



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**

Jean Hideki Nunes Yonezawa

**SIMULAÇÃO MONTE CARLO DO MODELO ISING EM
UMA REDE QUADRADA: TRANSIÇÃO DE FASE E
PROPRIEDADES MAGNÉTICAS**

**Bauru
2023**

Jean Hideki Nunes Yonezawa

**SIMULAÇÃO MONTE CARLO DO MODELO ISING EM
UMA REDE QUADRADA: TRANSIÇÃO DE FASE E
PROPRIEDADES MAGNÉTICAS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à banca do Departamento de Física da Faculdade de Ciências com propósito de obter o Título de Graduação Bacharelado em Física de Materiais pela Universidade Estadual Paulista "Júlio De Mesquita Filho".

Orientador: André Luiz Malvezzi

**Bauru
2023**

Y55s

Yonezawa, Jean Hideki Nunes

Simulação Monte Carlo do Modelo Ising em uma rede quadrada :
Transição de fase e Propriedades Magnéticas / Jean Hideki Nunes
Yonezawa. -- Bauru, 2023

34 p. : il., tabs., fotos

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências,
Bauru

Orientador: André Luiz Malvezzi

1. Monte Carlo. 2. Modelo Ising. 3. Transição de Fase. 4.
Propriedades Magnéticas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ATA DE DEFESA PÚBLICA DO TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 18 dias do mês de Julho de 2023, às 15h00, em sessão pública em formato virtual via Google Meet, na presença da Banca Examinadora presidida por **André Luiz Malvezzi** e composta pelos examinadores **José Humberto Dias da Silva** e **Edson Sardella**, o aluno **Jean Hideki Nunes Yonezawa** apresentou o trabalho de conclusão de curso intitulado: “**Simulação Monte Carlo do Modelo de Ising em uma rede quadrada: transição de fase e propriedades magnéticas**”, como requisito curricular indispensável para a integralização do curso de Física – Bacharelado em Física de Materiais. Após reunião em sessão reservada, a Banca Examinadora deliberou e decidiu pela **aprovação** do referido trabalho, divulgando o resultado formalmente ao aluno e demais presentes e eu, na qualidade de Presidente da Banca, lavrei a presente ata que será assinada por mim, pelos demais examinadores e pelo aluno.



Assinado de forma digital por
André Luiz Malvezzi:10035333880
Dados: 2023.07.20 23:30:30 -03'00"

Orientador

Documento assinado digitalmente



JOSE HUMBERTO DIAS DA SILVA
Data: 02/08/2023 12:38:00 -0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

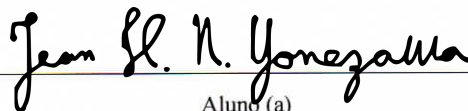
Membro 1

Documento assinado digitalmente



EDSON SARDELLA
Data: 02/08/2023 14:56:24 -0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Membro 2



Aluno (a)

Conselho de Curso de Física - Departamento de Física - Faculdade de Ciências

Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01 - Vargem Limpa - Bauru/SP - CEP 17033-360

Fone: 14 3103-6084 - e-mail: coord_fisica@fc.unesp.br

site: <http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/fisica/cursos/fisica/>

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço minha família, mais especificamente meus pais, Wilson e Maria Ines, que acreditaram em mim e me apoiaram nos momentos mais difíceis e foram essenciais para que eu conseguisse perseguir meus sonhos.

Em seguida, aos meus professores que compartilharam seus conhecimentos, tanto como profissionais como mentores. Em especial, o professor Dr. André Luiz Malvezzi que me orientou com prudência, paciência e dedicação, durante o desenvolvimento deste projeto.

Por fim, agradeço meus amigos, que me acompanharam nessa jornada, sempre ajudando uns aos outros. Em especial, agradeço ao Lucas Rattighieri, Jose Carlos Bellizoti e Guilherme Peixe que me auxiliaram fortemente no processo do trabalho, tanto em conselhos na escrita como em ensinamentos para o código.

“When you’re going to change the world, don’t ask for permission.”
(Arcane, Viktor quote, 2021)

Resumo

O modelo Ising é uma representação matemática que descreve o comportamento magnético de um sólido cristalino em termos de spins de elétrons localizados em uma rede regular. A simulação de Monte Carlo é uma técnica numérica utilizada para estudar sistemas complexos, onde se utilizam amostras aleatórias para avaliar probabilidades e calcular quantidades estatísticas. Neste contexto, a simulação de Monte Carlo no modelo Ising em uma rede quadrada é uma abordagem para investigar a transição de fase em sistemas magnéticos bidimensionais. Essa ocorre em uma determinada temperatura crítica, na qual os spins dos elétrons passam de um estado ordenado a um estado desordenado. Além disso, as propriedades magnéticas do sistema também são analisadas, como a magnetização e a susceptibilidade magnética.

Palavras-chave: Modelo Ising, Simulação de Monte Carlo, Transição de fase, Fenômenos críticos, Propriedades Magnéticas.

ABSTRACT

The Ising model is a mathematical representation that describes the magnetic behavior of a crystalline solid in terms of electron spins located in a regular lattice. Monte Carlo simulation is a numerical technique used to study complex systems, where random samples are used to evaluate probabilities and calculate statistical quantities. In this context, the Monte Carlo simulation in the Ising model on a square lattice is an approach to investigate the phase transition in two-dimensional magnetic systems. This occurs at a certain critical temperature, at which the electron spins pass from an ordered state to a disordered state. In addition, the magnetic properties of the system are also analyzed, such as magnetization and magnetic susceptibility.

Keywords: Ising Model, Monte Carlo Simulation, Phase transition, Critical phenomena, Magnetic properties.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Spins alinhados em um estado Ferromagnético	14
Figura 2 – Spins alinhados em um estado Paramagnético	14
Figura 3 – Interação de Primeiros Vizinhos	16
Figura 4 – Condição periodica de contorno em um rede quadrada	17
Figura 5 – Fluxograma do Algoritmo de Metropolis	25
Figura 6 – Gráfico da Energia pela Temperatura. a) Intervalo de temperatura: 1 a 4 (em unidades arbitrárias) e b) Intervalo de temperatura 2,25 a 2,30	28
Figura 7 – Gráfico da Energia pela Temperatura. a) Intervalo de temperatura: 1 a 4 e b) Intervalo de temperatura 2,20 a 2,40	29
Figura 8 – Gráfico da Magnetização pela temperatura	30
Figura 9 – Gráfico do inverso do lado da rede pela Temperatura Crítica segundo os dados da tabela da magnetização suavizada; Coeficiente Linear: 2.28543	32
Figura 10 – Gráfico do inverso do lado da rede pela Temperatura Crítica segundo os dados da tabela do calor específico; Coeficiente Linear: 2.25843	32

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela do tempo de execução aproximadamente em relação ao tamanho da rede	26
Tabela 2 – Tabela da temperatura crítica em relação ao tamanho da matriz	31

Sumário

1	OBJETIVOS	12
2	INTRODUÇÃO	13
3	MODELO ISING	15
3.1	Primeiros Vizinhos	16
3.2	Condições Periódicas de Contorno	17
3.3	Escala de Tamanho Finito	18
3.4	Expoentes Críticos	19
3.5	Suscetibilidade magnética	20
3.6	Calor Específico	21
4	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	23
4.1	Algoritmo de Metropolis	23
5	METODOLOGIA	26
6	RESULTADOS	28
6.1	Energia	28
6.2	Calor Específico	29
6.3	Magnetização	29
6.4	Estimativas da temperatura crítica para cada tamanho da rede e o limite termodinâmico	31
7	CONCLUSÃO	33
A	PROGRAM GITHUB	34
	REFERÊNCIAS	38

1 Objetivos

O objetivo principal deste projeto é aplicar um método estatístico para experimentos randômicos e complexos (Monte Carlo) ao modelo físico de Ising para determinar as propriedades magnéticas do mesmo, o qual é baseado em partículas de spin meio clássico interagindo em uma rede quadrada e apresenta uma transição de fase de segunda ordem em função da temperatura.

2 INTRODUÇÃO

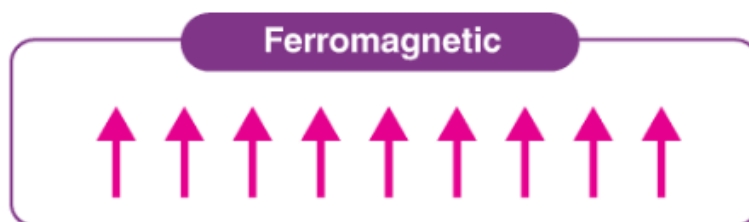
Durante simulação computacional de sistemas físicos que exibem comportamento crítico na transição de fase, são aplicados conceitos de mecânica estatística, como a teoria clássica de transição de fase proposta por Van der Waals, no qual se propõe que a interação das partículas, e a força de interação entre elas, resultaria em uma mudança de estado no sistema. E também a teoria de Curie-Weiss, na qual introduziram a interação de primeiros vizinhos para materiais ferromagnéticos, onde o sistema constrói um alinhamento preferencial baseado no campo magnético gerado pela interação dos spins contidos no sistema. Tendo esses conhecimentos, Lev Landau introduziu o conceito de parâmetro de ordem e formulou uma expansão da energia livre como uma série de potências. Também é discutido como a simulação numérica, conhecida como Método de Monte Carlo, é uma ferramenta poderosa para obter resultados onde os métodos de aproximação analítica falham.

Entre os mais variados modelos, o modelo de Ising descreve o comportamento magnético de materiais em uma rede discreta. Essa abordagem fornece uma descrição simplificada, mas poderosa, de fenômenos complexos, como transições de fase e comportamento crítico em sistemas magnéticos. Tal método de simulação é amplamente utilizado para investigar propriedades termodinâmicas desses sistemas.

Nesse modelo é considerado aqui numa rede bidimensional quadrada, onde cada sítio é ocupado por um spin (ou momento magnético), o qual possui apenas 2 estados, *up* (\uparrow) ou *down* (\downarrow). A interação entre spins vizinhos é modelada por um hamiltoniano, e a dinâmica do sistema é explorada usando o método de Monte Carlo. Nesse método, uma sequência de configurações de spins é gerada aleatoriamente, seguindo regras probabilísticas específicas. Vale notar que o presente modelo possui uma solução analítica exata, de modo que o valor da temperatura crítica é conhecido (1). Mas devido à relativa complexidade matemática dessa solução, e justamente porque a temperatura crítica de um tal sistema não trivial é conhecida, é comum usá-lo como exemplo em estudos numéricos, seja para testar novos métodos ou exercitar métodos já conhecidos.

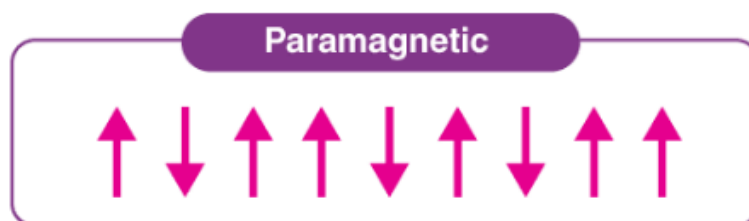
A simulação permite estudar as transições de fase que ocorrem nesse sistema. Uma transição de fase é uma mudança drástica nas propriedades físicas de um sistema quando uma variável termodinâmica, como a temperatura, atravessa um valor crítico. No caso do Modelo de Ising, as transições de fase são caracterizadas pela mudança de um estado desordenado (paramagnético) para um estado ordenado (ferromagnético) ou vice-versa. Analisando as variáveis perto dos valores críticos é possível calcular os expoentes críticos, que são quantidades fundamentais que descrevem o comportamento próximo a uma

Figura 1 – Spins alinhados em um estado Ferromagnético



Fonte: (2)

Figura 2 – Spins alinhados em um estado Paramagnético



Fonte: (2)

transição de fase. Esses expoentes desempenham um papel crucial na classificação das transições de fase e na compreensão dos fenômenos críticos(3). Alguns exemplos de expoentes críticos relevantes para o Modelo de Ising incluem os expoentes de correlação, magnetização e calor específico. Os quais, podem ser determinados por meio de técnicas numéricas avançadas, como o método dos mínimos quadrados e análise de rescaling.

O modelo Ising possui certa aplicabilidade experimental, apesar de ser um modelo de física teórica. Contudo por ser uma simulação há limitações até onde é possível calcular as variáveis do sistema.

O uso de Monte Carlo para esse modelo, oferece uma ferramenta poderosa para investigar as propriedades termodinâmicas e as transições de fase nesse sistema. Através da análise dos expoentes críticos, é possível obter informações valiosas sobre o comportamento próximo às transições de fase, agrupando-as em classes de universalidade e contribuindo para uma compreensão mais profunda dos fenômenos físicos subjacentes.

3 Modelo Ising

O Modelo de Ising é um modelo teórico em física estatística que foi proposto pelo físico Ernst Ising em 1925 como uma simplificação para estudar fenômenos de magnetismo em materiais. Tal exemplar se tornou um dos principais pilares da teoria dos sistemas magnéticos.

O modelo descreve um sistema composto por uma rede discreta de "sítios de spins", que podem ser pensados como átomos ou ímãs elementares. Cada sítio pode ter um spin *up* (\uparrow) ou *down* (\downarrow), que podem ser representados por +1 e -1, respectivamente. O comportamento magnético do sistema é determinado pelas interações entre os spins vizinhos.

A energia do sistema no modelo de Ising é dada pela soma das contribuições energéticas de cada par de spins vizinhos. Isso pode ser expresso matematicamente como:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \quad (3.1)$$

Nessa equação, $J(> 0)$ é uma constante que representa a intensidade da interação entre spins, σ_i e σ_j são os spins nos sítios i e j , respectivamente, e a soma é realizada sobre todos os pares de sítios vizinhos mais próximos, o que é representado pelo símbolo $\langle \dots \rangle$.

O sinal negativo na frente da equação reflete o fato de que os spins alinhados paralelamente tendem a diminuir a energia do sistema, enquanto os spins antialinhados contribuem para um aumento da energia. Assim, o sistema tende a minimizar sua energia total, buscando um arranjo de spins mais estável.

O J foi utilizado com valor de 1, constante em todos os sítios, contudo é possível variá-lo (com um valor aleatório para cada sítio por exemplo), porém isso resultaria em outro tipo de hamiltoniana, a qual envolve um tratamento mais sofisticado. No nosso caso J funciona como uma escala global de energia, sua alteração de valor causaria apenas um reescalamamento do valor da temperatura crítica, ou seja, se J fosse 2 o valor da temperatura crítica dobraria.

Uma das principais características do modelo de Ising é a descrição de sistemas magnéticos que exibem um fenômeno conhecido como transição de fase. Isso significa que, à medida que a temperatura do sistema é variada, ocorre uma mudança abrupta em suas propriedades magnéticas. A transição de fase está associada à perda de ordenamento magnético em uma temperatura crítica específica.

Em baixas temperaturas, o sistema tende a se organizar em um estado no qual os spins são alinhados em uma direção preferencial (ferromagnetismo). À medida que a

temperatura aumenta, a energia térmica começa a superar as interações magnéticas e os spins se tornam mais desordenados, levando a um estado de alta energia sem magnetização líquida (paramagnetismo). A temperatura crítica na qual ocorre essa transição é uma propriedade característica do modelo e depende do valor da constante J e da dimensionalidade espacial da rede. Para uma rede quadrada e em unidades de J (tomando a constante de Boltzmann igual a 1) temos $T_c = \frac{2}{\ln(1 + \sqrt{2})} \approx 2.2691853\dots$

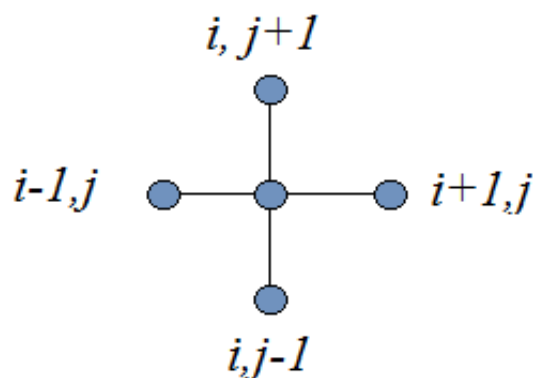
Embora o modelo de Ising original seja uma simplificação, ele tem sido aplicado com sucesso para descrever uma variedade de fenômenos em física estatística, desde a magnetização de materiais reais até comportamentos coletivos em sistemas biológicos e sociais(3). Além disso, o modelo de Ising forneceu a base para o desenvolvimento de técnicas computacionais poderosas, como a simulação de Monte Carlo, que permitem estudar sistemas complexos que não podem ser resolvidos analiticamente.(4)

3.1 Primeiros Vizinhos

A interação de primeiros vizinhos de spins refere-se a uma interação magnética entre os spins de partículas ou átomos que estão mais próximos em um sistema. Essa interação é comumente encontrada em materiais magnéticos, onde os spins atômicos ou eletrônicos são responsáveis pela propriedade magnética do material.

Na análise do Modelo Ising de duas dimensões é estudado a interação de primeiros vizinhos, onde o spin interage com seus vizinhos mais próximos. Dessa correlação surge um campo magnético interno, que durante a execução do projeto será o parâmetro de ordem que competirá contra a temperatura (variável desordem), ou seja, o campo magnético irá 'tentar' alinhar os spins na rede, os mantendo na mesma direção do campo, os ordenando e gerando uma magnetização no material. Porém, com um aumento na temperatura, tal energia térmica tenderá a desordenar os spins, gerando uma queda na magnetização.

Figura 3 – Interação de Primeiros Vizinhos



Fonte: (5)

Quando dois spins estão próximos o suficiente, eles podem interagir através de forças

magnéticas. Essa interação ocorre principalmente devido à interação de troca, que é uma interação quântica entre os spins. Esta tende a alinhar os spins paralelamente ou antiparalelamente, dependendo de sua natureza.

A natureza exata da interação de primeiros vizinhos de spins depende do sistema em questão e pode variar. Em alguns materiais, como ferromagnéticos, a interação de primeiros vizinhos tende a alinhar os spins paralelamente, resultando em um alinhamento global dos spins e uma magnetização líquida não nula. Em outros materiais, como antiferromagnéticos, a interação de primeiros vizinhos tende a alinhar os spins antiparalelamente, levando a uma magnetização líquida global igual a zero.

As interações de primeiros vizinhos de spins são fundamentais para a compreensão das propriedades magnéticas dos materiais. Elas influenciam o comportamento magnético global, como a temperatura crítica de transição magnética, a formação de domínios magnéticos, a resposta magnética a um campo externo, entre outras propriedades.

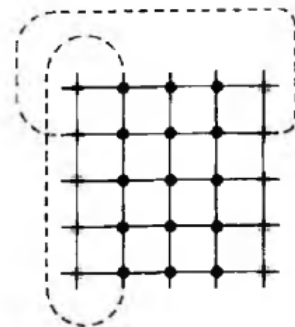
É importante ressaltar que, além desse tipo de interação, as de ordens mais distantes também podem desempenhar um papel significativo em alguns sistemas magnéticos. Essas interações podem ser levadas em consideração para uma descrição mais precisa e completa do comportamento magnético de um material.

3.2 Condições Periódicas de Contorno

É um conceito utilizado em diferentes áreas da física, como mecânica quântica, eletromagnetismo, mecânica dos fluidos e muitas outras. Essa condição é aplicada quando se deseja estudar um sistema que possui uma periodicidade espacial, ou seja, uma propriedade que se repete em intervalos regulares.

Em termos simples, a condição periódica de contorno implica que um sistema em uma extremidade é conectado à sua extremidade oposta, de forma que qualquer objeto ou propriedade que saia de uma extremidade entra na outra, como se o sistema fosse "enrolado" ou "envolvido" em si mesmo(3).

Figura 4 – Condição periódica de contorno em um rede quadrada



Fonte: (3)

Ao aplicar essa condição, considera-se que o sistema forma um "toro" ou um "cilindro" (3), em vez de ser uma extensão infinita. Isso simplifica a análise matemática e permite a exploração das propriedades do sistema em um espaço finito. Tal técnica reduz a complexidade do problema, permitindo uma análise mais fácil e a obtenção de soluções matemáticas mais elegantes, também se aproxima da realidade física, já que muitos sistemas reais possuem alguma forma de periodicidade espacial.

Apesar dos vários benefícios, toda técnica tem seus pontos negativos. Porém, essa condição de contorno, é apenas aplicável a sistemas que possuem um certo nível de simetria periódica. Além disso, tal condição, exclui as possíveis interações com o ambiente externo do sistema, pois assume uma conexão direta entre as extremidades opostas. Em alguns casos as interações de fronteira ou superfície têm alto peso no desempenho e eliminá-las através das condições periódicas de contorno faz os resultados convergirem mais rapidamente para o limite termodinâmico. Obviamente, se o interesse estiver justamente nos efeitos de superfície, condições abertas de contorno deverão ser aplicadas.

3.3 Escala de Tamanho Finito

A escala de tamanho finito é um conceito utilizado na física estatística para compreender como o comportamento de um sistema muda com o tamanho do sistema (número de partículas, volume, etc.) próximo a uma transição de fase. No contexto do modelo de Ising, tal técnica nos permite estudar como as propriedades dependem do seu tamanho próximo ao ponto crítico.

Próximo à temperatura crítica de uma transição de fase no modelo de Ising, o comprimento de correlação, que caracteriza a extensão das interações entre spins, diverge. No entanto, em um sistema de tamanho finito, o limite para o comprimento de correlação é o tamanho do próprio sistema. A escala de tamanho finito leva em consideração esse tamanho finito e fornece um procedimento para extrapolar o comportamento do sistema no limite termodinâmico (tamanho do sistema tendendo ao infinito).

Esse método é importante para o modelo de Ising por várias razões:

1. Estimativa de parâmetros críticos: Ao estudar o comportamento do modelo de Ising em diferentes tamanhos de sistema próximos à temperatura crítica, a escala de tamanho finito nos permite estimar os expoentes críticos, que descrevem como as grandezas físicas se comportam próximo ao ponto crítico. Esses expoentes são universais e fornecem insights valiosos sobre a natureza da transição de fase.
2. Verificação de universalidade: A escala de tamanho finito ajuda a verificar o conceito de universalidade no modelo de Ising. A universalidade afirma que sistemas pertencentes à mesma classe de universalidade (descritos pelo mesmo conjunto de expoentes críticos) exibem comportamento semelhante próximo ao ponto crítico, independentemente dos

detalhes microscópicos. Ao analisar o comportamento do modelo de Ising em diferentes tamanhos, é possível verificar se os expoentes críticos observados são consistentes com as classes de universalidade conhecidas.

3. Efeitos de tamanho finito: A escala de tamanho finito nos permite entender a influência dos efeitos de tamanho finito no comportamento do sistema. Próximo ao ponto crítico, os efeitos de tamanho finito se tornam significativos, levando a desvios mais relevantes do comportamento de um sistema infinito. Ao considerar esses efeitos, é possível analisar com precisão dados experimentais ou de simulações obtidos de sistemas de tamanho finito e obter informações confiáveis sobre o comportamento crítico.

4. Simulações numéricas: A escala de tamanho finito fornece orientação para simulações numéricas do modelo de Ising. Como simular um sistema infinito não é viável, sistemas de tamanho finito são utilizados em estudos numéricos. As técnicas de escala de tamanho finito permitem que os pesquisadores extrapolem os resultados da simulação para obter informações significativas sobre o comportamento crítico no limite termodinâmico.

3.4 Expoentes Críticos

Os expoentes críticos são grandezas universais que descrevem o comportamento de sistemas em torno de uma transição de fase crítica. Eles são independentes das propriedades específicas do material, mas dependem apenas do tipo de transição de fase que ocorre no sistema. Em particular, para uma transição de fase de segunda ordem, os expoentes críticos descrevem como as propriedades termodinâmicas do sistema se comportam em torno da temperatura crítica.

Na simulação Monte Carlo do modelo de Ising, os expoentes críticos são obtidos a partir da análise do comportamento da magnetização e da suscetibilidade magnética em torno da temperatura crítica. A magnetização é a medida da média dos spins magnéticos do sistema, enquanto a suscetibilidade magnética é uma medida da resposta do sistema a um campo magnético externo.

Em torno da temperatura crítica, a magnetização e a suscetibilidade magnética se comportam de acordo com leis de potência, com expoentes críticos específicos. Mais precisamente, a magnetização do sistema é dada por:

$$M \approx |T - T_c|^\beta \quad (3.2)$$

onde T é a temperatura, T_c é a temperatura crítica, β é o expoente crítico da magnetização. O expoente beta descreve como a magnetização se comporta em torno da temperatura crítica. Da mesma forma, a suscetibilidade magnética do sistema é dada por:

$$\chi \approx |T - T_c|^\gamma \quad (3.3)$$

onde γ é o expoente crítico da suscetibilidade magnética. O expoente gamma descreve como a suscetibilidade magnética se comporta em torno da temperatura crítica.

A partir das simulações Monte Carlo do modelo de Ising, é possível obter valores numéricos dos expoentes críticos β e γ , bem como de outros expoentes críticos, como o expoente crítico de correlação. Esses valores podem ser comparados com valores teóricos ou experimentais, permitindo a validação da simulação Monte Carlo e o estudo de materiais reais.

Em resumo, os expoentes críticos são grandezas universais que descrevem o comportamento de sistemas em torno de uma transição de fase crítica, e são obtidos a partir da análise da magnetização e da suscetibilidade magnética em torno da temperatura crítica na simulação Monte Carlo do modelo de Ising.

3.5 Suscetibilidade magnética

A suscetibilidade magnética é uma medida da resposta magnética de um material quando um campo magnético é aplicado a ele. Ela é definida como a razão entre a magnetização e o campo magnético aplicado. Em outras palavras, a suscetibilidade magnética mede a facilidade com que um material se magnetiza em resposta a um campo magnético externo.

No modelo de Ising 2D, a suscetibilidade magnética é uma medida da tendência dos spins no material a se alinharem com o campo magnético aplicado. O modelo em questão é uma simplificação do modelo de Ising original, que descreve a interação entre spins magnéticos em um material.

Em tal modelo, consideramos um material bidimensional composto de N spins magnéticos, cada um com um valor de spin de $+1$ ou -1 . O Hamiltoniano que descreve a energia total do sistema é dado por:

$$H = -J \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j - \mu B \sum_{i,j} \sigma_i \quad (3.4)$$

onde J é a constante de acoplamento entre spins, μ é o momento magnético de cada spin, B é o campo magnético aplicado e σ_i é o valor do spin na posição i . A suscetibilidade magnética no modelo de Ising 2D pode ser calculada a partir da derivada segunda da energia livre F com relação ao campo magnético B . A energia livre F é dada por:

$$F = -kT \ln(Z) \quad (3.5)$$

onde k é a constante de Boltzmann, T é a temperatura e Z é a função de partição do sistema, dada por:

$$Z = \sum e^{-H/kT} \quad (3.6)$$

onde a soma é sobre todos os possíveis estados dos spins magnéticos. A partir da energia livre, podemos calcular a suscetibilidade magnética usando a equação:

$$\chi = (\partial^2 F / \partial B^2) / kT \quad (3.7)$$

Usando algumas simplificações matemáticas e assumindo que a temperatura é baixa, podemos mostrar que a suscetibilidade magnética no modelo é dada por:

$$\chi = (\mu^2 / kT) N (1 - (T_c / T))^{-1} \quad (3.8)$$

onde T_c é a temperatura crítica do sistema, acima da qual o material se torna paramagnético, e N é o número total de spins no material. Esta equação mostra que a suscetibilidade magnética aumenta quando a temperatura diminui e se aproxima da temperatura crítica T_c . Quando a temperatura é maior que T_c , a suscetibilidade magnética diminui rapidamente, indicando que o material se tornou paramagnético.

3.6 Calor Específico

O calor específico é uma propriedade termodinâmica que descreve a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de uma determinada quantidade de substância em uma unidade. Ele é uma medida da capacidade de armazenamento de energia térmica de um sistema. No contexto do modelo de Ising, o calor específico está relacionado à resposta térmica do sistema de spins à variação de temperatura.

O calor específico do sistema de Ising é uma medida da quantidade de energia térmica necessária para alterar a temperatura do sistema. Ele está relacionado à variação de energia do sistema em resposta à mudança de temperatura.

A energia do sistema de Ising é uma função da configuração dos spins e é definida pelo hamiltoniano do sistema. A variação de energia com a temperatura afeta diretamente o calor específico.

Quando a temperatura aumenta, os spins do sistema começam a apresentar uma maior tendência à agitação térmica, levando a flutuações na configuração dos spins e a um

aumento na energia térmica. Isso resulta em um aumento na capacidade do sistema de armazenar energia térmica, ou seja, um aumento no calor específico.

Próximo à temperatura crítica, onde ocorre a transição de fase no sistema de Ising, o calor específico pode exibir um comportamento singular. Ele pode divergir, indicando uma resposta térmica intensa do sistema às flutuações térmicas nessa região crítica. Essa divergência é uma característica de transições de fase de segunda ordem.

A relação entre o calor específico (c) e a energia do sistema de Ising pode ser expressa através da seguinte relação:

$$c = \partial E / \partial T, \quad (3.9)$$

onde E é a energia total do sistema.

Em resumo, o calor específico no modelo de Ising está relacionado à capacidade de armazenamento de energia térmica do sistema. Ele é influenciado pela variação de energia com a temperatura e desempenha um papel importante na descrição do comportamento térmico do sistema, incluindo o comportamento próximo à temperatura crítica.

4 Simulação de Monte Carlo

A simulação Monte Carlo é uma técnica computacional usada para simular o comportamento de sistemas complexos que são difíceis de serem analisados de forma analítica. A técnica é baseada na geração aleatória de estados do sistema, seguindo uma distribuição de probabilidade específica, e na avaliação estatística dos resultados.

Por outro lado, a simulação Monte Carlo pode ser computacionalmente intensiva e requerer o uso de recursos computacionais significativos.

4.1 Algoritmo de Metropolis

Também conhecido como algoritmo de Metropolis-Hastings, é um método de simulação Monte Carlo Markov Chain (MCMC) amplamente utilizado na área de estatística e física computacional. Ele foi originalmente proposto por Nicholas Metropolis, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller, Edward Teller em 1953 (6).

Tal algoritmo está intimamente ligado à pesquisa em física estatística e à necessidade de simular sistemas físicos complexos, como o Modelo de Ising, analisado nesse trabalho. Como mencionado acima, o caso que estamos analisando possui solução analítica mas outras configurações relevantes (como, por exemplo, a cadeia cúbica ou interações entre segundos vizinhos) não possuem tal solução e precisam se abordagens numéricas.

O algoritmo de Metropolis é uma técnica de Monte Carlo, o que significa que é uma abordagem estatística para resolver problemas envolvendo probabilidade e aleatoriedade.

Em particular, o algoritmo de Metropolis é usado para calcular as probabilidades de transição entre diferentes estados de um sistema. É um dos métodos mais comuns usados para realizar simulações de Monte Carlo no modelo Ising (7). Ele é um algoritmo de aceitação-rejeição que gera uma nova configuração de spins e decide se aceita ou rejeita essa nova configuração com base em uma probabilidade de transição.

Ele utiliza conceitos da teoria das cadeias de Markov para gerar uma sequência de estados de um sistema, onde cada estado depende do estado anterior. Essa sequência de estados é então utilizada para estimar propriedades do sistema.

Sua principal função é gerar amostras de uma distribuição de probabilidade desconhecida, mas da qual é possível calcular proporções de probabilidade. Uma de suas qualidades é conseguir explorar regiões de alta probabilidade em um espaço de estados, mesmo quando a distribuição não pode ser normalizada.

Segue os passos do algoritmo:

1. Gera uma configuração aleatória de spins na rede quadrada.
2. Em seguida, escolhe

aleatoriamente um spin dentro da rede para ser "virado", mais precisamente, para alterar sua orientação (de -1 para +1 ou vice-versa). 3. Então é calculado a energia da rede com esse spins flipado. No modelo Ising a energia da rede é calculada como a soma das interações de cada spins vizinhos mais próximos.

Tal energia é dada pela seguinte equação:

$$H = -J \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i \quad (4.1)$$

onde J é a constante de acoplamento entre os spins e σ_i e σ_j são os spins adjacentes ao spin 'i' que está sendo virado.

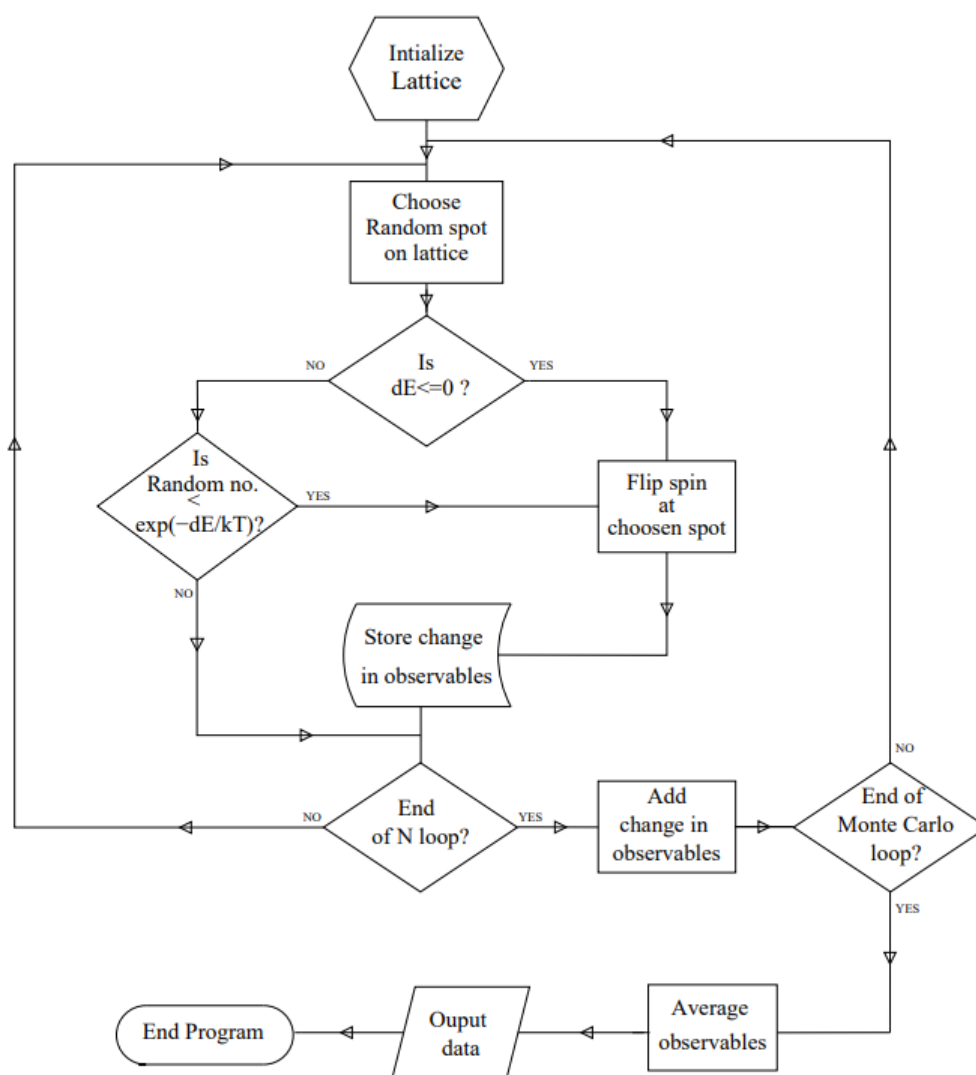
4. Se a mudança de energia for negativa, ou seja, se a nova configuração de spins tiver energia menor que a anterior, a nova configuração é aceita automaticamente e o spin é virado. 5. Se a mudança de energia for positiva, ou seja, se a nova configuração de spins tiver a maior energia que a anterior, a nova configuração é aceita com uma probabilidade dada por:

$$p = e^{-dE/kT} \quad (4.2)$$

6. Esse processo é repetido para um número suficiente de passos de Monte Carlo para permitir que o sistema atinja o equilíbrio termodinâmico e para que os valores médios das propriedades termodinâmicas do sistema possam convergir, dentro de uma margem de erro determinada previamente, assim como é mostrado no 5.

O algoritmo de Metropolis é útil para simular sistemas físicos porque permite que você explore diferentes estados do sistema de maneira eficiente e estocástica, e que calcule as propriedades termodinâmicas do sistema a partir das amostras geradas. O algoritmo é amplamente utilizado em física, química, biologia, ciência dos materiais e outras áreas da ciência e da engenharia.

Figura 5 – Fluxograma do Algoritmo de Metropolis



Fonte: (8)

5 Metodologia

Para analisarmos a Simulação de Monte Carlo aplicada ao Modelo Ising bidimensional foi preciso inicialmente estudar o Método Monte Carlo e o Modelo Ising pela referência (3), depois de entendido suas propriedades e operações, foi escrito um programa em python que pudesse efetuar os cálculos deste trabalho. Contudo, ao executá-lo, verificou-se a demora para que o código tivesse os resultados desejados, tornando tal código ineficiente. Então foi escrito um novo código(anexado ao final desta monografia), porém em C, visto que é uma linguagem de programação mais otimizada para esse tipo de cálculo mais custoso computacionalmente. Procuramos comentar tal código de maneira a torná-lo inteligível para o usuário.

Para alguns gráficos foi utilizado "Matplotlib", uma biblioteca python para construção de gráficos e para outros o program Origin 8.5 Pro.

O código final em C escreve os dados coletados em um arquivo, que então é lido por um código python para construir os gráficos.

Para otimização do código em C, foi utilizado um 'struct' que comprime várias variáveis em um único tipo de variável, ou seja, em vez de fazer várias funções para cada variável criada, foi feita uma função para cada etapa dos cálculos: condições periódicas de contorno, cálculo da variação de energia, magnetização, etc, e utilizada a struct contendo as variáveis de cada etapa, sendo que algumas variáveis são compartilhadas.

Foi preciso reduzir o máximo possível de processos no qual retardariam a execução do código, pois para rede pequenas a tempo de execução era baixa, contudo para redes maiores (72x72 e 80x80) o tempo de execução foi bem maior de acordo com a tabela 1, mesmo com todas as técnicas para otimização.

Tabela 1 – Tabela do tempo de execução aproximadamente em relação ao tamanho da rede

Tamanho da Rede	Tempo de Execução (min)
16	~25
20	~60
32	~150
40	~240
48	~400
56	~860
64	~2460
72	~4900
80	~8500

Tal código tem grande controle sobre as variáveis que foram utilizadas no cálculo da

variação de energia, magnetização e calor específico, ou seja, é possível alterá-las de forma que os resultados fossem mais preciso. Foi utilizado também uma função intrínseca de números randômicos da biblioteca C (`rand()`), nota-se que foram testadas outras funções de números randômicos para verificação da autenticidade do `'rand()'`, o que resultou em resultados semelhantes.

No final do código os dados foram armazenados em um arquivo `'dat'` que foi lido pelos programas de gráficos citados mais cedo. E uma imagem gerado e salva em um arquivo `'png'`. Código utilizado encontra-se no apêndice [A](#).

6 Resultados

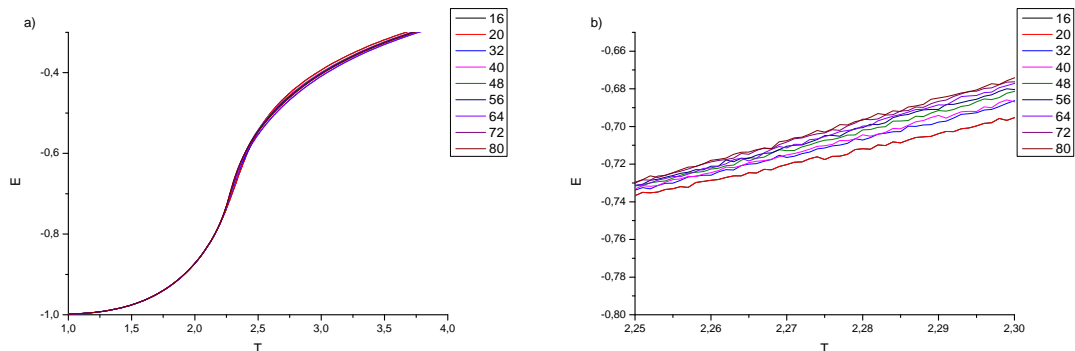
A partir da teoria introduzida no começo desse projeto e aplicado os métodos citados foi possível obter a magnetização e a energia para redes que variaram dos tamanhos de 16×16 até 80×80 com 10^6 de iterações de execução e 2×10^5 iterações para termalização ou 20% (iteraões são a execução total do código). O computador usado para a execução do código possui as seguintes especificações: GPU \Rightarrow i7 com 16 núcleos e 16gb de memória e uma placa gráfica 3080Ti. O código utilizado implementa os métodos já explicados na introdução e citados na metodologia. Como o propósito do projeto é encontrar a temperatura crítica, foram confeccionados gráficos de magnetização, energia e calor específico.

6.1 Energia

Através do hamiltoniano é calculado a variação de energia toda vez que um spin é virado, ou seja, antes do código começar a executar o método monte carlo, a energia inicial é calculada e a cada iteração do algoritmo de metrópolis na rede, a energia total desta é variada. Como o projeto tem como objetivo encontrar a temperatura crítica no limite termodinâmico (tamanho da rede tendendo a infinito) a mudança na concavidade do gráfico determina uma estimativa dessa temperatura para cada rede finita. Um gráfico foi confeccionado utilizando essas estimativas e extrapolando para $L \rightarrow \infty$ e produz uma estimativa da temperatura crítica.

Iniciando com os resultados para a energia, vemos nos gráficos da Figura 6 a energia total para dois intervalos de temperatura, sendo o segundo um "zoom" numa região em torno de T_c .

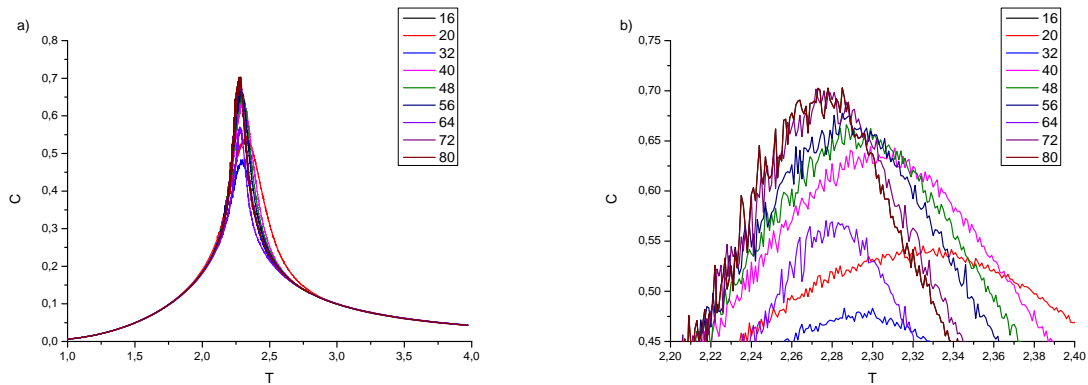
Figura 6 – Gráfico da Energia pela Temperatura. a) Intervalo de temperatura: 1 a 4 (em unidades arbitrárias) e b) Intervalo de temperatura 2,25 a 2,30



6.2 Calor Específico

O calor específico foi calculado como a derivada da energia, como citado anteriormente. O pico dos gráficos na Fig. 7 representam a temperatura crítica, ou seja, é o ponto quando a temperatura "supera" o campo interno gerado pela interação dos spins e os desordena, assim fazendo que percam momentaneamente suas propriedades magnéticas.

Figura 7 – Gráfico da Energia pela Temperatura. a) Intervalo de temperatura: 1 a 4 e b) Intervalo de temperatura 2,20 a 2,40



6.3 Magnetização

Na Fig. 8 vemos a magnetização em função da temperatura. No gráfico realizado percebe-se que há uma queda abrupta, no qual representa o término da fase com ordenamento ferromagnético e o começo da fase paramagnética. O ponto de inflexão fornece uma estimativa da temperatura crítica.

6.4 Estimativas da temperatura crítica para cada tamanho da rede e o limite termodinâmico

A Tabela abaixo contém as estimativas da temperatura crítica para cada tamanho de rede obtidas a partir da magnetização e do calor específico.

Tabela 2 – Tabela da temperatura crítica em relação ao tamanho da matriz

Tamanho da matriz	Tc		
	M	M(s)	C
1/L			
1/16	2,110	2,162	2,255
1/20	2,020	2,076	2,271
1/32	2,134	2,139	2,277
1/40	2,159	2,168	2,280
1/48	2,172	2,189	2,287
1/56	2,188	2,195	2,295
1/64	2,243	2,253	2,297
1/72	2,229	2,237	2,306
1/80	2,239	2,243	2,315

Na tabela acima, M é a magnetização, M(s) é magnetização suavizada e C é o calor específico.

A seguir foram feitos gráficos para mostrar que ao aumentar o tamanho da rede a estimativa da temperatura crítica tende a ficar cada vez mais próxima da temperatura crítica prevista pela solução analítica.

Com os dados da tabela acima foram feitos dois gráficos, um para magnetização (Figura 9) e um para o calor específico (Figura 10), ambos em relação ao inverso do tamanho do lado da rede. Seus coeficientes lineares, indicados na legenda de cada gráfico, representam uma estimativa da temperatura crítica no limite termodinâmico para aquela quantidade.

Figura 9 – Gráfico do inverso do lado da rede pela Temperatura Crítica segundo os dados da tabela da magnetização suavizada; Coeficiente Linear: 2.28543

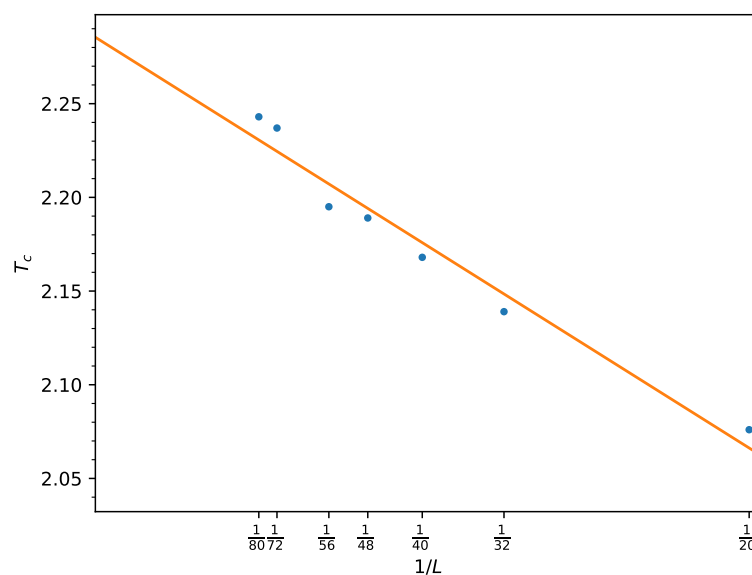
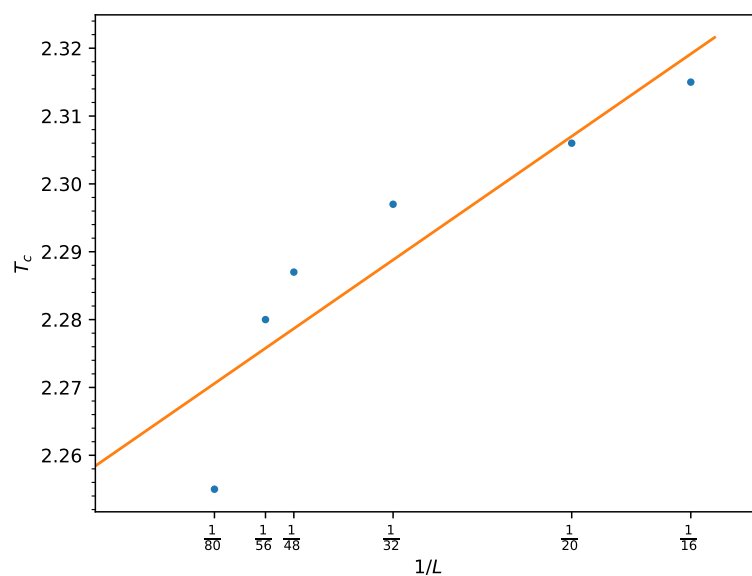


Figura 10 – Gráfico do inverso do lado da rede pela Temperatura Crítica segundo os dados da tabela do calor específico; Coeficiente Linear: 2.25843



7 Conclusão

Neste projeto, o Método Monte Carlo foi aplicado ao Modelo Ising Clássico com duas dimensões (rede quadrada) de forma sistemática. Com utilização do Método de Monte Carlo (mais precisamente com o algoritmo de Metropolis) e de técnicas de modelagem computacional de sistemas finitos foi possível obter a magnetização e o calor específico em função da temperatura para sistemas (amostras) de vários tamanhos e, a partir desses resultados, estimar a temperatura crítica da transição ordem-desordem do modelo. Nossa inexperiência com o método e também dificuldades técnicas com a implementação computacional contribuíram para os erros nos resultados, assim como as limitações inerentes ao próprio método tais como sua convergência lenta na região da transição.

Ainda assim, o erro percentual na estimativa da temperatura crítica obtida pela magnetização foi de 0.7 % e para o calor específico foi de 0.5 %.

A Program Github

Jean, Y. (2023). TCC Program [Computer software]

<https://github.com/JeanYone/TCC-code>

```

1 // Libraries that provide necessary data types and functions
2 #include <stdint.h>
3 #include <stdio.h>
4 #include <stdlib.h>
5 #include <math.h>
6 #include <stdbool.h>
7 #include <time.h>
8 // External Library used for writing images in PNG format
9 #define STB_IMAGE_WRITE_IMPLEMENTATION
10 #include "stb_image_write.h"
11 // Defines LATYPE as int and represent the data type used for each point in the magnetic
    lattice.
12 #define LATYPE int //
13 typedef unsigned long long u64;
14 typedef long long i64;
15 // A data type that stores other variables within it, so when it is "called," all the
    variables contained within it are read.
16 typedef struct {
17     double energy, magnetization;
18 } energy_magnetization_pack;
19 // Same as above
20 typedef struct {
21     double avg_E, avg_M, specific_heat, magnetic_sus;
22     double avg_E2, avg_M2;
23 } ising_data;
24 // The intrinsic function of random numbers "rand()" generates a random number between 0
    and 1.
25 double rrand() {
26     return (double)rand() / (double)RAND_MAX;
27 }
28 // Initializes a random lattice by allocating memory for the lattice and
29 // assigning random spin values (+1 or -1) to each lattice point.
30 LATYPE* init_random_lattice(u64 n) {
31     LATYPE *lattice = (LATYPE*)calloc(n * n, sizeof(LATYPE));
32     for (u64 i = 0; i < n * n; ++i)
33         lattice[i] = 2 * (rand() % 2) - 1;
34
35     return lattice;
36 }
37 // unction takes an existing lattice and randomizes its spin values.
38 void randomize_lattice(LATYPE *lattice, u64 n) {
39     for (u64 i = 0; i < n * n; ++i)
40         lattice[i] = 2 * (rand() % 2) - 1;
41 }
42 // ensures that lattice indices wrap around the boundaries of the lattice, allowing
    periodic boundary conditions.
43 i64 bounds(i64 i, u64 n) {
44     if (0 <= i && (u64)i < n) return i;
45     return ((i % n) + n) % n;
46 }
47 // calculates the change in energy

```

```

48 double dE_to_flip(LATYPE S, double J, LATYPE sum_neigh, double H) {
49     return 2.0 * S * (J * sum_neigh + H);
50 }
51 // calculates the sum of the nearest neighbor spins for a given lattice point.
52 LATYPE neighbor_sum(LATYPE *lattice, i64 i, i64 j, int n) {
53     LATYPE left = lattice[i * n + bounds(j - 1, n)];
54     LATYPE right = lattice[i * n + bounds(j + 1, n)];
55     LATYPE down = lattice[bounds(i - 1, n) * n + j];
56     LATYPE up = lattice[bounds(i + 1, n) * n + j];
57     return left + right + down + up;
58 }
59 // calculates the total energy and magnetization of the lattice by iterating
60 // over all lattice points and summing the corresponding contributions.
61 energy_magnetization_pack lattice_energy_magnetization(LATYPE *lattice, u64 n, double J,
62     double H) {
63     energy_magnetization_pack to_return = {0};
64     for (i64 row = 0; (u64)row < n; ++row) {
65         for (i64 col = 0; (u64)col < n; ++col) {
66             to_return.energy += -H * lattice[row * n + col] - J * neighbor_sum(lattice,
67                 row, col, n) * lattice[row * n + col] / 4.0;
68             to_return.magnetization += lattice[row * n + col];
69         }
70     }
71     return to_return;
72 }
73 // Performs a single step of the Metropolis algorithm for thermalization. It randomly
74 // selects a lattice point, calculates the change in energy
75 // if the spin were flipped, and decides whether to flip the spin based on the Metropolis
76 // criterion.
77 void termal_step(LATYPE *lattice, u64 n, double J, double H, double T) {
78     for (u64 row = 0; row < n; ++row) {
79         for (u64 col = 0; col < n; ++col) {
80             u64 row_random = rand() % n;
81             u64 col_random = rand() % n;
82             double dE = 2.0 * lattice[row_random * n + col_random] * (J * neighbor_sum(
83                 lattice, row_random, col_random, n) + H);
84             if (dE < 0)
85                 lattice[row_random * n + col_random] *= -1;
86             else if (rrand() < exp(-dE / T))
87                 lattice[row_random * n + col_random] *= -1;
88         }
89     }
90 }
91 // Performs the simulation of the Ising model using the Metropolis algorithm.
92 // It takes a lattice, its size, the number of simulation steps, and the physical
93 // parameters (interaction energy J, external magnetic field H, and temperature T).
94 // It executes thermalization steps to reach thermal equilibrium and then performs
95 // additional steps to calculate statistical averages of energy and magnetization. The
96 // specific heat and magnetic susceptibility are also calculated using these averages
97 ising_data ising_metropolis(LATYPE *lattice, u64 n, u64 steps, double J, double H, double
98     T) {
99     ising_data data = {0};
100
101     bool valid_lattice = lattice;
102     if (!valid_lattice) {
103         fprintf(stderr, "Warning: lattice provided is NULL. Will be created a lattice and
104             freed afterwards. You will have no access to that lattice");
105         lattice = init_random_lattice(n);

```

```

98     }
99
100    double energy          = 0.0;
101    double magnetization = 0.0;
102
103
104    for (u64 i = 0; i < steps; ++i) {
105        termal_step(lattice, n, J, H, T);
106        energy_magnetization_pack E_M = lattice_energy_magnetization(lattice, n, J, H);
107        energy          = E_M.energy;
108        magnetization = E_M.magnetization;
109
110        data.avg_E += energy;
111        data.avg_M += magnetization;
112        data.avg_E2 += energy * energy;
113        data.avg_M2 += magnetization * magnetization;
114    }
115
116    double avg_fac = 1.0 / (steps * n * n);
117    double avg_fac2 = 1.0 / (steps * steps * n * n);
118
119
120    data.specific_heat = (avg_fac * data.avg_E2 - avg_fac2 * data.avg_E * data.avg_E) / (
121    T * T);
122    data.magnetic_sus = (avg_fac * data.avg_M2 - avg_fac2 * data.avg_M * data.avg_M) / T
123    ;
124
125    data.avg_E *= avg_fac;
126    data.avg_M *= avg_fac;
127
128    if (!valid_lattice)
129        free(lattice);
130
131    return data;
132 }
133
134 // exports the lattice as a PNG image. It converts the spin values to pixel colors (black
135 // or white)
136 // and uses the STB library to write the image file.
137 void export_lattice(double T, LATYPE *lattice, int n) {
138     unsigned int char_size = snprintf(NULL, 0, "./imgs/%e.png", T) + 1;
139     char *str = (char*)calloc(char_size, 1);
140     snprintf(str, char_size, "./imgs/%e.png", T);
141
142     uint32_t *lattice_img = (uint32_t*)calloc(n * n, sizeof(uint32_t));
143     for (int i = 0; i < n * n; ++i)
144         lattice_img[i] = (int)lattice[i] == 1? 0xFFFFFFFF: 0xFF000000;
145
146     stbi_write_png(str, n, n, 4, lattice_img, sizeof(uint32_t) * n);
147
148     free(str);
149     free(lattice_img);
150 }
151
152 //Compilar com:
153 //gcc -O3 -Wall -Wextra -pedantic -o main main.c -lm
154
155 // is the entry point of the program. It sets the simulation parameters, initializes the
156 // lattice, iterates over temperatures, performs the simulation for each temperature,
157 // and writes the results to a data file.
158 // Optionally, it exports the lattice as PNG images.

```

```

153 int main(void) {
154     int n_temperatures = 100;
155     u64 steps          = 1000000;
156     u64 eq_steps      = 200000;
157     u64 n              = 32;
158     double Tmin       = 1.0;
159     double Tmax       = 4.0;
160     double dT         = (Tmax - Tmin) / n_temperatures;
161     double trans_start = 2.1; //Onset of the transition range
162     double trans_end   = 2.8; //end of transition lane
163     double fac_trans   = 30.0; //factor of the number of points in the transition region (
    this value x how many they would have). If you don't want it, just put =1.0
164
165     double J = 1.0;
166     double H = 0.0;
167
168     bool print_lattice = true; //disabling makes the program much faster
169
170     FILE *out_test = fopen("./data.dat", "w");
171
172     double T = Tmin;
173     int i = 0;
174     double dT_var = dT;
175     LATYPE *lattice = init_random_lattice(n);
176     while (T <= Tmax) {
177         srand(time(NULL));
178         //randomize_lattice(lattice, n);
179
180         if (i % (n_temperatures / 10) == 0)
181             printf("T = %.5e\n", T);
182         fflush(out_test);
183         fflush(stdout);
184
185
186         ising_data data = ising_metropolis(lattice, n, eq_steps, J, H, T); //for EQ
187         data = ising_metropolis(lattice, n, steps, J, H, T);
188
189         if (print_lattice)
190             export_lattice(T, lattice, n);
191
192         fprintf(out_test, "%e\t%e\t%e\t%e\t%e\n", T, data.avg_E, data.avg_M, data.
    specific_heat, data.magnetic_sus);
193         ++i;
194
195         dT_var = dT;
196         if (trans_start < T && T < trans_end)
197             dT_var = dT / fac_trans;
198
199         T += dT_var;
200     }
201     free(lattice);
202     fclose(out_test);
203     return 0;
204 }

```

Referências

- 1 ONSAGER, L. Crystal statistics. i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, APS, v. 65, n. 3-4, p. 117, 1944. Citado na página 13.
- 2 ADMIN. *Ferromagnetism - definition, ferromagnetic materials, applications, antiferromagnetism, video and faqs*. BYJU'S, 2022. Disponível em: <<https://byjus.com/physics/ferromagnetism/>>. Citado na página 14.
- 3 LANDAU, D.; BINDER, K. *A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics*. [S.l.]: Cambridge university press, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 14, 16, 17, 18 e 26.
- 4 NEWELL, G. F.; MONTROLL, E. W. On the theory of the ising model of ferromagnetism. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 25, n. 2, p. 353, 1953. Citado na página 16.
- 5 MEDEIROS, M. L. de; PLASCAK, J. A. Visualização de simulações de monte carlo em sistemas hamiltonianos magnéticos. *Brazilian Journal of Development*, v. 6, n. 8, p. 56394–56401, 2020. Citado na página 16.
- 6 METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N. Teller, ah teller, e. 1953. *J. chem. Phys*, v. 21, p. 1087. Citado na página 23.
- 7 BEICHL, I.; SULLIVAN, F. The metropolis algorithm. *Computing in Science & Engineering*, IEEE, v. 2, n. 1, p. 65–69, 2000. Citado na página 23.
- 8 ANTUNES, F.; GONÇALVES, S. Estudo do modelo de ising bidimensional utilizando o algoritmo de metropolis. Citado na página 25.