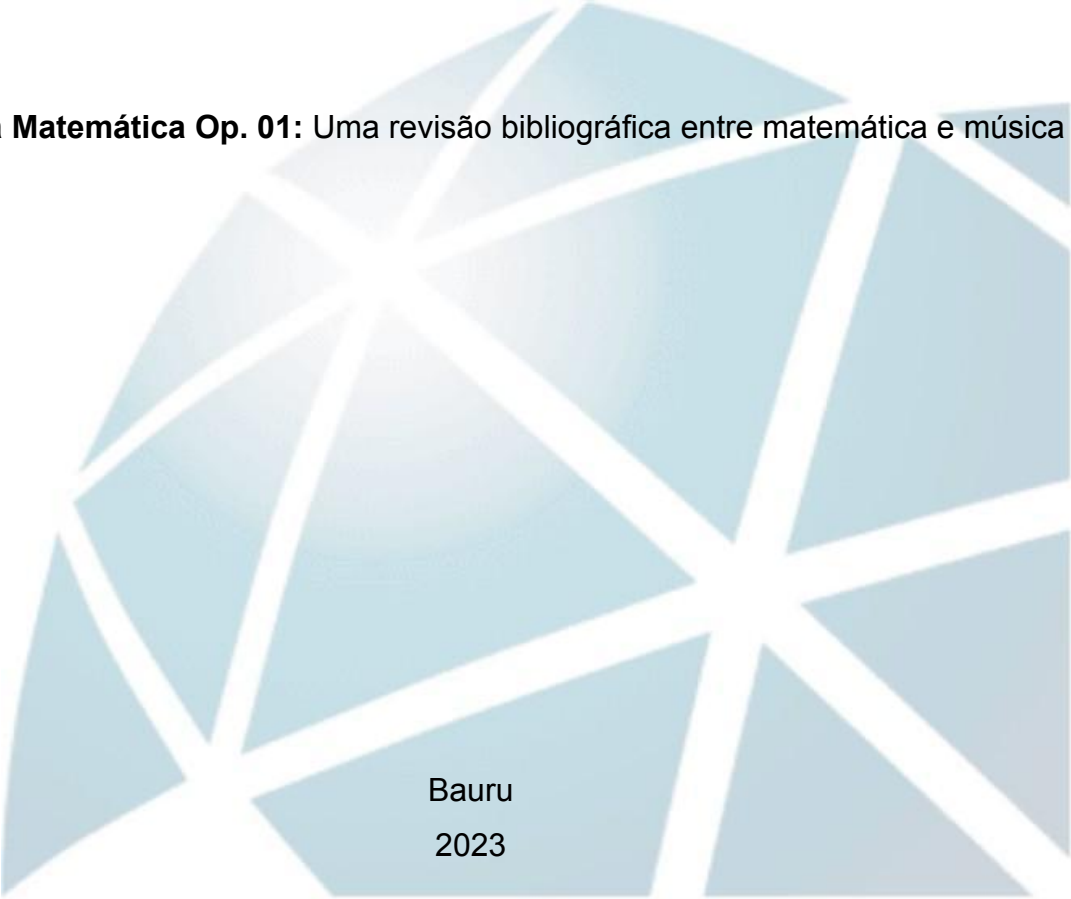

MATEMÁTICA – LICENCIATURA

LEONARDO ULIAN DE LIMA

Sinfonia Matemática Op. 01: Uma revisão bibliográfica entre matemática e música



Bauru
2023

FOLHA DE ROSTO

Leonardo Ulian de Lima

Sinfonia Matemática Op. 01: Uma revisão bibliográfica entre matemática e música

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Bauru, como um dos requisitos para obtenção do grau de Licenciado em Matemática

Orientador: Prof^ª. Dra. Tatiana Miguel Rodrigues

Bauru

2023

L732s

Lima, Leonardo Ulian de

Sinfonia Matemática op. 01 : uma revisão bibliográfica entre matemática e música / Leonardo Ulian de Lima. -- Bauru, 2023
38 p.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura - Matemática) -
Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de
Ciências, Bauru

Orientadora: Tatiana Miguel Rodrigues

1. Educação Matemática. 2. Música. 3. Simetria. 4. Frações.
5. Progressão Geométrica. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da
Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por poder vivenciar este momento.

Agradeço imensamente a minha família por sempre estarem ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis.

Também agradeço aos bons amigos feitos ao longo dessa jornada, sejam eles de infância, da escola ou da faculdade.

Não poderia deixar de agradecer a todos os professores que passaram pela minha vida e me inspiraram a seguir essa profissão, sobretudo, gostaria de destacar a professora que me fez gostar de matemática ainda criança, dona Tiba, e meu professor de música, Carlos Eduardo, vulgo Burcão.

Gostaria de deixar minha gratidão também a grandes personalidades como ao poeta Fernando Pessoa, que me encanta com seus poemas, ao filósofo Albert Camus, por me fazer olhar o mundo de outra forma, ao músico e matemático Por Agora, pois, sem ele esse trabalho não seria possível, ao compositor Frederic Chopin, que criou as mais belas melodias que já ouvi e, por fim, ao senhor Abel Ferreira, técnico do Palmeiras, que dispensa comentários.

Por fim, mas não menos importante, quero expressar toda minha gratidão à Prof^a. Dra. **Tatiana Miguel Rodrigues**, minha orientadora neste trabalho, por toda a paciência e confiança, e por não me deixar desanimar em momento algum.

“Música é vida interior, e quem tem vida interior jamais padecerá de solidão”
(Artur da Távola).

Resumo

O presente trabalho consiste em uma pesquisa bibliográfica, relacionando dois temas, a Matemática e a Música, analisando textos acadêmicos, com o objetivo de analisar como as relações entre esses temas podem ser utilizadas para favorecer o Ensino da Matemática.

As relações contempladas no trabalho envolvem composições e o uso de simetrias nas mesmas, que podem facilmente ser visualizadas na pauta musical; as relações fracionárias entre as notas musicais presentes na divisão de uma corda em determinadas partes e também, como as frequências das notas musicais estão ligadas por meio de uma progressão geométrica.

A pesquisa inicia com a introdução do tema estudado e os objetivos, em seguida, são explicados os conceitos musicais abordados e um breve resumo da história da música ocidental. Depois, são apresentados os aspectos metodológicos da pesquisa e, por fim, a análise dos textos e as conclusões.

Palavras-chave: Educação Matemática. Música. Simetria. Frações. Progressão Geométrica.

Abstract

The present work consists of bibliographical research, relating two themes, Mathematics and Music, analyzing academic texts, to analyze how the relationships between these themes can be used to favor the teaching of mathematics.

The relationships contemplated in the work involve compositions and the use of symmetries in them, which can easily be visualized in the musical score; the fractional relationships between the musical notes present when dividing a string into certain parts and also, how the frequencies of the musical notes are linked through a geometric progression.

The research begins with the introduction of the topic studied and the objectives, then the musical concepts covered are explained, and a summary of the history of Western music. Then, the methodological aspects of the research are presented, and, finally, the analysis of the texts and the conclusions.

Keywords: Mathematics Education. Music. Symmetry. Fractions. Geometric progression.

Lista de ilustrações

Figura 1: Apresentação de uma ópera em São Paulo	16
Figura 2: Concerto para 2 pianos	16
Figura 3: Partitura em branco	17
Figura 4: Posição de cada nota na partitura	17
Figura 5: Símbolos rítmicos das notas	18
Figura 6: Partitura apontando simetrias em uma composição de Bach	28
Figura 7: Simetria de reflexão	29
Figura 8: Simetria de translação	29
Figura 9: Simetria de rotação	30
Figura 10: O monocórdio	31
Figura 11: O xilofone de garrafas	34

Sumário

1 A INTRODUÇÃO, OU PRELÚDIO	9
2 PRIMEIRO MOVIMENTO: OS OBJETIVOS	11
3 SEGUNDO MOVIMENTO: A MÚSICA	12
3.1 Conceitos Básicos	12
3.1.1 Notas	12
3.1.2 Escalas	12
3.1.3 Oitava	12
3.1.4 Tonalidade	13
3.1.5 Acordes	13
3.1.6 Melodia	13
3.1.7 Consonância e Dissonância	13
3.1.8 Ornamentos	13
3.1.9 Polifonia	13
3.1.10 Fuga	14
3.1.11 Moteto	14
3.1.12 Cantata	14
3.1.13 Opera	14
3.1.14 Concerto	15
3.1.15 Sinfonia	15
3.1.16 Pauta Musical	16
3.2 Um Pouco de História	17
3.2.1 O Período Medieval (1000-1400 d.C.)	18
3.2.2 O Renascimento (1400-1600 d.C.)	18
3.2.3 O Barroco (1600-1750 d.C.)	19
3.2.4 O Classicismo (1750-1820 d.C.)	20
3.2.5 O Romantismo (1810-1920 d.C.)	20
3.2.6 O Período Moderno (1900-1950 d.C.)	21

3.2.7 Música Contemporânea	22
4 TERCEIRO MOVIMENTO: METODOLOGIA	24
4.1 Pesquisa Qualitativa	24
4.2 Pesquisa Bibliográfica	25
4.3 Os textos e a escolha deles	26
5 QUARTO MOVIMENTO: A ANÁLISE DOS TEXTOS	27
5.1 Las matemáticas de Johann Sebastian Bach	27
5.2 Matemática e Música em uma Sequência Didática para o ensino de frações no 7º ano do Ensino Fundamental	29
5.3 Matemática e Música	32
6 CONCLUSÃO	35
REFERÊNCIAS	36

1 A introdução, ou prelúdio

A relação entre matemática e música é uma interconexão fascinante, uma valsa que remonta a séculos. A matemática desempenha um papel essencial na criação e compreensão da música, permitindo que compositores, músicos e teóricos explorem a harmonia, o ritmo e a estrutura musical de maneira criativa. Neste trabalho, será explorado como a matemática é fundamental para a música e como a música pode contribuir para o ensino da matemática, gerando uma dança entre as correlações dessas áreas.

Para este autor, a ideia de desenvolver um estudo relacionando matemática e música começou devido a afinidade com ambas áreas, contudo, era necessário apurar melhor como, através desse anseio, idealizar um tema relevante a ser pesquisado. Nesse sentido, a observação de salas de aula durante a disciplina Estágio I foi de grande valia. Interagindo e observando os alunos foi possível notar a falta de interesse dos mesmos pela matemática, normalmente por não conseguirem vislumbrar nela elementos de suas realidades. Além disso, em conversas mais informais com os estudantes, notou-se pouco conhecimento sobre música, mesmo vislumbrando que esta arte era muito presente em seus cotidianos e comumente utilizada como forma de se concentrar nos estudos. Por isso, a ideia do presente trabalho é, através da ligação entre ciência e arte, mostrar possibilidades de usar a música a favor do ensino da matemática analisando produções acadêmicas que envolvem esses temas.

A música, como uma manifestação da arte, frequentemente se baseia em estruturas matemáticas para criar composições belas e cativantes. Compositores usam conceitos matemáticos, mesmo que de forma não intencional, para determinar os sons mais (ou menos) agradáveis ao ouvido humano. Além disso, o ritmo musical é intrinsecamente ligado à matemática, pois os músicos usam frações e divisões rítmicas para criar padrões rítmicos.

A simetria, que é um conceito muito importante em matemática, desempenha um papel importante na música, pois muitas composições buscam criar equilíbrio e harmonia por meio da repetição de padrões simétricos.

Nesta exploração das relações entre matemática e música, serão aprofundados esses conceitos demonstrando como a matemática enriquece nossa compreensão da música e também como a música pode ser utilizada como recurso

de aproximação dos alunos com a matemática, visto que a mesma é uma disciplina normalmente pouco querida pelos estudantes.

A fim de estreitar e tornar ainda mais cativantes essas relações, esse trabalho foi escrito buscando fazer um paralelo com o estilo de composição de uma sinfonia, assim, os capítulos foram chamados também de movimentos e a introdução de prelúdio. Inicialmente serão apresentados os principais fundamentos musicais que o trabalho abordará, em seguida, os conceitos matemáticos utilizados e depois as fundamentações teóricas metodológicas de uma pesquisa bibliográfica qualitativa, posteriormente, serão tratadas as análises dos textos escolhidos e, por fim, as conclusões.

2 Primeiro movimento: os objetivos

O presente trabalho consiste em buscar, através de uma pesquisa bibliográfica, a relação existente entre matemática e música e o quanto essa relação já foi divulgada através de textos acadêmicos. Além disso, dentro dos textos analisados, levantar hipóteses e possibilidades de como essas relações entre música e matemática podem ser abordadas pedagogicamente como recurso para o ensino da matemática.

3 Segundo movimento: a música

3.1 Conceitos Básicos

Nesta seção serão abordados alguns conceitos de música com o objetivo de familiarizar o leitor a termos que serão abordados ao longo do trabalho, no entanto, existem muitos outros conceitos musicais que não estão presentes aqui por não serem relevantes para a pesquisa em questão.

3.1.1 Notas

São o menor elemento de um som, determinadas e separadas por sua frequência comumente medida em *hertz*. Tradicionalmente, na música ocidental européia, existem doze notas musicais e o intervalo entre suas frequências é dado em tom e semitom (metade de um tom), além do mais, elas podem ser naturais, sustentadas (aumentada em um semitom, denotada por um “#” após o nome da nota) ou bemóis (diminuída em um semitom, denotada por um “b” após o nome da nota).

Na música tonal ocidental os nomes das notas naturais são Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si.

3.1.2 Escalas

Conjuntos de notas que definem a tonalidade de uma música (COLLISSON, 2019), por exemplo, a escala diatônica de Dó maior é constituída pelas notas Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si. Estas notas são nomeadas, de forma generalizada, respectivamente de Tônica, Segunda, Terça, Quarta, Quinta, Sexta e Sétima da escala.

A escala temperada é aquela que divide todas as 12 notas em intervalos iguais (COLLISSON, 2019).

3.1.3 Oitava

Intervalo entre duas notas de nome igual, porém, que possuem o dobro ou metade da frequência (COLLISSON, 2019).

3.1.4 Tonalidade

Sistema de escalas maiores e menores, define o tom de uma música baseado na primeira nota (ou tônica) da escala (COLLISSON, 2019).

3.1.5 Acordes

Combinação simultânea de três (tríade) ou quatro (tétrade) notas. As tríades são mais utilizadas e são formadas pela primeira (tônica), terceira (terça) e quinta notas de uma escala. O conjunto de acordes de uma música é chamado de Harmonia.

3.1.6 Melodia

Sequência das notas tocadas formando uma música (COLLISSON, 2019)

3.1.7 Consonância e Dissonância

São intervalos ou acordes que, quando executados, produzem um som agradável (consonante) ou desagradável (dissonante) ao ouvido humano.

3.1.8 Ornamentos

São técnicas utilizadas para embelezamento de uma melodia, por exemplo, o floreio consiste em tocar a nota principal, a nota acima da principal e novamente a nota principal rapidamente (COLLISSON, 2019).

3.1.9 Polifonia

Significa “muitos sons”, diz respeito a um estilo de composição musical, no qual diferentes melodias são tocadas simultaneamente (também chamado de contraponto), todas essas melodias são independentes e possuem a mesma importância na música (COLLISSON, 2019).

3.1.10 Fuga

Peça polifônica muito popular no período barroco, onde as diferentes melodias têm caráter imitativo e são apresentadas na música uma a uma (COLLISSON, 2019).

3.1.11 Moteto

Composição para coral, feita em estilo polifônico em cima de textos sagrados, normalmente não possui acompanhamento (COLLISSON, 2019).

3.1.12 Cantata

Peça composta para voz e orquestra com o objetivo de contar uma história feita tanto para músicas sacras ou não. No período barroco, eram realizadas na igreja como forma de refletir sobre os textos bíblicos antes e depois do sermão (COLLISSON, 2019).

3.1.13 Ópera

De acordo com Collisson (2019), é uma peça de teatro onde a música desenvolve papel importante, todos ou quase todos os personagens cantam e os diálogos são todos cantados também. Algumas de suas subcategorias são: Ópera-bufa (caráter cômico), Ópera séria (histórias heróicas e mitológicas), Ópera *comique* (estilo francês, não necessariamente de caráter cômico) e Opereta (uma ópera mais curta com diálogos falados). Um exemplo famoso de ópera é “A flauta mágica” de Mozart, que estreou em Viena no ano de 1791.

Figura 1: Apresentação de uma ópera em São Paulo



Fonte: Folha de São Paulo, 2023.

3.1.14 Concerto

Segundo Collisson (2019), se trata de uma grande apresentação musical para orquestra, no entanto, o objetivo é mostrar as habilidades de instrumento, ou seja, um músico tem mais destaque fazendo o solo enquanto os demais integrantes da orquestra fazem o acompanhamento. Um exemplo clássico de concerto são as obras de “As quatro estações” compostas por Vivaldi no Século XVIII, nas quais o violino era o solista.

Figura 2: Concerto para 2 pianos



Fonte: Jornal Estado de Minas, 2022.

3.1.15 Sinfonia

Grande peça composta para orquestra completa, nos períodos Clássico e Romântico as sinfonias eram divididas em quatro partes, chamadas de movimentos,

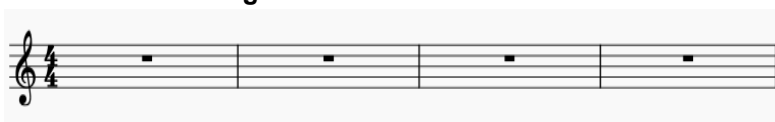
que variam entre estilos mais rápidos e lentos para causar justamente um movimento entre as partes gerando diversas sensações em uma mesma obra. Porém, posteriormente as sinfonias passaram a possuir mais ou menos movimentos de acordo com o desejo do compositor (COLLISSON, 2019).

Um exemplo famoso de sinfonia é a “Eroica” de Beethoven, composta em homenagem a Napoleão Bonaparte.

3.1.16 Pauta Musical

Pauta musical ou Partitura musical é um método de escrita (notação) musical através de um sistema horizontal com cinco linhas como na figura

Figura 3: Partitura em branco



Fonte: o próprio autor

Na partitura, as notas são representadas tanto em relação a sua altura (frequência), quanto a sua duração, como nas figuras a seguir

Figura 4: Posição de cada nota na partitura

1. Desenhe a pauta musical

Vamos escrever notas nas linhas e nos espaços da pauta:

2. Dê nome para cada nota

dó ré mi fá sol lá si dó ré mi fá sol

E também nas linhas e espaços suplementares:

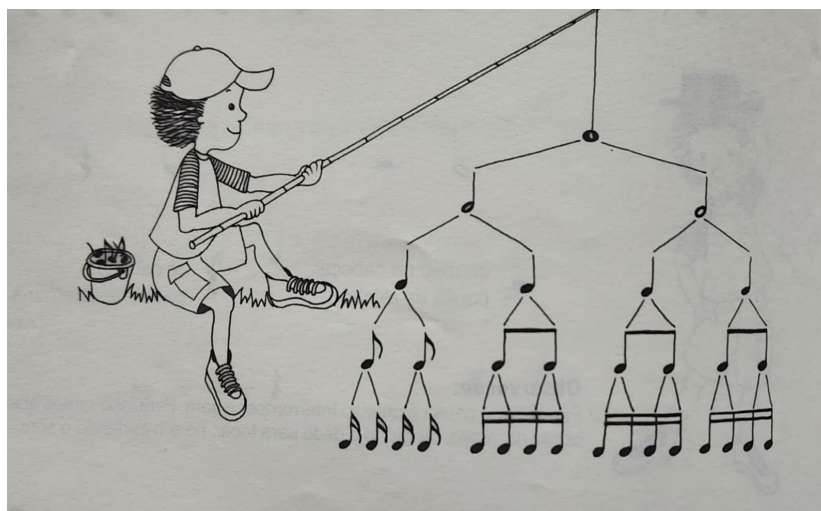
3. Escreva as notas:

lá si dó ré mi fá

dó si lá sol fá mi

Fonte: Mariani, 2009.

Figura 5: Símbolos rítmicos das notas



Fonte: Mariani, 2009.

Na figura 5 estão dispostas as diferentes figuras rítmicas que as notas podem assumir, de cima para baixo, da maior para a menor duração, ou seja, uma Semibreve tem duração equivalente a duas Mínimas, ou quatro Semínimas, ou oito Colcheias, ou dezesseis Semicolcheias.

A pauta musical também possui linhas verticais que servem para separar os compassos (segmentos de tempo musical que possuem um número fixo de batidas), para que seja definido o tamanho (duração em batidas) dos compassos, toda partitura possui uma fórmula no seu início, como pode ser visto na Figura 3 pelos números 4 e 4, com um número em cima e outro em baixo. O número de cima representa a quantidade de batidas de cada compasso e o número de baixo representa a duração de cada batida, onde a Semibreve é representada pelo número 1, a Mínima pelo 2, a Semínima pelo 4 e assim por diante. Portanto, na Figura 3, os compassos da música teriam quatro batidas cada e a duração dessas batidas seriam equivalentes à duração de uma Semínima.

3.2 Um Pouco de História

Nesta sessão serão abordados aspectos técnicos e históricos da música clássica, isto é, a música ocidental produzida a partir da Idade Média até a atualidade, tendo como base a obra “O livro da música clássica” de Steve Collisson.

3.2.1 O Período Medieval (1000-1400 d.C.)

Durante grande parte da história a música foi, como outras formas de arte, muito influenciada pela igreja, por isso, durante o período medieval, era tratada como parte do culto, e não diversão. Assim, a música foi desenvolvida de maneira mais formal por monges que cantavam os textos sagrados em latim, dentre esses, Guido d'Arezzo merece destaque por ter inventado a primeira pauta musical, com o objetivo de auxiliar os cantores com o movimento da melodia. Ainda na Idade Média, surgiu a polifonia (um estilo de composição com mais camadas, feito para diversas vozes) que foi chamada de Ars Nova (Arte Nova) e seria muito utilizada nos próximos períodos da história da música.

3.2.2 O Renascimento (1400-1600 d.C)

O movimento musical renascentista precisou de alguns anos para atingir um estilo próprio que se distanciasse do estilo medieval, o principal compositor a incorporar novidades a música foi Guillaume Dufay, da escola Franco-flamenga.

A nova tendência consistia em compor uma peça polifônica ao redor de uma melodia já utilizada pela igreja, no entanto, o estilo se expandiu para além da música sacra, englobando também canções profanas (não religiosas) e motetos (composições corais polifônicas baseadas em textos sagrados sem acompanhamento).

Com os acontecimentos da Reforma protestante e a Contrarreforma católica o estilo de composição renascentista passou por alterações, a polifonia perdeu força pela complexidade e dificuldade de ser cantada, assim, os compositores passaram a criar polifonias mais simples. Esse estilo de som mais doce foi chamado de música do Alto Renascimento.

Além disso, fora das igrejas a música também se desenvolveu na Renascença, a música instrumental se espalhou pela corte e classe-média e com novas técnicas de impressão de partituras o novo estilo se espalhou pela Europa. No final do período renascentista as composições passaram a possuir um ar mais dramático anunciando não intencionalmente a chegada do Barroco.

3.2.3 O Barroco (1600-1750 d.C)

A música barroca teve um início radical, fazendo a transição da polifonia renascentista para um estilo dramático e expressivo. O evento que marcou a “estréia” desse movimento foi a apresentação da primeira ópera mundial, intitulada *Dafne*, do italiano Jacopo Peri, em Florença.

O estilo barroco se caracterizava pela harmonia, as composições eram geradas em cima de acordes maiores e menores. “Efeitos dramáticos e contrastantes eram obtidos variando a intensidade do som e do tempo, movendo a música entre escalas e instrumentos, adicionando às vezes ornamentos como trinados.” (COLLISSON, 2019, p. 60)

No entanto, a música produzida na época não agradava a igreja Luterana que, desde a Reforma, era avessa à ópera em terras germânicas. Assim, desenvolveram um estilo próprio diferente do italiano, onde a harmonia barroca inicial era unida a elementos polifônicos para criar hinos da igreja que eram chamados corais.

Foi em 1685, na Alemanha, que nasceu o maior expoente do barroco e um dos mais importantes músicos da história. Johann Sebastian Bach aprendeu música com o pai e, em 1703, se tornou músico da corte de Weimar. Bach compôs mais de duzentas cantatas, cinco missas, prelúdios e motetos, porém, ficou consagrado por suas fugas, que eram peças altamente complexas que utilizavam o contraponto (polifonia) como base, nas quais, as vozes surgiam uma a uma de forma imitativa na música.

Bach influenciou e foi aclamado por grandes músicos da história, segundo Beethoven “Ele não deveria se chamar ‘riacho’[em alemão Bach], mas ‘mar’, devido a sua riqueza infinita, inesgotável de harmonias e combinações de tons.” (BEETHOVEN *apud* COLLISSON, 2019, p. 101).

Bach faleceu aos 65 anos, em 1750, marcando o final do período barroco.

3.2.4 O Classicismo (1750-1820 d.C)

O iluminismo tomou conta da Europa no séc. XVIII influenciando, além da política e filosofia, a cultura e a arte da sociedade. A ópera e os concertos receberam um novo público com a ascensão da classe média urbana, gerando necessidade de mudança na forma de modo a agradar os novos ouvintes. Por isso, a música passou a abandonar a complexidade do contraponto e se apoiar em um

estilo mais livre, focando na elegância e proporção baseado nos ideais estéticos da Grécia na antiguidade.

Na Áustria, Viena se tornou o grande Polo geográfico e cultural do período, sua população prosperava e ansiava por música nova. Nesse cenário, surgiram os dois grandes nomes do movimento clássico, Wolfgang Amadeus Mozart e Ludwig Van Beethoven.

Mozart nasceu em 1756, em Salzburgo, no entanto, a cidade parecia sufocar seu talento como violinista, pianista e compositor. Por isso, mudou-se para Viena em 1781, onde aperfeiçoou gêneros como a sinfonia (obras longas feitas para orquestras completas) e o concerto (peça para instrumento solo acompanhado da orquestra), ademais, escreveu óperas de muito sucesso como por exemplo “A flauta mágica” de 1791, ainda no mesmo ano, o músico viria a falecer de causas desconhecidas, deixando grande legado para a próxima geração. “A música de Mozart é tão pura e bela que eu a vejo como reflexo de operações internas do universo.” (EINSTEIN *apud* COLLISSON, 2019, p. 131).

Beethoven, por sua vez, nasceu em 1770, na Alemanha, e se mudou para Viena em 1792, onde o pianista se estabeleceu ganhando admiradores nobres. Foi um compositor radical e inovador que ajudou a transição do período clássico para o período romântico. Em 1818 começou a perder sua audição, o que surpreendentemente não lhe impediu de escrever algumas de suas obras mais inventivas. Faleceu em Viena, no ano de 1827. “Tocar uma nota errada não é grave. Tocar sem paixão é indesculpável.” (BEETHOVEN *apud* COLLISSON, 2019, p. 161).

3.2.5 O Romantismo (1810-1920 d.C)

Após a Revolução Industrial a Europa passava por um processo de urbanização, além disso, o racionalismo (corrente filosófica que prezava pela razão como única forma de alcançar conhecimento) estava em expansão. Assim, em contraposição a esses fatores, surge o movimento romântico, que se afastava da elegância e formalidade do período clássico e buscava expressar a personalidade a admirar a natureza. Na música isso se deu pelo apelo às emoções, através da expansão gradual da variedade de harmonias e instrumentos.

A estética romântica estava refletida até mesmo em seus compositores que, muitas vezes, se vestiam com roupas informais, cabelos compridos e despenteados,

además, o estilo e trajetória de vida deles demonstravam toda a dramaticidade da época. Dentre os grandes nomes desse movimento estão o já citado Beethoven, Paganini e Chopin.

Niccolò Paganini nasceu em Gênova, em 1782, ainda jovem aprendeu a tocar violino com o pai e, seguindo uma rotina severa de treino, tornou-se um virtuose. Durante sua carreira viajou pela Itália, Áustria, Alemanha, Boêmia e França, onde suas óperas fizeram sucesso. Retornou à Itália para cuidar de problemas de saúde, entre eles a sífilis, que lhe tiraram a vida em 1840.

As principais obras de Paganini são os 24 caprichos para violino, composições de extrema dificuldade técnica que pouquíssimos instrumentistas poderiam executar. A sua genialidade aliada a aparência esquelética, causada por doença, fizeram com que surgisse o rumor de que o músico havia feito um trato com o diabo em troca do seu dom musical.

Frédéric Chopin era polonês, nascido em Varsóvia em 1810, aprendeu a tocar piano ainda jovem. Aos vinte anos mudou-se para Paris, lá vivia de dar aulas, publicar músicas e tocar em salões.

As obras de Chopin mostravam influência de Bach, suas composições possuíam grande variedade de gêneros como prelúdios, valsas e estudos, entretanto, as mais famosas são os noturnos, composições sem forma específica que eram inspiradas na noite, onde o estilo parecia demonstrar a própria alma do piano.

3.2.6 O Período Moderno (1900-1950 d.C)

No início do séc. XX marcou uma época de mudanças na música, a base da música ocidental, ou seja, o sistema de tons maiores e menores passou a ser desafiado na busca de encontrar sonoridades para expressar os tempos modernos, algumas das características dessa época foram o rompimento com a tradição histórica, a utilização de dissonâncias, ritmos irregulares e técnicas experimentais de orquestra. Nesse contexto, em um mundo mais globalizado, surgiram diferentes movimentos musicais durante a primeira metade do século, como o impressionismo, o expressionismo e o neoclassicismo. Durante esse período, na França, surgiram dois compositores que se destacaram por um estilo mais calmo e sereno, Claude Debussy e Erik Satie.

No entanto, não só na Europa ocorreu o surgimento da música clássica moderna, estilos populares e inicialmente marginalizados começaram a surgir e se estabelecer no meio musical, como é o caso dos gêneros afro-americanos *jazz*, que surgiu da música dos escravos do sul dos Estados Unidos, e o *ragtime*, popularizado pelas composições de Scott Joplin.

Por fim, o Brasil também teve um expoente na música moderna, o carioca Heitor Villa-Lobos, nascido em 1887. O compositor foi muito influenciado desde sua infância pela obra de Bach, além disso, quando adulto, passou alguns anos em Paris, onde incorporou a música europeia ao seu estilo. Suas principais obras são as “Bachianas brasileiras”, uma coletânea com nove composições para diferentes combinações instrumentais, nas quais o contraponto de barroco de Bach se entrelaça com formas musicais folclóricas do Brasil.

3.2.7 Música Contemporânea

Após a Segunda Guerra Mundial, a música passou a incorporar cada vez mais aspectos experimentais, deixando de lado estruturas anteriormente fixadas para composições e até mesmo questionado a noção do que uma música deve ser.

A tecnologia se tornou fonte de inspiração para criar um novo mundo sonoro, usando sons gravados em fitas magnéticas como base.

Além disso, também foi muito utilizado o conceito de “música aleatória”. John Cage, compositor norte-americano, criou algumas peças nesse estilo, a mais famosa é “4’33” que consistia em quatro minutos e trinta e três segundos de silêncio, nos quais o barulho ambiente do auditório ficaria em evidência.

Todavia, essa estética musical distanciou muitos ouvintes, por isso, na década de 60, nos Estados Unidos, surge um novo conceito. O Minimalismo na música defendia uma ideia de simplicidade, repetindo harmonias básicas de forma hipnótica como eram feitas em algumas músicas africanas e asiáticas.

Com o fim dos anos de 1960 e a expansão da globalização social, os compositores clássicos passaram a aderir cada vez mais a conceitos e ideias da cultura popular, utilizando elementos da música *pop* e do *rock*.

Por fim, ainda é cedo para saber quais rumos a música clássica tomará no séc. XXI, porém, de acordo com Colisson: “Mas a história indica que os

compositores continuarão a encontrar muitos novos meios de expressão musical.”
(COLLISSON, 2019, p. 297).

4 Terceiro movimento: metodologia

4.1 Pesquisa Qualitativa

É difícil encontrar uma origem para a pesquisa qualitativa visto que desde a antiga Grécia eram feitas descrições de vestes, armas e até mesmo cerimônias de cunho religioso de povos vizinhos, porém, Goldenberg (2004) ressalta a importância das técnicas qualitativas nas ciências sociais, evidenciando o debate entre sociologia positivista (quantitativa), fundada por Augusto Comte, e sociologia compreensiva (qualitativa) que teve como um dos pioneiros o alemão Wilhelm Dilthey, mas descende das idéias de Durkheim e Kant, além disso, seu maior expoente foi Max Weber. (GOLDENBERG, 2004).

Além disso, outra menção que deve ser feita na história da pesquisa qualitativa é a Escola de Chicago, na qual, segundo Goldenberg (2004, p. 28): "... a utilização científica de documentos pessoais, como cartas e diários íntimos, a exploração de diversas fontes documentais e o desenvolvimento do trabalho de campo sistemático na cidade" foram grandes contribuições para a metodologia da pesquisa qualitativa.

No Brasil, a pesquisa qualitativa se originou através do "Estudo Nacional de Despesas Familiares" (ENDEF), realizado pelo IBGE durante a década de 1970, no qual os agentes de campo realizaram anotações na página final do caderno de pesquisa relatando suas impressões pessoais a respeito da condição dos entrevistados. Posteriormente, graças a Luiz Parga Nina, Coordenador do ENDEF, essa página começou a ser analisada como fonte de informações qualitativas. (MINAYO, 2018). Todavia, essa origem foi extremamente conturbada, devido aos resultados obtidos que não agradavam o governo militar. Como explicita Minayo (2018) "[...] o entendimento foi de que o problema da fome no país estava ligado à distribuição de renda e não à informação nutricional como se propagava à época."

A metodologia qualitativa traz ao pesquisador liberdade de decidir por si mesmo o melhor caminho para atingir seus objetivos, pois não existe nenhum tipo de padronização devido ao fato de cada observação ser única. (GOLDENBERG, 2004) Entretanto, ressalta-se que

[...] é uma investigação efetuada na academia e, portanto, já delineada em um contexto de exigências que apontam para o rigor mantido em relação aos procedimentos. Donde, o efetuado solicitar por clareza dos caminhos

percorridos e a percorrer, os quais devem, sempre, evidenciar consonância entre as características disso que se busca e os modos pelos quais se procede ao efetuar a busca. (BICUDO, 2012, p. 24).

Bicudo (2012) mostra que, na Educação Matemática, as pesquisas realizadas geralmente possuem o caráter qualitativo, pois, essas pesquisas, na maioria dos casos “[...] buscam por compreensões de modos pelos quais os alunos constroem suas aprendizagens (de matemática), individualmente, com os colegas, com a mídia, em contextos específicos; de atividades de ensino, da realidade escolar [...] (BICUDO, 2012, p. 24).

4.2 Pesquisa Bibliográfica

De acordo com Souza, Oliveira, Alves (2021), a pesquisa bibliográfica é uma das modalidades da pesquisa científica que, por sua vez, busca investigar, responder, aprofundar ou solucionar um questionamento sobre determinado fenômeno. No meio acadêmico, a pesquisa bibliográfica investiga obras já publicadas com o objetivo de aprimorar o conhecimento sobre o assunto.

A pesquisa bibliográfica é o levantamento ou revisão de obras publicadas sobre a teoria que irá direcionar o trabalho científico o que necessita uma dedicação, estudo e análise pelo pesquisador que irá executar o trabalho científico e tem como objetivo reunir e analisar textos publicados, para apoiar o trabalho científico (SOUZA, OLIVEIRA, ALVES, 2021, p. 3).

Para alcançar o objetivo de sua pesquisa, o autor deverá selecionar cuidadosamente as fontes que serão utilizadas como base teórica de seus estudos, para isso, é necessário que seja realizada uma leitura crítica de possíveis fontes, ou seja, refletir e assimilar a obra possibilitando escolher as fontes de acordo com o tema pesquisado.

Existem diversos meios de encontrar fontes confiáveis para a pesquisa, por meios físicos, principalmente bibliotecas ou meios digitais, como é o caso das bases de dados eletrônicas e os sistemas de buscas eletrônicas, que foram os meios utilizados para a escolha dos textos utilizados neste trabalho, neste caso em específico, o *Google Acadêmico*, pois se trata de uma ferramenta popular, de fácil utilização e que serve de ponte para inúmeros repositórios acadêmicos.

É importante ressaltar que, pesquisa bibliográfica não é o mesmo que revisão bibliográfica, apesar dos termos serem comumente confundidos, como afirma Garcia (2016) a pesquisa deve ter algum resultado, contribuir de alguma forma com o assunto. Já a revisão bibliográfica é parte importante de qualquer pesquisa, seja ela bibliográfica ou não.

4.3 Os textos e a escolha deles

Para a realização deste estudo foram utilizados três publicações acadêmicas, sendo elas, um artigo de revista, um Trabalho de Conclusão de Curso e uma dissertação de mestrado, pois, a idéia era poder analisar diferentes tipos de publicações acadêmicas e que foram apresentados para distintos públicos. Para examinar e averiguar os textos escolhidos foi utilizada a plataforma de pesquisa acadêmica *google scholar*, devido ao fato de ser uma ferramenta confiável e que possibilita o vislumbre de publicações de inúmeras origens distintas, no caso dos textos analisados, foram publicações lidas pelo autor em diferentes momentos.

O primeiro texto trata-se de um artigo publicado em 2009, por Vicente Liern, professor de matemática da Universidade de Valência, na Revista Suma que é publicada pela Federação Espanhola de Professores de Matemática (FESPM). O artigo intitulado “Las matemáticas de Johann Sebastian Bach” consiste em um estudo comparando e analisando os conceitos matemáticos presentes nas composições de Bach.

O segundo trabalho se trata de um TCC, escrito por Maria Joalice Azevedo Faustino, em 2023, e apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte para obter o grau de licenciatura em Matemática. A pesquisa, feita de forma bibliográfica, consiste na elaboração de uma sequência didática utilizando Matemática e Música com objetivo de ensinar o conceito de fração no 7° ano.

O terceiro é um Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), desenvolvido por José Carlos Dittgen Miritz, em 2015. No trabalho, o autor “propõe atividades a fim de estabelecer uma aproximação entre a matemática e a música, aproveitando a estreita relação existente entre esses dois assuntos.” (MIRITZ, 2015).

5 Quarto movimento: a análise dos textos

5.1 Las matemáticas de Johann Sebastian Bach

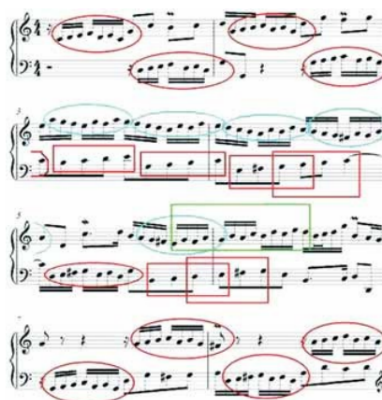
Como já mencionado, este primeiro texto se trata de um artigo publicado na revista espanhola Suma, por Vicente Liern, da Universidade de Valência, em 2009. A ideia deste texto é apresentar a matemática presente nas composições de Bach, pois, segundo o autor

A grandiosidade estrutural de suas obras, bem como a maneira que ele resolveu um problema secular em *The Well-Tempered Clavier* (1722, 1724), são formas brilhantes de fazer matemática das quais Bach só tomou conhecimento no final de sua vida (LIERN, 2009, p. 114, tradução nossa).

Inicialmente, o artigo busca mencionar principalmente o contexto histórico, fazendo uma breve exposição da vida de Bach, de modo a introduzir o tema e mostrar que essas “matemáticas” presentes em suas composições não eram, muitas vezes, não intencionais.

Em seguida, a obra passa a abordar as relações mencionadas, primeiramente pelos aspectos geométricos, sobretudo a simetria, cuja utilização surgia em suas composições mais notáveis, as fugas.

Figura 6: Partitura apontando simetrias em uma composição de Bach



Fonte: Liern, 2009.

Na Figura 6 é apresentada uma composição de Bach (não especificada no artigo), onde o autor destaca as simetrias que podem ser observadas em sua

partitura, em resumo, as sequências de notas destacadas por uma figura de uma mesma cor são como figuras sendo submetidas a algum tipo de simetria.

Apesar do artigo não ter pretensões pedagógicas, essa relação entre música pode ser muito interessante para contribuir com o ensino.

O conceito de simetria aparece no Currículo Paulista em três oportunidades

(EF04MA19) Reconhecer simetria de reflexão em figuras e em pares de figuras geométricas planas e utilizá-la na construção de figuras congruentes, com o uso de malhas quadriculadas e/ou de softwares de geometria. (SÃO PAULO, Currículo Paulista, 2019, p. 246).

(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. (SÃO PAULO, Currículo Paulista, 2019, p. 258).

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica. (SÃO PAULO, Currículo Paulista, 2019, p. 261).

Pode-se perceber que o ensino desse tema é direcionado para alunos com uma faixa etária menor (até o 8º ano do Ensino Fundamental), mesmo assim, ainda é possível usufruir da relação musical para o ensino de simetria. As figuras a seguir mostram idéias similares às que Bach utilizava, porém de forma mais simples

Figura 7: Simetria de reflexão



Fonte: O próprio autor.

Figura 8: Simetria de translação

Fonte: O próprio autor.

Figura 9: Simetria de rotação

Fonte: O próprio autor.

Na Figura 7 é apresentado um caso de simetria de reflexão, onde o eixo de simetria é a linha horizontal que divide os compassos da música. A Figura 8 mostra uma simetria de translação e a Figura 9 uma rotação em 360 graus.

Uma possibilidade para abordar esses conteúdos com alunos destas idades seria utilizar recursos tecnológicos. As TDICs, as tecnologias digitais da informação e comunicação, já estão consolidadas no cotidiano dos brasileiros, segundo o IBGE (2022), no ano de 2021 entre a população com 10 anos ou mais, 98,8% possuíam telefone celular e 84,7% conseguiam acessar a internet em qualquer lugar. A utilização de tecnologias na educação é contemplada na competência geral 5 da BNCC, reiterada pelo Currículo Paulista, segundo a mesma

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (SÃO PAULO, Currículo Paulista, 2019, p. 29).

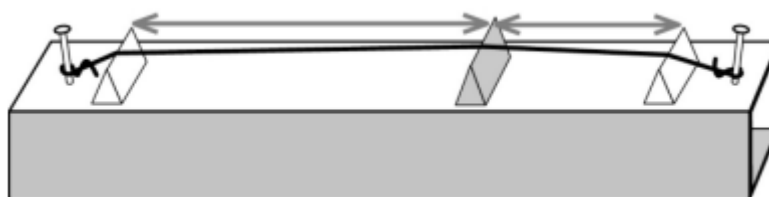
Existem diversos softwares livres de notação musical que podem ser utilizados para apresentar os conteúdos de simetria através da música, gerando maior conexão dos alunos com a matemática.

5.2 Matemática e Música em uma Sequência Didática para o ensino de frações no 7º ano do Ensino Fundamental

Este Trabalho de Conclusão de Curso, do ano de 2023, escrito por Maria Joalice Azevedo Faustino, consiste em propor uma sequência didática para o ensino de frações no Ensino Fundamental por meio das relações entre Música e Matemática. Inicialmente, a autora aborda os conceitos musicais, matemáticos e as relações entre eles relevantes para a pesquisa, em seguida, a importância do ensino de frações, seu aspecto histórico na educação brasileira e como ele aparece na BNCC. Por fim são apresentados os fundamentos metodológicos e na sequência a proposta didática que dá nome ao trabalho.

A relação utilizada pela autora advém das diferentes notas musicais emitidas por uma corda quando dividida em diferentes partes. Para visualizar melhor esta situação pode-se utilizar um instrumento chamado monocórdio (Figura 10).

Figura 10: O monocórdio



Fonte: <https://vestibulares.estrategia.com/public/questoes/monocordio-e187bb2aa537/>

Em síntese, o monocórdio “[...] é um instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou mesa possuindo, ainda um cavalete móvel colocado sob a corda para dividi-la em duas seções” (ABDOUNUR apud FAUSTINO, 2023, p. 25).

Quando a corda é dividida ao meio, a nota tocada é a mesma da corda solta, porém, uma oitava mais aguda. Analogamente, se a corda for dividida em uma razão de $\frac{2}{3}$, encontra-se a Quinta da nota da corda solta, e assim, com esse processo é possível obter-se todas as notas da escala, como se observa no Quadro 1.

Quadro 1 - Notas da escala e frações da corda

NOTA DA ESCALA	FRAÇÃO DE CORDA CORRESPONDENTE
TÔNICA	1/1
SEGUNDA	8/9

TERÇA	64/81
QUARTA	3/4
QUINTA	2/3
SEXTA	16/27
SÉTIMA	128/243
OITAVA	1/2

Fonte: Adaptado de Faustino (2023) pelo próprio autor.

A sequência didática proposta aborda os seguintes conteúdos

- a) Representação de frações é a forma como uma fração pode ser representada simbolicamente, por exemplo: $\frac{a}{b}$ onde a é chamado de numerador e b de denominador;
- b) Operações com frações é o conjunto de operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) a serem realizadas com números racionais em sua forma fracionária;
- c) Forma fracionária e forma decimal todo número escrito em forma de fração também pode ser representado de forma decimal. Para se obter o número em sua forma decimal basta realizar a divisão do numerador pelo denominador. Exemplo: forma fracionária $\frac{20}{100} = 0,2$ forma decimal;
- d) Frações equivalentes são frações que representam a mesma quantidade mesmo com numerador e denominador diferentes;
- f) Multiplicação é a operação entre dois números inteiros que tem por fim somar um deles tantas vezes quantas forem as unidades do outro; e
- g) Divisão é a operação que consiste em descobrir quantas vezes um número está contido em outro. (FAUSTINO, 2023, p. 51)

Além disso, a sequência didática possui atividades explorando também as relações fracionárias presentes nos elementos rítmicos musicais, no entanto, a atividade 1 é o grande expoente da discussão aqui. Esta atividade consiste apenas na construção de um monocórdio como forma de introduzir os alunos ao tema, porém, esta atividade poderia ser expandida utilizando os conceitos de etnomatemática ou História da Matemática para enriquecer o ensino.

De acordo com D'Ambrosio (2008)

A definição de etnomatemática é muito difícil, por isso uso uma explicação de caráter etimológico. A palavra etnomatemática, como eu a concebo, é composta de três raízes: etno, e por etno entendo os diversos ambientes (o social, o cultural, a natureza, e tudo mais); matema significando explicar, entender, ensinar, lidar com; tica, que lembra a palavra grega tecné, que se refere a artes, técnicas, maneiras. Portanto, sintetizando essas três raízes, temos etno+matema+tica, ou etnomatemática, que, portanto, significa o conjunto de artes, técnicas de explicar e de entender, de lidar com o

ambiente social, cultural e natural, desenvolvido por distintos grupos culturais. (D'AMBROSIO, 2008, p. 8)

Assim, a atividade proposta poderia buscar englobar aspectos culturais que envolveram a origem do monocórdio e suas relações fracionárias com Pitágoras, por exemplo, “o que levou Pitágoras a definir quais eram os intervalos mais importantes e belos para seu instrumento musical?”

Além disso, saber como foi o conceito de fração aplicado na invenção do monocórdio implica na utilização da História no ensino da Matemática, pois o mesmo se refere a “explorações didáticas da história das ideias produzidas em territórios espaço-temporais e como, atualmente, elas podem ser refletidas na matemática que ensinamos.” (MENDES, 2022, p. 3).

5.3 Matemática e Música

Escrito por José Carlos Dittgen Miritz, esta dissertação foi publicada em 2015 e diferente do artigo analisado anteriormente, aqui o autor tem como objetivo utilizar as relações entre matemática e música para contribuir com o ensino

Este trabalho tem o objetivo de propor estratégias didático-pedagógicas para o ensino da matemática através da música por meio de um viés histórico-matemático-musical, estabelecendo e analisando as relações existentes entre as duas áreas do saber e a forma como isto pode contribuir para a aprendizagem dos alunos (MIRITZ, 2015, p. 18).

Inicialmente, o autor aborda os conceitos musicais necessários para a realização da atividade planejada, são eles, Escalas musicais, Escala Temperada e Anatomia do ouvido Humano. Em seguida, o autor busca fazer uma revisão histórica da matemática e da música, para isso, são feitas breves biografias de matemáticos e músicos que já haviam percebido ou utilizaram essas relações de alguma forma, entre os nomes estão, Pitágoras, Leonard Euler, René Descartes, Pierre de Fermat, Mozart, Beethoven e Bach. Por fim, antes de tratar sobre as atividades, são formalizados os conteúdos matemáticos abordados, função exponencial, função logarítmica e progressão geométrica.

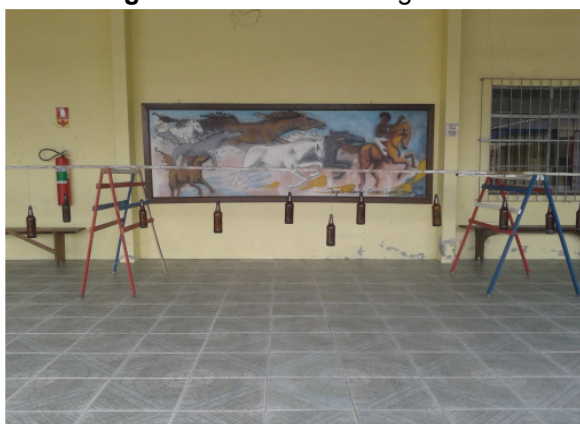
A atividade desenvolvida pelo autor consistia na construção de um Xilofone de garrafas e o público alvo eram alunos do Ensino Médio. A ideia era que durante a

atividade as inter relações entre as áreas surgissem, assim, atraindo os alunos para a matemática através da música. Como relata o autor

Nestes encontros foram propostos assuntos e atividades relacionando matemática e música, com o objetivo de promover uma investigação e reflexões acerca destes dois assuntos e suas inter-relações. As atividades aqui propostas são uma tentativa de fugir dos meios tradicionais de ensino, buscando propiciar aos alunos uma construção do conhecimento reflexivo e de uma aula de matemática atrativa e prazerosa (MIRITZ, 2015, p. 60).

No primeiro encontro, o professor propôs uma pesquisa aos alunos, na qual poderiam aprender sobre conceitos de música e aplicá-los em uma atividade relacionando a escala temperada a uma função exponencial. Os resultados dessa pesquisa foram apresentados e discutidos no segundo encontro e, finalmente, no terceiro encontro, foi realizada a atividade de construir um xilofone com garrafas utilizando os conceitos aprendidos. A Figura 11 mostra o resultado da atividade final, o xilofone de garrafas construído.

Figura 11: O xilofone de garrafas



Fonte: Miritz, 2015.

O trabalho realizado por Miritz é fundamentado pela abordagem da História da Matemática, no entanto, ao analisar o texto é possível vislumbrar a relação entre a escala cromática musical e progressão geométrica/função exponencial e logarítmica através de outra tendência em Educação Matemática, a Modelagem Matemática.

Nos questionários entregues aos participantes da pesquisa havia questões que envolviam relacionar as notas musicais através das razões entre seus intervalos, como pode ser observado na Tabela 1.

Dó	2^0
Dó #	$2^{1/12}$
Ré	$2^{2/12}$
Ré #	$2^{3/12}$
Mi	$2^{4/12}$
Fá	$2^{5/12}$
Fá #	$2^{6/12}$
Sol	$2^{7/12}$
Sol #	$2^{8/12}$
Lá	$2^{9/12}$
Lá #	$2^{10/12}$
Si	$2^{11/12}$

Fonte: Miritz, 2015.

Assim, tomando uma nota Lá, que possui frequência 220 Hz, pode-se modelar uma função exponencial $f: N \rightarrow R$ dada por $f(x) = 220 * 2^{x/12}$ onde é possível gerar as frequências de notas das notas musicais da escala temperada, com algumas aproximações, como pode ser visto na tabela 2.

Tabela 2 - Relação entre a nota e sua frequência tomando como base a nota Lá

Nota	Frequência (Hz)	Letra
Lá	220	A
Lá #	$220,00 \times 1,0594631 = 233,08$	A #
Si	$233,08 \times 1,0594631 = 246,94$	B
Dó	$246,94 \times 1,0594631 = 261,62$	C
Dó #	$261,62 \times 1,0594631 = 277,18$	C #
Ré	$277,18 \times 1,0594631 = 293,66$	D
Ré #	$293,66 \times 1,0594631 = 311,12$	D #
Mi	$311,12 \times 1,0594631 = 329,62$	E
Fá	$329,62 \times 1,0594631 = 349,22$	F
Fá #	$349,22 \times 1,0594631 = 369,99$	F #
Sol	$369,99 \times 1,0594631 = 391,99$	G
Sol #	$391,99 \times 1,0594631 = 415,3$	G #
Lá	$415,30 \times 1,0594631 = 440$	A

Fonte: Miritz, 2015

Esse processo dialoga com a Modelagem Matemática, que, segundo Burak (2010) se trata de

[...] um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões (BURAK apud BURAK, 2010, p. 18).

Além disso, a utilização da Modelagem Matemática é incentivada pelo Currículo Paulista tanto Ensino Fundamental, como parte do desenvolvimento do letramento matemático do aluno de modo a tornar a aprendizagem mais significativa (SÃO PAULO, 2019, p. 226), assim também no Ensino Médio, como forma de dar significado a objetos de estudo de itinerários formativos. (SÃO PAULO, 2020, p. 210)

Por fim, a Base Nacional Comum Curricular também apoia a utilização da modelagem e a descreve, junto de outras tendências da Educação Matemática, como “[...] formas privilegiadas da atividade matemática [...]”. (BRASIL, 2018, p. 266).

6 Conclusão

De fato, como pode ser visto ao longo do trabalho, as relações entre Matemática e Música possuem grande potencial como ferramenta de ensino podendo dialogar ainda com várias das tendências em Educação Matemática. Além disso, essas possibilidades não se limitam apenas a um nível de ensino, visto que os conteúdos matemáticos abordados pertencem tanto ao Ensino Fundamental quanto ao Ensino Médio.

De maneira geral, o trabalho consegue reunir várias possibilidades de ensino, que podem ser utilizadas de diferentes formas, como base para professores criarem planos de aula baseando-se nas relações analisadas ou então como ponto de partida para outras pesquisas acadêmicas, que poderiam ser tanto bibliográficas (explorando mais profundamente cada uma das relações mencionadas) ou em pesquisas de campo, buscando analisar a aplicabilidade e efetividade das propostas no Ensino de Matemática.

Portanto, a utilização das relações entre Matemática e Música pode contribuir positivamente para a prática pedagógica, de modo a criar laços entre os alunos e a matemática, que normalmente não é a disciplina mais querida para os mesmos.

Referências

- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 15-26, maio 2012. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/index>. Acesso em: 25 jan. 2023.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. *Revista de Modelagem na Educação Matemática*, [s. l], v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.
- COLLISSON, Steve. **O livro da música clássica**. tradução Maria da Anunciação Rodrigues. - 1 ed. - Rio de Janeiro: Globo Livros, 2019. 352 p.
- FAUSTINO, Maria Joalice Azevedo. **Matemática e Música em uma Sequência Didática para o Ensino de Frações no 7º ano do Ensino Fundamental**. 2023. 71 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Santa Cruz, 2023. Disponível em: <https://memoria.ifrn.edu.br/bitstream/handle/1044/2343/TCC%20Joalice.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 17 nov. 2023.
- FRANCO, Marcella. Cantores de ópera são como atletas e treinam para não precisar usar microfone. **Folha de S.Paulo**. São Paulo, p. 1-2. jun. 2023. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/folhinha/2023/06/cantores-de-opera-sao-como-atletas-e-treinam-para-nao-precisar-usar-microfone.shtml>. Acesso em: 13 nov. 2023.
- GARCIA, Elias. PESQUISA BIBLIOGRÁFICA VERSUS REVISÃO BIBLIOGRÁFICA - UMA DISCUSSÃO NECESSÁRIA. **Revista Línguas & Letras**, [s. l], v. 17, n. 35, p. 291-294, 25 maio 2016.
- GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar**: Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8 ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2004.
- LIERN, Vicente. Las matemáticas de Johann Sebastian Bach. **Revista Suma**, Badalona, v.61, p. 113-118, jun. 2009.
- MARIANI, Silvana. **O equilibrista das seis cordas**. Curitiba: Editora Ufpr, 2009. 132 p.
- MINAYO, M. C. de S.. A turbulenta origem da pesquisa qualitativa no Brasil. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS, V, 2018, Foz do Iguaçu. *Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa e Estudos Qualitativos*. Foz do Iguaçu: UNIOESTE, 2018. s.p.

MIRITZ, José Carlos Dittgen. **Matemática e Música**. 2015. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, Universidade Federal do Rio Grande - Furg, Rio Grande, 2015. Disponível em:
https://repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/6503/TCCJoseCarlos_versaofinal.pdf?squence=1&isAllowed=y. Acesso em: 24 jan. 2023.

PEIXOTO, Mariana. Orquestra Filarmônica de Minas Gerais apresenta concerto para dois pianos. **Jornal Estado de Minas**. Belo Horizonte, p. 1-3. out. 2022. Disponível em:
https://www.em.com.br/app/noticia/cultura/2022/10/05/interna_cultura,1403030/orquestra-filarmonica-de-minas-gerais-apresenta-concerto-para-dois-pianos.shtml. Acesso em: 13 nov. 2023.

Pesquisa nacional por amostra de domicílios contínua: acesso à Internet e à televisão e posse de telefone móvel celular para uso pessoal 2021, PNAD contínua. Rio de Janeiro: IBGE - Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2022.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Paulo Miceli. – 1. ed. atual. – São Paulo: SE, 2011.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria Pedagógica Currículo Paulista / organização, Secretaria da Educação, Coordenadoria Pedagógica; União dos Dirigentes Municipais de Educação do Estado de São Paulo - UNDIME. São Paulo : SEDUC, 2019.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria Pedagógica Currículo Paulista: etapa ensino médio / organização, Secretaria da Educação, Coordenadoria Pedagógica; União dos Dirigentes Municipais de Educação do Estado de São Paulo - UNDIME. São Paulo : SEDUC, 2020.

SOUSA, Angélica Silva de; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; ALVES, Laís Hilário. A PESQUISA BIBLIOGRÁFICA: PRINCÍPIOS E FUNDAMENTOS. **Cadernos da Fucamp**, Monte Carmelo, Mg, v. 20, n. 43, p. 64-83, 08 mar. 2021. Semestral. Disponível em:
<https://revistas.fucamp.edu.br/index.php/cadernos/article/view/2336>. Acesso em: 16 out. 2023.