua deste sinal, obtém-se o escalograma da figura 4.3. O qual fornece uma visão do valor absoluto dos coeficientes da transformada wavelet.

A escala utilizada assume valores que são potências de 2.

A coloração do escalograma é realizada por escala. As cores são graduadas entre o menor e o maior valor dos coeficientes de uma mesma escala. O menor valor é representado pela cor negra e o maior pela cor amarela claro. A coloração é realizada separadamente para cada escala.



**Figura 4.3:** Escalograma do "Sag". Escala em potência de 2. Coloração por escala.

Nesse escalograma, olhando-se para as escalas 2 e 4, pode-se notar as variações mais acentuadas no início e no fim do afundamento de tensão. A coloração mostra coeficientes com valores relativos grandes em torno das amostras 250 e 920. Lembrando-se da taxa de amostragem, isto indica que o evento ocorreu entre 3,12 ms (milissegundos) e 11,60 ms, portanto com duração de 8,48 ms. Olhando ainda para as escalas 64 e 128 pode-se notar que se trata de uma queda de tensão, pelo fato de que no intervalo de tempo

mencionado detectado a coloração indica uma redução nos valores dos coeficientes.

Estas são avaliações visuais do escalograma; evidentemente que o software permite determinar exatamente o ponto (instante) e o valor dos coeficientes.

Agora fazendo a coloração do escalograma por coeficiente, ou seja, a coloração é realizada entre o menor e o maior valor dos coeficientes, não importando a qual escala ele pertence; obtém-se o escalograma exibido na figura 4.4. Olhando para as escalas 64 e 128, desse escalograma, se torna mais claro que se trata de uma queda de tensão.

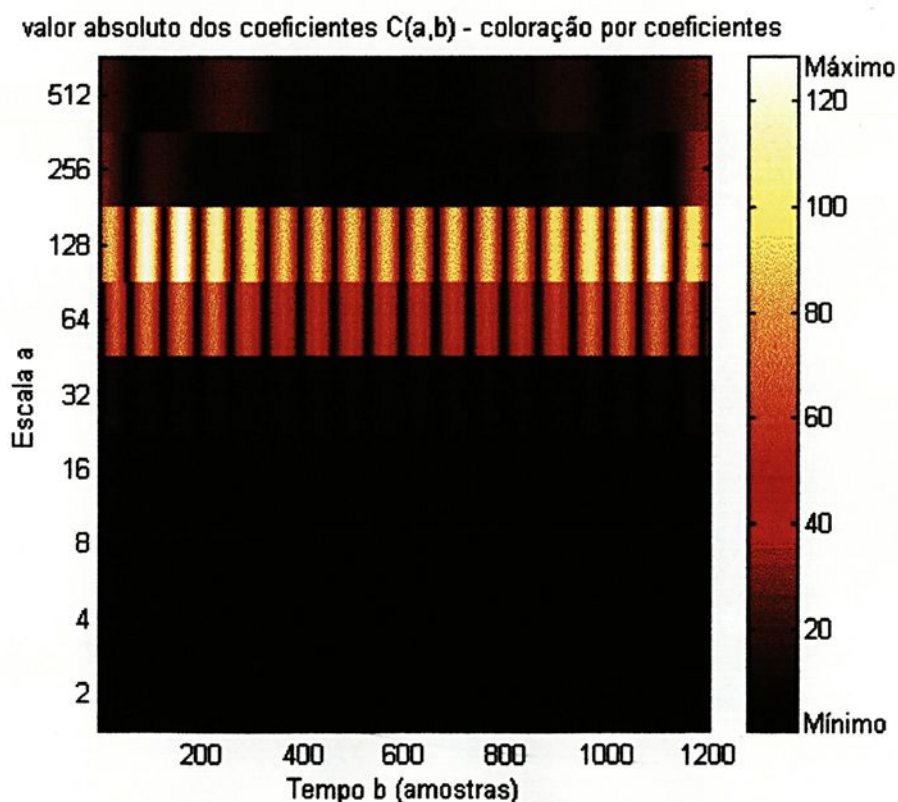


Figura 4.4: Escalograma coloração por coeficiente.

Para se ter maior clareza, apresenta-se os gráficos dos valores absolutos dos coeficientes apenas nas escalas 4 e 64; figura 4.5 a) e b), respectivamente.

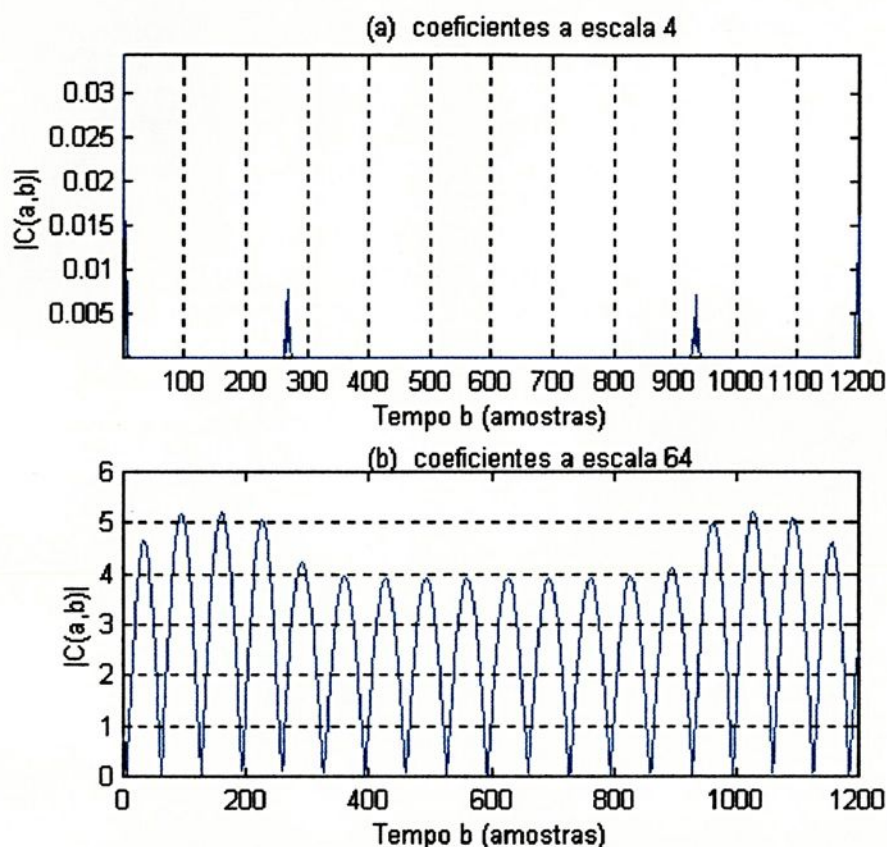


Figura 4.5: Valor absoluto dos coeficientes: (a) a escala 4 e (b) a escala 64.

Fazendo a relação entre o valor máximo dos coeficientes no intervalo entre 0 e 400 e o intervalo entre 400 e 800, obtém-se que a queda foi de aproximadamente 24,43 %. Olhando para a figura 4.5(b), pode-se fazer uma avaliação visual deste valor.

#### 4.2.b Analisando uma interrupção de tensão

O segundo sinal a ser analisado é uma interrupção de tensão, figura 4.6.

Os dados estão amostrados a 8000 amostras por segundo.

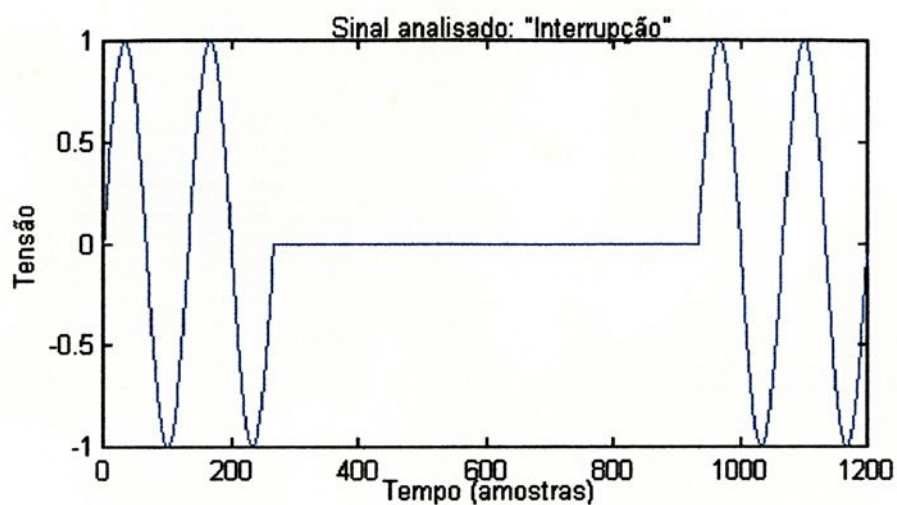


Figura 4.6: Sinal analisado, interrupção de tensão.

Repetindo as etapas realizadas no item 4.2.a obtém-se os gráficos a seguir.

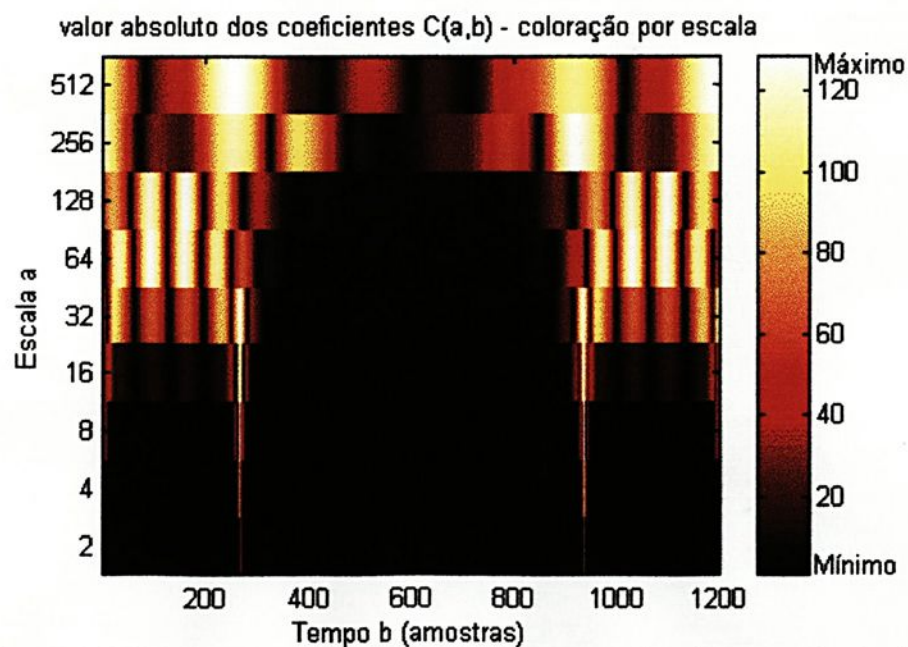


Figura 4.7: Escalograma da interrupção de tensão. Escala em potência de 2. Coloração por escala



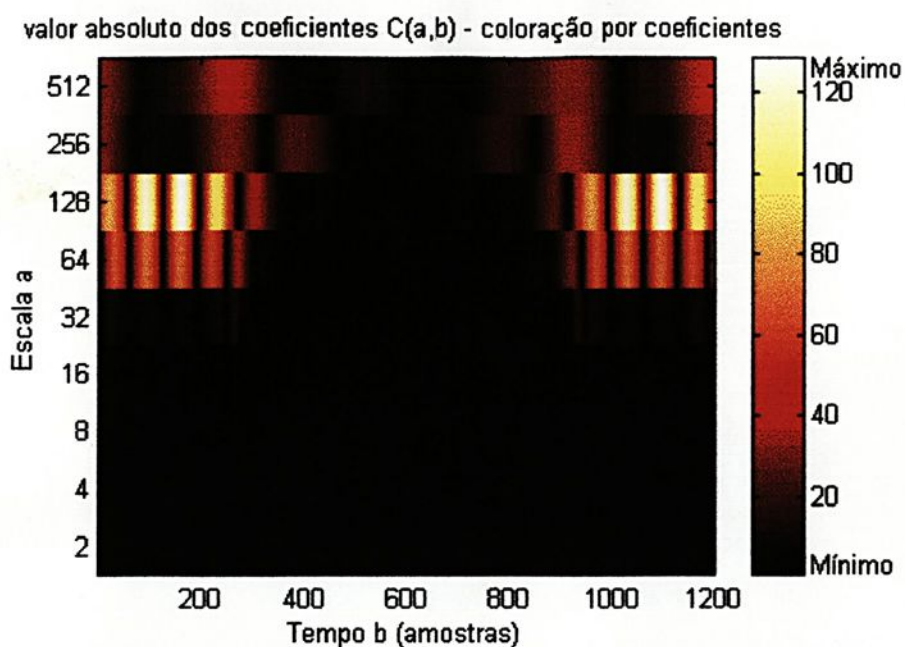


Figura 4.8: Escalograma coloração por coeficiente.

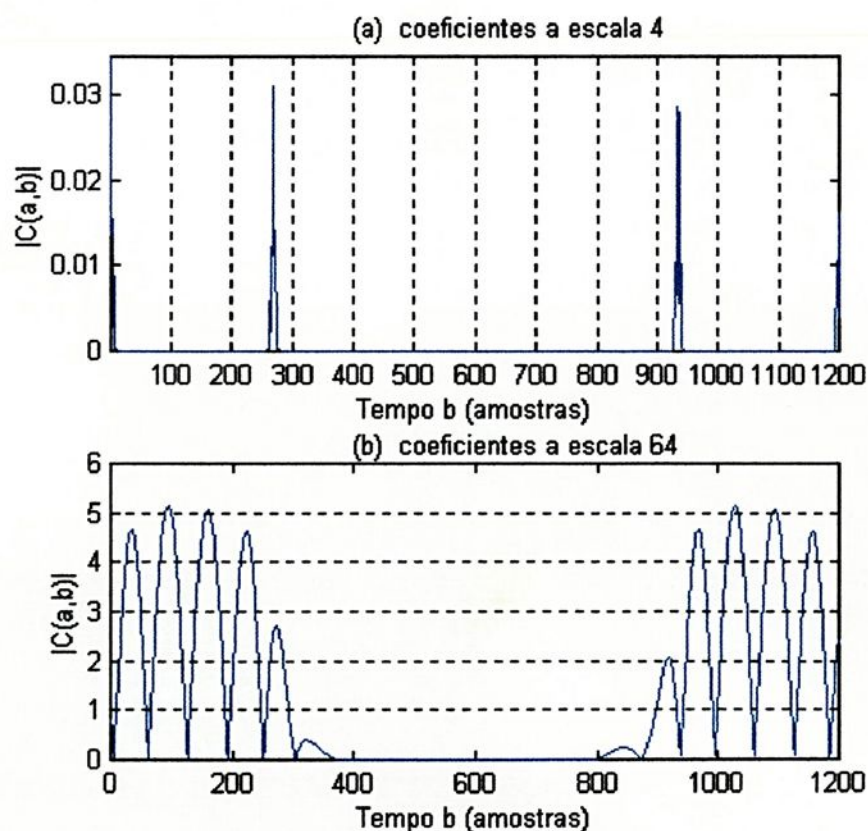


Figura 4.9: Valor absoluto dos coeficientes: (a) a escala 4 e (b) a escala 64.

Realizando as mesma observações feitas no item **4.2.a**, nota-se que:

1. Trata-se de uma interrupção de tensão.
2. A interrupção ocorreu entre as amostras 270 e 920.



## Conclusões

A análise wavelet é um campo vasto a ser desbravado, possibilitando muitas pesquisas tanto a nível teórico matemático e principalmente, quanto a nível, das aplicações. As wavelets tem sido aplicadas nas mais diferentes áreas do conhecimento humano.

Um estudo teórico sobre o tema tem como pré-requisito o conhecimento, basicamente, de Análise Funcional e teoria de processamento de sinal, assuntos estes que não se adquirem em pouco tempo. Contudo com os diversos "softwares" disponíveis, as aplicações se tornam mais viáveis, não exigindo tanto o conhecimento teórico, possibilitando aos leigos no assunto usufruírem das vantagens da análise wavelet.

A demonstração que as derivadas da Lorentziana são wavelets, leva ao surgimento de outras questões. Quais as propriedades e aplicações das wavelets construídas com estas funções? E talvez a questão mais importante: Elas possibilitariam análise discreta? Para dar respostas a estas questões deveria-se enveredar numa área interessante, a da construção de wavelets, que exigiria uma base matemática sólida.

Com a aplicação desenvolvida constatou-se as potencialidades da análise wavelet. No presente caso ela é bem adaptada para a detecção e caracterização dos distúrbios em sistemas de energia elétrica. Pode-se facilmente prosseguir o presente trabalho, realizando-se uma análise mais detalhada de outros tipos de distúrbios.

O método foi testado através da classificação de algumas perturbações simuladas, mergulho de tensão e interrupção de tensão. Os resultados dos testes mostraram a viabilidade e praticabilidade do método para as aplicações.



Como são obtidas informações da frequência e do tempo simultaneamente, a dinâmica dos sinais de sistemas de energia elétrica sujeitos à diferentes distúrbios é melhor monitorada. Para os intervalos de tempo onde o sinal muda rapidamente, o método localiza a área de interesse para uma visualização melhor das características do sinal. Quando a qualidade de energia é requerida, este método serve como uma valiosa alternativa às transformada tradicionais.



## Apêndice A

### Demonstrações e Definições

**A.1 Demonstração:**  $\|\Psi_a(t)\|^2 = |a|^{1-2p} \|\Psi(t)\|^2$ .

$$\|\Psi_a(t)\|^2 = \langle \Psi_a(t), \Psi_a(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_a(t) \overline{\Psi_a(t)} dt$$

$$\|\Psi_a(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-2p} \Psi\left(\frac{t}{a}\right) \overline{\Psi\left(\frac{t}{a}\right)} dt,$$

fazendo a mudança de variáveis  $u = \frac{t}{a}$  fica-se com

$$\|\Psi_a(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-2p} \Psi(u) \overline{\Psi(u)} |a| du$$

$$\|\Psi_a(t)\|^2 = |a|^{1-2p} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u) \overline{\Psi(u)} du$$

(A.1)  $\|\Psi_a(t)\|^2 = |a|^{1-2p} \|\Psi(t)\|^2$ .

### A.2 Definição de Função Janela

Uma função não trivial  $g \in L^2(\mathbb{R})$  é chamada uma *função janela* se  $xg(x)$  também está em  $L^2(\mathbb{R})$ . O centro  $t^*$  e o raio  $\Delta t$  (tempo de duração) da função janela são definidos como

$$t^* = \frac{1}{\|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |g(x)|^2 dx$$

$$\Delta t = \frac{1}{\|g\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (x - t^*)^2 |g(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

respectivamente, e a largura da função janela  $g$  é definida por  $2\Delta t$ .

**A.3 Demonstração:** Se  $\Psi(t)$  tem largura  $T$  então  $\Psi_a(t)$  tem largura  $aT$ .

Da definição o centro e o raio de  $\Psi(t)$  são respectivamente

$$t^* = \frac{1}{\|\Psi\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\Psi(t)|^2 dt$$

e

$$\Delta\Psi = \frac{1}{\|\Psi\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |\Psi(t)|^2 dt \right\}^{1/2}.$$

O centro de  $\Psi_a(t)$  será

$$t_a^* = \frac{1}{\|\Psi_a\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\Psi_a(t)|^2 dt$$

com o resultado encontrado em (A.1),  $\|\Psi_a(t)\|^2 = |a|^{1-2p} \|\Psi(t)\|^2$ ,

$$t_a^* = \frac{1}{|a|^{1-2p} \|\Psi(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t \left| |a|^{-p} \Psi\left(\frac{t}{a}\right) \right|^2 dt$$

fazendo a mudança de variáveis  $u = \frac{t}{a}$ , obtém-se

$$t_a^* = a \frac{1}{\|\Psi(u)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} u |\Psi(u)|^2 du$$

$$t_a^* = at^*.$$

De modo semelhante, o raio de  $\Psi_a(t)$

$$\Delta\Psi_a = \frac{1}{\|\Psi_a(t)\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t-t_a^*)^2 |\Psi_a(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

com  $t_a^* = at^*$ , e o resultado em (A.1), torna-se

$$\Delta\Psi_a = \frac{1}{(|a|^{1-2p})^{1/2} \|\Psi(t)\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t-at^*)^2 |a|^{-p} \left| \Psi\left(\frac{t}{a}\right) \right|^2 dt \right\}^{1/2}.$$

Novamente com a mudança  $u = \frac{t}{a}$ , obtém-se

$$\Delta\Psi_a = \frac{1}{(|a|^{1-2p})^{1/2} \|\Psi(u)\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} a^2 (u-t^*)^2 (|a|^{-2p})^{1/2} |\Psi(u)|^2 |a| du \right\}^{1/2}$$

$$\Delta\Psi_a = a \frac{1}{\|\Psi(u)\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (u-t^*)^2 |\Psi(u)|^2 du \right\}^{1/2}$$

$$\Delta\Psi_a = a \Delta\Psi.$$

A largura de  $\Psi(t)$  é  $T = 2\Delta\Psi$  e a largura de  $\Psi_a(t)$  é  $T_a = 2\Delta\Psi_a$ ; donde  $T_a = aT$ .

#### A.4 Demonstração: $\|\Psi_{a,b}(t)\|^2 = |a|^{1-2p} \|\Psi(t)\|^2$ .

Da mesma forma realizada em A.1, porém com a mudança de variáveis  $u = \frac{t-b}{a}$ .

#### A.5 Cálculo de $\hat{\Psi}_{a,b}$

Utilizando a equação (1.1) para determinar a transformada de Fourier de  $\hat{\Psi}_{a,b}$  tem-se

$$\hat{\Psi}_{a,b}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{a,b}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-p} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{-i\omega t} dt$$

fazendo a mudança de variáveis  $u = \frac{t-b}{a}$ , obtém-se

$$\hat{\Psi}_{a,b}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{-p} \Psi(u) e^{-i\omega(au+b)} |a| du$$

$$\hat{\Psi}_{a,b}(\omega) = |a|^{1-p} e^{-i\omega b} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u) e^{-i(a\omega)u} du .$$

A integral que aparece no lado direito da igualdade nada mais é que  $\hat{\Psi}(a\omega)$ , assim

$$(A.2) \quad \hat{\Psi}_{a,b}(\omega) = |a|^{1-p} e^{-i\omega b} \hat{\Psi}(a\omega)$$

## A.6 Demonstração do Teorema da Admissibilidade.

Da definição, expressão (2.11), da transformada wavelet da função  $f$

$$Wf(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) |a|^{-p} \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

a identidade de Parseval garante que

$$(A.3) \quad Wf(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\Psi}_{a,b} \rangle .$$

Substituindo  $\hat{\Psi}_{a,b}$  pela expressão fornecida por (A.2), tem-se

$$Wf(a,b) = \langle f, \Psi_{a,b} \rangle = |a|^{1-p} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\Psi}(a\omega)} e^{i\omega b} d\omega .$$

A integral no lado direito da igualdade é a inversa da transformada de Fourier, em relação a variável  $b$ , de

$$\hat{f}(\omega)\hat{\Psi}(a\omega)$$

assim

$$(A.4) \quad Wf(a,b) = |a|^{1-p} \mathcal{F}^{-1} \left\{ \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\Psi}(a\omega)} \right\} (b).$$

Aplicando a transformada de Fourier, obtêm-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} Wf(a,b) e^{-i\omega b} db = |a|^{1-p} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\Psi}(a\omega)}.$$

Conhecendo  $\hat{f}(\omega)$  pode-se obter  $f$  pela transformada inversa de Fourier. Infelizmente não se pode simplesmente dividir a expressão anterior por  $|a|^{1-p} \overline{\hat{\Psi}(a\omega)}$  para obter  $\hat{f}(\omega)$  pois  $\overline{\hat{\Psi}(a\omega)}$  pode assumir valores nulos para  $\omega$ . Multiplicando ambos os membros desta expressão por  $|a|^{1-p} \hat{\Psi}(a\omega)$  e integrando em relação a  $a$ , obtêm-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a|^{p-1} \hat{\Psi}(a\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} Wf(a,b) e^{-i\omega b} db \right) da = \hat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(a\omega)|^2 da$$

realizando a mudança de variáveis  $v = a\omega$  no lado direito da igualdade, fica-se com

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{p-1} \hat{\Psi}(a\omega) Wf(a,b) e^{-i\omega b} db da = \hat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(v)|^2 \frac{dv}{|\omega|}$$

o lado direito desta é igual a  $\hat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} |a| |\hat{\Psi}(v)|^2 \frac{dv}{|v|}$  desta forma tem-se

$$(A.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{p-2} \hat{\Psi}(a\omega) Wf(a,b) e^{-i\omega b} db da = \hat{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(v)|^2 \frac{dv}{|v|}$$



onde  $\nu$  é apenas uma variável auxiliar muda. Retornando a variável utilizada na definição da transformada de Fourier, representa-se a integral do lado direito da expressão anterior por  $C$ , i.é.,

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega.$$

Ao se dividir a equação (A.5) por  $C$  e aplicar a transformada inversa de Fourier obtemos  $f(t)$ . Para dividir por  $C$ , deve-se ter  $C \neq 0$  e  $C < \infty$ . Claramente, que  $C \neq 0$  uma vez que não existe interesse em  $\Psi(t) = 0$ . Assim, sendo  $C < \infty$ , ou seja, se  $\Psi$  satisfaz

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

a equação (A.5) fornece

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{p-2} \hat{\Psi}(a\omega) Wf(a,b) e^{-i\omega b} db da.$$

Substituindo  $\hat{\Psi}(a\omega)$  pela expressão dada em (A.2), obtém-se

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{2p-3} \hat{\Psi}_{a,b}(\omega) Wf(a,b) db da.$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier, tem-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{2p-3} Wf(a,b) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}_{a,b}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right) db da$$

e finalmente

$$f(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |a|^{2p-3} Wf(a,b) \Psi_{a,b}(t) db da.$$

## A.7 Determinação de resultados auxiliares

### A.7.1 Determinação do $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$

Sabe-se do Cálculo que a função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$  possui derivada  $f'(x) = e^x$ . Dado  $x > 0$ , o Teorema do Valor Médio aplicado ao intervalo  $[0, x]$ , sob a forma  $f(x) = f(0) + f'(c)(x-0)$ ,  $0 < c < x$ , fornece  $e^x = 1 + e^c x$ . Mas  $c > 0 \Rightarrow e^c > 1$ . Logo, pode-se escrever  $e^x > 1 + x$  para todo  $x > 0$ .

A partir daí, tem-se que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , vale  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ . De fato,

tem-se que  $e^{\frac{x}{n+1}} > 1 + \frac{x}{n+1} > \frac{x}{n+1}$  se  $x > 0$ . Elevando à potência  $n+1$  e

escrevendo  $A = (n+1)^{n+1}$ , obtêm-se

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{A}, \text{ donde } \frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{A}, \text{ ou } \frac{x^n}{e^x} < \frac{A}{x}.$$

Passando o limite com  $x \rightarrow \infty$  segue o resultado.

### A.7.2 Determinação de $\int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx$

Necessita-se do seguinte resultado:

Se  $I_k = \int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx$  então  $I_k = k!$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Integrando  $I_k$  por partes, com  $u = x^k$  e  $dv = e^{-x} dx$ , tem-se

$$I_k = \left[ -x^k e^{-x} - \int -kx^{k-1} e^{-x} dx \right]_0^{\infty}$$

$$I_k = \left[ -\frac{x^k}{e^x} + k \int x^{k-1} e^{-x} dx \right]_0^\infty$$

lembrando que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ , [Apêndice A.7.1], vê-se que o primeiro termo do lado direito da igualdade é nulo, assim fica-se com

$$I_k = k \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx$$

ou

$$I_k = k I_{k-1}.$$

Iterando  $k$  vezes, obtém-se

$$(A.6) \quad I_k = k!$$

## A.8 Normalização da Lorentziana e suas derivadas ( $\Psi_n(t)$ ).

Seja  $\Psi_n(t) = f^{(n)}(t)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Observe que para  $n = 0$ ,  $\Psi_n(t) = f(t)$  é a Lorentziana.

Em (3.7) tem-se

$$\hat{\Psi}_n(\omega) = (i\omega)^n a \pi e^{-a|\omega|}.$$

Utilizando o teorema de Plancherel,

$$\|\Psi_n(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{\Psi}_n(\omega)\|^2,$$

obtém-se

$$\|\Psi_n(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} a^2 \pi^2 e^{-2a|\omega|} d\omega$$

$$\|\Psi_n(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 \omega^{2n} a^2 \pi^2 e^{-2a|\omega|} d\omega + \int_0^{\infty} \omega^{2n} a^2 \pi^2 e^{-2a|\omega|} d\omega \right].$$

A primeira integral desta expressão, com a mudança de variáveis  $\omega = -z$ ,  $z \in \mathbf{R}_+$ , torna-se

$$\int_{-\infty}^0 z^{2n} a^2 \pi^2 e^{-2az} dz,$$

como  $z$  é variável muda, e como na segunda integral da expressão  $\omega \in \mathbf{R}_+$  (então  $|\omega| = \omega$ ), obtém-se

$$\|\Psi_n(t)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \left[ 2 \int_0^{\infty} a^2 \pi^2 \omega^{2n} e^{-2a\omega} d\omega \right]$$

fazendo a mudança de variáveis  $2a\omega = x$ , vem que

$$\|\Psi_n(t)\|^2 = a^2 \pi \int_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2a)^{2n}} e^{-x} \frac{1}{2a} dx$$

ou

$$\|\Psi_n(t)\|^2 = \frac{a^2 \pi}{(2a)^{2n+1}} \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x} dx.$$

Utilizando o resultado em (A.6), com  $k = 2n$ , obtém-se

$$\|\Psi_n(t)\|^2 = \frac{a^2 \pi}{(2a)^{2n+1}} (2n)!$$

e normalizando, ou seja fazendo-se  $\|\Psi_n(t)\|^2 = 1$ , obtém-se  $a$  para cada  $n$  de interesse. Por exemplo, para  $n = 0$ ,  $a = \frac{2}{\pi}$ ;  $n = 1$ ,  $a = \frac{\pi}{4}$ ;  $n = 2$ ,  $a = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}}$ ; e  $n = 3$ ,  $a = \sqrt[5]{\frac{45\pi}{8}}$ .

## A.9 Verificação da condição de admissibilidade para as derivadas da Lorentziana

Substituindo a expressão de  $\hat{\Psi}_n(\omega)$ , (3.7), na expressão de  $C$ , (2.10), fica-se com

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 \pi^2 \omega^{2n} e^{-2a|\omega|}}{|\omega|} d\omega$$

$$C_n = \int_{-\infty}^0 \frac{a^2 \pi^2 \omega^{2n} e^{-2a|\omega|}}{|\omega|} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{a^2 \pi^2 \omega^{2n} e^{-2a|\omega|}}{|\omega|} d\omega.$$

A primeira integral desta expressão, com a mudança de variáveis  $\omega = -z$ ,  $z \in \mathbf{R}_+$ , torna-se

$$\int_0^{\infty} \frac{a^2 \pi^2 z^{2n} e^{-2az}}{|z|} dz$$

como  $z$  é variável muda, e como na segunda integral da expressão  $\omega \in \mathbf{R}_+$  (então  $|\omega| = \omega$ ), fica-se com

$$C_n = 2 \int_0^{\infty} \frac{a^2 \pi^2 \omega^{2n} e^{-2a\omega}}{\omega} d\omega = 2 \int_0^{\infty} a^2 \pi^2 \omega^{2n-1} e^{-2a\omega} d\omega$$

fazendo a mudança de variáveis  $2a\omega = x$ , vem que

$$C_n = 2 \int_0^{\infty} a^2 \pi^2 \frac{x^{2n-1}}{(2a)^{2n-1}} e^{-x} \frac{1}{2a} dx = \frac{2a^2 \pi^2}{(2a)^{2n}} \int_0^{\infty} x^{2n-1} e^{-x} dx$$

e utilizando o resultado em (A.5), com  $k = 2n-1$ , finalmente obtém-se

$$C_n = \frac{2a^2 \pi^2}{(2a)^{2n}} (2n-1)!.$$

## A.10 Definições

### A.10.1 Frame

Uma função  $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$  gera um *frame*  $\{\Psi_n; n \in \mathbb{Z}\}$  do  $L^2(\mathbb{R})$  se existem constantes  $A$  e  $B$ , com  $0 < A \leq B < \infty$ , tais que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{\mathbb{Z}} |\langle f, \Psi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

$A$  e  $B$  são chamadas *cotas* do frame.

Se  $A = B$ , então o frame é chamado um *frame justo*.

### A.10.2 Base de Riesz

Se  $\{\Psi_n; n \in \mathbb{Z}\}$  é um frame, e além disso as funções  $\Psi_n$  são linearmente independentes, tem-se uma base de Riesz.

## A.11 Princípio da Incerteza

O princípio da incerteza na análise espectral afirma que o produto da largura da faixa espectral (ou banda espectral) pelo tempo de duração (também chamado tempo de dispersão) de um sinal não pode ser menor que um certo valor limite. Esta afirmação é equivalente ao conhecido princípio da incerteza de Heisenberg na mecânica quântica.

Seja o sinal  $s(t)$ . De acordo com o Apêndice A.2, tem-se:

$$t^* = \frac{1}{\|s\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |s(t)|^2 dt$$

$$\Delta t = \frac{1}{\|s\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |s(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

$\Delta t$  é o tempo de duração do sinal

De forma análoga, defini-se no domínio da frequência

$$\omega^* = \frac{1}{\|\hat{s}\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{\|\hat{s}\|} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2}$$

$\Delta\omega$  é a largura da faixa espectral.

Com as definições acima o princípio da incerteza na análise espectral afirma que

$$\Delta t \Delta\omega \geq 1/2.$$

Se a frequência é expressa em Hertz  $f = \omega / 2\pi$  então um fator  $2\pi$  é introduzido, tornando-se

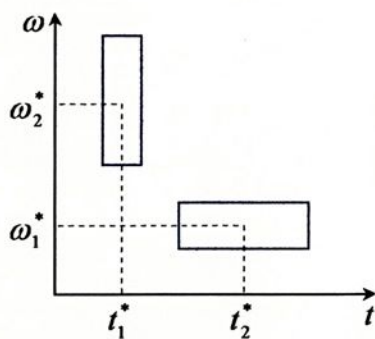
$$\Delta t \Delta f \geq 1/4\pi.$$

De uma maneira mais clara, o princípio da incerteza afirma que não pode-se obter localizações precisas simultaneamente no domínio do tempo e da frequência. Ou seja, quanto menor  $\Delta\omega$  (isto significa função janela bem localizada) mais precisão obtém-se na medida da frequência; no entanto como  $\Delta t \geq 1/2\Delta\omega$  então  $\Delta t$  é grande, tendo-se menor localização no tempo.

A localização do sinal no domínio tempo-frequência é representado geometricamente pelo retângulo de dimensões  $\Delta t \times \Delta\omega$ . Esse retângulo é chamado *célula de informação* ou *janela de incerteza*. Pelo princípio da



incerteza, a área desse retângulo é sempre maior ou no máximo igual a  $1/2$  (ver figura A.1).



**Figura A.1:** Janela de incerteza.

## Apêndice B

### Implementação Computacional da Transformada Wavelet Discreta.

Neste apêndice descreve-se as características da análise wavelet discreta unidimensional realizada pelo *Matlab Wavelet Toolbox*.

A análise wavelet discreta de sinais unidimensionais é realizada pelo *Matlab Wavelet Toolbox* através das funções (comandos) descritas na tabela abaixo.

Uma lista com o resumo explicativo das funções do *Wavelet Toolbox* será exibida ao se digitar "help wavelet" na tela inicial do *Matlab*. Para informações mais detalhadas digita-se "help nome do comando".

---

#### Análise – Funções de Decomposição:

---

Nome da Função	Propósito
dwt	decomposição em um único nível
wavedec	decomposição em vários níveis

---

---

#### Síntese – Funções de Reconstrução

---

Nome da Função	Propósito
idwt	reconstrução de um único nível
waverec	reconstrução completa
wrcoef	reconstrução seletiva
upcoef	reconstrução simples

---

---

### Utilitários da Estrutura de Decomposição

---

Nome da Função	Propósito
detcoef	Extração dos coeficientes dos detalhes
appcoef	Extração dos coeficientes das aproximações
upwlev	Recomposição da estrutura de decomposição

---

As aproximações são as componentes de baixa frequência do sinal, correspondendo portanto as escalas de valores grandes. As aproximações correspondem aos  $A_j$ 's, expressão (3.45) da página 36, dos algoritmos de decomposição e reconstrução apresentados no item 3.4. Similarmente, os detalhes são as componentes de alta frequência, correspondendo às escalas de valores pequenos; os  $D_j$ 's dos referidos algoritmos.

A seguir ilustra-se o processo através de um exemplo.

#### Análise unidimensional utilizando o comando de linha

Neste exemplo utiliza-se um dos sinais analisado no presente trabalho, o qual denominou-se sag, mostrado na figura a seguir.

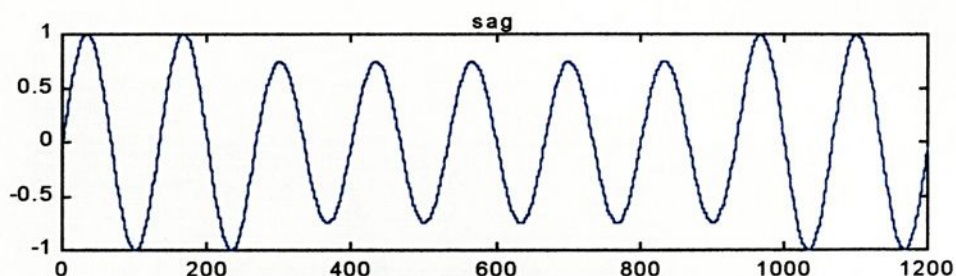


Figura B.1: Sinal: sag.

#### Carregando um sinal

1. Na tela inicial do Matlab, digita-se:

```
load sag;
```

Sendo que, *sag* é um *M-file* que contém a variável *sag*, e esse *M-file* deve se encontrar no subdiretório *bin* do diretório *matlab*

2. Fixação de variáveis. Digita-se:

```
ls=length(sag);
```

### **Realizando uma Decomposição Wavelet de um único nível do sinal**

3. Para realizar-se uma decomposição de um único nível de um sinal usando a wavelet *db4*. Digita-se:

```
[cA1,cD1]=dwt(sag,'db4');
```

Isto gera os coeficientes do nível 1 da aproximação e do detalhe, (*cA1*) e (*cD1*) respectivamente.

### **Construção das Aproximações e dos Detalhes a partir dos coeficientes**

4. Para construir-se a aproximação (*A1*) e o detalhe (*D1*) do nível 1 a partir dos coeficientes *cA1* e *cD1*, digita-se:

```
A1=upcoef('a',cA1,'db4',1,ls);
```

```
D1=upcoef('d',cD1,'db4',1,ls);
```

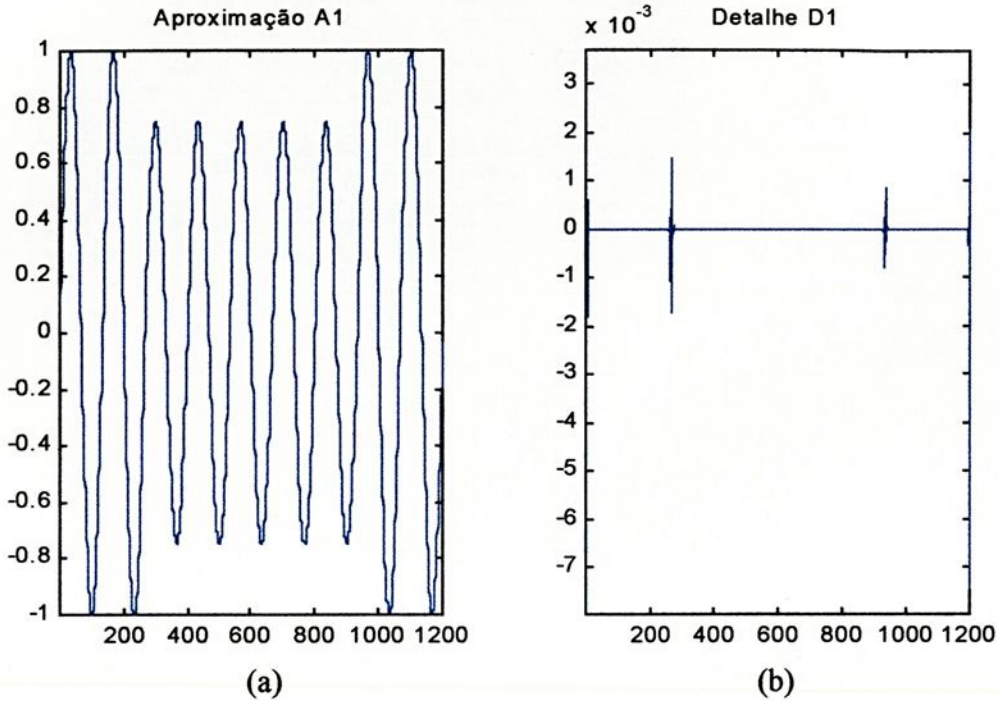
### **Exibição da Aproximação e do Detalhe**

5. Para exibir os resultados da decomposição de um único nível, digita-se:

```
subplot(1,2,1); plot(A1); title ('Aproximação A1')
```



```
subplot(1,2,2); plot(D1); title ('Detalhe D1')
```



**Figura B.2:** Decomposição em um único nível. (a) Aproximação A1, (b) Detalhe D1.

### Reconstrução de um sinal pela Transformada Wavelet Inversa

6. Para encontrar a transformada inversa, digita-se:

```
A0=idwt(cA1,cD1,'db4',ls);
```

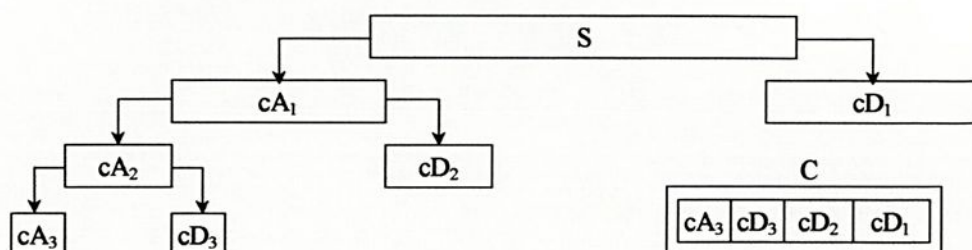
### Realização de uma Decomposição Wavelet de vários níveis de um sinal

7. Para realizar-se a decomposição de 3 níveis do sinal (usando-se novamente a wavelet db4), digita-se:

```
[C,L]=wavedec(sag,3,'db4');
```

Os coeficientes de todas as componentes de uma decomposição em três níveis (isto é, a aproximação do terceiro nível e os detalhes dos três

primeiros níveis) são retornados, concatenados no vetor, C. O vetor L contém as durações (comprimento) de cada componente (figura B.3).



**Figura B.3:** Coeficientes wavelet de uma decomposição de três níveis.

### Extração dos coeficientes das Aproximação e dos Detalhes

8. Para extrair de C os coeficientes da aproximação do nível 3, digita-se:

```
cA3=appcoef(C, L,'db4',3);
```

9. Para extrair de C os coeficientes dos detalhes dos níveis 3, 2, e 1, digita-se:

```
cD3=detcoef(C,L,3);
```

```
cD2=detcoef(C,L,2);
```

```
cD1=detcoef(C,L,1);
```

### Reconstrução da Aproximação do nível 3

10. Para reconstruir a aproximação do nível 3 a partir de C, digita-se:

```
A3=wrcoef('a',C,L,'db4',3);
```

### Reconstrução dos Detalhes dos níveis 1, 2 e 3

11. Para reconstruir os detalhes dos níveis 1, 2 e 3, a partir de C, digita-se:



```
D1=wrcoef('d',C,L,'db4',1);
```

```
D2=wrcoef('d',C,L,'db4',2);
```

```
D3=wrcoef('d',C,L,'db4',3);
```

### Exibição dos resultados de uma Decomposição de vários níveis

12. Para exibir os resultados da decomposição em 3 níveis, digita-se:

```
subplot(2,2,1); plot(A3); title ('Aproximação A3');
```

```
subplot(2,2,2); plot(D1); title ('Detalhe D1');
```

```
subplot(2,2,3); plot(D2); title ('Detalhe D2');
```

```
subplot(2,2,4); plot(D3); title ('Detalhe D3');
```

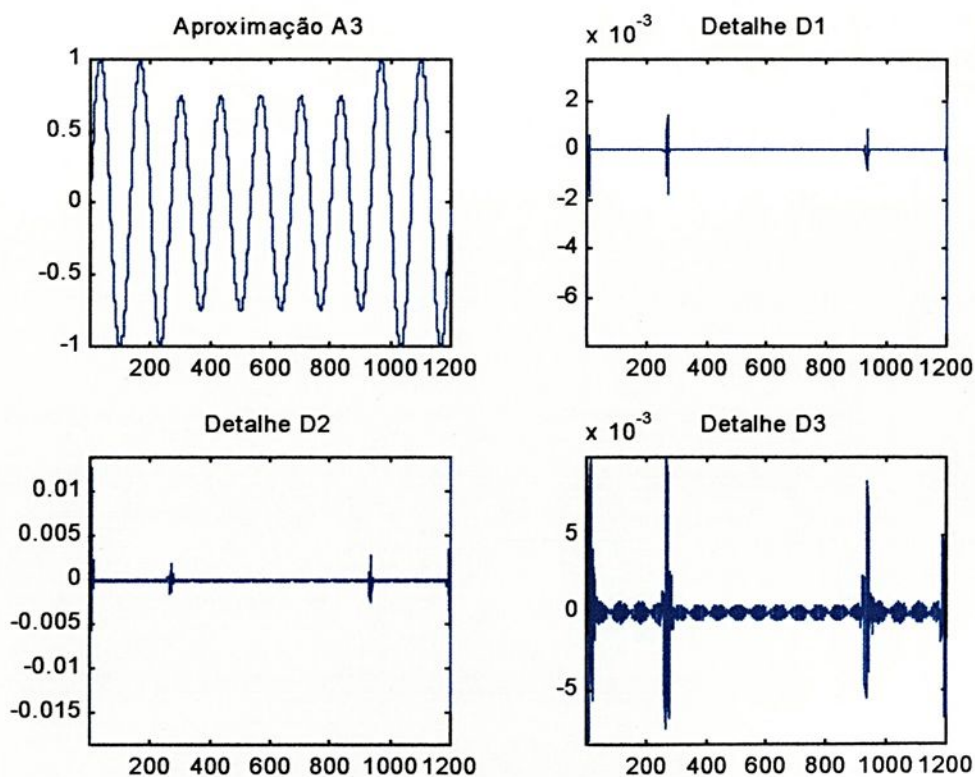


Figura B.4: Decomposição do sinal em três níveis.

### Reconstrução do Sinal Original a Partir da Decomposição de 3 Níveis

13. Para reconstruir o sinal original a partir da estrutura de decomposição wavelet, digita-se:

```
A0=waverec(C,L,'db4');
```

### Número de Níveis

Desde que o processo de análise é iterativo, teoricamente ele pode prosseguir indefinidamente. Na realidade, a decomposição pode prosseguir somente até os detalhes individuais consistirem de uma única amostra do sinal. Na prática, seleciona-se um número conveniente de níveis baseado na natureza do sinal, ou em um critério conveniente.

### Análise utilizando-se a Interface Gráfica

Todo o processo pode ser realizado também utilizando-se a interface gráfica com o usuário. Para acessar esta ferramenta, na tela inicial do *Matlab* digita-se:

```
wavemenu
```



# APÊNDICE C

## Implementação Computacional Utilizada

Os passos aqui descritos são referentes ao *Matlab Wavelet Toolbox (for windows)* versão 5.1.0.421.

Aqui apresenta-se o processo utilizando-se a interface gráfica com o usuário (GUI), por ser esta a forma mais hábil e de melhor compreensão num primeiro contato com o "software". Todo o processo pode também ser realizado utilizando-se o comando de linha. Porém, para utilizar-se o comando de linha deve-se estar habituado ao uso do *Matlab*, devido aos vários comandos adicionais utilizados no processo.

### C.1 Preparação do sinal

Para trabalhar com qualquer sinal deve-se colocá-lo no formato aceito pelo *Wavelet toolbox*. Salva-se o sinal em um arquivo (*MAT-file*) que tenha o mesmo nome da variável utilizada para designá-lo.

Por exemplo, o sinal criado chama-se *sag*, no *prompt* (tela inicial) do *Matlab* digita-se:

```
save sag.
```

Ao carregar-se o arquivo *sag*, a variável na área de trabalho (*workspace*) será um vetor denominado *sag*.

### C.2 Análise Contínua Usando a Interface Gráfica

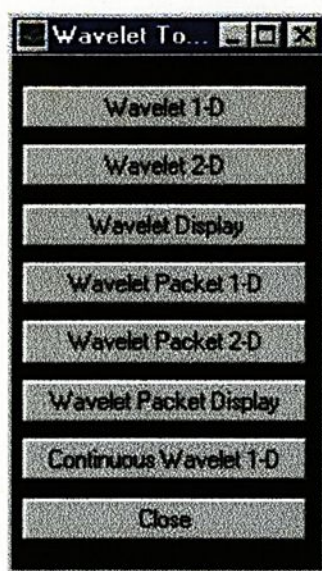
#### Iniciando a Ferramenta *Continuous Wavelet 1-D*.



1. Na tela inicial do Matlab, digita-se

wavemenu.

Aparece na tela o *Wavelet Toolbox Main Menu* (Figura C.1).



**Figura C.1:** *Wavelet Toolbox Main Menu.*

2. Pressiona-se o botão *Continuous Wavelet 1-D.*

Surge a ferramenta de análise contínua wavelet para sinal unidimensional (Figura C.2).

### Carregando um sinal

3. No menu opções (*option*) clica-se em *File* ⇒ *Load Signal*.

Quando a caixa de dialogo *Load Signal* aparecer, seleciona-se o *MAT-file* referente ao sinal, o qual se encontra no diretório em que foi salvo; no exemplo, a seqüência será: *C*→*Matlab*→*bin*→*sag.mat*. Clica-se em abrir.

O sinal é carregado na ferramenta *Continuous Wavelet 1-D.*

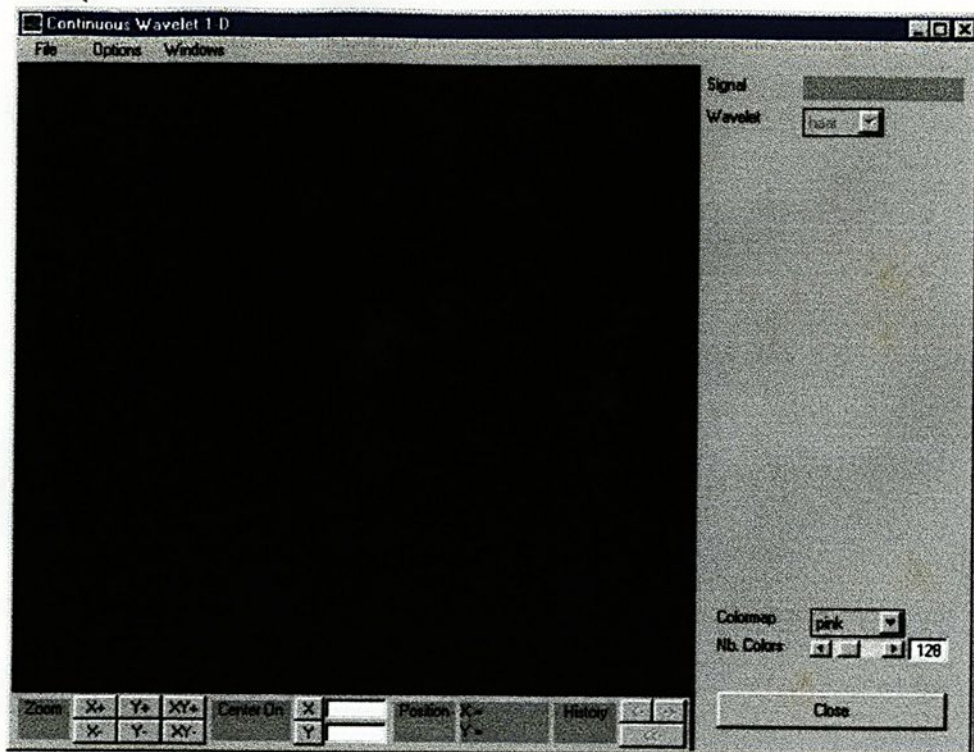


Figura C.2: *Continuous Wavelet 1-D.*

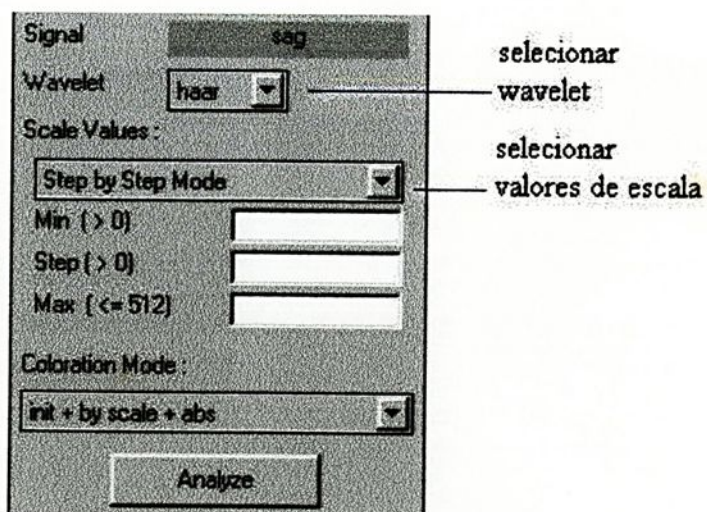
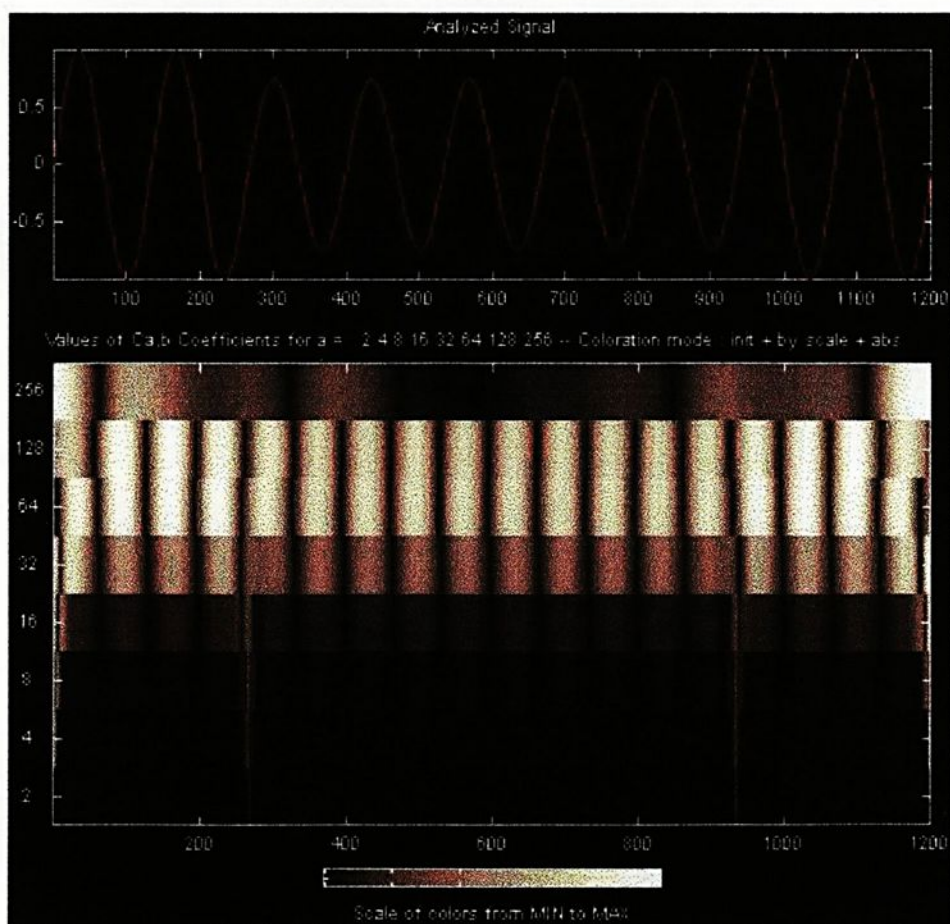


Figura C.3: Selecionar wavelet e escala.

### Realizando uma Transformada Wavelet Contínua

4. Na região lateral direita superior da janela *Continuous Wavelet 1-D*, seleciona-se a wavelet (*sym4*, para o exemplo) e os valores da escala (*power 2 mode* e *power 8*, para o exemplo), ver figura C.3.
5. Clica-se no botão *Analyze*.

Após uma pausa para computação, a ferramenta exige o sinal analisado e o escalograma (gráfico dos coeficientes) (Figura C.4).



**Figura C. 4:** Gráfico do sinal (acima) e dos coeficientes (embaixo).

## Controlando o Modo de Coloração

A ferramenta permite exibir os valores dos coeficientes wavelet de varias maneiras através do modo de coloração.

Três parâmetros são usados para a coloração dos coeficientes.

*init* ou *current*:

Quando *init* é selecionado as cores são graduadas entre o menor e o maior valor de todos os coeficientes.

Quando *current* é selecionado, somente uma parte dos coeficientes é usada para fazer a coloração. Esta parte é selecionada dos limites dos eixos atuais dos coeficientes exibidos.

*by level* ou *all levels*:

Quando *by level* é selecionado, a coloração é feita separadamente para cada escala. As cores são graduadas entre o menor e o maior valor dos coeficientes de uma mesma escala. No outro caso, *all level*, a coloração é realizada entre o menor e o maior valor dos coeficientes não importando a qual escala ele pertence.

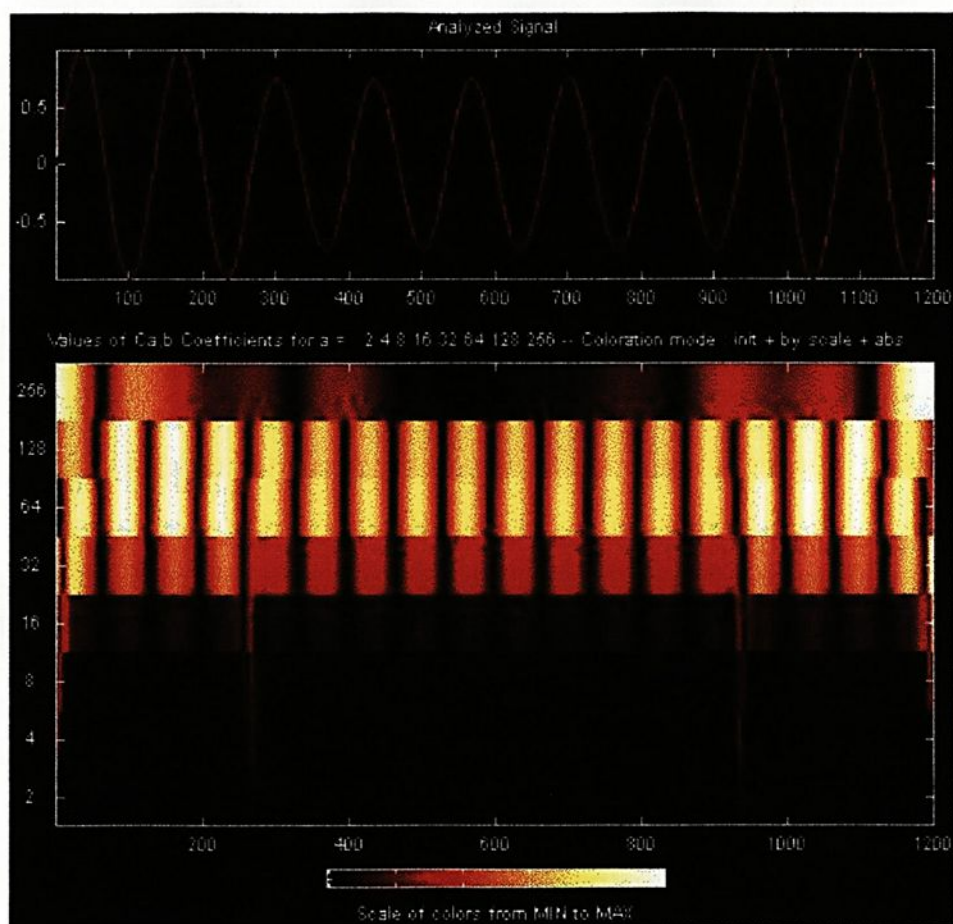
*abs* (ou ausente):

Quando *abs* é selecionado, o valor absoluto dos coeficientes são usados.

6. Escolhe-se uma das alternativas no menu *Coloration Mode*, localizado logo acima do botão *Analyze* (*init* + *by scale* + *abs*; para o exemplo).
7. No menu *Colormap*, que se encontra na parte lateral direita inferior da janela, seleciona-se uma das alternativas (*hot*; para o exemplo). Clica-se no botão *Analyze*.



Após uma pequeníssima pausa o escalograma é reexibida (ver figura C.5).



**Figura C. 5:** Escalograma: *Colormap: hot; Coloration mode: init + by scale + abs.*

A ferramenta oferece várias opções, que o usuário pode utilizar para melhorar a análise e a apresentação de resultados.

### Salvando os Coeficientes Wavelet

A *Continuous Wavelet 1-D Tool* permite salvar os coeficientes wavelet para o disco. A ferramenta cria um *MAT-file* no diretório corrente com a extensão *wc1* e o nome que for designado.

8. Para salvar os coeficientes wavelet contínuos da análise atual, clica-se em *File* ⇒ *Save Coefficients* no menu *option*.

Aparece uma caixa de dialogo que permite especificar um diretório e o nome do arquivo para armazenar os coeficientes, no exemplo nomeia-se o arquivo como *sag*.

9. Após salvar os coeficientes para o arquivo *sag.wc1*, carrega-se as variáveis no *workspace*, para isto, na tela inicial do *Matlab* digita-se:

```
load [diretório] sag.wc1 -mat
```

```
whos
```

Na tela surgira:

Name	Size	Bytes	Class
coefs	8x1200	76800	double array
scales	1x8	64	double array

Grand total is 9608 elements using 76864 bytes

As variáveis *coefs* e *scales* contêm os coeficientes wavelet contínuos e as escalas associadas. Mais precisamente, *coefs* é uma matriz  $m \times n$ , uma linha para cada escala, com o valor dos coeficientes, e *scales* é um vetor  $1 \times m$ , com o valor das escalas. No exemplo *coefs* é  $8 \times 1200$  e *scales* é  $1 \times 8$ .

### Extraindo os Coeficientes por Escala

10. No *prompt* do *Matlab* digita-se:

```
coefscales=coefs(m,:);
```

sendo  $m$  a linha correspondente a escala desejada. No exemplo  $m = 7$ , correspondendo a escala 128.

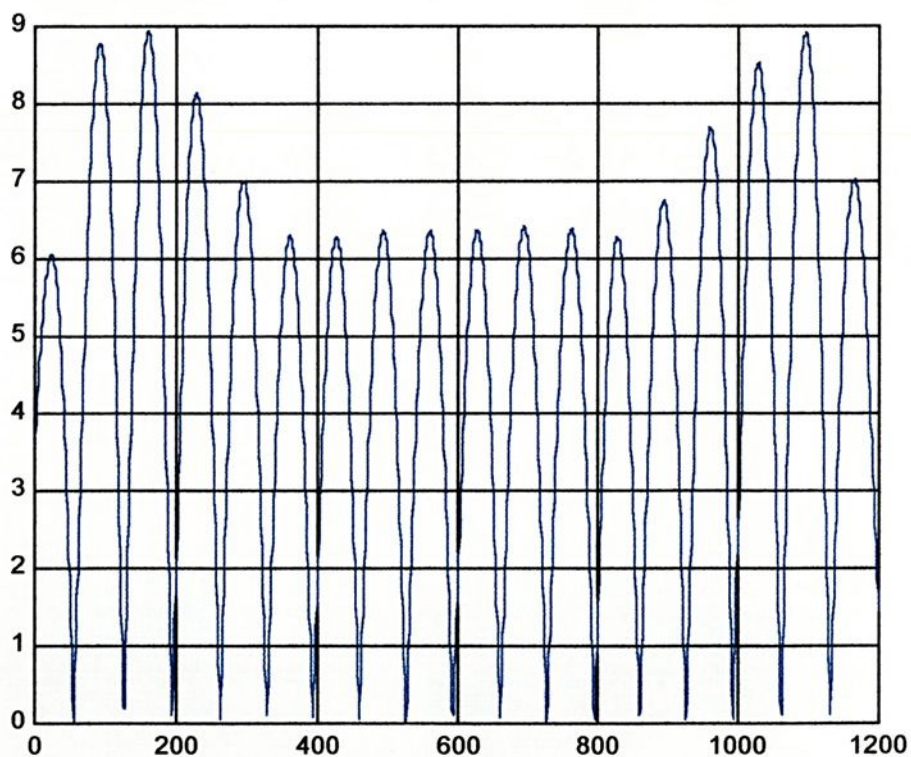
### Plotando os coeficientes extraídos

11. No *prompt* do *Matlab* digita-se:

```
plot(abs(coefscalex))
```

```
grid
```

Na tela será exibida a figura C.6.



**Figura C.6:** Valor absoluto dos coeficientes a escala 128.

## Bibliografia

- [1] AKAY, Metin. *Wavelet Applications in Medicine*. **IEEE Spectrum**, p. 50-56, may 1997.
- [2] ALONSO, M.; FINN, E. J. *Física um curso Universitário*. São Paulo : Editora Edigard Blucher Ltda, 1972.
- [3] BENEDETO, J. J.; FRAZIER, M. W.. *Wavelets : mathematics and applications*. Florida : [edited by] John J., N. W. CRC Press Inc. Boca Raton, 1993.
- [4] BRITO, Núbia Silva Dantas. *Teoria Wavelet e sua aplicação em Sistemas de Energia Elétrica*. Campinas, 1996. Dissertação de mestrado – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, UNICAMP,
- [5] BRUCE, Andrew; DONOHO, David; GAO, Hong-Ye. *Wavelet Analysis*. **IEEE Spectrum**, p. 26-35, October 1996.
- [6] BUTKOV, Eugene. *Física Matemática*. Rio de Janeiro : Guanabara Koogan S.A., 1988.
- [7] CHUI, Charles K.. *An Introduction to Wavelets*. Boston : Academic Press, Inc., 1992.
- [8] CRAWFORD, Frank S. Jr.. *Ondas – Berkeley physics course*. Barcelona : Editorial Reverté S.A., 1977.
- [9] FIGLIOLA, Alejandra; SERRANO, Eduardo. *Analysis of Physiological Time Series Using Wavelet Transform*. **IEEE BEM Magazine**, p.74-79, may/june 1997.



- [10] GOMES, Jonas; VELHO, Luiz; GOLDENSTEIN, Siome. *Wavelets : teoria, software e aplicações*. Rio de Janeiro : IMPA, 1997
- [11] HERNANDEZ, E.; WEISS, G.. *A First Course on Wavelet*. Boca Raton. CRC Press, 1996.
- [12] HSU, Hwei P.. *Análise de Fourier*. Rio de Janeiro : LTC Editôra Ltda., 1973.
- [13] HUANG, Shyh-Jier et al. *Application of wavelets to classify power system disturbances*. **Electric Power Research**, p. 87-93, Elsevier Science S.A, 1998.
- [14] **IEEE Spectrum**, p.16-19, October 1991.
- [15] MAIN, Iain G.. *Vibrations and Waves in Physics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1978.
- [16] MISITI, Michel et al. *Matlab : wavelet toolbox user's guide*. Natick, MA : MathWorks, Inc., 1996.
- [17] NIELSEN, Jacob Thymann. *Analysis of transients in power distribution networks, wavelet analysis*. Alemanha, 1995. Master's Thesis - Elektronisk Institut, Danmarks Tekniske Universitet.
- [18] PEREIRA, Paulo Sergio et al. *Uma Contribuição ao Monitoramento e Tratamento de Dados da Qualidade de Energia*. **III Seminário Brasileiro sobre Qualidade da Energia Elétrica**, agosto/1999, Brasília.
- [19] RESNICK, R.; HALLIDAY, D.. *Física I*. 2th ed. Rio de Janeiro : LTC Editora S.A., 1978.



- [20] RIOUL, Olivier; VETTERLI, Martin. *Wavelets and Signal Processing*. **IEEE Signal Processing Magazine**, p. 14-38, Oct. 1991.
- [21] ROBERTSON, David C. et al. *Wavelet and Electromagnetic Power System Transients*. **IEEE Power Engineering Society**, Portland, OR., 1995.
- [22] SAHAMBI, J. S.; TANDON, S. N.; BHATT, R. K. P.. *Using Wavelet Transforms for ECG Characterization*. **IEEE EMB Magazine**, p. 77-83, Jan./Feb. 1997.
- [23] SATISH, L. *Short-time Fourier and wavelet transforms for fault detection in power transformers during impulse tests*. **IEE Proc.-Sci. Meas. Technol.**, v. 145, n. 2, p.77-84, march 1998
- [24] SPIEGEL, Murray R.. *Análise de Fourier*. São Paulo : McGraw-Hill do Brasil, 1976.
- [25] SPIEGEL, Murray R.. *Cálculo Avançado*. São Paulo : McGraw-Hill do Brasil, 1971.
- [26] WALTER, G. G.. *Wavelets and Others Orthogonal Systems with Applications*. Florida : CRC Press. Inc. N.W. Boca Raton, 1994.
- [27] WHITMAL, Nathaniel A. et al. *Reducing Correlate Noise in Digital Hearing Aids*. **IEEE BEM Magazine**, p. 88-96, sept./oct. 1996.



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA  
AV. BRASIL, 56 - CAIXA POSTAL 31  
15385-000 - ILHA SOLTEIRA - SP**

