

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

**ANA LUIZA BASTOS BARBOSA GUIMARÃES DA SILVA**

**Desvio do periélio de Mercúrio na relatividade geral**

Guaratinguetá

2018

**Ana Luiza Bastos Barbosa Guimarães da Silva**

**Desvio do periélio de Mercúrio na relatividade geral**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física .

Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira

Guaratinguetá

2018

S586d Silva, Ana Luiza Bastos Barbosa Guimarães da  
Desvio do Periélio de Mercúrio na Relatividade Geral / Ana Luiza  
Bastos Barbosa Guimarães da Silva – Guaratinguetá, 2018.  
51 f.: il.  
Bibliografia: f. 44

Trabalho de Graduação – Bacharelado em Física – Universidade  
Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018.  
Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira

1. Relatividade. 2. Astrofísica. 3. Mercúrio. I. Título.

CDU 523.03

Luciana Máximo  
Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ


ANA LUIZA BASTOS BARBOSA GUIMARÃES DA SILVA

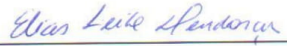
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO  
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM FÍSICA "


APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM  
FÍSICA

Prof. Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO  
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

  
Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira  
Orientador/UNESP-FEG

  
Prof. Dr. Elias Leite Mendonça  
UNESP-FEG

  
Prof. Dr. Silmar Antônio Travain  
UNESP-FEG

Dezembro , 2018

## **DADOS CURRICULARES**

**ANA LUIZA BASTOS BARBOSA GUIMARÃES DA SILVA**

**NASCIMENTO** 10/08/1995 - Guaratinguetá / SP

**FILIAÇÃO** Maurício Guimarães da Silva  
Elainy Bastos Barbosa Guimarães da Silva

**2014 / 2018** Graduação em Física (Bacharelado)  
UNESP

Aos meus queridos pais, Elaine e Maurício e ao meu vovô Airton.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de começar agradecendo o meu orientador, Saulo, pela paciência, didática, por ter me ensinado tanto e ter despertado a minha paixão por essa área, me fazendo encontrar quem sou dentro da Física e por ter sido fundamental no desenvolvimento do projeto que gerou este trabalho.

À minha família, por estarem ao meu lado sempre, em especial os meus pais, Elaine e Maurício, por darem total suporte em tudo, por apoiarem as minhas escolhas, por estarem ao meu lado nos meus fracassos e vitórias, por serem a base de quem eu sou e os exemplos de quem quero ser.

Agradeço às minhas amigas que estão se formando comigo, Milena, Nilce, em especial, quero agradecer a Gabriela, pela parceria dentro e fora da universidade, que está comigo sempre que preciso e pela amizade que quero levar para o resto da vida; e a Vanessa, que foi a maior companheira nos inúmeros trabalhos, seminários e duplas, que me ajudou e ajuda sempre dentro e fora da universidade, nos momentos bons e ruins, se tornou minha melhor amiga e essa amizade vou levar comigo por toda a vida. E aos meus irmãos da cosmologia, Heron e Patto, que irão ganhar o Nobel comigo um dia.

À UNESP, e à todos os professores que fizeram parte dessa jornada de cinco anos de graduação, em especial, Elias, Júlio e Rafael, por serem exemplos para mim de competência dentro e fora da sala de aula, por me darem tanto conhecimento e paixão pela física.

Ao primeiro orientador que tive, Perassoli, que me ensinou tanto sobre engenharia, radar e eletricidade, que foi fundamental em minha vida acadêmica, me dando a oportunidade de aprender fora do escopo da Física, no DCTA. Espero fazê-lo sentir orgulho de mim com este trabalho.

Ao Thomaz, que me conheceu ao longo desse curso e que esteve comigo desde então. Agradeço pelo companheirismo, por todo o amor, por me ajudar, apoiar quando preciso e por estar ao meu lado sempre.

Por fim, ao meu avô, Airton, que me viu entrando no curso e na faculdade que eu e ele tanto queríamos, mas que infelizmente não pôde me ver terminar. Que este trabalho sirva para que ele tenha orgulho de quem me tornei e do que fiz, por ele. A saudade é eterna.

*“A ciência é uma disposição de aceitar os fatos mesmo quando eles são opostos aos desejos.”  
(Burrhus Frederic Skinner)*

## RESUMO

Este trabalho tem como objetivo explicitar todos os passos que Einstein tomou para que pudesse resolver o problema da precessão do periélio de Mercúrio e encontrar seu desvio orbital (a contribuição que a Relatividade Geral deu para corrigir a abordagem da mecânica Newtoniana). O primeiro passo foi utilizar a Relatividade Especial, numa métrica plana, onde as transformações de Lorentz são válidas, e definir a notação tensorial e suas propriedades. Ao passar para a Relatividade Geral, o problema de dois corpos é abordado, que conseqüentemente trata de um referencial acelerado e outro inercial numa métrica curva, que neste trabalho será adotada a métrica de Schwarzschild. Cálculos são desenvolvidos e considerações feitas para a obtenção das curvas geodésicas para o sistema Sol-Mercúrio a partir das equações de Euler-Lagrange, para que possa obter o desvio orbital e a forma que a órbita de Mercúrio toma com a precessão em sua rotação em torno do Sol. Por fim, foi utilizada a plataforma *MATLAB* para a obtenção da solução numérica do problema e casos foram estudados para sua validação e comparação com a solução analítica obtida.

**PALAVRAS-CHAVE:** Einstein. Precessão. Mercúrio. Relatividade especial. Relatividade geral. Mecânica Newtoniana. Métrica de Schwarzschild. Geodésicas. Desvio orbital. Sol.

## ABSTRACT

This work's objective is to explicit all the steps taken by Einstein so that he could solve the precession of the perihelion of Mercury and find its orbital deflection (the contribution the Special Relativity has given to solve the Newtonian mechanics approach). The first step was to use the Special Relativity, in a plane metric, where the Lorentz Transformations are valid, then define a tensor notation and its properties. While going to the General Relativity, the two body problem approach is made, therefore an accelerated moving reference frame with respect to a steady one are treated in a curve metric, and that will be a Schwarzschild metric approach in this work. Calculations are developed and considerations made to obtain the geodesic curves to the Sun-Mercury system from the Euler-Lagrange equations, so that the orbital deflection can be acquired and the exact shape that Mercury's orbit takes in the precession while rotating around the Sun. Finally, the *MATLAB* platform was used in order to get the numerical solution for the problem, and specific cases were studied to get the validation and a comparison made with the analytical solution.

**KEYWORDS:** Einstein. Precession. Perihelion. Mercury. Special relativity. General relativity. Newtonian mechanics. Schwarzschild metric. Geodesic. Orbital deflection. Sun.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Referencial inercial da Terra, $S(x^\mu)$ e referencial acelerado do corpo em queda livre, $S'(\xi^\mu)$ . . . . .	18
Figura 2	Precessão do periélio de Mercúrio. . . . .	38
Figura 3	Órbita hiperbólica com excentricidade de $e = 1,205$ . . . . .	41
Figura 4	Órbita parabólica com excentricidade de $e = 1$ . . . . .	42
Figura 5	Órbita elíptica com excentricidade de $e = 0,805$ . . . . .	43
Figura 6	Órbita elíptica de Mercúrio com excentricidade de $e = 0,205$ . . . . .	43
Figura 7	Detalhes do desvio do afélio (7a) e do periélio (7b) . . . . .	44
Figura 8	Evolução temporal da função $u(\phi)$ (8a) e erro entre as soluções analítica e numérica (8b). . . . .	45
Figura 9	Elementos da órbita de um planeta. . . . .	48

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados orbitais para a determinação do desvio $\Delta\phi$ . . . . .	38
Tabela 2 – Parâmetros utilizados na simulação. . . . .	40
Tabela 3 – Casos estudados através da solução numérica da EDO (5.33). . . . .	41

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>RELATIVIDADE ESPECIAL</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1	TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ . . . . .	14
2.2	NOTAÇÃO COVARIANTE, CONTRAVARIANTE E MÉTRICA . . . . .	16
2.3	TRANSFORMAÇÕES DE TENSORES . . . . .	17
2.4	PROPRIEDADES TENSORIAIS . . . . .	17
<b>3</b>	<b>RELATIVIDADE GERAL</b> . . . . .	<b>18</b>
3.1	RELAÇÃO ENTRE REFERENCIAIS ACELERADOS . . . . .	18
3.2	CONEXÃO AFIM E TENSOR MÉTRICO . . . . .	20
<b>4</b>	<b>MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD</b> . . . . .	<b>22</b>
4.1	CONEXÃO AFIM . . . . .	22
4.2	TENSOR DE RICCI . . . . .	24
4.3	EQUAÇÃO DE EINSTEIN . . . . .	27
<b>5</b>	<b>PERÍELIO DE MERCÚRIO</b> . . . . .	<b>32</b>
5.1	LAGRANGEANA E GEODÉSICAS . . . . .	32
5.2	SOLUÇÃO DA GEODÉSICA . . . . .	34
5.3	RESULTADOS . . . . .	36
<b>5.3.1</b>	<b>Solução Analítica</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>5.3.2</b>	<b>Solução Numérica</b> . . . . .	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>46</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>47</b>
	<b>APÊNDICE A – LEIS DE KEPLER</b> . . . . .	<b>48</b>
	<b>APÊNDICE B – PROGRAMA MATLAB</b> . . . . .	<b>50</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No início do século XX, um jovem físico alemão chamado Albert Einstein desenvolveu um conjunto de hipóteses com o intuito de generalizar as leis da mecânica da época, fazendo nascer a Relatividade Especial. Um tempo depois ele unifica a Lei de Gravitação Universal de Newton em uma só teoria, que fornece a descrição da gravidade como uma geometria do espaço-tempo, denominada Teoria da Relatividade Geral. Para comprová-la, foram propostos três testes:

- Deflexão de um feixe de luz por um campo gravitacional - Como a massa dos corpos deforma o espaço-tempo próximo a eles, quando um feixe de luz é incidido em sua direção, espera-se que ocorra uma "curvatura da luz", que só poderia ser identificada através de um eclipse total do Sol. Isso foi possível ser comprovado no eclipse de 1919, quando houve a ocultação total do Sol e pode-se ver o brilho das estrelas próximas e sua curvatura;
- Desvio gravitacional da frequência de um feixe de luz imerso num campo gravitacional - Como a frequência é o inverso do tempo, a velocidade que o tempo passa em um relógio é afetada por um campo gravitacional. Isso foi comprovado ao colocar relógio em um avião e no Experimento de Pound-Rebka, ao detectar frequências diferentes no topo e na base de uma torre.
- Precessão do periélio de Mercúrio - Discrepância entre a precessão calculada ao utilizar a mecânica Newtoniana e a precessão observada, de  $43,11'' \pm 0,45''$  por século. Einstein obteve o valor de  $43''$  por século para esse desvio, simplesmente como consequência da Relatividade Geral, sem qualquer hipótese adicional.

Este trabalho se aprofunda na abordagem do terceiro item, que levou muitos anos para ser resolvido.

Em meados do século XIX não se sabia como era o comportamento exato da órbita de Mercúrio, foi notado que o planeta além de girar em torno do Sol, oscilava em sua órbita (denominada precessão do periélio de Mercúrio). Foram levantadas hipóteses que sugeriam a existência de um planeta movendo-se entre o Sol e Mercúrio, referia-se a ele como Vulcano. Não sendo suficiente para explicar esse desvio, o matemático francês Urbain Le Verrier observou em 1860 corpos que transitavam em torno do Sol, que mais tarde seriam denominados asteróides, que segundo ele, quando todas essas massas fossem somadas, resolveria o problema. Mas ainda assim os cálculos não batiam.

Foi só em 1916 que foi publicada uma nova teoria na qual se explicava satisfatoriamente o movimento da órbita de Mercúrio sem a necessidade de asteróides ou um planeta intra-mercuriano: a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, que mostrou que ao contrário da gravitação Newtoniana, a órbita de um planeta não é necessariamente fechada, pois a de Mercúrio não era, isto é, a elipse que compõe a órbita não fica no mesmo lugar o tempo todo e não se

fecha, e mais, o ponto de máxima aproximação ao Sol (periélio) muda de localização. Ao utilizar a gravitação, pode-se obter as equações geodésicas que compõe o problema e finalmente, o valor numérico dessa precessão.

## 2 RELATIVIDADE ESPECIAL

Ao tratar de problemas que envolvem partículas que se deslocam com velocidades próximas à velocidade da luz, as ferramentas desenvolvidas na mecânica de Newton não são apropriadas para descrevê-los. Com o objetivo de completar essa lacuna da mecânica analítica, Einstein desenvolveu uma nova e sólida teoria geral que se baseia em dois postulados:

1º: As leis da Física são as mesmas em qualquer referencial inercial.

2º: A velocidade da luz no vácuo é invariante em todos os sistemas referenciais inerciais.

### 2.1 TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

Para analisar as consequências desses postulados, pode-se utilizar as Leis de Eletrodinâmica (Leis de Maxwell) como uma aplicação fora do escopo relativístico. Essas leis devem ser válidas em qualquer referencial, mas observa-se que sua validação está relacionada a um "referencial privilegiado", isto é, onde a velocidade da luz é a mesma ( $c$ ) em todas as direções. Portanto, pelas Transformações de Galileu (abordada no decorrer deste capítulo e com mais profundidade em NUSSENZVEIG (2014)), mais especificamente pela lei de composição de velocidades, teríamos que a velocidade da luz final seria diferente da inicial, resultado incompatível com o primeiro postulado. Existe então uma necessidade de um novo sistema de referenciais que comporte os dois postulados, descreva a física e satisfaça também as Leis de Maxwell. Isso leva a origem das Transformações de Lorentz.

A partir desses postulados, a teoria da Relatividade Especial introduziu uma interdependência entre o espaço e o tempo, ao determinar um sistema de coordenadas formado pelas três dimensões espaciais mais a dimensão temporal (3+1) no denominado *Espaço-tempo de Minkowski*. Dessa forma, tudo o que foi estudado no Espaço Euclidiado, pode ser retratado nesse novo sistema, na notação quadrivetorial, descrita a seguir:

Um quadrivetor  $x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$  possui as seguintes componentes:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (2.1)$$

A seguir mostramos como fica o quadrivetor por uma transformação de coordenadas na relatividade especial.

Suponha dois referenciais inerciais:  $R$  parado e  $R'$  que se move a uma velocidade  $v$  na direção  $x$ . Para relacionar as coordenadas de um referencial com o outro, serão utilizadas as Transformações de Lorentz que são escritas como:

$$t' = \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (2.2)$$

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (2.3)$$

$$y' = y \quad (2.4)$$

$$z' = z \quad (2.5)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.6)$$

que na notação quadrivetorial, as transformações são representadas por:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}_0 x^0 + \Lambda^{\mu}_1 x^1 + \Lambda^{\mu}_2 x^2 + \Lambda^{\mu}_3 x^3 \quad (2.7)$$

onde  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  são as componentes da matriz de transformação linear  $\Lambda$  responsável pela mudança das coordenadas de um referencial para outro. Os índices  $\nu$  e  $\mu$  variam de 0 a 3, e quando repetidos, como acontece com  $\nu$ , representam uma soma. (O que chamamos de *Notação de Einstein*).

Pode-se construir a matriz  $\Lambda$ , com os componentes  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  para a Transformação de Lorentz por meio de  $\Lambda^{\mu}_{\nu} \equiv \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$  e obtém:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde os coeficientes  $\gamma$  e  $\beta$  são dados por:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (2.8)$$

Os coeficientes são entendidos como a correção que a relatividade obteve para a mecânica Newtoniana, na análise de problemas envolvendo grandezas proporcionais à frações da velocidade da luz. Isso implica que pode-se recuperar o regime clássico ao tomar  $v \lll c$ , assim são obtidas as *Transformações de Galileu*:

$$x' = x - v_x t \quad (2.9)$$

$$y' = y \quad (2.10)$$

$$z' = z \quad (2.11)$$

$$t' = t. \quad (2.12)$$

## 2.2 NOTAÇÃO COVARIANTE, CONTRAVARIANTE E MÉTRICA

A forma de índices dada por  $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$  é denominada **contravariante**. Já a forma dada por  $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$  é dita **covariante**, onde

$$A_0 = A^0 \quad (2.13)$$

$$A_1 = -A^1 \quad (2.14)$$

$$A_2 = -A^2 \quad (2.15)$$

$$A_3 = -A^3 \quad (2.16)$$

A relação entre  $A^\mu$  e  $A_\mu$  pode ser construída introduzindo-se o conceito de *métrica*.

A métrica pode ser definida como a relação dada para determinar a distância entre dois pontos no espaço. Isto é, essa grandeza dependerá do tipo de curvatura que o espaço-tempo está tomando.

É possível definir o tensor métrico  $\mathbf{G}$  no espaço de Minkowski a partir das componentes da métrica  $\eta_{\mu\nu}$ :

$$\mathbf{G} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

onde os elementos de  $\eta_{\mu\nu}$  são constantemente utilizados para o levantamento e abaixamento de índices dos vetores, escritos tanto na forma contravariante, como covariante.

Note que a matriz inversa de  $\mathbf{G}$  é dada por  $\mathbf{G}^{-1}$  definida pelas componentes de  $\eta^{\mu\nu}$  e mais, ao tratar de matrizes simétricas, pode-se concluir que  $\eta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\mu}$  e o mesmo para a forma covariante:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}.$$

Agora, suponha um tensor covariante  $V_\mu$  e um tensor contravariante  $V^\mu$ . Para abaixar e levantar, respectivamente, os seus índices, utiliza-se a métrica como uma matriz de transformação:

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu \quad (2.18)$$

$$V^\mu = \eta^{\mu\nu} V_\nu \quad (2.19)$$

### 2.3 TRANSFORMAÇÕES DE TENSORES

Um tensor de ordem zero é chamado de escalar e possui o mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas.

Um tensor contravariante de primeira ordem é representado por um quadrivetor, e sua transformação para um sistema de coordenadas relacionado pela equação (2.13) é:

$$A^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}. \quad (2.20)$$

onde  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  é a matriz que transforma o tensor  $A^{\mu}$  em  $A^{\nu}$ . Analogamente, um tensor de segunda ordem também representado por um quadrivetor, possui a seguinte transformação:

$$T^{\mu\nu'} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} T^{\alpha\beta}. \quad (2.21)$$

O mesmo é válido para tensores de ordem superior.

### 2.4 PROPRIEDADES TENSORIAIS

1. Suponha um tensor  $A^{\alpha}$ . Ao deriva-lo pelo quadrivetor  $x^{\mu}$  e aplicar a regra da cadeia, o resultado obtido depende do valor da Delta de Kronecker:

$$\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial A^{\alpha}} = \delta^{\nu}_{\mu}. \quad (2.22)$$

2. Seja um tensor métrico  $\eta^{\mu\alpha}$ . A relação entre sua forma contravariante e covariante, é dada por:

$$\eta^{\mu\alpha} \eta_{\nu\alpha} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad (2.23)$$

3. O produto direto das componentes de dois tensores  $A^{\alpha}_{\beta}$  e  $B^{\gamma}$  resulta em outro tensor cujos índices são iguais aos dos tensores originais:

$$T^{\alpha}_{\beta}{}^{\gamma} = A^{\alpha}_{\beta} B^{\gamma}. \quad (2.24)$$

Essas são algumas propriedades importantes utilizadas no decorrer deste trabalho. (SOUZA, 2015) cita essas e outras propriedades tensoriais com maior profundidade.

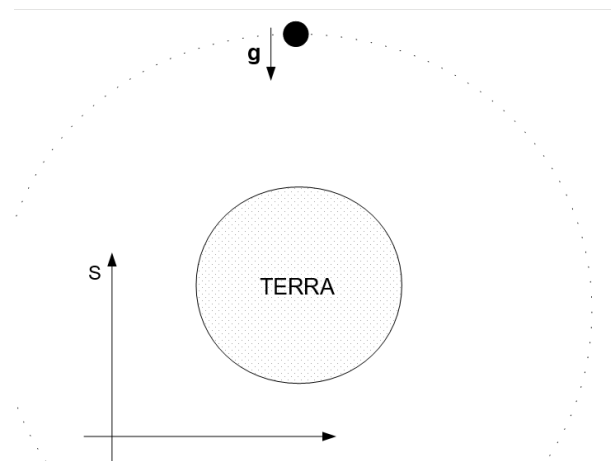
### 3 RELATIVIDADE GERAL

O capítulo anterior trata de toda uma mecânica baseada em referenciais inerciais, isto é, referenciais que estão em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação a um sistema inercial. O próximo passo é considerar referenciais acelerados e a formulação matemática que os descrevem e introduzir grandezas como a métrica e conexão afim nesse novo sistema.

#### 3.1 RELAÇÃO ENTRE REFERENCIAIS ACELERADOS

O sistema se apresenta em dois referenciais:  $x^\mu$  e  $\xi^\mu$ , onde  $\xi^\mu$  possui uma aceleração  $\vec{a}$  com respeito a  $x^\mu$ .

Figura 1 – Referencial inercial da Terra, S ( $x^\mu$ ) e referencial acelerado do corpo em queda livre, S' ( $\xi^\mu$ ).



Fonte: Produção do próprio autor.

Suponha então que a Terra esteja em  $x^\mu$  (sistema S) e um corpo em queda livre, em S', representado por  $\xi^\mu$ . Somente o efeito da força gravitacional que atua nesse sistema, portanto, utiliza-se a 2ª Lei de Newton no referencial  $\xi^\mu$ :

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (3.1)$$

onde  $d\tau$  é o tempo próprio do sistema, em outras palavras, o intervalo de tempo no referencial de repouso de um evento.

Ao relacionar o sistema em queda livre com o sistema  $x^\mu$  pode-se reescrever a equação (3.1) como:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0, \quad (3.2)$$

utiliza-se a regra da cadeia, da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial \tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0. \quad (3.3)$$

Escreve-se  $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tau} = \frac{d\xi^\alpha}{dx^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}$  no segundo termo:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (3.4)$$

Agora, toda a equação (3.4) é multiplicada por  $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ :

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (3.5)$$

utiliza-se a propriedade tensorial (2.22) (seção 2.4) e chega no seguinte resultado:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (3.6)$$

onde  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$  é definido por

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}. \quad (3.7)$$

Essa é a equação de movimento da partícula no referencial  $x^\mu$ . Dela pode-se definir a geodésica que uma partícula descreve quando orbita um corpo no espaço, que será feito neste trabalho.

O tensor  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$  é o elemento que estabelece a relação entre o evento que ocorre no referencial acelerado ( $\xi^\mu$ ) com o observador no referencial em repouso ( $x^\mu$ ). Essa grandeza é denominada **conexão afim**, e é extremamente importante na definição do tensor de Ricci para a construção da equação de Einstein.

Foi definida a forma que a conexão afim se apresenta, o próximo passo é relacioná-la a uma métrica  $g_{\mu\nu}$ , que neste momento está sendo arbitrária. Para que isso aconteça, deve-se olhar o tempo próprio

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.8)$$

que deve ser redefinido em termos do sistema arbitrário  $x^\mu$  como:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (3.9)$$

com  $g_{\mu\nu}$  definido por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (3.10)$$

onde é introduzida a métrica  $g_{\alpha\beta}$  arbitrária, em função de  $\eta_{\mu\nu}$  que é o tensor métrico do sistema,

o mesmo que foi introduzido no t3pico 2.2, mais especificamente com a matriz (2.17). Nesse contexto, a m3trica possui um significado mais f3sico, isto 3, depender3 da geometria que o problema 3 proposto, que pode ser plana, esf3rica, etc.

### 3.2 CONEX3O AFIM E TENSOR M3TRICO

O pr3ximo passo 3 obter uma rela3o direta entre a conex3o afim e o tensor m3trico, portanto, deriva-se o tensor m3trico em rela3o a  $x^\lambda$  e utiliza-se a equa3o obtida em (3.10)

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \right) \right], \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \left[ \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right]. \quad (3.12)$$

Lembre-se que a conex3o afim 3 definida pela equa3o (3.7):

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho_{\lambda\mu} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho_{\lambda\nu} = \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}. \quad (3.14)$$

O 3ndice  $\lambda$  da conex3o afim foi trocado por  $\rho$  por n3o possuir rela3o com coordenadas que o problema proporciona e por ser 3ndice mudo.

Ao substituir (3.13) e (3.14) em (3.12):

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \eta_{\alpha\beta} \left[ \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right]. \quad (3.15)$$

A equa3o anterior pode ser reescrita ao utilizar a defini3o da m3trica da equa3o (3.10):

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}. \quad (3.16)$$

Agora, some (3.16) com  $\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu}$ :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} g_{\rho\lambda}, \quad (3.17)$$

e subtraia  $\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}$ :

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu} g_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\mu} g_{\rho\mu}, \quad (3.18)$$

e sobram apenas

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu}. \quad (3.19)$$

Podem-se anular os termos da equação (3.18) pois  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ , ou seja, é simétrico nos índices  $\mu, \nu$ .

Dessa maneira,  $\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}$  pode ser isolado na equação (3.19), que é reescrita como:

$$\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right]. \quad (3.20)$$

Ao olhar novamente para as equações (3.1) e (3.6), percebe-se que um evento que ocorre num referencial acelerado, pode ser relacionado a um referencial inercial por uma conexão afim, que por sua vez pode ser descrita por uma métrica.

Foi feito neste capítulo a descrição de um evento de duas maneiras diferentes: uma no referencial de repouso e outro no referencial acelerado. A relação entre as duas permite definir a conexão afim  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ , que não depende dos detalhes dos referenciais e sim apenas da geometria que o sistema apresenta.

Portanto, o próximo passo é definir uma métrica para  $g^{\rho\nu}$  para a obtenção das componentes que a conexão afim deve possuir ( $\Gamma^0_{00}, \Gamma^1_{00}$ , etc). Neste trabalho utiliza-se a métrica de Schwarzschild que é aplicável a buracos negros e sistemas com distribuição de massa esféricamente simétricas.

## 4 MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Este capítulo introduz conceitos fundamentais para o desenvolvimento de cálculos para a relação da conexão afim e da métrica que foi apresentada no capítulo anterior. Trata-se da geometria de um corpo que descreve uma trajetória em torno de um corpo massivo, um planeta em torno do sol, por exemplo. De agora em diante precisa-se de uma métrica bem definida, que seja estacionária (não dependa do tempo) e isotrópica em um espaço curvo, isto é, supor um universo idêntico em qualquer direção. Foi utilizado o livro de HOBSON e col. (2006) para a definição de conceitos como Conexão Afim e Tensor de Ricci, abordados neste trabalho.

### 4.1 CONEXÃO AFIM

O objetivo aqui é obter as componentes da conexão afim, dada uma métrica. Para definir o tipo de métrica que satisfaça esse problema, utiliza-se o conceito de deslocamento entre dois eventos no espaço-tempo da Relatividade Especial. Esse intervalo no espaço-tempo plano pode ser escrito como

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (4.1)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz e a métrica  $\eta_{\mu\nu}$  é dada pelos coeficientes desses parâmetros de tempo e espaço  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  e pode ser expressa na forma matricial como na matriz (2.17). Ao tratar de um espaço curvo, esse intervalo será redefinido em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.2)$$

onde  $A(r)$  e  $B(r)$  são parâmetros que dependem do raio  $r$ . É necessário saber que a componente temporal não é necessária para o desenvolvimento deste trabalho, pois não altera os resultados dos cálculos realizados, seria relevante somente se o objetivo fosse calcular a diferença de tempo (horas, minutos, segundos) entre duas órbitas, por exemplo.

Portanto, pode-se escrever  $g_{\rho\nu}$  com a seguinte notação matricial:

$$g_{\rho\nu} = \begin{pmatrix} B(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

as componentes de  $g_{\rho\nu}$  quando  $\rho \neq \nu$  são iguais a zero e assim, as não nulas são as seguintes:

$$g_{00} = B(r); \quad (4.4)$$

$$g_{11} = -A(r); \quad (4.5)$$

$$g_{22} = -r^2; \quad (4.6)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta. \quad (4.7)$$

Mas, com a propriedade tensorial (2.23) as componentes não nulas de  $g^{\rho\nu}$  são:

$$g^{00} = \frac{1}{B(r)}; \quad (4.8)$$

$$g^{11} = -\frac{1}{A(r)}; \quad (4.9)$$

$$g^{22} = -\frac{1}{r^2}; \quad (4.10)$$

$$g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.11)$$

Definidas as componentes do tensor métrico, pode-se retomar à relação (3.20) ao utilizar a notação  $\partial_{\kappa} = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}$ .

Ao abrir as somatórias de (3.20) os elementos da conexão afim são definidas por:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = \frac{1}{2} \frac{1}{B(r)} \partial_t B(r) = 0 \quad (4.12)$$

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_0 g_{10} + \partial_1 g_{00} - \partial_0 g_{01}) = \frac{1}{2} \frac{1}{B(r)} \frac{\partial B(r)}{\partial r} = \frac{B'(r)}{2B(r)} \quad (4.13)$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2} g^{00} (\partial_1 g_{00} + \partial_0 g_{10} - \partial_0 g_{10}) = \frac{1}{2} \frac{1}{B(r)} \frac{\partial B(r)}{\partial r} = \frac{B'(r)}{2B(r)} \quad (4.14)$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{01} + \partial_0 g_{01} - \partial_1 g_{00}) = \frac{1}{2} \frac{1}{A(r)} \frac{\partial B(r)}{\partial r} = \frac{B'(r)}{2A(r)} \quad (4.15)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2} \frac{1}{A(r)} \frac{\partial A(r)}{\partial r} = \frac{A'(r)}{2A(r)} \quad (4.16)$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{22} + \partial_2 g_{12} - \partial_2 g_{12}) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2)}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad (4.17)$$

$$\Gamma^2_{21} = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_2 g_{12} + \partial_1 g_{22} - \partial_2 g_{21}) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2)}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad (4.18)$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{21} + \partial_2g_{21} - \partial_1g_{22}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{A(r)} \frac{\partial(r^2)}{\partial r} = -\frac{r}{A(r)} \quad (4.19)$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_1g_{33} + \partial_3g_{13} - \partial_3g_{13}) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial(r^2 \sin^2 \theta)}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad (4.20)$$

$$\Gamma^3_{31} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3g_{13} + \partial_1g_{33} - \partial_3g_{31}) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial(r^2 \sin^2 \theta)}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad (4.21)$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{31} + \partial_3g_{31} - \partial_1g_{33}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{A(r)} \frac{\partial(r^2 \sin^2 \theta)}{\partial r} = -\frac{r \sin^2 \theta}{A(r)} \quad (4.22)$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_2g_{33} + \partial_3g_{23} - \partial_3g_{23}) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial(r^2 \sin^2 \theta)}{\partial \theta} = \frac{2r^2 \sin \theta \cos \theta}{2r^2 \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (4.23)$$

$$\Gamma^3_{32} = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3g_{23} + \partial_2g_{33} - \partial_3g_{32}) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial(r^2 \sin^2 \theta)}{\partial \theta} = \frac{2r^2 \sin \theta \cos \theta}{2r^2 \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (4.24)$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{32} + \partial_3g_{32} - \partial_2g_{33}) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \sin^2 \theta)}{\partial \theta} = -\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2} = -\sin \theta \cos \theta. \quad (4.25)$$

Dessa forma, das 40 componentes, apenas 13 são não nulas. Com os  $\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}$  determinados, pode-se construir o **Tensor de Ricci (R)** para determinar as equações de movimento do sistema proposto.

## 4.2 TENSOR DE RICCI

O Tensor de Ricci, pode ser representado na forma matricial e é definido pela relação:

$$R_{\lambda\mu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} - \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\nu}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\rho}. \quad (4.26)$$

Elementos que não são da diagonal principal, isto é,  $\lambda \neq \mu$  são nulas. As componentes não nulas são, portanto:  $R_{00}$ ,  $R_{11}$ ,  $R_{22}$ ,  $R_{33}$ . A componente  $R_{00}$  é dada por:

$$R_{00} = \partial_0\Gamma^{\rho}_{0\rho} - \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{00} + \Gamma^{\nu}_{0\rho}\Gamma^{\rho}_{\nu 0} - \Gamma^{\nu}_{00}\Gamma^{\rho}_{\nu\rho}, \quad (4.27)$$

onde o primeiro termo é zero para qualquer valor de  $\nu$ , os elementos da soma em  $\nu$  dos demais termos devem ser analisados. Dessa forma,  $R_{00}$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\partial_\rho \Gamma^{\rho}_{00} \\
&+ \Gamma^0_{0\rho} \Gamma^{\rho}_{00} + \Gamma^1_{0\rho} \Gamma^{\rho}_{10} + \Gamma^2_{0\rho} \Gamma^{\rho}_{20} + \Gamma^3_{0\rho} \Gamma^{\rho}_{30} \\
&- \Gamma^0_{00} \Gamma^{\rho}_{0\rho} - \Gamma^1_{00} \Gamma^{\rho}_{1\rho} - \Gamma^2_{00} \Gamma^{\rho}_{2\rho} - \Gamma^3_{00} \Gamma^{\rho}_{3\rho}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\partial_1 \Gamma^1_{00} \\
&+ \Gamma^0_{01} \Gamma^1_{00} + \Gamma^1_{00} \Gamma^0_{10} \\
&- \Gamma^1_{00} \Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{00} \Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{00} \Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{00} \Gamma^3_{13}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\partial_1 \Gamma^1_{00} + \Gamma^0_{01} \Gamma^1_{00} - \Gamma^1_{00} \Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{00} \Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{00} \Gamma^3_{13} \\
&= -\partial_r \left( \frac{B'}{2A} \right) + \frac{B'}{2B} \frac{B'}{2A} - \frac{B'}{2A} \frac{A'}{2A} - \frac{B'}{2A} \frac{1}{r} - \frac{B'}{2A} \frac{1}{r} \\
&= -\partial_r \left( \frac{B'}{2A} \right) + \frac{B'^2}{4AB} - \frac{A'B'}{4A^2} - \frac{B'}{Ar} \\
&= \frac{2A'B'}{4A^2} - \frac{B''}{2A} + \frac{B'^2}{4AB} - \frac{A'B'}{4A^2} - \frac{B'}{Ar}
\end{aligned}$$

portanto:

$$\boxed{R_{00} = \frac{A'B'}{4A^2} - \frac{B''}{2A} + \frac{B'^2}{4AB} - \frac{B'}{Ar}}. \tag{4.30}$$

Utiliza-se o mesmo procedimento para  $R_{11}$ :

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_1 \Gamma^{\rho}_{1\rho} - \partial_\rho \Gamma^{\rho}_{11} + \Gamma^{\nu}_{1\rho} \Gamma^{\rho}_{\nu 1} - \Gamma^{\nu}_{11} \Gamma^{\rho}_{\nu\rho} \\
&= \partial_1 \Gamma^0_{10} + \partial_1 \Gamma^1_{11} + \partial_1 \Gamma^2_{12} + \partial_1 \Gamma^3_{13} - \partial_1 \Gamma^1_{11} \\
&+ \Gamma^0_{1\rho} \Gamma^{\rho}_{01} + \Gamma^1_{1\rho} \Gamma^{\rho}_{11} + \Gamma^2_{1\rho} \Gamma^{\rho}_{21} + \Gamma^3_{1\rho} \Gamma^{\rho}_{31} \\
&- \Gamma^0_{11} \Gamma^{\rho}_{0\rho} - \Gamma^1_{11} \Gamma^{\rho}_{1\rho} ,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

ao abrir a soma em  $\rho$  dos tensores, eliminar os termos cruzados e zerar  $\Gamma^0_{11} \Gamma^{\rho}_{0\rho}$ , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_1 \Gamma^0_{10} + \partial_1 \Gamma^1_{11} + \partial_1 \Gamma^2_{12} + \partial_1 \Gamma^3_{13} - \partial_1 \Gamma^1_{11} \\
&+ \Gamma^0_{10} \Gamma^0_{01} + \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} \Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13} \Gamma^3_{31} \\
&- \Gamma^1_{11} \Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{11} \Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{11} \Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11} \Gamma^3_{13}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_r \left( \frac{B'}{2B} \right) - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{B'^2}{(2B)^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{A' B'}{2A 2A} - \frac{A' B'}{2A 2B} - \frac{A' 1}{2A r} - \frac{A' 1}{2A r} \\
&= -\frac{B'}{2B^2} B' + \frac{B''}{2B} + \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A' B'}{4AB} - \frac{A'}{rA} \\
&= \frac{B''}{2B} - \frac{2B'^2}{4B^2} + \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A' B'}{4AB} - \frac{A'}{rA}
\end{aligned}$$

portanto:

$$\boxed{R_{11} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A' B'}{4AB} - \frac{A'}{rA}}. \quad (4.33)$$

Obtêm-se  $R_{22}$ , analogamente por:

$$R_{22} = \partial_2 \Gamma_{2\rho}^\rho - \partial_\rho \Gamma_{22}^\rho + \Gamma_{2\rho}^\nu \Gamma_{\nu 2}^\rho - \Gamma_{22}^\nu \Gamma_{\nu\rho}^\rho, \quad (4.34)$$

pode ser analisado quais são as componentes não nulas deste tensor, a partir das conexões afim não nulas que envolvem os índices 2 (equações 4.17 a 4.19 e 4.23 a 4.25) em suas devidas posições na somatória acima, dessa forma:

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_2 \Gamma_{23}^3 \\
&+ \Gamma_{2\rho}^1 \Gamma_{12}^\rho + \Gamma_{2\rho}^2 \Gamma_{22}^\rho + \Gamma_{2\rho}^3 \Gamma_{32}^\rho - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1\rho}^\rho
\end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_2 \Gamma_{23}^3 - \partial_1 \Gamma_{22}^1 \\
&+ \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\
&- \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3
\end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
R_{22} &= \partial_\theta \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - \partial_r \left( \frac{-r}{A} \right) + \frac{1}{r} \frac{(-r)}{A} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{r B'}{A 2B} + \frac{r A'}{A 2A} + \frac{r 1}{A r} \\
&= -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\sin \theta} - \frac{2r}{2A^2} A' + \frac{1}{A} - \frac{1}{A} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{r B'}{2AB} + \frac{r A'}{2A^2} + \frac{1}{A}
\end{aligned}$$

portanto:

$$\boxed{R_{22} = -1 - \frac{r A'}{2A^2} + \frac{r B'}{2AB} + \frac{1}{A}}. \quad (4.37)$$

Por último, para  $R_{33}$

$$R_{33} = \partial_3 \Gamma_{3\rho}^\rho - \partial_\rho \Gamma_{33}^\rho + \Gamma_{3\rho}^\nu \Gamma_{\nu 3}^\rho - \Gamma_{33}^\nu \Gamma_{\nu\rho}^\rho, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= -\partial_1 \Gamma^1_{33} - \partial_2 \Gamma^2_{33} \\
&\quad + \Gamma^1_{3\rho} \Gamma^\rho_{13} + \Gamma^2_{3\rho} \Gamma^\rho_{23} + \Gamma^3_{3\rho} \Gamma^\rho_{33} \\
&\quad - \Gamma^1_{33} \Gamma^\rho_{1\rho} - \Gamma^2_{33} \Gamma^\rho_{2\rho}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
R_{33} &= -\partial_1 \Gamma^1_{33} - \partial_2 \Gamma^2_{33} \\
&\quad + \Gamma^1_{33} \Gamma^3_{13} + \Gamma^2_{33} \Gamma^3_{23} + \Gamma^3_{31} \Gamma^1_{33} + \Gamma^3_{32} \Gamma^2_{33} \\
&\quad - \Gamma^1_{33} \Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{33} \Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{33} \Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{33} \Gamma^3_{13} - \Gamma^2_{33} \Gamma^3_{23}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

os termos cruzados são eliminados, assim:

$$\begin{aligned}
R_{33} &= -\partial_r \left( -\frac{r \sin^2 \theta}{A} \right) - \partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) - \frac{1}{r} \frac{r \sin^2 \theta}{A} + \frac{r \sin^2 \theta}{A} \frac{B'}{2B} \\
&\quad + \frac{r \sin^2 \theta}{A} \frac{A'}{2A} + \frac{r \sin^2 \theta}{A} \frac{1}{r} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin \theta \cos \theta \\
&= -\frac{2r \sin^2 \theta}{2A^2} A' + \frac{\sin^2 \theta}{A} - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{A} \\
&\quad + \frac{r \sin^2 \theta B'}{2AB} + \frac{r \sin^2 \theta A'}{2A^2} + \frac{\sin^2 \theta}{A} - \cos^2 \theta \\
&= -\frac{r \sin^2 \theta A'}{2A^2} + \frac{\sin^2 \theta}{A} - \sin^2 \theta + \frac{r \sin^2 \theta B'}{2AB} \\
&= \sin^2 \theta \left[ -\frac{rA'}{2A^2} + \frac{1}{A} - 1 + \frac{rB'}{2AB} \right]
\end{aligned}$$

mas a equação (4.37) é justamente o termo em colchete ( $R_{22} = \left[ -\frac{rA'}{2A^2} + \frac{1}{A} - 1 + \frac{rB'}{2AB} \right]$ ), portanto  $R_{33}$  é definido em função de  $R_{22}$ :

$$\boxed{R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}}. \tag{4.41}$$

Com todos os tensores de Ricci definidos, pode-se finalmente escrever a equação de Einstein, para a obtenção das equações de movimento do sistema.

### 4.3 EQUAÇÃO DE EINSTEIN

É possível obter a equação de Einstein a partir do Princípio da Mínima Ação. É utilizada a integração do tensor que define a curvatura do espaço-tempo, isto é, o Tensor de Riemann e da métrica. Todas as deduções são feitas em KOCH (2017). A partir dessa equação será definida uma condição fundamental para a resolução do problema proposto. A equação de Einstein na

Relatividade Geral é dada por:

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}g_{\lambda\mu}R = 8\pi GT_{\lambda\mu}, \quad (4.42)$$

onde o lado esquerdo da equação representa a curvatura do espaço tempo e o lado direito contém a matéria-energia do sistema em questão.

A equação é descrita pela constante gravitacional  $G$ , pelo Tensor de Ricci  $R_{\lambda\mu}$ , já calculado anteriormente, pelo chamado tensor de energia-momento  $T_{\lambda\mu}$ , que descreve toda a matéria e energia existente no sistema, e  $R$  denominado Escalar de Ricci.

Para obter  $R$ , é necessário uma contração do Tensor de Ricci e utiliza-se o tensor métrico  $g^{\lambda\mu}$  como demonstrado a seguir:

$$R_{\lambda\mu}g^{\lambda\mu} \equiv R. \quad (4.43)$$

Solucionar a equação de Einstein significa obter um tipo de curvatura do espaço-tempo, isto é, uma métrica  $g_{\lambda\mu}$  que satisfaça a equação (4.42). Neste trabalho, utiliza-se a solução de Schwazschild, no vácuo.

Para o caso de um planeta que orbita o Sol em uma região livre de matéria, o tensor de energia-momento  $T_{\lambda\mu} = 0$ , portanto, a equação de Einstein a ser resolvida é:

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}g_{\lambda\mu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.44)$$

O tensor de Ricci pode ser escrito como:

$$g^{\alpha}_{\lambda}g^{\beta}_{\mu}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\lambda\mu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.45)$$

ao colocar  $R_{\alpha\beta}$  em evidência, se obtém:

$$R_{\alpha\beta} \left( g^{\alpha}_{\lambda}g^{\beta}_{\mu} - \frac{1}{2}g_{\lambda\mu}g^{\alpha\beta} \right) = 0. \quad (4.46)$$

o termo em parênteses igual a zero não possui nenhum significado físico interessante para este trabalho, já que o tensor de energia-momento é nulo, dessa forma, para a obtenção das equações de movimento do sistema é feito:

$$R_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.47)$$

isso significa que todas as componentes do tensor de Ricci valem zero.

Ao retomar às componentes, verifica-se a existência de um sistema de quatro equações e duas incógnitas ( $A$  e  $B$ ):

$$R_{00} = \frac{A'B'}{4A^2} - \frac{B''}{2A} + \frac{B'^2}{4AB} - \frac{B'}{Ar} = 0, \quad (4.48)$$

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{A'}{rA} = 0, \quad (4.49)$$

$$R_{22} = -1 - \frac{rA'}{2A^2} + \frac{rB'}{2AB} + \frac{1}{A} = 0, \quad (4.50)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} = 0. \quad (4.51)$$

Para defini-las, basta multiplicar (4.48) e (4.49) por  $\frac{B}{A}$  e somá-las:

$$\begin{aligned} & -\frac{B''B}{2A^2} + \frac{B'B}{4A^2} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'B}{A^2r} + \frac{B''B}{2AB} - \frac{B'B}{4AB} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'B}{A^2r} = 0 \\ & -\frac{B''B}{2A} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \frac{B'B}{4A} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) - \frac{B}{A^2r} (A' - B') = 0 \\ & \left[ -\frac{B''B}{2A} \left( \frac{AB}{A'B+AB'} \right) + \frac{B'B}{4A} \right] \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \left( \frac{A'B+AB'}{AB} \right) - \frac{B}{A^2r} AB \left( \frac{A'B+AB'}{AB} \right) = 0 \\ & \left[ -\frac{B''B}{2A} \left( \frac{AB}{A'B+AB'} \right) + \frac{B'B}{4A} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) - \frac{B^2}{Ar} \right] \left( \frac{A'B+AB'}{AB} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ao igualar o termo em parênteses a zero, encontra-se a relação de  $A$  e  $B$ :

$$A'B + AB' = 0, \quad (4.53)$$

para que seja satisfeita,  $AB = \text{constante} = \alpha$ .

Dessa forma, substitua  $A = \frac{\alpha}{B}$ , em  $R_{22}$  (dada pela equação (4.50)):

$$R_{22} = \frac{B}{\alpha} - 1 + \frac{rB}{2\alpha} \left( \frac{B'}{B} + \frac{\alpha}{B^2} B' \frac{B}{\alpha} \right) = 0 \quad (4.54)$$

$$\frac{B}{\alpha} - 1 + \frac{rB}{2\alpha} \frac{2B'}{B} = 0 \quad (4.55)$$

$$\frac{B}{\alpha} + \frac{rB'}{\alpha} - 1 = 0 \quad (4.56)$$

$$B + rB' = \alpha \quad (4.57)$$

a equação acima é justamente a regra da derivada do produto de  $(rB)$  e pode-se utilizar a integração para a obtenção da constante  $B$ :

$$\int \frac{d(rB)}{dr} dr = \int \alpha dr \quad (4.58)$$

$$rB = \alpha(r+k) \quad (4.59)$$

onde  $k$  é uma constante resultante da integração realizada. Ao isolar  $B$ , tem-se que:

$$B(r) = \alpha \left( 1 + \frac{k}{r} \right) \quad (4.60)$$

e como  $A = \frac{\alpha}{B}$ ,

$$A(r) = \frac{\alpha}{\alpha \left( 1 + \frac{k}{r} \right)} = \left( 1 + \frac{k}{r} \right)^{-1}. \quad (4.61)$$

Podem-se adotar valores específicos para as constantes  $k$ ,  $\alpha$  e introduzir a função  $\Phi$  que depende do raio  $r$ ,

$$\boxed{\alpha = c^2} \quad (4.62)$$

$$\boxed{k = -\frac{2GM}{c^2}} \quad (4.63)$$

$$\boxed{\Phi = -\frac{GM}{r}} \quad (4.64)$$

$k$  representa a massa do corpo que está produzindo o campo gravitacional,  $c$  a velocidade da luz,  $M$  a massa do corpo em questão e  $\Phi$  define o potencial gravitacional em  $B$  originado da parte temporal da equação da geodésica  $ds^2$  (equação 4.2).

Dessa forma, pode-se reescrever  $A(r)$  e  $B(r)$

$$A(r) = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \quad (4.65)$$

$$B(r) = c^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \quad (4.66)$$

e conseqüentemente, a métrica é definida por

$$\boxed{ds^2 = c^2 \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2} \quad (4.67)$$

por fim, o tensor métrico  $g_{\rho\nu}$  pode escrito na forma matricial, ao substituir as constantes obtidas

na matriz (4.3):

$$g_{\rho\nu} = \begin{pmatrix} c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Dada essa métrica, o próximo passo é calcular o desvio do periélio de Mercúrio, para isso, precisa-se obter as equações de movimento (que são as geodésicas do sistema) através do conceito da Lagrangeana. Esses temas são abordados com maior profundidade no próximo capítulo.

## 5 PERIÉLIO DE MERCÚRIO

### 5.1 LAGRANGEANA E GEODÉSICAS

Definida a métrica, o próximo passo é obter as geodésicas do sistema, para isso, utiliza-se a lagrangeana e as equações de Euler-Lagrange como será visto neste capítulo.

A Lagrangeana de um corpo girando em torno de uma estrutura física esférica e massiva é definida na mecânica clássica por:

$$L = \frac{1}{2}M\vec{v}^2 - V(\vec{r}) \quad (5.1)$$

onde  $M$  é a massa da partícula,  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula e  $V$  é o potencial do sistema.

É utilizada essa mesma forma de lagrangeana na relatividade geral, porém, pode ser simplificada ao considerar uma partícula livre, isto é,  $V = 0$ . Portanto, a lagrangeana é reescrita como:

$$L = g_{\rho\nu}\dot{x}^\rho\dot{x}^\nu \quad (5.2)$$

com

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}, \quad (5.3)$$

onde  $\sigma$  representa um parâmetro ao longo da geodésica e a constante  $(1/2)$  da equação (5.1) é desconsiderada por não influenciar na obtenção das equações de movimento (através da equação de Euler-Lagrange). No caso de  $\sigma$  representar o tempo físico  $t$ ,

$$\frac{dt}{d\sigma} = 1. \quad (5.4)$$

O próximo passo é abrir as somatórias da Lagrangeana e substituir os termos:

$$L = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad (5.5)$$

é possível determinar as equações de movimento (geodésicas) a partir da aplicação das equações de Euler-Lagrange, como dito anteriormente, para cada componente  $(t, r, \theta, \phi)$ .

Para a componente temporal, têm-se:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (5.6)$$

Então,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = 2c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (5.8)$$

onde  $\mu = \frac{GM}{c^2}$ ,

$$\frac{d}{d\sigma} \left( 2c^2 \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right) \dot{t} \right) = 0 \quad (5.9)$$

obtêm-se então a equação geodésica final para a componente temporal:

$$\boxed{\left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right) \dot{t} = K = \text{constante}}. \quad (5.10)$$

A geodésica para a parte radial é definida pelo mesmo procedimento das equações de Euler-Lagrange e é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = -2 \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-1} \dot{r} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = c^2 \left( \frac{2\mu}{r^2} \right) \dot{t}^2 - \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-2} \frac{2\mu}{r^2} \dot{r}^2 - 2r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \quad (5.12)$$

a geodésica é definida então a partir da seguinte equação:

$$\frac{d}{d\sigma} \left( -2 \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-1} \dot{r} \right) - c^2 \left( \frac{2\mu}{r^2} \right) \dot{t}^2 + \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-2} \frac{2\mu}{r^2} \dot{r}^2 + 2r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = 0. \quad (5.13)$$

Sabe-se que é possível decompor a derivada de  $\dot{r}$  com relação a  $\sigma$  através das relações (5.3) e (5.4):

$$\frac{d\dot{r}}{d\sigma} = \frac{d\dot{r}}{dt} \frac{dt}{d\sigma} = \ddot{r}. \quad (5.14)$$

Portanto:

$$\boxed{\left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-1} \ddot{r} + \frac{c^2 \mu}{r^2} \dot{t}^2 + \left( 1 - \frac{2\mu}{r} \right)^{-2} \frac{\mu \dot{r}^2}{r^2} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = 0}. \quad (5.15)$$

Para as componentes angulares  $\theta$  e  $\phi$  têm-se:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -2r^2 \dot{\theta}, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = -2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}, \quad (5.17)$$

que ao ser substituído na equação de Euler-Lagrange, gera o resultado de:

$$-4r \frac{dr}{d\sigma} \dot{\theta} - 2r^2 \frac{d\dot{\theta}}{d\sigma} + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (5.18)$$

novamente, ao utilizar as relações (5.3) e (5.4)

$$\frac{d\dot{\theta}}{d\sigma} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \frac{dt}{d\sigma} = \ddot{\theta} \frac{dt}{d\sigma} = \ddot{\theta}, \quad (5.19)$$

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\sigma} = \dot{r} \frac{dt}{d\sigma} = \dot{r}, \quad (5.20)$$

ao substituir os valores acima na equação (5.18) e dividir por  $(-2r^2)$ , obtêm-se a equação geodésica para a componente  $\theta$ :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 = 0. \quad (5.21)$$

Finalmente, para a componente angular  $\phi$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (5.23)$$

portanto,

$$\frac{d}{d\sigma}(r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0 \quad (5.24)$$

análogo à componente temporal, a equação acima implica que a geodésica em  $\phi$  é definida por:

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = h = \text{constante}. \quad (5.25)$$

## 5.2 SOLUÇÃO DA GEODÉSICA

Na seção anterior foram definidas as geodésicas de um sistema composto por dois corpos, sendo um massivo e o outro acelerado. São utilizadas as hipóteses já descritas no início deste capítulo e outras acrescentadas para a análise do periélio de Mercúrio:

1. Métrica de geometria esférica;
2. Métrica estacionária;
3. O problema proposto se ambienta em um meio isotrópico;
4. Todos os cálculos serão feitos considerando o vácuo;
5. O foco do sistema está no plano equatorial do objeto massivo, que neste caso é o sol e o segundo corpo, o planeta Mercúrio, orbitando-o.

A partir das quatro geodésicas obtidas anteriormente,

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) \dot{t} = K = \text{constante} \quad (5.26)$$

$$\left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} \ddot{r} + \frac{c^2 \mu}{r^2} \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-2} \frac{\mu \dot{r}^2}{r^2} - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = 0 \quad (5.27)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (5.28)$$

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = h = \text{constante} \quad (5.29)$$

é possível utilizar as hipóteses citadas para modelar as equações geodésicas para que ela descreva a órbita que Mercúrio faz em torno do sol.

A hipótese 5 garante que o ângulo a ser avaliado no problema é  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , dessa forma, a equação (5.29) fica

$$h = r^2 \dot{\phi}^2. \quad (5.30)$$

Para modelar e reescrever a geodésica para a parte radial do problema de uma maneira mais simples, é feita uma integração em (5.27) na variável  $r$ , para que depois seja aplicada as condições e substituídas as constantes. Portanto:

$$\boxed{\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{2GM}{r} = c^2(K^2 - 1)}. \quad (5.31)$$

O próximo passo é realizar uma mudança de variáveis para tentar facilitar a resolução e tomar  $K = 1$ .

Seja

$$u = \frac{1}{r}, \quad (5.32)$$

a união de todas as condições e a combinação das componentes  $(t, r, \theta$  e  $\phi)$  da geodésica rearranjada resulta na chamada *Equação de Schwarzschild*:

$$\boxed{\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2}. \quad (5.33)$$

Essa equação, sendo não linear, dificulta sua resolução. Neste momento, será utilizada a solução analítica aproximada proveniente do livro de FIGUEIREDO e col. (1997) e o software *MATLAB* para a validação da resolução da equação diferencial não linear acima e análise de resultados.

### 5.3 RESULTADOS

#### 5.3.1 Solução Analítica

A solução analítica será obtida através de aproximações:

1. A primeira aproximação é tomar

$$\frac{3GM}{c^2} = 0, \quad (5.34)$$

obtendo a solução Newtoniana do problema:

$$u(\phi) = \frac{GM}{h^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0)] \quad (5.35)$$

onde  $e$  é a excentricidade da órbita, isto é:

Se  $e < 1$ , a órbita é elíptica ;

Se  $e = 1$ , a órbita é parabólica ;

Se  $e > 1$ , a órbita é hiperbólica;

e  $\phi_0$  é uma constante de integração, que pode ser obtida em termos da distância Sol-Mercúrio.

2. A segunda aproximação é obtida através da substituição de  $u(\phi)$  (equação 5.35) na equação diferencial não linear a ser resolvida (equação 5.33):

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3(GM)^3}{c^2h^4} [1 + e \cos(\phi - \phi_0)]^2. \quad (5.36)$$

Sabe-se que a solução da equação acima sem a fração  $\frac{GM}{h^2}$  é:

$$u(\phi) = \frac{3(GM)^3}{c^2h^4} \left[ \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) + e\phi \sin(\phi - \phi_0) - \frac{1}{6}e^2 \cos(2(\phi - \phi_0)) \right]. \quad (5.37)$$

mas, o primeiro termo  $1 + \frac{e^2}{2}$  representa apenas uma translação de  $u$  na equação, e seu efeito é bem pequeno. O terceiro termo  $\frac{1}{6}e^2 \cos(2(\phi - \phi_0))$  além de ser periódico e pequeno, é menor ainda quando comparado com o a primeira ordem de  $e$ . Dessa forma, sobra apenas o segundo membro da expressão:

$$u(\phi) = \frac{3(GM)^3}{c^2h^4} e\phi \sin(\phi - \phi_0). \quad (5.38)$$

Para escrever a solução de (5.33), basta somar as soluções de  $u(\phi)$  obtidas em (5.35) com (5.38):

$$u(\phi) = \frac{GM}{h^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0)] + \frac{3(GM)^3}{c^2 h^4} e \phi \sin(\phi - \phi_0), \quad (5.39)$$

e ao colocar  $\frac{GM}{h^2}$  em evidência, tem-se

$$u(\phi) = \frac{GM}{h^2} \left[ 1 + e \cos(\phi - \phi_0) + \frac{3(GM)^2}{c^2 h^2} \phi \sin(\phi - \phi_0) \right]. \quad (5.40)$$

3. A terceira e última aproximação é feita ao tomar

$$\begin{aligned} \kappa\phi &= \frac{3(GM)^2}{c^2 h^2} \phi; \\ \cos(\kappa\phi) &\cong 1; \\ \sin(\kappa\phi) &\cong \kappa\phi, \end{aligned}$$

portanto  $u(\phi)$  (equação 5.40) é reescrita como:

$$u(\phi) = \frac{GM}{h^2} [1 + e \cos(\kappa\phi) \cos(\phi - \phi_0) + \sin(\kappa\phi) \sin(\phi - \phi_0)] \quad (5.41)$$

que descreve justamente a soma de cossenos  $\cos(a + b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ .

Com todas as aproximações e considerações feitas para a obtenção de um resultado para a equação diferencial, a solução final é dada por:

$$u = \frac{GM}{h^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0 - \kappa\phi)]. \quad (5.42)$$

Uma das dependências da solução de  $u(\phi)$  é com relação ao tipo de órbita em torno do Sol que Mercúrio apresenta. A órbita do problema é elíptica, isto é,  $e < 1$ , isso implica em um sinal positivo dos termos oscilantes do cosseno. Portanto, a coordenada angular do periélio varia de  $\phi_0 + k\phi$ . O que significa que existe uma rotação da linha que liga os extremos da elipse, isto é, uma rotação do semi-eixo maior da órbita. Sua variação por período é definida em termos de  $(\Delta\phi)$ :

$$\Delta\phi = 2\pi\kappa = \frac{6\pi G^2 M^2}{c^2 h^2}. \quad (5.43)$$

A corda focal, denominada por  $l = \frac{h^2}{GM}$ , ao ser substituída na equação acima, obtêm-se:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 l},$$

mas  $l$  pode ser escrita também por  $l = a(1 - e^2)$  em consequência da segunda Lei de Kepler

apresentada no (Apêndice A). Assim o desvio do periélio é dado por

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}. \quad (5.44)$$

Os dados necessários para calcular a precessão do periélio do planeta Mercúrio estão apresentados na tabela abaixo.

Tabela 1 – Dados orbitais para a determinação do desvio  $\Delta\phi$ .

PARÂMETRO	SÍMBOLO	VALOR	UNIDADE
Semi eixo maior	$a$	$5,767 \times 10^{11}$	$m$
Excentricidade da órbita	$e$	0,205	-
Constante gravitacional	$G$	$6,673 \times 10^{-11}$	$Nm^2kg^{-2}$
Massa do Sol	$M$	$1,99 \times 10^{30}$	$kg$

Fonte: Produção do próprio autor.

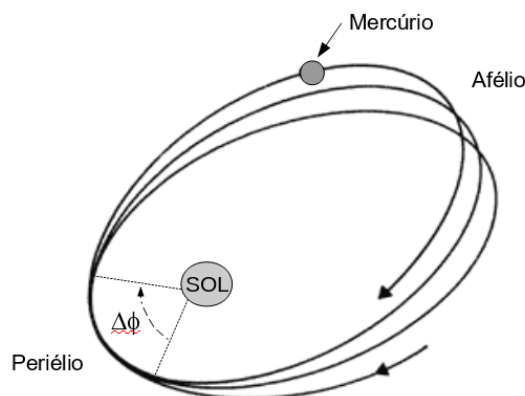
Pode-se finalmente calcular o desvio orbital  $\Delta\phi$  do planeta Mercúrio ao orbitar o Sol, quando os valores da Tabela 1 são substituídos na equação (5.44):

$$\Delta\phi = 0,1036 \text{ segundos por período.}$$

Sabe-se que o período de translação de Mercúrio é de 88 dias, dessa forma, a precessão é definida: o semi-eixo maior do planeta avança 43 segundos por século, isto é, o valor exato que Einstein detectou.

A precessão é ilustrada a seguir:

Figura 2 – Precessão do periélio de Mercúrio.



Fonte: Produção do próprio autor.

Esse resultado só pôde ser obtido a partir da Relatividade Geral de Einstein, já que o desvio do periélio de Mercúrio não foi resolvido corretamente com a gravitação Newtoniana. O termo de correção relativístico foi essencial para a descrição exata da órbita.

Em seguida, será feita a implementação da mesma equação diferencial resolvida nessa seção, mas com o auxílio do software *MATLAB*<sup>TM</sup>.

### 5.3.2 Solução Numérica

Neste trabalho foi implementada também a resolução numérica da equação (5.33), utilizando-se, para tanto, a plataforma *MATLAB*<sup>TM</sup>. Ressalta-se que não é objetivo deste trabalho o desenvolvimento do código computacional para a resolução da equação (5.33). Neste contexto, foi utilizado o código computacional de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) desenvolvido no Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) do Departamento de Ciências e Tecnologia Aeroespacial (DCTA) localizado em São José dos Campos.

A ideia principal foi implementar o sistema de equação diferencial ordinária (EDO) associado à Equação (5.33) com a finalidade de se verificar a validade da solução analítica determinada na seção anterior deste trabalho a partir de um código computacional já validado. O código computacional em questão trabalha apenas com EDO de primeira ordem. Neste contexto, a equação (5.33) foi representada como sendo o sistema de EDO's abaixo:

$$\frac{du}{d\phi} = \omega \quad (5.45)$$

$$\frac{d\omega}{d\phi} = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2 - u \quad (5.46)$$

O programa apresentou sérios problemas de convergência. A partir da discussão com os desenvolvedores do código, observou-se que a variável  $u = \frac{1}{r}$ , assume valores muito próximos a zero, desde que  $r$  assume valores da ordem de  $6,98169 \times 10^{10}$ , correspondente ao afélio do planeta Mercúrio. Sendo o sistema de EDO um processo típico de marcha em  $\phi$ , pode-se concluir que a propagação de erros numéricos torna inviável a resolução destas equações quando apresentadas neste formato.

Procedeu-se então a um processo de adimensionalização das equações. Adotando-se:

$$u^* = \frac{u}{\frac{GM}{c^2 r_A^2}}, \quad (5.47)$$

sendo  $r_A$  o afélio do planeta Mercúrio. Ao substituir a equação (5.47) na equação diferencial (5.33), tem-se:

$$\frac{d^2 u^*}{d\phi^2} + u^* = \frac{c^2 r_A^2}{h^2} + 3 \left( \frac{GM}{c^2 r_A} \right)^2 (u^*)^2. \quad (5.48)$$

Observe que, para  $u = \frac{1}{r_A}$  o valor de  $u^*$  será da ordem de  $10^7$ , viabilizando, portanto, a solução

numérica. Logo, o sistema de EDO implementado está representado pelas equações abaixo:

$$\frac{du^*}{d\phi} = \omega^* \quad (5.49)$$

$$\frac{d\omega^*}{d\phi} = \frac{c^2 r_A^2}{h^2} + 3 \left( \frac{GM}{c^2 r_A} \right)^2 (u^2)^2. \quad (5.50)$$

Outro aspecto de resolução que deve ser ressaltado são as condições iniciais do problema a partir da equação (5.33), para a obtenção das soluções analítica e numérica (aproximadas). Neste trabalho, adotou-se como ponto inicial da marcha em  $\phi$  o afélio do planeta Mercúrio. O valor de  $u^*$  é calculado de forma direta. Já, com relação ao valor de  $\omega^*$ , é necessário conhecer  $\frac{du^*}{d\phi}$  nesta localização da órbita. Ao partir da equação (5.42)

$$u = \frac{GM}{h^2} [1 + e \cos(\phi - \phi_0 - \kappa\phi)],$$

tem-se que

$$\frac{du}{d\phi} = -\frac{GM e}{h^2} (1 - \kappa) \sin(\phi - \phi_0 - \kappa\phi), \quad (5.51)$$

e portanto

$$\frac{du^*}{d\phi} = -\frac{c^2 r_A^2}{h^2} (1 - \kappa) \sin(\phi - \phi_0 - \kappa\phi) \quad (5.52)$$

Para o caso de  $u = \frac{1}{r_A}$ , tem-se que  $\phi = \phi_0 = 0$ , conseqüentemente  $\frac{du^*}{d\phi} = 0$ .

Os parâmetros necessários para realizar a simulação estão apresentados na tabela abaixo.

Tabela 2 – Parâmetros utilizados na simulação.

PARÂMETRO	SÍMBOLO	VALOR	UNIDADE
Afélio de Mercúrio	$r_A$	$6,98169 \times 10^{11}$	$m$
Excentricidade da órbita de Mercúrio	$e$	0,205	-
Constante gravitacional	$G$	$6,673 \times 10^{-11}$	$Nm^2kg^{-2}$
Massa do Sol	$M$	$1,99 \times 10^{30}$	$kg$
Velocidade da luz	$c$	$3 \times 10^8$	$\frac{m}{s}$

Fonte: Produção do próprio autor.

O programa desenvolvido que foi utilizado neste trabalho está disponibilizado no (Apêndice B). Ao resolver a equação diferencial com o software, é possível validá-lo ao gerar resultados para diferentes excentricidades, analisar o caso de Mercúrio e obter o erro entre a solução aproximada analítica, apresentada na seção (5.3.1) e a solução numérica abordada nesta seção.

A seguir, a Tabela 3 mostra os casos a serem tratados e analisados:

Tabela 3 – Casos estudados através da solução numérica da EDO (5.33).

<b>Caso I</b>	$e > 1$	Órbita hiperbólica
<b>Caso II</b>	$e = 1$	Órbita parabólica
<b>Caso III</b>	$e < 1$	Órbita elíptica
<b>Caso IV</b>	$e = 0,205$	Órbita de Mercúrio
		Erro entre a solução numérica e solução analítica

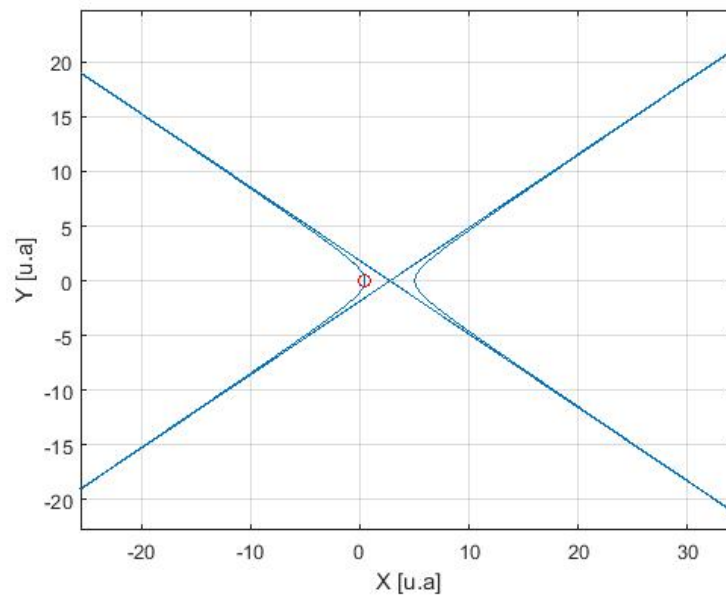
Fonte: Produção do próprio autor.

- **Caso I: Órbita hiperbólica ( $e > 1$ )**

Esse tipo de trajetória é comum em corpos que estão em torno de outro, mas que possuem uma velocidade grande o suficiente para escapar do campo gravitacional que esse corpo central produz.

Neste caso foi estudado um corpo cuja trajetória se passa em torno do Sol, com excentricidade de 1,205 e se inicia no pequeno círculo vermelho na Figura 3.

Figura 3 – Órbita hiperbólica com excentricidade de  $e = 1,205$ .



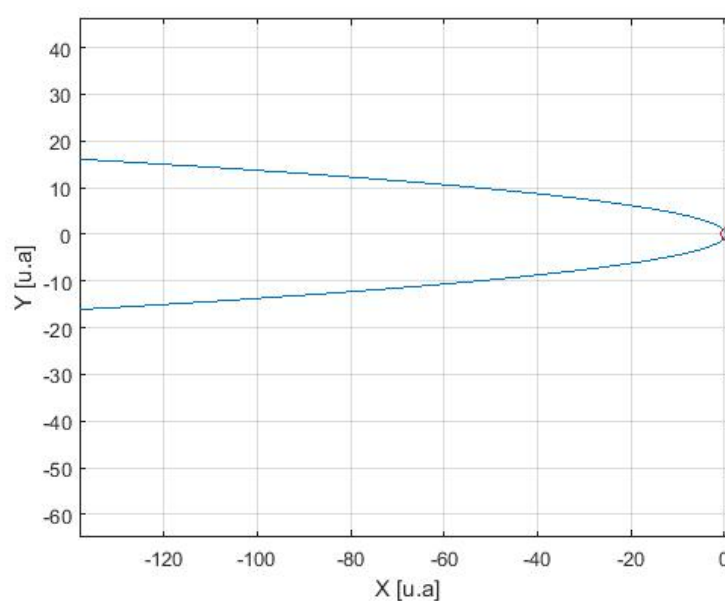
Fonte: Produção do próprio autor.

- **Caso II:** Órbita Parabólica ( $e = 1$ )

A órbita parabólica pode variar de "órbita de escape" e "órbita de captura", a depender se o corpo que a descreve se move para longe ou para perto, respectivamente, de um corpo central.

A Figura 4 ilustra esse caso, onde a trajetória tem excentricidade  $e = 1$ , tem início no pequeno círculo vermelho no gráfico e mostra que o corpo se afasta do Sol, isto é, percorre uma órbita de escape.

Figura 4 – Órbita parabólica com excentricidade de  $e = 1$ .



Fonte: Produção do próprio autor.

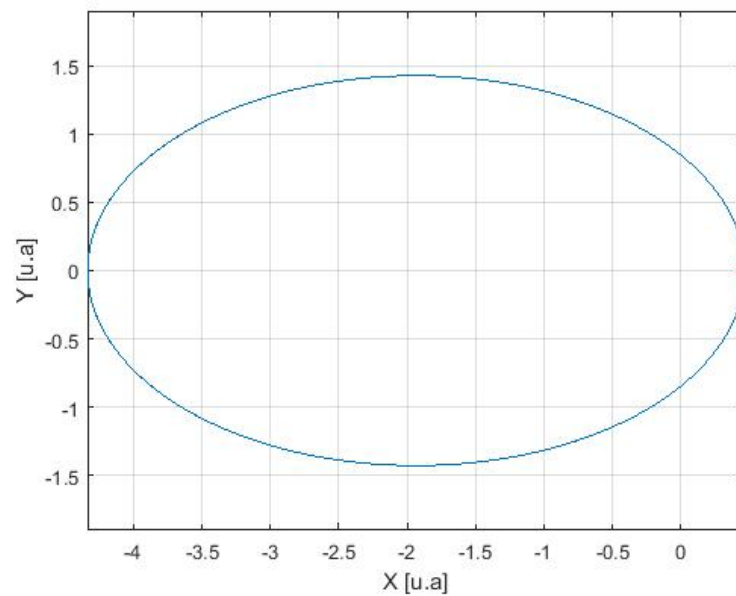
- **Caso III:** Órbita elíptica ( $e < 1$ )

O caso mais comum de ser visto no universo, a órbita elíptica é descrita por todos os planetas, com o Sol em um dos focos. A órbita é periódica e não necessariamente fechada.

A Figura 5 ilustra a trajetória que um corpo percorre em torno do Sol, com uma excentricidade de 0,805. O ponto de início de sua trajetória é representado pelo pequeno círculo vermelho no gráfico, no periélio da elipse.

Um caso especial da órbita elíptica é a *órbita circular*, isto é, quando a excentricidade é igual a zero ( $e = 0$ ).

Figura 5 – Órbita elíptica com excentricidade de  $e = 0,805$ .

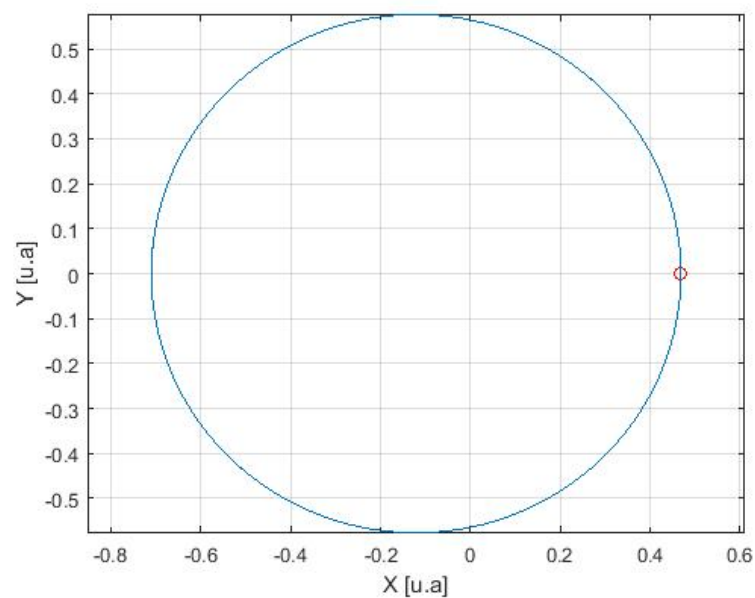


Fonte: Produção do próprio autor.

- **Caso IV: Órbita de Mercúrio**

Como visto anteriormente, a órbita de Mercúrio é elíptica, quase circular, aberta e periódica. Foram gerados 2000 ciclos do planeta em torno do Sol, que teve início no pequeno círculo vermelho no periélio da elipse, ilustrado na Figura 6.

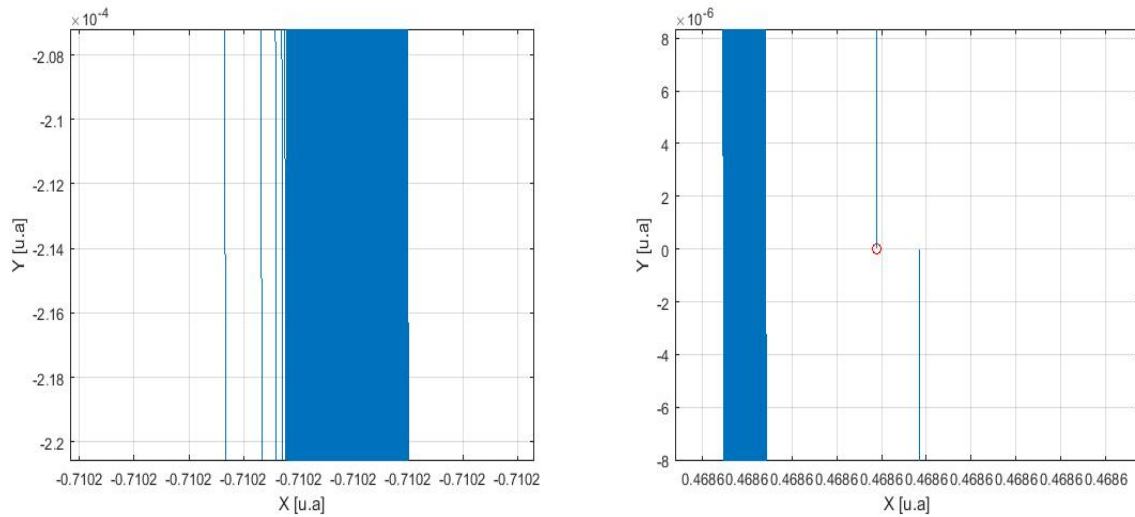
Figura 6 – Órbita elíptica de Mercúrio com excentricidade de  $e = 0,205$ .



Fonte: Produção do próprio autor.

Como previsto, o desvio é praticamente imperceptível, afinal são 43' por século. Mas, ao ampliar essa imagem para a melhor percepção das linhas orbitais presentes no periélio e no afélio, obtêm-se:

Figura 7 – Detalhes do desvio do afélio (7a) e do periélio (7b)

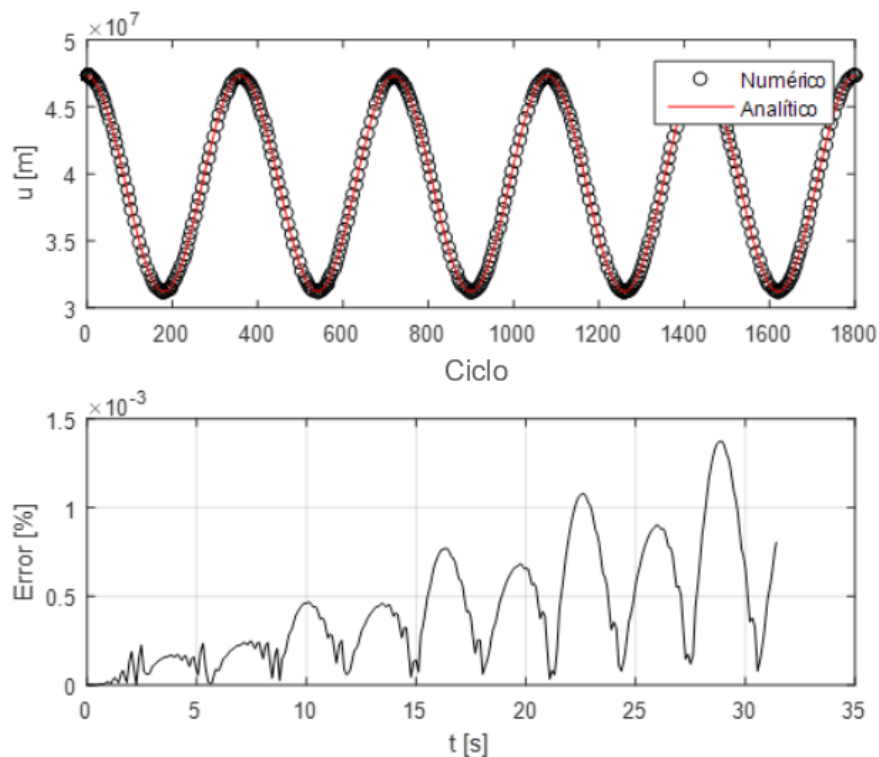


Fonte: Produção do próprio autor.

Na Figura 7a (figura a esquerda) observa-se melhor o desvio de ordem  $10^{-4}$  presente no afélio da órbita de Mercúrio. É esperado encontrar um erro maior nessa região devido a precessão da órbita, que sempre que ocorre no periélio, causa efeito nesse outro extremo na elipse. Já na Figura 7b (figura a direita), é relevante notar que a órbita é aberta e o desvio orbital é bem pequeno (ordem  $10^{-6}$ ). Nessa região ocorre a precessão orbital, que foi descrita exageradamente na Figura 2, mas que é observada quando analisada em pequenas escalas como essa.

Por fim, foi feita uma análise da função  $u(\phi)$  por ciclo e o cálculo do erro entre as soluções analítica e numérica conforme o tempo cresce.

Figura 8 – Evolução temporal da função  $u(\phi)$  (8a) e erro entre as soluções analítica e numérica (8b).



Fonte: Produção do próprio autor.

Na Figura 8a (figura superior) é apresentado um gráfico da função  $u(\phi)$  por ciclo. Essa função descreve 5 ciclos gerados, isto é, 5 voltas de Mercúrio em torno do Sol. Sua variação temporal é delimitada entre os extremos do afélio (limite superior) e periélio (limite inferior). A solução gerada pelas aproximações na seção Solução Analítica está representada pela linha vermelha e a Solução Numérica desenvolvida nessa seção pelo círculo preto na figura. Note que ambas estão praticamente sobrepostas, isso significa que a solução aproximada está certa e pôde ser validada pela analítica.

Ao calcular a discrepância entre as duas soluções obteve-se um erro bem menor do que 1% e está ilustrado na Figura 8b (figura inferior). É importante lembrar que conforme o tempo tende ao infinito, a solução aproximada já não representará o comportamento orbital exato de Mercúrio, pois a solução é aproximada e essas aproximações feitas a limitam em um determinado intervalo de tempo. Já a solução numérica é válida para qualquer intervalo de tempo, basta defini-lo e gerar os resultados, afinal não foi feita nenhuma aproximação para obtê-la. Ao compará-las em um tempo crescente, as duas passam a divergir e o erro consequentemente aumenta.

## 6 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo apresentar todos os passos que Einstein teve que percorrer para obter o valor numérico do desvio orbital do planeta Mercúrio e obter a correção que faltava para que a mecânica Newtoniana pudesse resolver esse problema.

A partir da Relatividade Geral, pôde-se avaliar o espaço-tempo como uma grandeza geométrica e utilizar o tensor métrico para descrevê-lo. Todo o desenvolvimento foi feito a partir da métrica esférica de Schwarzschild com duas constantes a serem determinadas ( $A(r)$  e  $B(r)$ ) a partir da geometria do problema, que por sua vez será o considerado o problema de dois corpos.

O problema se ambienta em um espaço-tempo considerado isotrópico; homogêneo; estacionário; no vácuo; em dois referenciais, um acelerado (Mercúrio) em relação ao outro fixo (Sol); por fim, as geodésicas obtidas são analisadas no plano equatorial.

O desvio foi obtido a partir da Relatividade Geral que leva em conta justamente esse referencial acelerado de Mercúrio, relacionando-o com um referencial fixo (Sol) por uma grandeza chamada conexão afim. A partir dela, o tensor e o escalar de Ricci foram determinados e quando substituídos na equação de Einstein, obteve-se que  $R_{\alpha\beta} = 0$ , o que condiz com a hipótese de que o problema se ambienta no vácuo. Dessa forma, as constantes presentes na métrica são determinadas.

Para gerar as equações geodésicas do problema, foram utilizadas a Lagrangeana e as equações de Euler-Lagrange para que, com todas as hipóteses consideradas, obteve-se a equação de Schwarzschild:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2. \quad (6.1)$$

que depende das coordenadas  $r$  e  $\phi$ . O último termo dessa expressão representa a correção dada pela Relatividade Geral.

O desvio  $\Delta\phi$  é dado em termos da constante gravitacional  $G$ , massa do sol  $M$ , da variável angular  $h(\phi)$  e da velocidade da luz  $c$ . Ao substituir os valores:  $\Delta\phi = 0,1036''$  por período, isto é, o planeta avança 43 segundos por século, que foi o resultado exato que Einstein obteve e que foi um dos testes comprovados da Teoria da Relatividade Geral.

Por fim, foram obtidas as soluções analítica e numérica desse problema, com um erro de menos de 1%, mas deve-se lembrar que ao avaliar a evolução temporal do erro entre elas, conforme o tempo tende ao infinito a solução analítica não se torna mais válida, isso se deve ao fato de ser uma solução aproximada e dessa forma destoa da solução numérica.

Os resultados foram satisfatórios, foram gerados também diferentes casos provenientes da equação diferencial (6.1), que fez com que a solução analítica para esse trabalho fosse validada.

## REFERÊNCIAS

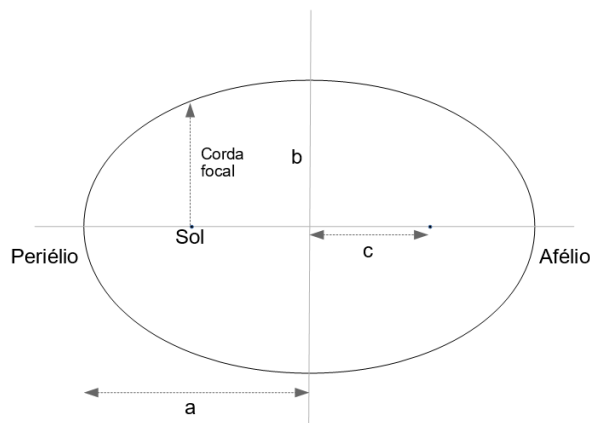
- BATISTA, R.C. **Precessão do periélio de Mercúrio**. Disponível em: <<http://plato.if.usp.br/fma0374d/aula13/node2.html>>. Acesso em: 15 ago. 2018.
- COSTA, J.R.V. **A estranha órbita de Mercúrio**. Disponível em: <<http://www.zenite.nu/a-estranha-orbita-de-mercurio/>>. Acesso em: 01 ago. 2018.
- FIGUEIREDO, D.G.; NEVES, A.F. **Equações diferenciais aplicadas**. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1997. 301 p.
- FÍSICA NET. **O eclipse de 1919**: a comprovação da teoria da relatividade geral. Disponível em: <<http://www.fisica.net/relatividade/o-eclipse-de-1919.php>>. Acesso em: 01 nov. 2018.
- KOCH, J.A. **Princípio da mínima ação**. Disponível em: <[https://juniorusan.files.wordpress.com/2017/10/efe\\_hilbert\\_action.pdf](https://juniorusan.files.wordpress.com/2017/10/efe_hilbert_action.pdf)>. Acesso em: 01 ago. 2018.
- NUSSENSZVEIG, H.M. **Curso de física básica 4**: ótica, relatividade, física quântica. 2.ed. São Paulo: Blucher, 2014. 359 p.
- SOARES, D. **Os fundamentos físico-matemáticos da cosmologia relativista**. Disponível em: <<http://lilith.fisica.ufmg.br/dsoares/ensino/cosmrel/cosmrel.htm>>. Acesso em: 01 jun. 2018.
- SOUZA, J.M. **Introdução a relatividade geral e vetores de Killing**. 2015. 80 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.
- TIBERIUS, J. **A lei da gravidade global**: relatividade de Einstein e a órbita do planeta Mercúrio. Disponível em: <<https://molwick.com/pt/gravitacao/577-mecanica-celeste-mercurio.html>>. Acesso em: 01 nov. 2018.

## APÊNDICE A – LEIS DE KEPLER

Desde 1609, na publicação "Astronomia Nova", o astrônomo Johannes Kepler dava início a uma nova visão de dinâmica planetária, ao defender que as órbitas dos planetas em torno do Sol não são necessariamente círculos e depois na "Harmonia do Universo", uma nova teoria planetária. Nesses trabalhos foram enunciadas um conjunto de três leis, denominadas Leis de Kepler:

1. **Primeira Lei** - As únicas órbitas possíveis para um corpo que interage gravitacionalmente com outro são cônicas, isto é: elipse, parábola, círculo ou hipérbole. Particularmente, cada planeta se move numa órbita elíptica e o Sol se situa em um dos focos, como mostra a figura a seguir:

Figura 9 – Elementos da órbita de um planeta.



Fonte: Produção do próprio autor.

onde  $a$  é o semi-eixo maior,  $b$  o semi-eixo menor,  $c$  é a distância de um foco ao centro da elipse e  $l$  é a corda focal e que possuem as seguintes relações:

$$l = \frac{b^2}{a} \quad (\text{A.1})$$

$$e = \frac{c}{a} \quad (\text{A.2})$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{A.3})$$

que quando combinadas,

$$a^2 = al + e^2 a^2 \quad (\text{A.4})$$

$$l = a - e^2 a \quad (\text{A.5})$$

obtem:

$$l = a(1 - e^2), \quad (\text{A.6})$$

isto é, uma relação direta da corda focal com a excentricidade e o semi-eixo maior da elipse.

2. **Segunda Lei** - O vetor que liga o Sol a um dado planeta varre áreas iguais em tempos iguais. Dessa forma, o momento angular dos planetas também é constante:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} \quad (\text{A.7})$$

onde  $A$  é a área varrida pelo vetor e  $h$  é o momento angular por unidade de massa, o mesmo  $h$  visto nos capítulos 4 e 5. Essa razão ( $\frac{dA}{dt}$ ) é denominada "velocidade areal" e é constante devido a conservação do momento angular.

3. **Terceira Lei** - A razão entre o quadrado do período de um planeta o cubo do semi-eixo maior de sua órbita, além de ser válida para todos os planetas, ela tem o mesmo valor para todos.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad (\text{A.8})$$

onde  $T$  representa o período,  $a$  o semi-eixo maior,  $G$  a constante gravitacional de Newton e  $M$  a massa do corpo analisado.

## APÊNDICE B – PROGRAMA MATLAB

```

% MAIN
% _____
% Programa: Perélio de Mercúrio
% Referencia: TG Ana Luiza
% _____

clear all
close all
clc
format long

% —— Input and Initial Conditions
[Set, InitCond] = INPUT;

% —— SOLVER
[Traj,TrajA]= SOLVER(Set,InitCond);

% —— OUTPUT
OUTPUT(Set,Traj,TrajA);
% Initial Value of Ustar
%  $Set.c*c*Set.r\_M/(Set.G*Set.M)$ 

% INPUT
function [Set, InitCond] = INPUT

% —— OBSERVATION
% Set Configuration and Input Data

% —— CALL
% NA
% —— CALLED by
% MAIN
% //////////////////////////////////////

% —— Set configuration
% Number of Cycles (to plot)
Set.N= 2000;

```

```

% Tolerance
Set.Tol= 1d-08;

% ----- Parameters
% Gravitational Constant (from Newton): [ N.m*m/kg*kg ]
Set.G= 6.673d-11;
% Mass of Sun [kg]
Set.M= 1.99d30;
% Light Speed [m/s]
Set.c= 3d8;
% Mu
Set.Mu= Set.G*Set.M/Set.c*c;
% Excentricity
Set.e= 0.205;
% Afélio
Set.r_M= 69816900d3;
% Periélio
Set.r_m= 46001200d3;

% ----- Time Configuration
% Time of Simulation
Set.tinicial= 0;
Set.tfinal= Set.N*2*pi; % [s]

% ----- Dimensionless Parameter
Set.adm= Set.G*Set.M/(Set.c*Set.r_M)^ 2;

% ----- Initial Conditions
% Phi0
Phi0= 0*pi/180;
Set.Phi0= Phi0;
% u0
r0= Set.r_M;
u0= 1/r0;
uadm0= u0/Set.adm;
% Determine "h"
Set= h_CONSTANT(Set);
% V0
Set.k= 3*(Set.G*Set.M)^ 2/(Set.h*Set.c)^ 2;

```

```

dum1= (Set.c*Set.r_M/Set.h)^ 2;
V0= dum1*Set.e*(1-Set.k)*sin(-Set.k*Phi0);
% Vector used at MATLAB function (ODE45)
%InitCond.x0= [r0 Phi0 V0 Theta0 Theta_point0];
InitCond.x0= [uadm0 V0];

% SOLVER
function [Traj,TrajA]= SOLVER(Set,InitCond)

% ----- OBSERVATION
% Solve ODE

% ----- CALL
% ODE
% ----- CALLED by
% MAIN
% //////////////////////////////////////

% ////////////////////////////////////// Numerical Solution
% Set Time Simulation
tint= [Set.tinicial Set.tfinal];
% Set Initial Conditions of Dependent Variables
x0= [InitCond.x0];
% Set Tolerance
options = odeset('RelTol',Set.Tol);
%options = odeset('Events',@EVENTS_ORBIT);

% Solver
[tt,XX] = ode45(@(t,X)ODE(t,X,Set),tint,x0,options);

% Output
Traj.t= tt;
% 1/r
Traj.uadm= XX(:,1);
% d(1/r)/dPhi
Traj.Vadm= XX(:,2);
% r
for i= 1:length(Traj.t)
Traj.radm(i)= 1/Traj.uadm(i);

```

```

Traj.r(i)= Traj.radm(i)/Set.adm;
end

% ////////////////////////////////// Analytical Solution
TrajA= ANALYTICAL(Set,Traj);
% ODE
function Xp= ODE(t,X,Set)

% ----- OBSERVATION
% Solve ODE

% ----- CALL
% NA
% ----- CALLED by
% SOLVER
% //////////////////////////////////
% ----- Update
% 1/r
u= X(1);
V= X(2);

% ----- ODE System
% u Equation: du/dphi= v
Xp(1)= V;
% V Equation: dV/dphi= ... (Equation ...)
dum1= (Set.c*Set.r_M)^ 2/Set.h^ 2;
dum2= 3*(Set.G*Set.M/(Set.c*c*Set.r_M))^ 2;
Xp(2)= dum1 + dum2 - u;
Xp = Xp';

% OUTPUT
function OUTPUT(Set,Traj,TrajA)

% ----- OBSERVATION
% Plot Output

% ----- CALL
% NA
% ----- CALLED by

```

```

% MAIN
% ///////////////////////////////////////////////////////////////////
% /////////////////////////////////////////////////////////////////// Graficos
k= 1;

% -----
f= length(Traj.t);
figure(k)
grid on

subplot(2,1,1); lh1= plot(Traj.t(1:f)*180/pi,Traj.uadm(1:f),'ko');
xlabel('t [s]'); ylabel('u [m]');
hold on

subplot(2,1,1); lh1= plot(Traj.t(1:f)*180/pi,TrajA.uadm(1:f),'r');
xlabel('t [s]'); ylabel('u [m]');
legend('Numérico','Analítico')
for i= 1:f
Error(i)= 100*(abs(TrajA.uadm(i)-Traj.uadm(i))/TrajA.uadm(i));
end

subplot(2,1,2); lh1= plot(Traj.t,Error,'k'); grid on; xlabel('t [s]');
ylabel('Error [%]');
k= k+1;
figure(k)
[x,y] = pol2cart(Traj.t,Traj.r');
plot(x(1)/0.149d12,y(1)/0.149d12,'ro')
hold on

plot(x(2:f)/0.149d12,y(2:f)/0.149d12)
grid on
xlabel('X [u.a]'); ylabel('Y [u.a]');
axis equal
% ANALYTICAL
function TrajA= ANALYTICAL(Set,Traj)

% ----- OBSERVATION
% Mercury Perielium: Analytical Solution

```

```

% ----- CALL
% NA
% ----- CALLED by
% SOLVER
% ///////////////////////////////////////////////////////////////////

for i= 1:length(Traj.t)
dum0= Traj.t(i)-Set.Phi0 - Set.k*Traj.t(i);
dum1= Set.G*Set.M*(1 + Set.e*cos(dum0));
TrajA.u(i)= dum1/Set.h^ 2;
TrajA.uadm(i)= TrajA.u(i)/Set.adm;
% h CONSTANT
function Set= h_CONSTANT(Set)

% ----- OBSERVATION
% Determine Constant "h"

% ----- CALL
% NA
% ----- CALLED by
% MAIN
% ///////////////////////////////////////////////////////////////////

dum1= Set.G*Set.M*Set.r_M*(1+Set.e);
Set.h= sqrt(dum1);

```