



COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO
DOS POLINÔMIOS ORTOGONAIS DE
SOBOLEV-JACOBI E SOBOLEV-LAGUERRE

Michele Carvalho de Barros

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Comportamento assintótico dos polinômios ortogonais de Sobolev-Jacobi e Sobolev-Laguerre

Michele Carvalho de Barros

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Eliana Xavier Linhares de Andrade

São José do Rio Preto

2008

Michele Carvalho de Barros

Comportamento assintótico dos polinômios ortogonais de
Sobolev-Jacobi e Sobolev-Laguerre

Dissertação apresentada para obtenção do título
de Mestre em Matemática Aplicada do Instituto
de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Uni-
versidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”, *campus* de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^a. Eliana Xavier Linhares de Andrade
UNESP - São José do Rio Preto

Prof^ª. Dr^a. Ana Paula Peron
USP - São Carlos

Prof^º. Dr^º. Alagacone Sri Ranga
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 25 de Fevereiro de 2008.

*À minha mãe, Claudiomira
dedico.*

*Aos meus avós, Izabel e José
ofereço.*

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

À Prof^a. Dr^a. Eliana Xavier Linhares de Andrade, por tornar possível a realização deste trabalho, pela paciência e atenção.

À minha mãe Claudiomira, aos meus avós Izabel e José e ao meu tio Claudemir, por todo o amor, carinho, conselhos, incentivo e apoio incondicional.

Às minhas irmãs de coração Daiany e Watusy, por estarem sempre presente em minha vida.

Aos meus amigos de pós-graduação, em especial, Alessandra, Ana, André, Deise, Eduardo, Ismael e Mirela, pelos momentos de descontração, alegria, apoio e principalmente pela enorme amizade.

Aos meus amigos e irmãos de república, André, Flávio, Karla, Mariana e Viviane.

Aos meus amigos de Toledo, em especial, Cristina, Dayse, Débora e Lílian.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Sejam $S_n(x)$, $n \geq 0$, os polinômios de Sobolev, ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\psi_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)d\psi_1(x), \quad \lambda > 0,$$

onde $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ forma um par coerente de medidas relacionadas às medidas de Jacobi ou de Laguerre. Denotemos por $P_n^{\psi_0}(x)$ e $P_n^{\psi_1}(x)$, $n \geq 0$, os polinômios ortogonais com respeito a $d\psi_0$ e $d\psi_1$, respectivamente.

Neste trabalho, estudamos o comportamento assintótico, quando $n \rightarrow \infty$, das razões entre os polinômios de Sobolev, $S_n(x)$, e os polinômios ortogonais $P_n^{\psi_0}(x)$ e $P_n^{\psi_1}(x)$, além do comportamento limite da razão entre esses dois últimos polinômios. Propriedades assintóticas para os coeficientes da relação de recorrência satisfeita pelos polinômios de Sobolev também foram estudadas.

Palavras-chave: polinômios ortogonais, polinômios ortogonais de Sobolev, comportamento assintótico.

Abstract

Let $S_n(x)$, $n \geq 0$, be the Sobolev polynomials, orthogonal with respect to the inner product

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\psi_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)d\psi_1(x), \quad \lambda > 0,$$

where $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ forms a coherent pair of measures related to the Jacobi measure or Laguerre measure. Let $P_n^{\psi_0}(x)$ and $P_n^{\psi_1}(x)$, $n \geq 0$, denote the orthogonal polynomials with respect to $d\psi_0$ and $d\psi_1$, respectively.

In this work we study the asymptotic behaviour, as $n \rightarrow \infty$, of the ratio between the Sobolev polynomials, $S_n(x)$, and the orthogonal polynomials $P_n^{\psi_0}(x)$ and $P_n^{\psi_1}(x)$, as well as the limit behaviour of the ratio between the last two polynomials. Furthermore, we also give asymptotic results for the coefficients of the recurrence relation satisfied by the Sobolev polynomials.

Keywords: orthogonal polynomials, Sobolev orthogonal polynomials, asymptotic behaviour.

Sumário

1	Introdução	1
2	Pré-requisitos	5
2.1	Domínios e caminhos no plano complexo	5
2.2	Funções complexas	6
2.3	Séries de potências	8
2.4	Funções Gama e de Bessel	10
2.5	Polinômios ortogonais	12
2.6	Polinômios ortogonais clássicos	16
2.6.1	Polinômios de Jacobi	16
2.6.2	Polinômios de Laguerre	19
2.6.3	Polinômios de Hermite	22
2.7	Polinômios ortogonais de Sobolev	23
3	Polinômios ortogonais de Sobolev - Jacobi: propriedades assintóticas	27
3.1	Introdução	27
3.2	O caso Jacobi do tipo I	31
3.3	O caso Jacobi do tipo II	38
4	Polinômios ortogonais de Sobolev - Laguerre: propriedades assintóticas	43
4.1	O caso Laguerre do tipo I	43
4.2	O caso Laguerre do tipo II	54
5	Considerações Finais	77
	Referências Bibliográficas	81

Capítulo 1

Introdução

De modo geral, a teoria dos polinômios ortogonais iniciou-se com o estudo de um caso especial de fração contínua. Os primeiros trabalhos sobre o assunto foram do matemático russo *Parfnuti Lvovich Chebyshev* (1821-1894) [16] e do matemático holandês *Thomas Jan Stieltjes* (1856-1894) [53] que, independente um do outro, demonstraram um certo número de propriedades válidas para polinômios ortogonais.

O conceito de ortogonalidade com relação a uma distribuição (medida) foi atribuído a *Stieltjes* [52]. Contudo, os sistemas especiais de polinômios ortogonais já eram conhecidos antes desse tempo. Por exemplo, nos estudos de *Adrien Marie Legendre* (1752-1833) sobre o movimento dos planetas [36], publicado em 1875, os polinômios, que agora recebem seu nome, foram mencionados. Porém, *Joseph-Louis Lagrange* já tinha descoberto por acaso a relação de recorrência para estes polinômios.

Os polinômios de Jacobi apareceram em 1859, em um estudo de *Carl Jacob Jacobi* (1804-1851) [30]. Os polinômios de Laguerre ($\alpha = 0$) já aparecem nos trabalhos de *Niels Henrick Abel* (1802-1829), *Joseph-Louis Lagrange* (1736-1813) e Chebyshev [15], antes mesmo de *Edmond Nicolas Laguerre* (1834-1886) estudá-los em 1875 [34]. A generalização dos polinômios de Laguerre foi estudada primeiro por *Yulian-Karl Sokhotsky* (1842-1927) e mais tarde por *Nikolai Yakovlevich Sonin* [51]. Os polinômios de Hermite apareceram pela primeira vez nos estudos de *Pierre Simon de Laplace* (1749-1827) [35] e foram também considerados por Chebyshev [15] antes de *Charles Hermite* (1822-1901) utilizá-los.

Os polinômios de Charlier foram introduzidos por *Carl Wilhelm Ludwing Charlier* (1862-1934) [13]. Já os polinômios de Meixner foram estudados por *Josef Meixner* [40] que investigava um tipo especial de função geradora. Os polinômios de Meixner foram, tam-

bém, considerados por Ervin Feldheim [21], independente de Meixner e Stieltjes também mencionou-os brevemente [53]. *Felix Pollaczek* (1892-1981) descreve os polinômios que levam seu nome em uma série de estudos [46, 47]. Estes últimos polinômios são um importante exemplo de polinômios ortogonais para os quais, a teoria de Szegő para os polinômios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ não é válida.

A fórmula de quadratura foi dada primeiramente por *Karl Friedrich Gauss* (1777-1855) para os polinômios de Legendre [24]. Jacobi demonstrou a fórmula de quadratura para este caso [29], usada até hoje em livros didáticos, mas a demonstração para uma distribuição geral foi dada por Stieltjes [52]. A fórmula de Christoffel-Darboux foi publicada por Chebyshev [14] antes de *Elwin Bruno Christoffel* (1829-1900) descobri-la para polinômios de Legendre [18] e mais tarde para o caso geral, na mesma época que *Jean Gaston Darboux* (1842-1917) [19]. O teorema de Favard foi escrito por *Jean Aimé Favard* [20], mas já explicitamente dado por Stone [54] e de uma forma dissimulada por Perron [45].

Os polinômios ortogonais clássicos são muito estudados na literatura e ainda hoje vários resultados são encontrados para eles. Dentre estes estudos foram realizadas várias pesquisas em relação ao comportamento assintótico dos polinômios ortogonais. A teoria geral para o comportamento assintótico dos polinômios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ começou com a investigação de Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968) [9] e culminou na teoria desenvolvida por *Gabor Szegő* (1895-1985). Szegő introduziu o conceito de polinômios ortogonais no círculo unitário [55, 56] e enfatizou a estreita ligação com os polinômios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$. Szegő sempre tratou de medidas contínuas, sua teoria foi generalizada para medidas mais gerais por *Andrei Nikolaevich Kolmogorov* (1903-) [31] e *Mark Grigorievich Krein* (1907-) [32]. Além disso, *Géza Freud* (1922-1979) [22, 23] e *Yakov Lazonovich Geronimus* [25, 26] fizeram contribuições importantes para a teoria de Szegő.

Os estudos de polinômios ortogonais ficaram adormecidos até o início do século passado. A publicação do livro de Szegő ajudou a reavivar o interesse por polinômios ortogonais. Este livro ainda hoje é o melhor livro sobre polinômios ortogonais, apesar de sua primeira edição constar de 1939. Durante as últimas décadas, a teoria assintótica para os polinômios ortogonais em conjuntos não compactos foi iniciada por G. Freud. Seus estudos tiveram grande influência sobre os matemáticos contemporâneos como *Paul Nevai* (e seus colaboradores) e *Joseph Ullman* (veja *W. Van Assche* [8] para maiores

detalhes sobre o trabalho desses pesquisadores). *Ken Case* e *Marc Kac* mostraram alguns aspectos da teoria de polinômios ortogonais que estão diretamente ligados à teoria discreta de dispersão [12], que levaram a novos e interessantes métodos de demonstração. *Richard Askey* fez uma série de pesquisas sobre polinômios ortogonais que são escritos como funções especiais [7]. Ele e muitos outros matemáticos tornaram-se muito interessados em polinômios ortogonais que podem ser escritos como funções q-hipergeométricas ou simplesmente hipergeométricas.

O comportamento assintótico e a localização dos zeros são os problemas centrais da teoria de polinômios ortogonais. Neste trabalho, estudaremos o comportamento assintótico para os polinômios de Sobolev, $S_n(x)$, que são ortogonais em relação a um produto interno que envolve derivadas, ou seja,

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\psi_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)d\psi_1(x),$$

onde $\lambda > 0$.

Algumas propriedades dos polinômios ortogonais também são válidas para esses polinômios. Porém, para eles, de forma geral, não existe uma relação de recorrência de três termos.

A motivação para os estudos desses polinômios surge da Teoria de Aproximação, pois para se obter a melhor aproximação é de grande interesse utilizar uma base de polinômios ortogonais de Sobolev.

Muitos estudos assintóticos sobre os polinômios ortogonais de Sobolev associados ao produto interno acima, onde $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ formam um par coerente ou simetricamente coerente de medidas (definidos no capítulo 2), já foram realizados. Em nosso trabalho as medidas envolvidas formam um par coerente de medidas e está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 2, são apresentados, resumidamente, algumas definições e resultados importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho. Além disso, é dado um breve resumo dos polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, Laguerre, Hermite e os polinômios ortogonais de Sobolev, além da definição dos pares coerentes de medidas.

No Capítulo 3, apresentamos resultados encontrados em [43, 44], onde as medidas clássicas envolvidas são as de Jacobi. Para os polinômios ortogonais de Sobolev-Jacobi associados, temos dois casos, o caso Jacobi do tipo I, onde $d\psi_1$ é a medida clássica e o tipo II, onde $d\psi_0$ é a medida de Jacobi. Para ambos os casos, apresentaremos um estudo

sobre o comportamento assintótico dos polinômios ortogonais associados às medidas $d\psi_0$ e $d\psi_1$ e dos coeficientes da relação de recorrência relacionada.

Estudos assintóticos sobre os polinômios ortogonais de Sobolev-Laguerre, baseados nos estudos de Meijer *et.al.* [39] e Alfaro *et.al.* [2], são dados no Capítulo 4. Assim como nas medidas de Jacobi, as medidas de Laguerre também se dividem em dois casos, o caso Laguerre do tipo I e o caso Laguerre do tipo II. Ainda neste capítulo, mostramos que existe uma relação entre os polinômios de Sobolev e os polinômios de Laguerre, e que é possível obter a expansão assintótica de S_n apenas com dois termos. Além disso, para ambos os casos, estudamos o comportamento assintótico para a razão entre os polinômios ortogonais de Sobolev e os polinômios ortogonais relacionados às medidas $d\psi_0$ e $d\psi_1$.

Capítulo 2

Pré-requisitos

Neste capítulo, apresentamos definições e propriedades bem conhecidas da Análise, principalmente sobre polinômios ortogonais, de maneira bastante sucinta, mas suficiente para a compreensão do trabalho. Para este propósito, usamos as referências [4], [17], [27], [42], [50], [57] e [58].

2.1 Domínios e caminhos no plano complexo

Daremos algumas definições para caracterizar as curvas no plano complexo.

Definição 2.1. *Um caminho suave em $\mathbb{C}$ é uma aplicação*

$$\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C},$$

com derivada contínua em $[a, b]$.

Lembremos que esta aplicação é dada por $\Gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + iy(t)$ e, à medida que t percorre $[a, b]$, o vetor $\Gamma(t)$ descreve o caminho. Os pontos $\Gamma(a)$ e $\Gamma(b)$ são chamados ponto inicial e ponto final do caminho Γ , respectivamente. Se $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ dizemos que o caminho é fechado.

Observemos que, na definição de caminho, subentende-se a noção de sentido ou orientação de percurso do caminho, mais precisamente, o caminho é percorrido do ponto inicial ao ponto final à medida que $t \in [a, b]$. Podemos inverter o sentido do percurso definindo o caminho reverso de Γ , Γ^- , por

$$\Gamma^-(t) = \Gamma(a + b - t), \quad a \leq t \leq b.$$

Consideremos, agora, uma classe mais ampla de caminhos em $\mathbb{C}$.

Definição 2.2. *Um caminho suave por partes em $\mathbb{C}$ é uma coleção finita de caminhos suaves $\Gamma_i : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n$, satisfazendo: $\Gamma_i(b_i) = \Gamma_{i+1}(a_{i+1})$ para $1 \leq i \leq n-1$.*

Como para caminhos suaves, dizemos que um caminho suave por partes é fechado se $\Gamma_1(a_1) = \Gamma_n(b_n)$, isto é, o ponto inicial do primeiro caminho coincide com o ponto final do último caminho.

Definição 2.3. *Um caminho suave por partes e fechado é simples, se a aplicação $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ que o define é injetiva, exceto nos pontos 0 e 1, ou seja, $\Gamma(0) = \Gamma(1)$, $\Gamma(t) \neq \Gamma(0)$ se $0 < t < 1$ e $\Gamma(t_1) \neq \Gamma(t_2)$ se $0 < t_1 \neq t_2 < 1$.*

A definição acima quer dizer, em outras palavras, que o caminho não possui auto-intersecções. Apresentaremos, agora, um conceito muito importante.

Definição 2.4. [Curva de Jordan] *Uma curva de Jordan suave por partes é um caminho suave por partes, fechado e simples.*

Definição 2.5. *Um subconjunto não vazio $U \subset \mathbb{C}$ é chamado domínio se U é aberto e se, dados dois pontos quaisquer p e q em U , existe um caminho suave por partes inteiramente contido em U , cujos pontos inicial e final são, respectivamente, p e q .*

2.2 Funções complexas

Denotando por $z = x + iy$ a variável complexa, a expressão $f(z) = u(z) + iv(z)$ é chamada de função de variável complexa se, para todo valor de z numa certa região, temos um valor correspondente a $f(z)$. Consideremos $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, onde $D \subset \mathbb{C}$ é um domínio.

Definição 2.6. [Continuidade] *Seja $f(z)$ uma função em z . Dizemos que f é contínua em $z_0 \in D$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in D$ a seguinte propriedade é satisfeita*

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Definição 2.7. [Diferenciabilidade] *Uma função $f(z)$ é considerada diferenciável em $z_0 \in D$ se o limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.1)$$

existe e não depende do caminho pelo qual $z \rightarrow z_0$. Chamamos o limite (2.1) de derivada de f no ponto z_0 .

As próximas definições podem ser encontradas em Lima [37] e Oliveira *et. al.*[42].

Definição 2.8. *Uma função $f(x)$ é chamada analítica num domínio D se $f(x)$ é definida e diferenciável em todo os pontos de D . A função $f(x)$ é analítica num ponto x_0 em D se $f(x)$ for analítica numa vizinhança de x_0 .*

Definição 2.9. *Diz-se que uma seqüência de funções $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ converge simplesmente ou pontualmente para a função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, quando dados $\epsilon > 0$ e $x \in D$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo de ϵ e de x) tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Exemplo 2.1. *A seqüência de funções $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde $f_n(x) = x/n$, converge simplesmente para zero, pois dado qualquer $\epsilon > 0$, se tomarmos $n_0 \geq \frac{|x|}{\epsilon}$, $n_0 \in \mathbb{N}$,*

$$|x/n| < \epsilon, \quad \text{para todo } n > n_0.$$

Podemos observar que, para cada x fixado, encontramos um N , mas este N varia conforme x . Assim, quanto maior for $|x|$, maior será N . Portanto, a convergência da seqüência f_n para zero não se dá de maneira uniforme para diferentes valores de x .

Definição 2.10. *Diz-se que uma seqüência de funções $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ converge uniformemente para a função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependendo apenas de ϵ) tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

seja qual for $x \in D$.

Dizer que $f_n \rightarrow f$ uniformemente em D significa que, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o gráfico de f_n , para todo $n > n_0$, está contido na faixa de raio ϵ em torno do gráfico de f .

A próxima definição pode ser encontrada em Kreyszig [33].

Definição 2.11. [Operador linear fechado] *Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador linear com domínio $D(T) \subset X$. Então, T é um operador linear fechado se seu gráfico*

$$\mathfrak{g}(T) = \{(x, y)/x \in D(T), y = Tx\}$$

é fechado no espaço normado $X \times Y$, onde as duas operações algébricas para vetores do espaço $X \times Y$ são definidas como as usuais, ou seja,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \quad \alpha \text{ escalar}$$

e a norma em $X \times Y$ é definida por

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Para a demonstração do teorema a seguir, veja [33, pág.293].

Teorema 2.1. [Operador linear fechado] *Seja $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador linear, onde $D(T) \subset X$ e X e Y espaços normados. Então, T é fechado se, e somente se, satisfaz à seguinte propriedade: se $x_n \rightarrow x$, com $x_n \in D(T)$ e $Tx_n \rightarrow y$, então $x \in D(T)$ e $Tx = y$.*

2.3 Séries de potências

Nesta seção, daremos alguns resultados sobre séries de potências.

Definição 2.12. *Dada uma seqüência $\{a_n(z - z_0)^n\}$, a série por ela gerada é chamada uma série de potências de centro em z_0 e denotada por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.*

Definição 2.13. *A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge simplesmente, se a seqüência das reduzidas $\left\{ s_m(z) = \sum_{n=0}^m a_n(z - z_0)^n \right\}$ convergir simplesmente.*

Definição 2.14. *A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente se a seqüência das reduzidas $\{s_m(z)\}$ convergir uniformemente.*

Definição 2.15. *A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absolutamente se a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n|$ convergir. Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n|$ convergir simplesmente (uniformemente), diremos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ converge absoluta e simplesmente (uniformemente).*

Lema 2.1. *Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, existe um disco fechado de centro em z_0 tal que a série converge absolutamente em todos os pontos z no interior desse disco e diverge em todos os pontos z exteriores a ele.*

Definição 2.16. *O raio R do disco dado pelo lema acima é chamado de raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$.*

As demonstrações do teorema e corolário seguintes encontram-se em [50, pág.88].

Teorema 2.2. *Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Então,*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$$

para todo z tal que $|z| < R$, isto é, podemos derivar termo a termo uma série de potências no interior de seu disco de convergência.

O Teorema 2.2 nos diz que uma série de potências define uma função analítica no seu disco de convergência.

Corolário 2.1. *Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Então, $f(z)$ é dada por sua série de Taylor de centro em z_0 ,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

e essa série converge absolutamente em qualquer ponto do disco de centro em z_0 e raio R , $D(z_0, R)$.

Definição 2.17. *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função. f é analítica em U se, para todo ponto $z_0 \in U$, f se expressa como uma série de potências de centro em z_0 e raio de convergência $R_{z_0} > 0$.*

A mais importante propriedade das séries de potências é o fato de que toda função analítica pode ser representada, em uma vizinhança de qualquer ponto de seu domínio, por meio de uma série de potências, isto é,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

ou seja, uma série de Taylor em torno do ponto $z = z_0$.

Definição 2.18. *Seja $f(z) \not\equiv 0$. Se $a_0 = a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ e $a_m \neq 0$, o primeiro termo do desenvolvimento de Taylor é $a_m(z - a)^m$. Neste caso dizemos que a função $f(z)$ tem um zero de ordem m em $z = a$.*

Para a demonstração do próximo resultado, veja Szegö [57, pág.22].

Teorema 2.3. [Teorema de Hurwitz] *Seja $\{f_n(x)\}$ uma seqüência de funções analíticas em uma região G e seja esta seqüência uniformemente convergente em todos subconjuntos fechados de G . Suponha que a função analítica $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ não é identicamente nula. Se $x = a$ é um zero de $f(x)$ de ordem k , então, existem uma vizinhança $|x - a| < \delta$ de $x = a$ e um número N , tais que se $n > N$, $f_n(x)$ tem exatamente k zeros em $|x - a| < \delta$.*

2.4 Funções Gama e de Bessel

A função Gama, $\Gamma(x)$, foi descoberta por Euler no estudo do problema de estender o domínio da função fatorial, por volta de 1729 (veja [5]). Para encontrar a generalização de fatorial de Euler, suponhamos $x \geq 0$ e $n \geq 0$ números inteiros. Consideremos o número

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1), & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

conhecido por *fatorial deslocado* ou *fatorial generalizado* ou, ainda, *símbolo de Pochhammer*, onde a pode ser um número real ou complexo. Podemos, então, escrever

$$x! = \frac{(x+n)!}{(x+1)_n}, \quad \text{pois} \quad \frac{(x+n)!}{(x+1)_n} = \frac{(1)(2) \cdots (x-1)(x)(x+1) \cdots (x+n)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}.$$

Mas,

$$(x+n)! = (1)(2) \cdots (n-1)(n)(n+1) \cdots (n+x) = n!(n+1)_x$$

e, assim,

$$x! = \frac{n!(n+1)_x}{(x+1)_n} = \frac{n!n^x}{(x+1)_n} \frac{(n+1)_x}{n^x}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)_x}{n^x} = 1$, podemos concluir que

$$x! = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n}. \quad (2.2)$$

Observe que se x é um número complexo, mas diferente de um inteiro negativo, então o limite (2.2) existe e o chamamos de

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n},$$

para $x \in \mathbb{C}$ e $x \neq -1, -2, \dots$.

Note que se x é inteiro positivo, então $\Gamma(x+1) = x!$ e $\Gamma(1) = 1$.

Definição 2.19. A função Gama pode ser definida, para $x \in \mathbb{C}$ e $x \neq -1, -2, \dots$, como

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{(x)_n},$$

onde $(x)_n = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)$.

A função Gama também pode ser dada como a integral de Euler de segunda espécie

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt,$$

para $x \in \mathbb{C}$ e $\operatorname{Re}(x) > 0$.

Da Definição 2.19, podemos demonstrar a seguinte propriedade.

Propriedade 2.1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Demonstração: Da Definição 2.19, obtemos

$$\begin{aligned} x\Gamma(x) &= x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{(x)_n} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)(x+n)} \frac{(x+n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^x}{(x+1)_n} \\ &= \Gamma(x+1). \end{aligned}$$

■

Notação: Para $x > 0$ e $y > 0$, denotemos

$$\binom{x}{y} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}. \quad (2.3)$$

Para n inteiro e $x > 0$, denotemos

$$\binom{x}{n} = \frac{\Gamma(x+1)}{n! \Gamma(x-n+1)}. \quad (2.4)$$

A função de Bessel de primeira espécie e de ordem α , representada por $J_\alpha(z)$, é definida pela série infinita

$$J_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (2.5)$$

convergente para todo $z \in \mathbb{C}$.

Multiplicando ambos os lados da equação anterior por z^α e derivando com relação a z , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [z^\alpha J_\alpha(z)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+2\alpha) z^{2k+2\alpha-1}}{k! 2^{2k+\alpha} \Gamma(k+\alpha+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+\alpha) z^{2k+2\alpha-1}}{k! 2^{2k+\alpha-1} \Gamma(k+\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Da Propriedade 2.1, temos que

$$\frac{d}{dz} [z^\alpha J_\alpha(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^\alpha}{k! \Gamma(k+\alpha)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\alpha-1},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dz} [z^\alpha J_\alpha(z)] = z^\alpha J_{\alpha-1}(z). \quad (2.6)$$

Da mesma forma, podemos obter

$$\frac{d}{dz} [z^{-\alpha} J_\alpha(z)] = -z^{-\alpha} J_{\alpha+1}(z). \quad (2.7)$$

Além disso,

$$J_{\alpha-1}(z) + J_{\alpha+1}(z) = 2\alpha z^{-1} J_\alpha(z). \quad (2.8)$$

Uma propriedade interessante das funções de Bessel é o entrelaçamento de seus zeros.

Propriedade 2.2. *Sejam $j_{\alpha,i}$, $i \geq 1$, os zeros positivos de $J_\alpha(z)$ em ordem crescente. Então, $j_{\alpha+1,i} < j_{\alpha,i} < j_{\alpha+1,i+1}$, $i \geq 0$, ou seja, os zeros de $J_\alpha(z)$ e $J_{\alpha+1}(z)$ se entrelaçam.*

Para a demonstração deste resultado veja [48].

2.5 Polinômios ortogonais

Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, real, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento em (a, b) . Sejam os momentos definidos por

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\psi(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.9)$$

Se os μ_n existem para $n \geq 0$, então $d\psi(x)$ é chamada uma distribuição (medida positiva) em (a, b) . O suporte $E \subseteq (a, b)$ de $d\psi$ é o conjunto de pontos de aumento de ψ ,

ou seja, são os pontos x tais que $\psi(x+\epsilon) - \psi(x-\epsilon) > 0$, para $\epsilon > 0$. Se os μ_n existem para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $d\psi(x)$ é uma distribuição forte. Se (a, b) é tal que $0 \leq a < b \leq \infty$, então $d\psi(x)$ é uma distribuição forte de *Stieltjes*. Se, além disso, $d\psi(x)$ é definida em um intervalo $(-a, a)$, $0 < a \leq \infty$, com a propriedade $d\psi(-x) = -d\psi(x)$, então $d\psi$ é uma distribuição simétrica.

Definimos polinômios ortogonais $P_n^\psi(x)$, para $n \geq 0$, com relação a uma distribuição $d\psi(x)$, em um intervalo real (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$, por:

$$(i) \quad P_n^\psi(x) \text{ é de grau exatamente } n, \quad (2.10)$$

$$(ii) \quad \int_a^b x^s P_n^\psi(x) d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq s \leq n-1 \\ \gamma_n^\psi > 0, & \text{se } s = n. \end{cases}$$

A relação (ii) acima é equivalente a

$$\langle P_m^\psi, P_n^\psi \rangle_\psi = \int_a^b P_m^\psi(x) P_n^\psi(x) d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \rho_n^\psi > 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (2.11)$$

Se $\rho_n^\psi = 1$, dizemos que formam uma seqüência de polinômios ortonormais e os denotaremos por $\{p_n^\psi\}_n$.

Na forma mônica, ou seja, quando os coeficientes dos termos de maior grau são iguais a 1, os polinômios ortogonais satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$P_{n+1}^\psi(x) = (x - \beta_{n+1}^\psi) P_n^\psi(x) - \alpha_{n+1}^\psi P_{n-1}^\psi(x), \quad (2.12)$$

com $P_0^\psi(x) = 1$, $P_1^\psi(x) = x - \beta_1^\psi$, $\beta_n^\psi \in \mathbb{R}$ e $\alpha_{n+1}^\psi > 0$, $n \geq 1$.

Além disso, os coeficientes β_n^ψ e α_{n+1}^ψ , $n \geq 1$, são todos reais e

$$\beta_n^\psi = \frac{\int_a^b x [P_{n-1}^\psi(x)]^2 d\psi(x)}{\int_a^b [P_{n-1}^\psi(x)]^2 d\psi(x)}, \quad \alpha_{n+1}^\psi = \frac{\int_a^b [P_n^\psi(x)]^2 d\psi(x)}{\int_a^b [P_{n-1}^\psi(x)]^2 d\psi(x)}.$$

Para obtermos uma seqüência de polinômios ortonormais, basta dividirmos os polinômios ortogonais por suas normas. Então,

$$p_n^\psi(x) = \frac{P_n^\psi(x)}{\|P_n^\psi(x)\|_\psi}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.13)$$

onde $\|P_n^\psi(x)\|_\psi^2 = \langle P_n^\psi, P_n^\psi \rangle_\psi = \rho_n^\psi$.

Esses polinômios satisfazem a uma relação de recorrência da forma

$$xp_n^\psi(x) = \lambda_{n+1}^\psi p_{n+1}^\psi(x) + \delta_n^\psi p_n^\psi(x) + \lambda_n^\psi p_{n-1}^\psi(x), \quad (2.14)$$

onde $\lambda_n^\psi = \sqrt{\alpha_{n+1}^\psi}$ e $\delta_n^\psi = \beta_{n+1}^\psi$.

O estudo de polinômios ortogonais sempre despertou o interesse de renomados pesquisadores e, além da relação de recorrência (2.12), possuem muitas outras propriedades interessantes, tais como:

Propriedade 2.3. *Os zeros de $P_n^\psi(x)$, $n \geq 1$, são reais, simples e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Propriedade 2.4. *Se $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ denotam os zeros de $P_n^\psi(x)$, $n \geq 1$, então $x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1}$, $i = 1, \dots, n$, ou seja, os zeros de $P_n^\psi(x)$ e $P_{n+1}^\psi(x)$ se entrelaçam.*

Propriedade 2.5. *Se, na fórmula de quadratura interpolatória*

$$\int_c^d f(x) d\psi(x) = \sum_{k=1}^n W_{n,k} f(x_{n,k}) + E_n(f),$$

os nós $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, são os zeros de $P_n^\psi(x)$, então $E_n(f) = 0$ sempre que $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$, onde $\mathbb{P}_n$, $n \geq 0$, é o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n .

Propriedade 2.6. $\langle P_n^\psi, Q_m \rangle_\psi = 0$ para qualquer polinômio Q_m de grau $m < n$.

Propriedade 2.7. *Se $d\psi$ é uma distribuição simétrica, então os polinômios P_n^ψ satisfazem à relação $P_n^\psi(-x) = (-1)^n P_n^\psi(x)$, $n \geq 1$ e, além disso, $\beta_n^\psi = 0$, $n \geq 1$, na relação de recorrência.*

Propriedade 2.8. *Os polinômios ortogonais mônicos, P_n^ψ , satisfazem à seguinte propriedade*

$$\langle P_n^\psi, P_n^\psi \rangle_\psi \leq \langle Q_n, Q_n \rangle_\psi,$$

onde Q_n é um polinômio mônico qualquer de grau n , isto é, dentre todos os polinômios mônicos de grau n , P_n^ψ é o polinômio que minimiza a norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$. Esta propriedade é conhecida como propriedade minimal.

As próximas definições podem ser encontradas em Nevai [41] e serão importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Definição 2.20. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $b \geq 0$. Definimos $C_k^\psi(a, b)$ por*

$$C_k^\psi(a, b) = \left| \delta_k^\psi - a \right| + \left| \lambda_k^\psi - \frac{b}{2} \right| + \left| \lambda_{k+1}^\psi - \frac{b}{2} \right|, \quad k \geq 1,$$

onde δ_k^ψ e λ_k^ψ são os coeficientes da relação de recorrência (2.14).

Definição 2.21. *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $b \geq 0$. Dizemos que a distribuição ψ pertence à classe $M(a, b)$ se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_k^\psi(a, b) = 0.$$

Daremos, agora, dois resultados cujas demonstrações podem ser encontradas, respectivamente, em Van Assche [8, Teorema 4.10, pag.117] e em Nevai [41].

Teorema 2.4. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ uma função não-decrescente tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+t)}{f(x)} = 1.$$

Suponha, ainda, que existam constantes $\lambda \geq 0$ e $\delta \in \mathbb{R}$, tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^\psi}{f(n)} = \lambda \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n^\psi}{f(n)} = \delta.$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n-1}^\psi(f(n)x)}{p_n^\psi(f(n)x)} = \frac{2\lambda}{x - \delta + \sqrt{(x - \delta)^2 - 4\lambda^2}},$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [A, B]$, onde $[A, B]$ é o menor intervalo que contém $\{0\}$ e $[\delta - 2\lambda, \delta + 2\lambda]$.

Teorema 2.5. *Sejam $\psi \in M(0, 1)$ e $p_n^\psi(x) = \kappa_n^\psi x^n + \dots$, $\kappa_n^\psi > 0$, o polinômio ortonormal de grau n com respeito a ψ . Então,*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa_{n-1}^\psi}{\kappa_n^\psi} &= \frac{1}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}^\psi(x)}{P_n^\psi(x)} &= \frac{\varphi(x)}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\prime\psi}(x)}{nP_n^\psi(x)} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \end{aligned}$$

localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, onde $P_n^\psi(x) = \frac{p_n^\psi(x)}{\kappa_n^\psi}$, $\varphi(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ e a raiz quadrada é tal que $\sqrt{x^2 - 1} > 0$ para $x > 1$ e $\sqrt{x^2 - 1} < 0$ para $x < -1$.

2.6 Polinômios ortogonais clássicos

Segundo Chihara (veja [17], pág.152) as medidas que satisfazem a uma equação diferencial do tipo Pearson da forma

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \frac{ax+b}{\rho(x)}, \quad (2.15)$$

onde ρ é um polinômio de grau menor ou igual a dois, são chamadas *medidas clássicas*. Os polinômios ortogonais cujas medidas satisfazem (2.15) são os polinômios de Jacobi (incluindo os casos especiais de Legendre, Chebyshev de 1ª e 2ª espécies e Gegenbauer), de Laguerre e de Hermite, que são conhecidos como polinômios ortogonais clássicos.

2.6.1 Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$, com relação à medida $d\psi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, com $\alpha, \beta > -1$ e são dados explicitamente por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}, \quad n \geq 0,$$

e

$$\hat{\kappa}_n^{(\alpha, \beta)} = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k} \quad (2.16)$$

são os coeficientes dos termos de maior grau. Podem, também, ser definidos através da fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}], \quad n \geq 0.$$

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Jacobi é dada por

$$P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad n \geq 0,$$

onde $P_{-1}^{(\alpha, \beta)}(x) = 0$, $P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1$ e

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 3)\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 2)\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}, \quad n \geq 0,$$

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(\alpha + \beta + 2n + 1)}{2(n+1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}, \quad n \geq 0$$

e

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + 2n + 2)}{(n+1)(\alpha + \beta + n + 1)(\alpha + \beta + 2n)}, \quad n \geq 1.$$

Além disso, esses polinômios satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} = \rho_n^{(\alpha,\beta)}, & \text{se } m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Os polinômios mônicos de Jacobi satisfazem à relação diferencial

$$\frac{d}{dx} P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x) = (n+1) P_n^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (2.18)$$

Usando a equação acima, podemos obter o comportamento assintótico entre os polinômios ortogonais mônicos $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ e $P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)$.

Teorema 2.6. *Para o quociente entre $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ e $P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)$, mônicos, vale o seguinte resultado*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} = \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x^2 - 1}},$$

localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Demonstração: Da equação (2.18) e do Teorema 2.5, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)}{(n+1) P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)}{(n+1) P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} \frac{P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} \\ &= \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

■

Os polinômios ortonormais de Jacobi, $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, satisfazem à relação de recorrência

$$x p_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \lambda_{n+1}^{(\alpha, \beta)} p_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) + \delta_n^{(\alpha, \beta)} p_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \lambda_n^{(\alpha, \beta)} p_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x),$$

$$\text{com } \lambda_n^{(\alpha, \beta)} = \left(\frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)^2(2n+\alpha+\beta+1)} \right)^{1/2} \text{ e}$$

$$\delta_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}.$$

Logo, das Definições 2.20 e 2.21,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_k^{(\alpha, \beta)}(0, 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left| \delta_k^{(\alpha, \beta)} \right| + \left| \lambda_k^{(\alpha, \beta)} - \frac{1}{2} \right| + \left| \lambda_{k+1}^{(\alpha, \beta)} - \frac{1}{2} \right| \right] = 0.$$

Portanto, a distribuição de Jacobi pertence à classe $M(0, 1)$.

Podemos, também, obter o limite para a razão entre os coeficientes dos termos de maior grau dos polinômios ortonormais $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ e $p_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)$.

Lema 2.2. Para os coeficientes dos termos de maior grau dos polinômios ortonormais de Jacobi, $p_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)$ e $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa_n^{(\alpha-1, \beta-1)}}{\kappa_n^{(\alpha, \beta)}} = \frac{1}{8}.$$

Demonstração: De (2.16) e (2.17), obtemos que o coeficiente do termo de maior grau dos polinômios ortonormais de Jacobi é dado por

$$\kappa_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \right)^{1/2} \binom{2n + \alpha + \beta}{n}.$$

Assim,

$$\kappa_n^{(\alpha-1, \beta-1)} = \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^{\alpha+\beta-1}}{2n + \alpha + \beta - 1} \frac{\Gamma(n + \alpha)\Gamma(n + \beta)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta - 1)} \right)^{1/2} \binom{2n + \alpha + \beta - 2}{n}.$$

Da Propriedade 2.1 e de (2.4), obtemos

$$\frac{\kappa_n^{(\alpha-1, \beta-1)}}{\kappa_n^{(\alpha, \beta)}} = \frac{1}{2} \frac{(2n + \alpha + \beta + 1)^{1/2} (n + \alpha + \beta - 1)^{3/2} (n + \alpha + \beta)^{3/2}}{(2n + \alpha + \beta - 1)^{3/2} (2n + \alpha + \beta) (n + \alpha)^{1/2} (n + \beta)^{1/2}}.$$

Aplicando o limite para $n \rightarrow \infty$, obtemos o resultado desejado. ■

Polinômios Ortogonais de Gegenbauer.

Os polinômios de Gegenbauer, ou polinômios Ultrasféricos, são múltiplos de um caso especial dos polinômios de Jacobi, com $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2} > -1$. São ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$.

A notação usual para os polinômios de Gegenbauer é $G_n^{(\lambda)}(x)$ e são dados por

$$G_n^{(\lambda)}(x) = \binom{2\alpha}{\alpha}^{-1} \binom{n + 2\alpha}{\alpha} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x),$$

onde $P_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$ são os polinômios de Jacobi com $\beta = \alpha$.

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Gegenbauer é da forma

$$(n + 1)G_{n+1}^{(\lambda)}(x) = 2(n + \lambda)xG_n^{(\lambda)}(x) - (n + 2\lambda - 1)G_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad (2.19)$$

onde $G_{-1}^{(\lambda)}(x) = 0$ e $G_0^{(\lambda)}(x) = 1$.

2.6.2 Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre são ortogonais com relação à medida $d\psi(x) = x^\alpha e^{-x} dx$, $\alpha > -1$, no intervalo $[0, \infty)$ e são dados explicitamente pela expressão

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}, \quad (2.20)$$

onde $L_n^{(\alpha)}(x)$ é o polinômio de grau n com o coeficiente do termo de maior grau

$$\hat{\kappa}_n^{(\alpha)} = \frac{(-1)^n}{n!},$$

que é independente de α , e

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n}. \quad (2.21)$$

A fórmula de Rodrigues para esses polinômios é a seguinte:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}] \quad (2.22)$$

e satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = -(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (2n+\alpha+1)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.23)$$

com $L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$ e $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$.

Além disso, satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \rho_n^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (2.24)$$

De (2.23), é fácil verificar que os polinômios ortonormais de Laguerre, ou seja, $l_n^{(\alpha)}(x) = \kappa_n^{(\alpha)} x^n + \dots$, com $\kappa_n^{(\alpha)} > 0$, satisfazem à seguinte relação de recorrência

$$xl_n^{(\alpha)}(x) = \lambda_{n+1}^{(\alpha)} l_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \delta_n^{(\alpha)} l_n^{(\alpha)}(x) + \lambda_n^{(\alpha)} l_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

onde

$$\lambda_n^{(\alpha)} = \sqrt{n(n+\alpha)} \quad \text{e} \quad \delta_n^{(\alpha)} = 2n + \alpha + 1, \quad n \geq 1. \quad (2.25)$$

Enunciaremos, a seguir, alguns resultados que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho. As demonstrações serão omitidas pois, além de envolverem muitos outros resultados, o que tornaria este texto demasiado longo, não são o objetivo deste trabalho. Porém, podem ser encontradas em Szegö [57].

Teorema 2.7. [Teorema 8.1.3] *Fórmula de Mehler-Heine*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x/n)}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}),$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, onde J_α é a função de Bessel definida em (2.5).

Como consequência imediata deste teorema, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x/(n+j))}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}), \quad (2.26)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ e uniformemente em $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Teorema 2.8. [Teorema 8.22.1] *A seqüência $\left\{ \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n^{\alpha/2-1/4}} \right\}_n$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos de $(0, +\infty)$.*

Teorema 2.9. [Teorema 8.22.3] *Seja α um número real arbitrário. Então,*

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{x/2} (-x)^{-(\alpha/2)-1/4} n^{\alpha/2-1/4} e^{2\sqrt{-nx}} \{1 + O(n^{-1/2})\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dizemos que $f(z) = O(g(z))$ quando $z \rightarrow c \in G \subset \mathbb{C}$ se, e somente se, $|f(z)/g(z)|$ é limitada quando $z \rightarrow c$.

Como consequência direta do teorema anterior, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)} = 1, \quad \alpha > -1 \quad (2.27)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1/2} L_n^{(\alpha-1)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} = \sqrt{-x}, \quad \alpha > 0, \quad (2.28)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty]$.

Teorema 2.10. [Teorema 8.22.5] *Os polinômios de Laguerre também satisfazem*

$$\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n^{\alpha/2}} = e^{x/2} x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{nx}) + O(n^{-3/4}), \quad n \geq 1, \quad \alpha > -1,$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $(0, +\infty)$.

Agora, de (2.20), obtemos

$$L_n^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \binom{n+\alpha}{n-k} - \binom{n+\alpha-1}{n-k} \right\} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (2.29)$$

Da Propriedade 2.1, temos que

$$\begin{aligned} \binom{n+\alpha}{n-k} - \binom{n+\alpha-1}{n-k} &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-k)!\Gamma(k+\alpha+1)} - \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(n-k)!\Gamma(k+\alpha)} \\ &= \frac{(n-k)\Gamma(n+\alpha)}{(n-k)!(k+\alpha)\Gamma(k+\alpha)} = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(n-k)!\Gamma(k+\alpha+1)} \\ &= \binom{n+\alpha-1}{n-k-1}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (2.29), de (2.20) obtemos

$$L_n^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha-1)}(x) = L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \alpha > 0,$$

ou seja,

$$L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha-1)}(x), \quad n \geq 0, \alpha > 0. \quad (2.30)$$

Derivando, agora, ambos os membros da equação (2.20) com relação a x , obtemos

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -\sum_{k=1}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)!} = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1+\alpha+1}{n-1-k} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

Portanto, usando novamente (2.20), os polinômios de Laguerre satisfazem à seguinte relação:

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \quad n \geq 0, \alpha > -1. \quad (2.31)$$

Das duas relações anteriores, (2.30) e (2.31), obtemos

$$\frac{d}{dx} \left(L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \right) = -L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \alpha > -1. \quad (2.32)$$

Se tomarmos $f(n) = n$ no Teorema 2.4, de (2.25), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(\alpha)}}{n} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_n^{(\alpha)}}{n} = 2.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n-1}^{(\alpha)}(nx)}{l_n^{(\alpha)}(nx)} = \frac{2}{x-2+\sqrt{(x-2)^2-4}} = \frac{1}{\varphi((x-2)/2)},$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$, onde φ é a aplicação definida no Teorema 2.5.

Como $l_n^{(\alpha)}(x) = \kappa_n^{(\alpha)}x^n + \dots$, com $\kappa_n^{(\alpha)} > 0$, então $l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n L_n^{(\alpha)}(x)}{||L_n^{(\alpha)}(x)||}$. Logo, de (2.24), imediatamente obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(nx)}{L_n^{(\alpha)}(nx)} = -\frac{1}{\varphi((x-2)/2)}, \quad (2.33)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$, onde φ é a aplicação definida no Teorema 2.5.

Como consequência imediata de (2.33), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}((n+j)x)}{L_n^{(\alpha)}((n+j)x)} = -\frac{1}{\varphi((x-2)/2)}, \quad (2.34)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ e uniformemente em $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Para $x \geq 0$, $n \geq 0$ e $\alpha > -1$, [1, Fórmulas 22.14.13 e Fórmulas 22.14.14] temos que

$$|L_n^{(\alpha)}(x)| \leq A(n, \alpha)e^{x/2}, \quad (2.35)$$

onde

$$A(n, \alpha) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)}, & \text{se } \alpha \geq 0, \\ 2 - \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)}, & \text{se } -1 < \alpha < 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

2.6.3 Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite são ortogonais com relação à medida $d\psi(x) = e^{-x^2}dx$, definida no intervalo $(-\infty, \infty)$, e são dados explicitamente pela expressão

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k n! (2x)^{n-2k}}{(n-2k)! k!}, \quad n \geq 0,$$

onde $\lfloor z \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a z . $H_n(x)$ é o polinômio de grau n com coeficiente do termo de maior grau dado por

$$\hat{\kappa}_n = 2^n.$$

São, também, definidos pela fórmula de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}], \quad n \geq 0.$$

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Hermite é

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = 2x$.

Além disso, esses polinômios satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade

$$\langle H_n, H_m \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Mais informações sobre os polinômios ortogonais podem ser encontrados, por exemplo, em Chihara [17], Freud [22] e Szegő [57].

2.7 Polinômios ortogonais de Sobolev

Sejam $d\psi_k, k = 0, 1, \dots, N$, medidas positivas na reta real $\mathbb{R}$, tendo suporte limitado ou não. Se o espaço das funções diferenciáveis até ordem N em $\mathbb{R}$ satisfaz

$$\sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} [f^{(k)}]^2 d\psi_k(x) < \infty,$$

então esse espaço é chamado espaço de Sobolev.

Uma seqüência de polinômios $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada seqüência de polinômios ortogonais de Sobolev, se S_n é de grau exatamente n e

$$\langle S_n, S_m \rangle_S = \sum_{k=0}^N \int_{\mathbb{R}} S_n^{(k)}(x) S_m^{(k)}(x) d\psi_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n, \\ \rho_n^S > 0, & \text{para } m = n. \end{cases} \quad (2.37)$$

Em nosso trabalho, consideraremos estes polinômios no caso em que $N = 1$ e escrevemos o produto interno como

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) d\psi_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} f'(x) g'(x) d\psi_1(x), \quad (2.38)$$

onde $\lambda > 0$.

O estudo de uma interessante subclasse desses polinômios, associados a medidas que formam par coerente, cuja definição daremos mais adiante, iniciou-se com o trabalho de Irseles [28]. Esta subclasse despertou o interesse de muitos matemáticos e, como consequência, a publicação de muitos trabalhos de pesquisa nos últimos anos.

Algumas das propriedades dos polinômios ortogonais também são válidas para os polinômios ortogonais de Sobolev como, por exemplo, a propriedade minimal, que dentre todos os polinômios de grau n , S_n é o polinômio que minimiza a norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$. Porém, para os polinômios ortogonais de Sobolev de forma geral,

não existe uma relação de recorrência de três termos. Existem relações entre os polinômios ortogonais de Sobolev e os polinômios ortogonais associados a $d\psi_0$. Vejamos, agora, algumas definições e resultados que serão importantes no decorrer deste trabalho.

Sejam $\{P_n^{\psi_0}\}_{n=0}^\infty$ e $\{P_n^{\psi_1}\}_{n=0}^\infty$ seqüências de polinômios ortogonais mônicos com relação às medidas $d\psi_0$ e $d\psi_1$, respectivamente. Então, $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ forma um par coerente de medidas se

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{1}{n+1} [P_{n+1}'^{\psi_0}(x) + \sigma_n P_n'^{\psi_0}(x)], \quad n \geq 0,$$

onde $\{\sigma_n\}_{n=0}^\infty$ é uma seqüência de números reais não nulos. Esta definição foi primeiramente dada em Iserles [28]. Neste mesmo trabalho, foi demonstrado que vale a seguinte relação:

$$S_{n+1}(x) + a_n(\lambda) S_n(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \sigma_n P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.39)$$

onde

$$a_n(\lambda) = \frac{\rho_n^{\psi_0} \sigma_n}{\rho_n^S}, \quad n \geq 0.$$

Os coeficientes $a_n(\lambda)$ podem ser obtidos recursivamente por

$$a_n(\lambda) = \frac{\sigma_n \rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{\psi_0} + \lambda n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1} + \sigma_{n-1}^2 \rho_{n-1}^{\psi_0} - \sigma_{n-1} \rho_{n-1}^{\psi_0} a_{n-1}(\lambda)}, \quad n \geq 1,$$

com $a_0(\lambda) = \sigma_0$.

De modo análogo, Iserles [28] também definiu o conceito de par simetricamente coerente. Assim, duas medidas simétricas $d\psi_0$ e $d\psi_1$ formam um par simetricamente coerente se os polinômios mônicos associados estiverem relacionados da forma

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{1}{n+1} [P_{n+1}'^{\psi_0}(x) + \sigma_{n-1} P_{n-1}'^{\psi_0}(x)], \quad n \geq 1,$$

onde $\{\sigma_n\}_{n=0}^\infty$ é uma seqüência de números reais não nulos.

Também para este caso são válidas propriedades semelhantes ao caso dos pares coerentes, entre elas a relação

$$S_{n+1}(x) + a_{n-1}(\lambda) S_{n-1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \sigma_{n-1} P_{n-1}^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.40)$$

onde

$$a_n(\lambda) = \frac{\rho_n^{\psi_0} \sigma_n}{\rho_n^S}, \quad n \geq 0.$$

Os coeficientes podem ser obtidos recursivamente pela expressão

$$a_n(\lambda) = \frac{\sigma_n \rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^{\psi_0} + \lambda n^2 \rho_{n-1}^{\psi_1} + \sigma_{n-2}^2 \rho_{n-2}^{\psi_0} - \sigma_{n-2} \rho_{n-2}^{\psi_0} a_{n-2}(\lambda)}, \quad n \geq 2,$$

com $a_0(\lambda) = \sigma_0$ e $a_1(\lambda) = \frac{\rho_1^{\psi_0} \sigma_1}{\rho_1^{\psi_0} + \lambda \rho_0^{\psi_1}}$. Neste caso, os polinômios S_n também são simétricos.

Em 1997, Meijer [38] resolveu completamente o problema de determinar os pares coerentes e simetricamente coerentes, mostrando que, necessariamente, uma das medidas deve ser clássica. Assim, por exemplo, as medidas de Jacobi e Laguerre estão associadas a pares coerentes, enquanto que as medidas de Hermite e Gegenbauer estão relacionadas a pares simetricamente coerentes. Em particular, Meijer [38] demonstrou que existem somente dois tipos de pares coerentes envolvendo as medidas clássicas de Jacobi e Laguerre, que são:

Tipo I: $d\psi_1$ é clássica:

(i) O caso Jacobi:

$$\begin{aligned} d\psi_0 &= (x - \xi)(1 - x)^{\alpha-1}(1 + x)^{\beta-1}dx, \\ d\psi_1 &= (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta dx, \end{aligned}$$

com $\xi < -1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

(ii) O caso Laguerre:

$$\begin{aligned} d\psi_0 &= (x - \xi)x^{\alpha-1}e^{-x}dx + M\delta(0), \\ d\psi_1 &= x^\alpha e^{-x}dx, \end{aligned}$$

com $\xi = 0$ se $-1 < \alpha \leq 0$ e $M = 0$ se $\alpha \neq 0$.

Aqui, $\delta(x)$ é a função delta de Dirac tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$ para f contínua.

Tipo II: $d\psi_0$ é clássica:

(iii) O caso Jacobi:

$$\begin{aligned} d\psi_0 &= (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta dx, \\ d\psi_1 &= \frac{(1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1}}{x - \xi}dx + M\delta(\xi), \end{aligned}$$

com $\xi < -1$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $M \geq 0$.

(iv) O caso Laguerre:

$$\begin{aligned} d\psi_0 &= x^\alpha e^{-x}dx, \\ d\psi_1 &= \frac{x^{\alpha+1}e^{-x}}{x - \xi}dx + M\delta(\xi), \end{aligned}$$

com $\alpha > -1$, $\xi \leq 0$ e $M \geq 0$.

Iniciaremos, a seguir, nossos estudos sobre as propriedades assintóticas dos polinômios de Sobolev associados a esses pares de medidas, ou seja, Sobolev-Jacobi e Sobolev-Laguerre.

Capítulo 3

Polinômios ortogonais de Sobolev - Jacobi: propriedades assintóticas

Neste capítulo, apresentaremos um estudo sobre o comportamento assintótico dos polinômios ortogonais associados às medidas envolvidas no produto interno de Sobolev-Jacobi e dos coeficientes relacionados. Este estudo foi baseado, principalmente, nos trabalhos de Pan [43, 44].

3.1 Introdução

Seja $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios de Sobolev mônicos, ortogonais com respeito ao produto interno

$$\langle f, g \rangle_S = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\psi_0(x) + \lambda \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)d\psi_1(x), \quad (3.1)$$

onde $\lambda > 0$ e $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ forma um par coerente de medidas de Jacobi.

Sejam $\{p_n^{\psi_0}(x) = \kappa_n^{\psi_0}x^n + \dots\}$ a sequência de polinômios ortonormais com respeito a $d\psi_0$ e $\{p_n^{\psi_1}(x) = \kappa_n^{\psi_1}x^n + \dots\}$ a sequência de polinômios ortonormais com respeito a $d\psi_1$ com $\kappa_n^{\psi_0} > 0$ e $\kappa_n^{\psi_1} > 0$. Como $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ forma um par coerente, então existem constantes $D_n \neq 0$ tais que

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{P_{n+1}^{\psi_0}(x)}{n+1} + D_n \frac{P_n^{\psi_0}(x)}{n}, \quad n \geq 1, \quad (3.2)$$

onde $P_n^{\psi_1}(x) = \frac{p_n^{\psi_1}(x)}{\kappa_n^{\psi_1}}$ e $P_n^{\psi_0}(x) = \frac{p_n^{\psi_0}(x)}{\kappa_n^{\psi_0}}$.

Observe que

$$\rho_n^{\psi_i} = \langle P_n^{\psi_i}, P_n^{\psi_i} \rangle_{\psi_i} = \frac{1}{(\kappa_n^{\psi_i})^2}, \quad i = 0, 1 \text{ e } n \geq 0. \quad (3.3)$$

Usando (3.2) e o fato de que $\{S_k\}_{k=0}^n$ forma uma base para o espaço dos polinômios de grau $\leq n$, $\mathbb{P}_n$, podemos facilmente demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Para $n \geq 1$ as seguintes relações são satisfeitas:*

$$\frac{P_{n+1}^{\psi_0}(x)}{n+1} + D_n \frac{P_n^{\psi_0}(x)}{n} = \frac{S_{n+1}(x)}{n+1} + d_n \frac{S_n(x)}{n} \quad (3.4)$$

e

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{S'_{n+1}(x)}{n+1} + d_n \frac{S'_n(x)}{n}, \quad (3.5)$$

$$\text{onde } d_n = \frac{\int_a^b [P_n^{\psi_0}(x)]^2 d\psi_0}{\rho_n^S} D_n = \frac{D_n}{(\kappa_n^{\psi_0})^2 \rho_n^S}.$$

Demonstração: Desde que $S_j(x)$, $j = 0, \dots, n+1$, formam uma base para o espaço $\mathbb{P}_{n+1}$, podemos escrever

$$\frac{P_{n+1}^{\psi_0}(x)}{n+1} + D_n \frac{P_n^{\psi_0}(x)}{n} = \sum_{j=0}^{n+1} c_j S_j(x), \quad (3.6)$$

com $c_{n+1} = 1/(n+1)$.

Para $k = 0, \dots, n$, de (2.37) obtemos

$$\left\langle \frac{S_{n+1}}{n+1} + \sum_{j=0}^n c_j S_j, S_k \right\rangle_S = \left\langle \frac{S_{n+1}}{n+1}, S_k \right\rangle_S + \sum_{j=0}^n c_j \langle S_j, S_k \rangle_S = c_k \rho_k^S. \quad (3.7)$$

Mas, de (3.6),

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{S_{n+1}}{n+1} + \sum_{j=0}^n c_j S_j, S_k \right\rangle_S &= \left\langle \frac{P_{n+1}^{\psi_0}}{n+1} + D_n \frac{P_n^{\psi_0}}{n}, S_k \right\rangle_S \\ &= \left\langle \frac{P_{n+1}^{\psi_0}}{n+1} + D_n \frac{P_n^{\psi_0}}{n}, S_k \right\rangle_{\psi_0} + \lambda \left\langle \frac{P'_{n+1}}{n+1} + D_n \frac{P'_n}{n}, S'_k \right\rangle_{\psi_1}. \end{aligned}$$

Assim, de (3.2) e (3.7),

$$c_k \rho_k^S = \left\langle \frac{P_{n+1}^{\psi_0}}{n+1} + D_n \frac{P_n^{\psi_0}}{n}, S_k \right\rangle_{\psi_0} + \lambda \langle P_n^{\psi_1}, S_k \rangle_{\psi_1}.$$

Então,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{\frac{1}{n+1} \langle P_{n+1}^{\psi_0}, S_k \rangle_{\psi_0} + \frac{D_n}{n} \langle P_n^{\psi_0}, S_k \rangle_{\psi_0} + \lambda \langle P_n^{\psi_1}, S'_k \rangle_{\psi_1}}{\rho_k^S} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } k < n, \\ \frac{D_n}{n} \frac{\langle P_n^{\psi_0}, S_n \rangle_{\psi_0}}{\rho_n^S} = \frac{D_n}{n} \frac{\langle P_n^{\psi_0}, P_n^{\psi_0} \rangle_{\psi_0}}{\rho_n^S}, & \text{se } k = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{P_{n+1}^{\psi_0}(x)}{n+1} + D_n \frac{P_n^{\psi_0}(x)}{n} = \frac{S_{n+1}(x)}{n+1} + d_n \frac{S_n(x)}{n},$$

onde $d_n = \frac{\langle P_n^{\psi_0}, P_n^{\psi_0} \rangle_{\psi_0}}{\rho_n^S} D_n$. Agora, de (3.2) e da relação acima, obtemos

$$P_n^{\psi_1}(x) = \frac{S'_{n+1}(x)}{n+1} + d_n \frac{S'_n(x)}{n}.$$

■

Em 1997, Pan [43] obteve a seguinte relação de recorrência para d_n em termos de $\kappa_n^{\psi_0}$ e $\kappa_n^{\psi_1}$.

Teorema 3.2. *Os coeficientes d_n em (3.4) satisfazem*

$$d_n = \frac{D_n}{1 + \frac{D_{n-1}^2 n^2 (\kappa_n^{\psi_0})^2}{(n-1)^2 (\kappa_{n-1}^{\psi_0})^2} + \frac{\lambda n^2 (\kappa_n^{\psi_0})^2}{(\kappa_{n-1}^{\psi_1})^2} - d_{n-1} \frac{D_{n-1} n^2 (\kappa_n^{\psi_0})^2}{(n-1)^2 (\kappa_{n-1}^{\psi_0})^2}},$$

com a condição inicial $d_1 = \frac{\rho_1^{\psi_0}}{\rho_1^{\psi_0} + \rho_0^{\psi_1}} D_1$.

Demonstração: Consideremos os polinômios

$$R_{n+1}(x) = \frac{P_{n+1}^{\psi_0}(x)}{n+1} + D_n \frac{P_n^{\psi_0}(x)}{n} \quad \text{e} \quad C_n(x) = \frac{S_n(x)}{n}. \quad (3.8)$$

Da equação (3.4),

$$R_{n+1}(x) = \frac{S_{n+1}(x)}{n+1} + d_n \frac{S_n(x)}{n} = C_{n+1}(x) + d_n C_n(x). \quad (3.9)$$

Primeiramente, mostraremos que

$$d_n = \frac{\langle R_{n+1}, R_n \rangle_S}{\langle R_n, R_n \rangle_S - d_{n-1} \langle R_n, R_{n-1} \rangle_S}. \quad (3.10)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \langle R_{n+1}, R_n \rangle_S &= \left\langle \frac{S_{n+1}}{n+1} + d_n \frac{S_n}{n}, R_n \right\rangle_S = \frac{1}{n+1} \langle S_{n+1}, R_n \rangle_S + d_n \left\langle \frac{S_n}{n}, R_n \right\rangle_S \\ &= d_n \langle C_n, R_n \rangle_S. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Além disso, de (3.9) e (3.8),

$$\begin{aligned}
 \langle R_n, R_n - d_{n-1}R_{n-1} \rangle_S &= \langle C_n + d_{n-1}C_{n-1}, R_n - d_{n-1}R_{n-1} \rangle_S \\
 &= \langle C_n, R_n \rangle_S + d_{n-1}\langle C_{n-1}, R_n \rangle_S - d_{n-1}\langle C_n, R_{n-1} \rangle_S \\
 &\quad - d_{n-1}^2\langle C_{n-1}, R_{n-1} \rangle_S \\
 &= \langle C_n, R_n \rangle_S + d_{n-1}\langle C_{n-1}, C_n + d_{n-1}C_{n-1} \rangle_S - d_{n-1}^2\langle C_{n-1}, R_{n-1} \rangle_S \\
 &= \langle C_n, R_n \rangle_S + d_{n-1}^2\langle C_{n-1}, C_{n-1} \rangle_S - d_{n-1}^2\langle C_{n-1}, R_{n-1} \rangle_S \\
 &= \langle C_n, R_n \rangle_S.
 \end{aligned}$$

De (3.11) e da igualdade acima, obtemos

$$d_n = \frac{\langle R_{n+1}, R_n \rangle_S}{\langle C_n, R_n \rangle_S} = \frac{\langle R_{n+1}, R_n \rangle_S}{\langle R_n, R_n \rangle_S - d_{n-1}\langle R_n, R_{n-1} \rangle_S},$$

que é o resultado (3.10).

Por definição,

$$\langle R_n, R_n \rangle_S = \langle R_n, R_n \rangle_{\psi_0} + \lambda \langle R'_n, R'_n \rangle_{\psi_1} = \langle R_n, R_n \rangle_{\psi_0} + \lambda \langle P_{n-1}^{\psi_1}, P_{n-1}^{\psi_1} \rangle_{\psi_1},$$

pois $R'_n(x) = \frac{P_n^{\psi_0}(x)}{n} + D_{n-1} \frac{P_{n-1}^{\psi_0}(x)}{n-1} = P_{n-1}^{\psi_1}(x)$. Mas, de (3.8),

$$\begin{aligned}
 \langle R_n, R_n \rangle_{\psi_0} &= \left\langle \frac{P_n^{\psi_0}}{n} + D_{n-1} \frac{P_{n-1}^{\psi_0}}{n-1}, \frac{P_n^{\psi_0}}{n} + D_{n-1} \frac{P_{n-1}^{\psi_0}}{n-1} \right\rangle_{\psi_0} \\
 &= \frac{1}{n^2} \langle P_n^{\psi_0}, P_n^{\psi_0} \rangle_{\psi_0} + \frac{D_{n-1}^2}{(n-1)^2} \langle P_{n-1}^{\psi_0}, P_{n-1}^{\psi_0} \rangle_{\psi_0}.
 \end{aligned}$$

Assim, de (3.3), obtemos

$$\langle R_n, R_n \rangle_{\psi_0} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{(\kappa_n^{\psi_0})^2} + \frac{D_{n-1}^2}{(n-1)^2} \frac{1}{(\kappa_{n-1}^{\psi_0})^2}$$

e

$$\lambda \langle P_{n-1}^{\psi_1}, P_{n-1}^{\psi_1} \rangle_{\psi_1} = \lambda \frac{1}{(\kappa_{n-1}^{\psi_1})^2}.$$

Logo,

$$\langle R_n, R_n \rangle_S = \frac{1}{n^2 (\kappa_n^{\psi_0})^2} + \frac{D_{n-1}^2}{(n-1)^2 (\kappa_{n-1}^{\psi_0})^2} + \lambda \frac{1}{(\kappa_{n-1}^{\psi_1})^2}. \quad (3.12)$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
 \langle R_{n+1}, R_n \rangle_S &= \langle R_{n+1}, R_n \rangle_{\psi_0} + \lambda \langle R'_{n+1}, R'_n \rangle_{\psi_1} = \langle R_{n+1}, R_n \rangle_{\psi_0} + \lambda \langle P_n^{\psi_1}, P_{n-1}^{\psi_1} \rangle_{\psi_1} \\
 &= \left\langle \frac{P_{n+1}^{\psi_0}}{n+1} + D_n \frac{P_n^{\psi_0}}{n}, \frac{P_n^{\psi_0}}{n} + D_{n-1} \frac{P_{n-1}^{\psi_0}}{n-1} \right\rangle_{\psi_0} \\
 &= \frac{D_n}{n^2} \langle P_n^{\psi_0}, P_n^{\psi_0} \rangle_{\psi_0} = \frac{D_n}{n^2} \frac{1}{(\kappa_n^{\psi_0})^2}
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

e

$$\begin{aligned}
\langle R_n, R_{n-1} \rangle_S &= \langle R_n, R_{n-1} \rangle_{\psi_0} + \lambda \langle R'_n, R'_{n-1} \rangle_{\psi_1} = \langle R_n, R_{n-1} \rangle_{\psi_0} + \lambda \langle P_{n-1}^{\psi_1}, P_{n-2}^{\psi_1} \rangle_{\psi_1} \\
&= \left\langle \frac{P_n^{\psi_0}}{n} + D_{n-1} \frac{P_{n-1}^{\psi_0}}{n-1}, \frac{P_{n-1}^{\psi_0}}{n-1} + D_{n-2} \frac{P_{n-2}^{\psi_0}}{n-2} \right\rangle_{\psi_0} \\
&= \frac{D_{n-1}}{(n-1)^2} \langle P_{n-1}^{\psi_0}, P_{n-1}^{\psi_0} \rangle_{\psi_0} = \frac{D_{n-1}}{(n-1)^2 (\kappa_{n-1}^{\psi_0})^2}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Substituindo (3.12), (3.13), (3.14) em (3.10), obtemos

$$d_n = \frac{\frac{D_n}{n^2 (\kappa_n^{\psi_0})^2}}{\frac{1}{n^2 (\kappa_n^{\psi_0})^2} + \frac{D_{n-1}^2}{(n-1)^2 (\kappa_{n-1}^{\psi_0})^2} + \lambda \frac{1}{(\kappa_{n-1}^{\psi_1})^2} - d_{n-1} \frac{D_{n-1}}{(n-1)^2 (\kappa_{n-1}^{\psi_0})^2}},$$

de onde segue o resultado do teorema. ■

3.2 O caso Jacobi do tipo I

Lembremos que, neste caso, as medidas envolvidas são $d\psi_0 = w_0(x)dx = (x - \xi)(1 - x)^{\alpha-1}(1+x)^{\beta-1}dx$ e $d\psi_1 = w_1(x)dx = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$. Consideremos $\mu(x) = w_0(x)/(x - \xi)$.

Assim, $P_n^{\psi_1}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é o polinômio mônico de Jacobi de grau n , com $\alpha, \beta > -1$. O próximo resultado estabelece uma relação entre $P_n^{\psi_0}(x)$ e $P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)$.

Proposição 3.1. *Sejam $n \geq 0$ e $\alpha, \beta > 0$. Então,*

$$(x - \xi)P_n^{\psi_0}(x) = P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x) - \frac{P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(\xi)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(\xi)} P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x).$$

Demonstração: Como $(x - \xi)P_n^{\psi_0}(x)$ é um polinômio de grau $n + 1$, podemos escrevê-lo da forma

$$(x - \xi)P_n^{\psi_0}(x) = P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x) + \sum_{k=0}^n \delta_k P_k^{(\alpha-1, \beta-1)}(x). \tag{3.15}$$

Se definirmos

$$\langle f, g \rangle_\mu = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\mu(x)dx,$$

então,

$$\delta_i = \frac{\left\langle (x - \xi)P_n^{\psi_0}, P_i^{(\alpha-1, \beta-1)} \right\rangle_\mu}{\left\langle P_i^{(\alpha-1, \beta-1)}, P_i^{(\alpha-1, \beta-1)} \right\rangle_\mu} = \frac{\left\langle P_n^{\psi_0}, P_i^{(\alpha-1, \beta-1)} \right\rangle_{\psi_0}}{\left\langle P_i^{(\alpha-1, \beta-1)}, P_i^{(\alpha-1, \beta-1)} \right\rangle_\mu} = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

pela Propriedade 2.6. Assim, podemos escrever a equação (3.15) como

$$(x - \xi)P_n^{\psi_0}(x) = P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x) + \delta_n P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x).$$

Fazendo $x = \xi$, na equação acima, obtemos

$$\delta_n = -\frac{P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(\xi)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(\xi)}.$$

■

O próximo resultado nos mostra o comportamento assintótico da razão entre $P_n^{\psi_0}(x)$ e $P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)$ em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Teorema 3.3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_0}(x)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} = \frac{1}{2} \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{x - \xi},$$

localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, onde $\varphi(x)$ é a função definida no Teorema 2.5.

Demonstração: Da Proposição 3.1, temos que

$$\frac{(x - \xi)P_n^{\psi_0}(x)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} = \frac{P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} - \frac{P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(\xi)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(\xi)}.$$

Portanto, do Teorema 2.5,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x - \xi)P_n^{\psi_0}(x)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(\xi)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(\xi)} \\ &= \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{2}, \end{aligned}$$

demonstrando assim o teorema. ■

Agora, podemos obter o comportamento da razão entre $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ e $P_n^{\psi_0}(x)$ em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Teorema 3.4. Para os polinômios $P_n^{\psi_0}(x)$ e $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, o seguinte resultado é verdadeiro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{\psi_0}(x)} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} \frac{x - \xi}{\varphi(x) - \varphi(\xi)},$$

localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Demonstração: Usando os Teoremas 3.3 e 2.6, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{\psi_0}(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} \frac{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)}{P_n^{\psi_0}(x)} = \frac{(\varphi(x))/2}{\sqrt{x^2 - 1}} \frac{x - \xi}{(\varphi(x) - \varphi(\xi))/2} \\ &= \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} \frac{x - \xi}{\varphi(x) - \varphi(\xi)}. \end{aligned}$$

■

O resultado a seguir será importante para a obtermos o limite da seqüência dos coeficientes D_n .

Lema 3.1. *Sejam $\psi \in M(0,1)$ e $\varphi_n(x)$ o polinômio ortogonal mônico de grau n com respeito a $d\psi$. Para qualquer seqüência de polinômios $\{u_n\}$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x)/\Phi_n(x)$ existe localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u'_n(x)}{\Phi'_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(x)}{\Phi_n(x)},$$

localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

Demonstração: Desde que

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u_n(x)}{\Phi_n(x)} \right) = \frac{u'_n(x)\Phi_n(x) - u_n(x)\Phi'_n(x)}{\Phi_n^2(x)},$$

multiplicando ambos os membros por $\Phi_n(x)/\Phi'_n(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_n(x)}{\Phi'_n(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{u_n(x)}{\Phi_n(x)} \right) &= \frac{u'_n(x)\Phi_n(x) - u_n(x)\Phi'_n(x)}{\Phi_n(x)\Phi'_n(x)} \\ &= \frac{u'_n(x)}{\Phi'_n(x)} - \frac{u_n(x)}{\Phi_n(x)}. \end{aligned}$$

Do Teorema 2.5,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_n(x)}{\Phi'_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\Phi_n(x)}{\Phi'_n(x)} \frac{1}{n} = 0.$$

Portanto, pelo Teorema 2.1, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u'_n(x)}{\Phi'_n(x)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(x)}{\Phi_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_n(x)}{\Phi'_n(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{u_n(x)}{\Phi_n(x)} \right) = 0.$$

■

Mostraremos, agora, que o limite de D_n existe.

Teorema 3.5. *Para o caso Jacobi do tipo I, os coeficientes D_n satisfazem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = -\frac{1}{2\varphi(\xi)}.$$

Demonstração: Primeiro, note que $d\psi_0 \in M(0,1)$ e, do Teorema 2.5, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{n+1}{}^{\psi_0}(x)}{P'_n{}^{\psi_0}(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P'_{n+1}{}^{\psi_0}(x)}{(n+1)P_n{}^{\psi_0}(x)} \frac{(n+1)P_{n+1}{}^{\psi_0}(x)}{nP_n{}^{\psi_0}(x)} \frac{nP_n{}^{\psi_0}(x)}{P'_n{}^{\psi_0}(x)} = \frac{\varphi(x)}{2}, \quad (3.16)$$

localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

Dos Teoremas 3.3, 2.6 e 2.5 e do Lema 3.1 ,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{\psi_0}(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} \frac{n P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)}{\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)} \frac{\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)}{P_n^{\psi_0}(x)} \\
&= \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x^2-1}} \sqrt{x^2-1} \frac{2(x-\xi)}{\varphi(x) - \varphi(\xi)} \\
&= \frac{\varphi(x)(x-\xi)}{\varphi(x) - \varphi(\xi)}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Logo, das equações (3.2), (3.16) e (3.17), obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} D_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{\psi_0}(x)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}^{\psi_0}(x)}{P_n^{\psi_0}(x)} \frac{n}{n+1} = \frac{\varphi(x)(x-\xi)}{\varphi(x) - \varphi(\xi)} - \frac{\varphi(x)}{2} \\
&= \left(\frac{(x-\xi)}{\varphi(x) - \varphi(\xi)} - \frac{1}{2} \right) \varphi(x) = \left(\frac{2(x-\xi) - \varphi(x) + \varphi(\xi)}{2(\varphi(x) - \varphi(\xi))} \right) \varphi(x) \\
&= \left(\frac{2(x-\xi) - (x + \sqrt{x^2-1}) + \xi + \sqrt{\xi^2-1}}{2(\varphi(x) - \varphi(\xi))} \right) \varphi(x) \\
&= \left(\frac{x - \sqrt{x^2-1} - (\xi - \sqrt{\xi^2-1})}{2(\varphi(x) - \varphi(\xi))} \right) \varphi(x) \\
&= \left[\frac{\varphi(\xi) - \varphi(x)}{2\varphi(\xi)\varphi(x)(\varphi(x) - \varphi(\xi))} \right] \varphi(x) = -\frac{1}{2\varphi(\xi)}.
\end{aligned}$$

■

Para demonstrar o comportamento limite dos coeficientes d_n definidos no Teorema 3.2, precisaremos do lema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em Nevai [41].

Lema 3.2. *Sejam $\kappa_n^{(\alpha-1, \beta-1)}$ e $\kappa_n^{\psi_0}$ os coeficientes dos termos de maior grau de $p_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)$ e $p_n^{\psi_0}(x)$, respectivamente. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa_n^{(\alpha-1, \beta-1)}}{\kappa_n^{\psi_0}} = A,$$

$$\text{onde } A = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\log(t-\xi)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right\}.$$

Teorema 3.6. *Sejam d_n , $n \geq 1$, definidos como no Teorema 3.2. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 d_n = -\frac{8A^2}{\lambda\varphi(\xi)}.$$

Demonstração: Da definição de ρ_n^S e da Propriedade 2.8,

$$\rho_n^{\psi_0} \leq \langle S_n, S_n \rangle_{\psi_0} \leq \rho_n^S.$$

Assim, do Teorema 3.1, temos que

$$|d_n| = \left| \frac{\rho_n^{\psi_0}}{\rho_n^S} D_n \right| \leq |D_n|.$$

Do Teorema 2.5 e dos Lemas 3.2 e 2.2, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa_n^{\psi_0}}{\kappa_{n-1}^{(\alpha, \beta)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa_n^{\psi_0}}{\kappa_n^{(\alpha-1, \beta-1)}} \frac{\kappa_n^{(\alpha-1, \beta-1)}}{\kappa_{n-1}^{(\alpha-1, \beta-1)}} \frac{\kappa_{n-1}^{(\alpha-1, \beta-1)}}{\kappa_{n-1}^{(\alpha, \beta)}} = \frac{1}{4A}. \quad (3.18)$$

Assim, dos Teoremas 3.2 e 3.5 e 2.5 e da equação (3.18),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 d_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{\frac{1}{n^2} + \frac{D_{n-1}^2 [\kappa_n^{\psi_0}]^2}{(n-1)^2 [\kappa_{n-1}^{\psi_0}]^2} + \frac{\lambda [\kappa_n^{\psi_0}]^2}{[\kappa_{n-1}^{(\alpha, \beta)}]^2} - d_{n-1} \frac{D_{n-1} [\kappa_n^{\psi_0}]^2}{(n-1)^2 [\kappa_{n-1}^{\psi_0}]^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{\frac{\lambda [\kappa_n^{\psi_0}]^2}{[\kappa_{n-1}^{(\alpha, \beta)}]^2}} = -\frac{8A^2}{\lambda \varphi(\xi)}. \end{aligned}$$

■

Nosso objetivo, agora, é obter propriedades envolvendo os polinômios $S_n(x)$. Para isso, consideremos o operador linear definido por:

$$Ff(x) = \frac{x - \xi}{w_0(x)} \{f(x)w_0(x) - \lambda f'(x)w_1'(x) - \lambda [f(x)]'' w_1(x)\}.$$

Considere o produto interno entre os polinômios ortonormais

$$\begin{aligned} \langle p_n^{\psi_0}, p_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_S &= \int_{-1}^1 p_n^{\psi_0}(x) p_n^{(\alpha, \beta)}(x) (x - \xi) (1 - x)^{\alpha-1} (1 + x)^{\beta-1} dx \\ &\quad + \lambda \int_{-1}^1 p_n^{\psi_0}(x) p_n'^{(\alpha, \beta)}(x) (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes a segunda integral, obtemos

$$\begin{aligned} \langle p_n^{\psi_0}, p_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_S &= \int_{-1}^1 p_n^{\psi_0}(x) p_n^{(\alpha, \beta)}(x) (x - \xi) (1 - x)^{\alpha-1} (1 + x)^{\beta-1} dx \\ &\quad - \lambda \int_{-1}^1 p_n^{(\alpha, \beta)}(x) \{ [p_n^{\psi_0}(x)]'' w_1(x) + p_n^{\psi_0}(x) [-\alpha(1 - x)^{\alpha-1} (1 + x)^\beta \\ &\quad + \beta(1 - x)^\alpha (1 + x)^{\beta-1}] \} dx \\ &= \int_{-1}^1 p_n^{(\alpha, \beta)}(x) \{ p_n^{\psi_0}(x) w_0(x) - \lambda p_n'^{\psi_0}(x) w_1'(x) \\ &\quad - \lambda [p_n^{\psi_0}(x)]'' w_1(x) \} dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Então, de (3.19),

$$\langle p_n^{\psi_0}, p_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_S = \int_{-1}^1 p_n^{\psi_1}(x) F p_n^{\psi_0} \mu(x) dx = \langle F p_n^{\psi_0}, p_n^{\psi_1} \rangle_\mu. \quad (3.20)$$

Para a investigação do operador F é conveniente fazer a mudança de variáveis $x - \xi = t$. Então,

$$\begin{aligned} Fp_n^{\psi_0}(x) &= \frac{x - \xi}{(x - \xi)(1 - x)^{\alpha-1}(1 + x)^{\beta-1}} \{ p_n^{\psi_0}(x)(x - \xi)(1 - x)^{\alpha-1}(1 + x)^{\beta-1} \\ &\quad - \alpha p_n^{\prime\psi_0}(x)[- \alpha(1 - x)^{\alpha-1}(1 + x)^{\beta} + \beta(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta-1}] \\ &\quad - \lambda[p_n^{\psi_0}(x)]''(1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta} \} \\ &= p_n^{\psi_0}(x)t + \lambda p_n^{\prime\psi_0}(x)[\alpha(t + \xi + 1) + \beta(t + \xi + 1)] + \lambda[p_n^{\psi_0}(x)]''[-1 + (t^2 + 2t\xi + \xi^2)]. \end{aligned}$$

Assim,

$$Fp_n^{\psi_0}(x) = xp_n^{\psi_0}(x) + \lambda[x(\alpha + \beta) + \xi(\alpha + \beta) - \beta + \alpha] + \lambda(x^2 + 2x\xi + \xi^2 - 1)p_n^{\prime\psi_0}(x).$$

Lema 3.3. *O operador diferencial F pode ser dado em termos do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$, ou seja,*

$$\langle Fp_n^{\psi_0}, p_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_S = \langle p_n^{\psi_0}, Fp_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_S$$

para os polinômios $p_n^{\psi_0}(x)$ e $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Demonstração: De (3.20), temos que

$$\langle p_n^{(\alpha, \beta)}, Fp_n^{\psi_0} \rangle_S = \langle Fp_n^{\psi_0}, Fp_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_{\mu}.$$

Logo,

$$\langle Fp_n^{\psi_0}, p_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_S = \langle p_n^{(\alpha, \beta)}, Fp_n^{\psi_0} \rangle_S = \langle Fp_n^{\psi_0}, Fp_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_{\mu} = \langle p_n^{\psi_0}, Fp_n^{(\alpha, \beta)} \rangle_S.$$

■

Teorema 3.7. *Para o operador F , temos*

$$FS_n(x) = P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x) + b_n P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x),$$

$$\text{onde } b_n = \frac{\langle S_n, S_n \rangle_S}{\left\langle P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}, P_n^{(\alpha-1, \beta-1)} \right\rangle_{\mu}} = \frac{\rho_n^S}{\rho_n^{(\alpha-1, \beta-1)}}.$$

Demonstração: Como $\{P_k^{(\alpha-1, \beta-1)}\}_{k=0}^{n+1}$ forma uma base para $\mathbb{P}_{n+1}$, podemos escrever

$$FS_n(x) = P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x) + \sum_{j=0}^n b_j P_j^{(\alpha-1, \beta-1)}(x). \quad (3.21)$$

Fazendo o produto interno de $FS_n(x)$ com $P_i^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)$, a demonstração segue, agora, de maneira análoga à da Proposição 3.1. ■

Veremos, a seguir, uma relação entre os polinômios $P_n^{(\alpha-1, \beta-1)}(x)$ e os polinômios ortogonais em relação a $d\psi_0$.

Teorema 3.8. *Temos que*

$$P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + c_n P_n^{\psi_0}(x),$$

$$\text{onde } c_n = \frac{\rho_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}}{\rho_n^{\psi_0}}.$$

Demonstração: Escrevendo

$$P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \sum_{j=0}^n c_j P_j^{\psi_0}(x),$$

com

$$c_j = \frac{\langle P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}, P_j^{\psi_0} \rangle}{\rho_n^{\psi_0}}, \quad j = 0, \dots, n,$$

a demonstração segue de maneira análoga à da Proposição 3.1. ■

Podemos, agora, demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.9. *Para os polinômios $S_n(x)$, temos que*

$$FS_n(x) = S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) + \tilde{a}_{n-1} S_{n-1}(x)$$

onde $\tilde{a}_{n-1} = \frac{\rho_n^S}{\rho_{n-1}^S}$ e $a_n = \frac{n+1}{n} d_n - \frac{n+1}{n} D_n + b_n + c_n$, com b_n e c_n definidos nos Teoremas 3.7 e 3.8, respectivamente.

Demonstração: Podemos escrever

$$FS_n(x) = S_{n+1}(x) + \sum_{j=0}^n \gamma_j S_j(x).$$

Do Lema 3.3,

$$\gamma_i = \frac{\langle FS_n, S_i \rangle_S}{\rho_i^S} = \frac{\langle S_n, FS_i \rangle_S}{\rho_i^S} = 0 \text{ para } i = 0, \dots, n-2.$$

Para $i = n-1$, temos que

$$\gamma_{n-1} = \frac{\langle S_n, FS_{n-1} \rangle_S}{\rho_{n-1}^S} = \frac{\rho_n^S}{\rho_{n-1}^S}.$$

Usando os Teoremas 3.7, 3.8 e 3.1, obtemos

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{\langle S_n, FS_n \rangle_S}{\rho_n^S} = \frac{\langle S_n, P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)} \rangle_S}{\rho_n^S} + b_n \frac{\langle S_n, P_n^{(\alpha-1, \beta-1)} \rangle_S}{\rho_n^S} \\
&= \frac{\langle S_n, P_{n+1}^{\psi_0} + c_n P_n^{\psi_0} \rangle_S}{\rho_n^S} + b_n \frac{\langle S_n, P_n^{(\alpha-1, \beta-1)} \rangle_S}{\rho_n^S} \\
&= \frac{\langle S_n, P_{n+1}^{\psi_0} \rangle_S}{\rho_n^S} + c_n \frac{\langle S_n, P_n^{\psi_0} \rangle_S}{\rho_n^S} + b_n \frac{\rho_n^S}{\rho_n^S} \\
&= \frac{\langle S_n, S_{n+1} + d_n \frac{n+1}{n} S_n - D_n \frac{n+1}{n} P_n^{\psi_0} \rangle_S}{\rho_n^S} + c_n \frac{\rho_n^S}{\rho_n^S} + b_n \\
&= \frac{\langle S_n, S_{n+1} \rangle_S}{\rho_n^S} + \frac{n+1}{n} d_n \frac{\rho_n^S}{\rho_n^S} - \frac{n+1}{n} D_n \frac{\langle S_n, P_n^{\psi_0} \rangle_S}{\rho_n^S} + b_n + c_n \\
&= \frac{n+1}{n} d_n - \frac{n+1}{n} D_n + b_n + c_n.
\end{aligned}$$

Fazendo, agora, $\tilde{a}_{n-1} = \gamma_{n-1}$ e $a_n = \gamma_n$, concluímos a demonstração do teorema. $\blacksquare$

3.3 O caso Jacobi do tipo II

Lembremos, agora, que as medidas envolvidas são $d\psi_0 = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $d\psi_1 = \frac{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}}{x-\xi} dx + M\delta(\xi)$, $\xi < -1$, e consideremos $v(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$. Logo, $P_n^{\psi_0}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é o polinômio ortogonal de Jacobi mônico. A demonstração do lema a seguir pode ser encontrada em Alfaro *et al.*[3].

Lema 3.4. *Sejam $d\Psi(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}/(x-\xi)dx$ e $p_n^\Psi(x) = \kappa_n^\Psi x^n + \dots$ o polinômio ortonormal de grau n com respeito a $d\Psi(x)$ com $\kappa_n^\Psi > 0$. Então,*

$$P_n^{\psi_1}(x) = P_n^\Psi(x) - \frac{K_{n-1}(x, \xi)}{1 + MK_{n-1}(\xi, \xi)} MP_n^\Psi(\xi), \quad (3.22)$$

onde

$$P_n^\Psi(x) = \frac{p_n^\Psi(x)}{\kappa_n^\Psi}$$

e

$$K_{n-1}(x, y) = (\kappa_{n-1}^\Psi)^2 \frac{P_n^\Psi(x)P_{n-1}^\Psi(y) - P_n^\Psi(y)P_{n-1}^\Psi(x)}{x - y}.$$

Somando e subtraindo $P_n^\Psi(x)P_{n-1}^\Psi(x)$ ao numerados da fração acima, obtemos

$$K_{n-1}(x, y) = (\kappa_{n-1}^\Psi)^2 \frac{P_{n-1}^\Psi(x) (P_n^\Psi(x) - P_n^\Psi(y)) - P_n^\Psi(x) (P_{n-1}^\Psi(x) - P_{n-1}^\Psi(y))}{x - y}.$$

Aplicando o limite em ambos os membros para $y \rightarrow x$, temos

$$K_{n-1}(x, x) = (\kappa_{n-1}^\Psi)^2 \left[P_{n-1}^\Psi(x) P_n^{\Psi'}(x) - P_n^\Psi(x) P_{n-1}^{\Psi'}(x) \right].$$

O próximo lema nos mostra o comportamento assintótico entre $K_{n-1}(x, y)$ e $p_n^\Psi(x)$.

Lema 3.5. *Localmente uniformemente em $x \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ e $y \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$,*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}(x, y)}{p_n^\Psi(x) p_n^\Psi(y)} &= \frac{1}{2\varphi(x)\varphi(y)} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{(x - y)}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p_n^\Psi(x))^2}{K_{n-1}(x, x)} &= \varphi^2(x) - 1. \end{aligned}$$

Demonstração: Da definição de $K_{n-1}(x, y)$ e lembrando que $\Psi(x) \in M(0, 1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{K_{n-1}(x, y)}{p_n^\Psi(x) p_n^\Psi(y)} &= \frac{(\kappa_{n-1}^\Psi)^2 P_n^\Psi(x) P_{n-1}^\Psi(y) - P_n^\Psi(y) P_{n-1}^\Psi(x)}{x - y} \frac{1}{p_n^\Psi(x) p_n^\Psi(y)} \\ &= (\kappa_{n-1}^\Psi)^2 \frac{\frac{p_n^\Psi(x) p_{n-1}^\Psi(y)}{\kappa_n^\Psi \kappa_{n-1}^\Psi} - \frac{p_n^\Psi(y) p_{n-1}^\Psi(x)}{\kappa_n^\Psi \kappa_{n-1}^\Psi}}{x - y} \frac{1}{p_n^\Psi(x) p_n^\Psi(y)} \\ &= \frac{\kappa_{n-1}^\Psi}{\kappa_n^\Psi} \frac{1}{(x - y)} \left(\frac{p_{n-1}^\Psi(y)}{p_n^\Psi(y)} - \frac{p_{n-1}^\Psi(x)}{p_n^\Psi(x)} \right) \\ &= \left(\frac{\kappa_{n-1}^\Psi}{\kappa_n^\Psi} \right)^2 \frac{1}{(x - y)} \left(\frac{P_{n-1}^\Psi(y)}{P_n^\Psi(y)} - \frac{P_{n-1}^\Psi(x)}{P_n^\Psi(x)} \right). \end{aligned}$$

Portanto, do Teorema 2.5,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n-1}(x, y)}{p_n^\Psi(x) p_n^\Psi(y)} &= \frac{1}{(x - y)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\kappa_{n-1}^\Psi}{\kappa_n^\Psi} \right)^2 \left(\frac{P_{n-1}^\Psi(y)}{P_n^\Psi(y)} - \frac{P_{n-1}^\Psi(x)}{P_n^\Psi(x)} \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(x - y)} \left(\frac{2}{\varphi(y)} - \frac{2}{\varphi(x)} \right) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{2(x - y)\varphi(y)\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Agora, do limite acima, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow y} \frac{(p_n^\Psi(x))^2}{K_{n-1}(x, x)} \right) = \frac{2\varphi^2(x)}{\varphi'(x)}. \quad (3.23)$$

Mas,

$$\varphi^2(x) - 1 = 2x^2 - 2 + 2x\sqrt{x^2 - 1} = 2\sqrt{x^2 - 1} \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] = 2\sqrt{x^2 - 1} \varphi(x).$$

Logo,

$$\frac{\varphi^2(x) - 1}{2\varphi^2(x)} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\varphi(x)} = \frac{1}{\varphi'(x)}.$$

Substituindo o lado esquerdo da expressão acima em (3.23), concluímos a demonstração do lema. ■

No próximo resultado, obtemos o comportamento limite da razão entre $P_n^{\psi_1}(x)$ e $P_n^\Psi(x)$.

Teorema 3.10.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{P_n^\Psi(x)} = 1 - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\varphi(x)} \frac{[\varphi(x) - \varphi(\xi)]}{x - \xi},$$

localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Demonstração: É fácil ver que $\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n^\Psi(\xi))^2 = \infty$, pois $\xi < -1$. De (3.22), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{P_n^\Psi(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{K_{n-1}(x, \xi)}{1 + MK_{n-1}(\xi, \xi)} \frac{M \frac{p_n^\Psi(\xi)}{\kappa_n^\Psi}}{\frac{p_n^\Psi(x)}{\kappa_n^\Psi}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{K_{n-1}(x, \xi)}{1 + MK_{n-1}(\xi, \xi)} \frac{Mp_n^\Psi(\xi)}{p_n^\Psi(x)} \frac{p_n^\Psi(\xi)}{p_n^\Psi(\xi)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{K_{n-1}(x, \xi)}{p_n^\Psi(x)p_n^\Psi(\xi)} \frac{Mp_n^{\Psi^2}(\xi)}{1 + MK_{n-1}(\xi, \xi)} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{K_{n-1}(x, \xi)}{p_n^\Psi(x)p_n^\Psi(\xi)} \frac{M}{\frac{1}{(p_n^\Psi(\xi))^2} + \frac{MK_{n-1}(\xi, \xi)}{(p_n^\Psi(\xi))^2}} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, do Lema 3.5,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{P_n^\Psi(x)} = 1 - \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{2\varphi(x)\varphi(\xi)(x - \xi)} [\varphi^2(\xi) - 1].$$

Como $\varphi^2(x) - 1 = 2\sqrt{x^2 - 1} \varphi(x)$, obtemos o resultado desejado. $\blacksquare$

Os dois próximos resultados serão importantes para a demonstração do comportamento assintótico da razão entre $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ e $P_n^{\psi_1}(x)$.

Teorema 3.11. Para os polinômios $P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)$ e $P_n^\Psi(x)$, temos o seguinte resultado:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)}{P_n^\Psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{2(x - \xi)},$$

localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Demonstração: Como $(x - \xi)P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)$ é um polinômio de grau $n + 1$, podemos escrevê-lo da forma

$$(x - \xi)P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) = P_{n+1}^\Psi(x) + \sum_{k=0}^n b_{k, n+1} P_k^\Psi(x).$$

Logo, para $i = 0, \dots, n - 1$, obtemos

$$b_{i, n+1} = \frac{\langle (x - \xi)P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}, P_i^\Psi \rangle_\Psi}{\langle P_i^\Psi, P_i^\Psi \rangle_\Psi} = \frac{\langle P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}, P_i^\Psi \rangle_v}{\langle P_i^\Psi, P_i^\Psi \rangle_\Psi} = 0,$$

pela Propriedade 2.6. Assim,

$$(x - \xi)P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(x) = P_{n+1}^\Psi(x) + b_{n,n+1}P_n^\Psi(x).$$

Fazendo $x = \xi$, na equação acima, obtemos

$$b_{n,n+1} = -\frac{P_{n+1}^\Psi(\xi)}{P_n^\Psi(\xi)}.$$

Logo, do Teorema 2.5, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x - \xi)P_n^{\alpha+1, \beta+1}(x)}{P_n^\Psi(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}^\Psi(x)}{P_n^\Psi(x)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n+1}^\Psi(\xi)}{P_n^\Psi(\xi)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{2}.$$

■

Teorema 3.12. Para $P_n^\Psi(x)$ e $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^\Psi(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} = \frac{(x - \xi)}{\varphi(x) - \varphi(\xi)} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Demonstração: Do Teorema 2.6,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} = \frac{\varphi(x)}{2\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Usando este fato e o Teorema 3.11, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^\Psi(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^\Psi(x)}{P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)} \frac{P_n^{(\alpha+1, \beta+1)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} = \frac{x - \xi}{\varphi(x) - \varphi(\xi)} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

concluindo, assim, a demonstração do teorema. ■

Para o caso Jacobi tipo II, temos o seguinte resultado para a razão entre os polinômios $P_n^{\psi_1}(x)$ e $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Teorema 3.13.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} = \frac{(x - \xi)}{\varphi(x) - \varphi(\xi)} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

localmente uniformemente em $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Demonstração: Usando os Teoremas 3.10 e 3.12,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{P_n^\Psi(x)} \frac{P_n^\Psi(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1} [\varphi(x) - \varphi(\xi)]}{\varphi(x) (x - \xi)} \right) \frac{(x - \xi)}{\varphi(x) - \varphi(\xi)} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{x - \xi}{\varphi(x) - \varphi(\xi)} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}. \end{aligned}$$

■

Estamos, agora, em condições de demonstrar o comportamento dos coeficientes D_n para o caso Jacobi do tipo II, quando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 3.14. *Para o caso Jacobi do tipo II, os coeficientes D_n em (3.2) satisfazem*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = -\frac{\varphi(\xi)}{2}.$$

Demonstração: Como, de (3.2),

$$D_n = \frac{n P_n^{\psi_1}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} - \frac{n}{n+1} \frac{P_{n+1}'^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)},$$

usando os Teoremas 2.5 e 3.13 e o Lema 3.1, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} D_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n P_n^{\psi_1}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} - \frac{n}{n+1} \frac{P_{n+1}'^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)} \right) \\ &= \sqrt{x^2 - 1} \left(\frac{(x - \xi)}{[\varphi(x) - \varphi(\xi)]} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) - \frac{\varphi(x)}{2} \\ &= \frac{(x - \xi)\varphi(x)}{\varphi(x) - \varphi(\xi)} - \frac{\varphi(x)}{2} - \sqrt{\xi^2 - 1}. \end{aligned}$$

Da demonstração do Teorema 3.5, note que

$$\frac{\varphi(x)(x - \xi)}{\varphi(x) - \varphi(\xi)} - \frac{\varphi(x)}{2} = -\frac{1}{2\varphi(\xi)},$$

e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = -\frac{1}{2\varphi(\xi)} - \sqrt{\xi^2 - 1} = -\frac{\varphi^2(\xi)}{2\varphi(\xi)} = -\frac{\varphi(\xi)}{2}.$$

■

Capítulo 4

Polinômios ortogonais de Sobolev - Laguerre: propriedades assintóticas

Neste capítulo, apresentaremos os resultados de Meijer [39] e Alfaro *et al.* [2] sobre as propriedades assintóticas dos polinômios ortogonais que envolvem as medidas relacionadas aos polinômios de Sobolev-Laguerre. Seja $\{S_n\}_n$ a sequência de polinômios ortogonais com respeito ao produto interno de Sobolev

$$\langle f, g \rangle_S = \int_0^\infty f(x)g(x)d\psi_0(x) + \lambda \int_0^\infty f'(x)g'(x)d\psi_1(x), \quad \lambda > 0. \quad (4.1)$$

4.1 O caso Laguerre do tipo I

Considere o par coerente de medidas $\{d\psi_0, d\psi_1\}$, onde $d\psi_1 = x^\alpha e^{-x}dx$, $\alpha > -1$, é a medida de Laguerre definida em $[0, \infty)$. Para $d\psi_0$ (veja Meijer [38]), temos três situações diferentes:

- (a) Se $\alpha > 0$, então $d\psi_0(x) = (x - \xi)x^{\alpha-1}e^{-x}$, com $\xi \leq 0$;
- (b) Se $\alpha = 0$, então $d\psi_0(x) = e^{-x}dx + M\delta(0)$, com $M \geq 0$;
- (c) Se $-1 < \alpha < 0$, então $d\psi_0(x) = x^\alpha e^{-x}dx$,

que, como já vimos, podem ser representadas de uma única forma por

$$d\psi_0 = (x - \xi)x^{\alpha-1}e^{-x}dx + M\delta(0),$$

com $\xi = 0$ se $-1 < \alpha \leq 0$ e $M = 0$ se $\alpha \neq 0$.

Sejam $\{P_n^{\psi_0}\}_n$ a sequência de polinômios ortogonais com respeito a $d\psi_0$ e $\{L_n^{(\alpha)}\}_n$ a sequência de polinômios ortogonais de Laguerre com respeito a $d\psi_1$. Além disso, vamos considerar que os polinômios ortogonais $S_n(x)$ e $L_n^{(\alpha)}(x)$ têm os coeficientes dos termos de maior grau iguais. Então, em particular, $S_0(x) = L_0^{(\alpha)}(x)$.

O primeiro lema deste capítulo mostra uma relação de recorrência entre os polinômios $S_n(x)$ e os polinômios de Laguerre.

Proposição 4.1. *Existem constantes positivas a_n tais que*

$$L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = S_n(x) - a_{n-1}S_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (4.2)$$

Demonstração: Para $n \geq 1$, podemos escrever

$$L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = S_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} b_j S_j(x).$$

Usando a equação (2.32) e a Propriedade 2.6, respectivamente, para $0 \leq i \leq n-1$ temos que

$$\begin{aligned} b_i \langle S_i, S_i \rangle_S &= \langle L_n^{(\alpha)} - L_{n-1}^{(\alpha)}, S_i \rangle_S \\ &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] S_i(x) d\psi_0(x) + \lambda \int_0^\infty \frac{d}{dx} [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] S_i'(x) d\psi_1 \\ &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] S_i(x) d\psi_0(x) - \lambda \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha)}(x) S_i'(x) d\psi_1(x) \\ &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] S_i(x) d\psi_0(x). \end{aligned} \quad (4.3)$$

• Se $\xi < 0$, $\alpha > 0$ e $M = 0$, de (2.30) e da Propriedade 2.6, obtemos

$$\begin{aligned} b_i \langle S_i, S_i \rangle_S &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] S_i(x) x^\alpha e^{-x} dx - \xi \int_0^\infty L_n^{(\alpha-1)}(x) S_i(x) x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\ &= - \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha)}(x) S_i(x) x^\alpha e^{-x} dx, \quad i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Mas, para $0 \leq i \leq n-2$, a integral anterior é nula. Assim, $b_i = 0$, $i = 0, \dots, n-2$, e

$$b_{n-1} \langle S_{n-1}, S_{n-1} \rangle_S = - \int_0^\infty [L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx. \quad (4.4)$$

• Se $\xi = 0$, $\alpha = 0$ e $M > 0$, podemos escrever (4.3) como

$$b_i \langle S_i, S_i \rangle_S = \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] S_i(x) e^{-x} dx + M[L_n^{(\alpha)}(0) - L_{n-1}^{(\alpha)}(0)] S_i(0).$$

De (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} b_i \langle S_i, S_i \rangle_S &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] S_i(x) x^{(\alpha)} e^{-x} dx + M \left[\binom{n}{n} - \binom{n-1}{n-1} \right] S_i(0) \\ &= - \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha)}(x) S_i(x) x^{(\alpha)} e^{-x} dx, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Como já vimos, para $0 \leq i \leq n-2$, a última integral é zero. Logo, obtemos novamente a equação (4.4).

• Se $\xi = 0$, $-1 < \alpha < 0$ e $M = 0$, da mesma forma que fizemos para os outros dois casos, chegamos à equação (4.4).

Portanto, tomando $a_{n-1} = -b_{n-1}$, obtemos

$$L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = S_n(x) - a_{n-1} S_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$\text{onde } a_{n-1} = \frac{\rho_{n-1}^{(\alpha)}}{\rho_{n-1}^S}.$$

■

Proposição 4.2. *A sequência $\{a_n\}_n$ em (4.2) satisfaz à relação de recorrência*

$$a_n = \frac{n + \alpha}{n(2 + \lambda) + \alpha - \xi - na_{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad (4.5)$$

$$\text{com } a_0 = \frac{\alpha}{\alpha - \xi} \text{ se } \alpha > 0, \quad a_0 = \frac{1}{M + 1} \text{ se } \alpha = 0 \text{ e } a_0 = 1 \text{ se } -1 < \alpha < 0.$$

Demonstração: Consideremos

$$R_0(x) = S_0(x) \text{ e } R_n(x) = S_n(x) - a_{n-1} S_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Assim, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \langle R_{n+1}, R_n \rangle_S + a_n \langle R_n, R_n \rangle_S &+ a_n a_{n-1} \langle R_n, R_{n-1} \rangle_S = -a_n \rho_n^S + a_n \rho_n^S \\ &+ a_n a_{n-1}^2 \rho_n^S - a_n a_{n-1}^2 \rho_n^S = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por outro lado, de (4.2), $R_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$. Aplicando o produto interno de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} \langle R_{n+1}, R_n \rangle_S &= \left\langle L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x), R_n \right\rangle_S \\ &= \int_0^\infty [L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)] R_n(x) d\psi_0(x) \\ &\quad + \lambda \int_0^\infty \frac{d}{dx} [L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)] R_n'(x) d\psi_1(x). \end{aligned}$$

Da equação (2.32),

$$\begin{aligned}\langle R_{n+1}, R_n \rangle_S &= \int_0^\infty [L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)] R_n(x) d\psi_0(x) - \lambda \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) R_n'(x) d\psi_1(x) \\ &= \int_0^\infty [L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)] R_n(x) d\psi_0(x).\end{aligned}$$

Procedendo de modo análogo à demonstração do lema anterior, chegamos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty [L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x)] R_n(x) d\psi_0(x) &= - \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx \\ &= - \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!},\end{aligned}$$

por (2.24). Assim,

$$\langle R_{n+1}, R_n \rangle_S = - \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}. \quad (4.7)$$

Resolveremos, agora, o produto interno $\langle R_n, R_n \rangle_S$.

$$\begin{aligned}\langle R_n, R_n \rangle_S &= \left\langle L_n^{(\alpha)} - L_{n-1}^{(\alpha)}, R_n \right\rangle_S = \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] R_n(x) d\psi_0(x) \\ &\quad + \lambda \int_0^\infty \frac{d}{dx} [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] R_n'(x) x^\alpha e^{-x} dx.\end{aligned}$$

Usando novamente a equação (2.32),

$$\langle R_n, R_n \rangle_S = \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] R_n(x) d\psi_0(x) - \lambda \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha)}(x) R_n'(x) x^\alpha e^{-x} dx.$$

• Se $\alpha > 0$, da equação (2.30) e lembrando que $R_n'(x) = \frac{d}{dx} [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] = -L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle R_n, R_n \rangle_S &= \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) R_n(x) x^\alpha e^{-x} dx - \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha)}(x) R_n(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &\quad - \xi \int_0^\infty L_n^{(\alpha-1)}(x) R_n(x) x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \lambda \int_0^\infty [L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) R_n(x) x^\alpha e^{-x} dx - \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha)}(x) R_n(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &\quad - \xi \int_0^\infty L_n^{(\alpha-1)}(x) [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \lambda \int_0^\infty [L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx + \int_0^\infty [L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx \\ &\quad - \xi \int_0^\infty [L_n^{(\alpha-1)}(x)]^2 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \lambda \int_0^\infty [L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx.\end{aligned}$$

Assim, de (2.24),

$$\langle R_n, R_n \rangle_S = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} + \frac{\Gamma(n + \alpha)}{(n-1)!} - \xi \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n!} + \lambda \frac{\Gamma(n + \alpha)}{(n-1)!}, \quad n \geq 1.$$

- Se $\alpha = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\langle R_n, R_n \rangle_S &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] R_n(x) x^\alpha e^{-x} dx + M[L_n^{(\alpha)}(0) - L_{n-1}^{(\alpha)}(0)] R_n(0) \\ &\quad - \lambda \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha)}(x) R_n'(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx - \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha)}(x) R_n(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &\quad + \lambda \int_0^\infty [L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx,\end{aligned}$$

de (2.21). Novamente de (2.24), obtemos

$$\langle R_n, R_n \rangle_S = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} + \frac{\Gamma(n + \alpha)}{(n + 1)!} + \lambda \frac{\Gamma(n + \alpha)}{(n + 1)!}.$$

- Se $-1 < \alpha < 0$,

$$\begin{aligned}\langle R_n, R_n \rangle_S &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx - \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha)}(x) R_n(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &\quad + \lambda \int_0^\infty [L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx \\ &= \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} + \frac{\Gamma(n + \alpha)}{(n + 1)!} + \lambda \frac{\Gamma(n + \alpha)}{(n + 1)!}.\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\langle R_n, R_n \rangle_S = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} + \frac{\Gamma(n + \alpha)}{(n - 1)!} - \xi \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n!} + \lambda \frac{\Gamma(n + \alpha)}{(n - 1)!}, \quad n \geq 1. \quad (4.8)$$

Substituindo (4.7) e (4.8) em (4.6) e usando a Propriedade 2.1, obtemos

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}}{\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} + \frac{\Gamma(n + \alpha)}{(n - 1)!} - \xi \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n!} + \lambda \frac{\Gamma(n + \alpha)}{(n - 1)!} - a_{n-1} \frac{\Gamma(n + \alpha)}{(n - 1)!}} \\ &= \frac{(n + \alpha) \Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(n + \alpha)[(n + \alpha) + n - \xi + \lambda n + n a_{n-1}]} = \frac{n + \alpha}{n(2 + \lambda) + \alpha - \xi - n a_{n-1}}, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Para obtermos a_0 , utilizamos (4.2) com $n = 1$. Então,

$$L_1^{(\alpha)}(x) - L_0^{(\alpha)}(x) = S_1(x) - a_0 S_0(x).$$

Assim, como $S_0(x) = L_0^{(\alpha)}(x)$ e $\langle S_1, 1 \rangle_S = 0$, obtemos

$$\left\langle L_1^{(\alpha)} - L_0^{(\alpha)}, 1 \right\rangle_S = \langle S_1 - a_0 S_0, 1 \rangle_S - a_0 \left\langle L_0^{(\alpha)}, 1 \right\rangle_{\psi_0},$$

ou seja,

$$a_0 = - \frac{\left\langle L_1^{(\alpha)} - L_0^{(\alpha)}, 1 \right\rangle_{\psi_0}}{\left\langle L_0^{(\alpha)}, 1 \right\rangle_{\psi_0}}.$$

Calculando os produtos internos acima, obtemos o valor de a_0 . ■

Daremos, agora, um resultado sobre o comportamento assintótico da sequência $\{a_n\}_n$ definida em (4.2).

Teorema 4.1. *A sequência $\{a_n\}_n$, dos coeficientes em (4.2) é convergente e*

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lambda + 2 - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}}{2} < 1.$$

Além disso, para todo $p < 1$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p(a_n - l) = 0. \quad (4.9)$$

Demonstração: Primeiro, observe que $0 < a_0 \leq 1$, pois, da proposição anterior, temos que

$$a_0 = \begin{cases} 1/(M+1) \leq 1, & \text{se } \alpha = 0, \\ \alpha/(\alpha - \xi) \leq 1, & \text{se } \alpha > 0, \\ 1, & \text{se } -1 < \alpha < 0. \end{cases}$$

Observe que, se $\alpha > 0$ e $\xi \leq 0$, temos $\alpha - \xi \geq \alpha$. Então,

$$0 < a_1 = \frac{\alpha + 1}{\lambda + 2 + \alpha - \xi - a_0} < 1,$$

pois $\lambda + 2 + \alpha - \xi - a_0 \geq \lambda + 2 + \alpha - \xi - 1 = \lambda + 1 + \alpha - \xi > \alpha + 1$. Suponha que, para $k = 1, \dots, n-1$,

$$0 < a_k < 1.$$

Assim, temos que

$$a_{k+1} = \frac{\alpha + k + 1}{(k+1)(\lambda+2) + \alpha - \xi - (k+1)a_k} < 1,$$

pois $(k+1)(\lambda+2) + \alpha - \xi - (k+1)a_k > (k+1)(\lambda+2) + \alpha - \xi - (k+1) = k+1 + \alpha + \lambda(k+1) - \xi > k+1 + \alpha$. Logo,

$$0 < a_n < 1, \quad n \geq 1.$$

Suponhamos, agora, que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. Então,

$$\begin{aligned} l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \alpha}{n(\lambda + 2) + \alpha - \xi - na_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\alpha}{n}}{(\lambda + 2) + \frac{\alpha - \xi}{n} - a_{n-1}} \\ &= \frac{1}{\lambda + 2 - l}, \end{aligned}$$

de onde concluímos que $l = \frac{\lambda + 2 - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}}{2} < 1$.

Usando (4.5) e o fato de que $l(2 + \lambda) = l^2 + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} a_n - l &= \frac{n + \alpha}{n(2 + \lambda) + \alpha - \xi - na_{n-1}} - l \\ &= \frac{n + \alpha - nl(\lambda + 2) - \alpha l + \xi l + nla_{n-1}}{n(2 + \lambda) + \alpha - \xi - na_{n-1}} = \frac{\alpha - l(\alpha - \xi) + nl(a_{n-1} - l)}{n(2 + \lambda) + \alpha - \xi - na_{n-1}}. \end{aligned}$$

Então, como $a_{n-1} < 1$,

$$\begin{aligned} |a_n - l| &< \frac{|\alpha - l(\alpha - \xi) + nl(a_{n-1} - l)|}{|n(2 + \lambda) + \alpha - \xi - n|} = \frac{|\alpha - l(\alpha - \xi) + nl(a_{n-1} - l)|}{|n(\lambda + 1) + \alpha - \xi|} \\ &\leq \frac{|\alpha - l(\alpha - \xi) + nl(a_{n-1} - l)|}{|n(\lambda + 1) + \alpha|} \leq \frac{|\alpha - l(\alpha - \xi)|}{n(\lambda + 1) + \alpha} + \frac{nl|a_{n-1} - l|}{n(\lambda + 1) + \alpha}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Considere $t_n = n^p |a_n - l|$, com $p < 1$. Então,

$$n^p |a_n - l| < \frac{n^p |\alpha - l(\alpha - \xi)|}{n(\lambda + 1) + \alpha} + \frac{nl|a_{n-1} - l|n^p}{n(\lambda + 1) + \alpha} \frac{(n-1)^p}{(n-1)^p},$$

ou, ainda,

$$t_n < \frac{n^p |\alpha - l(\alpha - \xi)|}{n(\lambda + 1) + \alpha} + \frac{n^{p+1}}{(n-1)^p [n(\lambda + 1) + \alpha]} lt_{n-1}.$$

Sejam $\epsilon > 0$ e $l < r < 1$. Então, existe N positivo tal que

$$t_n < \epsilon + rt_{n-1}, \quad n \geq N + 1.$$

Aplicando para $k \geq 1$, temos

$$t_{N+k} < \epsilon(1 + r + r^2 + \dots + r^{k-1}) + r^k t_N = \epsilon \frac{1 - r^k}{1 - r} + r^k t_N < \frac{\epsilon}{1 - r} + r^k t_N.$$

Isso implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0,$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

Observação 4.1. Se consideramos os dois casos especiais

$$(i) \quad d\psi_0(x) = (x - \xi)x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \text{ com } \alpha > 0, \xi > 0 \text{ e } \alpha = -\frac{l}{1-l}\xi,$$

$$(ii) \quad d\psi_0(x) = e^{-x}dx + M\delta(0), \text{ com } M \geq 0,$$

a relação (4.10) reduz-se a

$$\begin{aligned} |a_n - l| &\leq \frac{\left| -\frac{l}{1-l}\xi + \frac{l}{1-l}\xi \right|}{n(1+\lambda) - \frac{l}{1-l}\xi} + \frac{nl|a_{n-1} - l|}{n(1+\lambda) - \frac{l}{1-l}\xi} \\ &= \frac{nl|a_{n-1} - l|}{n(1+\lambda) - \frac{l}{1-l}\xi} \leq \frac{nl|a_{n-1} - l|}{n(1+\lambda)} = \frac{l}{1+\lambda}|a_{n-1} - l|. \end{aligned}$$

Assim,

$$|a_n - l| \leq \frac{l}{1+\lambda}|a_{n-1} - l| \leq \left(\frac{l}{1+\lambda} \right)^n |a_0 - l|.$$

Então, para todo valor de p , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p(a_n - l) = 0.$$

Teorema 4.2. *Seja*

$$S_n(x) = \frac{1}{1-l} L_n^{(\alpha-1)}(x) - \frac{l}{1-l} F_n(x).$$

Se $x \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n(x)}{L_n^{(\alpha-2)}(x)} = \frac{1}{1-l},$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Antes de demonstrarmos o Teorema 4.2, falaremos de dois casos especiais em que é possível obter uma completa expansão assintótica para $S_n(x)$.

Teorema 4.3. *Suponha que*

$$(i) \quad d\psi_1(x) = x^\alpha e^{-x} dx, \quad d\psi_0(x) = (x-\xi)x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \text{com } \alpha > 0, \xi < 0 \text{ e } \alpha = -\frac{l}{1-l}\xi, \text{ ou}$$

$$(ii) \quad d\psi_1(x) = e^{-x} dx, \quad d\psi_0(x) = e^{-x} dx + M\delta(0), \quad \text{com } M \geq 0.$$

O suporte das medidas é $[0, \infty)$ e $\{S_n\}_n$ é definido como no Teorema 4.2. Então, a completa expansão assintótica para S_n é dada por

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k l^k}{(1-l)^{k+1}} L_n^{(\alpha-k-1)}(x),$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Demonstração: A demonstração deste teorema é constituída de dois passos. No primeiro passo devemos demonstrar que $S_n(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} L_n^{(\alpha-i-1)}(x) + \frac{(-1)^{k+1} l^{k+1}}{(1-l)^{k+1}} Q_n(x)$, onde Q_n é um polinômio. E no segundo passo devemos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(x)}{L_n^{(\alpha-k-2)}(x)} = \frac{1}{1-l}$, uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Assim, podemos escrever

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} L_n^{(\alpha-i-1)}(x) + \frac{(-1)^{k+1} l^{k+1}}{(1-l)^{k+1}} L_n^{(\alpha-k-2)}(x) \frac{Q_n(x)}{L_n^{(\alpha-k-2)}(x)},$$

se $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} S_n(x) &\sim \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} L_n^{(\alpha-i-1)}(x) + \frac{(-1)^{k+1} l^{k+1}}{(1-l)^{k+2}} L_n^{(\alpha-k-2)}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} L_n^{(\alpha-i-1)}(x). \end{aligned}$$

1º passo: Da equação (2.30), obtemos

$$L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha-1)}(x) = \frac{1}{1-l} [L_n^{(\alpha-1)}(x) - l L_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)] - \frac{l}{1-l} [L_n^{(\alpha-1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)].$$

Definindo $f_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, podemos reescrever a equação acima como

$$f_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{1-l} [L_n^{(\alpha-1)}(x) - l L_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)] - \frac{l}{1-l} f_n^{(\alpha-1)}(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{1}{1-l} [L_n^{(\alpha-1)}(x) - l L_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)] - \frac{l}{(1-l)^2} [L_n^{(\alpha-2)}(x) - l L_{n-1}^{(\alpha-2)}(x)] \\ &\quad + \frac{l^2}{(1-l)^2} f_n^{(\alpha-2)}(x). \end{aligned}$$

Repetindo este processo k vezes, obtemos

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) &= \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} [L_n^{(\alpha-i-1)}(x) - l L_{n-1}^{(\alpha-i-1)}(x)] \\ &\quad + \frac{(-1)^{k+1} l^{k+1}}{(1-l)^{k+1}} [L_n^{(\alpha-k-1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha-k-1)}(x)]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como, de (4.2), $S_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) + a_{n-1}S_{n-1}(x)$, de (4.11) obtemos

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} L_n^{(\alpha-i-1)}(x) + \frac{(-1)^{k+1} l^{k+1}}{(1-l)^{k+1}} \left[\frac{(-1)^{k+1} (1-l)^{k+1}}{l^{k+1}} \right. \\ &\quad \times \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^{i+1} l^{i+1}}{(1-l)^{i+1}} L_{n-1}^{(\alpha-i-1)}(x) + L_n^{(\alpha-k-1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha-k-1)}(x) \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{k+1} (1-l)^{k+1}}{l^{k+1}} a_{n-1} S_{n-1}(x) \right] \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} L_n^{(\alpha-i-1)}(x) + \frac{(-1)^{k+1} l^{k+1}}{(1-l)^{k+1}} Q_n(x), \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde $Q_n(x)$ é o polinômio que aparece entre colchetes.

2º passo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n(x)}{L_n^{(\alpha-k-2)}(x)} = \frac{1}{1-l}, \quad (4.13)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Usando a equação (4.2) e escrevendo $a_n = l + r_n$, obtemos

$$L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = S_n(x) - l S_{n-1}(x) - r_{n-1} S_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.12), para n e $n-1$, em (4.14), temos

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) &= \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} [L_n^{(\alpha-i-1)}(x) - l L_{n-1}^{(\alpha-i-1)}(x)] \\ &\quad + \frac{(-1)^{k+1} l^{k+1}}{(1-l)^{k+1}} [Q_n(x) - l Q_{n-1}(x) - r_{n-1} Q_{n-1}(x)] \\ &\quad - r_{n-1} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} L_{n-1}^{(\alpha-i-1)}(x). \end{aligned} \quad (4.15)$$

De (4.11) e (4.15) obtemos, então,

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{k+1} l^{k+1}}{(1-l)^{k+1}} [L_n^{(\alpha-k-1)}(x) - l L_{n-1}^{(\alpha-k-1)}(x)] &= \frac{(-1)^{k+1} l^{k+1}}{(1-l)^{k+1}} [Q_n(x) - l Q_{n-1}(x) \\ &\quad - r_{n-1} Q_{n-1}(x)] - r_{n-1} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} L_{n-1}^{(\alpha-i-1)}(x). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros da equação anterior por $\frac{(1-l)^{k+1}}{(-1)^{k+1} l^{k+1}}$, temos que

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha-k-1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha-k-1)}(x) &= Q_n(x) - (l + r_{n-1}) Q_{n-1}(x) \\ &\quad + r_{n-1} (-1)^k \frac{(1-l)^{k+1}}{l^{k+1}} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} L_{n-1}^{(\alpha-i-1)}(x). \end{aligned}$$

Usando a equação (2.30) no lado esquerdo da expressão acima, chegamos em

$$L_n^{(\alpha-k-2)}(x) = Q_n(x) - (l + r_{n-1})Q_{n-1}(x) + r_{n-1}(-1)^k \frac{(1-l)^{k+1}}{l^{k+1}} \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^i}{(1-l)^{i+1}} L_{n-1}^{(\alpha-i-1)}(x).$$

Podemos escrever a relação acima como

$$A_n(x) = 1 + b_{n-1}(x)A_{n-1}(x) + \pi_{n-1}(x), \quad (4.16)$$

com

$$A_n(x) = \frac{Q_n(x)}{L_n^{(\alpha-k-2)}(x)}, \quad b_{n-1}(x) = (l + r_{n-1}(x)) \frac{L_{n-1}^{(\alpha-k-2)}(x)}{L_n^{(\alpha-k-2)}(x)}$$

e

$$\pi_{n-1}(x) = (-1)^{k+1} r_{n-1}(x) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^{i-k-1} L_{n-1}^{(\alpha-i-1)}(x)}{(1-l)^{i-k} L_n^{(\alpha-k-2)}(x)}. \quad (4.17)$$

Da Observação 4.1, para qualquer valor de p , temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p r_{n-1}(x) = 0.$$

Logo, de (2.27) e (2.28),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{n-1}(x) = (-1)^{k+1} \lim_{n \rightarrow \infty} r_{n-1}(x) \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i l^{i-k-1} L_{n-1}^{(\alpha-i-1)}(x)}{(1-l)^{i-k} L_n^{(\alpha-k-2)}(x)} \frac{L_{n-1}^{(\alpha-i-2)}(x)}{L_{n-1}^{(\alpha-i-2)}(x)} = 0,$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Além disso, por (2.27),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n-1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (l + r_{n-1}(x)) \frac{L_{n-1}^{(\alpha-k-2)}(x)}{L_n^{(\alpha-k-2)}(x)} = l,$$

novamente uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Nossa intenção é demonstrar (4.13), isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \frac{1}{1-l},$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$. Seja $A_n^*(x) = A_n(x) - \frac{1}{1-l}$.

Então, de (4.16), obtemos

$$A_n^*(x) = \frac{b_{n-1}(x) - l}{1-l} + b_{n-1}(x)A_{n-1}^*(x) + \pi_{n-1}(x).$$

Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, $\epsilon > 0$ e $l < r < 1$. Como $\pi_{n-1} \rightarrow 0$ e $b_n \rightarrow l$, $n \rightarrow \infty$, existe $N > 0$, tal que, se $n \geq N + 1$ e $x \in K$, temos

$$|A_n^*(x)| < \epsilon + r|A_{n-1}^*(x)|.$$

Logo, para $k \geq 1$ e $x \in K$,

$$\begin{aligned} |A_{N+k}^*(x)| &< \epsilon + r|A_{N-1+k}^*(x)| < \epsilon + r(\epsilon + r|A_{N-2+k}^*(x)|) = \epsilon + r\epsilon + r^2|A_{N-2+k}^*(x)| \\ &< \dots < \epsilon + r\epsilon + r^2\epsilon + \dots + r^{k-1}\epsilon + r^k|A_N^*(x)| \\ &= \epsilon(1 + r + \dots + r^{k-1}(x)) + r^k|A_N^*(x)| = \frac{\epsilon}{1-r} + r^k|A_N^*(x)|. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^*(x) = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = \frac{1}{1-l},$$

uniformemente em K . ■

Demonstração do Teorema 4.2: A demonstração do Teorema 4.2 é a mesma do Teorema 4.3 com $k = 0$. Do Teorema 4.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p r_{n-1}(x) = 0,$$

mas somente para $p < 1$. Portanto, de (4.17)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{n-1}(x) = 0,$$

somente para $k = 0$. Assim, é possível obter a expansão assintótica de S_n apenas com dois termos. ■

4.2 O caso Laguerre do tipo II

Nesta seção, vamos considerar o par coerente $\{d\psi_0, d\psi_1\}$ dado por

$$d\psi_0(x) = x^\alpha e^{-x} dx, \quad d\psi_1(x) = \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M\delta(\xi),$$

onde as medidas estão definidas em $(0, \infty)$, com $\alpha > -1$, $\xi \leq 0$ e $M \geq 0$.

Nosso objetivo é estudar o comportamento assintótico da sequência de polinômios de Sobolev $\{S_n\}_n$, ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle_S = \int f(x)g(x)d\psi_0(x) + \lambda \int f'(x)g'(x)d\psi_1(x). \quad (4.18)$$

Sejam $\{L_n^{(\alpha)}\}_n$ e $\{P_n^{\psi_1}\}_n$ as seqüências de polinômios ortogonais com respeito a $d\psi_0(x)$ e $d\psi_1(x)$, respectivamente. Como na seção anterior, vamos considerar o coeficiente do termo de maior grau de $S_n(x)$ e de $P_n^{\psi_1}(x)$ iguais ao coeficiente do termo de maior grau de $L_n^{(\alpha)}(x)$. Observe que

$$P_0^{\psi_1}(x) = S_0(x) = L_0^{(\alpha)}(x) \text{ e } S_1(x) = L_1^{(\alpha)}(x).$$

Iniciaremos com o estudo de $\{P_n^{\psi_1}\}_n$.

Teorema 4.4. *O polinômio $P_n^{\psi_1}(x)$ satisfaz*

$$P_n^{\psi_1}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) - \tilde{c}_n L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.19)$$

com

$$\tilde{c}_n = \frac{n! \int [P_n^{\psi_1}(x)]^2 d\psi_1}{\Gamma(n + \alpha + 1)} = \frac{\rho_n^{\psi_1}}{\rho_n^{(\alpha)}}. \quad (4.20)$$

Demonstração: Como $P_n^{\psi_0}(x)$ é um polinômio de grau n , podemos escrevê-lo da forma

$$P_n^{\psi_1}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k L_k^{(\alpha+1)}(x).$$

Logo, para $0 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P_n^{\psi_1}(x) L_i^{(\alpha+1)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} dx &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k L_k^{(\alpha+1)}(x)] L_i^{(\alpha+1)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} dx \\ &= b_i \int_0^\infty [L_i^{(\alpha+1)}(x)]^2 x^{\alpha+1} e^{-x} dx, \end{aligned}$$

o que implica em

$$b_i = \frac{\int_0^\infty P_n^{\psi_1}(x) L_i^{(\alpha+1)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} dx}{\int_0^\infty [L_i^{(\alpha+1)}(x)]^2 x^{\alpha+1} e^{-x} dx}, \quad 0 \leq i \leq n-1. \quad (4.21)$$

Para $0 \leq i \leq n-1$, temos que

$$\int_0^\infty P_n^{\psi_1}(x) L_i^{(\alpha+1)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} dx = \int P_n^{\psi_1}(x) L_i^{(\alpha+1)}(x) (x - \xi) d\psi_1(x). \quad (4.22)$$

Para $i = 0, 1, \dots, n-2$, a última integral é igual a zero. Logo, de (4.21), temos que $b_i = 0, i = 0, \dots, n-2$.

Da equação (2.31), concluímos que

$$x L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = -x \frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -n \kappa_n^{(\alpha)} x^n + x q'_{n-1}(x) = -n P_n^{\psi_1}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{b}_j P_j^{\psi_1}(x).$$

Assim, para $i = n - 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} P_n^{\psi_1}(x) L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)(x - \xi) d\psi_1(x) &= \int_0^{+\infty} P_n^{\psi_1}(x) x L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) d\psi_1(x) \\ &= \int_0^{+\infty} P_n^{\psi_1}(x) \left(-n P_n^{\psi_1}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{b}_j P_j^{\psi_1}(x) \right) d\psi_1 \\ &= -n \int_0^{+\infty} [P_n^{\psi_1}(x)]^2 d\psi_1(x). \end{aligned}$$

Substituindo em (4.21) e usando (2.24), obtemos

$$b_{n-1} = \frac{-n \int_0^{+\infty} [P_n^{\psi_1}(x)]^2 d\psi_1}{\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{(n-1)!}} = \frac{-n! \int_0^{+\infty} [P_n^{\psi_1}(x)]^2 d\psi_1}{\Gamma(n + \alpha + 1)},$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

Vamos estudar, agora, o comportamento do quociente $P_n^{\psi_1}(x)/L_n^{(\alpha)}(x)$. Para isso, necessitaremos de alguns resultados preliminares.

Lema 4.1. *Seja $\{\tilde{c}_n\}_n$ a seqüência dos coeficientes em (4.19). Se $\tilde{d}_n = \tilde{c}_n - 1$, $n \geq 1$, então,*

$$\tilde{d}_n = \frac{\xi \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) \frac{x^\alpha e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_n^{(\alpha)}(\xi)}{\int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)}, \quad n \geq 1. \quad (4.23)$$

Demonstração: Para $n \geq 1$, temos que $\int_0^\infty P_n^{\psi_1}(x) d\psi_1(x) = 0$. Assim, de (4.19), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty L_n^{(\alpha+1)}(x) d\psi_1(x) - \tilde{c}_n \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) d\psi_1(x) \\ &= \int_0^\infty L_n^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_n^{(\alpha+1)}(\xi) \\ &\quad - \tilde{c}_n \left[\int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi) \right], \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{c}_n = \frac{\int_0^\infty L_n^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_n^{(\alpha+1)}(\xi)}{\int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)}.$$

Portanto, usando a equação (2.30), temos que

$$\begin{aligned}
 \tilde{c}_n - 1 &= \frac{\int_0^\infty L_n^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_n^{(\alpha+1)}(\xi)}{\int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)} - 1 \\
 &= \frac{\int_0^\infty [L_n^{(\alpha+1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)] \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M [L_n^{(\alpha+1)}(\xi) - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)]}{\int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)} \\
 &= \frac{\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) [(x - \xi) + \xi] \frac{x^\alpha e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_n^{(\alpha)}(\xi)}{\int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)} \\
 &= \frac{\int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) x^\alpha e^{-x} dx + \xi \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) \frac{x^\alpha e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_n^{(\alpha)}(\xi)}{\int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)} \\
 &= \frac{\xi \int_0^\infty L_n^{(\alpha)}(x) \frac{x^\alpha e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_n^{(\alpha)}(\xi)}{\int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx + M L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)},
 \end{aligned}$$

demonstrando, assim, o lema. ■

Para a demonstração do próximo teorema, precisamos estimar o valor da seguinte integral

$$I_n^{(\alpha)} = \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx. \quad (4.24)$$

Usando a fórmula de Rodrigues (2.22),

$$\begin{aligned}
 I_n^{(\alpha)} &= \int_0^\infty \frac{1}{(n-1)!} e^x x^{-(\alpha+1)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x} x^{n+\alpha}) \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{x - \xi} dx \\
 &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \frac{1}{x - \xi} D^{n-1} (e^{-x} x^{n+\alpha}) dx,
 \end{aligned}$$

onde o operador $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$.

Integrando por partes $(n-1)$ vezes, obtemos

$$I_n^{(\alpha)} = \int_0^\infty \frac{1}{(x - \xi)^n} e^{-x} x^{n+\alpha} dx. \quad (4.25)$$

Assim, fazendo a mudança de variáveis $x = -\xi t$,

$$I_n^{(\alpha)} = \int_0^\infty \frac{(-\xi t)^{n+\alpha} e^{\xi t}}{(-\xi t - \xi)^n} (-\xi) dt = (-\xi)^{\alpha+1} \int_0^\infty \left(\frac{t}{t+1} \right)^n t^\alpha e^{\xi t} dt.$$

Consideremos $h(t) = \ln t - \ln(t+1) + \frac{\xi t}{n}$ e $g(t) = t^\alpha$. Logo, podemos escrever

$$I_n^{(\alpha)} = (-\xi)^{\alpha+1} \int_0^\infty e^{nh(t)} g(t) dt.$$

É fácil mostrar que $t_n = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{n}{\xi}} > 0$ é ponto de máximo de $h(t)$. Aplicando o método de ponto de sela (veja [6, pág.477]) em $I_n^{(\alpha)}$, concluimos que

$$I_n^{(\alpha)} \sim \frac{(-\xi)^{\alpha+1}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2\pi} t_n^{\alpha+2} e^{\xi t_n}}{\sqrt{|-2t_n - 1|}} \left(\frac{t_n}{t_n + 1} \right)^{n-1} \left\{ 1 + O\left\{ \frac{1}{n} \right\} \right\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Substituindo t_n pelo seu valor, obtemos

$$I_n^{(\alpha)} \sim (-\xi)^{\alpha/2+1/4} n^{\alpha/2+1/4} e^{\sqrt{-n\xi}} e^{-(1/2)\xi} \sqrt{\pi}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.26)$$

Agora, já temos condições de demonstrar o próximo resultado.

Teorema 4.5. *Seja $\{\tilde{d}_n\}_n$ a seqüência de constantes dadas pela equação (4.23). Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \tilde{d}_n = \tilde{d}(\xi) = \begin{cases} -(-\xi)^{1/2}, & \text{se } M = 0, \\ (-\xi)^{1/2}, & \text{se } M > 0. \end{cases}$$

Demonstração: Substituindo (4.24) na equação (4.23), podemos escrever

$$\tilde{d}_n = \frac{\xi I_{n+1}^{(\alpha-1)} + M L_n^{(\alpha)}(\xi)}{I_n^{(\alpha)} + M L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)}$$

Se $M = 0$ e $\xi = 0$, pela equação acima temos $\tilde{d}_n = 0$. Se $M = 0$ e $\xi > 0$, de (4.26),

$$\begin{aligned} \tilde{d}_n &\sim \xi \frac{(-\xi)^{(\alpha-1)/2} (-\xi)^{1/4} (n+1)^{(\alpha-1)/2} (n+1)^{1/4} e^{\sqrt{-(n+1)\xi}} e^{-(1/2)\xi} \sqrt{\pi}}{(-\xi)^{\alpha/2} (-\xi)^{1/4} n^{\alpha/2} n^{1/4} e^{\sqrt{-n\xi}} e^{-(1/2)\xi} \sqrt{\pi}} \\ &= -\frac{(-\xi)^{1/2}}{n^{1/2}} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(\alpha-1)/2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{1/4} \frac{e^{\sqrt{-(n+1)\xi}}}{e^{\sqrt{-n\xi}}}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \tilde{d}_n = -(-\xi)^{1/2}.$$

Se $M > 0$ e $\xi < 0$, usando o Teorema 2.9, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{I_n^{(\alpha)}}{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)} &\sim \frac{2\pi (-\xi)^{\alpha/2+1/4} n^{\alpha/2+1/4} e^{\sqrt{-n\xi}} e^{-\xi/2}}{e^{\xi/2} (-\xi)^{-\alpha/2-3/4} (n-1)^{\alpha/2+1/4} e^{2\sqrt{-(n-1)\xi}}} \\ &= 2\pi \frac{(-\xi)^{\alpha+1}}{e^\xi} \frac{e^{\sqrt{-n\xi}}}{e^{\sqrt{-(n-1)\xi}}} \frac{1}{e^{\sqrt{-(n-1)\xi}}} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{\alpha/2+1/4}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n^{(\alpha)}}{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)} = 0.$$

Assim, usando o limite acima junto com as equações (2.27) e (2.28), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \tilde{d}_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \left(\frac{\xi I_{n+1}^{(\alpha-1)} + M L_n^{(\alpha)}(\xi)}{I_n^{(\alpha)} + M L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \frac{L_n^{(\alpha)}(\xi)}{L_n^{(\alpha+1)}(\xi)} \frac{L_n^{(\alpha+1)}(\xi)}{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)} \left(\frac{\xi \frac{I_{n+1}^{(\alpha-1)}}{L_n^{(\alpha)}(\xi)} + M}{\frac{I_n^{(\alpha)}}{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(\xi)} + M} \right) = (-\xi)^{1/2}. \end{aligned}$$

Finalmente, suponhamos $M > 0$ e $\xi = 0$. Logo,

$$\tilde{d}_n = \frac{M L_n^{(\alpha)}(0)}{I_n^{(\alpha)} + M L_{n-1}^{(\alpha+1)}(0)}.$$

Das equações (4.25) e (2.24), obtemos

$$I_n^{(\alpha)} = \int_0^\infty \frac{x^{n+\alpha} e^{-x}}{x^n} dx = \int_0^\infty [L_0^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx = \Gamma(\alpha + 1),$$

que, juntamente com (2.21), fornece

$$\tilde{d}_n = \frac{M \binom{n+\alpha}{n}}{\Gamma(\alpha+1) + M \binom{n+\alpha}{n-1}} \sim \frac{\binom{n+\alpha}{n}}{\binom{n+\alpha}{n-1}} = \frac{\alpha+1}{n}. \quad (4.27)$$

Aplicando o limite, o resultado do teorema segue. ■

Como consequência imediata do resultado anterior, temos

Corolário 4.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}_n = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n = 1.$$

O teorema a seguir nos mostra o comportamento limite da razão $P_n^{(\psi_1)}(x)/L_n^{(\alpha)}(x)$ quando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 4.6. *Se $x \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} = \begin{cases} 1 + \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}}, & \text{se } M = 0, \\ 1 - \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}}, & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

e a convergência é uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Demonstração: Usando a relação (4.19), como $\tilde{c}_n = 1 + \tilde{d}_n$, temos que

$$P_n^{\psi_1}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) - \tilde{d}_n L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

Assim, de (2.30), obtemos

$$P_n^{\psi_1}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - \tilde{d}_n L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

Então,

$$\frac{P_n^{\psi_1}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} = 1 - n^{1/2} \tilde{d}_n \frac{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)}{n^{1/2} L_n^{(\alpha)}(x)}.$$

Logo, do lema anterior e das equações (2.27) e (2.28),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \tilde{d}_n \frac{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)}{n^{1/2} L_{n-1}^{(\alpha)}(x)} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(x)} \\ &= \begin{cases} 1 + \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}}, & \text{se } M = 0, \\ 1 - \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}}, & \text{se } M > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

■

Assim como no caso Laguerre do tipo I, existe uma relação de recorrência entre os polinômios $S_n(x)$, definidos em (4.18), e os polinômios de Laguerre.

Proposição 4.3. *Existem constantes positivas $\tilde{a}_n$ tais que*

$$L_n^{(\alpha)}(x) - \tilde{c}_{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = S_n(x) - \tilde{a}_{n-1} S_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.28)$$

onde os coeficientes $\tilde{c}_n$ são definidos em (4.20).

Demonstração: De (2.31) e (4.19), temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{L_n^{(\alpha)}(x) - \tilde{c}_{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\} &= -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) + \tilde{c}_{n-1} L_{n-2}^{(\alpha+1)}(x) \\ &= -[L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) - \tilde{c}_{n-1} L_{n-2}^{(\alpha+1)}(x)] \\ &= -P_{n-1}^{\psi_1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Consideremos

$$L_n^{(\alpha)}(x) - \tilde{c}_{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = S_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j S_j(x). \quad (4.30)$$

Logo, para $0 \leq i \leq n-1$,

$$\left\langle L_n^{(\alpha)} - \tilde{c}_{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}, S_i \right\rangle_S = \left\langle S_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j S_j(x), S_i \right\rangle_S = \gamma_i \rho_i^S.$$

Portanto, se $i = 0, 1, \dots, n-1$, da Propriedade 2.6 e de (4.29)

$$\begin{aligned} \gamma_i \rho_i^S &= \int_0^\infty [L_n^{(\alpha)}(x) - \tilde{c}_{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] S_i(x) x^\alpha e^{-x} dx \\ &\quad + \lambda \int_0^\infty \frac{d}{dx} [L_n^{(\alpha)}(x) - \tilde{c}_{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x)] S_i'(x) d\psi_1(x) \\ &= \int_0^\infty -\tilde{c}_{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) S_i(x) x^\alpha e^{-x} dx - \lambda \int_0^\infty P_{n-1}^{(\alpha)}(x) S_i'(x) d\psi_1(x) \\ &= -\tilde{c}_{n-1} \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha)}(x) S_i(x) x^\alpha e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Para $0 \leq i \leq n-2$, a última integral é nula. Logo, $\gamma_i = 0$, $i = 1, \dots, n-2$. Para $i = n-1$, obtemos

$$\gamma_{n-1} \rho_{n-1}^S = -\tilde{c}_{n-1} \int_0^\infty L_{n-1}^{(\alpha)}(x) S_{n-1}(x) x^\alpha e^{-x} dx = -\tilde{c}_{n-1} \int_0^\infty [L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]^2 x^\alpha e^{-x} dx.$$

Portanto, da equação (4.30), obtemos o resultado da proposição. ■

Os coeficientes $\{\tilde{a}_n\}_n$ da relação de recorrência para o caso Laguerre do tipo II também podem ser obtidos recursivamente.

Proposição 4.4. *A seqüência $\{\tilde{a}_n\}_n$ em (4.28) satisfaz à relação de recorrência*

$$\tilde{a}_n = \frac{\tilde{c}_n(n + \alpha)}{n + \alpha + n\tilde{c}_{n-1}^2 + \lambda n\tilde{c}_{n-1} - n\tilde{c}_{n-1}\tilde{a}_{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad (4.31)$$

com $\tilde{a}_0 = \tilde{c}_0$.

Demonstração: Análoga à da Proposição 4.2.

Observação 4.2. Como $\tilde{a}_0 = \tilde{c}_0$, de (4.31) obtemos $\tilde{a}_1 < \tilde{c}_1$ e, por indução, $\tilde{a}_n < \tilde{c}_n$ para $n \geq 1$. Em particular, para o denominador em (4.31), temos

$$n + \alpha + n\tilde{c}_{n-1}^2 + \lambda n\tilde{c}_{n-1} - n\tilde{c}_{n-1}\tilde{a}_{n-1} > n + \alpha. \quad (4.32)$$

Nosso próximo objetivo é obter o comportamento assintótico da razão entre $S_n(x)$ e $L_n^{(\alpha-1)}(x)$. Para isso, demonstraremos primeiramente o teorema a seguir.

Teorema 4.7. *A seqüência $\{\tilde{a}_n\}_n$ em (4.31) é convergente e*

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n = \frac{\lambda + 2 - \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda}}{2} < 1.$$

Demonstração: Do Corolário 4.1, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}_n = 0$. Como $\tilde{c}_n = 1 + \tilde{d}_n$, podemos reescrever (4.31) do seguinte modo:

$$\tilde{a}_n = \frac{1 + r_n}{2 + \lambda + s_n - a_{n-1}},$$

com $r_n = \tilde{d}_n + \frac{\alpha}{n}(1 + \tilde{d}_n)$, $s_n(x) = \frac{\alpha}{n} + \tilde{d}_{n-1}(\alpha + \lambda + \tilde{d}_{n-1} - \tilde{a}_{n-1})$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0.$$

Se existe $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_n$, então, $l = \frac{1}{2 + \lambda - l}$. Logo,

$$\tilde{a}_n - l = \frac{1 + r_n - (2 + \lambda)l - s_n l + \tilde{a}_{n-1}l}{(2 + \lambda) + s_n - \tilde{a}_{n-1}}.$$

Então, como $l(2 + \lambda) = l^2 + 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n - l &= \frac{1 + r_n - (l^2 + 1) - s_n l + \tilde{a}_{n-1}l}{(2 + \lambda) + s_n - \tilde{a}_{n-1}} \\ &= \frac{r_n - l s_n + l(\tilde{a}_{n-1} - l)}{(2 + \lambda) + s_n - \tilde{a}_{n-1}}. \end{aligned}$$

Usando a inequação (4.32),

$$|\tilde{a}_n - l| \leq \frac{n}{n + \alpha} |r_n| + \frac{nl}{n + \alpha} |s_n| + \frac{n}{n + \alpha} l |\tilde{a}_{n-1} - l|.$$

Sejam $\epsilon > 0$ e $l < r < 1$. Então, existe N tal que, se $n \geq N + 1$,

$$|\tilde{a}_n - l| < \epsilon + r |\tilde{a}_{n-1} - l|.$$

Repetindo a aplicação para $k \geq 1$, deduzimos que

$$|\tilde{a}_{n+k} - l| < \epsilon(1 + r + \dots + r^{k-1}) + r^k |\tilde{a}_n - l| < \frac{\epsilon}{1 - r} + r^k |\tilde{a}_n - l|.$$

Isso implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{a}_n - l| = 0.$$

■

Teorema 4.8. *Seja $\{S_n\}_n$ a seqüência de polinômios ortogonais com respeito a (4.18).*

Se $x \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x)}{L_n^{(\alpha-1)}(x)} = \begin{cases} \frac{1}{1-l} \left[1 + \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}} \right], & \text{se } M = 0, \\ \frac{1}{1-l} \left[1 - \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}} \right], & \text{se } M > 0 \end{cases}$$

e a convergência é uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Demonstração: Como $\tilde{c}_n = 1 + \tilde{d}_n$, podemos escrever (4.28) da seguinte forma:

$$L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - \tilde{d}_{n-1}L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = S_n(x) - \tilde{a}_{n-1}S_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Então, da equação (2.30),

$$L_n^{(\alpha-1)}(x) - \tilde{d}_{n-1}L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = S_n(x) - \tilde{a}_{n-1}S_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Logo,

$$1 - \tilde{d}_{n-1} n^{1/2} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{n^{1/2} L_n^{(\alpha-1)}(x)} = \frac{S_n(x)}{L_n^{(\alpha-1)}(x)} - \tilde{a}_{n-1} \frac{S_{n-1}(x)}{L_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)} \frac{L_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)}{L_n^{(\alpha-1)}(x)}. \quad (4.33)$$

Do Teorema 4.5 e das equações (2.27) e (2.28), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{n^{1/2} L_n^{(\alpha-1)}(x)} = \pm \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}},$$

onde o sinal superior em $\pm$ e $\mp$ será usado para $M > 0$ e o sinal inferior para $M = 0$.

Desse modo, como já fizemos anteriormente, podemos reescrever (4.33) como

$$A_n(x) = 1 \mp \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}} + b_{n-1}(x)A_{n-1}(x) + \pi_{n-1}(x), \quad (4.34)$$

com

$$A_n(x) = \frac{S_n(x)}{L_n^{(\alpha-1)}(x)}, \quad b_{n-1}(x) = \tilde{a}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)}{L_n^{(\alpha-1)}(x)}$$

e

$$\pi_{n-1}(x) = -\tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha-1)}(x)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha-1)}(x)}.$$

Observe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n-1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)}{L_n^{(\alpha-1)}(x)} = l,$$

de (2.27) e do Teorema 4.7. Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{n-1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha-1)}(x)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha-1)}(x)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha-1)}(x)} + \left(\pm \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

ambos com convergência uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Precisamos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ A_n(x) - \frac{1}{1-l} \left[1 + \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}} \right] \right\} = 0, \text{ se } M = 0.$$

Considere, $A_n^*(x) = A_n(x) - \frac{1}{1-l} \left[1 + \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}} \right]$. Então, (4.34) implica em

$$\begin{aligned} A_n^*(x) &= -\frac{1}{1-l} \left[1 + \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}} \right] + 1 + \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}} \\ &\quad + b_{n-1}(x) \left\{ A_{n-1}^*(x) + \frac{1}{1-l} \left[1 + \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}} \right] \right\} + \pi_{n-1}(x) \\ &= \left[1 + \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}} \right] \left[1 - \frac{1}{1-l} + \frac{b_{n-1}(x)}{1-l} \right] + b_{n-1}(x) A_{n-1}^*(x) + \pi_{n-1}(x) \\ &= \left[1 + \frac{(-\xi)^{1/2}}{(-x)^{1/2}} \right] \left[\frac{b_{n-1}(x) - l}{1-l} \right] + b_{n-1}(x) A_{n-1}^*(x) + \pi_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Sejam K um subconjunto de $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, $\epsilon > 0$ e $l < r < 1$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N + 1$ e $x \in K$,

$$|A_n^*(x)| < \epsilon + r|A_{n-1}^*(x)|.$$

Repetindo a aplicação para $k \geq 1$ e $x \in K$, obtemos

$$\begin{aligned} |A_{N+k}^*(x)| &< \epsilon + r|A_{N-1+k}^*(x)| < \epsilon + r(\epsilon + r|A_{N-2+k}^*(x)|) = \epsilon + r\epsilon + r^2|A_{N-2+k}^*(x)| \\ &< \dots < \epsilon + r\epsilon + r^2\epsilon + \dots + r^{k-1}\epsilon + r^k|A_N^*(x)| \\ &= \epsilon(1 + r + \dots + r^{k-1}) + r^k|A_N^*(x)| = \frac{\epsilon}{1-r} + r^k|A_N^*(x)|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^*(x) = 0,$$

uniformemente em K .

Do mesmo modo mostramos o resultado para $M > 0$. ■

Proposição 4.5. *Para $n \geq 0$, temos que*

$$\tilde{c}_{n+1} = \frac{2n + 2 + \alpha - \xi}{n + 1} - \frac{n + 1 + \alpha}{(n + 1)\tilde{c}_n}, \quad (4.35)$$

$$\text{com } \tilde{c}_0 = \frac{\int d\psi_1(x)}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Demonstração: Como os polinômios $P_i^{\psi_1}(x)$, $i = 0, \dots, n + 1$, formam uma base para $\mathbb{P}_{n+1}$, podemos escrever

$$-\frac{x - \xi}{n + 1} L_n^{(\alpha+1)}(x) = P_{n+1}^{\psi_1}(x) + \sum_{k=0}^n \gamma_k P_k^{\psi_1}(x). \quad (4.36)$$

Assim, por (2.11), se $0 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n+1} \int_0^\infty (x-\xi) L_n^{(\alpha+1)}(x) P_j^{\psi_1}(x) d\psi_1(x) &= \int_0^\infty P_{n+1}^{\psi_1}(x) P_j^{\psi_1}(x) d\psi_1(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \gamma_k \int_0^\infty P_k^{\psi_1}(x) P_j^{\psi_1}(x) d\psi_1(x) \\ &= \gamma_j \int_0^\infty P_j^{\psi_1}(x) P_j^{\psi_1}(x) d\psi_1(x). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Como $(x-\xi) L_n^{(\alpha+1)}(x) P_j^{\psi_1}(x) = 0$ para $x = \xi$, então

$$-\frac{1}{n+1} \int_0^\infty (x-\xi) L_n^{(\alpha+1)}(x) P_j^{\psi_1}(x) d\psi_1(x) = -\frac{1}{n+1} \int_0^\infty L_n^{(\alpha+1)}(x) P_j^{\psi_1}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} dx.$$

Portanto, podemos escrever (4.37) como

$$-\frac{1}{n+1} \int_0^\infty L_n^{(\alpha+1)}(x) P_j^{\psi_1}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} dx = \gamma_j \int_0^\infty P_j^{\psi_1}(x) P_j^{\psi_1}(x) d\psi_1(x).$$

O lado esquerdo da igualdade anterior é igual a zero para $j = 0, \dots, n-1$. Portanto, $\gamma_j = 0$, $j = 0, \dots, n-1$.

Logo, para $j = n$, obtemos

$$\gamma_n = -\frac{1}{n+1} \frac{\rho_n^{(\alpha+1)}}{\rho_n^{\psi_1}}.$$

De (2.24), $\rho_n^{(\alpha+1)} = (n+\alpha+1)\rho_n^{(\alpha)}$. Logo, de (4.20),

$$\gamma_n = -\frac{(n+\alpha+1)}{n+1} \frac{\rho_n^{(\alpha)}}{\rho_n^{\psi_1}} = -\frac{(n+\alpha+1)}{(n+1)\tilde{c}_n}.$$

Portanto, (4.36) reduz-se a

$$-\frac{x-\xi}{n+1} L_n^{(\alpha+1)}(x) = P_{n+1}^{\psi_1}(x) - \frac{(n+\alpha+1)}{(n+1)\tilde{c}_n} P_n^{\psi_1}(x), \quad n \geq 0.$$

Multiplicando a equação acima por $L_n^{(\alpha+1)}(x)$ e integrando com relação a $x^{\alpha+1}e^{-x}dx$, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n+1} \int_0^\infty (x-\xi) [L_n^{(\alpha+1)}(x)]^2 x^{\alpha+1} e^{-x} dx &= \int_0^\infty P_{n+1}^{\psi_1}(x) L_n^{(\alpha+1)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} dx \\ &\quad - \frac{(n+\alpha+1)}{(n+1)\tilde{c}_n} \int_0^\infty P_n^{\psi_1}(x) L_n^{(\alpha+1)}(x) d\phi(x), \end{aligned}$$

onde $d\phi(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}dx$. Logo, de (4.19),

$$-\frac{1}{n+1} \int_0^\infty (x-\xi) [L_n^{(\alpha+1)}(x)]^2 x^{\alpha+1} e^{-x} dx = -\left(\tilde{c}_{n+1} + \frac{(n+\alpha+1)}{(n+1)\tilde{c}_n}\right) \rho_n^{(\alpha+1)}. \quad (4.38)$$

Mas, de (2.23) e (2.11), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (x - \xi) [L_n^{(\alpha+1)}(x)]^2 x^{\alpha+1} e^{-x} dx &= \int_0^\infty x L_n^{(\alpha+1)}(x) L_n^{(\alpha+1)}(x) x^{\alpha+1} e^{-x} dx \\ &\quad - \xi \int_0^\infty [L_n^{(\alpha+1)}(x)]^2 x^{\alpha+1} e^{-x} dx \\ &= (2n + \alpha + 2 - \xi) \rho_n^{(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima no lado esquerdo de (4.38), obtemos a equação (4.35), concluindo a demonstração da proposição. $\blacksquare$

Teorema 4.9. *Para $\alpha > -1$, as seguintes propriedades são verdadeiras:*

(a) *A seqüência $\left\{ \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{n^{\alpha/2-1/4}} \right\}$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos de $(0, \infty)$.*

(b) $\frac{P_n^{\psi_1}(x)}{n^{\alpha/2}} = \begin{cases} e^{x/2} x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{nx}) + O(n^{-1/4}), & \text{se } \xi < 0, \\ e^{x/2} x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{nx}) + O(n^{-3/4}), & \text{se } \xi = 0, \end{cases}$
uniformemente em subconjuntos compactos de $(0, \infty)$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x/(n+j))}{n^{\alpha+\kappa}} = \begin{cases} -\tilde{d}(\xi) x^{-(\alpha+1)/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}), & \text{se } \xi < 0 \text{ e } \kappa = 1/2, \\ -x^{-\alpha/2} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}), & \text{se } \xi = 0, M > 0 \text{ e } \kappa = 0, \\ x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}), & \text{se } \xi = M = 0 \text{ e } \kappa = 0, \end{cases}$

onde $\tilde{d}(\xi)$ é da forma definida no Teorema 4.5. Todos os limites são uniformes em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ e uniformes em $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}((n+j)x)}{L_n^{(\alpha+1)}((n+j)x)} = 1 + \left[\varphi \left(\frac{x-2}{2} \right) \right]^{-1}$, uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ e uniformemente em $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demonstração: Parte (a) Como $\tilde{d}_n = \tilde{c}_n - 1$, $n \geq 0$, da equação (2.30) podemos reescrever (4.19) da forma

$$P_n^{\psi_1}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - \tilde{d}_n L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x), \quad n \geq 0. \quad (4.39)$$

Dividindo a equação acima por $n^{\alpha/2-1/4}$, temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{n^{\alpha/2-1/4}} \right| &= \left| \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n^{\alpha/2-1/4}} - \frac{\tilde{d}_n L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)}{n^{\alpha/2-1/4}} \right| \\ &\leq \left| \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n^{\alpha/2-1/4}} \right| + \left| n^{1/2} \frac{\tilde{d}_n L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)}{(n-1)^{(\alpha+1)/2-1/4}} \frac{(n-1)^{(\alpha+1)/2-1/4}}{n^{\alpha/2+1/4}} \right|. \end{aligned}$$

Dos Teoremas 2.8 e 4.5, segue o resultado desejado.

Parte (b)

- Se $\xi < 0$, dividimos a equação (4.39) por $n^{\alpha/2}$. Assim, dos Teoremas 2.8 e 4.5, segue que

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{n^{\alpha/2}} &= \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{(n-1)^{1/4}} \sqrt{n} \tilde{d}_n \left(\frac{n-1}{n} \right)^{(\alpha+1)/2} \frac{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)}{(n-1)^{(\alpha+1)/2-1/4}} \\ &= \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n^{\alpha/2}} + O(n^{-1/4}). \end{aligned}$$

Aplicando, agora, o Teorema 2.10, obtemos

$$\frac{P_n^{\psi_1}(x)}{n^{\alpha/2}} = e^{x/2} x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{nx}) + O(n^{-1/4}).$$

- Se $\xi = 0$ e $M > 0$, de (4.27) concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \tilde{d}_n = \alpha + 1. \quad (4.40)$$

Assim, se dividirmos (4.39) por $n^{\alpha/2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{\psi_1}(x)}{n^{\alpha/2}} &= \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n^{\alpha/2}} - \tilde{d}_n \frac{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)}{n^{\alpha/2}} = \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n^{\alpha/2}} - n \tilde{d}_n \frac{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)}{n n^{\alpha/2}} \frac{(n-1)^{(\alpha+1)/2-1/4}}{(n-1)^{(\alpha+1)/2-1/4}} \\ &= \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{n^{\alpha/2}} + O(n^{-3/4}). \end{aligned}$$

Logo, do Teorema 2.10, segue que

$$\frac{P_n^{\psi_1}(x)}{n^{\alpha/2}} = e^{x/2} x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{nx}) + O(n^{-3/4}).$$

Parte (c)

- Se $\xi < 0$, dividindo (4.39) por $n^{\alpha+1/2}$ e substituindo x por $x/(n+j)$, obtemos

$$\frac{P_n^{\psi_1}(x/(n+j))}{n^{\alpha+1/2}} = \frac{L_n^{(\alpha)}(x/(n+j))}{n^{\alpha} n^{1/2}} - \sqrt{n} \tilde{d}_n \frac{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x/(n+j))}{(n-1)^{\alpha+1}} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\alpha+1}. \quad (4.41)$$

De (2.26) e do Teorema 4.5, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x/(n+j))}{n^{\alpha+1/2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x/(n+j))}{n^{\alpha} n^{1/2}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \tilde{d}_n \frac{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x/(n+j))}{(n-1)^{\alpha+1}} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\alpha+1} \\ &= -\tilde{d}(\xi) x^{-(\alpha+1)/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}). \end{aligned}$$

- Se $\xi = 0$ e $M > 0$, dividimos (4.39) por n^α e obtemos

$$\frac{P_n^{\psi_1}(x/(n+j))}{n^\alpha} = \frac{L_n^{(\alpha)}(x/(n+j))}{n^\alpha} - n \tilde{d}_n \frac{L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x/(n+j))}{(n-1)^{\alpha+1}} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\alpha+1}.$$

Assim, de (2.26) e (4.40),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x/(n+j))}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) - (\alpha+1)x^{-(\alpha+1)/2} J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}).$$

Usando, agora, a equação (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x/(n+j))}{n^\alpha} &= x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) - x^{-\alpha/2} [J_\alpha(2\sqrt{x}) + J_{\alpha+2}(2\sqrt{x})] \\ &= -x^{-\alpha/2} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}). \end{aligned}$$

• Se $\xi = M = 0$, do Teorema 4.5 temos que $\tilde{d}_n = 0$. Assim, da equação (2.26), concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}(x/(n+j))}{n^\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x/(n+j))}{n^\alpha} = x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}).$$

■

Parte (d) Substituindo x por $(n+j)x$ em (4.19) e dividindo em seguida por $L_n^{(\alpha+1)}((n+j)x)$, obtemos

$$\frac{P_n^{\psi_1}((n+j)x)}{L_n^{(\alpha+1)}((n+j)x)} = 1 - \tilde{c}_n \frac{L_{n-1}^{(\alpha+1)}((n+j)x)}{L_n^{(\alpha+1)}((n+j)x)}.$$

De (2.34) e lembrando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n = 1$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{\psi_1}((n+j)x)}{L_n^{(\alpha+1)}((n+j)x)} = 1 + \frac{1}{\varphi((x-2)/2)}.$$

■

Para os próximos resultados vamos considerar o polinômio $V_n(x)$ definido por

$$V_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - \tilde{c}_{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0. \quad (4.42)$$

Como $\tilde{d}_n = \tilde{c}_n - 1$, de (2.30) a equação acima pode ser reescrita como

$$V_n(x) = L_n^{(\alpha-1)}(x) - \tilde{d}_{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 0, \quad (4.43)$$

com $\tilde{c}_{-1} = \tilde{d}_{-1} = 0$. Observe que

$$V_n'(x) = [L_n^{(\alpha)}(x) - \tilde{c}_{n-1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x)]' = -[L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) - \tilde{c}_{n-1} L_{n-2}^{(\alpha+1)}(x)] = -P_{n-1}^{\psi_1}(x).$$

Teorema 4.10. *Seja $\alpha > -1$. Então,*

$$\frac{S_n(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} = e^{x/2} x^{-(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(2\sqrt{n\alpha}) + O(n^{-1/4})$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $(0, \infty)$.

Demonstração: Da Proposição 4.3 e da equação (4.43), obtemos

$$S_n(x) = V_n(x) + \tilde{a}_{n-1}S_{n-1}(x).$$

Logo,

$$\frac{S_n(x)}{n^{\alpha/2-3/4}} = \frac{V_n(x)}{n^{\alpha/2-3/4}} + \tilde{a}_{n-1} \frac{S_{n-1}(x)}{(n-1)^{\alpha/2-3/4}} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\alpha/2-3/4}.$$

Da definição de $V_n(x)$, temos que

$$\frac{V_n(x)}{n^{\alpha/2-3/4}} = \frac{L_n^{(\alpha-1)}(x)}{n^{\alpha/2-3/4}} - \tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)}{n^{\alpha/2-3/4}}$$

é uniformemente limitado em compactos de $(0, \infty)$, de acordo com os Teoremas 2.8 e 4.5.

Além disso, do Teorema 4.7, $\tilde{a}_{n-1} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\alpha/2-3/4} \rightarrow l$. Procedendo da mesma forma que

na demonstração do Teorema 4.9 - Parte (a), concluímos que $\frac{S_n(x)}{n^{\alpha/2-3/4}}$ é uniformemente limitada. Por outro lado, dos Teoremas 2.8 e 4.5, se $\xi < 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{V_n(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} &= \frac{L_n^{(\alpha-1)}(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} - \sqrt{n-1} \tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)}{(n-1)^{\alpha/2-1/4}} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\alpha/2-1/2} \\ &= \frac{L_n^{(\alpha-1)}(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} + O(n^{-1/4}) \end{aligned}$$

e, se $\xi = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{V_n(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} &= \frac{L_n^{(\alpha-1)}(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} - (n-1) \tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)}{(n-1)^{\alpha/2-1/4}} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\alpha/2-1/2} \frac{1}{(n-1)^{3/4}} \\ &= \frac{L_n^{(\alpha-1)}(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} + O(n^{-3/4}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{S_n(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} &= \frac{V_n(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} + \frac{\tilde{a}_{n-1}}{(n-1)^{1/4}} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{-(\alpha-1)/2} \frac{S_{n-1}(x)}{(n-1)^{\alpha/2-3/4}} \\ &= \frac{V_n(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} + O(n^{-1/4}) = \frac{L_n^{(\alpha-1)}(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} + O(n^{-1/4}). \end{aligned}$$

Portanto, do Teorema 2.10,

$$\frac{S_n(x)}{n^{(\alpha-1)/2}} = e^{x/2} x^{-(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(2\sqrt{nx}) + O(n^{-1/4}),$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $(0, \infty)$. ■

Já vimos, na Proposição 4.3, que podemos expressar S_n em termos dos polinômios de Laguerre com parâmetro α . Assim, de acordo com a equação (4.43), temos que

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^n b_{n,i} V_{n-i}(x) = \sum_{i=0}^n b_{n,i} [L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - c_{n-i-1} L_{n-i-1}^{(\alpha)}(x)], \quad n \geq 0, \quad (4.44)$$

onde

$$b_{n,i} = \prod_{j=1}^i \tilde{a}_{n-j}, \text{ com } b_{n,0} = 1. \quad (4.45)$$

Além disso, do Teorema 4.7, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^i \tilde{a}_{n-j} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_{n-1} \tilde{a}_{n-2} \dots \tilde{a}_{n-i} = (\varphi(\lambda + 2)/2)^{-i} = l^i, \forall i. \quad (4.46)$$

Dos resultados acima, demonstramos facilmente o seguinte resultado.

Lema 4.2. *Existem constantes C e r , com $C > 1$ e $0 < r < 1$, tais que,*

$$0 < b_{n,i} < Cr^i, \forall n \geq 0 \quad e \quad 0 \leq i \leq n.$$

Estamos, agora, em condições de demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.11. *Seja $\alpha > -1$. Então, os polinômios $S_n(x)$ satisfazem*

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x/n)}{n^{\alpha+\kappa}} = \begin{cases} -\frac{\tilde{d}(\xi)}{1-l} x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}), & \text{se } \xi < 0 \text{ e } \kappa = -1/2, \\ \frac{1}{1-l} s(x), & \text{se } \xi = 0, M > 0 \text{ e } \kappa = -1, \\ \frac{1}{1-l} x^{-(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(2\sqrt{x}), & \text{se } \xi = M = 0 \text{ e } \kappa = -1, \end{cases}$$

onde $\tilde{d}(\xi)$ é definida como no Teorema 4.5, l é o limite da seqüência $\{\tilde{a}_n\}$ e

$$s(x) = x^{-(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(2\sqrt{x}) - (\alpha+1)x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}). \quad (4.47)$$

Todos os limites são uniformes em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(nx)}{L_n^{(\alpha)}(nx)} = \frac{\varphi((x-2)/2) + 1}{\varphi((x-2)/2) + l},$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$.

Demonstração: Parte (a) De (4.44), temos que

$$\frac{S_n(x/n)}{n^{\alpha-1/2}} = \sum_{i=0}^n b_{n,i} \frac{V_{n-1}(x/n)}{n^{\alpha-1/2}} =: \sum_{i=0}^n v_{n,i}(x/n). \quad (4.48)$$

Dividindo (4.43) por $n^{\alpha-1/2}$ e avaliando-a em $x/(n+j)$, se $\xi < 0$ obtemos

$$\frac{V_n(x/(n+j))}{n^{\alpha-1/2}} = \frac{1}{n^{1/2}} \frac{L_n^{(\alpha-1)}(x/(n+j))}{n^{\alpha-1}} - \sqrt{n-1} \tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x/(n+j))}{(n-1)^\alpha} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\alpha-1/2}.$$

Logo, de (2.26) e do Teorema 4.5,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n(x/(n+j))}{n^{\alpha-1/2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/2}} \frac{L_n^{(\alpha-1)}(x/(n+j))}{n^{\alpha-1}} \\
 &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n-1} \tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x/(n+j))}{(n-1)^\alpha} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\alpha-1/2} \\
 &= -\tilde{d}(\xi) x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}),
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C}$ e uniformemente em $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_{n-i}(x/n)}{n^{\alpha-1/2}} = -\tilde{d}(\xi) x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}),$$

uniformemente em conjuntos compactos de $\mathbb{C}$ e uniformemente em $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dado um conjunto compacto $K \in \mathbb{C}$, devido a este último resultado e o Lema 4.2, existe uma constante D , que depende somente de K , tal que $|v_{n,i}(x/n)| < Dr^i$, para $i = 0, \dots, n$ e $x \in K$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (veja [49, pág.36]) e por (4.49) e (4.46),

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n v_{n,i}(x/n) &= \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} v_{n,i}(x/n) = -\tilde{d}(\xi) x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) \sum_{i=0}^{\infty} l^i \\
 &= -\tilde{d}(\xi) x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}) \frac{1}{1-l},
 \end{aligned}$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$.

Quando $\xi = 0$, de (2.26) e (4.40), obtemos

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n(x/(n+j))}{n^{\alpha-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha-1)}(x/(n+j))}{n^{\alpha-1}} \\
 &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1) \tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x/(n+j))}{(n-1)^\alpha} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{\alpha-1} \\
 &= x^{-(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(2\sqrt{x}) - (\alpha+1) x^{-\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{x}), \text{ se } M > 0,
 \end{aligned}$$

e, se $M = 0$,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n(x/(n+j))}{n^{\alpha-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^{(\alpha-1)}(x/(n+j))}{n^{\alpha-1}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{d}_{n-1} \frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x/(n+j))}{n^{\alpha-1}} \\
 &= x^{-(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(2\sqrt{x}).
 \end{aligned}$$

Assim, com o mesmo raciocínio usado para $\xi < 0$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(x/n)}{n^{\alpha-1}} = \begin{cases} \frac{1}{1-l} s(x), & \text{se } \xi = 0 \text{ e } M > 0, \\ \frac{1}{1-l} x^{-(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}(2\sqrt{x}), & \text{se } \xi = M = 0. \end{cases}$$

■

Parte (b) De (4.44), podemos escrever

$$\frac{S_n(nx)}{L_n^{(\alpha)}(nx)} = \sum_{i=0}^n b_{n,i} \frac{V_{n-i}(nx)}{L_n^{(\alpha)}(nx)}, \quad x \in \mathbb{C} \setminus [0, 4].$$

Como consequência de (4.42) e de (2.34), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n((n+j)x)}{L_n^{(\alpha)}((n+j)x)} = 1 + (\varphi((x-2)/2))^{-1}, \quad (4.50)$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$ e uniformemente em $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Agora, novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n b_{n,i} \frac{V_{n-i}(nx)}{L_n^{(\alpha)}(nx)} = \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,i} \left(\frac{V_{n-i}(nx)}{L_{n-i}^{(\alpha)}(nx)} \frac{L_{n-i}^{(\alpha)}(nx)}{L_n^{(\alpha)}(nx)} \right).$$

De (4.46), (4.50) e (2.32), concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n b_{n,i} \frac{V_{n-i}(nx)}{L_n^{(\alpha)}(nx)} &= [1 + (\varphi((x-2)/2))^{-1}] \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-l}{\varphi((x-2)/2)} \right)^i \\ &= \frac{\varphi((x-2)/2) + 1}{\varphi((x-2)/2) + l}, \end{aligned}$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, 4]$.

■

Corolário 4.2. Para $\alpha > -1$, considere $j_{\alpha,i}$ o i -ésimo zero positivo da função de Bessel $J_{\alpha}(x)$. Sejam $\{x_{n,i}\}_{i=1}^n$ os zeros em ordem crescente de $S_n(x)$ e $\{\tilde{x}_{n,i}\}_{i=1}^{n-1}$ seus pontos críticos. Então,

$$(a) \text{ Se } \xi < 0, \text{ temos } \lim_{n \rightarrow \infty} nx_{n,i} = \frac{j_{\alpha,i}^2}{4} \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} n\tilde{x}_{n,i} = \frac{j_{\alpha+1,i}^2}{4}.$$

(b) Se $\xi = 0$ e $M > 0$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_{n,i} = s_{\alpha,i}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n\tilde{x}_{n,1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n\tilde{x}_{n,i} = \frac{j_{\alpha+2,i-1}^2}{4}, \quad n \geq 2,$$

onde $s_{\alpha,i}$ são os zeros reais da função $s(x)$ definida em (4.47).

(c) Se $\xi = M = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_{n,i} = \frac{j_{\alpha-1,i}^2}{4}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} n\tilde{x}_{n,i} = \frac{j_{\alpha,i}^2}{4}$, onde podemos considerar três casos:

- se $-1 < \alpha < 0$, isto é, $-2 < \alpha - 1 < -1$, $j_{\alpha-1,1}$ é um dos zeros puramente imaginários de $J_{\alpha-1}(x)$ e, para $i \geq 2$, $j_{\alpha-1,i}$ é o $(i-1)$ -ésimo zero real positivo de $J_{\alpha-1}(x)$;

- se $\alpha = 0$, $j_{\alpha-1,1} = j_{-1,1} = 0$ e, para $i \geq 2$, $j_{\alpha-1,i}$ é o $(i-1)$ -ésimo zero real positivo de $J_{\alpha-1}(x)$;
- se $\alpha > 0$, $j_{\alpha-1,i}$ é o i -ésimo zero real positivo de $J_{\alpha-1}(x)$.

Demonstração: Parte (a) Considere $f_n(x) = \frac{S_n(x/n)}{n^{-\alpha-1/2}}$ e $f(x) = -\frac{\tilde{d}(\xi)}{1-l}x^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{x})$. É fácil ver que $j_{\alpha,i}^2/4$ são os zeros de $f(x)$ e que os zeros de $f_n(x)$ são da forma $nx_{n,i}$.

Do Teorema 4.11 (a), temos que $\frac{S_n(x/n)}{n^{-\alpha-1/2}} \rightarrow -\frac{\tilde{d}(\xi)}{1-l}x^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{x})$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim, do Teorema 2.3, se $n > N$, então $f_n(x)$ tem apenas um zero em uma vizinhança V_δ de $j_{\alpha,i}^2/4$. Logo, fazendo $\delta \rightarrow 0$, $nx_{n,i} \rightarrow j_{\alpha,i}^2/4$, quando $n \rightarrow \infty$.

Para os pontos críticos de $S_n(x)$, como a convergência no Teorema 4.11 (a) é uniforme, de (2.7), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S'_n(x/n)}{n^{\alpha+1/2}} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\tilde{d}(\xi)}{1-l}x^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{x}) \right] = -\frac{\tilde{d}(\xi)}{1-l}x^{-(\alpha+1)/2}J_{\alpha+1}(2\sqrt{x}).$$

Procedendo analogamente à demonstração feita acima, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\tilde{x}_{n,i} = \frac{j_{\alpha+1,i}^2}{4}.$$

Parte (b) Do Teorema 4.11 (a), seguindo o mesmo raciocínio da demonstração da parte (a) acima, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_{n,i} = s_{\alpha,i}.$$

Considere $g_\alpha(x) = x^{-\alpha/2}J_\alpha(2\sqrt{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-x)^i}{i!\Gamma(i+\alpha+1)}$, $x \in \mathbb{C}$. Logo, de (4.47), podemos escrever

$$s(x) = -g_\alpha(x) - xg_{\alpha+1}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i-1)(-x)^i}{i!\Gamma(i+\alpha+1)}, \quad \alpha > -1 \text{ e } x \in \mathbb{C}.$$

Observe que, se $x \in (-\infty, 0)$, então $g_\alpha(x) > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_\alpha(x) = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} s(x) = \infty$. Além disso, de (2.7) e (2.8), temos que

$$s'(x) = xg_{\alpha+2}(x), \quad x \in \mathbb{C}.$$

Além disso, $s(x)$ é decrescente em $(-\infty, 0)$. Desde que $s(0) < 0$, temos que $s(x)$ tem somente um zero negativo. Como os zeros de $J_\alpha(x)$ se entrelaçam com os zeros de $J_{\alpha+1}(x)$, podemos deduzir que $s(x)$ tem somente um zero entre dois zeros consecutivos de $J_{\alpha+1}(2\sqrt{x})$.

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S'_n(x/n)}{n^\alpha} = \frac{1}{1-l} s'(x) = \frac{1}{1-l} x^{-\alpha/2} J_{\alpha+2}(2\sqrt{x}),$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, de onde segue o resultado.

Parte (c) Segue do Teorema 4.11 (a) e do Teorema 2.3. ■

Para a demonstrarmos o resultado final de nosso trabalho, precisaremos de limitantes para os coeficientes $\tilde{c}_n$ e $\tilde{a}_n$.

Lema 4.3. Para $n \geq 1$, os coeficientes $\tilde{c}_n$ e $\tilde{a}_n$ em (4.28) satisfazem

$$\frac{n+1+\alpha}{2(n+1)+\alpha-\xi} < \tilde{c}_n < 2 + \frac{\alpha-\xi}{n}, \quad n \geq 1 \quad (4.51)$$

e

$$\tilde{a}_n < \left(2 + \frac{\alpha-\xi}{n}\right) \frac{2n+\alpha-\xi}{(2+\lambda)n+\alpha-\xi}, \quad n \geq 1. \quad (4.52)$$

Demonstração: De (4.35), temos que

$$\tilde{c}_n = \frac{2n+\alpha-\xi}{n} - \frac{n+\alpha}{n\tilde{c}_{n-1}} < \frac{2n+\alpha-\xi}{n},$$

que é a desigualdade à direita em (4.51).

Como $\tilde{c}_{n+1} = \frac{2n+2+\alpha-\xi}{n+1} - \frac{n+1+\alpha}{(n+1)\tilde{c}_n} > 0$, então

$$\tilde{c}_n > \frac{n+1+\alpha}{2n+2+\alpha-\xi},$$

ou seja, a outra desigualdade de (4.51).

Como consequência da propriedade extremal (2.8), obtemos

$$\rho_n^S \geq \rho_n^{(\alpha)} + \lambda \rho_{n-1}^{\psi_1}, \quad n \geq 1.$$

Da definição de $\tilde{c}_n$ em (4.20) e de (2.24), temos que

$$\frac{\rho_n^S}{\rho_n^{(\alpha)}} \geq 1 + \lambda \frac{\rho_{n-1}^{\psi_1}}{\rho_n^{(\alpha)}} = 1 + \lambda \frac{n}{n+\alpha} \tilde{c}_{n-1}.$$

Aplicando (4.51),

$$\frac{\rho_n^S}{\rho_n^{(\alpha)}} > \left(1 + \frac{\lambda n}{2n+\alpha-\xi}\right).$$

Da demonstração da Proposição 4.3, temos que $\tilde{a}_n = \tilde{c}_n \frac{\rho_n^{(\alpha)}}{\rho_n^S}$. Assim, de (4.51) e da inequação acima, obtemos

$$\tilde{a}_n < \tilde{c}_n \left(1 + \frac{\lambda n}{2n+\alpha-\xi}\right)^{-1} < \left(2 + \frac{\alpha-\xi}{n}\right) \left(\frac{2n+\alpha-\xi}{2n+\alpha-\xi+\lambda n}\right).$$

■

Teorema 4.12. *Sejam $x \geq 0$, $\alpha > -1$ e $n \geq 1$. Então,*

$$|S_n(x)| \leq C f_n(r) A(n, \alpha) e^{x/2},$$

onde $A(n, \alpha)$ é definida em (2.36),

$$C = \begin{cases} 3 + \alpha - \xi, & \text{se } \alpha \geq \xi, \\ 3, & \text{se } \alpha \leq \xi, \end{cases} \quad r = \begin{cases} \frac{(2 + \alpha - \xi)^2}{2 + \lambda + \alpha - \xi}, & \text{se } \alpha \geq \xi, \\ \frac{4}{2 + \lambda}, & \text{se } \alpha \leq \xi \end{cases}$$

e

$$f_n(r) = \begin{cases} n, & \text{se } r = 1, \\ \frac{1 - r^n}{1 - r}, & \text{se } r \neq 1. \end{cases}$$

Demonstração: Para $\alpha \geq 0$ e $i = 0, \dots, n$,

$$\begin{aligned} A(n, \alpha) - A(n - i, \alpha) &= \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} - \frac{\Gamma(n - i + \alpha + 1)}{(n - i)! \Gamma(\alpha + 1)} \\ &= \left(\frac{(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots (n + \alpha - i + 1)}{n(n - 1) \dots (n - i + 1)} - 1 \right) \frac{\Gamma(n - i + \alpha + 1)}{(n - i)! \Gamma(\alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Observe que $n + k + \alpha \geq n + k$ e, assim,

$$\left(\frac{(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots (n + \alpha - i + 1)}{n(n - 1) \dots (n - i + 1)} - 1 \right) \geq 0.$$

Portanto, $A(n, \alpha) - A(n - i, \alpha) \geq 0$, ou seja, $A(n, \alpha) \geq A(n - i, \alpha)$. O procedimento é análogo para $-1 < \alpha < 0$.

Como, de (4.45), $b_{n,n} = \tilde{a}_0 b_{n,n-1}$, podemos reescrever (4.44) da seguinte forma:

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^{n-2} b_{n,i} \left(L_{n-i}^{(\alpha)}(x) - \tilde{c}_{n-i-1} L_{n-i-1}^{(\alpha)}(x) \right) + b_{n,n-1} \left(L_1^{(\alpha)}(x) - \tilde{c}_0 + \tilde{a}_0 \right).$$

Mas, $\tilde{a}_0 = \tilde{c}_0$. Logo, de (2.35), temos que

$$\begin{aligned} |S_n(x)| &\leq \sum_{i=0}^{n-2} b_{n,i} \left(\left| L_{n-i}^{(\alpha)}(x) \right| + \tilde{c}_{n-i-1} \left| L_{n-i-1}^{(\alpha)}(x) \right| \right) + b_{n,n-1} \left| L_1^{(\alpha)}(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-2} [b_{n,i} (A(n, \alpha) e^{x/2} + \tilde{c}_{n-i-1} A(n, \alpha) e^{x/2})] + b_{n,n-1} A(n, \alpha) e^{x/2} \\ &= \left[\sum_{i=0}^{n-2} b_{n,i} (1 + \tilde{c}_{n-i-1}) + b_{n,n-1} \right] A(n, \alpha) e^{x/2}. \end{aligned}$$

• Consideremos $\alpha - \xi < 0$. Então, $\tilde{c}_n < 2 + \frac{\alpha - \xi}{n} < 2$, da equação (4.51). Neste caso, obtemos ainda

$$\tilde{a}_n < \left(2 + \frac{\alpha - \xi}{n} \right) \frac{2n + \alpha - \xi}{(2 + \lambda)n + \alpha - \xi} < 2 \frac{2 + \frac{\alpha - \xi}{n}}{2 + \lambda + \frac{\alpha - \xi}{n}} < \frac{4}{2 + \lambda}.$$

- Seja $\alpha - \xi \geq 0$. Então, $\alpha - \xi > \frac{\alpha - \xi}{n}$. Logo, $\tilde{c}_n < 2 + \frac{\alpha - \xi}{n} < 2 + \alpha - \xi$.

Além disso, da equação (4.52),

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &< \left(2 + \frac{\alpha - \xi}{n}\right) \frac{2n + \alpha - \xi}{(2 + \lambda)n + \alpha - \xi} < (2 + \alpha - \xi) \frac{2 + \frac{\alpha - \xi}{n}}{2 + \lambda + \frac{\alpha - \xi}{n}} \\ &< (2 + \alpha - \xi) \frac{2 + \alpha - \xi}{2 + \lambda + \alpha - \xi} = \frac{(2 + \alpha - \xi)^2}{2 + \lambda + \alpha - \xi}. \end{aligned}$$

Portanto, dos dois casos acima, obtemos

$$\tilde{c}_n < c = \begin{cases} 2 + \alpha - \xi & \text{se } \alpha > \xi, \\ 2 & \text{se } \alpha \leq \xi \end{cases}$$

e

$$\tilde{a}_n < r = \begin{cases} \frac{(2 + \alpha - \xi)^2}{2 + \lambda + \alpha - \xi} & \text{se } \alpha > \xi, \\ 2 & \text{se } \alpha \leq \xi. \end{cases}$$

Fazendo $C = 1 + c$, chegamos aos resultados do teorema. ■

Capítulo 5

Considerações Finais

Sabemos que os polinômios ortogonais clássicos de Jacobi - $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ e Laguerre - $L_n^{(\alpha)}$ formam seqüências de polinômios ortogonais segundo os produtos internos

$$\langle f, g \rangle_J = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad \alpha, \beta > -1,$$

$$\langle f, g \rangle_L = \int_0^\infty f(x)g(x)x^\alpha e^{-x} dx, \quad \alpha > -1,$$

respectivamente.

Como já observamos, Meijer mostrou que, em um par coerente, uma das medidas deve ser clássica. Em particular, mostrou que existem dois tipos de pares coerentes de medidas envolvendo a medida clássica de Jacobi e, também, apenas dois tipos de pares coerentes de medidas envolvendo a medida clássica de Laguerre

Berti, Bracciali e Sri Ranga [11], seguindo Berti e Sri Ranga [10], introduziram uma maneira alternativa de se estudar os polinômios ortogonais de Sobolev que satisfazem a uma relação de recorrência da forma (2.39). Esta abordagem permite estender o par de medidas do produto interno de Sobolev além do conceito de pares coerentes e ainda manter a relação de recorrência exigida. Nesse artigo, demonstraram os seguintes resultados.

Caso I

Teorema 5.1. [11, Teorema 3.1] *Sejam $d\phi_1$ e $d\psi_1$ medidas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos $\{P_n^{\phi_1}\}$ e $\{P_n^{\psi_1}\}$ satisfazem $P_n^{\phi_1}(x) = nP_{n-1}^{\psi_1}$, $n \geq 1$. Seja a medida $d\psi_0$ dada por $d\psi_0(x) = (1 + \kappa x)d\phi_1(x)$, onde κ é tal que $1 + \kappa x$ é finito e não-negativo no suporte de $d\phi_1$. Então, os polinômios ortogonais de Sobolev mônicos*

$\{S_n = S_n^{(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)}\}$, associados ao produto interno

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{S_1} &= \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle f, g \rangle_{\phi_1} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1} + \kappa_3 \langle f', xg' \rangle_{\psi_1} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)(1 + \kappa_1 + \kappa x)d\phi_1(x) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)(\kappa_2 + \kappa_3 x)d\psi_1(x), \end{aligned} \quad (5.1)$$

satisfazem $S_0(x) = 1$,

$$S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) = P_{n+1}^{\phi_1}(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + b_n P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 0.$$

Os coeficientes $a_n = a_n(\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ e $b_n = b_n(\kappa)$ são dados por

$$a_n = \frac{b_n \rho_n^{\psi_0} + n(n+1)\kappa_3 \rho_n^{\psi_1}}{\langle S_n, S_n \rangle_{S_1}}, \quad b_n = \frac{\kappa \alpha_{n+2}^{\phi_1}}{1 + \kappa(\beta_{n+1}^{\phi_1} - b_{n-1})}, \quad n \geq 1,$$

com $a_0 = \kappa \alpha_2^{\phi_1} / (\kappa b_0^{-1} \alpha_2^{\phi_1} + \kappa_1)$ e $b_0 = \kappa \alpha_2^{\phi_1} / (1 + \kappa \beta_1^{\phi_1})$. Quando $\kappa = 0$, como $d\phi_1 = d\psi_0$, devemos tomar $b_n = 0$ e $\kappa^{-1} b_n = \alpha_{n+2}^{\phi_1}$, $n \geq 0$. Além disso, os coeficientes a_n podem ser recursivamente gerados por

$$a_n = \frac{[\kappa + n(n+1)\tau_{n+1}\kappa_3]\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{\kappa b_n^{-1} \alpha_{n+2}^{\phi_1} + \kappa b_{n-1} + \kappa_1 + n^2 \tau_n [\kappa_2 + \kappa_3 \beta_n^{\phi_1}] - [\kappa + n(n-1)\kappa_3 \tau_n] a_{n-1}},$$

para $n \geq 1$.

As constantes κ_1 , κ_2 e κ_3 são tais que o produto interno S_1 é positivo definido.

O teorema acima se aplica a duas escolhas particulares de polinômios ortogonais clássicos. Uma delas está associada aos polinômios de Jacobi quando consideramos $d\phi_1(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $d\psi_1(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx$ e $d\psi_0(x) = (1+\kappa x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$, $-1 \leq \kappa \leq 1$.

Agora, se tomarmos $d\phi_1(x) = x^\alpha e^{-x} dx$, $d\psi_1(x) = x^{\alpha+1} e^{-x} dx$ e $d\psi_0(x) = (1 + \kappa x)x^\alpha e^{-x} dx$, $\forall \kappa \geq 0$, obtemos a outra escolha que está associada aos polinômios de Laguerre.

Além disso, o par de medidas que aparece em (5.1)

$$\{(1 + \kappa_1 + \kappa x)d\phi_1(x), (\kappa_2 + \kappa_3 x)d\psi_1(x)\}, \quad \text{com } \kappa_3 \neq 0, \quad (5.2)$$

não forma mais um par coerente de medidas.

Caso II

Teorema 5.2. [11, Teorema 4.1] *Sejam $d\phi_0$ e $d\psi_0$ medidas clássicas tais que os polinômios ortogonais mônicos $\{P_n^{\phi_0}\}$ e $\{P_n^{\psi_0}\}$ satisfazem $P_n^{\psi_0}(x) = nP_{n-1}^{\phi_0}$, $n \geq 1$. Seja a medida $d\psi_1$ dada por $(x + \kappa)d\psi_1(x) = c(\kappa)d\phi_0(x)$, onde κ é tal que $(x + \kappa)/c(\kappa)$ é finito e não-negativo no suporte de $d\psi_1$. Então, os polinômios ortogonais de Sobolev mônicos $\{S_n = S_n^{(\kappa, \kappa_1, \kappa_2)}\}$, associados ao produto interno*

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{S_2} &= \langle f, g \rangle_{\psi_0} + \kappa_1 \langle f', g' \rangle_{\phi_0} + \kappa_2 \langle f', g' \rangle_{\psi_1} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\psi_0(x) + \int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)[c(\kappa)^{-1}\kappa_1(x + \kappa) + \kappa_2]d\psi_1(x), \end{aligned} \quad (5.3)$$

satisfazem $S_0(x) = 1$, $S_1(x) = P_1^{\psi_0}(x)$,

$$S_{n+1}(x) + a_n S_n(x) = P_{n+1}^{\psi_0}(x) + \tilde{b}_n P_n^{\psi_0}(x), \quad n \geq 1.$$

Os coeficientes $a_n = a_n(\kappa, \kappa_1, \kappa_2)$ e $\tilde{b}_n = \tilde{b}_n(\kappa)$ são dados por

$$a_n = \frac{\nu_n(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0}\tilde{b}_n}{\nu_n(\kappa_1)\alpha_n^{\phi_0} + \tilde{b}_{n-1}[n(n-1)\kappa_2c(\kappa) + \nu_{n-1}(\kappa_1)(\tilde{b}_{n-1} - a_{n-1})]}, \quad n \geq 2,$$

com $a_1 = \tilde{b}_1\nu_1(\kappa_1)/(\nu_1(\kappa_1) + \kappa_2\rho_0^{\psi_1}/\rho_0^{\phi_0})$ e $\nu_n = n^2\kappa_1 + \rho_n^{\psi_1}/\rho_n^{\phi_0}$, $n \geq 1$. Os coeficientes $\tilde{b}_n$ são tais que $\tilde{b}_n = [(n+1)/n]\tilde{b}_{n-1}$, onde

$$\tilde{b}_0 = \frac{\alpha_2^{\psi_1}}{\beta_1^{\psi_1} + \kappa} \quad e \quad \tilde{b}_n = \beta_{n+1}^{\phi_0} + \kappa - \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{\tilde{b}_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

As constantes κ_1 e κ_2 são tais que o produto interno S_2 é positivo definido.

Da mesma forma que no Caso I, o Teorema 5.2 também nos leva a duas escolhas particulares de polinômios ortogonais clássicos. Para a primeira delas, associada aos polinômios de Jacobi, tomamos $d\phi_0(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx$, $d\psi_0(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$ e $d\psi_1$ é tal que

$$\int F(x)d\psi_1(x) = \int_{-1}^1 F(x)\frac{c(\kappa)}{1+\kappa x}(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}dx + \kappa_3 F(\kappa),$$

$|\kappa| \geq 1$ e $\kappa_3 \geq 0$.

Agora, para a escolha associada aos polinômios de Laguerre, consideramos $d\phi_0(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}dx$, $d\psi_0(x) = x^{\alpha}e^{-x}dx$ e $d\psi_1$ tal que

$$\int F(x)d\psi_1(x) = \int_0^{\infty} F(x)\frac{c(\kappa)}{(\kappa+x)}x^{\alpha+1}e^{-x}dx + \kappa_3 F(\kappa),$$

$\kappa \leq 0$ e $\kappa_3 \geq 0$.

Para o produto interno (5.3), se $\kappa_1 \neq 0$, então o par de medidas

$$\{d\psi_0(x), [c(\kappa)^{-1}\kappa_1(x + \kappa) + \kappa_2]d\psi_1(x)\}, \quad (5.4)$$

não será mais coerente.

Para esses dois tipos de pares de medidas que não formam pares coerentes, (5.2) e (5.4), desconhecemos trabalhos publicados sobre o comportamento assintótico dos polinômios de Sobolev-Jacobi e Sobolev-Laguerre, ortogonais com relação aos produtos internos (5.1) e (5.3), e polinômios associados às medidas envolvidas. Pretendemos, então, investigar o comportamento assintótico desses polinômios como trabalho futuro.

Sobre este assunto, mas com pares de medidas (simetricamente coerentes) relacionadas às medidas de Gegenbauer, foi recentemente aceito para publicação, na revista *Asymptotic Analysis*, o artigo *Asymptotics for Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials associated with non-coherent pairs of measures* de autoria de E.X.L. de Andrade, C.F. Bracciali e A. Sri Ranga.

Referências Bibliográficas

- [1] ABRAMOWITZ, M., E STEGUM, I. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. Dover pub., New York, 1972.
- [2] ALFARO, M.; MORENO-BALCÁZAR, J., E REZOLA, M. L. Laguerre-sobolev orthogonal polynomials: asymptotics for coherent pairs of type ii. *J. Approx. Theory* 122 (2003), 79–96.
- [3] ALFARO, M; MARCELLAN, M., E RONVEUAX, A. Sobolev-type orthogonal polynomials: the nonglagonal case. *J. Approx. Theory* 83 (1995), 266–287.
- [4] ANDRADE, E., E BRACCIALI, C. *Polinômios ortogonais e similares*. IBILCE/UNESP, Apostila, 2003.
- [5] ANDREWS, G.E.; ASKEY, R., E ROY, R. Special functions,. *Encyclopedia of Applications* (1999).
- [6] ARFKEN, G., E WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press Limited, 1995.
- [7] ASKEY, R., E ISMAIL, M. Recurrence relations, continued fractions and orthogonal polynomials. *Mem. Amer. Math. Soc.* 300 (1984).
- [8] ASSCHE, W. V. *Asymptotics for orthogonal polynomials*. Springer-Verlag, 1987.
- [9] BERNSTEIN, S. Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini,i,ii. *J. Math. Pures Appl* 9 (1930), 127–177.
- [10] BERTI, A., E RANGA, A. Companion orthogonal polynomials: some applications. *Appl. Num. Math.* 39 (2001), 127–149.

- [11] BRACCIALI, C.F.; BERTI, A., e RANGA, A. Orthogonal polynomials associated with related measures and sobolev orthogonal polynomials. *Numer. Algorithm* 34 (2003), 203–216.
- [12] CASE, K., e KAC, M. A discrete version of the inverse scattering problem. *J. Math. Phys.* 14 (1973), 594–603.
- [13] CHARLIE, C. Über die darstellung willkürlicher funktionen. *Ark. Mat. Astr. och fysic* 2 (1905-1096), 20.
- [14] CHEBYSHEV, P. Sur les fractions continues. *J. Math. pures Appl.* 3 (1858), 289–323.
- [15] CHEBYSHEV, P. L. Sur le développement des fonctions à une seule variable. *Bull. Phys.-Math.Acad. Imp. Sci. St. Petersburg* 56 (1859), 193–200.
- [16] CHEBYSHEV, P. L. Sur les valeurs limites des intégrales. *J. Math. Pures Appl.* 19 (1874), 157–160.
- [17] CHIHARA, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach Science Publishers Inc., 1978.
- [18] CHRISTOFFEL, E. B. Eber die gaussische quadratur und eine verallgemeinerung derselben. *J. Reine Angew. Math.* 55 (1858), 61–82.
- [19] DARBOUX, G. Mémoires sur l’approximation des fonctions de très grands nombres. *J. Math.* 4 (1878), 5–56;377–416.
- [20] FAVARD, F. Sur les polynômes de tchebicheff. *C.R. Acad. Sci. Paris* 200 (1935), 2052–2053.
- [21] FELDHEIM, E. On a system of orthogonal polynomials associated with a distribution of stieltjes type. *C.R. Acad. URSS* 31 (1941), 528–533.
- [22] FREUD, G. Über die asymptotik orthogonaler polynome. *Publ. Inst. math.* 11 (1957), 19–32.
- [23] FREUD, G. *Orthogonal polynomials*. Pergamon Press, Oxford, 1971.
- [24] GAUSS, K. Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. *Comm. Soc. Sci. Gottingensis Rec.* 3 (1816).

- [25] GERONIMUS, Y. L. *Polynomials orthogonal on a circle and interval*. Pergamon Press, Oxford, 1960.
- [26] GERONIMUS, Y. L. Certain limiting properties of orthogonal polynomials. *Vestnik Kharkov Gos. Uni.* 32 (1966), 40–50.
- [27] HENRICI, P. *Applied an Computational Complex Analysis*, vol. 1. Wiley Interscience, 1988.
- [28] ISERLES, A.; KOCH, P. E., E SANZ-SERNA, J. M. On polynomials with respect to certain sobolev inner products. *J. Approx. Theory* 65 (1991), 151–175.
- [29] JACOBI, C. Über gauss’ neve methode, die werthe der integrále näherungsweise zu finden. *J. Reine Angew. Math.* 301-308 (1826).
- [30] JACOBI, C. Untersuchungen über die differentialgleichung der hypergeometrische reihe. *J. Reine Angew. Math.* 56 (1859), 149–165.
- [31] KOLMOGOROV, A. Stationary sequences in hilbert spaces. *Izv. Akad. Nauk. CCCP* 5 (1941), 3–14.
- [32] KREIN, M. On a generalization of the investigations of g. szegő, v.i. smirnov and a.n. kolmogorov. *Dokl. Akad. Nauk. CCCP* 46 (1945), 95–98.
- [33] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library, 1989.
- [34] LAGUERRE, E. Sur l’intégrale $\int$. *Bull.Soc. Math.* 7 (1879), 72–81.
- [35] LAPLACE, P. *Traité de mécanique céleste*.
- [36] LEGENDRE, A. Recherches sur l’attraction des sphéroides homogènes. *Mém. Math. Phys., présentés à l’Acad. Sciences* 10 (1785).
- [37] LIMA, E. *Curso de análise*. Instituto de matemática pura e aplicada, 1982.
- [38] MEIJER, H. G. Determination of all coherent pairs. *J. Approx. Theory* 89 (1997), 321–343.

- [39] MEIJER, H. G.; PÉREZ, T. E., E PIÑAR, M. Asymptotics of sobolev orthogonal polynomials for coherent pairs of laguerre type. *J. Math. Anal. Appl.* 245 (2000), 528–546.
- [40] MEIXNER, J. Orthogonale polynomsysteme mit einem besonderen gestalt der erzeugenden funktion. *J. London Math. Soc.* 9 (1934), 6–13.
- [41] NEVAI, P. G. *Orthogonal Polynomials*, vol. 18. Memoirs American Mathematical Society, 1979.
- [42] OLIVEIRA, E. C., E RODRIGUES JR., W. A. *Funções analíticas com aplicações*. Livraria da Física, 2006.
- [43] PAN, K. On sobolev orthogonal polynomials with coherent pairs the jacobi case. *J. Comp. and Appl. Math.* 79 (1997), 249–262.
- [44] PAN, K. Asymptotics for sobolev orthogonal polynomials with coherent pairs: the jacobi case, type 1. *Proc. Amer. Math. Soc.* 126, 8 (1998), 2377–2388.
- [45] PERRON, O. Die lehre von den kettenbruchen. *Chelsea Publishing Company* (1950).
- [46] POLLACKEZ, F. Sur une généralisation des polynômes de legendre. *C.R. Acad. Sci. Paris* 228 (1949), 1363–1365.
- [47] POLLACKEZ, F. Sur une généralisation des polynômes de jacobi. *Mémoires Sci. Math.* 131 (1956).
- [48] RAINVILLE, E. *Special functions*. The macmillan company, 1960.
- [49] RIESZ, F., E SZ.-NAGY, B. *Functional Analysis*. Dover Publications, Inc., 1990.
- [50] SOARES, M. *Cálculo em uma variável complexa*. Coleção Matemática universitária, 1999.
- [51] SOIN, N. J. Recherches sur les fonctios cylindriques et le développement de fonctions continues en séries. *Math. Ann.* 16 (1880), 1–80.
- [52] STIELTJES, T. J. Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques. *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.* 1 (1884), 409–426.

- [53] STIELTJES, T. J. Recherches sur les fractions continues. *Ann. Fac. Sci.* 8 (1894).
- [54] STONE, M. Linear transformations in hilbert space and their applications to analysis. *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.* 15 (1932).
- [55] SZEGÖ, G. Hankel forms. *Mat. Term. Tud. Ert.* 36 (1918), 497–538.
- [56] SZEGÖ, G. Beiträge zur theorie der toeplitzschen formen,ii. *Mat. Z.* 9 (1921), 167–190.
- [57] SZEGÖ, G. *Orthogonal Polynomials*, vol. 23. American Mathematical Society, 1991.
- [58] TITCHMARSH, E. *The theory of functions*. Oxford Univ. Press, London, 1939.