

JOEL GONÇALVES DOS SANTOS

**Considerações históricas, filosóficas e teóricas acerca do processo de
validação das verdades matemáticas**

Joel Gonçalves dos Santos

**Considerações históricas, filosóficas e teóricas acerca do processo de
validação das verdades matemáticas**

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Fabiane Mondini

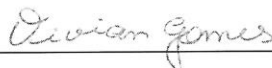
S237c	Santos, Joel Gonçalves dos Considerações Históricas, Filosóficas e Teóricas Acerca do Processo de Validação das Verdades Matemáticas / Joel Gonçalves dos Santos. – Guaratinguetá, 2018. 84 f.: il. Bibliografia: f. 82-84 Trabalho de Graduação em licenciatura em Matemática – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018. Orientadora: Profa. Dra. Fabiane Mondini 1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Teoria das demonstrações 3. Testes. I. Título CDU 51:371.3
-------	--

Pâmella Benevides Gonçalves
Bibliotecária/CRB-8/9203

JOEL GONÇALVES DOS SANTOS

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
“GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA”

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE
CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

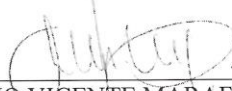


Prof.^a. Dr.^a. VIVIAN MARTINS GOMES
Coordenadora

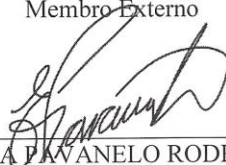
BANCA EXAMINADORA:



Prof.^a. Dr.^a. FÁBIANE MONDINI
Orientador/UNESP-FEG



Prof. Dr. ANTONIO VICENTE MARAFIOTI GARNICA
Membro Externo



Prof.^a. Dr.^a. ELISANGELA PAVANELO RODRIGUES DOS SANTOS
UNESP-FEG

Novembro de 2018

Dedico este trabalho aos meus pais, Neide e Agostinho, e aos meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Jesus, que até aqui me permitiu chegar.

Agradeço à minha orientadora, Dra. Fabiane Mondini que não apenas nessa, mas em muitas outras caminhadas me ajudou, sendo para mim muito mais que apenas uma orientadora.

À Érica, primeira amizade que construí ao adentrar a faculdade.

À Gisele que sempre me deu apoio nas minhas decisões, e que continua a ser uma grande amiga (Brother).

À Sani, que arrasa em tudo.

Ao Willem (Presuntinho) para o qual nunca existiu tempo ruim fazendo com que coisas inesperadas aconteçam a todo instante.

Ao Wilson (Godofredo), primeiro e único Godofredo que a construção civil precisa.

À Laís, que me ajudou a refletir sobre varias ideias compostas neste trabalho.

À Thais, à Viviane e ao Rafael (Japoronga).

Ao Minas e também aos meus companheiros de quarto da moradia, Brunão e Eduardo.

Agradeço imensamente aos professores Antonio Vicente Marafioti Garnica e Elisangela Pavanelo, componentes da banca examinadora deste trabalho, que aceitaram o trabalho de ler a versão final do texto.

Agradeço ainda à Rita, professora excelentíssima que não mede esforços para ajudar seus alunos.

Enfim, agradeço a todos os meus amigos, sem os quais esta caminhada seria mais difícil ou até mesmo impossível.

“E conhecereis a verdade, e a verdade vos
libertará”.

João 8.32

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é investigar os significados que as demonstrações ou provas matemáticas têm em diferentes épocas da história dessa ciência, desde a idade antiga, momento em que começou a existir uma preocupação em sistematizar e validar a produção matemática, até os dias atuais. Começamos com a exposição de algumas definições e considerações acerca do que é uma demonstração matemática e apresentamos exemplos de diferentes modos de demonstrar construídos no percurso histórico, desde a Grécia antiga até por volta do século XIX, em que destacam-se as escolas filosóficas: logicista, intuicionista e formalistas, que são as bases para o que consideramos demonstração ou prova matemática na atualidade. Trata-se de uma pesquisa de caráter qualitativo, desenvolvida segundo a abordagem fenomenológica, que lança mão da hermenêutica como um procedimento para compreender a demonstração ou prova matemática em sua historicidade.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática. Demonstrações matemáticas. Prova. História da matemática.

ABSTRACT

The aim of this research is to investigate the meaning of the demonstrations and proofs in mathematics on the different historical ages of this science, since the ancient age, when in mathematics started a movement to methodize the knowlegde of mathematics. We began this text showing some definitions and considerations about what is make a demonstration in mathematics and we presented some examples of different ways to demonstrate in mathematics along its history, since ancient Greece until the 19th century. Along that period there were philosophical schools as logicism, intuitionism, formalism. Those philosophical schools built the basis for the demonstrations in mathematics nowadays. It's a qualitative research developing in the phenomenological approach according to the hermeneutical procedure to understand what were considered demonstration in mathematics along the history of its science.

KEYWORDS: Mathematics. Mathematical demonstrations. Proof. History of mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Representação de ângulos apostos pelo vértice.....	33
Figura 2 - Números triangulares.	34
Figura 3 - Números quadrados	35
Figura 4 - Números pentagonais.....	35
Figura 5 - Representação da divisão de um número quadrado em dois triangulares.....	36
Figura 6 - Representação dos números A, B, C e D.	37
Figura 7 - Representação dos números J, E, L, FG, FN, NG, HI, HM, MI, O e P.....	37
Figura 8 - Representação da possível decomposição feita por Pitágoras	38
Figura 9 – Representação da construção usada como apoio para a demonstração do teorema de Pitágoras.	39
Figura 10 - Representação da construção usada como apoio para a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo.....	44
Figura 11 - Representação da construção usada como apoio para a demonstração da igualdade dos lados AB e AC do triângulo ABC devido à igualdade dos ângulos ABC e ACB.....	46
Figura 12 – Representação da construção usada como apoio para a demonstração.....	51
Figura 13 – Representação da construção usada como apoio para a demonstração por absurdo.	52
Figura 14 – Representação da construção usada como apoio para a demonstração por construção.....	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	METODOLOGIA	13
2.1	PESQUISA QUALITATIVA.....	13
2.2	PESQUISA QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.....	16
2.3	PESQUISA FENOMENOLÓGICA	17
2.3.1	A hermenêutica como procedimentos investigativos	19
3	SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS	23
3.1	DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA	23
3.1.1	Sobre o que são demonstrações matemáticas.....	23
3.2	EXEMPLOS DE DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA ANTIGUIDADE	28
3.2.1	As demonstrações matemática na Grécia Antiga	29
3.2.2	As filosofias de Platão e Aristóteles	37
3.2.3	As demonstrações matemáticas em Euclides e os elementos	43
3.3	AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA IDADE MÉDIA.....	50
3.4	AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA IDADE MODERNA.....	57
3.5	AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA IDADE CONTEMPORÂNEA .	62
3.5.1	A matemática no século XIX	62
3.5.2	Indecidibilidade.....	71
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	73
	REFERÊNCIAS	76

1 INTRODUÇÃO

Há indícios de que as demonstrações matemáticas surgiram na Grécia Antiga, época na qual existia uma sociedade que se destacava na produção do conhecimento em diversas áreas, tais como: a filosofia, a ciência, a política, as artes e a matemática. Tratava-se de um povo com um raciocínio peculiar “que duvidava de tudo, [...] era investigador e experimental” (CAMPOS; MIRANDA, 2005, p. 51). Neste contexto, mais ou menos perto do século VI a. C., Tales de Mileto, segundo Eves (2004), faz algumas comprovações em geometria, como por exemplo, que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, ou que qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado, ou que se dois triângulos têm dois ângulos e um lado iguais, então eles são iguais. Esses conceitos já eram ideias conhecidas na Antiguidade. O que é apresentado por Tales é uma argumentação lógica para comprovar a veracidade de tais ideias.

Fato é que, a partir do feito por Tales, inaugura-se um modo de produzir um específico tipo de conhecimento, denominado de matemática, em que os resultados obtidos necessitavam obrigatoriamente de comprovação de sua veracidade. Esse modo de proceder culmina, mais tarde, com uma das obras mais importantes da antiguidade no que diz respeito à matemática demonstrativa: *Os Elementos*, escrito por Euclides¹. A obra euclidiana, apesar de copilar praticamente toda matemática da época, não pode ser pensada como um compêndio, pois se trata de um texto “cobrindo toda a matemática *elementar* – isto é, aritmética (no sentido de ‘teoria dos números’), geometria sintética (de pontos, retas, círculos e esferas), e álgebra (não no sentido simbólico moderno, mas um equivalente em roupagem geométrica)” (BOYER, 1996, p. 72) e, além disso, apresenta uma sequência lógica e a comprovação de inserção de algumas ideias. Sendo assim quando pensamos na matemática antiga (grega), o livro texto de Euclides é o nosso maior expoente da época. Essa obra possibilita ao leitor um meio de conceber a ciência matemática daquele momento e, mais do que isso, um método de reproduzi-la, visto que “nessa ciência e nesse método eles (os gregos) foram os mestres insuperáveis” (SILVA, 2007, p. 36).

Mais tarde, no período que se estende desde a queda do Império Romano², na segunda metade do século V, até o século XI, a produção de conhecimento matemático se tornou

1 A respeito de Euclides pouco se sabe, muito embora encontremos edições de os elementos identificando-o como Euclides de Megara, e um retrato onde ele aparece neste lugar, segundo Boyer (2012), isso é apenas um erro de identidade.

2 O império Romano começa a partir do ano 27 a. C. e tem seu fim no ano 476 d. C.

escassa. Segundo Eves (2004), quase todo o saber desenvolvido pelos gregos foi rejeitado e parcialmente destruído. As artes e os ofícios legados do mundo antigo foram considerados inapropriados para os cristãos. A matemática passa a ser desenvolvida dentro dos monastérios e, dessa forma, o saber grego fica nas mãos de poucos monges católicos e de alguns leigos cultos que ainda preservaram alguma ligação com o saber helênico. Com o advento e expansão do cristianismo, a língua latina acaba por ser introduzida e, segundo Cajori (2007), “não só eclesiástica, como também cientificamente em todas as importantes transações mundiais” (CAJORI, 2007, p. 169). Ainda segundo este autor, antes do século XIII nenhum trabalho grego foi lido ou traduzido para o latim.

Com a queda do Império Romano e, sequencialmente com a interrupção do seu comércio, e de seus projetos expansionistas, houve “pouca produção da ciência matemática durante o meio milênio da Baixa Idade Média” (EVES, 2004, p. 289). Mas, ainda assim, alguns nomes têm papéis importantes na história da matemática neste período. Entre eles estão Boécio, Beda, Acuino e Gerbert, que se dedicaram a traduzir as produções matemáticas gregas, que são utilizadas até os dias atuais.

De um lado a geometria euclidiana realmente sendo resgatada no Ocidente, com o respeito e a admiração dos estudiosos, graças sobretudo à sua organização lógica, não obstante algumas falhas já detectadas em seu desenvolvimento; de outro, a matemática passando por um surto de desenvolvimento muito grande, em vários campos (DOMINGUES, 2002, p. 06).

O acesso às obras gregas, por intermédio das traduções muçulmanas, possibilitou o desenvolvimento de novas teorias entre os cientistas europeus ocidentais, que culminam, por exemplo, com a criação da geometria analítica e do cálculo, durante o século XVII.

Nesse período, já havia uma grande diferença do ponto de vista lógico e estrutural entre essas teorias e a desenvolvida por Euclides em os elementos. Segundo Domingues (2002), caracteriza-se as produções feitas no século XVII como “ilógicas”, pois, segundo ele, citando como exemplo uma das obras desenvolvida na idade moderna, *A geometria* (escrita por Descartes em 1637), “não utilizou nem postulados e nem demonstrações, marginalizando assim sua própria epistemologia” (DOMINGUES, 2002, p. 06).

Com o passar do tempo muitas críticas foram dirigidas a tais obras, o que mais tarde ira resultar em questionamentos a respeito dos fundamentos da matemática e a conclusão de que era necessário explicitar ou estruturar para essa ciência uma forma “mais sólida e abrangente e isso não seria alcançado senão na segunda metade do século XIX, após um arrastado processo de maturação” (DOMINGUES, 2002, p. 06). Essa retomada à comprovação de

verdades matemáticas ocorre por volta do século XIX, principalmente no âmbito de três filosofias da matemática, que iniciam uma retomada da discussão sobre o que é a ciência matemática: o Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo.

As ideias que regiam os logicistas estavam mais diretamente ligadas às proposições, uma vez que para os lógicos as proposições eram tidas como os fundamentos a partir dos quais todo o conhecimento matemático poderia ser justificado. Nesta doutrina, temos dois eixos centrais: os axiomas matemáticos, como princípios da lógica, e a possibilidade de se poder deduzir a matemática a partir dela, isto é, da lógica.

Os intuicionistas concebiam a matemática como uma atividade mental, isto é, fruto de um processo que consistia em “realizar construções mentais efetivas e indutivas uma após a outra, ou seja, constructos, um após o outro. O mesmo que vale para os números valeria para as demonstrações, para os teoremas e para as definições” (BATISTELA; BICUDO; LAZARI, 2017, p. 201). Para eles, o alicerce natural da matemática eram os números naturais, pois iniciado com o número 1 e, por acréscimos de uma unidade em sucessivas vezes, é possível encontrar tantos naturais quanto se queira. Assim, se por processos mentais é possível realizar tais construções, então essas construções são consideradas matemáticas.

Já, para os formalistas, havia a necessidade de formalizar toda a matemática clássica. Um exemplo de formalização feita pelo fundador desta doutrina, David Hilbert (1862-1943), é o *Fundamentos da Geometria*, obra em que ele dá uma fundamentação para os Elementos de Euclides, tornando a geometria euclidiana formalizada. Eles acreditavam que ao “formalizar as teorias matemáticas livrariam a matemática de contradições, bem como de possíveis paradoxos, pois seriam eliminados pelo processo de sua reescrita com demonstrações rigorosas em um sistema formal” (BATISTELA; BICUDO; LAZARI, 2017, p. 202). Entretanto, em 1931, Kurt Friedrich Gödel (1906-1978), prova a impossibilidade de se estabelecer a consistência de qualquer teoria ou sistema formal, o que repercute diretamente na doutrina formalista.

Nesse contexto, nosso objetivo com este trabalho é compreender o que são as demonstrações matemáticas em sua historicidade. Para tanto, optamos por desenvolver uma pesquisa de cunho qualitativo, desenvolvida na perspectiva de um estudo fenomenológico, que lança mão da hermenêutica como um procedimento metodológico para a compreensão do fenômeno investigado.

2 METODOLOGIA

O ato de pesquisar se inicia quando estamos interessados em responder a alguma interrogação, em um momento de dúvidas em que queremos uma resposta plausível para uma necessidade. Nesse sentido, pesquisar pode ser definido como a busca de respostas para as nossas interrogações (GERHARDT, SILVEIRA, 2009, p. 12).

Segundo Bicudo (2012) no ato de pesquisar sempre retornamos às nossas interrogações iniciais, que são o pano de fundo da pesquisa. Isso nos possibilita trabalhá-las em diferentes perspectivas. Neste processo, a interrogação é um norte para o pesquisador que, de tempos em tempos, retorna a ela para direcionar os procedimentos investigativos (BICUDO, 2012, p. 20).

É nesse sentido que a pergunta se diferencia da interrogação, pois a primeira indaga, solicita esclarecimentos mais imediatos, enquanto a segunda é o pano de fundo que define as ações do ato de pesquisar. A esse respeito, Bicudo (2012) esclarece que a interrogação embasa as pesquisas, enquanto

formular problemas, hipóteses e perguntas são maneiras de assumir perspectivas a partir das quais a interrogação será perseguida. Ela (a interrogação) diz da perplexidade do investigador diante do mundo, a qual se manifesta inclusive como força que o mantém alerta buscando, perquirindo, não se conformando com respostas quaisquer (BICUDO, 2012, p. 21).

Com esse entendimento sobre o que é a interrogação e sua importância para a pesquisa, apresentamos a interrogação norteadora deste trabalho, que pode assim ser definida: “O que é uma demonstração matemática?”. Na busca por respostas a essa interrogação, optamos por realizar uma pesquisa qualitativa, desenvolvida segundo uma postura fenomenológica. A seguir, neste capítulo, exporemos nossas compreensões a respeito da Pesquisa Qualitativa, Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática e Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática desenvolvida segundo uma abordagem fenomenológica.

2.1 PESQUISA QUALITATIVA

Segundo Chizzoti (2003), o termo qualitativo implica uma conexão com as pessoas, com os acontecimentos e também com a localidade que, segundo ele, constituem os objetos da pesquisa. É de um determinado contexto que extraímos os entendimentos possíveis mediante uma atenção sensível. Desse primeiro contato é que o autor busca interpretar os

significados relevantes em sua pesquisa e os expõem em forma de textos escritos (CHIZZOTTI, 2003, p. 221).

A abordagem de pesquisa qualitativa se diferencia da quantitativa, pois enquanto a primeira apresenta diversos caminhos no seu desenvolvimento, a segunda recorre às quantificações,

como única via de assegurar a validade de uma generalização, pressupondo um modelo único de investigação. Derivada das ciências naturais, (a pesquisa quantitativa) parte de uma hipótese-guia, só admite observações externas, segue um caminho indutivo para estabelecer leis, mediante verificações objetivas, amparadas em frequências estatísticas (CHIZZOTTI, 2003, p. 222).

Ainda, segundo este mesmo autor, muitos são os pesquisadores que se dizem qualitativos, havendo em suas pesquisas distinções em termos teóricos, metodológicos e até mesmo, no que diz respeito às técnicas de investigação e objetivos da pesquisa.

Das causas citadas no parágrafo anterior é que surgem as dificuldades de se definir a pesquisa qualitativa. Conforme Mazzotti (1991), a pesquisa qualitativa não é algo simples de se definir, devido às diversas abordagens que a compõe: naturalista, pós-positivista, antropológica, etnográfica, estudo de caso, humanista, fenomenológica, hermenêutica, ideográfica, ecológica, construtivista, entre outras. Neves (1996) acrescenta a essa dificuldade de se definir a pesquisa qualitativa o fato de ela assumir diversos significados, ou seja, das diferentes possibilidades de proceder para interpretar e compreender um determinado fenômeno.

Sampieri, Collado e Lucio (2006) evidenciam que, diferentemente da pesquisa quantitativa, que permite ao pesquisador realizar uma generalização dos resultados pelo fato de se ter um controle estatístico sobre os fenômenos, a pesquisa qualitativa permite uma riqueza interpretativa, pois envolve uma “contextualização do ambiente, detalhes e experiências únicas” (SAMPIERI, COLLADO, LUCIO, 2006, p. 15). Ainda nesse contexto, Bogdan e Biklen (1994, p. 49) dizem que “os investigadores qualitativos interessam-se muito mais pelo processo do que simplesmente pelo resultado ou produtos”.

Pesquisar qualitativamente significa trabalhar com a qualidade daquilo que se está investigando. Bicudo (2012) nos leva a imaginar dois processos distintos que ocorrem quando estamos trabalhando qualitativamente, e que podem nos esclarecer as diversas maneiras de se trabalhar com as qualidades do investigado. O primeiro processo se dá pela ideia de objeto/observado. Vamos ver como isso ocorre.

O processo consegue detectar uma postura de separação entre o sujeito que observa e o objeto que está em observação. Nosso interesse o tempo todo é direcionado para a qualidade que, segundo a autora, é inerente ao objeto e que está amostra em sua totalidade. “Aqui é interessante destacar que a qualidade do objeto é passível de observação pelo sujeito” (BICUDO, 2012, p. 17).

Neste contexto é que estão as pesquisas de “categorizações” de uma qualidade, e são essas categorizações que conduzirão a observação. Nesta modalidade, pesquisar é mensurar ou quantificar as qualidades dos objetos. Este tipo de pesquisa ocorre quando direcionamos a pesquisa sob a luz de uma teoria e esperamos que as características definidas sejam coerentes com o que se observou. Nas pesquisas em Educação,

[...] quando se toma o definido como aprendizagem, por exemplo, e caminha-se em direção de observar se o caracterizado nessa definição está presente em comportamentos do sujeito observado e, então, passa-se a interpretar os dados observados à luz da teoria em que a definição está contextualizada. Lembremos, entretanto, que não é apenas a Psicologia que procede desse modo, mas também a Linguística, Educação, Sociologia, Antropologia, disciplinas da Medicina, etc. Ou seja, disciplinas notadamente humanas e que assumem concepções positivistas, baseando-se na separação sujeito/ objeto (BICUDO, 2012, p. 17-18).

O segundo modo de pesquisar qualitativamente destacado pela autora é o par fenômeno/percebido. Nesse caso a qualidade é percebida pelo sujeito. “Há uma doação de aspectos passíveis de serem percebidos em modos próprios de aparecer” (BICUDO, 2012, p. 18). Neste contexto, não se define o que será observado, mas fica-se em alerta para perceber o que se mostra. Em um momento posterior, o que nos resta são os processos da consciência que organizarão e correlatarão o percebido por meio de palavras, comunicando todo o processo à comunidade, que poderá analisar e interpretar os dados. Devemos estar sempre atentos para não cairmos em visões que são particulares nossas, nem de outros teóricos que trabalham o assunto, por outro lado podemos analisar as diversas possibilidades surgidas daquilo que se disse do percebido levando em consideração seu contexto e sua relevância para a pesquisa.

Esse modo de proceder vem ao encontro de discursos que criticam o cartesianismo e o positivismo, no que têm de determinante, categórico, objetivo e mensurável e é consonante com discursos que promulgam a inseparabilidade entre sujeito e objeto, a impossibilidade de se ter apenas um modo de ver o estudado, bem como com a relevância dos contextos histórico, político e social em que o estudado se situa e com a impossibilidade de aprisionar-se o dito na linguagem em caixas de interpretação (BICUDO, 2012, p. 17-18).

Entendemos por pesquisa qualitativa diferentes posturas que podem ser assumidas numa investigação. Assim, diferente da pesquisa quantitativa que objetiva a exatidão ou generalização em suas abordagens, a pesquisa qualitativa abarca outras possibilidades na busca de respostas, levando em conta as diversas soluções possíveis às interrogações formuladas, de modo que o contexto e as pessoas envolvidas são importantes no ato de pesquisar.

2.2 PESQUISA QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

As pesquisas qualitativas em Educação Matemática também não são isentas ideológica nem cientificamente, inclusive quando abordam o mesmo assunto. Por exemplo, ao pesquisar o tema aprendizagem matemática

Podemos apontar em um grande leque de possibilidades de temas de pesquisa, por exemplo, aquelas que buscam por compreensões de modos pelos quais os alunos constroem suas aprendizagens (de matemática), individualmente, com os colegas, com a mídia, em contextos específicos; de atividades de ensino, da realidade escolar, dos textos que servem de mediadores ao ensino, mas que não são entendidos como neutros ideológica e cientificamente, donde atentar-se pelo que dizem além do dito (BICUDO, 2012, p. 24).

A autora também nos alerta para o fato de que, na área de conhecimento Educação Matemática, “Educação e Matemática dialogam, ou seja, oferecem-se ao trabalho da produção de conhecimento. Portanto, não podem ser caladas, nem serem tomadas isoladamente ou sobrepor-se uma à outra” (BICUDO, 2012, p. 20). Isso significa que os pesquisadores dessa ciência devem sempre estar atentos a essas duas áreas tão distintas do saber, nunca destacando uma em detrimento da outra, mas trabalhando para a produção de ambas, tanto da Matemática quanto da Educação.

Todavia, muitas vezes em Educação Matemática, as investigações realizadas têm sido baseadas em estudos que estão mais diretamente relacionados à educação. A esse respeito Bicudo (2005) nos diz que a produção do conhecimento em Educação Matemática,

seja ela a efetuada mediante processo investigativo, seja a efetuada em atividades didático-pedagógicas, tem conduzido a uma prática de tomarem-se estudos, obras, teorias de autores que se dedicam às Ciências Humanas e à Filosofia que dão sustentação à Educação e conduzir os trabalhos em Educação Matemática de acordo com o assumido nessas obras (BICUDO, 2005, p. 13).

Sendo essa a lógica dominante, ela própria “configura uma ausência de reflexão primeira sobre a própria Educação Matemática, entendida como uma totalidade constituída no espaço do “entre”, com suas características que dizem do seu modo de ser e de aparecer” (BICUDO, 2005, p. 13).

Além disso, há também que se pensar na distinção entre Matemática e Educação Matemática. Em termos profissionais, os matemáticos se preocupam com os processos hipotético-dedutivos, buscando assim desenvolver artifícios que desenvolvam tanto a matemática pura, quanto a aplicada. Já, os educadores matemáticos estão preocupados com métodos interpretativos e analíticos das ciências sociais e humanas, para com isso desenvolverem meios para a formação num sentido geral (FIORENTINI, LORENZATO, 2012, p. 4).

Acrescenta-se a essas diferenças o fato de a matemática ser uma ciência milenar, sendo estruturada em bases lógicas bem definidas, enquanto a educação matemática (EM) é uma área emergente de estudos, recém-nascida, não possuindo uma metodologia única de investigação nem uma teoria claramente configurada (FIORENTINI, LORENZATO, 2012, p. 4).

Sendo assim, devemos ter sempre em mente que quando pesquisamos qualitativamente em educação matemática não pesquisamos nem em matemática e nem em educação, mas estamos em outra área do conhecimento humano, que tem afinidade com a Educação e com a Matemática ao mesmo tempo em que possui suas especificidades.

2.3 PESQUISA FENOMENOLÓGICA

A Fenomenologia surgiu com Edmund Husserl no século XIX e continuou a ser desenvolvida por outros filósofos, dentre os quais se destacam os trabalhos de Martin Heidegger, Merleau-Ponty, George Gadamer e Paul Ricoeur.

Segundo Bicudo (1994), em sua origem, a Fenomenologia surge como um novo método de investigação para as Ciências Humanas, que se opõe radicalmente ao modo de produzir ciência nesse campo do conhecimento, na época em que predominava o método positivista.

O que diferencia a fenomenologia do positivismo não é o pensar em si, mas o processo para atingir esse ato. No pensar fenomenológico e positivista estão explícitas as buscas por rigor e a presença de concepções que dizem respeito à interpretação do mundo enquanto fenômeno, realidade, consciência, essência, verdade, experiência, a priori, categoria e intersubjetividade. Porém o processo como isso é feito é que diferencia um método do outro

(BICUDO, 1994, p. 17). Ainda de acordo com Bicudo (1994), o método positivista ganhou força na época moderna e ainda hoje se faz presente, sendo aceito e difundido. Este método baseia-se em teorias já comprovadas, traz a concepção de que a ciência é um conjunto de conhecimentos estruturado em afirmações provadas e conectadas segundo os preceitos da lógica. Dessa maneira, o que dita os problemas a serem investigados numa pesquisa, bem como os procedimentos utilizados, é esse corpo de conhecimentos. Seguindo essa perspectiva, toda teoria desenvolvida sob a perspectiva positivista é construída a partir de conhecimentos já estruturados que trazem explicação de fatos conhecidos e predizem os que ainda não o são. Em suma, nas teorias positivistas, está dado de antemão o padrão a ser seguido na investigação, com os objetivos e procedimentos especificados.

Já, no método fenomenológico faz-se uma exploração dos processos e modos pelos quais a qualidade se mostra, e se expõe compreensões e interpretações acerca disto. Os dados, neste método, não podem ser generalizados nem colocados em outros contextos, pois há um sentido naquilo que se expressa. Os procedimentos empregados na pesquisa são inseparáveis do fenômeno que está sendo estudado e também do pesquisador, pois “não há uma separação entre o percebido e a percepção de quem percebe, uma vez que é exigida uma correlação de sintonia, entendida como doação, no sentido de exposição, entre ambos” (BICUDO, 2012, p. 18).

Fenômeno é o que está sendo investigado. Etimologicamente, “vem da palavra grega *fainomenon* – que deriva do verbo *fainestai* – e significa o que se mostra, o que se manifesta, o que aparece. É o que se manifesta para uma consciência” (BICUDO, 1994, p. 17). Bicudo (1994) nos diz que daí deriva a ideia de estar atento ao que se mostra no momento de uma investigação, ou seja, estar atento para perceber, mediante uma intencionalidade. Neste processo, destaca-se o papel da consciência, que é o estar voltado/ atentamente para algo.

Deve-se lembrar de que quando algo está a mostra, ele não se mostra de imediato, depende a todo instante da intenção do sujeito que interroga, do rigor e da insistência para se obter aquilo que é característico, básico e essencial do fenômeno. Sendo o fenômeno percebido pelo sujeito, a percepção é particular. Neste sentido, a realidade já não será mais objetiva, mas se torna aquilo que se compreendeu, que se interpretou e que se comunicou do percebido. “É portanto, *perspectival*, não havendo uma única realidade, mas tantas quantas forem suas interpretações e comunicações” (BICUDO, 1994, p. 18).

Seguindo o raciocínio até aqui apresentado, muitos autores dirão que a fenomenologia abarca visões subjetivas e relativas ao que em respostas a essas críticas, a fenomenologia traz algumas considerações importantes.

Para haver a percepção do fenômeno é certo que aquele que percebe deve estar presente neste processo. Além disso, o pesquisador tem que olhar e estar atento para ver o que se mostra, onde novamente aparece o papel da consciência. Todavia, isto não exclui o rigor, mas faz com que o sujeito fique livre de preconceitos para ver com atenção. Isto não significa que o que é visto acontece de maneira isolada, pois existem outros sujeitos que também estão a perceber e compartilhar o vivido entre si, formando, dessa maneira, o que se chama intersubjetividade, que justamente é essa troca de ideias que acontece por meio da linguagem. É por meio do compartilhamento criado pela intersubjetividade que chegamos à ideia de verdade concebida pela fenomenologia, que não é subjetiva, objetiva ou relativa, já que os sujeitos estão em consentimento. Entendemos que, no momento de investigação, em uma pesquisa fenomenológica, procuramos de maneira rigorosa a essência do fenômeno, que será compreendida e exposta. Em nossa pesquisa, focamos o fenômeno *demonstrações matemáticas*. Abordar o tema fenomenologicamente significa que procuramos compreendê-lo partindo de como ele se mostra a nós em nossa experiência vivida ou seja, em disciplinas que tratam do tema no curso de Licenciatura em Matemática, em textos que versam sobre o assunto e em nossa prática enquanto professores de Matemática. Para expor nossa compreensão sobre o assunto, optamos por realizar um estudo hermenêutico sobre o que são as demonstrações matemáticas ao longo da história dessa ciência. Partimos do que está aí, disponível para as pessoas que se interessam sobre o tema. Estudamos livros de História e Filosofia da Matemática, além de artigos em periódicos científicos que discutiam o assunto.

2.3.1 A hermenêutica como procedimentos investigativos

Esclarecida a abordagem de pesquisa assumida nessa investigação, passaremos agora a expor os procedimentos investigativos efetuados nessa pesquisa, que se propõe a compreender o que é uma demonstração matemática ao longo da história do desenvolvimento dessa ciência. Para tanto, estudamos as diferentes concepções de demonstração que se efetivaram ao longo da idade antiga, média, moderna e contemporânea.

Esclarecemos que, em nossa concepção, história

não significa apenas o passado no sentido do que passou, mas também a sua proveniência. O que tem história encontra-se inserido num devir. O seu desenvolvimento pode ser ora ascensão, ora queda. O que, desse modo, tem uma história pode, ao mesmo tempo, fazer história (GADAMER, 2002, p. 470).

Ao fazer história estrutura-se uma atualização, ou seja, *projeta-se*³ o futuro. Portanto, ao falarmos em história, nos referimos “a um conjunto de acontecimentos e influências que atravessam passado, presente e futuro. É o que se move ‘no tempo’. São as transformações dos destinos dos homens, dos grupos humanos e de suas culturas” (GADAMER, 2002, p. 470). Assim, ao desenvolver esse trabalho, não partimos de métodos prévios e nem de referenciais teóricos predeterminados, mas iniciamos com o fenômeno (as demonstrações matemáticas ao longo da história dessa ciência) tal qual ele se mostra a nós nos documentos e nos textos que retratam a história dessa ciência.

Com a clareza de que para iniciar o estudo do fenômeno é preciso também conhecer contexto sócio-histórico político em que ele ocorreu, elaboramos este trabalho que retrata o que é uma demonstração matemática nas diferentes épocas que marcam a história da humanidade. Trata-se de um estudo hermenêutico que procura compreender o fenômeno em sua historicidade, ou seja, o modo pelo qual esse fenômeno se desenvolveu historicamente ao longo do tempo, até o presente.

Existem muitas maneiras de proceder uma investigação histórica. Neste texto seguimos as orientações expostas no texto “Sobre história e historicidade em Edmund Husserl” (BICUDO, 2016). Segundo a autora, as concepções de história e historicidade presentes nos trabalhos de Husserl, bem como os aspectos metodológicos da investigação histórica concebida por ele, ao investigar (fenomenologicamente) aquilo que é dado no presente, Husserl emprega um processo retrospectivo, utilizando-se das ideias nucleares presentes na ciência a qual se está tomando como foco da pesquisa. Assim:

O que nos é dado, em termos do exemplo por ele mencionado, o da ciência “Geometria”, está ali, presente em sua imediatez posta em termos práticos e teóricos. É como se estivéssemos olhando-a e nos locomovendo em sua superfície, aquela do momento do “agora” em que olhamos interrogadoramente para isso que nos é dado. Assumindo a postura de inquirir intencionalmente, locomovemo-nos para o mais profundo, ou seja, para um agora que se afasta deste, e vamos desnudando camadas de atos sensoriais, psicológicos e espirituais que vieram constituindo esta ciência, tal como nos é dada no presente (BICUDO, 2016, p. 37).

O presente que Husserl explicita é o presente do “mundo-vida”⁴ no qual vivemos. Nesse presente está contido o nosso passado cultural, bem como um projeto do futuro. Assim, ele

3 Projetar é lançar-se à frente, atualizando-se em ações e programações na temporalidade e na especialidade mundanas.

4 “Esse é o mundo *a priori* das coisas espaço-temporais experienciadas na vida pré e extracientífica. Ele é o *mundo-horizonte* no qual sempre se está consciente dos objetos existentes e dos Outros, Companheiros, e onde se vive na certeza da sua existência” (BICUDO, 1999, p. 25).

nos traz essa possibilidade de investigação, na qual podemos estudar tanto o passado quanto o futuro: “Isso significa que nos locomovemos em um horizonte histórico e que, entretanto, podemos, intencionalmente, investigar sua estrutura essencial de modo metódico” (BICUDO, 2016, p. 37-38).

Para Husserl, como nos diz Bicudo, “ambos – intropatia⁵ (Einfühlung) e linguagem – são nucleares à comunicação entre sujeitos e, desse modo, à constituição da esfera da intersubjetividade” (BICUDO, 2016, p. 39). Ou seja, são nucleares para com a condução e a manutenção do que se constitui a tradição⁶, e nesse sentido estão presentes para a história, e no momento em que ela é posta como tema, tanto a intropatia, quanto a linguagem, se constituem em material para a investigação daquilo que constitui os atos originais.

Não podemos proceder à investigação histórica a partir do presente, sem que nos detenhamos nos sentidos e nos significados dos signos, das palavras orais e escritas, da voz como expõe Derrida (Derrida, 1994) e da visão de mundo, usos e costumes que tecem fios, unindo sujeitos em uma comunidade que se mantém e renova em sua historicidade (BICUDO, 2016, p. 39).

Segundo a autora, a linguagem em sua forma escrita é permanente juntamente a seus signos, e são decifráveis, de modo que a partir de uma intenção consciente, há a possibilidade de se chegar às evidências primeiras de um fato histórico, e semelhantemente é possível enxergar claramente os encadeamentos que se seguem a partir das premissas. A partir da linguagem é concebível que seja possível também ter acesso ao que vem juntamente a esse encadeamento.

Desse modo, parece que, começando com as auto-evidências primeiras, a genuinidade original se propaga através da cadeia de inferência lógica, não importa quão longa ela seja. Ela transcende a finitude individual e mesmo cultural e social, pois traz consigo a remoção de limites de nossa capacidade, indo em direção a um encadeamento infinito. Nisso está a idealização permitida pela lógica e, portanto, também pela linguagem. Aí se encontra a base do procedimento histórico que retroativamente interroga pela origem (BICUDO, 2016, p. 41).

⁵ A intropatia é basicamente conhecimento do outro que se desenvolve nas vivências em que o outro é dado (trazido, exposto) Sobre história e historicidade em Edmund Husserl 40 Cadernos da EMARF, Fenomenologia e Direito, Rio de Janeiro, v.9, n.1, p.1-174, abr./set.2016 ao eu em sua corporeidade. É uma percepção constituinte da intersubjetividade. Não se trata, assim, de um conceito teórico ou de uma afirmação predicativamente construída (BICUDO, 2016, p. 39-40)..

⁶ Tradição, aqui compreendida como *Dasein*, termo heideggeriano que diz do homem lançado em sua temporalidade, em sua condição histórica, “na qual toda compreensão é possibilitada e ao mesmo tempo limitada pela história e pela finitude” (HEIDEGGER, 2008). “Quando se nega a história efetual na ingenuidade da fé metodológica, o resultado pode até ser uma deformação do próprio conhecimento” (GADAMER, 1999, p. 450)

Dessa maneira, segundo as palavras da autora, quando se percorre retroativamente a cadeia lógica da linguagem proposicional, “orientados por uma interrogação que, intencionalmente posta, conduz a investigação, desvelando ideias originais, bem como a constituição de idealizações, podemos efetuar uma pesquisa histórica” (BICUDO, 2016, p. 43).

Com o esclarecimento que uma pesquisa histórica, na perspectiva fenomenológica, é uma pesquisa sobre “o sentido que o mundo faz para nós” (BICUDO, 2016, p. 47), expomos nos capítulos que seguem a nossa compreensão sobre o que são as demonstrações matemáticas. Ressaltamos que tais compreensões são os frutos de nosso pensar reflexivo, proveniente do esforço hermenêutico que realizamos.

3 SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

O objetivo deste capítulo é discorrer sobre as diferentes formas de manifestações das demonstrações na história da matemática, bem como algumas abordagens teóricas filosóficas sobre o tema, desde a antiguidade até o século XX, uma vez que os pensamentos de alguns filósofos influenciarão grandemente o fazer matemático, e, por conseguinte, os processos de demonstrações e provas.

3.1 DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta sessão falaremos em linhas gerais sobre as demonstrações na atualidade. Começamos com uma breve discussão inicial em torno do que dizem alguns autores acerca do assunto e, assim, construiremos algumas noções de como esses artifícios e procedimentos de validade em matemática são teorizados e concebidos.

As demonstrações (ou provas) matemáticas são os meios pelos quais se aceita uma verdade em matemática, são os meios de produção desta ciência. Portanto, para começarmos, vamos a algumas considerações sobre este conceito, objeto de estudo desta pesquisa.

3.1.1 Sobre o que são demonstrações matemáticas

As demonstrações matemáticas são artifícios utilizados por matemáticos para convencer-nos a respeito de uma afirmação que se fez sobre uma propriedade presente numa teoria. De acordo com Bicudo (2002) elas garantirão a validade ou não dessas afirmações.

Os primeiros registros de demonstrações matemáticas que tivemos acesso são relativos aos séculos V e IV a.C. e ligados ao conhecimento grego. Segundo Bicudo (1999)

[...] os gregos herdaram - por meio de Tales - a matemática (geometria) dos egípcios. Mas, em algum ponto da história, no cadinho em que se formou o pensamento grego, em geral, e o pensamento matemático grego, em particular, uma faísca de genialidade alterou o material. Disso resultou não bastar mais ver para crer; para CRER era preciso PROVAR. O mundo sensível era mutável e ilusório. Havia mister de apreender o estável por trás da mudança, a unidade que se escondia na multiplicidade o eterno no perecível (BICUDO, 1999, p. 118).

Em civilizações como a dos egípcios e babilônios não encontramos ideias semelhantes ao que hoje chamamos de uma demonstração matemática. Embora eles se valessem de instruções para a resolução de problemas, em suma, eram apenas passos recomendados, sem

registros que justificassem os resultados obtidos. Tais resultados, que em sua maioria, eram baseados em observações.

Em relação à matemática egípcia e babilônica, Domingues (2002) diz que

[...] nenhuma delas se baseou em qualquer estrutura axiomática que se pudesse servir de garantia para a validade dos procedimentos práticos de que essencialmente se compunham. O critério de confiabilidade das regras e procedimentos usados era simplesmente a concordância com a realidade a que se destinavam (DOMINGUES, 2002, p. 56).

Domingues (2002) relata que os matemáticos egípcios utilizavam evidências físicas, métodos de tentativa e erro, comparações e em algumas situações, como no volume do tronco de pirâmides, deduções algébricas. A respeito disso, é possível que os egípcios já tivessem a ideia de demonstração, mesmo que para isso não utilizassem nenhum formalismo.

A respeito da transição de uma matemática obtida apenas pelas observações da natureza ou por tentativa e erro, para uma matemática demonstrativa, o historiador Howard Eves nos diz

Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como “Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?” e “Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?”. Os processos empíricos do Oriente antigo, suficiente o bastante para responder questões na forma de como, não mais bastavam para as indagações mais científicas na forma de por quê. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a afeição dedutiva da matemática, considerada pelos doutos como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano (EVES, 2004, p. 94).

Outro fato importante aconteceu na Grécia Antiga, com o início do desenvolvimento da lógica, mais precisamente com Aristóteles (384-322 a.C.) de Estagira, um grande sistematizador da lógica formal. O trabalho desenvolvido por ele traz em sua proposta o que chamamos de *formas válidas de inferência*:

Uma forma válida de inferência é um modo de se obter conclusões a partir de pressupostos; uma inferência é (logicamente) *válida* se a veracidade das conclusões depender *apenas* da veracidade dos pressupostos; ela será *formal* se independer do conteúdo (do *que* é dito), mas apenas da forma lógica das asserções (de como isso é dito) (SILVA, 2007, p. 49).

Silva (2007) utiliza o seguinte exemplo: “se assumo como premissa que todo homem é mortal e que Sócrates é um homem, segue que Sócrates é mortal” (SILVA, 2007, p. 49). Analisando essa frase, percebemos que a validade de uma inferência não tem dependência em

relação aos conceitos que aparecem na frase, como os conceitos de mortalidade e humanidade, nem tão pouco com Sócrates.

A validade é assumida através do que se disse. Entretanto, na lógica desenvolvida por Aristóteles há uma estreita relação com as asserções envolvidas e, por conseguinte, com a língua grega. Assim a sistematização da lógica “ocorre na sociedade grega quase contemporaneamente e de forma estreitamente relacionada com as profundas transformações que ocorriam na estruturação da própria língua grega” (MACHADO, 2001, p. 78). Disto, Machado (2001) destaca que a lógica pouco se relacionava com a matemática na antiguidade, Antes esteve diretamente ligada ao idioma Grego.

Porém fica claro que todas as bases para uma matemática demonstrativa já estavam em curso de desenvolvimento, mesmo que em suas fases iniciais. Até próximo ao século XIX, a demonstração era trabalhada com meios intuitivos e, segundo Domingues (2002):

a partir de algum momento, porém, tornou-se necessário submeter a noção de demonstração a uma análise mais profunda, com vistas a reduzir o recurso ao uso da evidência intuitiva. Capítulos importantes da matemática, como o Cálculo, por exemplo, tinham sido explorados tão profundamente que a intuição apenas ou raciocínios heurísticos-geométricos já não bastavam para explicar alguns resultados aparentemente paradoxais (DOMINGUES, 2002, p. 61).

Entretanto, a lógica desenvolve-se ao longo do tempo e, a partir de um determinado momento da história, meados do século XIX, ela evolui: “privilegiando linguagens simbólicas e ampliando o seu repertório de modos válidos de inferência, ela foi capaz de fornecer um meio ideal de expressão e articulação para as teorias matemáticas, o que a lógica Aristotélica estava longe de poder prover” (SILVA, 2007, p. 49). Dessa maneira, a lógica passa a ser parte fundamental nas teorias matemáticas.

Para que fique mais claro como se dá o processo de uma demonstração, apresentamos o que os matemáticos chamam de sistema formal, que é a parte sintática de um sistema axiomático. Um sistema formal pode ser descrito por três partes. A primeira é sua linguagem, que diz respeito aos símbolos e expressões da linguagem, sendo toda sequência de símbolos uma expressão. Das expressões destacamos o que vem a ser uma fórmula da linguagem, ou seja, subconjuntos das expressões. A parte seguinte é descrita pelos axiomas, que são fórmulas da linguagem. E a terceira parte é o que chamamos de regras de inferência, é o que nos afirma que em determinadas condições uma fórmula pode ser deduzida. De acordo com Bicudo (2002), essas fórmulas que inferimos a partir de outras, chamamos de conclusão da regra, e das quais inferimos chamamos hipóteses.

Uma fórmula matemática é uma afirmação feita a cerca de uma determinada verdade presente em alguma teoria da matemática. Essas afirmações são chamadas de proposições ou sentenças:

Uma sentença ou proposição é uma frase, expressa em linguagem matemática, podendo conter apenas símbolos matemáticos, que cumpre as condições:

(1) Apresenta-se estruturada como uma oração, com sujeito e predicado, incluindo o verbo.

(2) É afirmativa declarativa (não é interrogativa, nem exclamativa).

(3) Satisfaz os seguintes princípios:

(3.1) Princípio do Terceiro Excluído: uma sentença é falsa ou verdadeira, excluindo-se uma terceira alternativa.

(3.2) Princípio da Não Contradição: uma sentença não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo, não podendo contradizer-se (FILHO, 2012, p. 30-31).

Por exemplo, nas sentenças:

S1: Os lados de qualquer quadrado são paralelos.

S2: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo no plano somam 180° .

S3: $4 + 2 = 25$

S4: O Brasil fica no hemisfério sul do globo.

S5: Se uma reta corta uma de duas paralelas, então, corta também a outra (FILHO, 2012, p. 30-31).

Todas elas satisfazem as condições 1, 2 e 3 mencionadas acima. Desta maneira, todas são proposições.

Ora, as frases estão estruturadas em forma de orações, contendo sujeito predicado e verbo. Como exemplo, em S1 “Os lados” é o seu sujeito, “paralelos” é o predicado, pois diz da propriedade dos lados pertencentes a qualquer quadrado, e “são” é o verbo. Todas elas são afirmações declarativas, pois fazem afirmações sobre os objetos matemáticos, ou que os lados de qualquer quadrado são paralelos, como em S1, ou que a soma das medidas dos ângulos internos de um dado triângulo no plano tem a propriedade de somar sempre 180° , como em S2. Obedecem aos princípios do terceiro excluído e da não contradição, visto que elas ou são falsas, ou são verdadeiras, não cabendo outro valor lógico, e, além disso, não são afirmações onde encontramos contradições, já que ou são verdadeiras ou são falsas.

Por meio do *Princípio do Terceiro Excluído*, uma sentença pode ser verdadeira ou falsa, não podendo assumir uma terceira opção. Assim, as sentenças S1, S2, S4 e S5 são sentenças que possuem valor lógico verdadeiro, ao passo que a sentença S3 tem seu valor falso.

Ainda podemos, de acordo com Filho (2012), classificá-las como válidas quando forem verdadeiras, e não válidas quando elas forem falsas. Neste sentido, as afirmações S1, S2, S4 e S5 são válidas e a S3 é não válida.

Em Bicudo (2002), “demonstrar uma proposição (exprimindo uma propriedade de um conceito) significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas” (BICUDO, 2002, p. 80). Porém, ainda segundo o autor, existem algumas proposições que não são possíveis de serem demonstradas e, para estas, são estabelecidas algumas “arquiteturas das teorias matemáticas: que as consideram como sendo conceitos primitivos (axiomas) e conceitos derivados (teoremas)” (BICUDO, 2002, p. 80).

Um axioma ou postulado é uma sentença matemática que não é uma definição e não precisa ser demonstrada. Bem diferente do que ocorre com os teoremas – que precisam de demonstração –, os axiomas ou postulados não precisam ser demonstrados e são apresentados realmente como decretos. Entretanto, como as noções primitivas, esses “decretos” não surgem de opiniões pessoais isoladas, são frutos da experiência, da observação e, também, de certo “consenso coletivo” (FILHO, 2012, p. 164).

“Um **teorema** é uma sentença matemática válida, cuja validade é garantida por uma demonstração matemática” (FILHO, 2012). Os livros de matemática apresentam sentenças que já foram provadas, ou seja, teoremas. Um teorema pode receber nomes distintos, dependendo do contexto em que ele está. Eles podem ser denominados de Corolário, Lema ou proposição.

- Chamamos **Corolário** a um teorema obtido como consequência de outro recém-provado. Neste caso, o segundo teorema é chamado **corolário do teorema** provado.
- Já um teorema usado para provar outro que lhe sucede é chamado **lema**; podemos dizer que um lema é um teorema auxiliar ou preparatório, que será usado na demonstração de outro teorema.
- Em algumas ocasiões, chama-se **proposição** a um teorema que não é central no contexto e tem importância limitada (FILHO, 2012, p. 137).

Assim, em matemática, todas as afirmações devem ser demonstradas, provadas, para serem válidas, a menos que sejam axiomas.

Silva (2002) considera a demonstração matemática como sendo simultaneamente uma “peça de retórica destinada a convencer, como um encadeamento lógico conduzindo à verdade e ao conhecimento e como um possível catalisador de descoberta matemática” (SILVA, 2002, p. 68).

Neste sentido, uma demonstração matemática é uma maneira de convencimento de uma verdade e ao mesmo tempo é um modo de produzir novas verdades, ou seja, como já enunciado por Bicudo (2002), é um modo de argumentar a partir de proposições já demonstradas, bem como, um modo de originar esse e encadeamento lógico.

Para Silva (2002), as demonstrações matemáticas possuem como características os aspectos lógico-epistemológico, retórico e heurístico:

Chamarei de lógico-epistemológico esse aspecto das demonstrações que as mostra como objetos lógicos ideais, árvores ou sequências ordenadas no espaço lógico, segundo relações de dependência, ou consequência, lógica. E de retórico o aspecto das demonstrações, segundo o qual, elas aparecem como portadoras de força coercitiva de aquiescência às teses demonstradas. Há ainda um aspecto a ser considerado. Demonstrações podem ter também uma função heurística. Isto é, elas podem ser indutoras de descoberta matemática (SILVA, 2002, p. 69).

A partir desses aspectos observados, Silva (2002) refere-se a uma demonstração *matematicamente perfeita* como sendo uma junção desses fatores, ou seja, ela é “logicamente correta, compreensível a um agente racional com limitações cognitivas humanas e, ainda assim, heurísticamente estimulante” (SILVA, 2002, p. 71). Assim, entende-se que uma demonstração perfeita é aquela em que a riqueza heurística deve ser acessível a quem for se utilizar dela, levando em consideração que todos somos limitados cognitivamente. A única exigência é que ela esteja estruturada de acordo com as normas lógicas.

Neste sentido, quando falamos em demonstração, estamos falando do meio pelo qual os matemáticos se utilizam para validar seus resultados. Nas palavras de Bicudo: “de fato, parece um fato notório que o matemático, quando expõe uma teoria, em sua área de interesse, a seus pares, preocupa-se, formalmente, com duas operações fundamentais: DEFINIR seus conceitos e DEMONSTRAR as propriedades desses conceitos” (BICUDO, 2002, p. 80).

Porém, esse modo de validar verdades matemáticas se modifica ao longo da história da matemática. Neste trabalho, nos propusemos a compreender as diferentes maneiras de demonstrar uma verdade matemática ao longo do percurso histórico dessa ciência. O resultado desse estudo está exposto na continuidade desse capítulo.

3.2 EXEMPLOS DE DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA ANTIGUIDADE

Apresentamos nesse tópico nossa compreensão sobre as demonstrações matemáticas na Grécia Antiga, época em que surgem as demonstrações matemáticas. Para isso, apresentamos, além das teorias desenvolvidas na época, alguns aspectos das filosofias de

Platão e Aristóteles, sistematizadores do pensamento dedutivo e lógico. Ressaltamos que Platão não foi matemático, mas sua filosofia influencia os trabalhos de alguns matemáticos importantes da era grega, como Euclides, por exemplo, que sistematiza o conhecimento matemático na obra *Os Elementos*. Já, Aristóteles foi um dos primeiros sistematizadores da lógica, que fundamenta as regras de demonstração matemática.

3.2.1 As demonstrações matemática na Grécia Antiga

A matemática em sociedades antigas era entendida como uma técnica que possibilitava a realização de cálculos aritméticos e geométricos elementares. Dentre as civilizações antigas, segundo Silva (2007), tanto os egípcios quanto os babilônios foram povos que fizeram muitas realizações em matemática. No entanto, em suas produções não havia “o caráter sistemático, rigoroso, puro – isto é, não empírico – e, em grande medida, a indiferença com respeito a aplicações práticas imediatas que caracterizam o conhecimento matemático, tal como o entendemos hoje” (SILVA, 2007, p. 31).

Possivelmente, muitos resultados que conhecemos hoje tenham sido originados de conhecimento dessas civilizações. Como exemplo, podemos falar no famoso teorema de Pitágoras⁷, que certamente fazia parte da matemática babilônica. Contudo, este teorema não tinha uma demonstração desenvolvida segundo uma argumentação irrefutável que viesse garantir sua validade, “essa é uma invenção grega e caracteriza a matemática produzida por essa civilização” (SILVA, 2007, p. 31).

Acontece que ao passar do tempo, por volta dos últimos séculos do segundo milênio a. C., “algumas civilizações desapareceram, o poder do Egito e da Babilônia declinou, e outros povos, especialmente os hebreus, os assírios, os fenícios e os gregos, passaram ao primeiro plano” (EVES, 2004, p. 94). Com todas as mudanças que ocorreram, houve também, em algum momento da história, questionamentos a cerca da veracidade dos artifícios matemáticos que eram utilizados, acontecendo, dessa maneira, as primeiras verificações que garantiriam as verdades matemáticas válidas.

Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como “*Por que* os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?” e “*Por que* o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?”. Algumas experiências com o método demonstrativo foram se consubstanciando e se impondo, e a feição dedutiva da matemática, considerada

⁷ Teorema de Pitágoras: nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

pelos douts como sua característica fundamental, passou ao primeiro plano. (EVES, 2004, p. 94).

A principal fonte de estudos a respeito do desenvolvimento da matemática grega, segundo Eves (2004), é o Sumário Eudemiano de Proclo, no qual ele apresenta um resumo a cerca da geometria grega, que vai desde as primeiras produções matemáticas realizadas por esta civilização até Euclides com *Os elementos*.

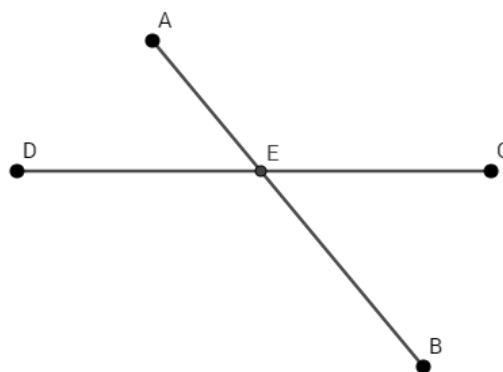
De acordo com o Sumário Eudemiano, o primeiro homem a demonstrar uma verdade matemática foi Tales de Mileto, que enunciou os seguintes resultados:

1. Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
2. Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
3. Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
4. Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.
5. Um ângulo inscrito num semicírculo é reto (EVES, 2004, p. 95).

Apresentaremos a demonstração do resultado 3, no qual Tales, através de meios lógicos e dedutivos, provou que ângulos opostos pelo vértice são ângulos sempre iguais. Esta demonstração foi retirada dos elementos de Euclides e é a prova da proposição 15 do Livro I, tradução de Irineu Bicudo (2009).

Caso duas retas se cortem, fazemos ângulos no vértice iguais entre si.

Figura 1- Representação de ângulos opostos pelo vértice.



Fonte: adaptada de Euclides (2009).

Demonstração: Cortem-se, pois, as retas AB, CD no ponto E; digo que, por um lado, o ângulo sob AEC é igual ao DEB, e, por outro lado, os sob CEB, ao sob AED. Pois, como a reta AE foi alteada sobre a reta CD, fazendo os ângulos sob CEA, AED, portanto, os ângulos sob CEA, AED são iguais a dois retos. De novo, como a reta DE foi alteada sobre a reta AB, fazendo os ângulos sob AED, DEB, portanto, os ângulos sob AED, DEB são iguais a dois retos. Mas foram provados também os sob CEA, AED iguais a dois retos; portanto, os sob CEA, AED são iguais aos sob AED, DEB. Fique subtraído o sob AED comum; portanto, o sob CEA restante é igual ao sob BED restante; do mesmo modo, então, será provado que também os sob CEB, DEA são iguais.

Portanto, caso duas retas se cortem, fazem os ângulos no vértice iguais entre si: o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 109).

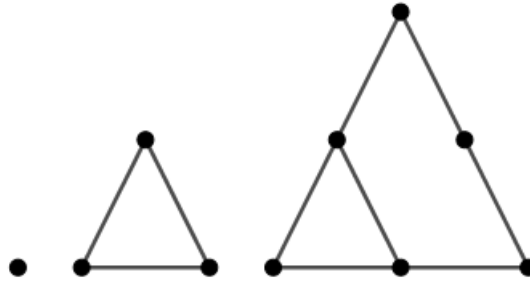
Outro matemático citado no Sumário Eudemiano é Pitágoras, que nasceu por volta de 572 a. C. em Samos, mais especificamente na ilha egeia. Ao que tudo indica, Pitágoras viveu por certo período de tempo no Egito e, ao retornar a Samos, segundo relata Eves (2004), deparou-se com um tirano no poder: Polícrates. Além disso, toda a Jônia estava sob o domínio persa, o que fez com que ele optasse por morar no porto marítimo de Crotona ao sul da Itália, onde havia uma colônia grega. A respeito da vida de Pitágoras, pouca coisa se sabe. Mas suas produções permanecem até os dias atuais,

pouco se conhece da vida e dos feitos do Pitágoras histórico, ele e seus ensinamentos dissolvem-se na névoa de um passado mítico em que a realidade e a lenda se misturam. Mas a tradição pitagórica sobreviveu ao seu fundador e influenciou de modo inequívoco o pensamento e a ciência ocidentais (SILVA, 2007, p. 32).

Ao se instalar em Crotona, ele funda a escola pitagórica, “uma seita mística na qual conviviam o racionalismo grego e os elementos do pensamento mágico de povos mais ao leste e ao sul” (SILVA, 2007, p. 32). Tal escola era um centro de estudos filosóficos, matemáticos e das ciências naturais. Os pitagóricos são conhecidos pela sua “teoria, meio metafísica, meio mágica, que tudo se reduz a números” (SILVA, 2007, p. 32). Acredita-se que a teoria dos números tenha começado a se desenvolver nesse meio em que a filosofia da escola estava em vigor.

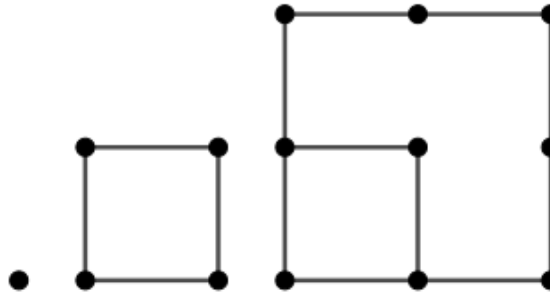
É atribuída aos pitagóricos a descoberta dos *números amigáveis*, números tais que a soma dos divisores próprios de um resulta no outro. São amigáveis, por exemplo, os números 284 e 220, os números 1184 e 1210, como também os números 17296 e 18416. Hoje já são de conhecimento dos matemáticos todos os números amigáveis existentes menores do que 1 bilhão. Além desses, o conceito de *números figurados*, que são números que podem ser representados por uma coleção de pontos numa dada configuração geométrica, são também criações atribuídas a eles. Vejamos alguns exemplos a partir das imagens abaixo.

Figura 2 - Números triangulares.



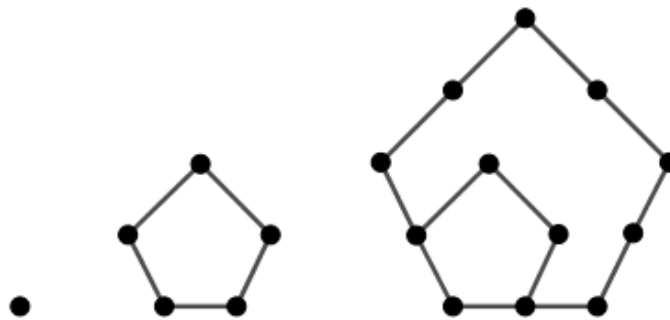
Fonte: adaptado de Eves (2004).

Figura 3 - Números quadrados



Fonte: adaptada de Eves (2004)

Figura 4 - Números pentagonais.

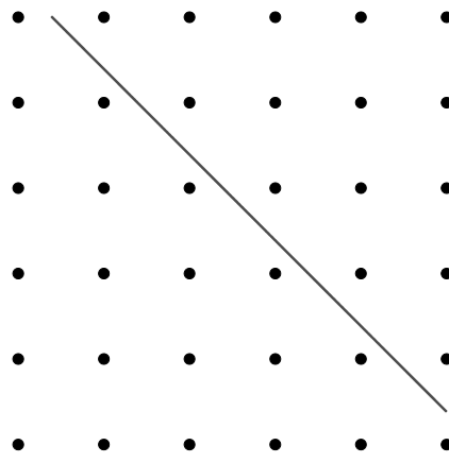


Fonte: adaptada de Eves (2004).

Segundo Eves (2004), esses números representam um elo entre geometria e aritmética. Olhando as figuras que representam os números figurados, partindo-se da primeira nomeamos esses números de triangulares, quadrados e pentagonais. É claro que podemos encontrar mais deles. Nas figuras estão representados apenas alguns exemplos, mas podemos achar tanto mais números com essas configurações, quanto com outras, hexagonais, heptagonais, e assim por diante.

O interessante é que “se podem estabelecer muitos teoremas interessantes relativos a números figurados de maneira puramente geométrica” (EVES, 2004, p. 101). Vejamos o seguinte teorema: *Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos*. Na figura a seguir, como um exemplo, podemos ver que o dado número quadrado, na sua forma geométrica, foi dividido em dois triangulares, o que de certa forma justifica o teorema.

Figura 5 - Representação da divisão de um número quadrado em dois triangulares.



Fonte: adaptada de Eves (2004).

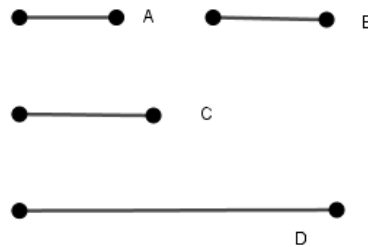
Mas também podemos prover uma demonstração algébrica para este resultado. É claro que o n -ésimo número triangular, T_n , pode ser obtido pela soma da progressão, $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, e, como é evidente que o n -ésimo número quadrado S_n é n^2 , podemos demonstrar o teorema da seguinte forma: $S_n = n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = T_n + T_{n-1}$. O que prova algebricamente o teorema, visto que encontramos a forma de um número quadrado como dois triangulares e sucessivos.

Também se credita aos pitagóricos a descoberta dos *números perfeitos, abundantes e deficientes*. São perfeitos os números cuja soma de seus divisores próprios são iguais a eles mesmos. Os números abundantes são os que a soma de seus divisores próprios é menor que eles. E, caso a soma dos divisores próprios exceda o número, ele é deficiente. Segundo Eves (2004) em *Os elementos*⁸, Euclides (c. 300 a. C.) demonstra “que se $2^n - 1$ é um número primo, então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é um número perfeito” (EVES, 2004, p. 99). Passemos à demonstração deste fato, também retirada da tradução feita por Bicudo (2009), do livro “Os Elementos”, presente no Livro IX, proposição 36.

⁸ Obra de que falaremos na continuidade do texto.

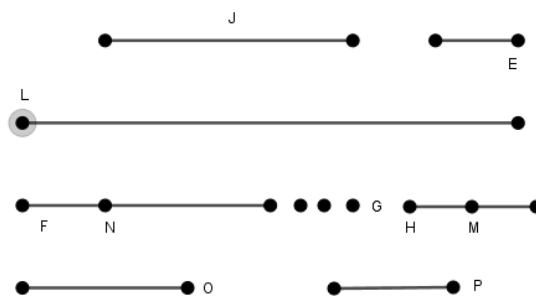
Caso números, quantos quer que sejam, a partir da unidade, sejam expostos, continuamente, na proporção duplicada, até que o que foi composto todo junto se torne primo, e todo junto, tendo sido multiplicado pelo último, faça algum, o produzido será perfeito.

Figura 6 - Representação dos números A, B, C e D.



Fonte: adaptada de Euclides (2009).

Figura 7 - Representação dos números J, E, L, FG, FN, NG, HI, HM, MI, O e P.



Fonte: adaptada de Euclides (2009).

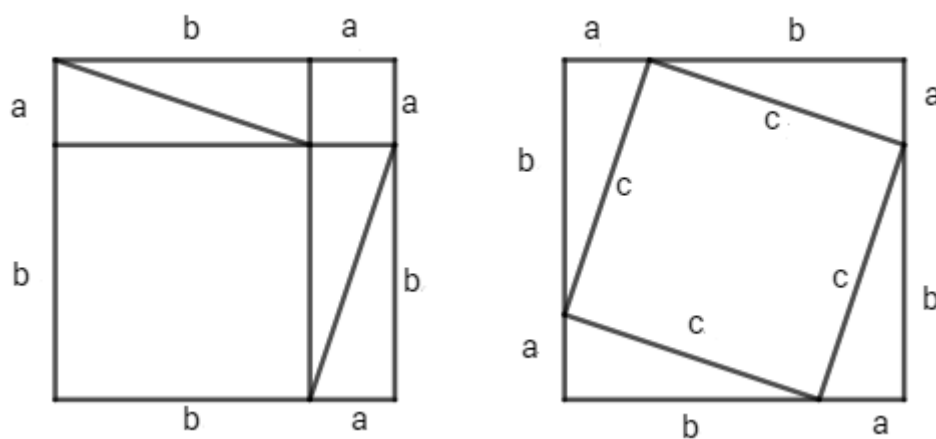
Demonstração: Fiquem, pois, expostos os números A, B, C, D, quantos quer que sejam, a partir da unidade, na proporção duplicada, até que o que foi composto todo junto se torne primo, e o E seja igual ao todo junto, e o E, tendo multiplicado o D, faça o FG. Digo que o FG é perfeito.

Pois, quantos são os A, B, C, D, em quantidade, tantos fiquem tomados, os E, HI, J, L, a partir do E, na proporção duplicada; portanto, por igual posto, como o A está para o D, assim o E para o L. Portanto, o dos E, D é igual ao dos A, L. E o dos E, D é o FG; portanto, também os dos A, L é o FG. Portanto, o A, tendo multiplicado o L, fez o FG; portanto, o L mede o FG, segundo as unidades no A. E o A é uma díade; portanto, FG é o dobro do L. Mas também ao L, J, HI, E são, continuamente, o dobro, um do outro; portanto, os E, HI, J, L, FG estão em proporção continuada, na proporção duplicada. Fique, então, subtraído, do segundo HI e do último FG, cada um dos HM, FN, igual ao primeiro E; portanto, como o excesso do segundo está para o primeiro, assim o excesso do último para todos os antes dele mesmo. Portanto, como o MI está para o E, assim o NG para os L, J, IH, E. E o MI é igual ao E; portanto, também o NG é igual aos L, J, HI, E. E, também o FN é igual ao E, e o E, aos A, B, C, D, e à unidade. Portanto, o todo FG é igual tanto aos E, HI, J, L quanto aos A, B, C, D, e à unidade; e é medido por eles. Digo que também o FG não será medido por nenhum outro, além dos A, B, C, D, E, HI, J, L, e da unidade. Pois, se possível, algum, o O, meça o FG, e o O não seja o mesmo que algum dos A, B, C, D, E, HI, J, L. E, o O mede o FG o mesmo número de vezes quantas unidades estejam no P; portanto, o P, tendo multiplicado o O, fez o FG. Mas, de fato, também

o E, tendo multiplicado o D, fez o FG; portanto, como o E está para o P, o O para o D. E, como os A, B, C, D estão, a partir da unidade, em proporção continuada, portanto, o D será medido por nenhum outro número, além dos A, B, C. E o O foi suposto o mesmo que nenhum dos A, B, C; portanto, o O não medirá o D. Mas, como o O para o D, o E para o P; portanto, nem o E mede o P. E o E é primo; e todo número primo [é] primo com todos que não mede. Portanto, os E, P são primos entre si. E os primos são também os menores, e os menores medem os que têm a mesma razão o mesmo número de vezes, tanto o antecedente, o antecedente quanto o consequente, o consequente; e, como o E está para o P, o O para o D; portanto, o E mede o O o mesmo número de vezes que o P, o D. Mas o D é medido por nenhum outro, além dos A, B, C; portanto, o P é o mesmo que um dos A, B, C. Seja o mesmo que B. E quantos são os B, C, D em quantidade tantos fiquem tomados, os E, HI, J, a partir do E. E os E, HI estão na mesma razão com os B, C, D; portanto, por igual posto, como o B está para o D, o E para o J. Portanto, o dos B, J é igual ao dos D, E; mas o dos D, E é igual ao dos P, O; portanto, também o dos P, O é igual ao dos B, J. Portanto, como o P está para o B, o J para o O. E o P é o mesmo que B; portanto, também o J é o mesmo que o O; o que é impossível; pois o O foi suposto não o mesmo que algum dos expostos. Portanto, nenhum número medirá o FG, além dos A, B, C, D, E, HI, J, L, e da unidade. E foi provado o FG igual aos A, B, C, D, E, HI, J, L, e à unidade. Mas um número perfeito é o que é igual às partes de si mesmo; portanto, o FG é perfeito; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 351).

Mas talvez o trunfo da escola esteja no famoso teorema de Pitágoras, que afirma “que o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos” (EVES, 2004, p. 103). Este teorema já era conhecido pelos babilônios, mas sua primeira demonstração pode ter sido dada por Pitágoras, ao que tudo indica por um processo de decomposição.

Figura 8 - Representação da possível decomposição feita por Pitágoras .



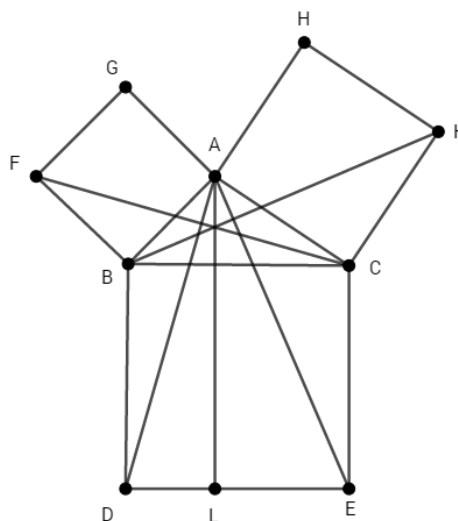
Fonte: Eves (2004).

Demonstração: Sejam a , b e c os catetos e a hipotenusa respectivamente, de um dado triângulo retângulo, e consideremos os quadrados como aparecem nas figuras anexa acima, com lados iguais à $a + b$. Nosso quadrado da esquerda é composto por seis partes, os dois

quadrados dispostos sobre os catetos, e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado, com as medidas a , b e c . Nosso segundo quadrado, o da direita, é composto por cinco partes, o quadrado sobre a hipotenusa e quatro outros triângulos retângulos congruentes ao mesmo triângulo dado. Retirando as partes iguais, ou seja, subtraindo iguais de iguais, concluiremos que o quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados sobre os catetos. Ainda, para provar que o quadrado da parte central da segunda figura possui lado de medida c , necessitamos usar o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é igual 180° , ou dois retos. A demonstração desse fato também está presente na obra euclidiana, na proposição 47, do livro I.

Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

Figura 9 – Representação da construção usada como apoio para a demonstração do teorema de Pitágoras.



Fonte: adaptada de Euclides (2009).

Demonstração: Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC.

Fiquem, pois, descritos, por um lado, o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC sobre as BA, AC, e, pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas as AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo.

E como, por um lado, a DB é igual à BC, e por outro lado, a FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo

ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD; pois, tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;] portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas as AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC. Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 133).

É atribuída aos pitagóricos também a elaboração da ideia de *grandezas incomensuráveis*. Tal descoberta, de acordo com Silva (2007), contrariava a ideia de que os números constituíam todas as coisas e, dessa maneira, a realidade. Por isso, foi mantida em segredo e, segundo lendas, pode ter custado a vida de um membro que tentou divulgá-la. Segundo o modo de pensar dos pitagóricos, como tudo de fato era constituído de números, esperava-se que tudo estivesse em uma relação de proporcionalidade, o que não ocorreu na verificação de alguns casos estudados.

Para entender esse fato, podemos pensar, por exemplo, na comensurabilidade entre o lado de um quadrado e sua diagonal. Se tentarmos achá-la não a encontraremos, pois esses entes do quadrado (lado e diagonal) não são comensuráveis, ou seja, não é possível expressar ambos no mesmo conjunto numérico. Se os números racionais fossem dispostos em uma reta, todos estariam bem espaçados segundo a unidade escolhida. A incomensurabilidade exibia números que não se comportavam de acordo com a unidade escolhida. Daí,

novos números tiveram de ser inventados para serem associados a esses pontos; e não sendo racionais, vieram a se chamar números irracionais (o que significa números não racionais). A descoberta desses números assinala um dos grandes marcos da história da matemática (EVES, 2004, p. 105).

Silva (2007) nos diz que a descoberta da incomensurabilidade constitui a primeira grande crise enfrentada pelos matemáticos, mas que foi rapidamente superada a partir das teorias de Eudoxo, a respeito das proporcionalidades, e também no século XIX com as teorias dos irracionais por Dedekind.

3.2.2 As filosofias de Platão e Aristóteles

Platão viveu mais ou menos entre os anos 476 e 347 a. C. e sua filosofia, segundo Silva (2007), busca compreender a realidade (sentida ou pensada) em dois níveis distintos de mundo: “um mundo transcendente perfeito e imutável – o mundo do ser, atemporal e eterno – e outro imperfeito e corruptível – o mundo imanente do vir-a-ser, imerso no tempo e no torvelinho da transformação incessante, este em que nós vivemos” (SILVA, 2007, p. 38). Para Platão, o mundo imanente (este o qual fazemos parte) é acessível a nós por meio dos sentidos, já o transcendente apenas pelo entendimento ou pela razão.

No que diz respeito às coisas deste mundo acessível, por intermédio dos sentidos há, de acordo com a filosofia de Platão, como descreve Silva (2007), objetos que, por exemplo, podem figurar serem circulares e até pessoas se assemelharem a boas. Mas somente no mundo transcendente encontraremos “a própria Ideia de circularidade, a bondade sem jaça e os círculos perfeitos” (SILVA, 2007, p. 39).

Em relação à matemática, a filosofia platônica diz que as “Ideias matemáticas” assumem instâncias perfeitas e dessa forma não podem ser acessíveis aos sentidos, já que pertencem ao mundo transcendental.

Os objetos triangulares e os pares de objetos do mundo físico, por sua vez, têm apenas uma relação de *semelhança* – não de identidade – com as formas. Dizemos que um objeto sensível tem a forma triangular – e isso quer dizer que ele é semelhante a um triângulo, mas não é ele próprio um triângulo – e que um par qualquer de objetos tem a forma do número 2, isto é, a forma de *algo e algo* – e isso é um modo de dizer que ele é semelhante a um qualquer número 2, mas não é um deles (SILVA, 2007, p. 41).

Para essa filosofia, a matemática ocupa-se das formas e não das ideias. As formas e os objetos matemáticos existem antes da atividade matemática que, segundo Platão, é o meio pelo qual ascendemos até eles para estudá-los. Assim, é via intelecto que podemos conhecer os entes matemáticos. De acordo com Silva (2007), “os sentidos podem nos sugerir, conduzir nossa atenção para as entidades perfeitas; conhecê-las, porém, é tarefa exclusiva da inteligência” (SILVA, 2007, p. 42).

Esse modo de pensar admite o homem como possuidor de uma alma racional e de um corpo sensível. A alma pode ascender até o mundo das ideias, onde já esteve antes de se ajuntar a um corpo. O corpo percebe aquilo que lhe é posto por intermédio dos sentidos e não pode, a partir disto, desenvolver conhecimento perfeito e indubitável. “As verdades matemáticas, em particular, expressam simplesmente, para Platão, relações universais e imutáveis entre as formas matemáticas” (SILVA, 2007, p. 42).

Platão não era um matemático, mas sem dúvidas foi um grande influenciador no desenvolvimento da matemática, visto que quase todas as descobertas matemáticas da época são feitas por frequentadores da Academia de Platão.

Mais que uma filosofia da matemática, Platão nos legou um estereótipo. Hoje, poucos ainda aceitam seriamente o reino puro de Ideias de Platão, sua teoria da reminiscência, e outras idiossincrasias da sua filosofia, mas a imagem da matemática como uma ciência de um domínio fora desse mundo ao qual ascendemos pelo pensamento é ainda a “filosofia” natural dos matemáticos (SILVA, 2007, p. 43).

Aristóteles (384-322 a. C), discípulo e crítico da teoria de Platão, também influenciou o fazer matemático grego. Segundo Silva (2007), Aristóteles não admitia a existência de um mundo transcendental, onde haveria o conceito de ideias e formas matemáticas. Para Aristóteles, as formas geométricas e números existem “apenas como *aspectos* de objetos e coleções de objetos reais, isto é, notas características desses objetos cuja existência depende da existência dos próprios objetos” (SILVA, 2007, p. 43). Deste modo, em sua filosofia não aparecem os conceitos de ideia ou formas transcendentais, isto é, pertencentes a um mundo que transcende, mas apenas objetos matemáticos vistos de acordo com os aspectos que se fazem importantes, ora num ou em outro momento.

A matemática assim entendida não se diferencia das demais ciências empíricas. Assim como na física, preocupa-se com os objetos pertencentes à realidade desde mundo, diferenciando-se apenas no modo de estudar tais objetos. “A matemática considera-os exclusivamente do aspecto formal matemático, isto é, vê neles apenas sua forma geométrica ou aritmética” (SILVA, 2007, p. 44).

Os objetos matemáticos são, portanto, uma abstração, ou uma ficção útil. Eles são aspectos dos objetos empíricos, sendo os objetos empíricos considerados como matemáticos quando estamos interessados neles enquanto matemáticos.

Analogamente, para Aristóteles, a matemática estuda objetos sob certos aspectos apenas, uma bola como uma esfera, um par de dois livros como dois. Ao fazer isso, dizemos, abstraímos da bola a sua forma geométrica e da coleção de livros a sua forma aritmética. Visto assim, Aristóteles é um empirista em ontologia, pois, para ele, apenas os objetos dos sentidos existem realmente, com um sentido pleno de existência (SILVA, 2007, p. 45).

Quanto aos objetos matemáticos que não têm correspondentes reais, como por exemplo, o miriágono⁹, Aristóteles diz que devemos reconhecer certas formas fictícias. Formas

⁹ É um polígono que apresenta 10000 lados.

possíveis de existência, uma vez podem ser criadas a partir de objetos reais. O próprio miriágono pode ser construído a partir de círculos e segmentos de retas. E até números tão grandes, que por serem tão grandes não podem enumerar um conjunto, podem ser obtidos por acréscimos sucessivos de unidades.

Na filosofia de Aristóteles, os objetos sensíveis (os reais ou empíricos) são formas aproximadamente perfeitas. Uma bola, por exemplo, está próxima de ser uma esfera, mas não o é. A abstração aristotélica é “uma operação mais complexa que a mera separação em pensamento (ou, melhor ainda, separação lógica) de um aspecto como ele realmente se apresenta no objeto” (SILVA, 2007, p. 46).

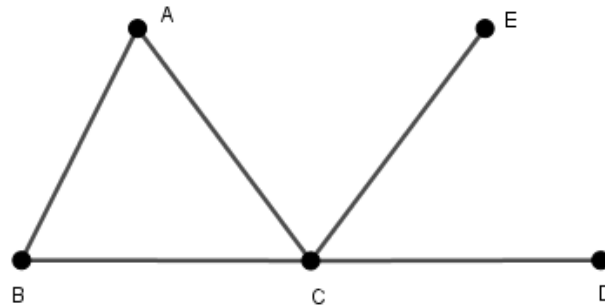
Assim, surge mais um elemento na teoria aristotélica, *a idealização*, pois quando usamos uma esfera em lugar de uma bola da realidade idealizamos essa forma, ou seja, desconsideramos suas diferenças e, dessa maneira, “uma esfera matemática é, assim, a idealização de um aspecto da bola, e só assim ela existe” (SILVA, 2007, p. 46).

Trazendo essa concepção de idealização dos objetos matemáticos a partir dos objetos reais, como são entendidas as verdades matemáticas, de acordo com a filosofia aristotélica? Para ele, os objetos sensíveis não têm, como em Platão, uma forma ideal que seja independente deles. Dessa forma, as verdades (ou asserções) matemáticas dizem respeito aos objetos reais. Vejamos um exemplo: Silva (2007) apresenta uma afirmação muito conhecida, o teorema de Tales, que diz: “(1) a soma dos ângulos internos de um objeto triangular qualquer é igual a dois retos. Ou ainda, equivalentemente: (2) a soma dos ângulos internos de um objeto triangular qualquer, na medida em que ele é um objeto triangular, é igual a dois retos” (SILVA, 2007, p. 46-47). A afirmação (1) está nos dizendo que todo objeto triangular apresenta a propriedade de ter seus ângulos somando igual a dois retos; já (2) diz a mesma coisa, porém acrescenta a necessidade do objeto ser triangular para apresentar a propriedade enunciada.

Para demonstrar essa propriedade (ou teorema), escolhemos um objeto triangular qualquer. Utilizando construções, constatamos de alguma forma, quer empiricamente ou por imaginação, que os ângulos internos desse objeto somam dois ângulos retos. Sempre considerando que as formas geométricas, os ângulos, e os aspectos desse objeto são instâncias perfeitas. Vamos à prova dada por Euclides à afirmação 1, que em sua obra é a proposição 32 do Livro I, como disposta em Bicudo (2009).

Tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois anteriores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos.

Figura 10 - Representação da construção usada como apoio para a demonstração da soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: adaptada de Euclides (2009).

Demonstração: Seja o triângulo ABC, e fique prolongado um lado dele, o BC, até o D; digo que o ângulo sob ACD, exterior, é igual aos dois sob CAB, ABC, interiores e opostos, e os três ângulos sob ABC, BCA, CAB, interiores do triângulo, são iguais a dois retos.

Fique, pois, traçada, pelo ponto C, a CE paralela à reta AB.

E como a AB é paralela à CE, e a AC caiu sobre elas, os ângulos sob BAC, ACE, alternos, são iguais entre si. De novo, como a AB é paralela à CE, e a reta BD caiu sobre elas, o ângulo sob ECD, exterior, é igual ao sob ABC, interior e oposto. Mas foi provado também o sob ACE igual ao sob BAC; portanto, o ângulo sob ACD todo é igual aos dois sob BAC, ABC, interiores e opostos.

Fique adicionada o sob ACB comum; portanto, os sob ACD, ACB são iguais aos três sob ABC, BCA, CAB. Mas os sob ACD, ACB são iguais a dois retos; portanto, os sob ACB, CBA, CAB são iguais a dois retos.

Portanto, tendo sido prolongado um dos lados de todo triângulo, o ângulo exterior é igual aos dois interiores e opostos, e os três ângulos interiores do triângulo são iguais a dois retos; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p.122).

Porém, quando analisamos esse objeto particular, verificamos que a única propriedade que desempenha papel na demonstração é a *triangularidade*. Desse modo, por generalização, todos os objetos triangulares têm essa propriedade.

Assim, a demonstração do teorema envolve *verificação* empírica (ou, se usamos apenas imaginação, o esboço mental de uma verificação empírica, que também conta como uma verificação empírica, já que a imaginação, nesse caso, é apenas reprodutiva: o objeto triangular imaginado é a imagem de um objeto real possível) para mostrarmos que um particular objeto tem a propriedade requerida, e *reflexão* ou *análise lógica*, isto é, a razão para fundamentar a generalização (SILVA, 2007, p. 48).

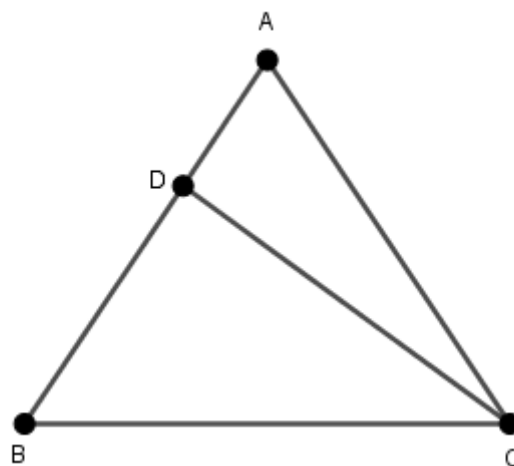
Aristóteles, mesmo sendo um empirista, admitia como válidos os métodos matemáticos de demonstrações de sua época, que estabeleciam resultados universais, mesmo que não partissem de fatos enumerativos e das necessidades humanas, visto que versavam sobre coisas reais.

Dessa maneira, em relação às questões concernentes aos objetos matemáticos “ele parece admitir um misto de racionalismo e empirismo em questões epistemológicas – as que dizem respeito à verdade matemática” (SILVA, 2007, p. 48). Entretanto, há um método de demonstração matemática, a redução ao absurdo, que Aristóteles muito criticou. Esse método consiste em negar a asserção que se quer provar e, dessa forma, como consequência, chegar a alguma contradição. O que justifica que a asserção é verdadeira. Para Aristóteles, esse tipo de demonstração não é causal, pois se chega a uma verdade sem se saber o motivo que a torna verdadeira, daí suas críticas ao método. Ainda de acordo com Ávila (2001), as demonstrações por absurdo seguem um roteiro. Para se provar que $A \rightarrow B$, ou seja, que dada uma proposição A concluiremos B , começamos supondo A verdadeira, e B falsa. “esta última é chamada ‘hipótese do raciocínio por absurdo’, uma suposição apenas temporária, até chegarmos a uma contradição, um absurdo. Somos então forçados a remover a hipótese do raciocínio por absurdo e concluir que B é verdadeira” (ÁVILA, 2001, p. 04).

Vejamos um exemplo desse tipo de prova através da proposição 6 do Livro I dos elementos.

Caso os dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, também os lados que se estendem sob os ângulos iguais serão iguais entre si.

Figura 11 - Representação da construção usada como apoio para a demonstração da igualdade dos lados AB e AC do triângulo ABC devido à igualdade dos ângulos ABC e ACB .



Fonte: adaptado de Euclides (2009).

Demonstração: Seja o triângulo ABC , tendo o ângulo sob ABC igual ao ângulo sob ACB ; digo que também o lado AB é igual ao lado AC .

Pois, se AB é desigual à AC, uma delas é maior. Seja maior a AB, e fique subtraída da maior AB a DB igual à menor AC, e fique ligada a DC.

Como, de fato, a DB é igual à AC, e a BC é comum, então, as duas DB, BC são iguais às duas AC, CB, cada uma a cada uma, e o ângulo sob DBC é igual ao ângulo sob ACB; portanto, a base DC é igual à base AB e o triângulo DBC será igual ao triângulo ACB, o menor, ao maior; o que é absurdo; portanto, a AB não é desigual à AC; portanto, é igual.

Portanto, caso os dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, também os lados que se estendem sob os ângulos iguais serão iguais entre si; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 103).

Entre as principais contribuições de Aristóteles para a matemática, destaca-se a sistematização da lógica por meio do estudo das formas de inferência que, no século XIX, abrem caminhos para o desenvolvimento da matemática formal.

Aristóteles também apresenta em sua filosofia a concepção de matemática como uma ciência dedutiva. Para ele, a matemática é como um edifício estruturado sobre verdades relacionadas segundo os preceitos lógicos a partir de pressupostos fundamentais. É a partir dessa ideia que Euclides escreve *Os Elementos*, um texto que enuncia verdades aritméticas e geométricas, partindo de um conjunto mínimo de axiomas e postulados.

As contribuições da silogística¹⁰ aristotélica fazem emergir no cenário do conhecimento matemático as raízes da lógica formal e da matemática enquanto uma ciência axiomático-dedutiva, propriamente dita que, mais tarde, se transformam num modelo científico da matemática. Silva (2007) afirma que “difícilmente poderíamos encontrar melhor exemplo que o de Aristóteles da influência da filosofia não apenas na reflexão sobre a matemática, mas no desenvolvimento da própria matemática” (SILVA, 2007, p. 53).

3.2.3 As demonstrações matemáticas em Euclides e os elementos

De acordo com o historiador Carl B. Boyer, autor do livro “História da Matemática”, com a morte de Alexandre, o Grande, os generais do exército grego acabaram por entrar em conflitos entre si. Em 306 a. C., por exemplo, o controle da parte egípcia do império grego estava nas mãos dos Ptolomeus, dos macedônios e dos governantes locais do Egito. Ptolomeu I comandava Alexandria com o auxílio de seu filho Ptolomeu II. Em seu governo fundou duas instituições importantes, que tornaram a região um dos principais centros de erudição da história, a saber, a universidade (Museum) e a Biblioteca.

¹⁰ **Silogismo** é um tipo de raciocínio dedutivo em que, “de duas proposições iniciais (as *premissas*), uma terceira (a *conclusão*) é logicamente tirada na medida em que ela estava implícita nas primeiras. O modelo do silogismo é ‘Todo A é B, ora, C é A, portanto C é B, onde A é o *meio-termo*, o que serve de intermediário entre B e C.’” (DUROZOI, G. e ROUSSEL, 1993).

Para compor esse centro de pesquisas, Ptolomeu II trouxe um grupo de sábios de diversas áreas. E nessa composição estava Euclides, autor de *Os elementos*. A respeito dele pouco se sabe, nas palavras de Boyer, “considerando a fama do autor e de seu *best-seller*, sabe-se notavelmente pouco sobre a vida de Euclides. Ele foi tão obscuro que nenhum lugar de nascimento é associado a seu nome” (BOYER e MERZBACH, 2012, p. 87). Em algumas edições que se fizeram de *Os elementos* há um engano ao identificar Euclides como sendo de Megara.

Em se tratando da sua formação, Boyer diz que “da natureza de seu trabalho, pode-se presumir que Euclides de Alexandria tenha estudado com os discípulos de Platão, senão na própria academia” (BOYER e MERZBACH, 2012, p. 87).

Euclides desenvolveu, além de os elementos outras obras, algumas das quais se perderam e outras foram preservadas. Entre as obras que se perderam estava um tratado sobre as cônicas, composto por quatro volumes, Lugares geométricos de superfície, Pseudaria e Porismas. Acerca dessas obras, segundo os historiadores, não fica claro que tipo de conteúdos elas possuíam, mas uma em especial, Porismas, se tornou uma grande perda.

A perda dos Porismas de Euclides é particularmente atormentadora. Pappus disse mais tarde que um porisma é algo intermediário entre um teorema, em que alguma coisa é proposta para demonstração, e um problema, em que alguma coisa é proposta para construção. Outros descrevem um porisma como uma proposição em que se determina uma relação entre quantidades conhecidas e variáveis ou indeterminadas, talvez a melhor aproximação da ideia de função da antiguidade (BOYER e MERZBACH, 2012, p. 88).

Dentre as obras que se preservaram estão: Os dados, Divisão de figuras, Os fenômenos, Óptica e Os elementos. Os dados, segundo Boyer e Merzbach (2012), é uma espécie de complemento para os seis primeiros volumes de *Os elementos* e, ao que parece, foi escrito para ser utilizado na universidade de Alexandria. Inicialmente são apresentadas quinze definições acerca de grandezas e lugares geométricos. Sua parte central é composta de noventa e cinco enunciados que versam sobre as implicações das condições e grandezas possíveis em problemas. Sua parte final traz enunciados referentes a relações entre grandezas lineares e angulares em um dado círculo. A próxima obra é *Divisão de figuras*, obra, aliás, que teria se perdido caso os sábios árabes não a tivessem traduzido. Sua versão original em grego segundo Boyer (1996) não sobreviveu, mas sabe-se que algumas provas contidas no livro foram omitidas, por serem consideradas fáceis. Seu conteúdo contém trinta e seis proposições, todas relacionadas à divisão de configurações planas.

Um fato interessante ocorre com a obra *Os fenômenos*, pois ela é comparável a outra de sua época.

Os fenômenos, de Euclides, é muito semelhante a *A esfera* de Autólico – isto é, uma obra de geometria esférica para o uso dos astrônomos. Uma comparação entre as duas mostra que os dois autores se aproveitaram fortemente de uma tradição de livro-texto que era bem conhecida de sua geração (BOYER, 1996, p. 70).

Este ocorrido pode ser verdade também para *Os elementos*, trabalho que falaremos mais adiante.

Óptica é uma das primeiras obras a falar sobre perspectiva, ou geometria da visão direta. O seu estudo era dividido em três partes, em óptica, “a geometria da visão direta”, em catóptrica, “a geometria dos raios refletidos” e dióptrica, “a geometria dos raios refratados”. Em especial, a “óptica de Euclides é digna de nota por adotar uma teoria de ‘emissão’ para a visão, segundo o qual o olho envia raios que vão até o objeto, em contraste com uma doutrina rival de Aristóteles, na qual uma atividade em um meio caminha em linha reta do objeto para o olho” (BOYER e MERZBACH, 2012, p. 88).

Entretanto, a obra mais importante, em matemática, desenvolvida por Euclides foi sem dúvidas *Os elementos*. Segundo Boyer (1996), a universidade de Alexandria era muito parecida com as instituições modernas de níveis superiores. “Parte dos professores provavelmente se notabilizava na pesquisa, outros eram melhores como administradores e outros ainda eram conhecidos pela capacidade de ensinar. Pelos relatos que possuímos, parece que Euclides definitivamente pertencia à última categoria” (BOYER, 1996, p. 71). Dessa forma, Boyer (1996) diz que ele era conhecido na universidade pela sua habilidade de expor bem as suas ideias. Essa habilidade, de acordo com o autor, foi a chave do sucesso na produção de *Os elementos*. É sabido que houve outras obras antes dessa, dentre as quais está a de Hipócrates de Chios, porém não resta se quer traços de nenhuma dessas obras.

Os elementos de Euclides superam de tanto seus competidores que foram os únicos a sobreviver. Não eram, como se pensa às vezes, um compêndio de todo o conhecimento geométrico; ao contrário, trata-se de um texto introdutório cobrindo toda a matemática *elementar* – isto é, aritmética (no sentido de ‘teoria dos números’), geometria sintética (de pontos, retas, círculos e esferas), e álgebra (não no sentido simbólico moderno, mas um equivalente em roupagem geométrica) (BOYER, 1996, p. 72).

Nas palavras de Proclo segundo Boyer (1996), ele descreve “Os elementos, em relação ao resto da matemática, como as letras do alfabeto em relação com a linguagem” (BOYER, 1996, p. 72).

Com o decorrer dos anos, outros autores incluíram no livro-texto de *Os elementos*, comentários explicativos, o que mais tarde veio a ser copiado pelos escribas posteriores, como parte do texto original. Alguns desses acréscimos permanecem no texto que possuímos nos dias atuais. “Acredita-se que a ordenação seja dele (de Euclides) e, presumivelmente, algumas provas foram fornecidas por ele; mas, afora isso, é difícil avaliar o grau de originalidade dessa obra, a mais renomada na história da matemática” (BOYER, 1996, p. 72).

A obra em si está dividida em treze livros ou capítulos. De acordo com Boyer (1996), os seis primeiros tratam de geometria plana elementar, os livros VII, VIII e IX, versam sobre teoria dos números, o livro X, sobre incomensuráveis, e os três últimos de geometria espacial.

O texto não contém em sua estrutura uma introdução, nem alguma preliminar antes de entrar em sua parte central. Parte-se do livro I, que se inicia com vinte e três definições, cinco postulados e cinco noções comuns. Acerca das definições, Boyer (1996) diz: “A deficiência, aqui, é que algumas definições não definem, pois não há um conjunto prévio de elementos não-definidos em termos dos quais os outros sejam definidos” (BOYER, 1996, p. 72). Assim, quando Euclides faz a sua primeira definição: “Ponto é aquilo de que nada é parte” (BICUDO, 2009, p. 97), não está definindo estes entes, pois para se definir algo, deve-se partir de termos precedentes, termos, aliás, bem mais conhecidos do que aquilo que se deseja definir.

Parte-se então, logo em seguida, das definições para os postulados e noções comuns. Vejamos abaixo como é apresentada essa parte da obra retirada do livro *Os elementos*, tradução de Irineu Bicudo (2009):

Postulados.

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descreve um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos (EUCLIDES, 2009, p. 98).

Noções comuns.

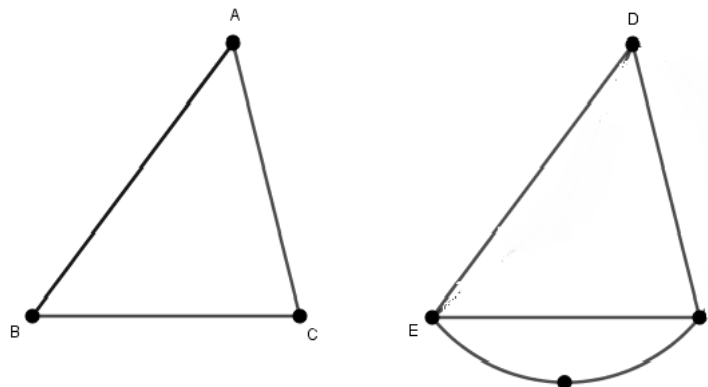
1. As coisas iguais às mesmas coisas são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma às outras são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área (EUCLIDES, 2009, p. 99).

Segundo Eves (2004), é interessante fazer alguns comentários acerca das proposições encontradas na obra. Para nós, como o foco são as demonstrações, destacaremos algumas para que possamos expor como Euclides aferia as provas nesta obra. Assim, olhando para o Livro I, selecionamos entre os vários métodos de provas três tipos: por superposição, por redução ao absurdo e por construção.

Começemos com a prova da proposição 4 da obra. “A demonstração se faz por superposição: colocando-se o ângulo dado de um dos triângulos sobre o ângulo dado do outro triângulo de maneira que os lados iguais também coincidam, prova-se que um dos triângulos pode ser aplicado no outro” (EVES, 2004, p. 169).

Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais.

Figura 12 – Representação da construção usada como apoio para a demonstração.



Fonte: adaptado de Euclides (2009).

Demonstração: Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, o AB ao DE, e, por outro lado, o AC ao DF, e o ângulo sob BAC igual ao ângulo sob EDF. Digo que também a base BC é igual à base EF, e o triângulo ABC será igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais, por um lado, o sob ABC ao sob o DEF e, por outro lado, o sob ACB ao sob DFE.

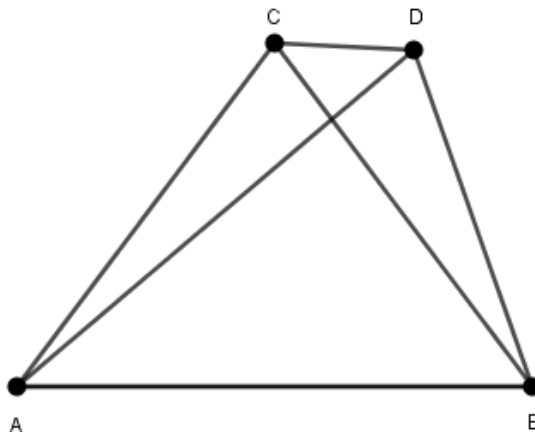
Pois, o triângulo ABC, sendo ajustado sobre o triângulo DEF, e sendo posto, por um lado, o ponto A sobre o ponto D, e, por outro lado, a reta AB sobre a DE, também o ponto B se ajustará sobre o E, por ser AB igual à DE; então, tendo se ajustado a AB sobre a DE, também a reta AC se ajustará sobre a DF, por ser o ângulo sob BAC igual ao sob EDF; desse modo, também o ponto C se ajustará sobre o ponto F, por ser, de novo, a AC igual à DF. Mas, por certo, também o B ajustou-se sobre o E; desse modo, a base BC se ajustará sobre a base EF. Pois se a

base B, tendo, por um lado, o B se ajustado sobre o E, e por outro lado, o c sobre o F, não se ajustar sobre a EF, duas retas conterão uma área; o que é impossível. Portanto, a base BC ajustar-se-á sobre a EF e será igual a ela; desse modo, também o triângulo ABC todo se ajustará sobre o triângulo DEF todo e será igual a ele, e os ângulos restantes ajustar-se-ão sobre os ângulos restantes e serão iguais a eles, por um lado, o sob ABC ao sob DEF, e, por outro lado, o sob ACB ao sob DFE. Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais (EUCLIDES, 2009, p. 101).

A prova por redução ao absurdo já foi discutida anteriormente nesse mesmo capítulo, vejamos mais um exemplo através da proposição 7 a seguir.

Sobre a mesma reta não serão construídas duas outras retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, no mesmo lado, tendo as mesmas extremidades que as retas do começo.

Figura 13 – Representação da construção usada como apoio para a demonstração por absurdo.



Fonte: adaptado de Euclides (2009).

Demonstração: Pois, se possível, sobre a mesma reta AB fiquem construídas as duas retas AD, DB, iguais às mesmas retas AC, CB, cada uma a cada uma, sobre um e outro ponto, tanto o C quanto D, no mesmo lado, tendo as mesmas extremidades, de modo a ser, por um lado, a CA igual à DA, tendo a mesma extremidade A com ela, e, por outro lado, a CB, à DB, tendo a mesma extremidade B com ela, e fique ligada a CD.

Como, de fato, AC é igual à AD, também o ângulo sob ACD é igual ao sob ADC; portanto, o sob ADC é maior do que o sob DCB; portanto, o sob CDB é, por muito, maior do que o sob DCB. De novo, como a CB é igual à DB, também o ângulo sob CDB é igual ao ângulo sob DCB. Mas foi também provado maior, por muito, do que ele; o que é impossível.

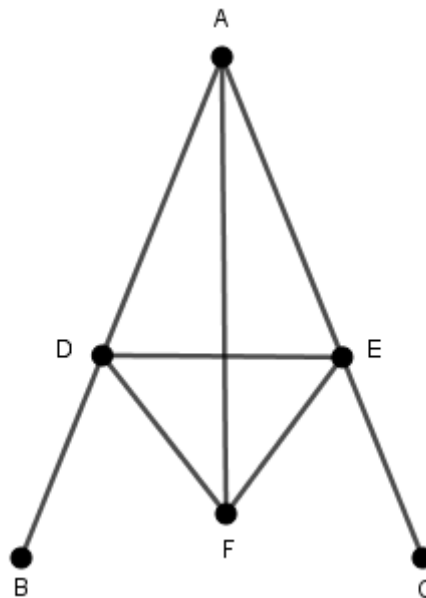
Portanto, sobre a mesma reta não serão construídas duas outras retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, no mesmo lado,

tendo as mesmas extremidades que as retas do começo; o que era preciso provar (EUCLIDES, 2009, p. 104).

Como exemplo do método de construção, escolhemos a proposição 9. De acordo com Eves (2004), um dos propósitos desse método é de servir de prova de existência; “por exemplo, a melhor maneira talvez de provar a existência da bissetriz de um ângulo é efetivamente construí-la” (EVES, 2004, p. 170). Vejamos como.

Cortar em dois o ângulo retilíneo dado.

Figura 14 – Representação da construção usada como apoio para a demonstração por construção.



Fonte: adaptado por Euclides (2009).

Demonstração: Seja o ângulo retilíneo dado o sob BAC; é preciso, então, cortá-los em dois.

Fique tomado sobre AB o ponto D, encontrado ao acaso, e fique subtraída da AC a AE igual à AD, e fique ligada a DE, e fique construído sobre a DE o triângulo equilátero DEF, e fique ligada a AF; digo que o ângulo sob BAC foi cortado em dois pela reta AF.

Pois, como a AD é igual à AE, e a AF é comum, então, as duas DA, AF são iguais às duas EA, AF, cada uma a cada uma. Também a base DF é igual à base EF; portanto, o ângulo sob DAF é igual ao ângulo sob EAF.

Portanto, o ângulo retilíneo dado, o sob BAC, foi cortado em dois pela reta AF; o que era preciso fazer (EUCLIDES, 2009, p. 105).

Os elementos não é apenas o mais antigo texto de matemática grega a chegar até nós, mas é o texto de maior influência em matemática de todos os tempos. “Foi composto em 300 a.C. aproximadamente e foi copiado e recopiado repetidamente depois” (BOYER, 1996, p.

82). Ao passar dos anos, erros e variações foram sendo inseridos, o que fez, de acordo com Boyer (1996), com que alguns editores, posteriormente, tentassem melhorar o original. Algo que só foi possível ao se comparar mais de meia dúzia de cópias em manuscritas gregas, que datam em sua maioria do século X e XII.

Muitas cópias da obra chegaram até nós através de traduções árabes, que no século XII passam a ser traduzidas para o latim e, mais tarde, no século XVI, para o vernáculo. A grande obra teve sua primeira versão impressa em 1482, em Veneza, constituindo um dos primeiros livros de matemática impressos; calcula-se que, desde então, pelo menos mil edições foram publicadas. Talvez nenhum livro, além da Bíblia, possa se gabar de tantas edições, e certamente nenhuma obra matemática teve influência comparável à de *Os elementos* de Euclides. Como é apropriado o nome que sucessores de Euclides lhe deram, “o Elementador”!(BOYER, 1996, p. 82).

3.3 AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA IDADE MÉDIA

Durante a Idade Média, há um grande declínio cultural atestado no Ocidente, “os Elementos tornaram-se uma obra de um nível muito acima das possibilidades da época, só usada muito restrita e superficialmente” (DOMINGUES, 2002, p. 06). Agora, o centro de estudos matemáticos passa a ser nos mundos árabes e hindus, entretanto de acordo com Domingues (2002), nenhum desses povos empregava suas atenções para as demonstrações matemáticas como os povos gregos do período clássico o faziam, antes, estavam muito longe disso. Enfocaremos nessa seção o período de transmissão, momento em que os centros de estudos do lado ocidental passam a ser dentro dos monastérios, local onde se faziam as traduções de textos importantes daquela época.

Durante os séculos que se seguiram depois de Euclides, Alexandria continuou sendo o centro de atividades intelectuais do mundo dito civilizado, entretanto, vinha sofrendo ameaças dos exércitos estrangeiros. De acordo com Simon Singh (2014), a cidade de Alexandria sofre seu primeiro ataque no ano 47 a. C. por Júlio César, quando este tenta derrubar Cleópatra¹¹ ateando fogo em seu exército. A biblioteca, que ficava perto do porto, acabou também sendo incendiada, e isso levou à perda de milhares de livros, todos destruídos. Mas, por fim, como a rainha era uma grande apreciadora da importância do conhecimento, resolveu restaurar a biblioteca que se havia perdido.

¹¹ Cleópatra foi a última rainha da dinastia de Ptolemeu, general que governou o Egito após a conquista daquele país pelo rei Alexandre III da Macedônia.

Além disso, no ano 389, a biblioteca sofre outro ataque, desta vez por cristãos. O imperador Teodósio, um cristão, deu ordens ao bispo Teófilo de Alexandria para que este destruísse todos os monumentos pagãos. Juntando este fato com o de que quando Cleópatra restaura a biblioteca, ela a deixa alojada no Templo de Serápis, podemos imaginar no que deu, mais uma vez a biblioteca se torna um alvo, agora de Teófilo.

E assim a Biblioteca foi jogada no meio da fúria para a destruição de ícones e altares. Os estudiosos “pagãos” tentaram salvar seis séculos de conhecimento, mas antes que pudessem fazer qualquer coisa foram linchados pela horda de cristão. O mergulho em direção à Idade das Trevas tinha começado (SINGH, 2014, p. 72).

Porém, algumas cópias de livros muito importantes escaparam desta segunda destruição e, assim, os estudiosos continuaram a visitar a cidade de Alexandria em busca de novos conhecimentos. Entretanto, outro ataque em 642, agora desferido pelos muçulmanos, veio terminar o que os cristãos começaram.

Quando lhe perguntaram o que devia ser feito com a biblioteca, o califa Omar, vitorioso, declarou que os livros que fossem contrários ao Corão deveriam ser destruídos. E os livros que apoiassem o Corão seriam supérfluos e, portanto, também deviam ser destruídos. Os manuscritos foram usados como combustível para as fornalhas que aqueciam os banhos públicos. A matemática grega virou fumaça (SINGH, 2014, p. 72).

Com todas as obras perdidas, a matemática no Ocidente fica por um fio, reduzida, portanto, ao básico. Mas, graças aos indianos e aos árabes, que copiaram as fórmulas do que havia restado, iniciou-se um processo de restauração. Eles mesmos começaram a recriar os teoremas que se haviam perdido. E não só isso, são responsáveis pela inserção de novos elementos na matemática, como é o caso do número zero. Este número realiza, na matemática, duas funções importantes. Com ele é possível distinguir 43 de 403, sua primeira função. E, além disso, num sistema como o nosso, posicional, onde cada posição ocupada por um número tem um significado, é necessário um símbolo para demarcar a posição vazia e, neste caso, utilizamos o zero. Então, quando escrevemos 403, significa que temos quatro vezes cem, mais zero vez dez, mais três vezes um.

Os hindus reconheceram que o zero tinha uma existência independente, além do mero papel de marcar espaços entre números. O zero era um número como os outros, ele representava a quantificação do nada. E pela primeira vez o conceito abstrato do nada recebia uma representação simbólica (SINGH, 2014, p. 73).

Assim, enquanto a Europa deixava de lado a busca pelas verdades matemáticas, a Índia e a Arábia iam produzindo a partir do que se podia das cinzas que restaram de Alexandria e dando solidez ao conhecimento que conseguiam estruturar. E, mais do que isso, “o reinterpretavam com uma linguagem nova e mais eloquente” (SINGH, 2014, p. 73).

Em suma, além de acrescentarem o zero à numeração matemática, eles também substituíram os diversos símbolos gregos e os números romanos pelo sistema de contagem hindu-arábico. “As ideias de Pitágoras e Euclides não eram menos elegantes em seu modo de expressão desajeitado. Mas traduzidas para os símbolos da Arábia desabrochariam e produzir conceitos novos e mais ricos” (SINGH, 2014, p. 72).

Já, do lado ocidental, segundo Eves (2004), durante a Baixa Idade Média, período que se estende da metade do século V até o século XI,

o ensino praticamente deixou de existir, quase todo o saber grego desapareceu e muitas das artes e dos ofícios legados pelo mundo antigo foram esquecidos. Apenas os monges dos monastérios católicos e uns poucos leigos cultos preservaram um tênue fio de saber grego e latino. O período foi marcado por muita violência física e intensa fé religiosa. A ordem social antiga cedeu lugar a uma outra, feudal e eclesiástica (EVES, 2004, p. 289).

O mundo antigo, antes desse período, era dominado pelos romanos, pois desde 63 a. C. estes dominaram diversos territórios num processo de expansão, inclusive a Grécia Antiga. Porém, os romanos, de acordo com os relatos de Eves (2004), não tinham interesse na matemática abstrata. Seus interesses eram voltados para os aspectos práticos, no que diz respeito ao comércio e à engenharia civil.

Quando o seu império entra em decadência, ocorre uma interrupção do comércio e os projetos de engenharia foram abandonados, o que faz com que não seja “exagero dizer que, afora a elaboração do calendário cristão, muito pouca matemática se fez durante o meio milênio da Baixa idade Média” (EVES, 2004, p. 289).

Mas, ainda assim, podemos na história da matemática citar alguns nomes importantes: Boécio (c. 475-524), Beda (c. 673-735), Acúino (735-804) e Gerberte (c. 950-1003), sendo que este último, mais tarde se tornou o papa Silvestre II.

A importância de Boécio para a história da matemática, segundo Eves (2004), se dá pelo fato de seus livros de geometria e aritmética serem usados por muitos séculos nas escolas monásticas. A sua geometria se resume nas proposições do Livro I e na seleção de outras do Livro III e IV dos Elementos de Euclides, em conjunto com algumas aplicações de mensuração. Já, sua Aritmética era baseada na de Nicômaco, que havia sido escrita quatro

séculos antes. Boécio se tornou o fundador da escolástica medieval. Isso se deu tanto por seus trabalhos em matemática, quanto pela sua filosofia. Porém, foi “preso e condenado, sofreu morte cruel, razão pela qual foi proclamado mártir da Igreja” (EVES, 2004, p. 290), provavelmente por seus questionamentos políticos.

Beda e Acuino eram ingleses. O primeiro nasceu em Northumberland, era conhecido pela alcunha de o Venerável, sendo um dos maiores eruditos da igreja naqueles tempos. Entre suas obras há trabalhos que versam sobre matemática, a saber, um tratado sobre o calendário e outro sobre a contagem com os dedos. O segundo nasceu em Yorkshire, escreveu a respeito de muitos tópicos de matemática e, embora haja dúvidas, credita-se a ele uma coleção de problemas na forma de quebra-cabeça, que por muitos séculos influenciou autores de textos escolares.

Já, Gerbert nasceu em Auvergne, na França. Estudou em escolas muçulmanas, na Espanha. Durante seus estudos tem contato com obras importantes da matemática.

Foi um dos primeiros cristãos a estudar nas escolas muçulmanas na Espanha e há indícios de que, ao retornar, tenha introduzido na Europa cristã os numerais hindu-árabicos (sem o zero). Atribui-se a ele a construção de ábacos, globos terrestres e celestes, um relógio e, talvez, um órgão. Esses feitos corroboram em alguns de seus contemporâneos a suspeita de que ele tenha vendido a alma ao demônio. Não obstante, ele subiu firmemente na hierarquia da Igreja, acabando por se eleger papa, com o nome de Silvestre II, em 999. Considerado erudito profundo, escreveu sobre astrologia, aritmética e geometria, embora sua obra matemática seja de pouco valor (EVES, 2004, p. 291).

Nesse período, muitos manuscritos Árabes foram traduzidos para o latim. Isso se deu devido ao grande interesse e procura por textos gregos, principalmente pelas obras que continham ideias filosóficas e matemáticas. Quando os latinos descobriram que os árabes eram também grandes admiradores do peripatetismo e possuidores de traduções e comentários acerca de muitos trabalhos (principalmente os de Aristóteles), buscaram traduzir as obras árabicas. De acordo com Cajori,

Durante essa busca, os trabalhos matemáticos também vieram a ser notados e traduzidos para o latim. Embora a princípio só alguns poucos trabalhos de menor importância tenham sido traduzidos, o interesse havia começado por volta de 1100 e o zelo dedicado aos conhecimentos maometanos excedeu até mesmo ao dos próprios árabes, quando no oitavo século, estes saquearam os ricos cofres da ciência dos gregos e hindus (CAJORI, 2007, p. 176).

Para não deixar de citar alguns nomes importantes de pessoas que muito contribuíram com suas traduções temos: Abelardo de Bath (c. 1120), João de Sevilha, Gerardo de Cremona

(1114-1187) e Giovanni Campano (1220-1296). O primeiro, Abelardo de Bath, teve sua época de atividades no início do século XII, dentre seus trabalhos destaca-se uma das traduções mais antigas dos Elementos de Euclides. Ele também é responsável pela tradução das tábuas astronômicas de Al-Khowarizmi e a aritmética de Al-Khowarizmi. João de Sevilha atuou como tradutor em meados do século XII. Nesta época, existiu um grupo de cientistas cristãos que sob o comando de Raymond, bispo em Toledo, estavam incumbidos a realizar traduções de obras consideradas importantes. João de Sevilha realizou traduções da filosofia aristotélica, de muita importância para a matemática. O terceiro tradutor, Gerardo de Cremona, por volta de 1175 traduziu o Almagesto de Ptolomeu, pois tinha o desejo de adquiri-lo. Traduziu também para o latim mais de 70 trabalhos árabes. Dentre as obras matemáticas traduzidas por Cremona estão, além do Almagesto, “os 15 livros de Euclides, e a Sphaerica de Teodosio, citam-se um trabalho de Menelau, a álgebra de Al-Khowarizmi, a astronomia de Jabir ibn Aflah, e outros menos importantes” (CAJORI, 2007, p. 177).

Podemos, assim, ver que muitos foram os tradutores daquela época que colaboraram para a difusão da ciência do árabe para a língua latina. Podemos citar, ainda, Giovanni Campano de Novara, que por volta de 1260 “publicou uma nova tradução Euclides, a qual deu origem a mais, outras tantas, surgindo dessas a base para as edições impressas” (CAJORI, 2007, p. 178).

A ciência dessa forma, segundo Cajori, veio a chegar às mãos dos cristãos, sendo que já na metade do século XII,

o Ocidente já estava de posse da chamada notação arábica. No final do século, os métodos de calcular hindus começaram a se sobrepôr aos complicados métodos herdados dos romanos. A álgebra, com as suas regras, para resolver equações lineares e quadráticas, tornou-se acessível aos latinos. A geometria de Euclides, a Sphaerica de Teodósio, a astronomia de Ptolomeu, e outros trabalhos estavam agora ao alcance da língua latina (CAJORI, 2007, p. 178).

Neste período, mais especificamente nos séculos XII e XIV, aparecem dois matemáticos importantes, Leonardo Fibonacci (1175-1250) e Nicole Oresme (1323-1382). O primeiro, nascido em Pisa, inspirado por seu pai, um alfandegário, realizou diversas viagens ao Egito, Sicília, Grécia e Síria, lugares onde teve contato com a matemática oriental e árabe. Assim sendo, Fibonacci, com seu conhecimento dos algarismos indo-arábicos, torna-se o primeiro matemático cristão a escrever e publicar no ano de 1202, um tratado, *Liber abaci*¹².

¹² Livro do ábaco

Entretanto, seu conteúdo não tem nada a ver com o que o título sugere, antes trata de problemas e conceitos algébricos.

Descreve nos quinze primeiros capítulos o modo de tratamento que se deve dar aos nove algarismos indianos mais o *zephirum* ou zero; métodos de cálculos com frações comuns; sexagesimais e unitárias, mas não as decimais, discute sobre raízes de equações do segundo e terceiro graus; e cálculo de raízes quadradas e cúbicas (CONTADOR, 2006, p. 451).

Outros trabalhos de sua autoria são também *Practica Geometriae*, publicado em 1220, e o *Liber quadratorum* de 1225. O primeiro trata de geometria e trigonometria, e o segundo sobre análise indeterminada.

Em se tratando do Liber Abaci, um problema que muito chama a atenção é o seguinte: *Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que torna produtivo a partir do segundo mês?* (CONTADOR, 2006, p. 451)

Analisando este problema, vamos chamar como o fez Contador (2006): de P um par de coelhos e de P1 os pares gerados por P, de P2 os gerados por P1, o que permitirá a construção de uma tabela, que faremos até o sexto mês. Lembrando, porém, que os coelhos do primeiro par são adultos e não entram nos resultados. Entretanto, esse primeiro par produzirá um novo a cada mês e, além disso, o primeiro par produzido só poderá produzir um novo par no seu terceiro mês.

Tabela 1 - Pares de Coelhos.

Mês	Os pares a cada mês	Número de pares
1	P	1
2	P	1
3	P + P1	2
4	P + P1 + P1	3
5	P + P1 + P1 + P1 + P2	5
6	P + P1 + P1 + P1 + P1 + P2 + P2 + P2	8

Fonte: autor.

Olhando para esta tabela, é possível perceber uma regra, que cada termo da sequência é igual à soma dos dois termos anteriores. Dessa maneira é que podemos desenvolver uma generalização para a sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., a_{n-2} , a_{n-1} , a_n ,... Onde $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, para $n > 2$. Esta sequência recebe o nome de Sequência de Fibonacci. Podemos pensar numa nova tabela para resolver este problema, vejamos como.

Tabela 2 - Quantidades de pares em cada mês.

Fim do mês, n°	Casais adultos	Casais jovens	Total de casais
1	1	0	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21
9	13	21	34
10	21	34	55
11	34	55	89
12	55	89	144
13	89	144	233

Fonte: autor.

Assim, analisando a tabela, vemos que ao final de um ano teremos 233 casais de coelhos, de acordo com as condições dadas.

O outro importante matemático para a época, como mencionado anteriormente, é o bispo Nicole de Oresme. Este foi professor no colégio Navarre de Paris, fez traduções de Aristóteles, também desenvolveu obras acerca da matemática e, segundo Contador (2006), a sua grande importância se deve a três fatos:

Usar expoentes fracionários, em um de seus trabalhos apresentou a representação gráfica de funções com o nome de *latitude de formas*, estudou e localizou pontos num plano através de coordenadas usando os nomes *latitude* e *longitude* – que correspondem às nossas *ordenadas* e *abscissa* –, assunto que mais tarde daria origem à *Geometria analítica*; diz-se que num trabalho que não chegou a ser publicado, ele obteve a soma da série c ou $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$, fazendo de Oresme, juntamente com Arquimedes os primeiros a trabalharem com o que seria mais tarde a *análise infinitesimal* (CONTADOR, 2006, p. 461).

Dessa forma, Oresme percebe que, trabalhando com os dois eixos longitude e latitude, ele conseguia utilizar duas variações ao mesmo tempo. Eentão, a partir disso, ele conseguiu traçar um gráfico de velocidade em função do tempo, isso para um objeto que tem aceleração constante a partir do repouso. Assim, foi possível a ele analisar este gráfico, sabendo que a distância do eixo horizontal até o gráfico da função representava a velocidade do corpo naquele instante.

Foi assim que aconteceu o início da lei do movimento que, mais a frente no século XVII, através de um experimento prático, Galileu concluiria que *a distância total percorrida por um corpo varia com o quadrado do tempo*. Ele observou neste experimento que as distâncias estão entre si do mesmo modo que estão os números ímpares e, assim como a soma dos n primeiros números ímpares resulta em n^2 , logo a distância total percorrida por um corpo varia com o quadrado do tempo.

Oresme também trabalhou com a série harmônica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$, infinita. Ele foi o primeiro a demonstrar que ela é divergente. Vejamos uma demonstração para este fato.

Demonstração: consideremos a série reescrita da seguinte forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$. Notemos, a partir disso, que cada expressão dentro dos parênteses é maior do que $\frac{1}{2}$. Como por exemplo, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; ou $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$. Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty$, portanto uma série divergente.

Também sugeriu em seus trabalhos a extensão para três e quatro dimensões de sua latitude de formas, mas infelizmente isso não foi possível a ele. A falta de uma geometria algébrica pode ter sido um dos maiores obstáculos para o prosseguimento de seus trabalhos.

Isto também pode ter impedido os matemáticos do século XIV de terem desenvolvido técnicas algébricas novas e, ao invés disso, opostos aos gregos, começaram a resolver somatórios de séries infinitas.

A matemática desenvolvida em todos esses anos não chega a ser como nos períodos clássicos gregos, está mais voltada à resolução de problemas práticos, assim como faziam os antigos egípcios e babilônicos.

Na Europa, nos cerca de 1.500 anos que se seguiram após o período clássico, poucos foram os trabalhos de Matemática que surgiram, e se somarmos todos os trabalhos de todas as civilizações nesse período, veremos que em nenhum sentido poder-se-á compará-lo com as realizações da Grécia antiga. Talvez o maior feito desse período tenha ficado por conta da criação do zero (CONTADOR, 2006, p. 463).

3.4 AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA IDADE MODERNA

Na Idade Moderna, a matemática herdada dos antigos gregos havia sido bastante modificada em seus conteúdos, métodos e, como enfatiza Silva (2007), em espírito. Neste período, muitas ciências, como a álgebra, acabam surgindo, ao passo que as antigas

disciplinas, geometria e aritmética, já haviam se desenvolvido consideravelmente. Entretanto, como nos diz Silva (2007), “o que mais chama atenção nessa época são a crescente autonomia do simbolismo matemático e as novas concepções de número germinadas nos domínios da álgebra” (SILVA, 2007, p. 77).

Desde o final da Antiguidade, a partir de Diofanto¹³ e também dos algebristas árabes, na Idade Média, há uma grande evolução na notação algébrica que se constitui num sistema simbólico, “capaz de expressar em sinais os termos numéricos (incógnitas e parâmetros) e as operações às quais as quantidades denotadas por esses termos estão submetidas” (SILVA, 2007, p. 77). Consequentemente, com a sofisticação dos símbolos algébricos, a resolução de equações que, para os árabes, consistiam em *preenchimento*¹⁴ e *balanceamento*¹⁵, mais tarde ira progredir até técnicas mais sofisticadas com os algebristas italianos do século XVI, Scipione del Ferro (1465-1526), Tartaglia (1499-1557), Cardano (1501-1576) e Bombelli (1526-1572). Esses matemáticos, em suma, inventaram alguns métodos que reduzem equações a suas formas canônicas e expressam as raízes dessas equações canônicas através de operações com seus coeficientes.

Desse modo, o procedimento de resolução de equações torna-se pouco a pouco um processo mecânico de manipulação de símbolos. Estão criadas as condições para que o simbolismo algébrico adquira uma espécie de vida própria, gerando os seus próprios conceitos (SILVA, 2007, p. 78).

Com o avanço e estudos de equações feitas por eles, chega-se em expressões que para aquela época não fazia muito sentido, como é o caso da raiz quadrada de números negativos, já que ela era entendida como a média proporcional entre esse número e a unidade. Mas isso não impediu que matemáticos como Bombelli e Cardano tratassem os números negativos e suas respectivas raízes quadradas em detrimento de seus significados, o que deu origem aos números imaginários, visto apenas como símbolos sem sentidos. Segundo Silva (2007), este foi um momento importante para a história da matemática, não só em respeito a extensão do conceito de número, mas também para a constituição da concepção moderna de matemática. É claro que esses procedimentos traziam vantagens matemáticas. Esses novos números

13 Nascido entre os anos 201 e 214 e falecido entre 284 e 298 é considerado o maior algebrista da antiguidade, e desempenha um papel semelhante ao que Euclides tem na Geometria.

14 Consiste na eliminação dos termos a serem subtraídos de um membro da equação por adição a ambos os membros de termos iguais.

15 Consiste na redução de termos iguais de ambos os membros de uma equação.

possibilitaram, por exemplo, a extensão da fórmula¹⁶ criada por Scipione del Ferro, bem como sua generalização.

Nesse ato aparentemente banal em que o simbolismo matemático clama pela sua autonomia são criados números que não mais correspondem a uma particularização do conceito de quantidade, mas respondem apenas à razão formal. Se um termo numérico se comportava como se denotasse um número, mesmo que isso fosse impossível segundo a concepção de número em voga, então ele efetivamente denotava um número. Desde então números não são mais entidades independentes apenas *denotadas* pelos símbolos, mas entidades *geradas* pelo próprio simbolismo que se caracterizam *exclusivamente* pelas suas relações operatórias com outros números (SILVA, 2007, p. 78-79).

Talvez para os matemáticos italianos faltasse a percepção, que mais tarde surge na história da matemática, de que dentro de um determinado domínio numérico os seus objetos podem ser substituídos por outros sem que nada se modifique, tendo apenas que garantir que esses novos elementos gozem das mesmas propriedades formais que os números substituídos. Isso nos traz a possibilidade de extensão dos domínios matemáticos, acrescentando a ele novos objetos, como o fez Bombelli com os números imaginários.

Assim, se iniciava na álgebra do século XVI uma concepção formal do fazer matemática que irá visivelmente se desenvolver no século XIX, onde surge a ideia de matemática como uma ciência de “estruturas ou invólucros formais de *possíveis* domínios de objetos, definidos por relações puramente formais no interior de um sistema simbólico sem interpretações pré-determinadas” (SILVA, 2007, p. 80).

Mais a frente, no século XVII, há muitas revoluções dentro e fora da matemática. São desenvolvidas a filosofia moderna com René Descartes (1596-1650), a ciência moderna com Galileu (1564-1642) e a matemática moderna com Cavalieri (1598-1647), Descartes, Leibniz (1646-1716) entre outros mais. A matemática moderna tem como característica o uso de métodos infinitários¹⁷ em aritmética, álgebra e geometria. É neste período que ocorre também a criação do cálculo infinitesimal por Newton (1643-1727) e Leibniz, e a algebrização da geometria por Descartes.

Em se tratando dos métodos infinitários que, aliás, é marca da matemática deste período, foi possível se chegar a alguns resultados importantes em matemática, na geometria por exemplo, Cavaliere em 1635 descobre o famoso Princípio de Cavalieri, que diz que dois

16 Essa fórmula hoje em dia é conhecida como Ferro-Tartaglia: $x = \sqrt[3]{\frac{-c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{27}}}$.

17 Método da matemática clássica que busca abstrações sobre o infinito, “das demonstrações não construtivas, dos objectos ideais é uma extensão conservativa da matemática finitista” (OLIVERIA, 2009).

sólidos têm o mesmo volume caso tenham alturas iguais e seções planas com áreas equivalentes a mesma altura.

De acordo com Silva (2007), a utilização dos métodos infinitários traz a vantagem de não se trabalhar com a dupla redução ao absurdo, mesmo que não possibilitem o rigor Arquimediano.

Se esses métodos não têm o rigor da matemática de Arquimedes [...], têm ao menos a vantagem de evitar a dupla redução ao absurdo que o método arquimediano de exaustão exige, *privilegiando demonstrações explicativas, ou causais, segundo os preceitos lógicos-epistemológicos de Aristóteles* (SILVA, 2007, p. 81).

Mais a frente, o cálculo infinitesimal criado por Newton e Leibniz de forma simultânea e independente é outra conquista daquele momento. Leibniz publicou a sua descoberta em um texto de seis páginas em 1684 sob o título: Um novo método para máximos e mínimos, assim como para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais e fracionárias, e um curioso tipo de cálculo para ele¹⁸. Em termos de demonstração Silva (2007), diz que neste texto elas aparecem um pouco obscuras.

Já, Newton publicou seu método de cálculo infinitesimal entre 1704 e 1736, mas provavelmente o descobriu entre 1655 e 1666, ao passo que Leibniz descoberto o seu em 1673 e 1676. Entretanto a obra não escapou às críticas

ambos foram acidamente criticados pelo caráter vago e pouco rigoroso de suas criações. Newton, por Berkeley e Leibniz pelo holandês Nieuwentijt (se bem que, no segundo caso, a disputa não envolvesse uma negação pura e simples do método, mas antes as idiossincrasias próprias de cada um no trato com os infinitésimos) (SILVA, 2007, p. 82).

A fundamentação rigorosa do cálculo só foi possível no século XIX, com a noção de limite e a redução dessa noção às puramente aritméticas, o que elimina as quantidades infinitesimais e métodos pouco rigorosos de aproximação. Bastava para isso a criação de uma teoria dos números que resolvesse alguns problemas. “[...], por exemplo, a natureza dos números irracionais – que se arrastava, a bem da verdade, desde a descoberta das grandezas incomensuráveis no século V a. C” (SILVA, 2007, p. 82).

Esses teóricos de que tratamos até agora são semelhantes aos inventores em busca de um novo método de descoberta, não são rigorosos e zelosos pela lógica. Matemáticos assim aparecerão mais adiante como devia ocorrer. Mesmo que o cálculo tenha tido sucesso em sua

¹⁸ Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.

criação, ele não foi tão bem recebido como um avanço tecnológico, como dito antes Newton foi duramente criticado por Berkeley (1685-1753), aja vista que sua teoria deixava muito a desejar do ponto de vista lógico.

Como vimos ate aqui, são muitos os avanços matemáticos ocorridos nesse período da história da matemática, entretanto não podemos deixar de citar outro importante teórico e filósofo dessa ciência, que no século XVII torna-se um marco fundamental, tanto em filosofia quanto em matemática, estamos falando de Rene Descartes.

Em se tratando de suas contribuições para a matemática, Descartes cria um método original para tratar a matemática tradicional herdada dos antigos gregos. Sabe-se que eles, os gregos, concebiam a aritmética em termos exclusivamente geométricos. “Números, para eles, estavam sempre associados a segmentos, e operações aritméticas, como somas e produtos a construções geométricas” (SILVA, 2007, p. 85). O quadrado de um número pode ser associado à área de um quadrado e o cubo ao volume. Por vezes, isso gerava problemas quando o expoente ia crescendo e se tornavam maiores do que 3. Quem resolve este problema é Descartes, representando as operações algébricas por operações apenas sobre os segmentos, e não mais como figuras de dimensões superiores como faziam os gregos, ou seja, operações com números em segmento só pode resultar números em segmentos.

Assim, na resolução de um problema geométrico, Descartes estava livre para tratar os segmentos dados como constantes, os segmentos a serem obtidos como incógnitas e relacioná-los por meio de identidades geométrica conhecidas, dando origem, desse modo, a uma relação funcional entre constantes e incógnitas – em suma, uma equação. Bastava então, para resolver o problema geométrico, resolver a equação algébrica – isto é, isolar as incógnitas em termos das constantes – e, depois, construir os segmentos correspondentes às grandezas antes incógnitas, mas agora dadas em razão das grandezas conhecidas (SILVA, 2007, p. 85).

Dessa maneira, a álgebra usada por Descartes era como um atalho e a algebrização como um instrumento geométrico de acordo com Silva (2007).

Sua obra, *A Geométrie*, foi publicada em 1637 em forma de apêndice ao seu *Discours de la Méthode*. Esta obra não se assemelha à Geometria Analítica, ainda que ele seja considerado um de seus criadores. Nela não aparecem como na Geometria Analítica os sistemas de coordenadas, nem equações de retas e cônicas. Entretanto, é atestado o sucesso de seus métodos, quando Descartes resolve, além de generalizar um problema proposto por Pappus (séculos III-IV) que diz: “dadas quatro retas e quatro ângulos, encontre um ponto tal que, desse ponto, sejam traçadas retas que encontram as retas dadas segundo os ângulos dados e tal que os segmentos assim determinados sejam proporcionais entre si” (SILVA, 2007, p.

86). Mas de tudo, a classificação de curvas que essa geometria proporcionou, pode ser seu trunfo mais interessante, em suma eram distinguidas as curvas geométricas e as mecânicas, às geométricas dignas da Geometria, são aquelas dadas por equações algébricas.

Nesse período, ocorre uma verdadeira explosão em termos de produção matemática, que se caracteriza por importantes descobertas de resultados matemáticos interessantes, tais como os citados, porém tais resultados não são comprovados. Se não são comprovados, podem ser considerados conhecimentos da “matemática”? Essa é a discussão que adentra a idade moderna, que se caracteriza pela discussão sobre os fundamentos da ciência matemática.

3.5 AS DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS NA IDADE CONTEMPORÂNEA

A matemática neste período passa por uma grande transformação e contestações, principalmente sobre seus fundamentos. Muito se havia produzido! As dúvidas eram se o que foi produzido e denominado de ciência matemática era de fato matemático. Há um consenso sobre a necessidade de comprovação. Porém a discordância sobre o que era uma prova matemática.

Neste contexto, emergem três escolas filosóficas importantes: O Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo. Cada uma com suas doutrinas e especificidade, procurando fundamentar as bases da matemática construída há milênios e com compreensões distintas sobre o papel da demonstração matemática, visto que, conforme explicitado na introdução desse trabalho, compreendiam a matemática de forma diferente.

3.5.1 A matemática no século XIX

Segundo Simon Singh (2014) em seu livro “O Último Teorema de Fermat” a partir do final século XIX, os matemáticos começaram a se questionar a respeito dos fundamentos da matemática, ou seja, passaram a olhar para as suas origens, verificando-a e tentando reconstruí-la, para que assim pudessem garantir que seus fundamentos fossem confiáveis. Leis como a lei da tricotomia¹⁹, tiveram que passar por análise rigorosa e demonstradas como verdadeiras, pois havia a possibilidade de elas serem falsas, o que poderia por em prova, todas as teorias que eram dependentes delas.

19 Tricotomia: essa lei diz que um número é ou negativo, positivo ou nulo.

Desde os antigos gregos a matemática vem acumulando mais teoremas e verdades, e embora a maioria deles tenha sido rigorosamente provada os matemáticos temiam que alguns casos, como a lei da tricotomia, tivessem sido aceitos sem o exame adequado. Algumas ideias tinham se tornado parte da tradição e ninguém tinha certeza de como foram originalmente demonstradas, se de fato algum dia tinham sido (SINGH, 2014, p. 129).

Singh (2014) relata que esse fato leva os matemáticos se preocuparam em demonstrar todas as verdades matemáticas, ou seja, provar todos os teoremas existentes até então, sempre embasados nos princípios fundamentais. Nessa tentativa de provar todas as teorias, os matemáticos deduziam teoremas (ou verdades) a partir de outros, de maneira que, seguindo esse procedimento, eles chegaram a questões tão fundamentais, que para elas já não era mais possível encontrar uma prova. Essas questões fundamentais são os axiomas das teorias.

Seguem abaixo, como exemplos, os axiomas da aritmética, submetidos também às análises da época:

- a) Para quaisquer números X, Y e Z

$$(X+Y) + Z = X + (Y+Z) \text{ e } (XY)Z = X(YZ)$$

- b) Para quaisquer números X e Y

$$X+Y = Y+X \text{ e } XY = YX$$

- c) Para quaisquer números X, Y e Z

$$X(Y+Z) = XY + XZ.$$

- d) Existência de elemento neutro

$$X + 0 = X \text{ e } X1 = X \text{ (} 1 \neq 0 \text{)}$$

- e) Existência de oposto

$$X + Y = 0$$

Os axiomas são os alicerces da matemática. Segundo Singh (2014), compreende-se que é a partir deles que a matemática deveria ser reconstruída e, a esse propósito, muitos esforços foram empreendidos. Esse trabalho de reconstrução da matemática a partir de seus fundamentos exigiu cooperação entre os matemáticos, o que uniu muitos teóricos na tentativa de reconstruir toda a matemática empregando apenas os padrões da lógica.

Nesse sentido é que emergem as escolas filosóficas que destacamos: o Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo. De acordo com Batistela et al. (2017), em ordem de aparição, a primeira doutrina que se apresentou foi o logicismo. Iniciada por volta do ano 1884, tem

como seus principais defensores, Gottlob Frege (1848-1925), Giuseppe Peano (1858-1932), Bertrand Russel (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947).

As ideias centrais do logicismo giraram em torno das proposições analíticas da lógica, uma vez que estas eram tidas como o fundamento sobre o qual o conhecimento matemático poderia se justificar. Assim, a proposta logicista apresentava dois eixos importantes: a) os axiomas matemáticos são os princípios da lógica; e b) a Matemática pode ser deduzida da lógica (BATISTELA et al., 2017, p. 199).

O projeto desta escola, segundo estes mesmos autores, fundamentava-se na obra *Principia Mathematica (Principia)*, considerada como um marco para a construção de uma teoria formal dos conjuntos, cujos autores são Russell e Whitehead “Na obra buscou-se mostrar que toda Matemática clássica poderia ser deduzida da teoria dos conjuntos e, ao final, mostrar que a Matemática Clássica poderia ser escrita com as peças da lógica” (BATISTELA et al. 2017, p. 199).

Entretanto, deduzir a matemática a partir da teoria dos conjuntos era o mesmo que mostrar que os axiomas dessa teoria eram pertencentes à lógica. Assim,

a tarefa então passou a ser a seguinte: demonstrar que os axiomas do *Principia* pertenciam à lógica. Como, neste caso, em vez dos axiomas do *Principia*, poderia se usar qualquer outra teoria formal dos conjuntos, e, a teoria desenvolvida por Zermelo e Frankel (ZF) é mais conhecida (BATISTELA et al., 2017, p. 199).

De acordo com Batistela et al. (2017), restava demonstrar que esses axiomas pertenciam à lógica. Abaixo segue a lista de axiomas da teoria de Zermelo e Frankel.

- 1) Axioma da extensionalidade: $\forall x, y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ (diz que dois conjuntos são idênticos se, e somente se, têm os mesmos elementos);
- 2) Axioma do conjunto vazio: $\exists x; \forall y (\neg(y \in x))$ (enuncia a existência de um conjunto que não tem nenhum elemento);
- 3) Axioma da formação de pares: $\exists x, y \exists z; \forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \text{ ou } w = y)$ (enuncia que dados dois objetos x e y , existe um conjunto z cujos elementos são exatamente x e y);
- 4) Axioma da união: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (z \in t \text{ e } t \in x))$ (afirma que dado um conjunto arbitrário x , existe um conjunto y tal que os elementos de y são os elementos de x);
- 5) Axioma da infinidade: $\exists x; (\emptyset \in x \text{ e } \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$ (afirma a existência de um conjunto que contém os seguintes elementos $\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$...)
- 6) Esquema de axiomas de substituição: se $A(x, y, t_1, t_2, \dots, t_n)$ é uma fórmula com variáveis livres x e y com parâmetros $t_1, t_2, \dots, t_n$, então $\forall t_1, t_2, \dots, t_n (\forall x, \exists$ um único $y; A(x, y, t_1, t_2, \dots, t_n) \rightarrow \forall u \exists v; B(u, v))$ onde $B(u, v)$ designa a fórmula $\forall r (r \in v \leftrightarrow \exists s; (s \in u \text{ e } A(s, r, t_1, t_2, \dots, t_n)))$. (A fórmula A define uma função implícita de x em y . O axioma afirma que para qualquer conjunto u , existe um conjunto v , que é imagem de u através dessa função implícita);

- 7) Axioma do conjunto das partes: $\forall x \exists y; \forall z (z \in x \leftrightarrow z \subset x)$ (enuncia que para qualquer conjunto x existe um conjunto y cujos elementos são os subconjuntos de x);
- 8) Axioma da escolha: Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de conjuntos não vazios, então, existe uma função $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$. f é uma função escolha e equivale a: Se $A_i \neq \emptyset, \forall i \in I$, então $\sum_{i \in I} A_i \neq \emptyset$;
- 9) Axioma da fundação: $\forall x \exists y (x = \emptyset \text{ ou } (y \in x \text{ e } \forall z (z \in x \rightarrow \sim(z \in y)))$. (afirma que nenhum conjunto é um de seus próprios elementos (isso evita o paradoxo de Russell)) (BATISTELA et al., 2017, p.199).

Porém, analisando o *axioma da escolha* e o *axioma da infinidade*, chega-se à conclusão de que eles não podem ser pertencentes à lógica, pois, de acordo com Batistela et al. (2017), para serem aceitos como axiomas da lógica deveriam ser aceitos em função de seus conteúdos e não de suas formas sintáticas, o que era contrário a definição de proposições aceitas pelos lógicos.

O enunciado do *axioma da escolha* não especifica se a coleção de conjuntos não-vazios é finita ou infinita. Isso implica dizer que toda coleção finita de conjuntos não-vazios tem uma função de escolha. No caso de termos uma coleção de um conjunto, uma função de escolha correspondente a apenas um elemento. Este exemplo diz que todo conjunto não-vazio tem um elemento, mas isso é trivialmente válido (BATISTELA et al., 2017, p. 200).

O *axioma da infinidade* diz respeito à existência de conjuntos infinitos, familiar na matemática atual, seja por meio dos vários conjuntos infinitos que conhecemos, seja pelo conjunto de pontos no espaço euclidiano, entre outros. O que se revela é que a aceitação deste axioma se dá em virtude de seu conteúdo.

Isso promove uma mudança na implementação do plano logicista. Os matemáticos iniciam o desenvolvimento de teorias para mostrar logicamente que os nove axiomas de ZF eram pertencentes à lógica, que todos eles teriam generalidades completas e seriam verdadeiras, não em virtude de seus conteúdos, mas das suas formas sintáticas. Porém, isso não ocorreu e a escola fracassou.

A escola logicista fracassou devido à impossibilidade de ela própria mostrar concretamente que todas as proposições matemáticas poderiam ser expressas na terminologia lógica e, que todas as proposições matemáticas verdadeiras são as expressões verdadeiras para a lógica (BATISTELA et al, 2017, p. 200).

Entretanto, ter fracassado em sua empreitada não diminui a importância dada aos logicistas, principalmente pela influência causada pelo *Principia* na história da matemática e também pelo tratamento lógico que deu possibilidades para o desenvolvimento da Lógica Matemática Moderna. Isso se deu principalmente pela introdução dos símbolos de

quantificadores universais e de existência, $\forall$ (para todo) e $\exists$ (existe) respectivamente. Esses símbolos foram criados por Frege em sua obra, e o objetivo era formalizar as regras de demonstrações, “iniciando com regras elementares simples sobre as quais não houvesse dúvidas, revolucionou a lógica, pois proporcionou o desenvolvimento do cálculo de predicados (ou lógica de predicados)” (BATISTELA et al., 2017, p. 200).

Entretanto, havia outros matemáticos, como os intuicionistas que entendiam a matemática de modo diferente dos logicistas, consideravam que essa ciência deveria ter suas bases bem seguras, estruturadas a partir da intuição.

Entre os intuicionistas, uma corrente filosófica do movimento construcionista, destaca-se nome Kant (1724-1804), um dos principais teóricos a fundamentar o construtivismo. Sua importância é destacada por Silva (2007), quando afirma que, de “um modo ou de outro, todos os filósofos da matemática de orientação construtivista são seus herdeiros” (SILVA, 2007, p. 143).

Kant exigia que todos os enunciados geométricos e aritméticos verdadeiros fossem intuitivamente justificados (isto é, demonstrados por meio de construções intuitivas), e os conceitos numéricos e geométricos, construídos (isto é, seus exemplos deveriam ser apresentados *a priori* na intuição pura). Kant não hesitou em banir da matemática tudo o que não fosse atual ou potencialmente construído, como as raízes quadradas de números negativos (SILVA, 2007, p. 143).

A construção de caráter intuicionista era “efetiva (uma vez completada a construção de um número, ele era considerado integralmente) e indutiva (para construir o número, deve-se percorrer todos os passos mentais de construção desde o 1 até o n)” (BATISTELA et al., 2017, p. 201). A matemática nesse contexto era entendida como um processo mental, e se consistia de realizações mentais, efetivas e indutivas uma seguida da outra. “O mesmo que vale para os números vale para as demonstrações, para os teoremas e para as definições” (BATISTELA et al., 2017, p. 201). Segundo Batistela et al. (2017) os teoremas intuicionistas se tornaram muito longos, pois eram feitos de maneira construtiva, o que acarretava perda da elegância, da engenhosidade e da brevidade.

“As consequências mais importantes da definição intuicionista de Matemática são: a Matemática é construtiva e ela não pode ser reduzida a nenhuma outra ciência” (BATISTELA et al., 2017, p. 201). Assim, os intuicionistas acabam por travar um embate contra os logicistas, pois, devido à segunda consequência da definição e, dada a informação de que as leis lógicas eram entendidas como combinações de palavras e não como construções mentais, logo não eram matemática, ou seja, o que é matemática para os logicistas pode não ser

matemática para os intuicionistas.. Dessa maneira, o projeto dos intuicionistas pauta-se em definir o que é matemática, segundo um critério. Tudo o que não atende o critério não é matemática. O modo como a escola intuicionista trabalhou, por meio de constructos mentais, consegue apresentar uma matemática sem contradições além de oferecer uma solução para a fundamentação dessa ciência. O problema é que, para a escola intuicionista, boa parte do conhecimento da matemática deixou de ser matemática, pois tudo o que não se pautava na intuição não era Matemática.

Passam a existir então

i) A ocorrência de teoremas clássicos que não são compostos de constructos, e portanto, não podem ser demonstrados pelo modo intuicionista; ii) os que podem ser demonstrados tanto de maneira clássica quanto da maneira intuicionista e, iii) os que são demonstrados como verdadeiros no intuicionismo e como falsos na Matemática clássica (BATISTELA et al., 2017, p. 201).

Seguindo a nossa lista de escolas filosóficas, temos ainda o formalismo, cujo objetivo era o de provar que toda a matemática clássica era consistente. Na liderança deste trabalho estava a figura de David Hilbert (1862-1943), grande adepto da ideia de que tudo na matemática deve ser provado a partir dos axiomas básicos.

A conclusão que chegam, segundo Singh (2014), é que era necessário dar certeza a duas ideias centrais em matemática. A primeira é que, em matemática, se encontrariam respostas para cada uma de suas partes individuais, suscitando, dessa forma, o conceito de completude²⁰. A segunda é a de que não haveria inconsistências nas teorias formalizadas, pois, sendo uma afirmação verdadeira a partir de um método, não poderíamos concluir que ela é falsa a partir de outro.

No Congresso Internacional de Matemática em Paris, no dia 8 de agosto de 1900, Hilbert apresentou 23 problemas não solucionados da matemática os quais ele acreditava ser os mais importantes na época. Singh (2014) diz que, dentre esses, “alguns problemas relacionavam-se com áreas mais gerais da matemática, mas a maioria deles estava ligada aos fundamentos lógicos dessa ciência” (SINGH, 2014, p.130). Estava claro que, a partir desses problemas, Hilbert queria que a comunidade de matemáticos se unisse com a intenção de realizar um programa de pesquisas que proporcionasse a realização de um trabalho capaz de tornar a matemática livre de dúvidas e inconsistências.

20 Diz da consistência de um sistema axiomático.

Segundo Silva (2007), nesse momento da história da matemática muitos são os acontecimentos em torno das teorias já existentes, bem como o surgimento de outras novas, como, por exemplo, o das geometrias não euclidianas, que se desenvolveram do esforço durante anos de se provar o quinto axioma da geometria euclidiana a partir dos quatro primeiros.

Não podemos deixar de nos perguntar, quais foram as consequências e conclusões as quais os matemáticos chegaram ao desenvolvimento de todo esse trabalho. Analisemos, então, a estrutura das teorias que propunham os teóricos formalistas da época, liderados pela imagem de Hilbert, fazendo um comparativo com o método axiomático desenvolvido por Euclides.

Segundo Boyer (1996), a obra de maior expressão em matemática na Grécia antiga é *Os Elementos*, escrita por Euclides. Esta obra contém treze livros, sendo os seis primeiros referentes à geometria plana, do sétimo ao nono referentes à teoria dos números, o décimo acerca dos incomensuráveis e os três últimos destacam a geometria no espaço.

No desenvolvimento de os elementos, Euclides utilizou o método axiomático o qual ele mesmo desenvolveu. Esse método, como dito antes, “consiste em fundar toda uma ciência em uma base de verdades não demonstradas - os axiomas da teoria – a partir das quais se podem derivar todas as verdades dessa ciência por meios exclusivamente lógicos” (SILVA, 2007, p. 183). Mas, segundo o mesmo autor, a geometria euclidiana não possui uma axiomatização completa, pois, para demonstrar resultados da sua teoria, Euclides muitas vezes usava meios intuitivos, os quais não estavam presentes nos axiomas. Além disso, ele utilizava construções em meio as suas demonstrações. Destes fatos é que não se classifica os elementos como sendo um sistema lógico ou lógico-formal, sistemas onde estão explicitamente dados os seus símbolos, bem como, as regras para a sua manipulação. Além disso, segundo Silva (2007), podemos classificar as teorias axiomáticas da matemática como sendo *teorias interpretadas*, “cujas asserções têm um significado determinado e descrevem um domínio especificado de objetos” (SILVA, 2007, p. 184), nesta classificação está a geometria de Euclides presente em os elementos.

Em contra partida, há aquelas cujos seus resultados não expressam nenhum significado esperado e são vistas apenas como uma sequência de símbolos, que estão presentes na linguagem onde a teoria está sendo expressa. Essas são denominadas *teorias axiomáticas não interpretadas*. Em relação aos axiomas presentes nas teorias axiomáticas não interpretadas, Silva (2007) nos diz que

os axiomas dessas teorias podem ser entendidos como definições implícitas dos termos específicos da teoria em questão – isso significa apenas que não importa como interpretemos esses termos, eles só têm as propriedades que lhe são dadas pelos axiomas e suas consequências lógicas (SILVA, 2007, p. 185).

Dessa forma, as teorias não interpretadas podem admitir diversas interpretações, independente dos significados que se deem aos termos da teoria para torná-los verdadeiros, o que importa são as propriedades que os axiomas empregam a esses termos. Silva (2007) nos diz que por esse motivo “uma teoria axiomático-dedutiva interpretada pode ou não ser formal, mas uma teoria não interpretada é sempre formal” (SILVA, 2007, p. 186). Já que seus termos não significam coisa alguma, a única opção é manipulá-los segundo um conjunto de regras explícitas.

A própria geometria, de acordo com o mesmo autor, foi novamente axiomatizada por Hilbert e apresentada em 1899 no que se chamou *Grundlagen der Geometrie* (Os fundamentos da Geometria), sendo esta uma geometria que se enquadra no tipo de teoria não interpretada. No que diz respeito à diferença entre essa nova formulação e a de Euclides, Hilbert não define, por exemplo, o que é ponto, ou o que é reta ou ainda o que é plano, quem se utiliza da teoria pode substituir esses termos por qualquer outro, como por exemplo, casa, pode representar o conceito de ponto, estrada pode representar o de reta, ou mesmo o termo cidade pode representar o de plano. Já Euclides apresenta, em sua geometria, definições para cada um desses termos, bem como, para os axiomas, entendendo esses termos como evidentes. Dessa forma a geometria de Hilbert abstrai todos os termos submetidos a evidências.

Esse procedimento – o de abstrair o sentido dos termos de uma teoria que se quer axiomatizar – tem a óbvia vantagem de impedir que o significado desses termos se intrometa nas deduções, emprestando-lhes verdades que não foram selecionadas como axiomas (SILVA, 2007, p. 186).

Como dito antes, na geometria euclidiana se utilizava muitas vezes meios intuitivos ou de construções, já Hilbert apenas usava os meios lógicos e os axiomas e, dessa forma, deduz todos os teoremas que compunham a geometria. Porém, segundo Silva (2007), a eliminação dos processos intuitivos nas deduções matemáticas, fez com que surgissem o que os matemáticos chamam de sistemas inconsistentes, ou seja, um tipo de sistema onde todas as asserções podem ser demonstradas. Para resolver esse problema, surge um novo campo de estudos em matemática, a metamatemática, que têm como objetos de estudos as teorias formais, ou seja, a própria matemática.

A questão, segundo Silva (2007), é a seguinte: “se teorias puramente formais não são nem verdadeiras nem falsas, por não serem interpretadas, como garantir que não são absurdas?” (SILVA, 2007, p. 188). As teorias interpretadas são consistentes, visto que expressam uma dada realidade, seja a dos números ou das formas espaciais ou ainda qualquer outra, e por isso, verdadeiras. Já as teorias não interpretadas não expressam nenhuma realidade, daí a necessidade de verificar se são ou não consistentes.

Para verificar se tais teorias são consistentes é preciso que se garantam duas propriedades, a da completude e a da independência. A completude diz que dada uma asserção em um dado sistema, ela ou sua negação são demonstráveis, mas não ambas. Já a independência diz respeito aos axiomas, ou seja, nenhum deles pode ser derivado dos restantes. Assim “o primeiro passo para se mostrar a consistência de uma teoria é axiomatizá-la como um sistema formal e submetê-la a análises metamatemáticas” (SILVA, 2007, p. 189).

A primeira parte, a de tornar as teorias da matemática formais, foi um passo que vinha dando certo desde Hilbert, quando ele apresentou a aritmética dos números reais como um sistema formal em um de seus artigos intitulados: “Sobre o conceito de número” (Über den Begriff der Zahl), em 1900. Mas quando se tentou demonstrar a consistência de tais sistemas, os lógicos se depararam com algumas dificuldades. Primeiramente, deveria ser decidido como isso seria feito. E, para isso, “o método usual de demonstração de consistência à época consistia em exibir um modelo da teoria, isto é, uma interpretação de seus termos que tornasse verdadeiro os seus axiomas” (SILVA, 2007, p. 189). Hilbert demonstrou a consistência das geometrias, euclidiana e não euclidianas, interpretando cada uma delas a partir de termos numéricos. Mas daí outro problema surge: o de provar a consistência da aritmética dos números reais.

Uma proposta era a de partir de uma teoria interpretada que fosse simples, “pois, se tivéssemos que demonstrá-la, essa demonstração exigiria uma teoria ainda mais fundamental, num processo de regressão que não pode durar para sempre” (SILVA, 2007, p. 190). A teoria que Hilbert privilegiou foi a teoria mais elementar de aritmética, que ele chamaria de matemática finitária. Assim, nascia o programa de Hilbert que era composto por dois momentos:

(1) a formalização das tradicionais teorias matemáticas (a aritmética dos reais, a análise, a teoria dos conjuntos etc.) e (2) a demonstração da consistência dessas versões formalizadas da matemática *standard* numa aritmética finitária cuja veracidade poderia ser diretamente verificada (SILVA, 2007, p. 195).

Porém, em 1931, Gödel demonstra seus dois teoremas da incompletude, fazendo com que o programa Hilbert fracassasse. Vamos a seguir estudar um pouco sobre o que foi proposto por Gödel.

3.5.2 Indecidibilidade

Kurt Gödel nasceu no dia 28 de abril de 1906, na Morávia. Singh (2014) relata que “ainda criança Gödel exibiu um talento para ciência e matemática e sua natureza curiosa levou a família a apelidá-lo *der Herr Warum* (Senhor Por que)” (SINGH, 2014, p. 131). Gödel costumava participar de alguns encontros do *Wiener Kreis* (Círculo Vienense), onde eles se reuniam para discutir questões de lógica. E foi justamente nesse período, quando Gödel tinha em torno de vinte anos, que ele desenvolveu as ideias que segundo Singh (2014) “devastariam os fundamentos da matemática” (SINGH, 2014, p. 131).

Acontece que, em 1931, de acordo com Singh (2014), Gödel publicou o livro intitulado: “Sobre as proposições indecidíveis no *Principia Mathematica* e sistemas relacionados”, onde se encontravam os teoremas da indecidibilidade.

Quando a notícia dos teoremas chegou aos Estados Unidos, o grande matemático John Von Neumann imediatamente cancelou uma série de aulas que estava dando sobre o programa de Hilbert e substituiu o resto do curso por um debate sobre o trabalho revolucionário de Gödel (SINGH, 2014, p. 132).

Gödel mostrou em seus trabalhos ser impossível criar um sistema matemático que fosse completo e consistente. Singh (2014) resume suas ideias em duas declarações:

Primeiro teorema da indecidibilidade

Se o conjunto axiomático de uma teoria é consistente, então existem teoremas que não podem ser nem provados nem negados.

Segundo teorema da indecidibilidade

Não existe procedimento construtivo que prove ser consistente a teoria axiomática (SINGH, 2014, p. 132).

A primeira afirmação diz que independentemente do conjunto de axiomas que se está utilizando, existem problemas que não é possível resolver. Isso, segundo Singh (2014), implica que a completeza não pode ser alcançada. Já, a segunda afirmação nos diz que não importa qual seja o sistema em que os matemáticos estejam trabalhando, nunca haverá a certeza de que a escolha de seus axiomas não os levará a uma contradição. “Gödel tinha demonstrado que o programa de Hilbert era um exercício impossível” (SINGH, 2014, p. 132).

Podemos ainda dizer que a segunda afirmação não diz que os sistemas matemáticos são inconsistentes, mas que a demonstração da sua consistência o é. Este era o único fato que pôde manter muitos matemáticos crendo que a matemática permanecia consistente.

Para entender o primeiro teorema de Gödel, Singh (2014) se utiliza de um fragmento de lógica da Grécia Antiga, chamado *o paradoxo de Creta* (ou *o paradoxo do mentiroso*), que foi inventado por Epimenides de Creta, que exclamou dizendo: “Eu sou um mentiroso!”.

O paradoxo²¹ por trás desta frase surge quando tentamos determinar a validade dessa proposição em falsa ou verdadeira. Segundo Singh (2014), quando assumimos que essa asserção é verdadeira, estamos dizendo que Epimenides é um mentiroso, mas aceitamos no mesmo instante que sua declaração é verdadeira, ou seja, ele está dizendo a verdade. Concluimos que ele não é um mentiroso, portanto caímos em uma inconsistência intuitiva. Se considerarmos que a proposição é falsa, estamos concluindo que Epimenides não é mentiroso, porém ele está fazendo uma declaração falsa, ou seja, se concluirmos que ele é um mentiroso, novamente caímos em outra inconsistência intuitiva. E foi assim que Gödel reinterpretou o paradoxo do mentiroso e ao mesmo tempo introduziu o conceito de prova. Nas palavras de Singh,

Se a declaração fosse falsa então ela seria provável, mas isso iria contradizê-la. Portanto, a declaração deve ser verdadeira de modo a evitar a contradição. Contudo, embora a declaração seja verdadeira ela não pode ser provada, porque essa declaração (que agora sabemos ser verdadeira) assim diz (SINGH, 2014, p.133).

Gödel traduzia declarações como a do paradoxo do mentiroso, mencionado acima, por meio de notação matemática. Dessa forma, ele provou que existem declarações matemáticas verdadeiras, mas que nunca poderão ser demonstradas como tal, são as afirmações indecidíveis.

²¹ Paradoxo é um argumento que produz uma conclusão surpreendente, à qual é contrária à nossa intuição.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o disposto neste trabalho, procuramos expor nossa compreensão acerca do que é uma demonstração matemática, desde seus primórdios até os dias atuais. Constatamos que, desde a Antiguidade, no período em que viveu Tales, Pitágoras e Euclides, a prova das proposições e asserções matemáticas, isto é, o argumento que dê validade a essas afirmações, era tido como parte central na matemática que vinha sendo produzida. Anterior aos gregos, o que se via eram aplicações práticas com pouco ou nenhum formalismo. Respostas que justificam essa mudança no fazer matemático são trabalhadas a partir de duas teses formuladas por Arsac (1987, *apud* GARNICA, 1995) ²².

A primeira delas é conhecida como a tese *Externalista* e não envolve diretamente a comunidade matemática, mas sim a comunidade grega em geral. Ela está diretamente ligada aos debates argumentativos da vida pública e política dos cidadãos gregos. “[...] A transformação da Matemática em ciência hipotético-dedutivo será a aplicação das regras do debate argumentativo que governava a vida política na cidade grega” (ARSAC, 1987, p. 271 *apud* GARNICA, 1995, p. 16). Desta forma, os processos de demonstração estariam ligados à língua grega e seus processos de argumentação.

A segunda tese, denominada de *Internalista*, diz respeito do porque as demonstrações matemáticas se tornaram indispensáveis na matemática. Segundo Arsac (1987, *apud* GARNICA, 1995), há uma estreita ligação entre as demonstrações matemáticas e o problema da irracionalidade. É possível que o problema da irracionalidade tenha surgido por volta do século V, quando um dos integrantes da seita pitagórica descobriu a incomensurabilidade da medida do lado do quadrado, com a medida do lado da diagonal. Podemos analisar o problema de duas formas: aritmeticamente e por meios geométricos. No primeiro caso, é evidente que não conseguimos a raiz quadrada exata e racional de 2. Ao passo que no contexto geométrico é constatada a impossibilidade de se conseguir uma unidade de medida comum, tanto à diagonal quanto ao lado de um quadrado com esta mesma diagonal. Assim, não é possível que se tenha constatado a incomensurabilidade através do traçado de um gráfico.

Entretanto, em qualquer uma das hipóteses o objetivo é estabelecer uma verdade. E, nesse contexto, os processos demonstrativos ou de prova têm uma finalidade bem

22 GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática.** 1995. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Rio Claro.

determinada, “é o que atesta a veracidade ou autenticidade, a garantia, o testemunho, o processo de verificação de exatidão de cálculos ou raciocínios, a dedução que mantém a verdade de sua conclusão apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras” (GARNICA, 1995, p. 10).

Entre as idades média e moderna há uma pausa na produção matemática da Europa ocidental. Essa pausa ocorre por motivos que podem ser entendidos a luz dos acontecimentos da época. Domingues (2002) relata que na “Idade Média, com o grande declínio cultural verificado no Ocidente, em particular na matemática, os *Elementos* tornaram-se uma obra de um nível muito acima das possibilidades da época, só usada muito restrita e superficialmente” (DOMINGUES, 2002, p. 06). Esse declínio cultural veio trazer diversas baixas para o desenvolvimento matemático, como exposto ao longo do trabalho. Já na modernidade, mesmo com a presença de muitos teóricos notáveis como I. Newton e R. Descartes, admiradores do método axiomático-dedutivo, não detectamos em suas obras nenhum traço de demonstrações matemáticas.

Evidentemente não faltava capacidade a esses matemáticos, muito pelo contrário. A verdade é que os fundamentos da matemática, de um modo geral, careciam ainda de uma estruturação mais sólida e abrangente e isso não seria alcançado senão na segunda metade do século XIX, após um arrastado processo de maturação (DOMINGUES, 2002, p.06).

Com o desenvolvimento da lógica formal, a matemática passa a ser compreendida como uma ciência formal e as demonstrações matemáticas passam a ser novamente, o elemento central nesta atividade.

Segundo Russell (2007), a matemática é uma ciência dedutiva, onde a partir de algumas premissas ou hipóteses e por processos de deduções, chega-se aos vários teoremas que a compõe. No passado, é compreensível que as deduções eram desprovidas de rigor, mas é também entendido que rigor perfeito é algo inatingível. Mas, se falta rigor, nossas demonstrações são defeituosas. Dito isto, podemos afirmar que os métodos matemáticos, por mais apurados que sejam não podem tudo, deixando sempre algo para que os matemáticos completem ou melhorem.

As demonstrações matemáticas de acordo com Silva (2002) têm varias finalidades, ao que em primeiro lugar deve estabelecer a veracidade relativa à alguma tese enunciada. Em segundo ela própria, a demonstração, deve nos convencer da veracidade que se dá a tese. Tal tese permanece como uma verdade indubitável da matemática, até que se prove o contrário.

É por meio das demonstrações que os matemáticos desenvolvem, avançam e produzem ciência, pois a partir desse processo chega-se a novos resultados construindo uma espécie de árvore que se inicia com os postulados e axiomas (raízes), que continua com as inferências lógicas (caule) e se expande em diversos resultados (galhos), ou seja, os teoremas da teoria, o que mantém o caráter de verdade, verdade essa que é universal e, mais do que isso, atemporal, valendo para todas as épocas.

REFERÊNCIAS

- ALVES, A. J. O planejamento de pesquisas qualitativas em educação. **Cadernos de pesquisa**. Disponível em: <<http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/cp/article/view/1042/1050>>. Acesso em: 12 nov. 2018.
- BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V.; LAZARI, H. Cenário do Surgimento e o Impacto do Teorema da Incompletude de Gödel na Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. Disponível em: <[http://www.mariabicudo.com.br/resources/artigo%20publicado%20JIEEM%20v.10%2C%20n.3%2C%20p.%20198-207%2C%202017%20\(1\).pdf](http://www.mariabicudo.com.br/resources/artigo%20publicado%20JIEEM%20v.10%2C%20n.3%2C%20p.%20198-207%2C%202017%20(1).pdf)>. Acesso em: 12 nov. 2018.
- BICUDO, I. Demonstração em matemática. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 15, p. 79-90, 2002.
- BICUDO, I. **Os Elementos**: Euclides. São Paulo: UNESP, 2009. 593p.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p.18-23, 1993.
- BICUDO, M. A. V. Sobre a fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V.; ESPÓSITO, V. H. C. **Pesquisa qualitativa em educação**. Piracicaba: UNIMEP, 1994. Cap. 1, p. 15-22.
- BICUDO, M. A. V. Contribuição da fenomenologia para a educação. In: BICUDO, M. A. V.; CAPPELLETTI, I. F. (Orgs). **Fenomenologia**: uma visão abrangente da educação. São Paulo: Olho d'Água, 1999. p. 11-51.
- BICUDO, M. A. V. et al. **Educação Matemática**. Disponível em: http://www.mariabicudo.com.br/resources/CAPITULOS_DE_LIVROS/Um%20ensaio%20sobre%20concep%C3%A7%C3%B5es%20a%20sustentarem%20sua%20pr%C3%A1tica%20pedag%C3%B3gica%20e%20produ%C3%A7%C3%A3o%20de%20conhecimento.pdf. Acesso em: 12 nov. 2018.
- BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 5, n. 2, p. 15-26, mai. - ago. 2012.
- BICUDO, M. A. V. Sobre história e historicidade em Edmund Husserl. **Cadernos da EMARF**, Rio de Janeiro, v.9, n.1, p.21-48, 2016.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994. p. 134-301.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. 488p.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 508p.

BRANDÃO, A. R. P. A postura do positivismo com relação às ciências humanas. **Theoria - Revista Eletrônica de Filosofia**, v. 3, n. 6, p. 80-105, 2011.

CAJORI, F. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna LTDA, 2007. 654p.

CAMPOS, F. de; MIRANDA, R. G. A escrita da história. São Paulo: Escala Educacional, 2005. 655 f.

CHIZZOTTI, A. A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. **Revista Portuguesa de Educação**, Braga, v. 16, n. 2, p. 221-236, 2003.

DIAS, C. M. C. **Compêndios de matemática e de lógica matemática: uma abordagem extemporânea**. 2. ed. Curitiba: C. M. Corrêa Dias, 1999. 391 p.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. **Boletim de Educação Matemática**, v. 15, p. 55-67, 2002.

DUROZOI, G. e ROUSSEL, A. **Dicionário de Filosofia**. Tradução de Marina Appenzeller. Campinas, SP: Papirus, 1993a.

EDUCALINGO. **Silogística**. Disponível em: <<https://educalingo.com/pt/dic-pt/silogistica>> Acesso em: 30 de Outubro de 2018

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2004. 848p.

M. FILHO, D. C. **Um convite à Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. 455p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **O profissional em Educação Matemática**. Santos: Universidade Santa Cecília, 2001.

GADAMER, Hans-Georg. **Verdade e método II: complementos e índice**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2002. 624p.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática**. 1995. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Rio Claro.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre: UFRS, 2009. 120p.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 380p. v. 5.

HEIDEGGER, M. **Ser e Tempo**. Petrópolis: Vozes, 2008.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna: análise de uma impregnação mútua**. 6. ed. São Paulo: Cortez, 1991. 208p.

NEVES, J. L. Pesquisa qualitativa: características, usos e possibilidades. **Caderno de Pesquisas em Administração**, São Paulo, v. 1, n. 3, p. 1-5, 1996. Disponível em: <http://ucbweb.castelobranco.br/webcaf/arquivos/15482/2195/artigo_sobre_pesquisa_qualitativa.pdf>. Último acesso: out./2017.

PIETROPALO, R. C. **(Re) significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - São Paulo.

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2007. 248p.

SAMPIERI, R. H.; COLLADO, C. F; LUCIO, P. B. **Metodologia de pesquisa**. 3. ed. São Paulo: McGraw-Grill, 2006. 624p.

SILVA, J. J. **Filosofia da matemática**. São Paulo: UNESP, 2007. 238p.

SILVA, J. J. Demonstração Matemática da Perspectiva da Lógica Matemática. **Boletim de educação matemática**. Rio Claro: v. 15, n.18, p. 68-78, 2002.

SINGH, S. **O último teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: BestBolso, 2014. 223p.