

Péter Almay

○ Conceito de Medida na Geometria e
Algumas de suas Aplicações em
Análise Matemática



1910000177



me

PÉTER ALMAY

Almay

O CONCEITO DE MEDIDA NA GEOMETRIA
E ALGUMAS DE SUAS APLICACÕES EM ANÁLISE MATEMÁTICA

Tese apresentada à Faculdade de
Filosofia, Ciências e Letras de
São José do Rio Preto para ob-
tenção do título de Doutor em
Ciências.

177/84

São José do Rio Preto

1973

3



Índice

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

CAPÍTULO II

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

CAPÍTULO V

CAPÍTULO VI

CAPÍTULO VII

CAPÍTULO VIII

CAPÍTULO IX

CAPÍTULO X

CAPÍTULO XI

CAPÍTULO XII

CAPÍTULO XIII

CAPÍTULO XIV

CAPÍTULO XV

AOS MEUS PAIS

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

Página

Limite segundo Moore-Smith	1
----------------------------------	---

CAPÍTULO II

a) Medida de um segmento	6
b) Medida ou amplitude de um intervalo $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$)	14

CAPÍTULO III

a) Divisão de um intervalo compacto no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$)	17
b) Medida de Jordan no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$)	18
c) Divisão de um conjunto $\mathcal{J}$ -mensurável	22
d) Integral de Riemann no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$)	23
e) Interpretação Geométrica da integral de Riemann no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$)	44

CAPÍTULO IV

a) Medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$)	46
b) Integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$)	58
c) Interpretação Geométrica da Integral de Lebesgue	69

CAPÍTULO V

a) Superfícies no $\mathbb{R}^3$	72
b) Modos de dar uma superfície	75
c) Curvas no $\mathbb{R}^3$	76
d) Modos de dar uma curva	79

CAPÍTULO VI

Comprimento de uma curva retificável	82
--	----

CAPÍTULO VII

a) Paradoxo de Schwarz	87
b) Área de uma superfície regular	89

CAPÍTULO VIII

a) Uma outra definição de comprimento de curva (para curvas regulares)	93
b) Comprimento de curva como uma medida	94
c) Área de superfície como uma medida	95

I N T R O D U Ç Ã O

A pesquisa da qual se originou este trabalho inspirou-se, de um lado, nas aulas de Análise Matemática e de Geometria Diferencial que ministramos nas Universidades Católicas de São Paulo e de Campinas, bem como mais tarde na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de São José do Rio Preto e por outro lado em cursos e seminários de que participamos na Universidade de São Paulo. Apesar disso, consultas metódicas de obras versando sobre o assunto tiveram lugar a partir de janeiro deste ano, sendo que a primeira redação nós iniciamos aos meados de julho.

Diversas idéias nos nortearam para afinal publicar este trabalho:

- A introdução do conceito de medida de segmento a partir de resultados conhecidos da Geometria para depois, através de um processo construtivo chegar a conceitos mais complexos e sutis como os da medida de Jordan e de Lebesgue no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$);

- A apresentação do conceito de limite segundo Moore-Smith que generaliza a definição clássica de limite e sua aplicação na formalização e simplificação de definições e de demonstrações principalmente no estudo das integrais de Riemann e de Lebesgue bem como no estudo do comprimento de curva e da área de superfície;

- A interpretação geométrica das integrais de Riemann e de Lebesgue no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$) fundamentada nas Teorias de Medida de Jordan e de Lebesgue;

- O estudo comparativo entre curvas e superfícies, mostrando analogias e algumas discrepâncias entre as mesmas e procurando, mediante definições convenientes, restabelecer as analogias nos pontos em que subsistem discrepâncias;

- A formulação de definições convenientes de funções de conjuntos que satisfazem à definição geral de medida e que em particular recaem no comprimento de curvas e área de superfícies.

Nestas condições, no Capítulo I, damos a noção de conjunto orientado por uma relação de ordem parcial e definimos limite segundo Moore-Smith de uma função cujo domínio é orientado. No Capítulo II damos a

noção de comprimento de um segmento e deduzimos a medida de um intervalo no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$). O Capítulo III trata das divisões elementares e normais de intervalos compactos e da $\mathcal{J}$ -medida de conjuntos. Damos também a noção de divisão generalizada de um intervalo compacto, o conceito da $\mathcal{R}$ -integral no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$) e suas propriedades mais importantes utilizando limites de Moore-Smith além da interpretação geométrica da $\mathcal{R}$ -integral no $\mathbb{R}^p$. No Capítulo IV construímos a medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$), definimos divisões mensuráveis e divisões mensuráveis generalizadas para finalmente introduzir a noção de $\mathcal{L}$ -integral no $\mathbb{R}^p$ e interpretá-la de um modo formal, geometricamente. Nos Capítulos V e VI damos a noção geral de curva e superfície; para frizar as analogias existentes entre ambas, analisamos suas diversas formas. Em seguida, definimos comprimento de uma curva retificável e deduzimos consequências utilizando novamente o limite de Moore-Smith. No Capítulo VII mostramos a impossibilidade de definir área de superfície de um modo inteiramente análogo ao que foi feito para o comprimento das curvas retificáveis, apresentando o célebre exemplo de Schwarz que em vista do problema a que se acha ligado, costuma ser denominado de Paradoxo de Schwarz. Baseados em propriedades de curvas e superfícies regulares, formulamos uma definição de área para superfícies regulares na forma paramétrica. Obtida a fórmula da área, apontamos de novo a sua analogia com a fórmula correspondente do comprimento de curva regular. Com o fito de restabelecer a analogia entre curvas e superfícies no que se refere às definições de comprimento de uma curva e área de uma superfície, no Capítulo VIII propomos uma nova definição de comprimento de curva específica para as curvas regulares. Finalmente, utilizando os resultados conseguidos, mostramos neste capítulo que o comprimento de uma curva e a área de uma superfície constituem valores particulares de medidas definidas sobre $\mathcal{G}$ -anéis convenientes. Estes fatos traduzem não apenas uma nova analogia entre curvas e superfícies mas também uma grande semelhança com a $\mathcal{L}$ -medida de um conjunto no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$).

Queremos deixar nestas linhas os nossos agradecimentos ao Dr. Jairo Simon da Fonseca, que tão gentilmente aceitou a orientação deste trabalho de pesquisa. Ao diretor da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de São José do Rio Preto, Dr. Celso Volpe, que com sua amizade de sempre, depositou em nós a sua confiança ao convidar-nos como docente junto ao Departamento de Matemática em 1969, dando-nos a honra de

colaborar no então recém-fundado Curso de Matemática. Aos professores Almerindo Marques Bastos e Dr. Paulo Boulos que apesar do pouco tempo de que dispunham, leram grande parte dos originais, dando sugestões e fazendo críticas oportunas antes da redação final deste trabalho. Aos nossos antigos professores de faculdade e a todos os amigos e colegas que nos animaram na consecução do nosso objetivo. Finalmente, mas não em último lugar, agradecemos a nossa querida esposa que não poupando tempo e trabalho, isentou-nos de grande parte dos nossos afazeres cotidianos; sem a sua ajuda abnegada, acreditamos que não haveria condições de chegar ao término deste.

CAPÍTULO I

CONCEITO DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO SEGUNDO MOORE-SMITH

Seja A um conjunto e $\succ$ uma relação binária sobre ele que chamaremos de relação "segue". Diremos que $\succ$ é uma relação de ordem parcial sobre A ou que A é parcialmente ordenado pela relação $\succ$, se e somente se $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in A) (\alpha \succ \beta \text{ e } \beta \succ \gamma \Rightarrow \alpha \succ \gamma)$, isto é, a relação $\succ$ sobre A satisfaz a propriedade transitiva. O conjunto A ordenado pela relação $\succ$ indicaremos por $(A, \succ)$ ou simplesmente por A , se não houver ambiguidade.

Definição: "Um conjunto A parcialmente ordenado pela relação $\succ$ se diz orientado por $\succ$ e se indica $A, \succ$, se e somente se $(\forall \alpha, \beta \in A) (\exists \gamma \in A) (\gamma \succ \alpha \text{ e } \gamma \succ \beta)$, isto é, $(A, \succ)$ satisfaz a propriedade compositiva."

Exemplos:

1 - Sendo $(\mathbb{N}, >)$, onde $>$ é a relação de ordem habitual sobre $\mathbb{N}$, então $\mathbb{N}$ é orientado por $>$;

2 - Sendo $(\mathbb{N}^2, \succ)$ tal que $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^2) (\alpha = (a, b), \beta = (c, d)) (\alpha \succ \beta \Leftrightarrow a > c \text{ e } b > d)$, então $\mathbb{N}^2$ é orientado por $\succ$;

3 - Seja $a \in \mathbb{R}$ e $\succ$ uma relação de ordem sobre $\mathbb{R} - \{a\}$ tal que $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{a\}) (x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow |x_1 - a| < |x_2 - a|)$, então $\mathbb{R} - \{a\}$ é um conjunto orientado por $\succ$;

4 - Sendo E um conjunto qualquer bem como $(\wp(E), \supset)$, onde $\supset$ é a relação "contém" entre conjuntos, então $\wp(E)$ é orientado por $\supset$.

Definição: "Seja E orientado por $\succ$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Diz-se que $f(x)$ tem limite b em E no sentido de Moore-Smith e se indica $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = b$, se e somente se $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists x_0 \in E) (\forall x \in E) (x \succ x_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)$ ".

$$(x \succ x_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)."$$
 (+).

Inicialmente mostremos que esta definição contém como caso particular a definição clássica de limite, no caso de $E \subset \mathbb{R}^n$, isto é, sendo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $F = E - \{x_0\}$ orientado por $\succ$ tal que $(\forall x_1, x_2 \in F) (x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow \|x_1 - x_0\| < \|x_2 - x_0\|)$, então $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \in F, \succ} f(x) = b$.

De fato, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, temos que para todo número real $\varepsilon > 0$ se pode determinar algum número real $\delta > 0$, tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ sempre que $x \in E$ e $0 < \|x - x_0\| < \delta$.

Mas existe $a (a \in E)$ tal que $\|x_0 - a\| \leq \delta$. Assim $(\forall x \in E) (x \succ a \Rightarrow \|x - x_0\| < \|x_0 - a\| \leq \delta)$ e portanto, $|f(x) - b| < \varepsilon$. Daí vem finalmente que $\lim_{x \in F, \succ} f(x) = b$. Analogamente $\lim_{x \in F, \succ} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

No caso de $E \subset \mathbb{R}$ ser um conjunto não limitado inferiormente (ou superiormente), orientado por $\succ$ definida como sendo $(\forall x_1, x_2 \in E) (x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2)$ (ou $(x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2)$), facilmente se demonstra também que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ (ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$) $\Leftrightarrow \lim_{x \in E, \succ} f(x) = b$.

Demonstra-se que para os limites de Moore-Smith valem resultados análogos às propriedades da Teoria Clássica de Limites. Citemos pois algumas propriedades:

1) Teorema da Unicidade

2) Teorema do Confronto, que pode ser enunciado da seguinte maneira: Sendo $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções definidas em E orientado por $\succ$, tais que $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = \lim_{x \in E, \succ} g(x) = b \in \mathbb{R}$ e $(\exists a \in E) (\forall x \in E) (x \succ a \Rightarrow h(x) \text{ está entre os valores } f(x) \text{ e } g(x))$, então existe

$\lim_{x \in E, \succ} h(x)$ e $\lim_{x \in E, \succ} h(x) = b$.

3) Teorema da Conservação do Sinal cujo enunciado pode ser dado assim: Se $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = b \neq 0$, então $(\exists a \in E) (\forall x \in E) (x \succ a \Rightarrow f(x) \cdot b > 0)$.

4) Teoremas sobre operações:

a) Se $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, então existe $\lim_{x \in E, \succ} [kf(x)]$ e $\lim_{x \in E, \succ} [kf(x)] = kb$;

b) Se $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = b$ e $\lim_{x \in E, \succ} g(x) = c$, então existe $\lim_{x \in E, \succ} [f(x) \pm g(x)]$ e $\lim_{x \in E, \succ} [f(x) \pm g(x)] = b \pm c$;

(+) Quando uma função satisfaz a definição dada diremos que ela é convergente em E no sentido de Moore-Smith. Em caso contrário diremos que ela é divergente em E no sentido de Moore-Smith. Em caso de convergência diremos também que existe o limite.

c) Se $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = b$ e $\lim_{x \in E, \succ} g(x) = c$, então existe

$$\lim_{x \in E, \succ} [f(x) \cdot g(x)] \text{ e } \lim_{x \in E, \succ} [f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c;$$

d) Se $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = b$ e $\lim_{x \in E, \succ} g(x) = c \neq 0$, então existe

$$\lim_{x \in E, \succ} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ e } \lim_{x \in E, \succ} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

Para evidenciar as analogias da Teoria dos Limites de Moore-Smith com a Teoria Clássica, demonstramos a seguir a propriedade 4) b):

Se $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = b$, então para todo ε ($\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$), podemos achar algum elemento $a_0 \in E$ tal que $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $x \succ a_0$;

Se $\lim_{x \in E, \succ} g(x) = c$, então para todo $\varepsilon > 0$ há em correspondência algum elemento $a_1 \in E$, tal que $|g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ sempre que $x \succ a_1$.

Sendo E orientado por $\succ$, existe $a \in E$ tal que $a \succ a_0$ e $a \succ a_1$. Assim sendo, $(\forall \varepsilon > 0) (\exists a \in E) (\forall x \in E) (x \succ a \Rightarrow |(f(x) \pm g(x)) - (b \pm c)| = |f(x) - b| \pm |g(x) - c| \leq |f(x) - b| + |g(x) - c| < \varepsilon)$, ou seja, existe o limite $\lim_{x \in E, \succ} [f(x) \pm g(x)]$ e é igual a $b \pm c$.

Definição: "Seja E orientado por $\succ$. Uma função $f(x)$ definida em E é isotônica (ou antitônica) em E , se e somente se $(\forall x_1, x_2 \in E) (x_1 \succ x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$ (ou $(x_1 \succ x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$)".

Na definição acima valendo apenas as desigualdades dizemos que a função é estritamente isotônica (ou antitônica). Para designar uma função isotônica ou antitônica em E usaremos a expressão função monotônica.

Proposição I: "Se $f(x)$ é isotônica (ou antitônica) em E orientado por $\succ$ e é limitada superiormente (ou inferiormente) em E ; então $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = \sup_E f(x)$ (ou $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = \inf_E f(x)$)".

Demonstração:

Faremos a demonstração para o caso de $f(x)$ isotônica em E ; analogamente podemos proceder se $f(x)$ é antitônica em E .

De fato, se $f(x)$ é isotônica em E orientado por $\succ$, então $(\forall x_1, x_2 \in E) (x_1 \succ x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$.

Sendo $\sup_E f(x) = b \in \mathbb{R}$, temos $(\forall \varepsilon > 0) (\exists a \in E) (b - \varepsilon < f(a))$ e portanto, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists a \in E) (\forall x \in E) (x \succ a \Rightarrow b - \varepsilon < f(a) \leq f(x) \leq b)$ e portanto, $|f(x) - b| < \varepsilon$, o que demonstra a proposição.



Proposição: "Seja (a_n) uma sequência real e N orientado por uma relação de ordem $\succ$. Uma condição necessária e suficiente para que (a_n) seja convergente no sentido Moore-Smith é que $(\forall \varepsilon \in R_{++}) (\exists n_0 \in \in N) (\forall n_i \in N) (i=1,2) (n_i \succ n_0 \Rightarrow |a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon)$ ".

Demonstração:

Nec. $\Rightarrow$

Sendo (a_n) convergente, então existe $a \in R$ tal que $\lim_{n \in N, \succ} a_n = a$, ou seja, $(\forall \varepsilon \in R_{++}) (\exists n_0 \in N) (\forall n \in N) (n \succ n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$. Daí vem, $(\forall n_i \in N) (i=1,2) (n_i \succ n_0 \Rightarrow |a_{n_i} - a| < \frac{\varepsilon}{2})$. Portanto, $|a_{n_1} - a_{n_2}| = |(a_{n_1} - a) + (a - a_{n_2})| \leq |a_{n_1} - a| + |a - a_{n_2}| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ou seja, a condição é necessária.

Suf. $\Leftarrow$

Sabemos por hipótese: $(\forall \varepsilon \in R_{++}) (\exists n_0 \in N) (\forall n_i \in N) (i=1,2) (n_i \succ n_0 \Rightarrow |a_{n_1} - a_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{3})$. Assim sendo, fixando n_2 , temos: $(\forall n \in N) (n \succ n_0 \Rightarrow |a_n - a_{n_2}| < \frac{\varepsilon}{3})$ e consequentemente, $a_{n_2} - \frac{\varepsilon}{3} < a_n < a_{n_2} + \frac{\varepsilon}{3}$. (1)

Para $\varepsilon = 3$, temos $(\exists n_0^* \in N) (\forall n \in N) (n \succ n_0^* \Rightarrow a_{n_2} - 1 < a_n < a_{n_2} + 1)$.

Seja $K = \max \{ |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0^*}|, |a_{n_2}| + 1 \}$. Temos então: $(\exists K > 0) (\forall n \in N) (|a_n| \leq K)$, ou seja (a_n) é limitada.

Sejam as sequências (ℓ_n) e (L_n) tais que $\ell_n = \inf_{m \succ n} a_m$ e $L_n = \sup_{m \succ n} a_m$. Evidentemente, (ℓ_n) é isotônica, (L_n) é antitônica e ambas as sequências são limitadas em N .

Pela proposição I $\lim_{n \in N, \succ} \ell_n = \ell = \sup_{n \in N} \ell_n$ e $\lim_{n \in N, \succ} L_n = L = \inf_{n \in N} L_n$.

Da condição (1) deduzimos: $(\forall n \in N) (n \succ n_0 \Rightarrow a_{n_2} - \frac{\varepsilon}{3} \leq \ell_n \leq a_n \leq L_n \leq a_{n_2} + \frac{\varepsilon}{3})$, ou seja $0 \leq a_n - \ell_n \leq \frac{2}{3} \varepsilon < \varepsilon$. Isto significa que

$\lim_{n \in N, \succ} (a_n - \ell_n) = 0$. Finalmente, sendo $a_n = (a_n - \ell_n) + \ell_n$, concluímos imediatamente: $\lim_{n \in N, \succ} a_n = \lim_{n \in N, \succ} (a_n - \ell_n) + \lim_{n \in N, \succ} \ell_n = a$, onde $a = \sup_{n \in N} \ell_n \in R$, ou seja (a_n) é convergente no sentido de Moore-Smith.

TEOREMA DA CONVERGÊNCIA DE CAUCHY (SEGUNDO MOORE-SMITH)

"Uma condição necessária e suficiente para que uma função real



$f(x)$ definida em $E \subset \mathbb{R}^n$ orientado pela relação $\succ$ seja convergente segundo Moore-Smith é que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists a \in E) (\forall x^i \in E) (i=1,2) (x^i \succ a \Rightarrow |f(x^1) - f(x^2)| < \varepsilon)$ "

Demonstração:

Nec. $\Rightarrow$

Sendo $f(x)$ convergente segundo Moore-Smith em E temos que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = b$. Daí vem:

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists a \in E) (\forall x \in E) (x \succ a \Rightarrow |f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2})$. Portanto,
 $(\forall x^i \in E) (i=1,2) (x^i \succ a \Rightarrow |f(x^i) - b| < \frac{\varepsilon}{2})$, ou seja,
 $|f(x^1) - f(x^2)| = |(f(x^1) - b) + (b - f(x^2))| \leq |f(x^1) - b| + |b - f(x^2)| < \varepsilon$
 e a condição é necessária.

Suf. $\Leftarrow$

Valendo a frase: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists a \in E) (\forall x^i \in E) (i=1,2) (x^i \succ a \Rightarrow |f(x^1) - f(x^2)| < \varepsilon)$, podemos escrever em particular: $(\forall n \in \mathbb{N}) (\exists a_n \in E) (\forall x^i \in E) (i=1,2) (x^i \succ a_n \Rightarrow |f(x^1) - f(x^2)| < \frac{1}{n})$.

Seja (b_ν) uma sub-sequência isotônica de (a_n) . Temos portanto:
 $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \nu_0 \in \mathbb{N}) (\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon}) (\forall \nu_i \in \mathbb{N}) (i=1,2) (\nu_i > \nu_0 \Rightarrow b_{\nu_i} \succ b_{\nu_0})$
 e conseqüentemente $|f(b_{\nu_1}) - f(b_{\nu_2})| < \frac{1}{\nu_0} < \varepsilon$. Isto significa que $(f(b_\nu))$ é uma sequência de Cauchy real. Daí segue que $(\exists b \in \mathbb{R})$
 $(\lim_{\nu \rightarrow +\infty} f(b_\nu) = b)$ e portanto valerão as frases:

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \nu \in \mathbb{N}) (\nu > \frac{2}{\varepsilon}) (|f(b_{\nu+1}) - b| < \frac{1}{\nu} < \frac{\varepsilon}{2})$ e $(\forall x \in E) (x \succ b_\nu \Rightarrow |f(b_{\nu+1}) - f(x)| < \frac{1}{\nu} < \frac{\varepsilon}{2})$. Assim vem então:

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists b_\nu \in E) (\forall x \in E) (x \succ b_\nu \Rightarrow |f(x) - b| = |(f(x) - f(b_{\nu+1})) + (f(b_{\nu+1}) - b)| \leq |(f(x) - f(b_{\nu+1}))| + |f(b_{\nu+1}) - b| < \varepsilon)$. Isto significa que $\lim_{x \in E, \succ} f(x) = b$, ou seja, $f(x)$ é convergente segundo Moore-Smith.

CAPÍTULO II

COMPRIMENTO DE UM SEGMENTO

Antes de introduzir noções gerais de medida, veremos o conceito de medida na Geometria Elementar. Em particular definiremos medida de um segmento. Para isso, com a finalidade de uniformizar notações e de estruturar com a devida clareza esta definição, enunciaremos inicialmente alguns postulados e outros resultados que embora possam ser demonstrados através de uma Teoria Racional Dedutiva, para lograr nossos objetivos, consideraremos intuitivos. Com finalidades análogas daremos conceitos primitivos e algumas definições que neste estudo também serão tomadas como conceitos primitivos.

Seja r uma reta que por um dos postulados de pertinência possui infinitos pontos. Indicaremos por $P, Q, R, \dots$ os pontos de r . Para a reta r que podemos considerar como o conjunto dos infinitos pontos que a compõe, enunciaremos os seguintes postulados:

rI: POSTULADO DA ORDEM: "Existe uma relação de ordem total sobre r ". Seja $R \subset r^2$ a relação cuja existência o postulado garante. Indicaremos por $\prec$ e $\succ$ a relação R e sua inversa R^{-1} , respectivamente; estas relações chamaremos de relação "precede" e de relação "segue", respectivamente. Dado um ponto P_0 de r , chamaremos de semi-retas opostas de mesma origem P_0 os conjuntos $r' = \{P \in r \mid P \prec P_0\}$ e $r'' = \{P \in r \mid P_0 \prec P\}$. Evidentemente todo ponto de r pertence a r' ou a r'' e ainda $r' \cup r'' = r$ e $r' \cap r'' = \{P_0\}$. Diremos que r' e r'' são semi-retas opostas determinadas pelo ponto P_0 . Vemos imediatamente que $(\forall P, Q \in r) (P \in r' \text{ e } Q \in r'' \Rightarrow P \prec Q)$. Ao par $(r, \prec)$ chamaremos de reta orientada pela relação $\prec$. Significado análogo daremos à notação $(r, \succ)$ e diremos que $(r, \prec)$ e $(r, \succ)$ têm orientações opostas. Convencio-



naremos dizer também que $(r, \prec)$ é a reta r orientada positivamente, sendo que a orientação oposta chamaremos de negativa.

rII: POSTULADO DE DEDEKIND OU DA CONTINUIDADE: "Se (r_1, r_2) é uma secção (*) da reta orientada $(r, \prec)$, então existe $P_0 \in r$ tal que todo ponto de r_1 precede P_0 e todo ponto de r_2 segue P_0 ."

Das considerações feitas após o postulado rI deduzimos que dado um ponto P_0 de r , ficam determinadas as semi-retas r' e r'' de origem P_0 . Fazendo então $r_1 = r'$ e $r_2 = r'' - \{P_0\}$ (ou então $r_1 = r' - \{P_0\}$ e $r_2 = r''$), temos evidentemente que os conjuntos r_1 e r_2 formam uma secção (r_1, r_2) da reta orientada $(r, \prec)$ que chamaremos de secção determinada pelo ponto P_0 . O par de classes r_1 e r_2 , a menos do ponto P_0 (que pertence a uma e uma só das mesmas) fica univocamente determinada pelo ponto P_0 . Neste sentido podemos dizer que cada ponto de r determina univocamente uma secção da reta orientada $(r, \prec)$. Por outro lado o postulado rII nos garante a recíproca, isto é, dados os conjuntos $r_i \subset r$ ($i=1,2$) não vazios, tais que $(\forall P_i \in r) (P_i \in r_i \Rightarrow P_1 \prec P_2)$, $r_1 \cup r_2 = r$ e $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, existe sempre um único ponto P_0 correspondente à secção (r_1, r_2) , tal que $(\forall P_i \in r) (i=1,2) (P_i \in r_i \Rightarrow \Rightarrow P_1 \prec P_0 \prec P_2)$. Chamaremos de segmento de extremidades A e B ($A, B \in r$ e $A \neq B$) ao conjunto $\{P \in r \mid P \prec B\} \cap \{P \in r \mid A \prec P\}$, se $A \prec B$ ou ao conjunto $\{P \in r \mid P \prec A\} \cap \{P \in r \mid B \prec P\}$, se $B \prec A$ e indicaremos por AB . Assim o segmento AB é a intersecção de duas semi-retas de origens A e B da reta que passa por A e B . Indicaremos por $\mathfrak{S}$ o conjunto de todos os segmentos existentes.

rIII: POSTULADO DA CONGRUÊNCIA: "Existe uma relação de equivalência sobre o conjunto $\mathfrak{S}$." À relação de equivalência sobre $\mathfrak{S}$, cuja existência o postulado rIII garante, chamaremos de igualdade e indicaremos por $=$. Fica determinado pois o conjunto quociente $\mathfrak{S}/= = \overline{\mathfrak{S}}$. Assim, os elementos $\overline{AB}$ de $\overline{\mathfrak{S}}$ serão as classes de equivalência $\overline{AB} = \{XY \mid XY = AB\}$ onde $AB \in \mathfrak{S}$. A relação $=$ satisfaz a propriedade: se o ponto O da reta r determina a secção (r_1, r_2) e $AB \in \mathfrak{S}$, então existe um único ponto P de r_i ($i=1,2$) tal que $OP = AB$. Admitimos sempre que os segmentos de $\mathfrak{S}$ não têm orientação, isto é, se $AB \in \mathfrak{S}$, então $AB = BA$. Baseando-nos no postulado rIII definimos operação adição (+) sobre $\mathfrak{S}$ da seguinte maneira: Dados os segmentos AB e CD sendo $AB \subset r$, existe

(*) Dizemos que (r_1, r_2) é uma secção da reta orientada $(r, \prec)$, se e somente se $r_i \neq \emptyset$ ($i=1,2$), $r_1 \cup r_2 = r$, $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ e todo ponto de r_1 precede os pontos de r_2 .



sempre um único ponto $X \in r$ tal que $CD = BX$ e $B \prec X$, se $A \prec B$ ou $X \prec B$, se $B \prec A$. Chamaremos de soma das classes $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ à classe $\overline{AX}$ e indicaremos por $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AX}$. Mostra-se que esta operação é bem definida sobre $\overline{\mathcal{J}}$, satisfazendo às propriedades comutativa e associativa. Como todos os segmentos de u'a mesma classe de equivalência são iguais entre si e qualquer segmento da classe pode ser tomado como seu representante, colocamos por definição $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AX}$, onde o segmento AX é obtido como foi indicado acima. Definimos também uma operação $\cdot : \mathbb{N} \times \overline{\mathcal{J}} \rightarrow \overline{\mathcal{J}}$ tal que para todo número $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) e qualquer elemento $\overline{AB} \in \overline{\mathcal{J}}$ obtemos a soma de n parcelas $\overline{AB} + \overline{AB} + \dots + \overline{AB}$ chamando-a de produto de n por $\overline{AB}$ e indicando-a por $n \cdot \overline{AB}$ ou simplesmente por $n \overline{AB}$. Quando $n = 1$ temos por definição $1 \cdot \overline{AB} = \overline{AB}$. Como $\overline{AB}$ e $\overline{AB} + \dots + \overline{AB}$ (soma de n parcelas) representam perfeitamente as classes $\overline{AB}$ e $n \overline{AB}$, colocamos por definição $n \overline{AB} = \overline{AB} + \dots + \overline{AB}$ (soma de n parcelas). Quando $CD = n \overline{AB}$, usaremos em sentido equivalente a igualdade $\overline{AB} = \frac{1}{n} \overline{CD}$ e diremos que o segmento AB é o quociente de CD por n . Por um teorema da Geometria demonstra-se por outro lado que $(\forall \overline{CD} \in \overline{\mathcal{J}}) (\exists! \overline{AB} \in \overline{\mathcal{J}}) (n \overline{AB} = \overline{CD})$, isto é, $\overline{AB} = \frac{1}{n} \overline{CD}$. Isto significa que sempre existe o quociente entre um segmento e um número natural qualquer. A operação supra é bem definida sobre $\overline{\mathcal{J}}$ e satisfaz as seguintes propriedades: $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall \overline{AB}, \overline{CD} \in \overline{\mathcal{J}}) (n(\overline{AB} + \overline{CD}) = n \overline{AB} + n \overline{CD})$ $(\forall m, n \in \mathbb{N}) (\forall \overline{AB} \in \overline{\mathcal{J}}) ((m + n) \overline{AB} = m \overline{AB} + n \overline{AB})$. Definimos também relação de ordem sobre $\overline{\mathcal{J}}$, indicaremos por $>$ e chamaremos de relação "maior", da seguinte maneira: $(\forall \overline{AB}, \overline{CD} \in \overline{\mathcal{J}})$: $\overline{AB} > \overline{CD} \iff [(\exists \overline{EF} \in \overline{\mathcal{J}}) (\overline{AB} = \overline{CD} + \overline{EF})]$; neste caso escreveremos $\overline{AB} > \overline{CD}$, onde $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são os representantes das classes $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ respectivamente. Usaremos a notação $\overline{CD} < \overline{AB}$ em sentido equivalente a $\overline{AB} > \overline{CD}$ e diremos que $\overline{CD}$ é menor do que $\overline{AB}$. A relação de ordem $>$ satisfaz as propriedades: $(\forall \overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF} \in \overline{\mathcal{J}}) (\overline{AB} > \overline{CD} \implies \overline{AB} + \overline{EF} > \overline{CD} + \overline{EF})$, a Propriedade da Tricotomia e a Propriedade Transitiva. Pomos por definição $\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{EF}$ se e somente se existe $\overline{EF} \in \overline{\mathcal{J}}$ tal que $\overline{AB} = \overline{CD} + \overline{EF}$ e diremos neste caso que $\overline{EF}$ é igual à diferença entre as classes $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Evidentemente a diferença $\overline{AB} - \overline{CD}$ existe, se e somente se $\overline{AB} > \overline{CD}$. Abandonando as barras, como foi feito nos diversos casos acima, usaremos, por definição, as mesmas propriedades para os segmentos que representam as respectivas classes.

PIV: POSTULADO DE ARQUIMEDES: " $(\forall \overline{AB}, \overline{CD} \in \overline{\mathcal{J}}) : \overline{AB} < \overline{CD} \implies [(\exists n \in \mathbb{N}) (n > 1) (n \overline{AB} > \overline{CD})]$." No enunciado deste postulado podemos também abandonar as barras valendo o mesmo para os segmentos representativos das respectivas classes de equivalência que figuram na frase. (+)

(+) Demonstra-se que o Postulado de Arquimedes não é independente dos



Definição: "Seja $>$ uma relação de ordem sobre um conjunto $\mathcal{C} \neq \emptyset$ (relação "maior") satisfazendo a propriedade da tricotomia^(*) e tal que sobre $\mathcal{C}$ esteja definida uma operação $+$ (adição) associativa e comutativa, bem como uma operação $-$ (subtração) tal que dados os elementos a, b e c ($a, b, c \in \mathcal{C}$) $(a > b) \iff (a - b = c \iff a = b + c)$, dizemos que o par de classes não vazias A e A' ($A, A' \subset \mathcal{C}$) é um par de classes contíguas em $\mathcal{C}$ e indicamos por (A, A') , se e somente se são satisfeitas as condições:

- a) $(\forall a, a' \in \mathcal{C}) (a \in A \text{ e } a' \in A' \implies a' > a)$ e
 b) $(\forall \bar{a} \in \mathcal{C}) (\exists a \in A) (\exists a' \in A') (\bar{a} > a' - a).$ "

Sendo $\mathcal{C}$ um conjunto de grandezas geométricas, como por exemplo o conjunto $\mathcal{S}$ de todos os segmentos existentes, satisfazendo o postulado de Arquimedes bem como a propriedade da divisibilidade de um segmento por um número natural, vale a seguinte propriedade: "Todo par de classes contíguas (A, A') em $\mathcal{C}$ determina univocamente um elemento a_0 de $\mathcal{C}$, tal que $(\forall a, a' \in \mathcal{C}) (a \in A \text{ e } a' \in A' \implies a < a_0 < a')$, chamado de elemento separador de (A, A') ."

Admitiremos conhecida a Teoria dos Números Reais, construída através de ampliações sucessivas, partindo do conjunto $\mathbb{N}$, obtendo sucessivamente os conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ e por fim o conjunto $\mathbb{R}$ completando-se $\mathbb{Q}$ por algum dos processos conhecidos, quais sejam, a Teoria das secções ou cortes no campo $\mathbb{Q}$ ou pelo processo das sequências de Cauchy de termos racionais.

Seja r uma reta e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Pretendemos mostrar que r e $\mathbb{R}$ são conjuntos equipotentes. Sendo O um ponto fixo em r , consideremos as semi-retas de origem O : $r_+ = \{ P \in r \mid O \prec P \}$ e $r_- = \{ P \in r \mid O \succ P \}$. Sendo P e Q pontos de r_+ , existe sempre $R \in r_+$, tal que $\overline{OP} + \overline{OQ} = \overline{OR}$. Definimos portanto adição sobre r_+ como sendo uma aplicação que a cada par (P, Q) de r_+^2 associa o ponto R tal que $\overline{OP} + \overline{OQ} = \overline{OR}$ e escrevemos $P + Q = R$. Analogamente definimos produto de um número natural n por um ponto $P \in r_+$ e indicamos por nP a um ponto Q de r_+ tal que $n\overline{OP} = \overline{OQ}$. Colocamos também $P \prec Q$ quando e somente quando $\overline{OP} < \overline{OQ}$. Além disso introduzindo a noção de segmento orientado

anteriores, isto é, pode ser deduzido como consequência dos resultados anteriores.

(*) Uma relação de ordem estrita sobre um conjunto satisfaz por definição além da propriedade da Tricotomia também a propriedade transitiva.



convencionamos escrever $\overline{OP} = -\overline{PO}$ onde $P \in r_-$ e existindo $Q \in r_+$ tal que $\overline{PO} = \overline{OQ}$ já que $P < O < Q$, diremos que o ponto P é o oposto de Q e escrevemos $Q = -P$. Definindo convenientemente segmento nulo, teremos construído sobre os elementos de r uma estrutura cujas propriedades são análogas às do conjunto R considerado como estrutura^(*) que são mutuamente correspondentes. Isto significa que os conjuntos r e R considerados como estruturas, são isomorfos, o que nos leva a identificar todo ponto P de r com o respectivo número x de R bem como os próprios conjuntos r e R entre si.

MEDIDA SOBRE $\mathcal{J}$

Definição: "Chama-se medida sobre o conjunto $\mathcal{J}$ a uma aplicação $\varphi: \mathcal{J} \rightarrow R$ que satisfaz as condições:

- a) $(\forall AB \in \mathcal{J}) (\varphi(AB) \geq 0)$;
- b) $(\forall AB, CD \in \mathcal{J}) (AB = CD \Rightarrow \varphi(AB) = \varphi(CD))$;
- c) $(\forall AB, CD, EF \in \mathcal{J}) (AB + CD = EF \Rightarrow \varphi(EF) = \varphi(AB) + \varphi(CD))$ ".

Proposição I: " $(\forall AB, UV \in \mathcal{J}) (\exists CD, EF \in \mathcal{J}) (CD < AB < EF) (\exists m, n, p, r \in N - \{1\}) (m CD = n UV \text{ e } p EF = r UV)$ ".

Demonstração:

A propriedade da Tricotomia nos fornece três possibilidades:

1) $AB < UV$. Neste caso, do Postulado de Arquimedes deduzimos que existe $q \in N$ ($q \geq 2$), tal que $\frac{1}{q} UV < AB$ bem como para todo $s \in N$ ($s \geq 2$) temos $s \cdot UV > UV > AB$. Fazendo $CD = \frac{1}{q} UV$ e $EF = s \cdot UV$, temos $CD < AB < EF$. Além disso, sendo $q \cdot CD = UV$ e $EF = s \cdot UV$, bem como n e p números naturais arbitrários ($n \geq 2$ e $p \geq 2$), então $(nq) CD = n \cdot UV$ e $p \cdot EF = (p \cdot s) UV$. Substituindo nq por m e ps por r , temos evidentemente $m > 1$ e $r > 1$ o que demonstra a tese.

2) $AB > UV$. Pelo Postulado de Arquimedes vem: Existe $s \in N$ ($s \geq 2$), tal que $s UV > AB$. Por outro lado, para todo número $q \in N$ ($q \geq 2$) temos $\frac{1}{q} \cdot UV < UV < AB$. Fazendo $\frac{1}{q} \cdot UV = CD$ e $s UV = EF$, temos $CD < AB < EF$. Por outro lado, quaisquer que sejam os números naturais p e q ($p \geq 2$ e $q \geq 2$) concluímos que $n UV = (nq) CD$ e $(ps) UV = p EF$. Considerando $nq = m$ e $ps = r$, segue-se a tese, pois $m, n \in N - \{1\}$.

3) $AB = UV$. Neste caso para todo par de números naturais s e q ($s > 1$ e $q > 1$) temos: $\frac{1}{s} \cdot UV < AB$ e $q UV > AB$. Fazendo $CD = \frac{1}{s} UV$ e $EF = q UV$, vem: $CD < AB < EF$. Sendo ainda n e p dois números naturais

(*) Consideramos a estrutura habitual sobre $\mathbb{R}$.

arbitrários ($n \geq 2$ e $p \geq 2$), deduzimos as igualdades: $(ns).CD = n UV$ e $p EF = (pq).UV$ e fazendo $ns = m$ e $r = pq$, concluímos a tese.

Doravante usaremos frequentemente símbolos do tipo $\frac{m}{n} AB$, onde $m, n \in \mathbb{N}$ e $AB \in \mathcal{S}$, o qual representará o segmento $m(\frac{1}{n} AB) = \frac{1}{n}(m.AB)$. Assim fica definida a operação multiplicação $\cdot: Q_{++} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ que a cada número racional estritamente positivo $\frac{m}{n}$ e a cada classe $\overline{AB}$ associa a classe $\frac{m}{n} \overline{AB} \in \overline{\mathcal{S}}$, onde $\frac{m}{n} \overline{AB} = m(\frac{1}{n} \overline{AB})$. Sendo $\frac{m}{n} AB$ um representante da classe $\frac{m}{n} \overline{AB}$, podemos definir $\frac{m}{n} AB$ como sendo o produto de $\frac{m}{n}$ pelo segmento AB .

A proposição I garante ainda que existem infinitos números $p, p' \in Q_{++}$ tais que $p UV < AB < p' UV$.

Proposição II: "Sendo AB e UV dois segmentos bem como A e A' ($A, A' \subset Q_{++}$) tais que $A = \{a \in Q_{++} \mid a.UV < AB\}$ e $A' = \{a' \in Q_{++} \mid a'.UV > AB\}$, então A e A' formam um par de classes contíguas (A, A') no campo real."

Demonstração:

$(\forall a, a' \in Q_{++}) (a \in A, a' \in A' \implies a.UV < AB < a'.UV)$ e portanto, $a.UV < a'.UV$. Sendo $a = \frac{m}{n}$ e $a' = \frac{m'}{n'}$, temos $\frac{m}{n} UV < \frac{m'}{n'} UV$. Daí segue $(mn')UV < (m'n).UV$ e ainda $mn' < m'n$. Portanto $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$ e finalmente $a < a'$, o que demonstra a primeira condição da definição de classes contíguas.

Por outro lado, $(\forall \varepsilon \in R_{++}) (\exists p \in Q_{++}) (p < \varepsilon) (p UV \neq AB)$. Para isto, basta tomar para p um número da classe minorante da secção racional determinada por ε ; se $p UV = AB$, toma-se o número $p_1 = \frac{p}{2}$. Suponhamos inicialmente que $p UV < AB$. Neste caso $p \in A$. Do postulado de Arquimedes deduzimos: $(\exists n \in \mathbb{N}) (n > 1) (n(p.UV) = (np).UV > AB)$. Do princípio do Menor Natural vem: $(\exists n_0 \in \mathbb{N}) ((n_0 p) UV > AB \text{ e } (n_0 - 1)p.UV \leq AB)$. Se $(n_0 - 1)p.UV < AB$, então $(n_0 - 1)p \in A$, $n_0 p \in A'$ e $n_0 p - (n_0 - 1)p = p < \varepsilon$; se $(n_0 - 1)p UV = AB$, tomamos o número $\frac{1}{2} [(n_0 - 1)p + n_0 p] = (2n_0 - 1) \frac{p}{2} > (n_0 - 1)p$ e tomamos o segmento $(2n_0 - 1) \frac{p}{2}.UV > (n_0 - 1)p.UV = AB$. Daí vem que $(2n_0 - 1) \frac{p}{2} \in A'$. Por outro lado, sendo $(n_0 - \frac{3}{2})p.UV < (n_0 - 1)p.UV = AB$, o número racional $(n_0 - \frac{3}{2})p \in A$. Consequentemente $(2n_0 - 1) \frac{p}{2} - (n_0 - \frac{3}{2})p = p < \varepsilon$. Suponhamos agora que $p.UV > AB$. Do postulado de Arquimedes vem então: $(\exists m \in \mathbb{N}) (m > 1) (p UV < m AB)$ e consequentemente $\frac{p}{m} UV < AB$. Mas sendo $\frac{p}{m} < p < \varepsilon$, com um raciocínio igual ao da demonstração precedente, chegamos ao mesmo resultado, bastando para isso, substituir o papel do número p pelo do número racional $q = \frac{p}{m}$. Isto demonstra completamente a segunda condição da definição de

classes contíguas.

Da proposição II e da continuidade do campo real concluímos ainda: $(\exists! \alpha \in \mathbb{R}) (\forall a, a' \in \mathbb{R}) (a \in A \text{ e } a' \in A' \Rightarrow a < \alpha < a')$, ou seja, α é o elemento separador de (A, A') .

SEGMENTOS COMENSURÁVEIS E INCOMENSURÁVEIS

Vimos pela proposição anterior que existe um único número real $\alpha > 0$ tal que $(\forall a, a' \in \mathbb{Q}_{++}) (a \in A \text{ e } a' \in A' \Rightarrow a < \alpha < a')$. Facilmente se mostra que $\alpha = \sup A = \inf A'$. O número α denomina-se elemento separador das classes A e A' ou então o número determinado por (A, A') . Quando $\alpha \in \mathbb{Q}_{++}$ dizemos que AB e UV são segmentos comensuráveis. Em caso contrário, isto é, quando $\alpha \in \mathbb{R}_{++} - \mathbb{Q}_{++}$, os segmentos AB e UV são denominados segmentos incomensuráveis. Como exemplo de segmentos incomensuráveis podemos citar o caso de um quadrado de lado UV e de diagonal AB . Neste caso o número determinado por (A, A') é o número irracional $\sqrt{2}$.

Proposição III: "Sendo AB e UV dois segmentos, bem como $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ ($\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subset \mathcal{J}$) tais que $\mathcal{P} = \{p.UV \in \mathcal{J} \mid p.UV < AB\}$ e $\mathcal{P}' = \{p'.UV \in \mathcal{J} \mid p'.UV > AB\}$, então $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ formam um par de classes contíguas $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ no conjunto $\mathcal{J}$ ".

Demonstração:

Da proposição I deduzimos que $(\exists p, p' \in \mathbb{Q}_{++}) (p.UV < AB < p'.UV)$. Portanto $\mathcal{P} \neq \emptyset$ e $\mathcal{P}' \neq \emptyset$. Por outro lado temos: $(\forall p.UV, p'.UV \in \mathcal{J}) (p.UV \in \mathcal{P} \text{ e } p'.UV \in \mathcal{P}' \Rightarrow p.UV < AB < p'.UV)$ e daí vem que $p.UV < p'.UV$ ou seja, a primeira condição de classes contíguas é satisfeita.

Por outro lado, $(\forall OK \in \mathcal{J}) (\exists r \in \mathbb{Q}_{++}) (r.UV < OK)$. Do postulado de Arquimedes temos: $(\exists p_0, p'_0 \in \mathbb{Q}_{++}) (p_0.UV \in \mathcal{P} \text{ e } p'_0.UV \in \mathcal{P}') (p'_0.UV - p_0.UV < r.UV < OK)$ (*). Deste resultado segue a segunda condição das classes contíguas. Concluimos assim que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ formam um par de classes contíguas em $\mathcal{J}$, sendo que AB é o elemento separador de $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$.

As proposições II e III autorizam-nos a formular a seguinte:

Definição: "Sendo (A, A') e $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ pares de classes contíguas

(*) Este resultado se obtém fazendo uma demonstração análoga à segunda parte da proposição II.



correspondentes às proposições II e III de elementos separadores α e AB ($\alpha \in \mathbb{R}_{++}$ e $AB \in \mathcal{J}$) respectivamente, chama-se produto de α por $\overline{UV}$ e se indica $\alpha \cdot \overline{UV}$ à classe $\overline{AB}$."

A definição supra corresponde à definição da operação multiplicação $\cdot: \mathbb{R}_{++} \times \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$. Notando que $\alpha \cdot UV$ é um representante da classe $\alpha \cdot \overline{UV}$, convencionaremos pôr simplesmente $\alpha \cdot UV = AB$ que representa o produto de um número real positivo por um segmento. Se $\alpha \in \mathbb{Q}_{++}$, os segmentos UV e AB são comensuráveis; se $\alpha \in \mathbb{R}_{++} - \mathbb{Q}_{++}$, os segmentos UV e AB são incomensuráveis.

Definição: "Dados dois segmentos AB e UV , chama-se medida de AB com a unidade UV e se indica $\frac{AB}{UV}$, ao número $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$, tal que $\alpha \cdot UV = AB$."

A função que a cada segmento de $\mathcal{J}$ associa sua medida numa certa unidade UV arbitrariamente dada, satisfaz a definição geral de medida. De fato, seja $\varphi: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $(\forall AB \in \mathcal{J}) (UV \in \mathcal{J}) (\varphi(AB) = \frac{AB}{UV} = \alpha \in \mathbb{R}_{++})$. Temos então: a) $(\forall AB \in \mathcal{J}) (\varphi(AB) = \alpha \geq 0)$; b) $(\forall AB, CD \in \mathcal{J}) (AB = CD \Rightarrow \frac{AB}{UV} = \frac{CD}{UV} = \alpha)$ e portanto $\varphi(AB) = \varphi(CD)$; c) $(\forall AB, CD, EF \in \mathcal{J}) (EF = AB + CD \Rightarrow \frac{EF}{UV} = \gamma = \alpha + \beta = \frac{AB}{UV} + \frac{CD}{UV})$ e conseqüentemente $\varphi(EF) = \varphi(AB) + \varphi(CD)$.

Para mostrar que vale a igualdade $\frac{AB}{UV} + \frac{CD}{UV} = \frac{AB + CD}{UV} = \frac{EF}{UV}$ da condição c) anterior, devemos considerar as classes contíguas (A, A') , (B, B') e (C, C') correspondentes às medidas de AB , CD e EF na unidade UV respectivamente e verificar que $(\forall c \in C) (\exists a \in A) (\exists b \in B) (c = a + b)$ e $(\forall c' \in C') (\exists a' \in A') (\exists b' \in B') (c' = a' + b')$.

Proposição IV: " $(\forall UV \in \mathcal{J}) (\forall \alpha \in \mathbb{R}_{++}) (\exists AB \in \mathcal{J}) (\alpha = \frac{AB}{UV})$."

Demonstração:

Se $\alpha \in \mathbb{Q}_{++}$, α será da forma $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Da definição de produto de um número natural por um segmento bem como do Teorema da Divisibilidade de um segmento por um número natural vem que existe $AB \in \mathcal{J}$ tal que $AB = \frac{1}{n} (m \cdot UV) = \frac{m}{n} UV = \alpha \cdot UV$.

Se $\alpha \in \mathbb{R}_{++} - \mathbb{Q}_{++}$, consideremos o par de classes contíguas (A, A') que determina o número α . Tomemos também os conjuntos B e B' contidos em $\mathcal{J}$, tais que $B = \{a \cdot UV \in \mathcal{J} \mid a \in A\}$ e $B' = \{a' \cdot UV \in \mathcal{J} \mid a' \in A'\}$ e mostremos que B e B' formam um par de classes contíguas em $\mathcal{J}$. De fato, $(\forall a \cdot UV \in B) (\forall a' \cdot UV \in B') (a < \alpha < a')$. Portanto sendo $a < a'$ temos $a \cdot UV < a' \cdot UV$; por outro lado, $(\forall OK \in \mathcal{J}) (\exists r \in \mathbb{Q}_{++}) (r \cdot UV < OK)$ e ainda $(\exists p_0, p'_0 \in \mathbb{Q}_{++}) (p_0 \in A \text{ e } p'_0 \in A') (p'_0 - p_0 < r)$. Daí vem: $(p'_0 - p_0) \cdot UV < r \cdot UV$, ou seja, $p'_0 \cdot UV - p_0 \cdot UV < r \cdot UV < OK$. Assim temos: $(\exists p_0 \cdot UV \in B)$



$(\exists p'_0. UV \in \mathcal{B}') (p'_0. UV - p_0. UV < OK)$. Isto significa que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ formam um par de classes contíguas em $\mathcal{J}$ e portanto determinam um elemento separador AB . Existe pois um número $\beta \in \mathbb{R}_{++}$ tal que $AB = \beta. UV$. Mostremos que $\beta = \alpha$. Se, por absurdo, tivéssemos $\alpha \neq \beta$, teríamos $\alpha < \beta$ ou $\alpha > \beta$ de modo exclusivo. Se tivéssemos, por exemplo, $\alpha < \beta$, existiria um número racional $q \in \mathbb{Q}_{++}$, tal que $\alpha < q < \beta$. Daí resultaria que $q \in \mathcal{A}'$ e consequentemente $q. UV \in \mathcal{B}'$. Portanto teríamos $q. UV > AB = \beta. UV$ e ainda $q > \beta$, o que é absurdo. Considerando $\alpha > \beta$, por raciocínio semelhante também chegaríamos a um absurdo. Portanto, $\alpha = \beta$ e a proposição está demonstrada.

CORRESPONDÊNCIA ENTRE UMA RETA r E O CONJUNTO $\mathbb{R}$

Seja r uma reta e o ponto O fixo ($O \in r$). As semi-retas $r_+ = \{P \in r \mid P \succ O\}$ e $r_- = \{P \in r \mid O \succ P\}$ chamaremos de semi-retas positiva e negativa, respectivamente. Consideremos um ponto $U \in r_+$ tal que $U \neq O$. Das proposições demonstradas deduzimos:

$$(\forall P \in r) (\exists! x \in \mathbb{R}) : x = \begin{cases} 0, & \text{se } P = O \\ + \frac{OP}{OU}, & \text{se } O \prec P \\ - \frac{OP}{OU}, & \text{se } P \prec O \end{cases} \quad \text{O número } x, \text{ univocamente}$$

determinado, denominamos abscissa de P e indicamos por $P(x)$. Evidentemente temos $U(1)$ e $O(0)$. Por outro lado podemos escrever:

$$(\forall P, Q \in r) (P(x), Q(x_1)) (P \prec Q \implies x \leq x_1).$$

Além disso, temos:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (x \neq 0) (\exists! OP \in \mathcal{B}) (O \prec P) : x = \begin{cases} \frac{OP}{OU}, & \text{se } x > 0 \\ - \frac{OP}{OU}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Do Postulado da Congruência e de uma convenção (no caso de $x=0$) concluímos:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists! P \in r) : \begin{cases} O \prec P, & \text{se } x > 0 \\ O = P, & \text{se } x = 0 \\ P \prec O, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Das considerações precedentes concluímos que r e $\mathbb{R}$ são equipotentes bem como $(\forall P, Q \in r) (P(x), Q(x_1)) (P \prec Q \iff x \leq x_1)$, isto é os conjuntos ordenados $(r, \prec)$ e $(\mathbb{R}, \leq)$ são isomorfos.

AMPLITUDE OU MEDIDA DE UM INTERVALO NO $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$)

Consideremos $p=1$ e tomemos o intervalo $[a, b]$ ($[a, b[$, $]a, b]$)



ou $]a, b[$). Sendo $a < b$, então existem pontos A e B sobre o eixo determinado pela reta orientada $(r, \langle)$ e os pontos $0, U \in r$ ($0 \prec U$), tais que $A(a)$ e $B(b)$ bem como $A \prec B$. Do Postulado da Congruência vem que existe um único ponto $D \in r_+$ tal que $AB = OD$. Chamamos de amplitude ou medida do intervalo $[a, b]$ ($[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$) à medida do segmento OD com a unidade OU que é o número real $\frac{OD}{OU}$, que evidentemente é um número estritamente positivo. Por outro lado, sendo $OB = OA + AB$, temos $\frac{OB}{OU} = \frac{OA}{OU} + \frac{AB}{OU}$ e consequentemente, $\frac{OD}{OU} = \frac{OB}{OU} - \frac{OA}{OU} = b - a$. A amplitude do intervalo $I = [a, b]$ ($[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$) indicaremos por $m(I)$ que, pelas considerações acima, é igual a $b - a$ ($b - a \in \mathbb{R}_{++}$).

Vejamos agora o caso de um intervalo bi-dimensional, ou seja, o caso de $p = 2$. Observemos que sobre o conjunto $\mathcal{P}$ de todos os polígonos pode ser considerada uma relação de ordem bem como definida uma relação de equivalência da seguinte maneira: dois polígonos são equivalentes, se e somente se, eles se decompõem em "somas" de polígonos ordenadamente iguais", sendo que a soma de polígonos se define convenientemente. Demonstra-se, por outro lado, a validade de uma propriedade dos polígonos análoga ao Postulado de Arquimedes visto para os segmentos e a divisibilidade de um polígono por um número natural n ($n > 1$). Além disso, demonstra-se que todo par de classes contíguas em $\mathcal{P}$ determina univocamente a menos de equivalentes um elemento de $\mathcal{P}$ chamado elemento separador do mesmo. Esta propriedade é análoga ao Postulado de Dedekind na reta.

Por um teorema sobre polígonos, dados um polígono P e um segmento AH, existe sempre um único retângulo, a menos de equivalentes, indicado por $R = R(AB, AH)$, de base AB e altura AH, tal que $R \equiv P$. Repetindo formalmente todo o raciocínio feito para a obtenção da medida de um segmento, demonstra-se que todo polígono P possui como medida, numa certa unidade $U \in \mathcal{P}$ arbitrariamente escolhido, um único número real α ($\alpha \in \mathbb{R}_{++}$). Definimos medida sobre $\mathcal{P}$ analogamente à medida sobre $\mathcal{S}$, isto é, como sendo uma aplicação $\varphi_2 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a três condições formalmente iguais às da medida de um segmento. Sendo P e U dois polígonos e $\frac{P}{U} = \alpha$ a medida do polígono P na unidade U, demonstra-se que a aplicação $\varphi_2 : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $(\forall P \in \mathcal{P}) (\varphi_2(P) = \frac{P}{U} = \alpha)$ é uma medida sobre $\mathcal{P}$.

Admitindo conhecida a noção de proporcionalidade entre grandezas geométricas, demonstra-se: " $(\forall R, S \in \mathcal{P}) (R = R(AB, AH) \stackrel{(*)}{=} S = R(AC, AH) \left(\frac{R}{S} = \frac{AB}{AC} \right))$ " e ainda " $(\forall R, S \in \mathcal{P}) (R = R(AB, AH) \text{ e } S = R(AC, AH_1)) \left(\frac{R}{S} = \frac{AB}{AC} \right) (AH = AH_1))$."



Um outro teorema garante: " $(\forall R, S \in \mathcal{P}) (R = R(AB, AH) \text{ e } S = R(CD, CK) \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{CK}{AH} \Leftrightarrow R \equiv S)$."

Consideremos agora o retângulo $R = R(AB, AH)$ e o quadrado $U = R(UV, UV)$. Sabemos, por outro resultado da Geometria, que $(\forall P \in \mathcal{P}) (\exists R = R(AB, AH) \in \mathcal{P}) (P \equiv R)$. Portanto, $\varphi_2(P) = \varphi_2(R) = \frac{R}{U}$. Por outro lado, existe $R_1 = R(AX, UV)$, tal que $R_1 \equiv R$. Sendo φ_1 a aplicação que a cada segmento de $\mathcal{I}$ associa a sua medida na unidade UV, temos que $\frac{AX}{AB} = \frac{AH}{UV} = \varphi_1(AH)$. Por outro lado, $\frac{R_1}{U} = \frac{AX}{UV} = \varphi_1(AX)$. Mas, por uma propriedade da medida de segmentos vem:

$$\frac{AX}{AB} = \frac{\frac{AX}{UV}}{\frac{AB}{UV}} = \frac{\varphi_1(AX)}{\varphi_1(AB)}. \text{ Sendo } R_1 \equiv R, \text{ temos } \frac{R}{U} = \frac{R_1}{U} = \varphi_1(AX) \text{ e con-}$$

sequentemente $\varphi_2(R) = \frac{R}{U} = \varphi_1(AX) = \varphi_1(AB) \cdot \frac{AX}{AB} = \varphi_1(AB) \cdot \varphi_1(AH)$. Vemos então que a medida bidimensional de um retângulo é o produto das medidas uni-dimensionais da base e da altura de R . Notemos ainda que retângulos equivalentes têm medidas iguais e em particular, todos os retângulos congruentes têm a mesma medida. Seja agora um intervalo $I \subset \mathbb{R}^2$, tal que $I = I_1 \times I_2$ ($I_i = [a_i, b_i]$, $[a_i, b_i[$, $]a_i, b_i]$ ou $]a_i, b_i[$) ($i=1,2$). Sendo a amplitude de I_i igual a $b_i - a_i$ e chamando a amplitude (ou medida) de I de $m(I)$, das considerações anteriores facilmente deduzimos: $m(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2)$.

No caso de $p=3$ podemos introduzir a noção da medida de um sólido de um modo totalmente semelhante ao processo utilizado para definir medida de segmentos e polígonos. Escolhendo o cubo de arestas iguais UV para unidade, demonstra-se que a medida de um paralelepípedo é igual ao produto das medidas uni-dimensionais das três arestas representativas de cada dimensão do mesmo na unidade UV, e que paralelepípedos congruentes possuem medidas iguais. Assim, sendo $I (I \subset \mathbb{R}^3)$ um intervalo limitado tal que $I = I_1 \times I_2 \times I_3$, tal que ($I_i = [a_i, b_i]$, $[a_i, b_i[$, $]a_i, b_i]$ ou $]a_i, b_i[$) ($i=1,2,3$), bem como indicando sua medida (ou amplitude) por $m(I)$, facilmente deduzimos que $m(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$.

De um modo geral podemos dizer que se $I \subset \mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$) (I intervalo limitado) tal que $I = \bigtimes_{i=1}^p I_i$ onde $I_i \subset \mathbb{R}$ (I_i é intervalo limitado de ínfimo e supremo a_i e b_i respectivamente) ($i=1,2,3$), tem-se: $m(I) = \prod_{i=1}^p (b_i - a_i)$, convencionando-se no caso de $i=1$, $I = I_1$ e $m(I) = m(I_1) = b_1 - a_1$.

A família dos intervalos limitados no $\mathbb{R}^p$ indicaremos por $\mathcal{I}^{(p)}$ ($1 \leq p \leq 3$).

(*) $R(AB, AH)$ representa o retângulo de base AB e altura AH.



a) DIVISÃO DE UM INTERVALO COMPACTO NO $\mathbb{R}^p$

Sendo $\mathcal{E} (\mathcal{E} \subset \mathcal{T}^{(p)})$ ($\mathcal{E}$ é classe finita) ($\forall x, y \in \mathcal{E}$) ($x \neq y$) ($\overset{\circ}{x} \cap \overset{\circ}{y} = \emptyset$), chamaremos de conjunto elementar a todo conjunto que tem a forma $E = \bigcup_{x \in \mathcal{E}} x$.

A classe $\mathcal{E}$ chamaremos de uma decomposição de E em intervalos no $\mathbb{R}^p$.

Definição: "Chama-se divisão elementar ou simplesmente divisão de um intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ a toda decomposição de I em intervalos no $\mathbb{R}^p$."

Definição: "Sendo $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ divisões de um intervalo compacto I , diz-se que $\mathcal{E}_2$ é um refinamento de $\mathcal{E}_1$ (ou que $\mathcal{E}_2$ é mais fina que $\mathcal{E}_1$) e se indica $\mathcal{E}_1 \prec \mathcal{E}_2$ (ou $\mathcal{E}_2 \succ \mathcal{E}_1$), se e somente se $(\forall x \in \mathcal{E}_1) (\exists \mathcal{E}_x \subset \mathcal{E}_2) (x = \bigcup_{y \in \mathcal{E}_x} y)$ "

Definição: "Sejam $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ duas divisões elementares do intervalo compacto I . Chama-se resultante de $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ e se indica $\mathcal{R}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, ao conjunto $\mathcal{E} = \{Z = x \cap y \mid x \in \mathcal{E}_1 \text{ e } y \in \mathcal{E}_2\}$."

Vemos imediatamente que $\mathcal{E} = \mathcal{R}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ é também uma divisão de I e ainda $\mathcal{E} \succ \mathcal{E}_i$ ($i = 1, 2$). Seja $I \subset \mathbb{R}^p$ um intervalo compacto; indica-lo-emos por $I = \bigtimes_{i=1}^p [a_i, b_i]$, se $p = 2$ ou 3 e por $I = [a, b]$ ou $[a_1, b_1]$, se $p = 1$. Os intervalos $[a_i, b_i]$ ($i = 1, \dots, p$) serão indicados por I_i .

Divisão Normal

Definição: "Sendo $\mathcal{F}_i$ divisão de I_i ($I_i \subset \mathbb{R}$) ($1 \leq i \leq p$), chama-se divisão normal de $I = \bigtimes_{i=1}^p I_i$ à divisão $\mathcal{F} = \{Z \subset I \mid Z = \bigtimes_{j=1}^p x_j \text{ com } x_j \in \mathcal{F}_j\}$, se $p > 1$ ou a $\mathcal{F}_1$, se $p = 1$.

Facilmente se vê que $\mathcal{F}$ é efetivamente uma divisão de I . À divisão normal $\mathcal{F}$ de I chamaremos de divisão de I induzida pelas divisões $\mathcal{F}_i$ de I_i ($i = 1, \dots, p$), enquanto que estas serão chamadas de componentes de $\mathcal{F}$.

Proposição: " $(\forall \mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$ é divisão elementar de I) ($I \subset \mathbb{R}^p$) (I compacto) $(\exists \mathcal{G})$ ($\mathcal{G}$ divisão normal de I) ($\mathcal{G} \succ \mathcal{F}$)."

Demonstração:

Seja $\mathcal{F}$ uma divisão elementar de I ($I \subset \mathbb{R}^p$). Se $p = 1$ então $\mathcal{F}$ é certa

mente divisão normal de I . Suponhamos então $p > 1$. Como toda componente de $\mathcal{F}$ é um conjunto elementar cujos elementos são por sua vez intervalos, existe uma divisão $\mathcal{F}^*$ de I em intervalos tal que $\mathcal{F} \prec \mathcal{F}^*$. As projeções de $\mathcal{F}^*$ formarão famílias de intervalos em cada dimensão cujas reuniões são I_i ($i = 1, \dots, p$) de interiores dois a dois, não necessariamente disjuntos. Os extremos destes intervalos formarão para cada i ($i = 1, \dots, p$) uma família $\mathcal{G}_i$ que será certamente divisão de I_i . Considerando agora a divisão normal $\mathcal{G}$ induzida pelas divisões $\mathcal{G}_i$ ($i = 1, \dots, p$), esta será um refinamento de $\mathcal{F}^*$ e portanto também de $\mathcal{F}$, o que demonstra a proposição.

Rede de um Intervalo Compacto no $\mathbb{R}^p$

Sendo $p = 1$ chamaremos de rede do intervalo compacto $I = [a_1, b_1]$ ao conjunto $\Delta = \{x_{1j} \in I \ (j = 0, 1, \dots, n_1) \mid a_1 = x_{10} < x_{11} < \dots < x_{1n_1} = b_1\}$. Se $p > 1$ ($p \leq 3$) então chamamos de rede de I ($I \subset \mathbb{R}^p$) ao conjunto Δ ($\Delta \subset I$) tal que $\Delta = \bigtimes_{i=1}^p \Delta_i$, onde Δ_i é rede da projeção $\pi_i(I) = I_i$ ($i = 1, \dots, p$).

Dadas duas redes Δ e Δ^* de I ($I \subset \mathbb{R}^p$), dizemos que Δ^* é mais fina que (ou é um refinamento de) Δ e indicamos por $\Delta^* \succ \Delta$ (ou $\Delta \prec \Delta^*$) se e só se $\Delta \subset \Delta^*$. Chama-se resultante de duas redes Δ e Δ^* de I e indicamos por $\mathcal{R}(\Delta, \Delta^*)$, ao conjunto $\Delta \cup \Delta^*$. Evidentemente, $\mathcal{R}(\Delta, \Delta^*)$ é uma nova rede Δ^{**} de I , que é um refinamento de cada uma das redes componentes Δ e Δ^* .

Notemos que a uma rede de $n_1 + 1$ pontos de I ($I \subset \mathbb{R}$) corresponde uma divisão de n_1 intervalos componentes de I com extremos nos pontos da rede e vice-versa. Analogamente, a uma rede de $(n_1 + 1) \dots (n_p + 1)$ pontos de $I \subset \mathbb{R}^p$ ($p > 1$) corresponde uma divisão normal em $n_1 \dots n_p$ intervalos componentes e vice-versa. Indicaremos por $\mathcal{F}_\Delta$ ou simplesmente por $\mathcal{F}$ a divisão normal de I correspondente à rede Δ . Devido a essa correspondência biunívoca existente entre redes Δ e correspondentes divisões normais $\mathcal{F}_\Delta$, chamaremos Δ frequentemente divisão de I . Convencionaremos então que a notação Δ representará sempre uma rede de I , sendo que $\mathcal{F}_\Delta$ representará a divisão normal correspondente a Δ . Indicaremos por $\mathcal{D}_I$ ou simplesmente por $\mathcal{D}$ o conjunto de todas as divisões Δ de I .

b) CONTEÚDO NULO

Definição: "Diz-se que um conjunto C ($C \subset \mathbb{R}^p$) tem conteúdo nulo, se e somente se $C = \emptyset$ ou existe uma família finita $\mathcal{F}$



$$(\exists \mathcal{C} \mathcal{I}^{(p)})(\bigcup_{X \in \mathcal{I}} X \supset C \text{ e } \sum_{X \in \mathcal{I}} m(X) < \varepsilon)".$$

Consequências:

- 1 - Todo conjunto unitário tem conteúdo nulo.
- 2 - Todo conjunto finito tem conteúdo nulo.
- 3 - Conjunto imagem de toda sequência convergente tem conteúdo nulo.
- 4 - O conjunto de Cantor tem conteúdo nulo ($p = 1$).
- 5 - Toda curva *retificável* tem conteúdo nulo ($p = 3$).
- 6 - Toda superfície regular tem conteúdo nulo ($p = 3$).
- 7 - Todo intervalo r -dimensional com $r < p$ ($p = 2$ ou 3) tem conteúdo nulo (conteúdo p -dimensional).
- 8 - Todo sub-conjunto de um conjunto de conteúdo nulo tem conteúdo nulo.
- 9 - Todo "intervalo degenerado" em $\mathbb{R}^p$ tem conteúdo nulo (no $\mathbb{R}^p$).
 Por exemplo: $\{a\} = [a, a]$; $\emptyset = [a, a[=]a, a] =]a, a[$ ($p=1$)
 $[a_1, b_1] \times \{a\}$, $\emptyset$, $\{a\} \times]a_2, b_2[$ ($p=2$), etc., são conjuntos de conteúdo nulo.

Estas consequências facilmente podem ser comprovadas pela definição acima.

Medida de um Conjunto Elementar

Seja $\mathcal{I}$ uma decomposição do conjunto elementar E . Sendo $X(X \in \mathcal{I})$ um intervalo no $\mathbb{R}^p$, vimos que $m(X)$ representa a medida de X na unidade escolhida. Isto, e mais o fato dos conjuntos de $\mathcal{I}$ serem dois a dois disjuntos, nos levam a definir a medida de E como sendo $m(E) = \sum_{X \in \mathcal{I}} m(X)$.

Propriedade: "Se $E (E \subset \mathbb{R}^p)$ é um conjunto elementar, então $m(E)$ independe da decomposição considerada."

Demonstração:

Sejam $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ duas decomposições de E . Consideremos a classe $\mathcal{I} = \{Z = X \cap Y \mid X \in \mathcal{I}_1 \text{ e } Y \in \mathcal{I}_2\}$, bem como $\mathcal{I}_X = \{Z \mid Z \subset X\}$ e $\mathcal{I}_Y = \{Z \mid Z \subset Y\}$ onde $X \in \mathcal{I}_1$ e $Y \in \mathcal{I}_2$. Daí vem que a classe $\mathcal{I}_3 = \bigcup_{X \in \mathcal{I}_1} \mathcal{I}_X = \bigcup_{Y \in \mathcal{I}_2} \mathcal{I}_Y$ é uma decomposição de E . Portanto,

$$\sum_{X \in \mathcal{I}_1} m(X) = \sum_{X \in \mathcal{I}_1} m(\bigcup_{Z \in \mathcal{I}_X} Z) = \sum_{X \in \mathcal{I}_1} \sum_{Z \in \mathcal{I}_X} m(Z) = \sum_{Z \in \mathcal{I}_3} m(Z) \text{ e}$$

$$\sum_{Y \in \mathcal{I}_2} m(Y) = \sum_{Y \in \mathcal{I}_2} m(\bigcup_{Z \in \mathcal{I}_Y} Z) = \sum_{Y \in \mathcal{I}_2} \sum_{Z \in \mathcal{I}_Y} m(Z) = \sum_{Z \in \mathcal{I}_3} m(Z)$$



Isto significa que $\sum_{X \in \mathcal{T}_1} m(X) = \sum_{Y \in \mathcal{T}_2} m(Y)$ ou seja $m(E)$ independe da decomposição.

Propriedade: " $(\forall E, F, G \subset \mathbb{R}^p)$ (E, F e G são conjuntos elementares), $(\hat{E} \cap \hat{F} = \emptyset)$ ($G = E \cup F \Rightarrow m(G) = m(E) + m(F)$)."

Demonstração:

Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ decomposições de E e F respectivamente. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ será uma decomposição de $E \cup F$. Como $m(E)$, $m(F)$ e $m(E \cup F)$ independem das decomposições tomadas, vem:

$$m(E \cup F) = \sum_{X \in \mathcal{T}} m(X) = \sum_{X \in \mathcal{T}_1} m(X) + \sum_{X \in \mathcal{T}_2} m(X) = m(E) + m(F)$$

Esta propriedade se estende a uma família finita qualquer de conjuntos elementares sem pontos internos comuns.

Conteúdo Interior e Conteúdo Exterior (Medida Interior e Medida Exterior de Jordan):

Seja S ($S \subset \mathbb{R}^p$) um conjunto limitado; existe então I ($I \in \mathcal{J}^{(p)}$) (I intervalo compacto) ($S \subset I$).

(*)

$$(\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (\exists \mathcal{T}_\Delta) (\mathcal{T}_\Delta = \{X \in \mathcal{T}_\Delta \mid X \subset \hat{S}\}) (\exists A(\Delta; S) \in \mathbb{R})$$

$$(A(\Delta; S) = \sum_{X \in \mathcal{T}_\Delta} m(X)) \text{ e } (\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (\exists \mathcal{T}_\Delta) (\mathcal{T}_\Delta = \{X \in \mathcal{T}_\Delta \mid X \cap S \neq \emptyset\})$$

$$(\exists B(\Delta; S) \in \mathbb{R}) (B(\Delta; S) = \sum_{X \in \mathcal{T}_\Delta} m(X)).$$

Evidentemente temos que $\mathcal{T}_\Delta \subset \mathcal{T}_I$ e $0 \leq A(\Delta; S) \leq B(\Delta; S) \leq m(I)$. Além disso $\{A(\Delta; S) \in \mathbb{R} \mid \Delta \in \mathcal{D}_I\}$ e $\{B(\Delta; S) \in \mathbb{R} \mid \Delta \in \mathcal{D}_I\}$ são conjuntos lineares limitados e portanto cada um deles possui um único extremo inferior e um único extremo superior.

Seja $\underline{\gamma}(S) = \sup \{A(\Delta; S) \mid \Delta \in \mathcal{D}_I\}$ e $\bar{\gamma}(S) = \inf \{B(\Delta; S) \mid \Delta \in \mathcal{D}_I\}$. Os números reais positivos $\underline{\gamma}(S)$ e $\bar{\gamma}(S)$ chamamos de conteúdo interior e conteúdo exterior de S , respectivamente. Facilmente se prova as seguintes propriedades:

- $(\forall \Delta, \Delta^* \in \mathcal{D}_I) (\Delta \prec \Delta^* \Rightarrow A(\Delta; S) \leq A(\Delta^*; S) \text{ e } B(\Delta; S) \geq B(\Delta^*; S));$
- $(\forall \Delta, \Delta^* \in \mathcal{D}_I) (A(\Delta; S) \leq B(\Delta^*; S));$
- $\underline{\gamma}(S) \leq \bar{\gamma}(S)$
- Os números reais $\underline{\gamma}(S)$ e $\bar{\gamma}(S)$ independem de $I (I \subset \mathbb{R}^p) (S \subset I)$

(*) Quando $S = \emptyset$, temos $\mathcal{T}_\Delta = \emptyset$.

Definição: "Dado $S (S \subset \mathbb{R}^p)$ (S é limitado), diz-se que S é $\mathcal{J}$ -mensurável se e só se $\underline{\gamma}(S) = \bar{\gamma}(S)$ e neste caso o valor comum $\underline{\gamma}(S) = \bar{\gamma}(S)$ denomina-se conteúdo de S (ou Medida de Jordan de S) e se indica $\gamma(S)$."

Proposição:

"Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^p$ seja $\mathcal{J}$ -mensurável e tenha conteúdo nulo é que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++})(\exists \mathcal{J} \subset \mathcal{J}^{(p)})$ ($\mathcal{J}$ é família finita) : $\bigcup_{X \in \mathcal{J}} X \supset S$ e $\sum_{X \in \mathcal{J}} m(X) < \varepsilon$."

Demonstração:

Nec: $\implies$

Se $\gamma(S) = 0$, então: $\underline{\gamma}(S) = \bar{\gamma}(S) = 0$. Mas sendo $\bar{\gamma}(S) = \inf \{B(\Delta; S) \mid \Delta \in \mathcal{D}_I\}$, então $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \Delta \in \mathcal{D}_I) (\bar{\gamma}(S) + \varepsilon > B(\Delta; S) \geq 0)$. Sendo $\bar{\gamma}(S) = 0$, então $B(\Delta; S) < \varepsilon$, ou seja $\sum_{X \in \mathcal{J}_\Delta} m(X) < \varepsilon$.

Mas $\mathcal{J}_\Delta \subset \mathcal{J}^{(p)}$, $\mathcal{J}_\Delta$ é finito e $\bigcup_{X \in \mathcal{J}_\Delta} X \supset S$ o que demonstra a tese.

Suf. $\Leftarrow$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathcal{J} \subset \mathcal{J}^{(p)})$ ($\mathcal{J}$ é finito) $(\bigcup_{X \in \mathcal{J}} X \supset S \text{ e } \sum_{X \in \mathcal{J}} m(X) < \varepsilon)$.

Seja $I (I \in \mathcal{J}^{(p)}) (\bigcup_{X \in \mathcal{J}} X \subset I)$ e Δ uma divisão de I tal que $(\forall X \in \mathcal{J})$

$(\exists \mathcal{J}_{\bar{X}}) (\mathcal{J}_{\bar{X}} \subset \mathcal{J}_\Delta) (\bigcup_{Y \in \mathcal{J}_{\bar{X}}} Y = \bar{X})$. Temos, portanto:

$$B(\Delta; S) = \sum_{\substack{Y \in \mathcal{J}_\Delta \\ Y \cap S \neq \emptyset}} m(Y) \leq \sum_{X \in \mathcal{J}} m(\bar{X}) = \sum_{X \in \mathcal{J}} m(X) < \varepsilon \text{ e ainda}$$

$0 \leq \bar{\gamma}(S) \leq B(\Delta; S) < \varepsilon$, ou seja $\bar{\gamma}(S) = 0$. Mas sendo

$0 \leq \underline{\gamma}(S) \leq \bar{\gamma}(S) = 0$, então $\underline{\gamma}(S) = \bar{\gamma}(S) = 0$ e consequentemente S é $\mathcal{J}$ -mensurável bem como $\bar{\gamma}(S) = 0$.

Algumas propriedades da medida de Jordan

Sendo $\mathcal{A} = \{X \subset I \subset \mathbb{R}^p \mid X \text{ é } \mathcal{J}\text{-mensurável}\}$ (I intervalo compacto)

$\mathcal{A}_I - (\forall X, Y \in \mathcal{A}) (X \cup Y \in \mathcal{A})$;

$\mathcal{A}_{II} - (\forall X, Y \in \mathcal{A}) (X - Y \in \mathcal{A})$.

Na Teoria da Medida o conjunto $\mathcal{A}$ se denomina uma álgebra (ou anel) sobre I .

Facilmente se vê que as condições $\mathcal{A}_I$ e $\mathcal{A}_{II}$ acima equivalem às seguintes:

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$; (2) $I \in \mathcal{A}$; (3) $(\forall X \in \mathcal{A}) (I - X = \bigcup_I X \in \mathcal{A})$;
 (4) $(\forall X, Y \in \mathcal{A}) (X \cup Y \in \mathcal{A})$.

Também se deduz imediatamente que reuniões e intersecções finitas de conjuntos de $\mathcal{A}$ são também conjuntos de $\mathcal{A}$.

Vimos por outro lado que $(\forall X \in \mathcal{A}) (\exists! \gamma(X) \in \mathbb{R}_+) (\gamma(X) \text{ é o conteúdo de } X)$. Assim, podemos dizer que a Medida de Jordan definida para os conjuntos $X \in \mathcal{A}$ é uma aplicação $\gamma: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfazendo as propriedades:

- a) $\gamma(\emptyset) = 0$; b) $(\forall X \in \mathcal{A}) (\gamma(X) \geq 0)$; c) $(\forall (X_\nu)_{\nu \geq 1}) (X_\nu \in \mathcal{A})$
 $(X_\nu \cap X_n = \emptyset) (\forall \nu \neq n) (\bigcup_{\nu=1}^{\infty} X_\nu \in \mathcal{A} \Rightarrow \gamma(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} X_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(X_\nu))$.

Na Teoria da Medida se diz então que a medida de Jordan é uma medida sobre a álgebra $\mathcal{A}$.

c) DIVISÃO DE UM CONJUNTO $\mathcal{J}$ -MENSURÁVEL

Definição: "Chama-se divisão $\mathcal{J}$ -mensurável ou simplesmente divisão de um conjunto D ($D \subset \mathbb{R}^p$) (D é $\mathcal{J}$ -mensurável) ($p = 1, 2, 3$) a uma família finita $\mathcal{F}$ de sub-conjuntos $\mathcal{J}$ -mensuráveis de D tal que $\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = D$ e $(\forall X, Y \in \mathcal{F}) (X \neq Y) (X \cap Y = \emptyset)$."

Os conjuntos de $\mathcal{F}$ chamaremos de componentes da divisão adotada.

Refinamento

Definição: "Sendo $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ duas divisões de D ($D \subset \mathbb{R}^p$) (D é $\mathcal{J}$ -mensurável), diz-se que $\mathcal{F}_2$ é mais fina que (ou é um refinamento de) $\mathcal{F}_1$ e se indica $\mathcal{F}_1 \prec \mathcal{F}_2$ (ou $\mathcal{F}_2 \succ \mathcal{F}_1$) se e só se $(\forall X \in \mathcal{F}_1) (\exists \mathcal{F}_X \subset \mathcal{F}_2) (X = \bigcup_{Y \in \mathcal{F}_X} Y)$."

Resultante

Definição: "Dadas duas divisões $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ de D ($D \subset \mathbb{R}^p$), chama-se resultante de $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ e se indica por $\mathcal{R}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, ao conjunto

$$\{ Z = X \cap Y \mid X \in \mathcal{F}_1 \text{ e } Y \in \mathcal{F}_2 \}."$$

Corolário: "Se $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ são divisões de D ($D \subset \mathbb{R}^p$) então $\mathcal{F} = \mathcal{R}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ é uma divisão de D tal que $\mathcal{F}_i \prec \mathcal{F}$ ($i = 1, 2$)."

Demonstração:

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{F}} Z = \bigcup_{X \in \mathcal{F}_1, Y \in \mathcal{F}_2} (X \cap Y) = \bigcup_{X \in \mathcal{F}_1} \left[\bigcup_{Y \in \mathcal{F}_2} (X \cap Y) \right] = \bigcup_{X \in \mathcal{F}_1} [X \cap (\bigcup_{Y \in \mathcal{F}_2} Y)] = \bigcup_{X \in \mathcal{F}_1} (X \cap D) =$$

$$= \bigcup_{X \in \mathcal{F}_1} X = D.$$

$$(\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}) (\overset{\circ}{Z}_1 \cap \overset{\circ}{Z}_2 = (\overset{\circ}{X}_1 \cap \overset{\circ}{Y}_1) \cap (\overset{\circ}{X}_2 \cap \overset{\circ}{Y}_2) = (\overset{\circ}{X}_1 \cap \overset{\circ}{Y}_1) \cap (\overset{\circ}{X}_2 \cap \overset{\circ}{Y}_2) = (\overset{\circ}{X}_1 \cap \overset{\circ}{X}_2) \cap (\overset{\circ}{Y}_1 \cap \overset{\circ}{Y}_2) = \emptyset).$$

Portanto $\mathcal{F}$ é uma divisão de D .

Por outro lado $(\forall X \in \mathcal{F}_1) (\exists \mathcal{F}_X \subset \mathcal{F}) (\mathcal{F}_X = \{Z \in \mathcal{F} \mid Z = X \cap Y \neq \emptyset\})$

$\bigcup_{Z \in \mathcal{F}_X} Z = \bigcup_{X \cap Y \neq \emptyset} (X \cap Y) = X$. Assim $\mathcal{F}_1 \prec \mathcal{F}$. Analogamente mostra-se que

$\mathcal{F}_2 \prec \mathcal{F}$.

d) INTEGRAL DE RIEMANN NO $\mathbb{R}^p$ ($p \leq 3$)

Seja $f: I \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida e limitada, onde $x \in I$ é um vetor do espaço $\mathbb{R}^p$ ($p = 1, 2$ ou 3) e I é um intervalo compacto em $\mathbb{R}^p$ ($p \leq 3$).

Seja Δ uma divisão de I e $\mathcal{F}_\Delta$ a família dos intervalos parciais (intervalos componentes) de I correspondentes à divisão Δ . Temos então: $(\forall X \in \mathcal{F}_\Delta)$ ($f(x)$ é limitada em X). Consideremos $\ell = \inf_I f(x)$, $L = \sup_I f(x)$, $\ell_X = \inf_X f(x)$ e $L_X = \sup_X f(x)$; sendo $\Omega = L - \ell$ e $\Omega_X = L_X - \ell_X$, temos que $\Omega \geq 0$ e $(\forall X \in \mathcal{F}_\Delta) (\Omega_X \geq 0)$.

Temos então: $(\forall X \in \mathcal{F}_\Delta) (\forall x \in X) (\ell \leq \ell_X \leq f(x) \leq L_X \leq L)$. Sendo $\gamma(I)$ e $\gamma(X)$ as medidas segundo Jordan de I e de X respectivamente e notando que $\gamma(X) \geq 0$: $\ell \gamma(X) \leq \ell_X \gamma(X) \leq L_X \gamma(X) \leq L \gamma(X)$.

$$\text{Daí vem: } \ell \sum_{X \in \mathcal{F}_\Delta} \gamma(X) \leq \sum_{X \in \mathcal{F}_\Delta} \ell_X \gamma(X) \leq \sum_{X \in \mathcal{F}_\Delta} L_X \gamma(X) \leq L \sum_{X \in \mathcal{F}_\Delta} \gamma(X).$$

Os números $\sum_{X \in \mathcal{F}_\Delta} \ell_X \gamma(X)$ e $\sum_{X \in \mathcal{F}_\Delta} L_X \gamma(X)$ chamaremos de soma inferior e soma superior de $f(x)$ relativamente à divisão Δ e indicaremos por $s(f; \Delta; I)$ e $S(f; \Delta; I)$ ⁽¹⁾, respectivamente.

Portanto, $\ell \gamma(I) \leq s(f; \Delta; I) \leq S(f; \Delta; I) \leq L \gamma(I)$ (*) ($\Delta \in \mathcal{D}$)

Sejam $\underline{\mathcal{J}} = \{s(f; \Delta; I) \mid \Delta \in \mathcal{D}_I\}$ e $\bar{\mathcal{J}} = \{S(f; \Delta; I) \mid \Delta \in \mathcal{D}_I\}$

Das relações (*) concluímos que $\underline{\mathcal{J}}$ e $\bar{\mathcal{J}}$ são conjuntos lineares limitados e por uma propriedade dos números reais cada um deles possui ex

(1) Quando não houver ambiguidade, usaremos as notações $s(f; \Delta)$ e $S(f; \Delta)$ ou simplesmente, s_Δ e S_Δ , respectivamente.

tremos inferior e superior. Existem pois e são únicos os números $s_0 = \sup \underline{f}$ e $S_0 = \inf \bar{f}$.

Propriedades:

- $(\forall \Delta, \Delta^* \in \mathcal{D}) (\Delta \prec \Delta^* \Rightarrow s_\Delta \leq s_{\Delta^*} \text{ e } S_\Delta \geq S_{\Delta^*})$;
- $(\forall \Delta, \Delta^* \in \mathcal{D}) (s_\Delta \leq S_{\Delta^*})$;
- $s_0 \leq S_0$.

Demonstração:

- Se $\Delta \prec \Delta^*$ então $(\forall X \in \mathcal{J}_\Delta) (\exists \ell_X \subset \mathcal{J}_{\Delta^*}) (X = \bigcup_{Y \in \ell_X} Y)$

$$\text{Mas } \bigcup_{X \in \mathcal{J}_\Delta} X = \bigcup_{X \in \mathcal{J}_\Delta} [\bigcup_{Y \in \ell_X} Y] = \bigcup_{Y \in \bigcup_{X \in \mathcal{J}_\Delta} \ell_X} Y = \bigcup_{Y \in \mathcal{J}_{\Delta^*}} Y \text{ e } \gamma(X) = \sum_{Y \in \ell_X} \gamma(Y)^{++}.$$

Notando que $(\forall X \in \mathcal{J}_\Delta) (\forall Y \in \ell_X) (l_X \leq l_Y)$, temos:

$$\begin{aligned} s_\Delta &= \sum_{X \in \mathcal{J}_\Delta} l_X \gamma(X) = \sum_{X \in \mathcal{J}_\Delta} l_X \left(\sum_{Y \in \ell_X} \gamma(Y) \right) = \sum_{X \in \mathcal{J}_\Delta} \left[\sum_{Y \in \ell_X} l_X \gamma(Y) \right] \leq \sum_{X \in \mathcal{J}_\Delta} \sum_{Y \in \ell_X} l_Y \gamma(Y) = \\ &= \sum_{Y \in \bigcup_{X \in \mathcal{J}_\Delta} \ell_X} l_Y \gamma(Y) = \sum_{Y \in \mathcal{J}_{\Delta^*}} l_Y \gamma(Y) = s_{\Delta^*} \end{aligned}$$

Analogamente podemos mostrar que nas hipóteses feitas vale a desigualdade: $S_\Delta \geq S_{\Delta^*}$.

- Seja $\Delta^{**} = \text{Res}(\Delta, \Delta^*)$. Sendo $\Delta^{**} \succ \Delta$ e $\Delta^{**} \succ \Delta^*$, da propriedade b) deduzimos:

$$s_\Delta \leq s_{\Delta^{**}} \leq S_{\Delta^{**}} \leq S_{\Delta^*}$$

- $(\forall s_\Delta \in \underline{f}) (s_\Delta \text{ é um limite inferior de } \bar{f})$. Portanto $s_\Delta \leq S_0$, pois S_0 é o maior dos limites inferiores de $\bar{f}$. Por outro lado, S_0 sendo um limite superior de $\underline{f}$ temos $s_0 \leq S_0$, pois s_0 é menor dos limites superiores de $\underline{f}$.

Os números s_0 e S_0 chamamos de integral inferior e integral superior de $f(x)$ no intervalo I , respectivamente. Estes números sempre existem nas hipóteses inicialmente estabelecidas e são indicados, respectivamente pelas notações:

$$s_0 = \int_I f(x) dx \text{ e } S_0 = \int_I^- f(x) dx \quad (2)$$

Definição: "Diz-se que uma função $f(x)$ definida e limitada num intervalo compacto I ($I \subset \mathbb{R}^p$) ($p \leq 3$) é $\mathbb{R}$ -integrável em I , se e somente se $s_0 = S_0$; neste caso, ao valor comum $s_0 = S_0$ chama-se integral de Riemann de $f(x)$ relativamente ao intervalo I e indicamos por

$$\int_I f(x) dx \quad (3)."$$

- Usaremos também as notações mais simples $\int_I f$ e $\int_I^- f$, respectivamente.

- Usaremos também a notação $\int f$ que também se chama $\mathbb{R}$ -integral.

- (++) Propriedade válida para a medida de conjuntos elementares.

Partindo de divisões elementares de I (não necessariamente normais) podemos definir integral de $f(x)$ analogamente à definição anterior e demonstrar a equivalência entre as duas definições.

Exemplos:

1. $f: I \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$ (k é uma constante real) é $\mathbb{R}$ -integrável em I e

$$\int_I k \, dx = k \gamma(I)$$

2. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap I \\ 0, & \text{se } x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap I \end{cases}$

não é $\mathbb{R}$ -integrável em I .

Crítério da Integrabilidade de Riemann

"Uma condição necessária e suficiente para que uma função $f(x)$ definida e limitada em $I \subset \mathbb{R}^p$ (I intervalo compacto) seja $\mathbb{R}$ -integrável em I é que para todo número $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$ seja possível determinar alguma divisão $\Delta \in \mathcal{D}_I$, tal que $\sum_{X \in \mathcal{Z}_\Delta} \Omega_X \gamma(X) < \varepsilon$."

Demonstração:

Nec. $\Rightarrow$

Sendo $f(x)$ $\mathbb{R}$ -integrável em I , temos $s_o = S_o$;

sendo $s_o = \sup \underline{f}$, temos: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists s_{\Delta_1} \in \underline{f}) (s_o - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\Delta_1})$.

Analogamente de $S_o = \inf \bar{f}$ resulta: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists s_{\Delta_2} \in \bar{f})$

$$(s_o + \frac{\varepsilon}{2} > s_{\Delta_2}).$$

Por outro lado: $(\exists \Delta \in \mathcal{D}_I) (\Delta = \text{Res}(\Delta_1, \Delta_2)) (\Delta \supset \Delta_1 \text{ e } \Delta \supset \Delta_2)$.

Portanto $s_o - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\Delta_1} \leq s_\Delta$ e $s_o + \frac{\varepsilon}{2} > s_{\Delta_2} \geq s_\Delta$. Daí temos:

$S_o - s_o + \varepsilon > S_\Delta - s_\Delta$ e consequentemente

$$S_\Delta - s_\Delta = \sum_{X \in \mathcal{Z}_\Delta} \Omega_X \gamma(X) < \varepsilon$$

Suf. $\Leftarrow$

Se por hipótese vale a frase: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \Delta^* \in \mathcal{D}_I) (\sum_{X \in \mathcal{Z}_{\Delta^*}} \Omega_X \gamma(X) < \varepsilon)$,

temos: $S_{\Delta^*} - s_{\Delta^*} < \varepsilon$.

Sendo $s_o = \sup \underline{f}$ e $S_o = \inf \bar{f}$, então: $(\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (s_\Delta \leq s_o \text{ e } S_\Delta \geq S_o) \Rightarrow (0 \leq S_o - s_o \leq S_\Delta - s_\Delta)$. Portanto sendo $0 \leq S_o - s_o \leq$

$S_{\Delta^*} - s_{\Delta^*} < \varepsilon$, então $|S_o - s_o| < \varepsilon$. Assim, $S_o = s_o$ ou seja, $f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I .

Corolário I: "Se $f(x)$ é contínua em I (I é intervalo compacto) ($I \subset \mathbb{R}^p$) então $f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I ."

Demonstração:

Se $f(x)$ é contínua no intervalo compacto I , $f(x)$ é uniformemente contínua em I . Logo $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \delta \in \mathbb{R}_{++}) (\forall x, z \in I) (\|x - z\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(z)| < \varepsilon)$. Seja $\Delta \in \mathcal{D}_I$ tal que $(\forall X \in \mathfrak{F}_\Delta) (d(X) < \delta)^{(+)}$. Portanto $(\forall X \in \mathfrak{F}_\Delta) (\exists \xi, \eta \in X) (\ell_X = f(\xi) \text{ e } L_X = f(\eta)) (\|\xi - \eta\| \leq d(X) < \delta \Rightarrow \Omega_X = |f(\xi) - f(\eta)| < \varepsilon)$.

$$\text{Assim, } (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \Delta \in \mathcal{D}_I) (S_\Delta - s_\Delta = \sum_{X \in \mathfrak{F}_\Delta} \Omega_X \gamma(X) < \varepsilon \cdot \sum_{X \in \mathfrak{F}_\Delta} \gamma(X) = \varepsilon \gamma(I))$$

e consequentemente $f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I .

Corolário II: "Se $f(x)$ é monotônica no intervalo compacto I ($I \subset \mathbb{R}$), então $f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I ."

Demonstração:

Se $f(x)$ é monotônica em $I \subset \mathbb{R}$, então $(\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (\sum_{X \in \mathfrak{F}_\Delta} \Omega_X = \Omega)$.

Admitamos que $f(x)$ não seja constante em I . Temos então que $\Omega > 0$. Temos ainda que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \Delta^* \in \mathcal{D}) (\forall X \in \mathfrak{F}_{\Delta^*}) (\gamma(X) < \varepsilon)$. Assim sendo, vem:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \Delta^* \in \mathcal{D}) (S_{\Delta^*} - s_{\Delta^*} = \sum_{X \in \mathfrak{F}_{\Delta^*}} \Omega_X \gamma(X) < \varepsilon \sum_{X \in \mathfrak{F}_{\Delta^*}} \Omega_X = \varepsilon \Omega)$$

ou seja $f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I .

Proposição: "Se $f(x)$ é definida, limitada no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$, e se $\Delta, \Delta^* \in \mathcal{D}_I$ tal que $\Delta \prec \Delta^*$ sendo $\sum_{i=1}^p \text{card } \Delta_i^* - \sum_{i=1}^p \text{card } \Delta_i = k \geq 1$, então $s_{\Delta^*} - s_\Delta \leq k \Omega |\Delta| \alpha^{p-1}$ e $S_\Delta - S_{\Delta^*} \leq k \Omega |\Delta| \alpha^{p-1}$." $(++)$

Demonstração:

Suponhamos $k = 1$. Sendo $\text{card } \Delta_i = n_i$ ($i = 1, \dots, p$), sem perda da generalidade, podemos tornar $\text{card } \Delta_1^* = \text{card } \Delta_1 + 1 = n_1 + 1$. Então $(\exists n \in \mathbb{N}) (\exists X^j \in \mathfrak{F}_\Delta) (j = 1, 2, \dots, n) (++) (\exists 1Y^j, 2Y^j \in \mathfrak{F}_{\Delta^*}) (1Y^j \cup 2Y^j = X^j)$. Mas $\ell_{1Y^j} \geq \ell_X$ e $\ell_{2Y^j} \geq \ell_X$.

Assim temos:

(+) $d(X)$ é o diâmetro de X

(++) Sendo $\pi_i(I) = \pi_i I$ a i -ésima projeção do intervalo $I \subset \mathbb{R}^p$ ($i = 1, \dots, p$), $\alpha = \max \{ \gamma(\pi_i I) (i = 1, \dots, p) \}$ e $|\Delta| = \max \{ d(X) (X \in \mathfrak{F}_\Delta) \}$.

$$\begin{aligned}
s_{\Delta^*} &= \sum_{Y \in \mathcal{G}_{\Delta^*}} \ell_Y \gamma(Y) = \sum_{Y \in \mathcal{G}_{\Delta^*} - \{1_{Yj}, 2_{Yj}\}} \ell_Y \gamma(Y) + \sum_{j=1}^n (\ell_{1_{Yj}} \gamma(1_{Yj}) + \ell_{2_{Yj}} \gamma(2_{Yj})) \geq \\
&\geq \sum_{X \in \mathcal{G}_{\Delta} - \{X^j\}} \ell_X \gamma(X) + \sum_{j=1}^n \ell_{X^j} (\gamma(1_{Yj}) + \gamma(2_{Yj})) = \sum_{X \in \mathcal{G}_{\Delta} - \{X^j (1 \leq j \leq n)\}} \ell_X \gamma(X) + \sum_{j=1}^n \ell_{X^j} \gamma(X^j) = \\
&= \sum_{X \in \mathcal{G}_{\Delta}} \ell_X \gamma(X) = s_{\Delta}. \quad \text{Daí deduzimos:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{\Delta^*} - s_{\Delta} &= \sum_{j=1}^n ((\ell_{1_{Yj}} - \ell_{X^j}) \gamma(1_{Yj}) + (\ell_{2_{Yj}} - \ell_{X^j}) \gamma(2_{Yj})) \leq \sum_{j=1}^n ((L_{X^j} - \ell_{X^j}) \gamma(1_{Yj}) + \\
&+ (L_{X^j} - \ell_{X^j}) \gamma(2_{Yj})) = \sum_{j=1}^n \Omega_{X^j} \gamma(X^j) \leq \Omega \sum_{j=1}^n \gamma(X^j) \leq \Omega |\Delta| \cdot \alpha^{p-1} \leq \Omega |\Delta| \alpha^{p-1}
\end{aligned}$$

Suponhamos a propriedade verificada para $k = m > 1$, ou seja,

$$\begin{aligned}
s_{\Delta^*} - s_{\Delta} &\leq m \Omega |\Delta| \alpha^{p-1}, \text{ onde } \sum_{i=1}^p \text{card } \Delta_i^* = \sum_{i=1}^p \text{card } \Delta_i = m. \text{ Seja } \Delta^{**} \in \mathcal{O}_I \\
\text{tal que } \sum_{i=1}^p \text{card } \Delta_i^{**} - \sum_{i=1}^p \text{card } \Delta_i &= m + 1 \text{ e } \sum_{i=1}^p \text{card } \Delta_i^{**} - \sum_{i=1}^p \text{card } \Delta_i^* = \\
&= 1. \text{ Assim vem:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{\Delta^{**}} - s_{\Delta} &= (s_{\Delta^{**}} - s_{\Delta^*}) + (s_{\Delta^*} - s_{\Delta}) \leq \Omega |\Delta| \alpha^{p-1} + m \Omega |\Delta| \alpha^{p-1} = \\
&= (m + 1) \Omega |\Delta| \alpha^{p-1}.
\end{aligned}$$

Portanto $(\forall k \in \mathbb{N}) (k \geq 1)$ temos: $s_{\Delta^*} - s_{\Delta} \leq k \Omega |\Delta| \alpha^{p-1}$.

Analogamente podemos mostrar que nas hipóteses estabelecidas $(\forall k \in \mathbb{N}) (k \geq 1)$ temos $s_{\Delta} - s_{\Delta^*} \leq k \Omega |\Delta| \alpha^{p-1}$.

Teorema de Darboux:

"Se $f(x)$ é definida e limitada em $I \subset \mathbb{R}^p$, (I intervalo compacto), então $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \delta \in \mathbb{R}_{++}) (\forall \Delta \in \mathcal{O}_I) (|\Delta| < \delta \Rightarrow s_{\Delta} - s_0 < \epsilon \text{ e } S_{\Delta} - S_0 < \epsilon)$ ".

Demonstração:

Temos por hipótese: $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \Delta^1 \in \mathcal{O}_I) (s_0 - \frac{\epsilon}{2} < s_{\Delta^1})$.

Seja $r = \sum_{i=1}^p \text{card } \mathcal{G}_{\Delta_i^1}$, e tomemos $\delta_1 = \frac{\epsilon}{2r \Omega \alpha^{p-1}}$. (++) Por ou-

tro lado, $(\forall \Delta \in \mathcal{O}_I) (\exists \Delta^2 \in \mathcal{O}_I) (\Delta^2 = \text{Res}(\Delta, \Delta^1)) (\Delta^2 \succ \Delta^1 \Rightarrow$

(+) $n = 1$, se $p = 1$; $n = n_2$, se $p = 2$ e $n = n_2 n_3$, se $p = 3$. Vide referência(++) da página anterior.
 (++) Supomos $\Omega > 0$, ou seja, a função $f(x)$ não é constante em I . No caso de $f(x)$ ser constante em I , o Teorema de Darboux é evidente.

$\Rightarrow s_{\Delta 1} \leq s_{\Delta 2}$ e consequentemente temos também $s_0 - \frac{\varepsilon}{2} < s_{\Delta 1} \leq s_{\Delta 2}$.

Mas, $\sum_{i=1}^p (\text{card } \mathcal{I}_{\Delta_i 2} - \text{card } \mathcal{I}_{\Delta_i 1}) \leq r$ e portanto $s_{\Delta 2} - s_{\Delta 1} \leq r \cdot \omega \cdot |\Delta| \alpha^{p-1}$

Temos pois:

$$s_0 - s_{\Delta} = (s_0 - s_{\Delta 2}) + (s_{\Delta 2} - s_{\Delta 1}) + (s_{\Delta 1} - s_{\Delta}) < \frac{\varepsilon}{2} + r \cdot \omega \cdot |\Delta| \alpha^{p-1} < \frac{\varepsilon}{2} + r \cdot \omega \cdot \delta_1 \alpha^{p-1} = \varepsilon$$

Analogamente podemos mostrar que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_{++}) (\forall \Delta \in \mathcal{D}_I)$

$$(|\Delta| < \delta_2 \Rightarrow s_{\Delta} - s_0 < \varepsilon).$$

Sendo $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, temos:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \delta \in \mathbb{R}_{++}) (\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (|\Delta| < \delta \Rightarrow s_0 - s_{\Delta} < \varepsilon \text{ e } s_{\Delta} - s_0 < \varepsilon).$$

Cr terio da Integrabilidade de Darboux:

"Uma condição necessária e suficiente para que uma função $f(x)$ de finida e limitada no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ seja $\mathbb{R}$ -integrável em I   que $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (|\Delta| < \delta \Rightarrow s_{\Delta} - s_{\Delta} < \varepsilon).$ "

Demonstração:

Nec. $\Rightarrow$

Se por hipótese $f(x)$   $\mathbb{R}$ -integrável em I então $s_0 = S_0$. Por outro lado, o Teorema de Darboux garante:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \delta \in \mathbb{R}_{++}) (\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (|\Delta| < \delta \Rightarrow s_0 - s_{\Delta} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } s_{\Delta} - s_0 < \frac{\varepsilon}{2}). \text{ Temos então: } s_{\Delta} - s_{\Delta} + s_0 - s_0 < \varepsilon \Rightarrow s_{\Delta} - s_{\Delta} < \varepsilon.$$

Suf. $\Leftarrow$

Por hipótese vale a frase:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (|\Delta| < \delta \Rightarrow s_{\Delta} - s_{\Delta} < \varepsilon).$$

Temos então:

$$(\exists \Delta \in \mathcal{D}_I) \left(\sum_{X \in \mathcal{A}_{\Delta}} \alpha_X \gamma(X) < \varepsilon \right). \text{ Portanto, } f(x) \text{   } \mathbb{R}\text{-integrável em } I.$$

Notemos que as frases vistas no Teorema e no Cr terio de Darboux, são semelhantes às frases de limite de funções. Este fato nos sugere a considerar as quantidades s_0 e S_0 como limites das somas s_{Δ} e S_{Δ} , respectivamente, quando a norma $|\Delta|$ tende para 0. Devemos notar, no entanto, que dentro da conceituação clássica de limite de função isso não   lícito fazer, pois s_{Δ} e S_{Δ} , em geral, não são funções de $|\Delta|$, pois várias divisões do intervalo I podem ter a mesma norma que por sua vez eventualmente corresponderá a mais de um valor das quantidades s_{Δ} e S_{Δ} . Apesar disso, s_{Δ} e S_{Δ} podem ser consideradas funções da divisão $\Delta \in \mathcal{D}_I$

pois a cada divisão Δ de $\mathcal{Q}_I$ correspondem, através de leis bem determinadas, um único número s_Δ e um único número S_Δ . Para podermos formalizar corretamente os resultados que envolvem frases do tipo mencionado e consequentemente deduzir outras propriedades que nos interessam usaremos o conceito de limite segundo Moore-Smith abordado no Capítulo I, que como vimos, é uma generalização do conceito habitual de limite.

Seja $I \subset \mathbb{R}^p$ um intervalo^(*) e consideremos o conjunto $\mathcal{Q}_I$ de todas as divisões de I orientado pela relação "refinamento" $\succ$. Evidentemente, sendo $f(x)$ uma função definida e limitada em I , as quantidades s_Δ e S_Δ (só mas inferior e superior de $f(x)$ relativamente à divisão $\Delta \in \mathcal{Q}_I$, respectivamente) são funções limitadas e definidas em $\mathcal{Q}_I$. Além disso s_Δ é isotônica e S_Δ é antitônica em $\mathcal{Q}_I$.

Sendo $s_0 = \sup_{\Delta \in \mathcal{Q}_I} s_\Delta$ e $S_0 = \inf_{\Delta \in \mathcal{Q}_I} S_\Delta$, uma proposição demonstrada no Capítulo I nos garante: $\lim_{\Delta \in \mathcal{Q}_I, \succ} s_\Delta = s_0$ e $\lim_{\Delta \in \mathcal{Q}_I, \succ} S_\Delta = S_0$.

Uma Outra Formulação do Teorema de Darboux

Seja $I \subset \mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$) um intervalo compacto e $\mathcal{Q}$ ⁽⁺⁾ o conjunto das divisões normais de I , orientado por $\succ$ definida como segue: Dados $\Delta, \Delta^* \in \mathcal{Q}$ ($\Delta^* \succ \Delta \iff |\Delta^*| \leq |\Delta|$). Evidentemente a relação $\succ$ sobre $\mathcal{Q}$ satisfaz as propriedades transitiva e compositiva. Sendo $f(x)$ definida e limitada em I o Teorema de Darboux nos diz: $(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \delta \in \mathbb{R}_{++}) (\forall \Delta \in \mathcal{Q}) (|\Delta| < \delta \implies s_0 - s_\Delta < \epsilon \text{ e } S_\Delta - S_0 < \epsilon)$.⁽⁺⁺⁾

Levando em conta a definição de limite segundo Moore-Smith, o Teorema de Darboux pode ser enunciado:

"Se $f(x)$ é definida e limitada no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$, então as funções s_Δ e S_Δ são convergentes em $\mathcal{Q}$ no sentido de Moore-Smith e $\lim_{\Delta \in \mathcal{Q}, \succ} s_\Delta = s_0$ bem como $\lim_{\Delta \in \mathcal{Q}, \succ} S_\Delta = S_0$."

Corolário (Critério de Darboux)

" $f(x)$ definida e limitada no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I se e somente se $\lim_{\Delta \in \mathcal{Q}, \succ} s_\Delta = \lim_{\Delta \in \mathcal{Q}, \succ} S_\Delta$."

(*) I é intervalo compacto.

(+) A fim de simplificar as deduções e não havendo ambiguidade quanto ao intervalo compacto I , usaremos a notação $\mathcal{Q}$ ao invés de $\mathcal{Q}_I$.

(++) As quantidades s_Δ , S_Δ , s_0 e S_0 têm os significados anteriormente convencionados.



Divisões Generalizadas

Definição: "Seja Δ uma divisão do intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ e ξ_X um ponto qualquer de $X \in \mathcal{T}_\Delta$; chama-se divisão generalizada de I correspondente a Δ e se indica por $\dot{\Delta}$, ao conjunto $\Delta \cup \{\xi_X \mid \xi_X \in X \in \mathcal{T}_\Delta\}$." (*)

Seja $\dot{\mathcal{D}} = \{\dot{\Delta} \mid \Delta \text{ é divisão generalizada de } I\}$.

Definição: "Dadas duas divisões Δ^1 e Δ^2 ($\Delta^1, \Delta^2 \in \dot{\mathcal{D}}$) correspondentes a Δ^1 e Δ^2 ($\Delta^1, \Delta^2 \in \mathcal{D}$) respectivamente, diz-se que $\Delta^1 \prec \Delta^2$ (ou $\Delta^2 \succ \Delta^1$) se e somente se $\Delta^1 \prec \Delta^2$."

Vemos imediatamente que $\dot{\mathcal{D}}$ é orientado por $\prec$.

Consideremos agora uma função $f(x)$ definida, limitada e integrável no intervalo $I \subset \mathbb{R}^p$ e seja $\Delta \in \dot{\mathcal{D}}$.

Temos evidentemente:

$$\sum_{X \in \mathcal{T}_\Delta} \ell_X \gamma(X) \leq \sum_{\substack{X \in \mathcal{T}_\Delta \\ \xi \in \Delta}} f(\xi_X) \gamma(X) \leq \sum_{X \in \mathcal{T}_\Delta} L_X \gamma(X)$$

Chamando $\sum_{X \in \mathcal{T}_\Delta} f(\xi_X) \gamma(X)$ de $\sigma(\Delta; f)$ (+) e (++) e notando que

$$\ell_X = \inf_{x \in X} f(x) = \inf_{\xi \in \Delta \in \dot{\mathcal{D}}} f(\xi_X), \text{ bem como } L_X = \sup_{x \in X} f(x) = \sup_{\xi \in \Delta \in \dot{\mathcal{D}}} f(\xi_X).$$

Deduzimos portanto, que: $(\forall \Delta \in \dot{\mathcal{D}}) (\forall \Delta \in \dot{\mathcal{D}}) (\Delta \text{ e } \Delta \text{ são divisões correspondentes}) (s_\Delta \leq \sigma_\Delta \leq S_\Delta)$.

Evidentemente se $f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I , então $\lim_{\Delta \in \dot{\mathcal{D}} \prec} \sigma_\Delta$ e é igual a $\int_I f(x) dx$. De fato, se $f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I , então

$$\lim_{\Delta \in \dot{\mathcal{D}} \prec} (S_\Delta - s_\Delta) = S_0 - s_0 = 0$$

ou seja,

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \Delta_0 \in \dot{\mathcal{D}}) (\forall \Delta \in \dot{\mathcal{D}})$$

$$(\Delta \succ \Delta_0 \Rightarrow |S_\Delta - s_\Delta| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\text{Daí vem: } S_\Delta - S_0 < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } |\sigma_\Delta - S_\Delta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Portanto } (\forall \varepsilon > 0) (\exists \Delta_0 \in \dot{\mathcal{D}}) (\forall \Delta \in \dot{\mathcal{D}}) (\Delta \succ \Delta_0 \Rightarrow |\sigma_\Delta - S_0| \leq$$

$$\leq |\sigma_\Delta - S_\Delta| + |S_\Delta - S_0| < \varepsilon). \text{ Daí concluímos que:}$$

$$\lim_{\Delta \in \dot{\mathcal{D}} \prec} \sigma_\Delta = \int_I f(x) dx$$

(*) Em cada intervalo X tomamos um único ponto $\xi_X \in X$.

(+) As divisões Δ e Δ chamaremos de divisões correspondentes.

(++) Não havendo perigo de confusão, indicaremos $\sigma(\Delta; f)$ por σ_Δ .

Doravante, não havendo perigo de confusão entre Δ e $\triangle$, usaremos o símbolo Δ para designar a divisão generalizada $\triangle$. Análogo significado será dado para o conjunto $\mathcal{D}$. ξ_X representará sempre um ponto de X tal que $\xi_X \in \Delta$.

Propriedades da $\mathcal{R}$ -Integral

1. "Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções definidas, limitadas e integráveis no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ então $f(x) \pm g(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I e $\int_I (f(x) \pm g(x)) dx = \int_I f(x) dx \pm \int_I g(x) dx$." (*)

Demonstração:

Para todo Δ ($\Delta \in \mathcal{D}$) temos

$$\sigma(\Delta; f) = \sum_{x \in \mathcal{J}_\Delta} f(\xi_X) \gamma(X) \quad \text{e} \quad \sigma(\Delta; g) = \sum_{x \in \mathcal{J}_\Delta} g(\xi_X) \gamma(X)$$

$$\text{Mas, } \lim_{\Delta \in \mathcal{D}, \gamma} \sigma(\Delta; f) = \int_I f \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta \in \mathcal{D}, \gamma} \sigma(\Delta; g) = \int_I g \implies$$

$$\begin{aligned} \implies \int_I f \pm \int_I g &= (**) \lim_{\Delta} \sigma(\Delta; f) \pm \lim_{\Delta} \sigma(\Delta; g) = \lim_{\Delta} [\sigma(\Delta; f) \pm \\ &\pm \sigma(\Delta; g)] = \lim_{\Delta} \sum_{x \in \mathcal{J}_\Delta} [f(\xi_X) \pm g(\xi_X)] \gamma(X) = \lim_{\Delta} \sigma(\Delta; f \pm g) \end{aligned}$$

Portanto $\sigma(\Delta; f \pm g)$ é convergente em $\mathcal{D}$ segundo Moore-Smith.

$$\text{Assim } f \pm g \text{ é } \mathcal{R}\text{-integrável e } \int_I (f \pm g) = \int_I f \pm \int_I g.$$

2. "Se $f(x)$ é definida, limitada e $\mathcal{R}$ -integrável em $I \stackrel{(1)}{\subset} \mathbb{R}^p$ e $k \in \mathbb{R}$, então $kf(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I e $\int_I kf(x) dx = k \int_I f(x) dx$."

$$\text{Para todo } \Delta \text{ } (\Delta \in \mathcal{D}), \text{ temos } \sigma(kf; \Delta) = \sum_{x \in \mathcal{J}_\Delta} kf(\xi_X) \gamma(X) =$$

$$= k \sum_{x \in \mathcal{J}_\Delta} f(\xi_X) \gamma(X) = k \sigma(f; \Delta). \text{ Mas } \lim_{\Delta} \sigma(f; \Delta) = \int_I f \text{ e portan}$$

$$\text{to } \lim_{\Delta} \sigma(kf; \Delta) = \lim_{\Delta} k \sigma(f; \Delta) = k \lim_{\Delta} \sigma(f; \Delta) = k \int_I f.$$

$$\text{Assim, } kf(x) \text{ é } \mathcal{R}\text{-integrável em } I \text{ e } \int_I kf = k \int_I f.$$

(*) Usaremos a notação $\int_I f$ ad' invés de $\int_I f(x) dx$

(**) Usaremos a notação $\lim_{\Delta} \sigma(f; \Delta)$ ao invés de $\lim_{\Delta \in \mathcal{D}, \gamma} \sigma(f; \Delta)$.

(1) Não havendo expressão em contrário, nos enunciados seguintes, consideraremos $I \subset \mathbb{R}^p$ sempre intervalo compacto.

3. Propriedade da Monotonicidade: "Se $f(x)$ e $g(x)$ são definidas, limitadas e $\mathbb{R}$ -integráveis em I e $(\forall x \in I) (f(x) \leq g(x)) \implies \int_I f(x) dx \leq \int_I g(x) dx$."

Demonstração:

Seja $\varphi(x) = g(x) - f(x)$; $\varphi(x)$ evidentemente é $\mathbb{R}$ -integrável em I e $\int_I \varphi = \int_I (g - f) = \int_I g - \int_I f$. Sendo $\varphi(x) \geq 0$ em I e notando que $0 \leq \inf_I \varphi(x) \cdot \gamma(I) \leq \int_I \varphi \leq \sup \varphi(x) \cdot \gamma(I)$, temos:

$$\int_I \varphi \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_I f \leq \int_I g.$$

Notemos que mediante o Critério de Integrabilidade de Riemann e eventualmente o uso das 3 propriedades anteriores facilmente podemos demonstrar as propriedades seguintes:

4. "Se $f(x)$ é definida, limitada e $\mathbb{R}$ -integrável em I , então $|f(x)|$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I e $|\int_I f| \leq \int_I |f|$."

5. "Se $f(x)$ e $g(x)$ são definidas, limitadas e $\mathbb{R}$ -integráveis em I , então $f(x) \cdot g(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I ."

6. "Se $f(x)$ e $g(x)$ são definidas, limitadas e $\mathbb{R}$ -integráveis em I , bem como $\inf_I g(x) > 0$ ou $\sup_I g(x) < 0$, então $\frac{f(x)}{g(x)}$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I ."

Critério da Integrabilidade de Cauchy

"Uma condição necessária e suficiente para que uma função $f(x)$ definida e limitada no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ seja $\mathbb{R}$ -integrável em I , é que $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \Delta_0 \in \mathcal{O}) (\forall \Delta^1, \Delta^2 \in \mathcal{O}) (|\Delta^1| < |\Delta_0| (i=1,2) \implies |\sigma_{\Delta^1} - \sigma_{\Delta^2}| < \varepsilon)$."

Demonstração:

Pelo Teorema da Convergência de Cauchy (Moore-Smith) aplicada para a função σ_{Δ} definida e limitada em $\mathcal{O}$ orientada por γ , podemos dizer:

$f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em $I \iff \lim_{\Delta \in \mathcal{O}, \gamma} \sigma_{\Delta} = \int_I f(x) dx$, ou seja $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++})$

$(\exists \Delta_0 \in \mathcal{O}) (\forall \Delta^1, \Delta^2 \in \mathcal{O}) (\Delta^1 \succ \Delta_0 \text{ e } \Delta^2 \succ \Delta_0 \implies |\sigma_{\Delta^1} - \sigma_{\Delta^2}| < \varepsilon)$.

Critério da Integrabilidade de Jordan

"Uma condição necessária e suficiente para que uma função definida e limitada no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ seja $\mathbb{R}$ -integrável em I , é que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (C_\varepsilon = \{a \in I \mid \Omega_a \geq \varepsilon\}) \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \gamma(C_\varepsilon) = 0$."

Demonstração:

Nec. $\Rightarrow$

Suponhamos, por absurdo que $(\exists \varepsilon_0 \in \mathbb{R}_{++}) (\gamma(C_{\varepsilon_0}) > 0)$ isto é ,
 $(\exists \bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}_{++}) (\forall (I_n)) (I_n \in \mathcal{J}^{(p)}) (n = 1, 2, \dots, k) \left(\bigcup_{n=1}^k I_n \supset C_{\varepsilon_0} \Rightarrow \sum_{n=1}^k \gamma(I_n) \geq \bar{\varepsilon} \right)$. Sendo (J_n) tal que $J_n = I_n \cap I$, temos ainda $\sum_{n=1}^k \gamma(J_n) \geq \bar{\varepsilon}$.

Por outro lado $(\forall \Delta \in \mathcal{D}) (\exists \Delta^* \in \mathcal{D}) (\Delta^* \succ \Delta \text{ e } \mathcal{J}_{\Delta^*} = \mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2)$

$$\left(\bigcup_{n=1}^k J_n = \bigcup_{x \in \mathcal{J}_1} X \right). \text{ Portanto, daí vem: } S_\Delta - s_\Delta \geq S_{\Delta^*} - s_{\Delta^*} = \sum_{x \in \mathcal{J}_{\Delta^*}} \Omega_X \gamma(X) = \\ = \sum_{x \in \mathcal{J}_1} \Omega_X \gamma(X) + \sum_{x \in \mathcal{J}_2} \Omega_X \gamma(X) \geq \sum_{x \in \mathcal{J}_1} \Omega_X \gamma(X) \geq \bar{\varepsilon} \varepsilon_0$$

Devemos notar que $(\forall X \in \mathcal{J}_1) (\Omega_X \geq \varepsilon_0)$ pois admitimos que $X \cap C_{\varepsilon_0} \neq \emptyset$. Assim, $(\exists \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} > 0) (\forall \Delta \in \mathcal{D} \Rightarrow S_\Delta - s_\Delta = \sum_{x \in \mathcal{J}_\Delta} \Omega_X \gamma(X) \geq \bar{\varepsilon} \cdot \varepsilon_0)$.

Isto significa que $f(x)$ não é $\mathbb{R}$ -integrável em I , contrariando a hipótese.

Suf. $\Leftarrow$

Suponhamos por hipótese: $\gamma(C_\varepsilon) = 0$. Temos então: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++})$

$(\exists (I_n)) (I_n \in \mathcal{J}^{(p)}) (n \in \mathbb{N}_k) \stackrel{(*)}{\left(\bigcup_{n=1}^k I_n \supset C_\varepsilon \text{ e } \sum_{n=1}^k \gamma(I_n) < \varepsilon \right)}$. Podemos su

por $(\forall i, j \in \mathbb{N}_k) (i \neq j) (\bar{I}_i \cap \bar{I}_j = \emptyset)$ bem como $(\forall a \in C_\varepsilon) (\exists n \in \mathbb{N}_k)$

$(a \in \bar{I}_n)$. O conjunto $F = I - \bigcup_{n=1}^k \bar{I}_n$ é fechado e é tal que $(\forall x \in F)$

$(\Omega_x < \varepsilon)$. Assim, $(\forall x \in F) (\exists V(x)) \stackrel{(**)}{(\Omega_{V(x)} < 2\varepsilon)}$, pois s e n d o

$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \Omega(\delta) = \Omega_x < \varepsilon$, $\stackrel{(***)}{\text{então}} (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_{++}) (0 < \delta < \delta_1 \Rightarrow$

$(+) N_s = \{1, 2, \dots, s\} (s \in \mathbb{N})$

$(*) \Omega_a$ é a oscilação de $f(x)$ no ponto a .

$(**)$ Admitiremos que as vizinhanças $V(x)$ são intervalos abertos com centro no ponto x e diâmetro δ .

$(***) \Omega(\delta)$ é a oscilação de $f(x)$ na vizinhança $V(x)$ de diâmetro δ .

$$\Rightarrow |\Omega(\delta) - \Omega_x| < \varepsilon \quad \text{e ainda} \quad \Omega_x \leq \Omega(\delta) < \Omega_x + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

$$\therefore \bigcup_{x \in F} V(x) \supset F.$$

Pela propriedade de Borel-Lebesgue, existe um sub-recobrimento finito (V_m) ($m = 1, 2, \dots, p$) de F . Seja $W_m = V_m \cap F$.

Evidentemente $\bigcup_{m=1}^p W_m = F$ e $\Omega_{W_m} \leq \Omega_{V_m} < 2\varepsilon$. Sendo $J_n = I_n \cap I$, temos também que $\bigcup_{n=1}^k J_n \supset C_\varepsilon$ e $\sum_{n=1}^k \gamma(J_n) < \varepsilon$.

O conjunto $\{\bar{J}_1, \dots, \bar{J}_k, F\}$ é uma divisão elementar de I . Existe então um refinamento normal $\mathcal{T}_\Delta$ desta divisão, tal que $\mathcal{T}_\Delta = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, onde $\mathcal{T}_1 = \{X \in \mathcal{T}_\Delta \mid X \subset \bar{J}_n \text{ com } n \in \mathbb{N}_k\}$ e $\mathcal{T}_2 = \{X \in \mathcal{T}_\Delta \mid X \subset \bar{W}_m \text{ e } m \in \mathbb{N}_p\}$. Portanto, $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \Delta \in \mathcal{D}_I) (S_\Delta - s_\Delta = \sum_{X \in \mathcal{T}_1} \Omega_X \gamma(X) + \sum_{X \in \mathcal{T}_2} \Omega_X \gamma(X) < \Omega \varepsilon + 2\varepsilon \gamma(I) = \varepsilon(\Omega + 2\gamma(I))$.

Portanto $f(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I .

Como consequência deste critério temos que se $f(x)$ é definida e limitada no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ e é contínua em $I - C$, onde $\gamma(C) = 0$, então $f(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I .

Em particular, se $f(x)$ é descontínua em um número finito de pontos de I ou nos pontos de uma curva retificável $\Gamma \subset I \subset \mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$) ou então nos pontos de uma superfície regular $S \subset I \subset \mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$) então $f(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I .

Medida de Lebesgue Nula

Definição:

"Dado um conjunto $C \subset \mathbb{R}^p$, diz-se que C tem medida de Lebesgue nula ou simplesmente medida nula, se e só se $C = \emptyset$ ou $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \mathcal{T}_C^{(p)})$ ($\mathcal{T}$ é família enumerável) $(\bigcup_{X \in \mathcal{T}} X \supset C, \text{ a série } \sum_{X \in \mathcal{T}} \gamma(X) \text{ converge, e } \sum_{X \in \mathcal{T}} \gamma(X) < \varepsilon)$."

Sendo C um conjunto de medida nula, usaremos a notação $\mu(C) = 0$.

Exemplos:

1. Todo conjunto de conteúdo nulo tem medida nula.



2. Todo conjunto enumerável tem medida nula.
3. A reunião de uma família enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.
4. Um conjunto compacto de medida nula tem sempre conteúdo nulo.
(Por exemplo, o conjunto de Cantor)
5. Sendo C um conjunto de medida nula e $B \subset C$, então B tem medida nula.

Nem todo conjunto de medida nula é $\mathcal{J}$ -mensurável. Por exemplo:

O conjunto $C = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ tem medida nula, pois é enumerável.

Por outro lado $\underline{\mu}(C) = 0 < \overline{\mu}(C) = 1$, isto é, C não é $\mathcal{J}$ -mensurável.

Seja $f: E \rightarrow F$ uma aplicação tal que $E \subset \mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$) e suponhamos que $f(x)$ satisfaça uma certa propriedade em E salvo um conjunto C tal que $\mu(C) = 0$. Diremos neste caso que a função $f(x)$ satisfaz esta propriedade em E p.p.t. ("presque par tout"). Por exemplo, se $f(x)$ é contínua em $E - C$ e se $\mu(C) = 0$, então $f(x)$ é contínua em E p.p.t.

CrITÉRIO de Integrabilidade de Lebesgue

"Sendo $f(x)$ uma função definida e limitada no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ e $C = \{a \in I \mid f(x) \text{ é descontínua em } a\}$, então uma condição necessária e suficiente para que $f(x)$ seja $\mathcal{R}$ -integrável em I é que $\mu(C) = 0$."

Nec. $\Rightarrow$

Evidentemente, $(a \in C \Leftrightarrow \Omega_a > 0)$ e $(\forall m \in \mathbb{N}) (\exists C_m = \{x \in I \mid \Omega_x \geq \frac{1}{m}\})$

Temos então $C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$. Provemos que $(\forall m \in \mathbb{N}) (\mu(C_m) = 0)$. Sendo

(C_m) uma família enumerável de conjuntos de medida nula, teremos automaticamente $\mu(C) = 0$, que constitui a tese. Fixemos um número $m \in \mathbb{N}$.

Por hipótese, sendo a função $f(x)$ $\mathcal{R}$ -integrável em I , temos $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \Delta \in \mathcal{D}) (S_{\Delta} - s_{\Delta} = \sum_{x \in \mathcal{Z}_{\Delta}} \Omega_x \gamma(X) < \frac{\varepsilon}{2m})$. Notemos que $(\forall X \in \mathcal{Z}_{\Delta})$

$(X \text{ é intervalo compacto})$.

Seja $C_m = C_m^1 \cup C_m^2$ tal que $C_m^1 = \{x \in C_m \mid x \in \Delta\}$ e $C_m^2 = C_m - C_m^1$

Sendo $C_m^1 \subset \Delta$ e Δ um conjunto finito, C_m^1 é finito e portanto C_m^1 tem $\mathcal{J}$ -medida nula. Assim $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists (I_n) (I_n \in \mathcal{J}^{(p)}) (n \in \mathbb{N}_k) (\bigcup_{n=1}^k I_n \supset C_m^1 \text{ e}$

$\sum_{n=1}^k \gamma(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}$). Por outro lado, $(\forall x \in C_m^2) (\exists X \in \mathcal{F}_\Delta) (x \in \overset{\circ}{X})$.

Seja $\mathcal{F}_1 = \{X \in \mathcal{F}_\Delta \mid \overset{\circ}{X} \cap C_m^2 \neq \emptyset\}$. Portanto $(\forall X \in \mathcal{F}_1) (\forall x \in X)$

$(\Omega_X \geq \Omega_x \geq \frac{1}{m})$. Mas $(\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_\Delta \Rightarrow \sum_{X \in \mathcal{F}_1} \Omega_X \gamma(X) \leq \sum_{X \in \mathcal{F}_\Delta} \Omega_X \gamma(X))$. Consequentemente

$\sum_{X \in \mathcal{F}_1} \Omega_X \gamma(X) \geq \frac{1}{m} \sum_{X \in \mathcal{F}_1} \gamma(X)$. Deste resultado bem como da condição

$\sum_{X \in \mathcal{F}_\Delta} \Omega_X \gamma(X) < \frac{\varepsilon}{2m}$ deduzimos:

$$\frac{1}{m} \sum_{X \in \mathcal{F}_1} \gamma(X) < \frac{\varepsilon}{2m}, \text{ ou seja, } \sum_{X \in \mathcal{F}_1} \gamma(X) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Portanto, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \mathcal{F}^*) (\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_1 \cup \{I_n \mid n \in \mathbb{N}_k\}) (\bigcup_{X \in \mathcal{F}^*} X \supset C_m \text{ e}$

$\sum_{X \in \mathcal{F}^*} \gamma(X) = \sum_{X \in \mathcal{F}_1} \gamma(X) + \sum_{n=1}^k \gamma(I_n) < \varepsilon$. Isto significa que $\gamma(C_m) = 0$ e

ainda $\mu(C_m) = 0$. Consequentemente, conforme uma observação inicial temos $\mu(C) = 0$.

Suf. $\Leftarrow$

Mostremos inicialmente que se $f(x)$ é uma função definida e limitada no intervalo fechado $K \subset \mathbb{R}^p$, tal que $(\exists N \in \mathbb{R}_{++}) (\forall x \in K) (\Omega_x < N)$, então $(\exists \Delta \in \mathcal{D}_K) (\sum_{X \in \mathcal{D}_K} \Omega_X \gamma(X) < N \gamma(K))$.

De fato: $(\forall x \in K) (\exists V_\delta(x)) (V_\delta(x) \text{ é um intervalo aberto em } K \text{ de diâmetro } \delta) (\delta \in \mathbb{R}_{++})$. Sendo $\Omega(\delta)$ a oscilação de $f(x)$ em $V_\delta(x)$, temos: $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \Omega(\delta) = \Omega_x < N$. Fazendo $\lambda = N - \Omega_x (\lambda > 0)$, vem:

$(\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_{++}) (\forall \delta \in \mathbb{R}_{++}) : \delta < \delta_1 \Rightarrow \Omega_x \leq \Omega(\delta) < \Omega_x + \lambda < N$.

Facilmente se mostra que: $(\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_{++}) (\delta_2 < \delta < \delta_1) (\exists V_{\delta_2}(x) = V) (\bar{V} \subset V_\delta(x))$. Sendo $\Omega_{\bar{V}}$ a oscilação de $f(x)$ em $\bar{V}$, temos $\Omega_x \leq \Omega_{\bar{V}} \leq \Omega(\delta) < \Omega_x + \lambda < N$, ou seja, $(\forall x \in K) (\exists V = V_x) (V \text{ é intervalo aberto em } K) (x \in V \text{ e } \Omega_{\bar{V}} < N)$.

Seja agora $\mathcal{C} = \{V = V_x \mid x \in K\}$. $\mathcal{C}$ é uma cobertura para o compacto K . Pela Propriedade de Borel-Lebesgue existe uma sub-cobertura finita $(V_\nu) (\nu \in \mathbb{N}_k) (k \in \mathbb{N})$ para o conjunto K . Mas $(\forall \nu \in \mathbb{N}_k) \bar{V}_\nu$ é um intervalo compacto contido em K . Assim, existe $\Delta (\Delta \in \mathcal{D}_K)$

$(\forall \nu \in \mathbb{N}_k) (\bar{V}_\nu \text{ é reunião finita de conjuntos de } \mathcal{F}_\Delta)$. Portanto, sendo

do $K = \bigcup_{\nu=1}^k \bar{V}_\nu = K, (\forall x \in \mathcal{F}_\Delta) (\exists \nu \in \mathbb{N}_k) (X \subset \bar{V}_\nu \Rightarrow \Omega_X \leq \Omega_{\bar{V}_\nu} < N)$, e

consequentemente temos: $\sum_{x \in \mathcal{G}_\Delta} \Omega_X \gamma(X) < N \sum_{x \in \mathcal{G}_\Delta} \gamma(X) = N \gamma(K)$.

Passemos então a demonstrar a condição suficiente.

Por hipótese sabemos que $\mu(C) = 0$, onde $C = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$, sendo $C_m = \left\{ x \in I \mid \Omega_x \geq \frac{1}{m} \right\}$ e $m \in \mathbb{N}$. Mas $(\forall \varepsilon > 0) (\exists m \in \mathbb{N}) \left(\frac{1}{m} \gamma(I) < \frac{\varepsilon}{2} \right)$ e notando que $C_m \subset C$, temos $\mu(C_m) = 0$. Assim, temos também: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists (I_\nu)) (\forall \nu \in \mathbb{N}) (I_\nu \text{ é intervalo aberto em } I) \text{ tal que } \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu \supset C_m \text{ e } \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I_\nu) < \frac{\varepsilon}{2\Omega}$, onde Ω é a oscilação de $f(x)$ em I . Consideramos $\Omega > 0$, pois excluimos o caso trivial da função $f(x)$ ser constante em I .

Mas o conjunto C_m é fechado e $C_m \subset I$. Portanto C_m é compacto. Assim, pela Propriedade de Borel-Lebesgue C_m possui uma sub-cobertura

finita $(I_{\nu_n}) (n \in \mathbb{N}_s) \left(\sum_{n=1}^s \gamma(I_{\nu_n}) < \frac{\varepsilon}{2\Omega} \right)$. Mas $I - \bigcup_{n=1}^s I_{\nu_n} \subset I$ é um compacto e portanto é reunião de uma família finita $\mathcal{G}_1$ de intervalos fechados (*). Além disso temos que se $J = \bigcup_{x \in \mathcal{G}_1} X \subset I - C_m$, então $(\forall X \in \mathcal{G}_1) (X \cap C_m = \emptyset)$. Portanto $(\forall X \in \mathcal{G}_1) (\forall x \in X) \left(\Omega_x < \frac{1}{m} \right)$ e ainda

existe $\Delta_X \in \mathcal{D}_X$, tal que $\sum_{Y \in \mathcal{G}_{\Delta_X}} \Omega_Y \gamma(Y) < \frac{\gamma(X)}{m}$. Seja Δ uma divisão de I , tal que os intervalos $\bar{I}_{\nu_n} (n = 1, 2, \dots, s)$ e $X \in \mathcal{G}_1$ sejam reuniões de intervalos de $\mathcal{G}_\Delta$. Notando que $\bigcup_{n=1}^s \bar{I}_{\nu_n}$ e J têm por reunião I e não

tem pontos internos comuns, podemos pôr: $\mathcal{G}_\Delta = \mathcal{G}^* \cup \mathcal{G}^{**}$, onde $\mathcal{G}^* = \{ Y \in \mathcal{G}_\Delta \mid Y \subset \bigcup_{n=1}^s \bar{I}_{\nu_n} \}$ e $\mathcal{G}^{**} = \{ Y \in \mathcal{G}_\Delta \mid Y \subset J \}$. Assim, $S_\Delta - s_\Delta = \sum_{Y \in \mathcal{G}_\Delta} \Omega_Y \gamma(Y) = \sum_{Y \in \mathcal{G}^*} \Omega_Y \gamma(Y) + \sum_{Y \in \mathcal{G}^{**}} \Omega_Y \gamma(Y) < \Omega \sum_{Y \in \mathcal{G}^*} \gamma(Y) + \sum_{X \in \mathcal{G}_1} \left[\sum_{Y \in \mathcal{G}_{\Delta_X}} \Omega_Y \gamma(Y) \right] < \Omega \left[\sum_{n=1}^s \gamma(\bar{I}_{\nu_n}) \right] + \sum_{X \in \mathcal{G}_1} \frac{\gamma(X)}{m} \leq \Omega \sum_{n=1}^s \gamma(\bar{I}_{\nu_n}) + \frac{1}{m} \sum_{X \in \mathcal{G}_1} \gamma(X) < \Omega \frac{\varepsilon}{2\Omega} + \frac{1}{m} \gamma(\bigcup_{X \in \mathcal{G}_1} X) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{m} \gamma(I) < \varepsilon$.

Daí vem finalmente que $f(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I .

Exemplo: Seja $f(x)$ a função definida em $I = [0, 1]$ como segue:

(*) Os fechados de $\mathcal{G}_1$ podemos supor sem pontos internos comuns, pois se não fosse assim, poderíamos recair a este caso, por meio de um raciocínio conveniente.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|q|}, & \text{se } x = \frac{p}{q} \in I \text{ com } p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } \text{MDC}(p, q) = 1 \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional ou } x = 0. \end{cases}$$

$f(x)$ é uma função contínua em $I \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ e no ponto 0, ao passo que ela é descontínua em $C = (I \cap \mathbb{Q}) - \{0\}$. O conjunto C sendo enumerável, é um conjunto de medida nula. Logo, pelo Critério de Integrabilidade de Lebesgue podemos concluir que $f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em $[0, 1]$ e como $(\forall \Delta \in \mathcal{D}) (\forall X \in \mathcal{J}_\Delta \Rightarrow \ell_X = 0)$, vem $s_\Delta = \sum_{x \in \mathcal{J}_\Delta} \ell_X \gamma(X) = 0$ e portanto $s_0 = 0$, ou seja, $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Através do Critério de Lebesgue podemos deduzir imediatamente as seguintes propriedades:

Se $f(x)$ e $g(x)$ são definidas, limitadas e $\mathbb{R}$ -integráveis em $I \subset \mathbb{R}^p$ então

- $f(x) \pm g(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I ;
- $f(x) \cdot g(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I ;
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I , se $\inf_I g(x) > 0$ ou $\sup_I f(x) < 0$;
- $|f(x)|$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I .

Para provar as propriedades acima, basta observar que as funções que aparecem em cada item são contínuas em I p.p.t.

Integral de Riemann num Conjunto $\mathcal{J}$ -Mensurável

Definição: "Seja $f(x)$ uma função definida e limitada num conjunto $\mathcal{J}$ -mensurável $D \subset \mathbb{R}^p$ e seja $I \subset \mathbb{R}^p$ um intervalo compacto tal que $I \supset D$. Sendo $g(x)$ uma função definida em I da seguinte maneira:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \in I - D \end{cases}$$

ela será evidentemente uma função limitada. Diz-se que $f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em D , se e só se $g(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I e a $\mathbb{R}$ -integral de $g(x)$ em I denomina-se $\mathbb{R}$ -integral de $f(x)$ em D e se indica $\int_D f(x) dx$."

A função $g(x)$ denominamos de função auxiliar de $f(x)$ relativamente ao intervalo I .

Proposição: "Se $f(x)$ é definida, limitada e $\mathbb{R}$ -integrável no con

(1) limitado



junto $\mathcal{J}$ -mensurável, $D \subset \mathbb{R}^p$ (D limitado), então a $\mathcal{R}$ -integrabilidade de $f(x)$ em D e o valor da $\mathcal{R}$ -integral $\int_D f(x) dx$ independem do intervalo compacto I tal que $I \supset D$."

Demonstração:

Consideremos os intervalos compactos I e I^* ($I, I^* \subset \mathbb{R}^p$) ($I \supset D$ e $I^* \supset D$) ($I^* \neq I$). Sejam $g(x)$ e $g^*(x)$ as funções auxiliares de $f(x)$ relativamente aos intervalos I e I^* , respectivamente ($\forall \Delta \in \mathcal{D}_I$) ($\exists \Delta^* \in \mathcal{D}_{I^*}$) ($\Delta \cap \Delta^* = \Delta$). Assim $s(g; \Delta) =$

$$= \sum_{x \in \Delta} l_X \gamma(x) = \sum_{\substack{x \in \Delta \\ x \subset D}} l_X \gamma(x) = \sum_{\substack{x \in \Delta^* \\ x \subset D}} l_X \gamma(x) = \sum_{x \in \Delta^*} l_X \gamma(x) = s(g^*; \Delta^*)$$

$$S(g; \Delta) = \sum_{x \in \Delta} L_X \gamma(x) = \sum_{\substack{x \in \Delta \\ x \cap D \neq \emptyset}} L_X \gamma(x) = \sum_{\substack{x \in \Delta^* \\ x \cap D \neq \emptyset}} L_X \gamma(x) = \sum_{x \in \Delta^*} L_X \gamma(x) =$$

$$= S(g^*; \Delta^*). \text{ Temos portanto: } s(g; \Delta) = s(g^*; \Delta^*) \leq \int_{I^*} g^*(x) dx \quad e$$

$$S(g; \Delta) = S(g^*; \Delta^*) \geq \int_{I^*} g^*(x) dx.$$

Admitindo a $\mathcal{R}$ -integrabilidade de $g(x)$ em I , temos:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (|\Delta| < \delta \Rightarrow S(g; \Delta) - s(g; \Delta) < \varepsilon).$$

$$\text{Mas } 0 \leq \int_{I^*} g^*(x) dx - \int_{I^*} g^*(x) dx \leq S(g; \Delta) - s(g; \Delta) < \varepsilon. \quad \text{Assim,}$$

$$\int_{I^*} g^*(x) dx = \int_{I^*} g^*(x) dx \quad e \quad g^*(x) \text{ é } \mathcal{R}\text{-integrável em } I^*.$$

De um modo semelhante podemos demonstrar que se $g^*(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I^* , então $g(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I . Além disso, sendo

$$\lim_{\Delta \in \mathcal{D}_I} s(g; \Delta) = \int_I g, \quad \text{então } (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \Delta_0 \in \mathcal{D}_I) (\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (\Delta \supset \Delta_0$$

$$\Rightarrow \int_I g - s(g; \Delta) < \varepsilon). \text{ Seja } \Delta_0^* \in \mathcal{D}_{I^*} \text{ tal que } \Delta_0^* \cap \Delta_0 = \Delta_0, \text{ se } I^* \supset I$$

ou $\Delta_0^* \cap \Delta_0 = \Delta_0^*$, se $I^* \subset I$. Temos portanto:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \Delta_0^* \in \mathcal{D}_{I^*}) (\forall \Delta^* \in \mathcal{D}_{I^*}) (\Delta^* \supset \Delta_0^* \Rightarrow \int_I g - s(g; \Delta) \stackrel{(1)}{=}$$

$$= \int_I g - s(g^*; \Delta^*) < \varepsilon), \text{ ou seja, } \lim_{\Delta^* \in \mathcal{D}_{I^*}} s(g^*; \Delta^*) = \int_I g$$

$$\text{Assim, } \int_{I^*} g^* = \int_I g = \int_D f$$

(1) ($\forall \Delta \in \mathcal{D}_I$) ($\Delta \supset \Delta_0$) ($\exists \Delta^* \in \mathcal{D}_{I^*}$) ($\Delta^* \supset \Delta_0^*$) ($s(g; \Delta) = s(g^*; \Delta^*)$) que podemos ver analogamente à primeira parte da demonstração desta proposição.

Este resultado nos autoriza a considerar na definição da $\mathcal{R}$ -integral de $f(x)$ em D $\mathcal{J}$ -mensurável o "menor" intervalo compacto I tal que $D \subset I \subset \mathbb{R}^p$ ou seja $I = \bigtimes_{i=1}^p \text{proj}_i D$. (*)

Consideremos agora um intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ e um conjunto $\mathcal{J}$ -mensurável D tal que $D \subset I$. A função $\chi_D : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \in I - D \end{cases}$$

denomina-se função característica do conjunto D . $\chi_D(x)$ é contínua em I salvo os pontos de $\partial(D)$. Mas $\partial(D)$ (1) tem conteúdo nulo e portanto $\mu(\partial D) = 0$. Portanto $\chi_D(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I .

Por outro lado, sendo $f(x)$ definida, limitada e $\mathcal{R}$ -integrável em I , a função $\chi_D(x) \cdot f(x)$ será também $\mathcal{R}$ -integrável em I . Notando porém que $f(x)$ é definida e limitada em D e a função $\chi_D(x) \cdot f(x)$ é a função auxiliar de $f(x)$ relativamente a I , concluímos que $f(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável também em D e vale a fórmula:

$$\int_I \chi_D(x) \cdot f(x) \, dx = \int_D f(x) \, dx$$

Propriedades:

Das propriedades das funções $\mathcal{R}$ -integráveis num intervalo compacto, deduzimos imediatamente que se $f(x)$ e $g(x)$ são $\mathcal{R}$ -integráveis em $D \subset \mathbb{R}^p$ (D é $\mathcal{J}$ -mensurável) então temos:

a) $f(x) \pm g(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em D e $\int_D (f \pm g) = \int_D f \pm \int_D g$

b) $(\forall k \in \mathbb{R})$ $(k f(x))$ é $\mathcal{R}$ -integrável em D e $\int_D k f = k \int_D f$

c) $f(x) \leq g(x) \implies \int_D f \leq \int_D g$

d) $|f(x)|$ é $\mathcal{R}$ -integrável em D e $|\int_D f| \leq \int_D |f|$

e) $f(x) \cdot g(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em D

f) Se $\inf_D g(x) > 0$ ou $\sup_D g(x) < 0$, então $\frac{f(x)}{g(x)}$ é $\mathcal{R}$ -integrável em D .

g) "Se $f(x)$ é definida, limitada e $\mathcal{R}$ -integrável nos conjuntos $\mathcal{J}$ -mensuráveis D_1 e D_2 tais que $D_1 \cup D_2 = D \subset \mathbb{R}^p$ e $\overset{\circ}{D}_1 \cap \overset{\circ}{D}_2 = \emptyset$, então $f(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em D e vale a fórmula:

(1) $\partial(D)$ representa a fronteira de D . Para ^{mostrar} que $\gamma(\partial(D)) = 0$ basta aplicar a definição de conteúdo.

(*) Esta igualdade vale apenas quando D é conexo.



$$\int_D \hat{f}(x) dx = \int_{D_1} f(x) dx + \int_{D_2} f(x) dx$$

Demonstração de g):

Consideremos um intervalo compacto I ($D \subset I \subset \mathbb{R}^p$) bem como as funções:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \in I-D \end{cases} \quad \text{e} \quad g_i(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D_i \\ 0, & \text{se } x \in I-D_i \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

$$(\forall \Delta \in \mathcal{O}_I) \quad s(g; \Delta) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_\Delta \\ x \subset D}} L_X \gamma(X) \geq \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_\Delta \\ x \subset D_1}} L_X \gamma(X) + \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_\Delta \\ x \subset D_2}} L_X \gamma(X) = s(g_1; \Delta) +$$

+ $s(g_2; \Delta)$; além disso

$$S(g; \Delta) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_\Delta \\ x \cap D \neq \emptyset}} L_X \gamma(X) \leq \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_\Delta \\ x \cap D_1 \neq \emptyset}} L_X \gamma(X) + \sum_{\substack{x \in \mathcal{P}_\Delta \\ x \cap D_2 \neq \emptyset}} L_X \gamma(X) = S(g_1; \Delta) + S(g_2; \Delta)$$

$$\text{Daí vem que } (\forall \Delta \in \mathcal{O}) \quad s(g_1; \Delta) + s(g_2; \Delta) \leq s(g; \Delta) \leq S(g; \Delta) \leq S(g_1; \Delta) + S(g_2; \Delta)$$

$$\begin{aligned} \text{Mas } \lim_{\Delta \in \mathcal{O}} [s(g_1; \Delta) + s(g_2; \Delta)] &= \lim_{\Delta \in \mathcal{O}} [S(g_1; \Delta) + S(g_2; \Delta)] = \\ &= \int_I g_1 + \int_I g_2 \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Confronto (Moore-Smith), temos:

$(\exists \lim_{\Delta \in \mathcal{O}} s(g; \Delta)) (\exists \lim_{\Delta \in \mathcal{O}} S(g; \Delta))$ e os dois limites são iguais a $\int_I g_1 + \int_I g_2$. Daí concluímos que $g(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I e

$$\int_I g = \int_I g_1 + \int_I g_2, \text{ ou seja, } \int_D f(x) dx = \int_{D_1} f(x) dx + \int_{D_2} f(x) dx$$

Proposição: "Se $f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em $D \subset \mathbb{R}^p$ (D é $\mathcal{J}$ -mensurável) então $f(x)$ é contínua p.p.t. em D ."

Demonstração:

$$\text{Seja } g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \in I-D \end{cases}, \quad \text{onde } I \text{ é um intervalo compacto}$$

contendo D .

Se $f(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em D , então $g(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I . Portanto, $g(x)$ é contínua em I a menos de um conjunto de medida nula.

contido em I . Como porém $D \subset I$ e $g(x) = f(x)$ em D , $f(x)$ será contínua p.p.t. em D .

Proposição: "Se $f(x)$ é contínua p.p.t. em $D \subset \mathbb{R}^p$ (D é limitada e $\mathcal{J}$ -mensurável) $f(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em D ."

Demonstração:

Sendo I um intervalo compacto tal que $D \subset I \subset \mathbb{R}^p$ e $g(x)$ a função auxiliar de $f(x)$ relativamente a I , então $g(x)$ é contínua p.p.t. em I , pois $g(x)$ é descontínua nos pontos de descontinuidade de $f(x)$ em D e, eventualmente nos pontos de $\partial(D)$. Mas a reunião destes conjuntos ainda é um conjunto de medida nula e assim $g(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I . Daí vem que $f(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em D .

Além das propriedades vistas, vale ainda a proposição:

"Se $f(x)$ é definida e limitada no conjunto compacto $D \subset \mathbb{R}^p$, tal que $\mu(D) = 0$, então $f(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em D e $\int_D f(x) dx = 0$."

A demonstração desta proposição facilmente obtemos mediante os resultados precedentes.

Observemos ainda que se $f(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável no conjunto D $\mathcal{J}$ -mensurável, costumamos usar as seguintes notações e denominações, respectivamente:

a) sendo $p = 1$, temos: $\int_D f(x) dx$ ($\mathcal{R}$ -integral simples de $f(x)$ em $D \subset \mathbb{R}$).

b) sendo $p = 2$, temos: $\int_D f(x,y) d(x,y) = \iint_D f(x,y) dx dy$ ($\mathcal{R}$ -integral dupla de $f(x,y)$ em $D \subset \mathbb{R}^2$).

c) sendo $p = 3$, temos: $\int_D f(x,y,z) d(x,y,z) = \iiint_D f(x,y,z) dx dy dz$

($\mathcal{R}$ -integral tripla de $f(x,y,z)$ em $D \subset \mathbb{R}^3$).

Definição de Integral de Riemann por meio de divisões $\mathcal{J}$ -Mensuráveis

Seja $f(x)$ uma função definida e limitada em $D \subset \mathbb{R}^p$ $\mathcal{J}$ -mensurável (D limitado) ($1 \leq p \leq 3$) e $\mathcal{F}$ uma divisão de D em conjuntos $\mathcal{J}$ -mensuráveis. Para toda divisão $\mathcal{F}$ de D temos:

$$l_{\mathcal{F}}(D) \leq \sum_{x \in \mathcal{F}} l_X \gamma(X) \leq \sum_{x \in \mathcal{F}} L_X \gamma(X) \leq L_{\mathcal{F}}(D)$$

Sendo os conjuntos $\left\{ \sum_{x \in \mathcal{F}} l_X \gamma(X) \mid \mathcal{F} \text{ é divisão de } D \right\}$ e $\left\{ \sum_{x \in \mathcal{F}} L_X \gamma(X) \mid \mathcal{F} \text{ é divisão de } D \right\}$ são limitados, definimos integral inferior e integral

superior de $f(x)$ em D como sendo os números reais:

$$\int_D f(x) dx = \sup \left\{ \sum_{x \in \mathcal{G}} \ell_X \gamma(X) \mid \mathcal{G} \text{ é divisão de } D \right\} \text{ e } \int_D f(x) dx = \\ = \inf \left\{ \sum_{x \in \mathcal{G}} L_X \gamma(X) \mid \mathcal{G} \text{ é divisão de } D \right\}, \text{ respectivamente. Facilmente po-} \\ \text{ demos mostrar: } \int_D f(x) dx \leq \int_D f(x) dx. \text{ Dizemos então que } f(x) \text{ é } \mathcal{R}\text{-integral} \\ \text{ em } D, \text{ se e só se } \int_D f(x) dx = \int_D f(x) dx \text{ e neste caso a este valor comum} \\ \text{ denominamos } \mathcal{R}\text{-integral de } f(x) \text{ em } D \text{ e indicamos por } \int_D f(x) dx.$$

É possível demonstrar a equivalência desta definição com a definição de $\mathcal{R}$ -integrabilidade de $f(x)$ num conjunto $\mathcal{J}$ -mensurável anteriormente dada bem como a coincidência das $\mathcal{R}$ -integrais obtidas através das duas definições.

Extensão das noções de comprimento, área e volume para conjuntos $\mathcal{J}$ -mensuráveis

Da definição da medida de Jordan deduzimos facilmente que se $I \subset \mathbb{R}^p$ é um intervalo compacto então I é $\mathcal{J}$ -mensurável e $m(\mathcal{J})\gamma(I)$. Assim, se $p=1$ então $\gamma(I) = b_1 - a_1$ representa o comprimento de um segmento; se $1 < p \leq 3$, então $\gamma(I) = \prod_{i=1}^p (b_i - a_i)$ representa a área de um retângulo no caso de $p=2$ ou o volume de um paralelepípedo, se $p=3$. Estes fatos nos levam a formular a seguinte

Definição: "Sendo $S \subset \mathbb{R}^p$ um conjunto $\mathcal{J}$ -mensurável, chama-se comprimento, área ou volume de S ao número real $\gamma(S)$, conforme p seja igual a 1, 2 ou 3, respectivamente."

Notemos ainda que por causa da existência de conjuntos de conteúdo nulos podemos falar em "comprimento nulo", "área nula" e "volume nulo" de conjuntos.

Proposição: "Se S é um conjunto limitado ($S \subset \mathbb{R}^p$), e sendo $\chi_S(x)$ a função característica de S , então

$$\gamma(S) = \int_I \chi_S(x) dx \quad \text{e} \quad \bar{\gamma}(S) = \int_I \chi_S(x) dx."$$

Demonstração:

Seja I um intervalo compacto tal que $S \subset I$. Para todo $\Delta (\Delta \in \mathcal{W}_I)$, temos:

$$s(\chi_S; \Delta) = \sum_{x \in \mathcal{G}_\Delta} \ell_X \gamma(X) = \sum_{\substack{x \in \mathcal{G}_\Delta \\ x \subset S}} \gamma(X) = \sum_{x \in \mathcal{G}_\Delta} m(X) = A(\Delta; S) \quad \text{e}$$



$$S(\chi_S; \Delta) = \sum_{X \in \mathcal{J}_\Delta} L_X \gamma(X) = \sum_{\substack{X \in \mathcal{J}_\Delta \\ X \cap S \neq \emptyset}} \gamma(X) = \sum_{X \in \mathcal{J}_\Delta} m(X) = B(\Delta; S)$$

Destas igualdades vem imediatamente:

$$\int_I \chi_S(x) dx \leq \underline{\gamma}(S) \quad \text{e} \quad \underline{\gamma}(S) \leq \int_I \chi_S(x) dx \quad \text{bem como}$$

$$\int_I \chi_S(x) dx \geq \bar{\gamma}(S) \quad \text{e} \quad \int_I \chi_S(x) dx \leq \bar{\gamma}(S)$$

Finalmente concluímos que

$$\int_I \chi_S(x) dx = \underline{\gamma}(S) \quad \text{e} \quad \int_I \chi_S(x) dx = \bar{\gamma}(S)$$

Corolário: "Se $S \subset \mathbb{R}^p$ é um conjunto $\mathcal{J}$ -mensurável e I é um intervalo compacto tal que $S \subset I$, então $\chi_S(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I e vale a igualdade: $\int_I \chi_S(x) dx = \gamma(S)$."

Consideremos agora a função constante $f(x) = 1$ definida num conjunto D $\mathcal{J}$ -mensurável. Evidentemente, $f(x)$ é $\mathcal{R}$ -integrável em D e ainda $\gamma(D) = \int_I \chi_D(x) dx = \int_D dx$, sendo I um intervalo compacto contendo D .

e) INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA $\mathcal{R}$ -INTEGRAL NO $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$)

Seja $f(x)$ definida, limitada e $\mathcal{R}$ -integrável em D $\mathcal{J}$ -mensurável ($D \subset I \subset \mathbb{R}$) (I é intervalo compacto) e $f(x) \geq 0$ em D . Assim, sendo $g(x)$ a função auxiliar de $f(x)$ relativamente a I , temos:

$$\int_D f(x) dx = \int_I g(x) dx$$

Consideremos ainda o conjunto $E = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x) \text{ e } x \in D\}$

$$(\forall \Delta \in \mathcal{W}_I) \quad s(g; \Delta) = \sum_{X \in \mathcal{J}_\Delta} l_X \gamma(X) = \sum_{X \in \mathcal{J}_\Delta} m(X \times [0, l_X]) \leq \underline{\gamma}(E) \quad \text{e}$$

$$S(g; \Delta) = \sum_{X \in \mathcal{J}_\Delta} L_X \gamma(X) = \sum_{X \in \mathcal{J}_\Delta} m(X \times [0, L_X]) \geq \bar{\gamma}(E)$$

$$\text{Dai segue, evidentemente, que} \quad \int_I g(x) dx \leq \underline{\gamma}(E) \leq \bar{\gamma}(E) \leq \int_I g(x) dx$$

e por causa da $\mathcal{R}$ -integrabilidade de $g(x)$ em I , podemos concluir a $\mathcal{J}$ -mensurabilidade de E bem como a igualdade:

$$\gamma(E) = \int_D f(x) dx, \text{ ou seja, a } \mathcal{R}\text{-integral } \int_D f(x) dx \text{ representa a}$$

área do conjunto E.

Consideremos o conjunto D ($D \subset I \subset \mathbb{R}^2$) (D é $\mathcal{J}$ -mensurável e I é intervalo compacto), bem como $f(x,y)$ uma função definida, limitada e $\mathcal{R}$ -integrável em D. Sendo $g(x,y)$ a função auxiliar de $f(x,y)$ relativamente a I e $E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq z \leq f(x,y) \text{ com } (x,y) \in D\}$, verificamos facilmente que

$$\gamma(E) = \iint_D f(x,y) dx dy, \text{ ou seja, a } \mathcal{R}\text{-integral dupla}$$

$$\iint_D f(x,y) dx dy \text{ representa o volume do conjunto E.}$$

Seja agora D um conjunto $\mathcal{J}$ -mensurável, tal que $D \subset I \subset \mathbb{R}^3$ (I é intervalo compacto). Por um resultado anterior, temos:

$$\int_D dx = \gamma(D), \text{ isto é, a integral } \int_D dx \text{ representa o volume do con-}$$

junto D.



CAPÍTULO IV

a) Medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$)

Introdução

Seja I um intervalo no $\mathbb{R}^p$. Vimos que seu conteúdo (medida de Jordan) é dado por $\gamma(I) = \prod_{i=1}^p (b_i - a_i)$, onde a_i e b_i são os extremos dos intervalos componentes de I ($1 \leq p \leq 3$). (No caso de $p=1$, consideramos $\gamma(I) = b_1 - a_1$). O número $\gamma(I) \in \mathbb{R}_+$ representa o volume, área ou comprimento de I conforme $p=3, 2$ ou 1 , respectivamente.

Definimos também, convenientemente, conjuntos $\mathcal{J}$ -mensuráveis no $\mathbb{R}^p$, porém nem todos os conjuntos no $\mathbb{R}^p$ são $\mathcal{J}$ -mensuráveis (Exemplo: o conjunto dos n^{os} racionais no intervalo $[a, b]$ não é $\mathcal{J}$ -mensurável). Sendo $C \subset \mathbb{R}^p$ um conjunto $\mathcal{J}$ -mensurável, o seu conteúdo $\gamma(C) \geq 0$ definimos também como volume, área ou comprimento de C , conforme $p=3, 2$ ou 1 , respectivamente.

Para possibilitar a definição de volume, área ou comprimento de certos conjuntos que não são $\mathcal{J}$ -mensuráveis, ampliaremos a noção da medida de Jordan, introduzindo um novo tipo de medida.

Medida de um Aberto no $\mathbb{R}$

Seja A um conjunto aberto em I ($A \subset I \subset \mathbb{R}$) (I é intervalo compacto). A cada ponto x ($x \in A$) podemos associar intervalos abertos em I contidos em A e contendo o ponto x . À reunião de todos estes intervalos indicaremos por I_x que será o "maior" intervalo aberto em I , contido em A e contendo x . Este intervalo evidentemente é único para cada x de A . Podemos escrever então $A = \bigcup_{x \in A} I_x$. Por outro lado temos: ($\forall x, y \in A$) ($I_x = I_y$ ou $I_x \cap I_y = \emptyset$), pois se existissem pontos x e y ($x, y \in A$) tais que ($I_x \neq I_y$ e $I_x \cap I_y \neq \emptyset$), existiria um ponto z ($z \in I_x \cap I_y$) tal que I_z conteria I_x e I_y e consequentemente $I_x = I_y = I_z$, o que seria absurdo. Além disso a família $\{I_x \mid x \in A\}$ é enumerável, pois os números racionais de I formam um conjunto enumerável e, como cada I_x contém números racionais, não pode haver mais intervalos do tipo I_x contidos em A do que os números racionais existentes em I . Assim, para todo conjunto aberto e limitado A é possível determinar uma família enumerável (I_ν) ($\nu \in \mathbb{N}$), tal que ($\forall \nu, n \in \mathbb{N}$) ($\nu \neq n \Rightarrow I_\nu \cap I_n = \emptyset$) e $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu = A$.

A sequência (I_ν) chamaremos de decomposição de A em intervalos abertos em I ou, simplesmente, decomposição aberta de A . Demonstra-se que todo conjunto aberto tem uma única decomposição aberta.

Definição: "Seja A um aberto em $I \subset \mathbb{R}$ (I intervalo compacto) sendo (I_ν) a decomposição de A em intervalos abertos em I , dois a dois disjuntos; chama-se medida de A ao número real $m(A) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I_\nu)$, se a série de termos positivos do segundo membro converge."

Proposição: "Se A e B são abertos em $I \subset \mathbb{R}$ (I é intervalo compacto) então $(A \subset B \implies m(A) \leq m(B))$."

Demonstração:

Se $A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$ e $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, onde (I_ν) e (J_n) são as decomposições abertas de A e B , respectivamente, $(\forall \nu \in \mathbb{N}) (\nu \geq 1)$, $(\exists \bar{n} = n_\nu \geq 1)$ $(I_\nu \subset J_{\bar{n}})$. Assim, para cada $\nu \geq 1$, temos $\gamma(I_\nu) \leq \gamma(J_{\bar{n}}) = \gamma(J_{n_\nu})$ e portanto, $(\forall k \geq 2)$, $\sum_{\nu=1}^k \gamma(I_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^k \gamma(J_{n_\nu}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma(J_n) = m(B) \implies \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I_\nu) \leq m(B) \implies m(A) \leq m(B)$.

Corolário: "Se A é aberto em $I \subset \mathbb{R}$ (I intervalo compacto), então, $m(A) \leq \gamma(I)$."

O corolário acima mostra que todo aberto em I possui medida.

Proposição: "Sendo I_1 e I_2 intervalos abertos em $I \subset \mathbb{R}$ (I intervalo compacto), tem-se $m(I_1 \cup I_2) \leq \gamma(I_1) + \gamma(I_2)$."

Demonstração:

Temos evidentemente: $(\forall x \in I)$, $\chi_{I_1 \cup I_2}(x) \leq \chi_{I_1}(x) + \chi_{I_2}(x)$.

Mas, as funções $\chi_{I_1 \cup I_2}(x)$, $\chi_{I_1}(x)$ e $\chi_{I_2}(x)$ são $\mathbb{R}$ -integráveis em I . Pela propriedade monotônica da Integral de Riemann, vem:

$$\int_I \chi_{I_1 \cup I_2}(x) dx \leq \int_{I_1} (\chi_{I_1}(x) + \chi_{I_2}(x)) dx = \int_{I_1} \chi_{I_1}(x) dx + \int \chi_{I_2}(x) dx \implies \gamma(I_1 \cup I_2) \leq \gamma(I_1) + \gamma(I_2).$$

Sendo $I_1 \cup I_2$ aberto em

I , $\gamma(I_1 \cup I_2) = m(I_1 \cup I_2)$. Logo, $m(I_1 \cup I_2) \leq \gamma(I_1) + \gamma(I_2)$.

Por indução finita sobre n demonstra-se: " $(\forall (I_\nu)) (1 \leq \nu \leq n)$ (I_ν é intervalo aberto em I). $m(\bigcup_{\nu=1}^n I_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^n \gamma(I_\nu)$."

Teorema: "Se (A_ν) é uma família enumerável de abertos em $I \subset \mathbb{R}$ (I é intervalo compacto) e se a série $\sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu)$ é convergente, então, tem-se: $m(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu)$."

Demonstração:

O conjunto $A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu$ é um aberto em I , $(\forall \nu \geq 1)$ $(A_\nu = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^\nu)$ $((I_n^\nu)_{n \in \mathbb{N}}$ é a decomposição aberta para A_ν). Mas, $A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} J_\nu$, onde (J_ν) é a decomposição aberta para A . Evidentemente $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \nu_0 \in \mathbb{N})$ $(\sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} \gamma(J_\nu) < \varepsilon)$ e, portanto, $m(A) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(J_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma(J_\nu) + \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} \gamma(J_\nu) < \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma(J_\nu) + \varepsilon$. Por outro lado, $(\forall \nu \in \mathbb{N}_{\nu_0}) (\exists K_\nu)$ $(K_\nu$ aberto em I) $(\bar{K}_\nu \subset J_\nu$ e $\gamma(J_\nu) < \gamma(K_\nu) + \frac{\varepsilon}{\nu_0}$).

De fato, fixando ν ($\nu \in \mathbb{N}$), seja $J_\nu =]a, b[$ e $M = \frac{b-a}{2}$. Consideremos os intervalos $J_\nu(t) =]a+t, b-t[$ ($t \in [0, M[$). A função $\varphi(t) = \gamma(J_\nu(t)) = b-a-2t$ é decrescente e contínua em $[0, M[$. Sendo $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = \varphi(0) \geq \varphi(t)$ em $[0, M[$, então, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \delta \in \mathbb{R}_{++})$

$(\forall t < \delta \implies \varphi(0) - \varphi(t) < \frac{\varepsilon}{\nu_0})$. Sendo t_1 um número fixo ($t_1 \in]0, \delta[$ e $J_\nu(t_1) =]a+t_1, b-t_1[= K_\nu$, temos, evidentemente, $\bar{K}_\nu \subset J_\nu$. Além disso $\varphi(0) - \varphi(t_1) < \frac{\varepsilon}{\nu_0} \implies \gamma(J_\nu) - \gamma(J_\nu(t_1)) < \frac{\varepsilon}{\nu_0} \implies \gamma(J_\nu) < \gamma(K_\nu) + \frac{\varepsilon}{\nu_0}$.

Assim, $m(A) < \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma(J_\nu) + \varepsilon < \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma(K_\nu) + 2\varepsilon$. Sendo $\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} \bar{K}_\nu$ limitado e fechado, então, $\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} \bar{K}_\nu$ é um compacto. Por outro lado, $\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} \bar{K}_\nu \subset A$

$\subset A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^\nu \right] = \bigcup_{\nu, n} I_n^\nu$ e, conseqüentemente, existe uma seqüência finita $I_{n_1}^{\nu_1}, \dots, I_{n_k}^{\nu_k}$ $(\bigcup_{i=1}^k I_{n_i}^{\nu_i} \supset \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} \bar{K}_\nu \supset \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} K_\nu)$.

Mas, sendo os intervalos K_ν ($\nu \in \mathbb{N}_{\nu_0}$) abertos em I e, dois a

dois disjuntos, pois, $K_\nu \subset J_\nu$ e os J_ν ($\nu \in \mathbb{N}_{\nu_0}$) por sua vez são disjuntos, dois a dois. Assim temos:

$$m\left(\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} K_\nu\right) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^k I_{n_i}^{\nu_k}\right) \leq \sum_{i=1}^k \gamma(I_{n_i}^{\nu_k}) \leq \sum_{\nu, n} \gamma(I_n^\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu).$$

Usando a condição: $m(A) < \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma(K_\nu) + 2\varepsilon$, vem:

$$m(A) < m\left(\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} K_\nu\right) + 2\varepsilon \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu) + 2\varepsilon. \text{ Portanto,}$$

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) \quad (m(A) < \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu) + 2\varepsilon \Rightarrow m(A) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu)), \text{ isto é,}$$

$$m\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu\right) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu).$$

Teorema: "Se A e B são abertos em $I \subset \mathbb{R}$ (I: intervalo compacto), então, $m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B)$."

Demonstração:

Suponhamos, inicialmente, que A e B sejam reuniões finitas de intervalos abertos em I, dois a dois disjuntos. Evidentemente, os conjuntos $A \cup B$ e $A \cap B$, neste caso, também serão reuniões finitas de intervalos abertos em I.

Mas, as funções $\chi_A(x)$ e $\chi_B(x)$ são $\mathbb{R}$ -integráveis em I, assim como as

funções $\chi_{A \cup B}(x)$ e $\chi_{A \cap B}(x)$. De fato, seja $A = \bigcup_{\nu=1}^k I_\nu$ ($k \geq 1$) ($I_\nu \cap I_n = \emptyset$ se $\nu \neq n$). Assim, $\chi_A(x) = \sum_{\nu=1}^k \chi_{I_\nu}(x)$, pois, ($\forall x \in A$) ($\exists n \in \mathbb{N}_k$)

tal que, se $x \in I_n$, então, $\chi_{I_n}(x) = 1$ e $\chi_{I_\nu}(x) = 0$, para $\nu \neq n$; se

$x \in I - A$ e, se $\nu \in \mathbb{N}_k$, então, $\chi_{I_\nu}(x) = 0$. Sendo $\chi_A(x)$ contínua em I a menos das fronteiras dos intervalos I_ν (que formam um conjunto de conteúdo nulo), $\chi_A(x)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em I. De modo semelhante, verificamos a $\mathbb{R}$ -integrabilidade das outras três funções características.

Por outro lado, temos também a identidade $\chi_A(x) + \chi_B(x) = \chi_{A \cap B}(x) + \chi_{A \cup B}(x)$, em I, pois, para todo x ($x \in A \cap B$) (caso A e B não são disjuntos), os dois membros valem 2; se $x \in I - (A \cup B)$, os dois membros valem 0 e, se $x \in A - B$, ou, $x \in B - A$, ambos os membros têm valor 1.

$$\text{Mas, } \int_I \chi_A(x) dx = \sum_{\nu=1}^k \int_{I_\nu} \chi_{I_\nu}(x) dx = \sum_{\nu=1}^k \gamma(I_\nu) = m(A).$$

$$\text{Portanto, } \int_I \chi_A(x) dx + \int_I \chi_B(x) dx = \int_I \chi_{A \cup B}(x) dx +$$

$$+ \int_I \chi_{A \cap B}(x) dx \Rightarrow m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B).$$

Verifiquemos agora a igualdade para o caso geral. Suponhamos que

$$A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_{\nu} \quad (I_{\nu} \cap I_n = \emptyset \text{ se } \nu \neq n) \text{ e } B = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} J_{\nu} \quad (I_{\nu} \cap I_n = \emptyset \text{ se } \nu \neq n), \text{ sendo}$$

I_{ν} e J_{ν} intervalos abertos em I .

$$\text{Assim, } (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \nu_0 \in \mathbb{N}) \left(\sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} \gamma(I_{\nu}) < \varepsilon \text{ e } \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} \gamma(J_{\nu}) < \varepsilon \right).$$

$$\text{Sejam agora, } A_1 = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} I_{\nu}, A_2 = \bigcup_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} I_{\nu}, B_1 = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} J_{\nu} \text{ e } B_2 = \bigcup_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} J_{\nu}.$$

Daí vem: $m(A) = m(A_1) + m(A_2)$ e $m(B) = m(B_1) + m(B_2)$, pois,

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ e } B_1 \cap B_2 = \emptyset. \text{ Além disso, } m(A_2) = m\left(\bigcup_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} I_{\nu}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} \gamma(I_{\nu}) < \varepsilon, \text{ e, analogamente, } m(B_2) < \varepsilon.$$

$$\text{Temos, portanto: } m(A) + m(B) = m(A_1) + m(A_2) + m(B_1) + m(B_2) < m(A_1) + m(B_1) + 2\varepsilon.$$

Da primeira parte da demonstração concluímos que $m(A) + m(B) < m(A_1 \cup B_1) + m(A_1 \cap B_1) + 2\varepsilon$, e, notando que, se $A_1 \cup B_1 \subset A \cup B$ e $A_1 \cap B_1 \subset A \cap B$, então, $m(A_1 \cup B_1) \leq m(A \cup B)$ e, $m(A_1 \cap B_1) \leq m(A \cap B)$, vem:

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad m(A) + m(B) < m(A \cup B) + m(A \cap B) + 2\varepsilon \Rightarrow m(A) + m(B) \leq m(A \cup B) + m(A \cap B). \quad (*)$$

Por outro lado, sendo $A \cup B = (A_1 \cup B_1) \cup (A_2 \cup B_2)$, então, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) \quad m(A \cup B) \leq m(A_1 \cup B_1) + m(A_2) + m(B_2) < m(A_1 \cup B_1) + 2\varepsilon$, e ainda, de $A \cap B = (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \subset (A_1 \cap B_1) \cup A_2 \cup B_2$, concluímos: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) \quad m(A \cap B) \leq m(A_1 \cap B_1) + m(A_2) + m(B_2) < m(A_1 \cap B_1) + 2\varepsilon$.

Usando as desigualdades anteriores, temos:

$$m(A) + m(B) \geq m(A_1) + m(B_1) = m(A_1 \cup B_1) + m(A_1 \cap B_1) > m(A \cup B) - 2\varepsilon + m(A \cap B) - 2\varepsilon. \text{ Daí vem: } (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) \quad m(A \cup B) + m(A \cap B) < m(A) + m(B) + 4\varepsilon \Rightarrow m(A \cup B) + m(A \cap B) \leq m(A) + m(B). \quad (**)$$

$$\text{Assim, } ((*) \text{ e } (**)) \Rightarrow m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B).$$

Medida de um fechado

Seja F um fechado em $I \subset \mathbb{R}$ (I intervalo compacto). Sendo $F' = I - F = I \cap \bigcup_I F$ aberto em I , consideremos um conjunto aberto A qualquer em I . Evidentemente, $A - F = A \cap F'$ é também aberto em I e, portanto, tem sentido considerar a medida $m(A - F)$.

Definição: "Seja F um fechado em $I \subset \mathbb{R}$ (I intervalo compacto) se



do A um aberto qualquer em I ($A \supset F$), chama-se medida de F e se indica $m(F)$, ao número real positivo $m(A) - m(A-F)$."

Proposição: "A medida de um fechado F em I independe do aberto A em I, tal que $A \supset F$."

Demonstração:

Sejam A e B abertos quaisquer em I tais que $F \subset A$ e $F \subset B$; devemos mostrar que $m(A) - m(A-F) = m(B) - m(B-F)$.

Pelo teorema anterior, temos:

$$m(A) + m(B-F) = m(A \cup (B-F)) + m(A \cap (B-F)) = m(A \cup B) + m(A \cap B - F).$$

Analogamente,

$$m(B) + m(A-F) = m(A \cup B) + m(A \cap B - F).$$

Das duas últimas igualdades vem:

$$m(A) + m(B-F) = m(B) + m(A-F) \implies m(A) - m(A-F) = m(B) - m(B-F), \text{ o que demonstra a tese.}$$

Corolário: "Se F é fechado em I então $m(F) = \gamma(I) - m(I-F)$." Basta notar que I é aberto em I.

Conjuntos $\mathcal{L}$ -mensuráveis

Medidas Exterior e Interior de um Conjunto

Definição: "Seja M ($M \subset I \subset \mathbb{R}$) (I intervalo compacto); chama-se medida exterior de M e se indica $\bar{\mu}(M)$ ao número real

$$\inf \{ m(A) \mid A \text{ é aberto em I com } A \supset M \};$$

nas mesmas hipóteses, chama-se medida interior de M e se indica por $\underline{\mu}(M)$, ao número real

$$\sup \{ m(F) \mid F \text{ é fechado em I com } F \subset M \}."$$

Propriedade I: "Sendo C ($C \subset I \subset \mathbb{R}$) (I intervalo compacto), então, $\underline{\mu}(C) \leq \bar{\mu}(C)$."

Demonstração:

$$(\forall A, F \subset I) (F \subset C \subset A) (F \text{ é fechado e } A \text{ é aberto em I} \implies m(F) = m(A) - m(A-F) \implies m(F) \leq m(A)).$$

$$\text{Mas, } \sup \{ m(F) \mid F \subset C \} \leq m(A) \implies \sup \{ m(F) \mid F \subset C \} \leq \inf \{ m(A) \mid A \supset C \} \implies \underline{\mu}(C) \leq \bar{\mu}(C).$$

Propriedade II: "Sendo C ($C \subset I \subset \mathbb{R}$) (I intervalo compacto), então, $\bar{\mu}(C) + \underline{\mu}(I-C) = \gamma(I)$."

Demonstração:

$$(\forall A) (A \text{ aberto em I}) (I \subset \mathbb{R}) (\text{Intervalo compacto}) (A \supset C \implies$$

$I - A \subset I - C$). Sendo $I - A$ fechado em I , temos: $m(I-A) \leq \underline{\mu}(I-C) \Rightarrow$
 $m(A) + m(I-A) \leq m(A) + \underline{\mu}(I-C) \Rightarrow \gamma(I) \leq m(A) + \underline{\mu}(I-C) \Rightarrow$
 $\gamma(I) \leq \bar{\mu}(C) + \underline{\mu}(I-C). (*)$

Por outro lado, $(\forall F) (F \text{ fechado em } I \subset \mathbb{R})$ (I intervalo compacto) $(F \subset I - C \Rightarrow I - F \supset C)$. Sendo $I - F$ aberto em I , temos $m(I - F) \geq$
 $\geq \bar{\mu}(C) \Rightarrow m(F) + m(I - F) \geq m(F) + \bar{\mu}(C) \Rightarrow \gamma(I) \geq m(F) + \bar{\mu}(C) \Rightarrow$
 $\gamma(I) \geq \underline{\mu}(I - C) + \bar{\mu}(C). (**)$

$(*)$ e $(**)$ $\Rightarrow \underline{\mu}(I - C) + \bar{\mu}(C) = \gamma(I).$

Definição: "Diz-se que o conjunto C ($C \subset I \subset \mathbb{R}$) (I intervalo compacto) é $\mathcal{L}$ -mensurável (ou simplesmente mensurável) se, e só se, $\underline{\mu}(C) =$
 $= \bar{\mu}(C)$ e, este valor comum, quando existe, chama-se $\mathcal{L}$ -medida de C , e se indica por $\mu(C)$."

Notemos que existem autores que chamam de medida de Lebesgue de C ao número $\bar{\mu}(C)$ bem como seu valor de $\mathcal{L}$ -medida de C . Nós convencionamos chamar $\bar{\mu}(C)$ de medida exterior de Lebesgue do conjunto C , sendo que o número $\mu(C)$ antes definido chamaremos de $\mathcal{L}$ -medida de C . Evidentemente, se C é $\mathcal{L}$ -mensurável neste sentido, o será também no outro sentido, porém, não reciprocamente!

Proposição: "Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto C ($C \subset I \subset \mathbb{R}$) (I intervalo compacto) seja $\mathcal{L}$ -mensurável é que $\bar{\mu}(C) + \bar{\mu}(I - C) \leq \gamma(I)$."

Demonstração:

Nec. $\Rightarrow$

Da propriedade II vem: $\underline{\mu}(C) + \bar{\mu}(I - C) = \gamma(I)$. Mas, por hipótese, $\underline{\mu}(C) = \bar{\mu}(C)$ e, portanto, $\bar{\mu}(C) + \bar{\mu}(I - C) = \gamma(I)$, ou seja, a condição é necessária.

Suf. $\Leftarrow$

Sendo por hipótese, $\bar{\mu}(C) + \bar{\mu}(I - C) \leq \gamma(I)$, bem como $\underline{\mu}(C) + \bar{\mu}(I - C) = \gamma(I)$ (consequência da propriedade II), temos:

$$\bar{\mu}(C) + \bar{\mu}(I - C) \leq \underline{\mu}(C) + \bar{\mu}(I - C) \Rightarrow \bar{\mu}(C) \leq \underline{\mu}(C).$$

Notando, porém, que $(\forall C \subset I)$, tem-se $\bar{\mu}(C) \geq \underline{\mu}(C)$, concluímos que

$$\bar{\mu}(C) = \underline{\mu}(C) \text{ e } C \text{ é } \mathcal{L}\text{-mensurável.}$$

Crítério de $\mathcal{L}$ -mensurabilidade: "Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto C ($C \subset I \subset \mathbb{R}$) (I intervalo compacto) seja $\mathcal{L}$ -mensurável é que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists A \text{ e } F \subset I) (A \text{ aberto e } F \text{ fechado em } I) (F \subset C \subset A \Rightarrow m(A - F) < \varepsilon)$."

(Notemos que $A - F = A \cap (I - F)$ é aberto em I).

Demonstração:

Nec. $\Rightarrow$

Se C é $\mathcal{L}$ -mensurável, então, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists F) (F \text{ é fechado em } I) (\exists A) (A \text{ é aberto em } I) (F \subset C \subset A \text{ e } m(F) > \underline{\mu}(C) - \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } m(A) < \bar{\mu}(C) + \frac{\varepsilon}{2}) (\underline{\mu}(C) = \bar{\mu}(C))$. Daí vem: $m(A) - m(F) < \varepsilon$ e notando que $m(A) - m(F) = m(A-F)$, temos: $m(A-F) < \varepsilon$.

Suf. $\Leftarrow$

Por hipótese: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists A) (A \text{ é aberto em } I) (\exists F) (F \text{ é fechado em } I) (F \subset C \subset A \Rightarrow m(A-F) < \varepsilon)$.

Mas, sendo $\underline{\mu}(C) \geq m(F)$ e $\bar{\mu}(C) \leq m(A)$, então, $0 \leq \bar{\mu}(C) - \underline{\mu}(C) \leq m(A) - m(F) = m(A-F) < \varepsilon$, ou seja: $\bar{\mu}(C) = \underline{\mu}(C) \Rightarrow C$ é $\mathcal{L}$ -mensurável.

Proposição: "Sendo C um conjunto ($C \subset I \subset \mathbb{R}$) (I intervalo compacto) e, se C é $\mathcal{L}$ -mensurável, então, $I - C$ é $\mathcal{L}$ -mensurável e $\mu(C) + \mu(I-C) = \gamma(I)$."

Demonstração:

Sendo C $\mathcal{L}$ -mensurável, então $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists F) (F \text{ é fechado em } I) (\exists A) (A \text{ é aberto em } I) (F \subset C \subset A \Rightarrow m(A-F) < \varepsilon)$.

Mas, $I - A \subset I - C \subset I - F$ ($I - A$ é fechado e $I - F$ é aberto em I) bem como $(I - F) - (I - A) = A - F$. Além disso, $m[(I - F) - (I - A)] = m(A - F) < \varepsilon$. Logo, $I - C$ é $\mathcal{L}$ -mensurável.

Por outro lado, $\bar{\mu}(C) + \underline{\mu}(I - C) = \gamma(I) \Rightarrow \mu(C) + \mu(I - C) = \gamma(I)$.

Teorema: "Sendo A e F subconjuntos de I (A é aberto e F é fechado em $I \subset \mathbb{R}$) (I é intervalo compacto) então $m(A) = \mu(A)$ e $m(F) = \mu(F)$."

Demonstração:

Sendo A aberto em I então $\bar{\mu}(A) \leq m(A)$; mas A é o "menor" aberto que contém A e portanto, $m(A)$ é um limite inferior do conjunto $\{m(B) \mid B \supset A \text{ e } B \text{ é aberto em } I\}$. Portanto: $m(A) \leq \bar{\mu}(A) \Rightarrow \bar{\mu}(A) = m(A)$. Mas,

$A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_{\nu}$, onde (I_{ν}) é a decomposição aberta para o conjunto A . Temos

então que: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\forall \nu \in \mathbb{N}) (\exists K_{\nu} \subset \mathbb{R}) (K \text{ é intervalo aberto em } I) (\bar{K}_{\nu} \subset I_{\nu} \text{ e } \gamma(K_{\nu}) > \gamma(I_{\nu}) - \frac{\varepsilon}{\nu_0}) (\nu_0 \text{ é fixo}) (\nu_0 \in \mathbb{N})$

$(\sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} \gamma(I_{\nu}) < \varepsilon)$. Assim, $m(A) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I_{\nu}) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma(I_{\nu}) + \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} \gamma(I_{\nu}) <$

$< \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \left[\gamma(K_{\nu}) + \frac{\varepsilon}{\nu_0} \right] + \varepsilon = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma(K_{\nu}) + 2\varepsilon = \gamma\left(\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} K_{\nu}\right) + 2\varepsilon$, pois os

intervalos abertos K_ν ($\nu = 1, 2, \dots, \nu_0$) são dois a dois disjuntos.

Portanto, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) \quad \bar{\mu}(A) < \gamma\left(\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} K_\nu\right) + 2\varepsilon$. Mas, sendo $\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} \bar{K}_\nu$ fechado em I e contido em A , bem como notando que $\gamma\left(\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} K_\nu\right) = \gamma\left(\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} \bar{K}_\nu\right) = m\left(\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} \bar{K}_\nu\right)$, e ainda, levando em consideração a definição de medida interior de A , temos evidentemente: $\gamma\left(\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} K_\nu\right) \leq \underline{\mu}(A)$. Consequentemente, temos: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) \quad (\bar{\mu}(A) < \underline{\mu}(A) + 2\varepsilon \Rightarrow \bar{\mu}(A) \leq \underline{\mu}(A))$.

Mas, sendo $\bar{\mu}(A) \geq \underline{\mu}(A)$ (por uma propriedade anterior), temos que A é $\mathcal{L}$ -mensurável e como $\bar{\mu}(A) = m(A)$, segue, finalmente, que $m(A) = \mu(A)$.

Mostremos agora a segunda parte da tese: Sendo F fechado em I ($F \subset I \subset \mathbb{R}$) (I intervalo compacto), o conjunto $I - F$ é aberto em I . Logo, $I - F$ é $\mathcal{L}$ -mensurável. Além disso, sendo $I - (I - F) = F$, pela proposição anterior segue que F é mensurável e $\mu(F) + \mu(I - F) = \gamma(I)$. Mas, notando que $I - F$ é aberto em I e aplicando a definição de medida de um fechado em I , temos: $m(F) = \gamma(I) - m(I - F)$, ou seja: $m(F) = \gamma(I) - \mu(I - F)$. De $/$ e $//$ segue imediatamente que $m(F) = \mu(F)$.

Proposição: "Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto C ($C \subset I \subset \mathbb{R}$) (I é intervalo compacto) seja $\mathcal{L}$ -mensurável e tenha

$\mathcal{L}$ -medida $\mu(C) = 0$ é que $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) \quad (\exists (I_\nu)) \quad (I_\nu \text{ intervalo em } \mathbb{R}) \quad \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu \supset C \text{ e } \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I_\nu) < \varepsilon\right)$ ".

Demonstração:

Nec. $\Rightarrow$

Sendo C $\mathcal{L}$ -mensurável e $\mu(C) = 0$ temos: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) \quad (\exists A \subset I) \quad (A \text{ é aberto em } I) \quad (A \supset C) \quad \bar{\mu}(C) + \varepsilon > m(A) = \mu(A) \Rightarrow \mu(A) < \varepsilon$.

Mas, $A = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$ (os I_ν são intervalos abertos em I dois a dois disjuntos) e $\mu(A) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I_\nu)$. Portanto, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) \quad (\exists (I_\nu)) \quad (I_\nu \in \mathcal{J}^{(1)})$: $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu = A \supset C$ e $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I_\nu) < \varepsilon$.

Suf. $\Leftarrow$

Por hipótese: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) \quad (\exists (I_\nu)) \quad (I_\nu \in \mathcal{J}^{(1)}) \quad \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu \supset C \text{ e } \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I_\nu) < \varepsilon\right)$. Mas os intervalos I_ν podem ser tomados como sendo abertos em $\mathbb{R}$, pois, em caso contrário, seria possível construir uma fa

mília (J_ν) de abertos $(J_\nu \supset I_\nu$ e $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(J_\nu) < \varepsilon)$. Sendo $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$ aberto em $\mathbb{R}$, $I \cap \left[\bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu \right] = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} (I \cap I_\nu)$ é um aberto em I que contém C tal que $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I \cap I_\nu) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I_\nu) < \varepsilon$. Mas, por definição de medida exterior $\bar{\mu}(C) \leq m\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} (I \cap I_\nu)\right) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} m(I \cap I_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I \cap I_\nu) < \varepsilon$. Portanto, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\bar{\mu}(C) \leq \varepsilon \implies \bar{\mu}(C) = 0)$. Notando que $0 \leq \underline{\mu}(C) \leq \bar{\mu}(C) = 0$, temos: $\underline{\mu}(C) = \bar{\mu}(C)$, ou seja, C é $\mathcal{L}$ -mensurável e $\mu(C) = 0$.

Além destes resultados demonstra-se as seguintes propriedades:

- (1). "Sendo M e N conjuntos $\mathcal{L}$ -mensuráveis ($M \subset I$ e $N \subset I$) (I intervalo compacto) então $M \cap N$ e $M \cup N$ são $\mathcal{L}$ -mensuráveis e $\mu(N) + \mu(M) = \mu(M \cup N) + \mu(M \cap N)$."
- (2). "Sendo (M_ν) (M_ν mensurável) ($\nu \in \mathbb{N}$), então, $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ e $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ também são mensuráveis e $\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\right) \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(M_\nu)$."
- (3). "Sendo (M_ν) (M_ν mensurável) ($\nu \in \mathbb{N}$) ($M_\nu \cap M_n = \emptyset$) ($\nu \neq n$), então vale a igualdade: $\mu\left[\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\right] = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(M_\nu)$."

Proposição: "Sendo C ($C \subset \mathbb{R}$) um conjunto limitado, então, $\underline{\gamma}(C) \leq \underline{\mu}(C) \leq \bar{\mu}(C) \leq \bar{\gamma}(C)$."

Demonstração:

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto ($C \subset I$). Sabemos que $\underline{\gamma}(C) = \sup \left\{ \sum_{X \subset C} m(X) \mid X \in \mathcal{F}_\Delta \text{ e } \Delta \in \mathcal{D}_I \right\}$ e $\bar{\gamma}(C) = \inf \left\{ \sum_{X \cap C \neq \emptyset} m(X) \mid X \in \mathcal{F}_\Delta \text{ e } \Delta \in \mathcal{D}_I \right\}$.

De um lado sabemos que $(\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) \cdot \bigcup_{X \subset C \text{ e } X \in \mathcal{F}_\Delta} X = F$ é fechado em I

$$\implies m(F) = \sum_{\substack{X \subset C \\ X \in \mathcal{F}_\Delta}} m(X) \leq \underline{\mu}(C) \implies \underline{\gamma}(C) \leq \underline{\mu}(C).$$

Por outro lado, $(\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (\forall X \in \mathcal{F}_\Delta) (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists Y) (Y \text{ aberto em } I) (Y \supset X \text{ e } m(Y) < m(X) + \frac{\varepsilon}{k})$ ($k = \text{card } \mathcal{F}_\Delta$). Portanto,

$$\bigcup_{X \cap C \neq \emptyset} Y \supset C \text{ e } \left(\sum_{X \cap C \neq \emptyset} m(Y) < \sum_{X \cap C \neq \emptyset} \left(m(X) + \frac{\varepsilon}{k} \right) \leq \sum_{X \cap C \neq \emptyset} m(X) + \varepsilon \implies \right.$$

$$\left. \bar{\mu}(C) < \sum_{X \cap C \neq \emptyset} m(X) + \varepsilon \right) \text{ pois } \bar{\mu}(C) \leq m\left(\bigcup_{X \cap C \neq \emptyset} Y\right) \leq \sum_{X \cap C \neq \emptyset} m(Y). \text{ Daí vem que:}$$

$$(\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}): \bar{\mu}(C) \leq \sum_{\substack{X \cap C \neq \emptyset \\ X \in \mathcal{F}_\Delta}} m(X) \text{ e, portanto, } \bar{\mu}(C) \leq \bar{\gamma}(C).$$

Daí vem, finalmente, que: $\underline{\gamma}(C) \leq \underline{\mu}(C) \leq \bar{\mu}(C) \leq \bar{\gamma}(C)$.

Corolário: "Se o conjunto $C \subset \mathbb{R}$ é $\mathcal{F}$ -mensurável, então, C é também $\mathcal{L}$ -mensurável e $\gamma(C) = \mu(C)$."

Notemos que a recíproca deste corolário não é verdadeira, pois, existem conjuntos $\mathcal{L}$ -mensuráveis que não são $\mathcal{F}$ -mensuráveis. Como exemplo, podemos citar o conjunto $Q \cap [a, b] = C$ que, por ser enumerável, é $\mathcal{L}$ -mensurável com medida $\mu(C) = 0$. Por outro lado $\underline{\gamma}(C) = 0 < \bar{\gamma}(C) = b - a$, ou seja, C não é $\mathcal{F}$ -mensurável.

Até aqui abordamos a medida de Lebesgue de conjuntos no $\mathbb{R}$. Vamos estender este conceito para conjuntos limitados no $\mathbb{R}^p$ ($p = 2$ ou 3).

Seja I ($I \subset \mathbb{R}^p$) um intervalo compacto. Um conjunto E ($E \subset I$) denominaremos de conjunto elementar generalizado, se, e somente se,

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_{\nu}, \text{ sendo } (I_{\nu}) \text{ uma família enumerável de intervalos limitados}$$

no $\mathbb{R}^p$, dois a dois disjuntos. Chamaremos de medida do conjunto E e in-

dicamos por $m(E)$ à soma da série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma(I_{\nu})$. (*)

Definição: "Sendo M um conjunto ($M \subset I \subset \mathbb{R}^p$) (I intervalo compacto), chama-se medida exterior de Lebesgue (ou $\mathcal{L}$ -medida exterior) do conjunto M e se indica $\bar{\mu}(M)$, ao número real $\inf \{m(E) \mid M \subset E \subset I \text{ e } E \text{ é conjunto elementar generalizado}\}$."

Sendo I um intervalo compacto ($I \subset \mathbb{R}^p$) tal que $I = \bigtimes_{i=1}^p [a_i, b_i]$, podemos mostrar que sua medida $m(I)$ é igual à $\prod_{i=1}^p (b_i - a_i)$. Em analogia

com um resultado obtido para a $\mathcal{L}$ -medida interior de um conjunto no $\mathbb{R}$ podemos formular a seguinte

Definição: "Sendo M um conjunto ($M \subset I \subset \mathbb{R}^p$) (I é intervalo compacto), chama-se medida interior de Lebesgue (ou $\mathcal{L}$ -medida interior) de M , e se indica $\underline{\mu}(M)$, ao número real $m(I) - \bar{\mu}(I - M)$."

Definição: "Um conjunto M ($M \subset I \subset \mathbb{R}^p$) (I intervalo compacto) se diz $\mathcal{L}$ -mensurável (ou simplesmente mensurável), se, e somente se, $\underline{\mu}(M) = \bar{\mu}(M)$; neste caso, a este valor comum, denomina-se $\mathcal{L}$ -medida (ou medida de Lebesgue) de M e se indica por $\mu(M)$."

Demonstra-se que a $\mathcal{L}$ -medida de conjuntos em $I \subset \mathbb{R}^p$ ($p = 2$ ou 3)

(*) Demonstra-se que o valor $m(E)$ independe da família (I_{ν}) de intervalos

limitados dois a dois disjuntos, tal que $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_{\nu} = E$.



satisfaz propriedades análogas às que foram vistas para a $\mathcal{L}$ -medida de conjuntos no $\mathbb{R}$. Em particular, temos também que, todo conjunto C $\mathcal{J}$ -mensurável no $\mathbb{R}^p$ ($p = 2$ ou 3) é também $\mathcal{L}$ -mensurável e $\gamma(C) = \mu(C)$.

Vemos assim que a medida de Lebesgue é uma extensão da medida de Jordan, o que nos leva a dar a seguinte:

Definição: "Sendo C um conjunto $\mathcal{L}$ -mensurável ($C \subset \mathbb{R}^p$), chama-se comprimento (área ou volume) de C ao número real positivo $\mu(C)$, conforme $p = 1$ ($p = 2$ ou $p = 3$), respectivamente."

Notemos que os conjuntos de medida nula, pela definição supra, são conjuntos de comprimento, área ou volume nulo, conforme $p = 1, 2$ ou 3 , respectivamente.

Podemos ainda fazer as seguintes considerações sobre conjuntos $\mathcal{L}$ -mensuráveis e suas medidas.

Seja $\mathcal{C} = \{X \subset I \mid X \text{ é } \mathcal{L}\text{-mensurável}\}$ (I intervalo compacto); das propriedades vistas para conjuntos mensuráveis podemos deduzir as seguintes propriedades:

$$\mathcal{C}_I: (\forall (M_\nu)_{\nu \geq 1}) (M_\nu \in \mathcal{C}) \left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu \in \mathcal{C} \right)$$

$$\mathcal{C}_{II}: (\forall M, N \in \mathcal{C}) (M \cap \bigcup_I N \in \mathcal{C})$$

Na Teoria da Medida a classe $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(I)$ denomina-se $\mathcal{C}$ -álgebra (ou tribo) sobre I .

Temos também que $(\forall M \in \mathcal{C}) (\mu(M) \in \mathbb{R}_+)$. Assim, podemos dizer que existe uma aplicação $\mu: \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfazendo às propriedades:

$$\alpha) \mu(\emptyset) = 0; \quad \beta) (\forall M \in \mathcal{C}) (\mu(M) \geq 0); \quad \gamma) (\forall (M_\nu)_{\nu \geq 1}) (M_\nu \in \mathcal{C})$$

$$(M_\nu \cap M_n = \emptyset) (\forall \nu \neq n) : \mu\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(M_\nu).$$

Na Teoria da Medida dizemos então que a Medida de Lebesgue é uma medida sobre a $\mathcal{C}$ -álgebra $\mathcal{C}$.

Destes resultados concluímos que, sendo $\gamma: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e $\mu: \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ as medidas de Jordan e de Lebesgue ($\mathcal{A} \not\subset \mathcal{C}$), a medida de Lebesgue é um prolongamento de γ a $\mathcal{C}$.

* * *

b) Integral de Lebesgue no $\mathbb{R}^p$ ($1 \leq p \leq 3$)

Divisão Mensurável de um Intervalo Compacto

Definição: "Chama-se divisão mensurável de um intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ a um conjunto $\mathcal{M} = \{M_\nu \subset I \mid \nu = 1, 2, \dots, n \mid M_\nu \text{ é } \mathcal{L}\text{-mensurável}\}$ onde $(M_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) é tal que $(\forall m, \nu) (m, \nu \in \mathbb{N}_n) (m \neq \nu) :$

$$\mu(M_\nu \cap M_m) = 0 \text{ e } \bigcup_{\nu=1}^n M_\nu = I." \quad (*)$$

Notemos inicialmente que toda divisão elementar ou mesmo $\mathcal{J}$ -mensurável de I é sempre uma divisão mensurável de I , mas, nem toda divisão mensurável de I é uma divisão $\mathcal{J}$ -mensurável deste intervalo, como mostra o seguinte exemplo:

Seja $I = [a, b]$, $M_1 = \mathbb{Q} \cap [a, b]$ e $M_2 = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [a, b]$. Evidentemente M_1 e M_2 são $\mathcal{L}$ -mensuráveis, bem como $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ e $M_1 \cup M_2 = I$. Logo, $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$ é uma divisão mensurável de I , porém, não é divisão $\mathcal{J}$ -mensurável do mesmo.

Definição: "Dadas as divisões mensuráveis $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ de I ($I \subset \mathbb{R}^p$) (I intervalo compacto), diz-se que $\mathcal{M}_2$ é mais fina que $\mathcal{M}_1$ (ou que $\mathcal{M}_2$ é um refinamento de $\mathcal{M}_1$) e se indica $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$, se e só se, $(\forall X \in \mathcal{M}_2) (\exists Y \in \mathcal{M}_1) (X \subset Y)$."

Definição: "Dadas duas divisões mensuráveis de I (I intervalo compacto no $\mathbb{R}^p$), $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$; chama-se resultante de $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ e se indica $\mathcal{R}_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$, ao conjunto $\mathcal{M} = \{Z = X \cap Y \mid X \in \mathcal{M}_1 \text{ e } Y \in \mathcal{M}_2\}$."

Evidentemente se $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ são divisões mensuráveis de I , então, $\mathcal{M} = \mathcal{R}_{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2}$ é também uma divisão mensurável de I e, ainda,

$$\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M} \text{ e } \mathcal{M}_2 \prec \mathcal{M}.$$

Seja agora $f(x)$ uma função definida e limitada em $I \subset \mathbb{R}^p$ (I é intervalo compacto) e $\mathcal{M}$ uma divisão mensurável de I . Convencionaremos (analogamente às convenções feitas antes da definição de Integral de Riemann) que

$$\ell = \inf_I f(x), L = \sup_I f(x), \Omega = L - \ell; \forall X \in \mathcal{M}, \ell_X = \inf_X f(x), L_X = \sup_X f(x), \Omega_X = L_X - \ell_X \text{ e } \mu(X) \text{ a } \mathcal{L}\text{-medida de } X.$$

Temos então:

$$(\forall x \in X \in \mathcal{M}) : \ell \leq \ell_X \leq f(x) \leq L_X \leq L.$$

(*) Uma divisão de I em conjuntos $\mathcal{J}$ -mensuráveis chamaremos de divisão $\mathcal{J}$ -mensurável.

Sendo $\mu(X) \geq 0$, deduzimos:

$$\ell_{\mu}(I) \leq \sum_{X \in \mathcal{M}} \ell_X \mu(X) \leq \sum_{X \in \mathcal{M}} L_X \mu(X) \leq L_{\mu}(I)$$

Sendo $s(f; \mathcal{M}) = \sum_{X \in \mathcal{M}} \ell_X \mu(X)$ e $S(f; \mathcal{M}) = \sum_{X \in \mathcal{M}} L_X \mu(X)$, vemos que os

conjuntos $\{s(f; \mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ é divisão mensurável de } I\}$ e $\{S(f; \mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ é divisão mensurável de } I\}$ são conjuntos lineares limitados. Existe, portanto, e é único, o número $\sup \{s(f; \mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ é divisão mensurável de } I\}$.

$(\inf \{S(f; \mathcal{M}) \mid \mathcal{M} \text{ é divisão mensurável de } I\})$ é denominamo-lo de integral inferior (integral superior) de $f(x)$ segundo Lebesgue relativamente ao intervalo I e indicamos

$$\underline{\mathcal{L}} \int_I f(x) dx \quad (\quad \overline{\mathcal{L}} \int_I f(x) dx)$$

Para distinguir esse número da integral inferior (integral superior) de $f(x)$ segundo Riemann relativamente a I , denotaremos essa última pela notação

$$\mathcal{R} \int_I f(x) dx \quad (\quad \mathcal{R} \int_I f(x) dx)$$

De um modo inteiramente análogo ao que foi feito na introdução do conceito de integral segundo Riemann, podemos demonstrar as seguintes propriedades:

- (a). $(\forall \mathcal{M} \text{ e } \mathcal{M}^*) (\mathcal{M} \text{ e } \mathcal{M}^* \text{ são divisões mensuráveis de } I) (\mathcal{M} \prec \mathcal{M}^* \implies s(f; \mathcal{M}) \leq s(f; \mathcal{M}^*) \text{ e } S(f; \mathcal{M}) \geq S(f; \mathcal{M}^*))$
- (b). $(\forall \mathcal{M} \text{ e } \mathcal{M}^*) (\mathcal{M} \text{ e } \mathcal{M}^* \text{ são divisões mensuráveis de } I) (s(f; \mathcal{M}) \leq S(f; \mathcal{M}^*))_- \text{ e}$
- (c). $\underline{\mathcal{L}} \int_I f(x) dx \leq \overline{\mathcal{L}} \int_I f(x) dx$.

Proposição: "Se $f(x)$ é definida e limitada em $I \subset \mathbb{R}^p$ (I é intervalo compacto) então:

$$\mathcal{R} \int_I f(x) dx \leq \underline{\mathcal{L}} \int_I f(x) dx \quad \text{e} \quad \mathcal{R} \int_I f(x) dx \geq \overline{\mathcal{L}} \int_I f(x) dx."$$

Demonstração:

Sendo $\mathcal{D}_e$ o conjunto das divisões elementares de I , $\mathcal{D}_n$ o conjunto das divisões normais de I e $\mathcal{D}_m$ o conjunto das divisões mensuráveis do mesmo, temos, evidentemente: $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}_e \subset \mathcal{D}_m$

Assim, $(\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) : (\mathcal{F}_{\Delta} \in \mathcal{D}_n \implies \mathcal{F}_{\Delta} \in \mathcal{D}_m)$

$$(s(f; \Delta) \leq \underline{\mathcal{L}} \int_I f(x) dx \implies \mathcal{R} \int_I f(x) dx \leq \underline{\mathcal{L}} \int_I f(x) dx) \quad \text{e}$$

$$(S(f; \Delta) \geq \mathcal{L} \int_I f(x) dx \implies \mathcal{R} \int_I f(x) dx \geq \mathcal{L} \int_I f(x) dx).$$

Definição: "f(x) definida e limitada em $I \subset \mathbb{R}^p$ (I intervalo compacto) é integrável segundo Lebesgue em I, se e só se:

$$\mathcal{L} \int_I f(x) dx = \mathcal{L} \int_I f(x) dx$$

e, neste caso, a este valor comum chama-se integral de f(x) segundo Lebesgue e se indica:

$$\mathcal{L} \int_I f(x) dx."$$

(*)

Crítério de Integrabilidade de Riemann (para $\mathcal{L}$ -integrabilidade)

"Uma condição necessária e suficiente para que f(x) definida e limitada em $I \subset \mathbb{R}^p$ (I intervalo compacto) seja $\mathcal{L}$ -integrável em I é que $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}) (S(f; \mathcal{M}) - s(f; \mathcal{M}) < \varepsilon).$ "

A demonstração desse teorema fazemos analogamente à do critério do mesmo nome visto para $\mathcal{R}$ -integrabilidade.

Proposição: "Se f(x) é definida e limitada e $\mathcal{R}$ -integrável em I, então, f(x) é $\mathcal{L}$ -integrável em I e vale a igualdade:

$$\mathcal{R} \int_I f(x) dx = \mathcal{L} \int_I f(x) dx."$$

Demonstração:

$$\mathcal{R} \int_I f(x) dx \leq \mathcal{L} \int_I f(x) dx \leq \mathcal{L} \int_I f(x) dx \leq \mathcal{R} \int_I f(x) dx.$$

$$\text{Mas, } \mathcal{R} \int_I f(x) dx = \mathcal{R} \int_I f(x) dx \implies \mathcal{L} \int_I f(x) dx = \mathcal{L} \int_I f(x) dx.$$

Portanto, f(x) é $\mathcal{L}$ -integrável, e:

$$\mathcal{R} \int_I f(x) dx = \mathcal{L} \int_I f(x) dx.$$

Assim, quando f(x) é $\mathcal{R}$ -integrável em I, as integrais segundo Riemann e Lebesgue de f(x) em I coincidem. Convencionaremos indicar por

(*) Usaremos a expressão $\mathcal{L}$ -integrabilidade para significar a integrabilidade de uma função segundo Lebesgue; analogamente, $\mathcal{R}$ -integrabilidade significará integrabilidade segundo Riemann. As integrais respectivas chamaremos de $\mathcal{L}$ -integral e $\mathcal{R}$ -integral da função.

$\int_I f(x)dx$ a integral segundo Lebesgue de $f(x)$ em I , que, certamente, não poderá causar nenhuma ambigüidade com relação à idêntica notação usada para a $\mathcal{R}$ -integral de $f(x)$ em I , pois, quando esta existe, será igual à $\mathcal{L}\int_I f(x)dx$. Quando não existe $\mathcal{R}\int_I f(x)dx$, o símbolo $\int_I f(x)dx$ só poderá representar a $\mathcal{L}$ -integral de $f(x)$ em I .

Para mostrar que a recíproca da proposição precedente não é verdadeira, basta considerar a função de Dirichlet $f(x) = \chi_Q(x)$, restrita ao intervalo $I = [a, b]$. Como sabemos:

$$(\nexists \mathcal{R}\int_I f(x)dx), \text{ pois } \mathcal{R}\int_I f(x)dx = 0 \text{ e } \mathcal{R}\int_I f(x)dx = b - a.$$

Por outro lado, seja $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$, onde $M_1 = Q \cap I$ e $M_2 = I - M_1$. O conjunto M_1 é $\mathcal{L}$ -mensurável, por ser enumerável e $\mu(M_1) = 0$. Mas, M_2 também é $\mathcal{L}$ -mensurável, pois é complementar de M_1 em relação à I e, ainda, $\mu(M_2) + \mu(M_1) = b - a \implies \mu(M_2) = b - a$. Sendo $\mathcal{M}$ uma divisão mensurável de I , temos $s(f; \mathcal{M}) = \ell_{M_1} \mu(M_1) + \ell_{M_2} \mu(M_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (b - a) = 0$ e $S(f; \mathcal{M}) = L_{M_1} \mu(M_1) + L_{M_2} \mu(M_2) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (b - a) = 0$.

Portanto, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \mathcal{M} = \{M_1, M_2\}) (\mathcal{M} \text{ é divisão mensurável de } I) (S(f; \mathcal{M}) - s(f; \mathcal{M}) = 0 < \varepsilon)$ ou seja, $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I e, $\mathcal{L}\int_I f(x)dx = 0$.

Consideremos a divisão mensurável $\mathcal{M}$ do intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$; chamaremos de divisão mensurável generalizada de I correspondente a $\mathcal{M}$ ao conjunto $\mathcal{M}_\xi = \mathcal{M} \cup \{\{\xi_x\} \mid \xi_x \in X \in \mathcal{M}\}$ onde ξ_x são pontos tomados um em cada um dos conjuntos $X \in \mathcal{M}$, e de um modo arbitrário. Diremos, ainda, por definição, que se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^*$ são duas divisões mensuráveis em I , então, $\mathcal{M}_\xi \prec \mathcal{M}_\xi^* \iff \mathcal{M} \prec \mathcal{M}^*$. Facilmente se vê que os conjuntos $\mathcal{D}_\mathcal{M}$ e $\mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}$ são orientados pelas relações $\prec$ e $\prec^*$, respectivamente. $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}_\xi$ chamaremos de divisões mensuráveis correspondentes.

Proposição: "Se $f(x)$ é uma função definida e limitada em $I \subset \mathbb{R}^p$ (I intervalo compacto), então,

$$\lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_\mathcal{M}} s(f; \mathcal{M}) = \mathcal{L}\int_I f(x)dx \text{ e } \lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_\mathcal{M}} S(f; \mathcal{M}) = \mathcal{L}\int_I f(x)dx."$$

Demonstração:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \mathcal{M}_0 \in \mathcal{D}_\mathcal{M}) (\mathcal{L}\int_I f(x)dx - \varepsilon < s(f; \mathcal{M}_0)).$$



Mas, $(\forall \mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}) (\mathcal{M} \succ \mathcal{M}_0 \implies s(f; \mathcal{M}_0) \leq s(f; \mathcal{M}))$.

Logo, $\mathcal{L} \int_{\underline{I}} f(x) dx - \varepsilon < s(f; \mathcal{M}) \implies \left| \mathcal{L} \int_{\underline{I}} f(x) dx - s(f; \mathcal{M}) \right| < \varepsilon$.

Portanto, $\lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} s(f; \mathcal{M}) = \mathcal{L} \int_{\underline{I}} f(x) dx$.

Analogamente se mostra que $\lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} S(f; \mathcal{M}) = \mathcal{L} \int_{\underline{I}} f(x) dx$.

Convencionaremos escrever $\mathcal{L} \int_{\underline{I}} f$ e $\mathcal{L} \int_{\underline{I}} f$ ao invés de $\mathcal{L} \int_{\underline{I}} f(x) dx$ e $\mathcal{L} \int_{\underline{I}} f(x) dx$ respectivamente; e $\mathcal{L} \int_{\underline{I}} f$ ao invés de $\mathcal{L} \int_{\underline{I}} f(x) dx$.

Corolário: "Se $f(x)$ é definida e limitada em I , então, $f(x)$ $\mathcal{L}$ -integrável em I se e somente se, $\lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} S(f; \mathcal{M}) = \lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} s(f; \mathcal{M}) = \mathcal{L} \int_{\underline{I}} f(x) dx$."

Demonstração:

Nec. $\implies$

Se $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I , então, $\mathcal{L} \int_{\underline{I}} f = \mathcal{L} \int_{\underline{I}} f = \mathcal{L} \int_{\underline{I}} f$.

Logo, $\lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} [S(f; \mathcal{M}) - s(f; \mathcal{M})] = \lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} S(f; \mathcal{M}) - \lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} s(f; \mathcal{M}) = 0$.

Portanto, $\lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} s(f; \mathcal{M}) = \lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} S(f; \mathcal{M}) = \mathcal{L} \int_{\underline{I}} f(x) dx$.

Suf. $\Leftarrow$

$\mathcal{L} \int_{\underline{I}} f(x) dx = \lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} s(f; \mathcal{M}) = \lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} [S(f; \mathcal{M}) - (S(f; \mathcal{M}) - s(f; \mathcal{M}))]$
 $= \lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} S(f; \mathcal{M}) - \lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} (S(f; \mathcal{M}) - s(f; \mathcal{M})) = \mathcal{L} \int_{\underline{I}} f - 0 =$
 $= \mathcal{L} \int_{\underline{I}} f(x) dx$.

Portanto, $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I .

Proposição: "Se $f(x)$ é definida e limitada em I e, se $\sigma(f; \mathcal{M}_\xi) = \sum_{X \in \mathcal{M}_\xi} f(\xi_X) \mu(X)$, então $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I se, e somente se,

$$(\exists \lim_{\mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}} \sigma(f; \mathcal{M}_\xi)) \text{ e } \lim_{\mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}} \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) = \mathcal{L} \int_I f(x) dx."$$

Demonstração:

Nec. $\Rightarrow$

Se $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I , então, $\lim_{\mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}} [S(f; \mathcal{M}) - s(f; \mathcal{M})] = 0$

ou seja, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \mathcal{M}_0 \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}) (\forall \mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}) (\mathcal{M} \succ \mathcal{M}_0 \Rightarrow 0 \leq S(f; \mathcal{M}) + s(f; \mathcal{M}) < \frac{\varepsilon}{2})$.

$$\text{Mas, } s(f; \mathcal{M}) = \sum_{X \in \mathcal{M}} \ell_X \mu(X) \leq \sum_{X \in \mathcal{M}_\xi} f(\xi_X) \mu(X) \leq \sum_{X \in \mathcal{M}} L_X \mu(X) = S(f; \mathcal{M}).$$

Assim, $(\forall \mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}) (\forall \mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}) (\mathcal{M} \text{ e } \mathcal{M}_\xi \text{ são divisões mensuráveis correspondentes}): s(f; \mathcal{M}) \leq \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) \leq S(f; \mathcal{M})$.

Mas, sendo $s(f; \mathcal{M}) \leq \mathcal{L} \int_I f(x) dx \leq S(f; \mathcal{M})$, deduzimos:

$$\begin{aligned} \left| \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) - \mathcal{L} \int_I f \right| &\leq \left| \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) - S(f; \mathcal{M}) \right| + \left| S(f; \mathcal{M}) - \mathcal{L} \int_I f \right| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon; \text{ assim, sendo } \mathcal{M}_{0_\xi} \text{ a divisão mensurável correspondente a } \mathcal{M}_0, \text{ temos: } (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \mathcal{M}_{0_\xi} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}) (\forall \mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}) (\mathcal{M}_\xi \succ \mathcal{M}_{0_\xi} \\ &\Rightarrow \left| \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) - \mathcal{L} \int_I f \right| < \varepsilon). \text{ Portanto, } (\exists \lim_{\mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}} \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}} \left(\sum_{X \in \mathcal{M}_\xi} f(\xi_X) \mu(X) \right) \text{ e } \lim_{\mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}} \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) = \mathcal{L} \int_I f.$$

Suf. $\Leftarrow$

Por hipótese: $(\exists \lim_{\mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}} \sigma(f; \mathcal{M}_\xi))$. Seja C ($C \in \mathbb{R}$)^(*) o seu valor. Temos então: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \mathcal{M}_{0_\xi} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}) (\forall \mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}) (\mathcal{M}_\xi \succ \mathcal{M}_{0_\xi} \Rightarrow \left| \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) - C \right| < \varepsilon \Rightarrow C - \varepsilon < \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) < C + \varepsilon)$.

Mas, $\inf \{ \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) \mid \xi_X \in X \in \mathcal{M} \} = s(f; \mathcal{M})$, e,

$$\sup \{ \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) \mid \xi_X \in X \in \mathcal{M} \} = S(f; \mathcal{M}).$$

Portanto, $C - \varepsilon \leq s(f; \mathcal{M}) \leq \mathcal{L} \int_I f \leq \mathcal{L} \int_I f \leq S(f; \mathcal{M}) \leq C + \varepsilon$. Assim: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++})$

$$\left(\left| \mathcal{L} \int_I f - C \right| \leq \varepsilon \text{ e } \left| \mathcal{L} \int_I f - C \right| \leq \varepsilon \right) \text{ e, portanto:}$$

(*) Sendo o conjunto $\{ \sigma(f; \mathcal{M}_\xi) \mid \mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi} \}$ limitado, o limite $\lim_{\mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}} \sigma(f; \mathcal{M}_\xi)$ quando existe, tem que ser finito.

$\mathcal{L} \int_I f = \mathcal{L} \int f = C$, isto é, $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I e,

$$\lim_{\mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}} \sum_{X \in \mathcal{M}_\xi} f(\xi_X) \mu(X) = \mathcal{L} \int_I f(x) dx.$$

Vemos assim que a existência do limite $\lim_{\mathcal{M}_\xi \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}_\xi}} \mathcal{G}(f; \mathcal{M}_\xi)$ implica que

o mesmo coincide com o número real $\mathcal{L} \int_I f(x) dx$.

Propriedades

Utilizando o resultado precedente, bem como o Critério de Integrabilidade de Riemann para $\mathcal{L}$ -integrais, de um modo análogo ao que foi feito para as $\mathcal{R}$ -integrais, demonstra-se que valem as propriedades:

(a). "Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções definidas, limitadas e $\mathcal{L}$ -integráveis

em I , então, $f(x) \pm g(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I e $\mathcal{L} \int_I f(x) dx \pm$
 $\pm \mathcal{L} \int_I g(x) dx = \mathcal{L} \int_I (f(x) \pm g(x)) dx$."

(b). "Se $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I e se $k \in \mathbb{R}$, então, $kf(x)$ é $\mathcal{L}$ -inte-

grável em I e $\mathcal{L} \int_I kf(x) dx = k(\mathcal{L} \int_I f(x) dx)$."

(c). "Se $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I , então, $|f(x)|$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I

e $|\mathcal{L} \int_I f(x) dx| \leq \mathcal{L} \int_I |f(x)| dx$."

(d). "Se $f(x)$ e $g(x)$ são $\mathcal{L}$ -integráveis em I , então, $f(x) \cdot g(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I ."

(e). "Se $f(x)$ e $g(x)$ são $\mathcal{L}$ -integráveis em I e, se $g(x)$ mantém sinal constante em I , sendo $\inf_I |g(x)| > 0$, então, $\frac{f(x)}{g(x)}$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I ."

Além destas, valem ainda as seguintes propriedades:

(f). "Se $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I e $g(x)$ é definida e limitada em I tal que $g(x) = f(x)$ p.p.t. em I , então, $g(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I

e $\mathcal{L} \int_I f = \mathcal{L} \int_I g$."

Demonstração:

Seja $M_1 = \{x \in I \mid f(x) \neq g(x)\}$. Por hipótese, $\mu(M_1) = 0$. A divisão $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$, onde $M_2 = I - M_1$ é uma divisão mensurável de I .

Consideremos a função limitada $h(x) = f(x) - g(x)$.

$S(h; \mathcal{M}) = L_{M_1} \mu(M_1) + L_{M_2} \mu(M_2) = 0$ e, analogamente, $s(h; \mathcal{M}) = 0$.

Mas, $0 = s(h; \mathcal{M}) \leq \mathcal{L} \int_I h \leq \mathcal{L} \int_I \bar{h} \leq S(h; \mathcal{M}) = 0$.

Logo $h(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I e $\mathcal{L} \int_I h(x) dx = 0$.

Por outro lado, sendo $g(x) = f(x) - h(x)$, vem que $g(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I e $\mathcal{L} \int_I g(x) dx = \mathcal{L} \int_I f(x) dx - \mathcal{L} \int_I h(x) dx = \mathcal{L} \int_I f(x) dx$

(g). "Se $f(x)$ é definida, limitada e $\mathcal{L}$ -integrável em I e $f(x) \geq 0$ p.

p.t. em I , então, $\mathcal{L} \int_I f(x) dx \geq 0$."

Demonstração:

Seja $M_1 = \{x \in I \mid f(x) < 0\}$. Por hipótese $\mu(M_1) = 0$. Sendo $M_2 = I - M_1$, a divisão $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$ é uma divisão mensurável de I . Logo: $s(f; \mathcal{M}) = \ell_{M_1} \mu(M_1) + \ell_{M_2} \mu(M_2) = \ell_{M_2} \mu(M_2) \geq 0 \implies$

$\implies \mathcal{L} \int_I f(x) dx \geq 0$, e portanto, $\mathcal{L} \int_I f(x) dx \geq 0$.

Integral de Lebesgue num Conjunto Mensurável

Seja M um conjunto $\mathcal{L}$ -mensurável ($M \subset I \subset \mathbb{R}^p$) (I intervalo compacto), evidentemente, a função $\chi_M(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I , pois, se $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$, onde $M = M_1$ e $M_2 = I - M_1$, então, $\mathcal{M}$ é uma divisão mensurável de I ; além disso, $s(\chi_M; \mathcal{M}) = \ell_{M_1} \mu(M_1) + \ell_{M_2} \mu(M_2) = 1 \cdot \mu(M_1) + 0 \cdot \mu(M_2) = \mu(M_1)$ e $S(\chi_M; \mathcal{M}) = L_{M_1} \mu(M_1) + L_{M_2} \mu(M_2) = 1 \cdot \mu(M_1) + 0 \cdot \mu(M_2) = \mu(M_1)$.

Mas, $\mu(M_1) = s(\chi_M; \mathcal{M}) \leq \mathcal{L} \int_I \chi_M \leq \mathcal{L} \int_I \bar{\chi}_M \leq S(\chi_M; \mathcal{M}) = \mu(M_1)$.

Logo, $\chi_M(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I e $\mathcal{L} \int_I \chi_M(x) dx = \mu(M)$.

Seja agora $f(x)$ uma função $\mathcal{L}$ -integrável em I ; pela propriedade (d) a função $\chi_M(x) \cdot f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em I . Este fato nos leva a formular a seguinte:

Definição: "Seja $f(x)$ uma função definida e limitada e $\mathcal{L}$ -integrável em $I \subset \mathbb{R}^p$ (I intervalo compacto) e M um conjunto ($M \subset I$) (M é

mensurável); chama-se $\mathcal{L}$ -integral de $f(x)$ em M ao número real

$$\mathcal{L} \int_I \chi_M(x) f(x) dx \text{ e indica-se pela notação } \mathcal{L} \int_M f(x) dx.$$

Diz-se que $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em M , se e somente se, existe a $\mathcal{L}$ -integral de $f(x)$ em M ."

Colocamos, por definição, $\mathcal{L} \int_{\emptyset} f(x) dx = 0$. Facilmente podemos ver também que esta definição independe do intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^p$ ($I \supset M$).

Propriedades:

(α). "Se $f(x)$ é uma função definida, limitada e $\mathcal{L}$ -integrável no intervalo compacto I ($I \subset \mathbb{R}^p$) e, se $M_i \subset I$ ($i = 1, 2$) são conjuntos mensuráveis, então $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em $M_1 \cup M_2$ e $M_1 \cap M_2$ e, vale

$$\text{a fórmula: } \mathcal{L} \int_{M_1} f(x) dx + \mathcal{L} \int_{M_2} f(x) dx = \mathcal{L} \int_{M_1 \cup M_2} f(x) dx + \mathcal{L} \int_{M_1 \cap M_2} f(x) dx!$$

Demonstração:

Sendo os conjuntos M_i ($i = 1, 2$) ($M_i \subset I$) mensuráveis, então, $M_1 \cup M_2 \subset I$, e $M_1 \cap M_2 \subset I$, são conjuntos mensuráveis e $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável nestes conjuntos.

Por outro lado, ($\forall x \in I$) $\chi_{M_1}(x) + \chi_{M_2}(x) = \chi_{M_1 \cup M_2}(x) + \chi_{M_1 \cap M_2}(x)$. Daí vem: $f(x)\chi_{M_1}(x) + f(x)\chi_{M_2}(x) = f(x)\chi_{M_1 \cup M_2}(x) + f(x)\chi_{M_1 \cap M_2}(x)$, e sendo os termos que figuram em cada membro $\mathcal{L}$ -integráveis em I , vem:

$$\mathcal{L} \int_I f(x)\chi_{M_1}(x) dx + \mathcal{L} \int_I f(x)\chi_{M_2}(x) dx = \mathcal{L} \int_I f(x)\chi_{M_1 \cup M_2}(x) dx + \mathcal{L} \int_I f(x)\chi_{M_1 \cap M_2}(x) dx, \text{ ou seja:}$$

$$\mathcal{L} \int_{M_1} f(x) dx + \mathcal{L} \int_{M_2} f(x) dx = \mathcal{L} \int_{M_1 \cup M_2} f(x) dx + \mathcal{L} \int_{M_1 \cap M_2} f(x) dx.$$

Em particular, se $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, temos:

$$\mathcal{L} \int_{M_1} f(x) dx + \mathcal{L} \int_{M_2} f(x) dx = \mathcal{L} \int_{M_1 \cup M_2} f(x) dx.$$

(β).(*) "Se $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em $M \subset I$ (M mensurável) e $\mu(M) = 0$, então $\mathcal{L} \int_M f(x) dx = 0$."

Demonstração:

Seja $\mathcal{M} = \{M, I-M\}$; $\mathcal{M}$ é uma divisão mensurável de I .

$$s(f\chi_{\mathcal{M}}; \mathcal{M}) = \ell_M \mu(M) + \ell_{I-M} \mu(I-M) = \ell_M \cdot 0 + 0 \cdot \mu(I-M) = 0.$$

Analogamente, $S(f\chi_{\mathcal{M}}; \mathcal{M}) = 0$.

Daí segue imediatamente que $\mathcal{L} \int_I \chi_M(x) f(x) dx = 0 \implies$

$$\implies \mathcal{L} \int_M f(x) dx = 0.$$

De (β) e (α) segue que, se $M_i \subset I$ ($i = 1, 2$) são conjuntos mensuráveis e $\mu(M_1 \cap M_2) = 0$, então:

$$\mathcal{L} \int_{M_1} f(x) dx + \mathcal{L} \int_{M_2} f(x) dx = \mathcal{L} \int_{M_1 \cup M_2} f(x) dx.$$

(γ). "Se $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em $M \subset I$ (M mensurável) e $k \in \mathbb{R}$, então,

$$kf(x) \text{ é } \mathcal{L}\text{-integrável em } M \text{ e } k \mathcal{L} \int_M f(x) dx = \mathcal{L} \int_M kf(x) dx."$$

Demonstração imediata.

(δ). "Se $f(x)$ e $g(x)$ são $\mathcal{L}$ -integráveis em $M \subset I$ (M mensurável), então, $f(x) \pm g(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em M e:

$$\mathcal{L} \int_M f(x) dx \pm \mathcal{L} \int_M g(x) dx = \mathcal{L} \int_M (f(x) \pm g(x)) dx."$$

(ε). "Se $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em $M \subset I$ e $g(x)$ é definida e limitada em I (M é mensurável) tais que $f(x) = g(x)$ p.p.t. em M , então:

$$\mathcal{L} \int_M f(x) dx = \mathcal{L} \int_M g(x) dx."$$

(ζ). "Se $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em $M \subset I$ (M mensurável) e $f(x) \geq 0$ p.p.t. em M , então:

$$\mathcal{L} \int_M f(x) dx \geq 0."$$

(*) Nos enunciados seguintes omitiremos dizer as condições: $f(x)$ é definida e limitada em I . Subentenderemos que estas, automaticamente ocorrem quando $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável no intervalo compacto I . Nestes enunciados I será sempre intervalo compacto.

(7). "Se $f(x)$ e $g(x)$ são $\mathcal{L}$ -integráveis em $M \subset I$ (M mensurável) e

$$f(x) \leq g(x) \text{ p.p.t. em } M, \text{ então: } \mathcal{L} \int_M f(x) dx \leq \mathcal{L} \int_M g(x) dx."$$

(8). "Se $f(x)$ é $\mathcal{L}$ -integrável em $M \subset I$ (M mensurável) e $f(x) \geq 0$ p.p.t.

$$\text{em } M \text{ bem como } \mathcal{L} \int_M f(x) dx = 0, \text{ então, } f(x) = 0 \text{ p.p.t. em } M."$$

Demonstração: Baseia-se na noção de função mensurável.

(9). "Se $M \subset I$ (M mensurável), então,

$$\mathcal{L} \int_M dx = \mu(M)."$$

Convenções:

Seja $f(x)$ definida, limitada e $\mathcal{L}$ -integrável em $I \subset \mathbb{R}^p$ (I intervalo compacto). Assim, existe $\mathcal{L} \int_I f(x) dx$ que, por convenção anteriormente adotada, indicamos simplesmente por $\int_I f(x) dx$.

Quando $p=2$, os elementos de I ($I \subset \mathbb{R}^2$) são pares ordenados de números reais que indicamos por (x,y) e, para $p=3$, os elementos de I ($I \subset \mathbb{R}^3$) são ternas ordenadas que indicaremos por (x,y,z) . Nestas condições, como fizemos com as $\mathcal{R}$ -integrais, convencionaremos escrever:

$$\text{a). para } p=1: \int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, \text{ onde } I = [a,b];$$

$$\text{b). para } p=2: \int_I f(x,y) d(x,y) = \iint_I f(x,y) dx dy \text{ ou } \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy,$$

$$\text{onde } I = [a,b] \times [c,d];$$

$$\text{c). para } p=3: \int_I f(x,y,z) d(x,y,z) = \iiint_I f(x,y,z) dx dy dz \text{ ou}$$

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z) dx dy dz, \text{ onde } I = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]. \quad (*)$$

* * *

(*) Análogas notações usaremos para a $\mathcal{L}$ -integral de uma função $f(x_1, \dots, x_p)$ ($1 \leq p \leq 3$) num conjunto D (D é mensurável) ($D \subset \mathbb{R}^p$).

c) Interpretação Geométrica da Integral de Lebesgue

A interpretação geométrica da Integral de Lebesgue pode ser feita de modo análogo ao que foi feito para a Integral de Riemann. Sendo $f(x) \geq 0$ $\mathcal{L}$ -integrável em D ($D \subset I \subset \mathbb{R}^p$) (D mensurável e I intervalo compacto), bem como $E = \{(x_1, \dots, x_{p+1}) \mid 0 \leq x_{p+1} \leq f(x_1, \dots, x_p) = f(x) \text{ (} x = (x_1, \dots, x_p) \in D \text{)} \text{ (} p=1 \text{ ou } 2 \text{)}\}$, verifica-se que $E \subset \mathbb{R}^{p+1}$ é mensurável e que $\int_D f(x) dx = \mu(E)$, representa a área (o volume) de E no caso de $p = 1$ ($p = 2$).

Sabemos, por outro lado, que se D é um conjunto mensurável ($D \subset \mathbb{R}^3$), então, $\int_D dx = \mu(D)$ representa o volume do conjunto D .

Para interpretar geometricamente a integral de Lebesgue de uma função $f(x) \geq 0$ definida, limitada e $\mathcal{L}$ -integrável em D ($D \subset I \subset \mathbb{R}^p$) ($p=1$ ou 2) (D mensurável e I intervalo compacto), podemos raciocinar da seguinte maneira:

De um lado, aplicando a definição de conjunto mensurável, demonstra-se que se M e N ($M, N \subset \mathbb{R}$) são conjuntos mensuráveis, tendo medidas unidimensionais $\mu_1(M)$ e $\mu_1(N)$, respectivamente, então, o conjunto $M \times N$ é mensurável, tendo medida bi-dimensional $\mu_2(M \times N) = \mu_1(M) \cdot \mu_1(N)$. Analogamente, se L, M e $N \subset \mathbb{R}$ são conjuntos mensuráveis, então, o conjunto $L \times M \times N$ é mensurável também e, $\mu_3(L \times M \times N) = \mu_1(L) \cdot \mu_1(M) \cdot \mu_1(N) = \mu_2(L \times M) \cdot \mu_1(N) = \mu_1(L) \cdot \mu_2(M \times N)$, onde $\mu_3(L \times M \times N)$ é a medida tri-dimensional do conjunto $L \times M \times N$.

Seja agora $f(x) \geq 0$, definida, limitada e $\mathcal{L}$ -integrável em D ($D \subset I \subset \mathbb{R}$) (D mensurável e I intervalo compacto); consideremos também o conjunto $E = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x) \text{ e } x \in D\}$. Se $f(x)$ é definida e limitada em I , então, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists \mathcal{M} \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}})$:

$$s_0 - \varepsilon < s(\chi f, \mathcal{M}) = \sum_{X \in \mathcal{M}} \ell_X(\chi f) \mu_1(X) = \sum_{X \subset D} \ell_X(f) \mu_1(X). \quad (1)$$

Mas, sendo X um conjunto ($X \in \mathcal{M}$), então X é mensurável e, portanto $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists F_X) (F_X \text{ é fechado em } I) (F_X \subset X) (\mu_1(X) - \frac{\varepsilon}{\alpha} < \mu_1(F_X))$ ($\alpha = \text{card } \mathcal{M}$). Multiplicando membro a membro a desigualdade anterior por $\mu_1([0, \ell_X]) = \ell_X$ ($\ell_X = \ell_X(\chi f)$; quando $\ell_X = 0$, considera-se a medida do intervalo degenerado $\{0\}$) e notando que os conjuntos $X \times [0, \ell_X]$ e $F_X \times [0, \ell_X] = G_X$ são mensuráveis, sendo G_X fechado, vem:

$$\ell_X \mu_1(X) - \frac{\varepsilon}{\alpha} \ell_X \leq \mu_2(G_X) \Rightarrow \sum_{X \in \mathcal{M}} \ell_X \mu_1(X) - \frac{\varepsilon}{\alpha} \sum_{X \in \mathcal{M}} \ell_X \leq \sum_{X \in \mathcal{M}} \mu_2(G_X).$$

Sendo $\ell_X \leq L$ ($L = \sup_{x \in I} \chi(x) \cdot f(x) > 0$), temos:

$$s(\chi f; \mathcal{M}) - \varepsilon L \leq \sum_{X \subset D} \mu_2(G_X) = \mu_2\left(\bigcup_{X \in \mathcal{M}} G_X\right) = \mu_2(G)^{(*)}, \text{ pois os } G_X \text{ são fe-}$$

chados, de interiores disjuntos cuja reunião G é também fechada ($\mathcal{M}$ é conjunto finito). Portanto, $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists G) (G \text{ é fechado}) (G \subset E)$
 $(E \supset \bigcup_{X \in \mathcal{M}} X \times [0, \ell_X] \supset \bigcup G_X = G): s(\chi f; \mathcal{M}) - \varepsilon L \leq \mu_2(G). \quad (2)$

Das relações (1) e (2) segue:

$$s_0 - \varepsilon < s(\chi f; \mathcal{M}) \leq \varepsilon L + \mu_2(G), \text{ ou seja, } (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}) (\exists G) (G \text{ é fechado em } I \times [0, L]) (G \subset E):$$

$$s_0 < (L+1)\varepsilon + \mu_2(G) \leq (L+1)\varepsilon + \mu_2(E).$$

Sendo $\varepsilon (\varepsilon \in \mathbb{R}_{++})$ arbitrário, temos $s_0 \leq \mu_2(E)$, onde

$$s_0 = \mathcal{L} \int_I \chi(x) \cdot f(x) dx.$$

De modo totalmente análogo, podemos mostrar que:

$$\mathcal{L} \int_I \chi(x) \cdot f(x) dx \geq \bar{\mu}_2(E), \text{ ou seja,}$$

$$\mathcal{L} \int_I \chi f \leq \mu_2(E) \leq \bar{\mu}_2(E) \leq \mathcal{L} \int_I \chi f.$$

Sendo porém $\chi(x) \cdot f(x)$ $\mathcal{L}$ -integrável em I , temos: $\mu_2(E) = \bar{\mu}_2(E)$.

Portanto, E é mensurável e ainda $\mathcal{L} \int_D f(x) dx = \mu_2(E)$ é igual à área do conjunto E .

Suponhamos agora que $f(x, y) \geq 0$ em D seja uma função definida, limitada e $\mathcal{L}$ -integrável em $I \subset \mathbb{R}^2$ (I intervalo compacto) ($D \subset I$) (D mensurável). Sendo $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq f(x, y) \text{ e } (x, y) \in D\}$. Seguindo um raciocínio análogo ao anterior, demonstra-se a mensurabilidade de E e chega-se à conclusão que:

$$\mathcal{L} \iint_D f(x, y) dx dy = \mu_3(E) \text{ e é igual ao volume do conjunto } E.$$

Finalmente, da Teoria da Integral de Lebesgue segue imediatamente que se $D (D \subset \mathbb{R}^3)$ é mensurável, então, vale a igualdade:

$$\mathcal{L} \iiint_D dx dy dz = \mu_3(D), \text{ sendo este valor igual ao volume do conjunto } D.$$

(*) Nas somatórias onde aparece $X \in \mathcal{M}$, escrevemos $X \subset D$, pois as outras parcelas, evidentemente, dão contribuição nula à somatória.

Sendo os conjuntos $\mathcal{I}$ -mensuráveis particulares conjuntos mensuráveis e as funções $\mathcal{R}$ -integráveis também $\mathcal{L}$ -integráveis, os resultados precedentes valem automaticamente para funções não negativas, definidas, limitadas e $\mathcal{R}$ -integráveis em conjuntos limitados $\mathcal{I}$ -mensuráveis.

* * *



CAPÍTULO V

SUPERFÍCIES NO $\mathbb{R}^3$

Definição: "Um conjunto S ($S \subset \mathbb{R}^3$ e $S \neq \emptyset$) chama-se superfície contínua ou simplesmente superfície, se e somente se existe uma aplicação contínua $x: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($D \subset \mathbb{R}^2$) (D é região limitada e fechada), tal que $x(D) = S$."

Admitindo que uma superfície S seja dada pela função $x(u)$ contínua em D , usaremos a notação $S: x(u), D$. Diremos então que $x(u)$ é uma representação contínua de S .

Exemplos:

1. $S: x(u) = (u_1, u_2, k)$, D é uma figura plana.
2. $S: x(u) = (u_1 + 2u_2, -u_1 + 3u_2 + 1, u_2 - u_1)$, D é uma figura plana.
3. $S: x(u) = (u_1 \cos u_2, u_1 \operatorname{senu}_2, k)$, $D = [0, 3] \times [0, 2\pi]$ é um círculo.
4. $S: x(u) = (u_1 \cos u_2, u_1 \operatorname{senu}_2, 2u_1)$, $D = [0, 3] \times [0, 2\pi]$ é uma superfície cônica limitada.
5. $S: x(u) = (a \cos u_2, a \operatorname{senu}_2, u_1)$ ($a > 0$), $D = [0, 4] \times [0, 2\pi]$ é uma superfície cilíndrica.
6. $S: x(u) = (a \cos u_1 \cos u_2, a \cos u_1 \operatorname{senu}_2, a \operatorname{senu}_1)$, $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$, ($a > 0$) é uma superfície esférica.
7. $S: x(u) = (u_1, u_2, \sqrt{a^2 - u_1^2 - u_2^2})$, $D = \overline{V(0; a)}$ ($a > 0$) é uma superfície esférica.
8. $S: x(u) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$, D é uma superfície genérica.

As aplicações correspondentes aos exemplos 1. e 3. são representações de u' a mesma superfície quando no exemplo 1. consideramos $D = \overline{V(0; 3)}$. O mesmo ocorre com os exemplos 6. e 7. quando no exemplo 6. tomamos $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$.



Considerando uma superfície $S : x(u)$, D , podemos efetuar uma rotação de coordenadas de um ângulo α em torno da origem do sistema do plano $u_1 u_2$, obtendo uma outra representação $x(v)$ correspondente à região fechada D_α do plano $v_1 v_2$. Para cada rotação α temos uma outra representação de S . Isto significa que se uma superfície possui uma representação contínua, ela terá uma infinidade delas.

Seja $S : x(u)$, D uma superfície contínua e suponhamos que $x(u)$ seja diferenciável sendo $dx(u) = x'(u)(h)$ contínua no ponto $u_0 \in D$. ($x'(u)$ é a aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ que a cada vetor $h \in \mathbb{R}^2$ associa a diferencial $dx(u)$). O ponto $P_0 \in S$ tal que $P_0(x_1(u_0), x_2(u_0), x_3(u_0))$ denomina-se ponto singular de $S : x(u)$, D se e só se $x'(u_0) = 0$ ($x'(u_0)$ é a aplicação nula); quando $x'(u_0) \neq 0$ dizemos que P_0 é ponto regular de $S : x(u)$, D .

Nos exemplos 3., 4. e 6. os pontos de coordenadas $(0,0,k)$, $(0,0,0)$ e $(0,0,\pm a)$ são pontos singulares das respectivas superfícies. Notemos que um ponto P_0 de S pode ser ponto singular ou não, conforme a representação da superfície. Por exemplo, sejam $x(u) = (a \cos u_1 \cos u_2, a \cos u_1 \sin u_2, a \sin u_1)$ com $a > 0$ e $D = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi]$ e $y(v) = (v_1, v_2, \sqrt{a^2 - v_1^2 - v_2^2})$, com $D_1 = \bar{V}(0; \frac{a\sqrt{3}}{2})$ duas representações de uma calota esférica (esfera) S . O ponto $P_0(0,0,a)$ será ponto singular ou ponto regular de S , conforme tomamos a 1ª ou 2ª representação de S . (*)

Sendo

$$J(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

o jacobiano da transformação linear $x'(u)$, o ponto P_0 de S será singular se e somente se $J(u_0)$ tem característica 1.

Definição: "Uma superfície $S : x(u)$, D é uma superfície regular de classe r ($r \in \mathbb{N}$) se e somente se

(*) Diremos, também, neste caso, que o ponto P_0 é ponto singular de S relativamente à representação $x(u)$. Quando P_0 é ponto singular de S para toda representação $x(u)$, diremos simplesmente que P_0 é ponto singular de S .



- a) existe $dx^i(u)$ e é contínua em D ($i = 1, 2, \dots, r$);
 b) $dx(u) \neq 0$ em D ." (**)

As superfícies regulares de classe $r \geq 1$ chamaremos simplesmente de superfícies regulares; estas são justamente aquelas que não possuem pontos singulares. Para ilustrar podemos considerar os exemplos 1., 2. e 5., bem como os outros exemplos correspondentes a domínios convenientes.

TRANSFORMAÇÕES REGULARES (DIFEOMORFISMOS)

Definição: "Uma aplicação bijetora $y : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ (B e D são regiões fechadas e limitadas) denomina-se transformação regular de B em D (ou difeomorfismo entre B e D) de classe $r \geq 1$, se e só se

- a) $y(v)$ é uma função de classe r ($r \in \mathbb{N}$) em B e
 b) $y'(v) \neq 0$ em B ."

Aqui também convencionaremos chamar uma transformação regular de classe $r \geq 1$ simplesmente de transformação regular. Notemos que sendo $y : B \rightarrow D$ uma transformação regular, então, para todo $v \in B$ ($y'(v) \neq 0$), a aplicação $y'(v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um isomorfismo. Além disso, existe a aplicação $y^{-1} : D \rightarrow B$, tal que $y^{-1}(u) = v$ tal que $u = y(v)$ e é tantas vezes continuamente diferenciável em D quanto for a classe da transformação dada.

Sendo ainda $[y^{-1}(u)]' \neq 0$ em D , $y^{-1} : D \rightarrow B$ também é uma transformação regular de mesma classe da transformação dada.

Destas considerações segue que $(y^{-1}(u))' = (y'(v))^{-1} =$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial v_2} & -\frac{\partial u_1}{\partial v_2} \\ -\frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial u_1}{\partial v_1} \end{pmatrix}$$

onde $\Delta = \det(J(v)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial v_1} & \frac{\partial u_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial u_2}{\partial v_2} \end{vmatrix} \neq 0$ em B . Usaremos também a nota-

ção $\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(v_1, v_2)}$ ao invés de Δ e chamamo-la de determinante da transformação.

(**) Se $S : x(u)$, D é uma superfície regular de classe r , dizemos que $x(u)$ é uma representação regular de S em D .



Proposição: "Se $x(u)$ é uma representação regular de classe r em D da superfície S e $y: B \rightarrow D$ tal que $y(v) = u$ é uma transformação regular de classe r , então $x(y(v)) = \vec{x}(v)$ é também uma representação regular de classe r em B da superfície S ."

A demonstração desta proposição é uma consequência direta dos resultados anteriores.

MODOS DE DAR UMA SUPERFÍCIE

1) Forma Paramétrica ou Vetorial

Dada uma superfície $S: x(u), D$, a função $\vec{x} = x(u)$ denomina-se uma equação ou representação paramétrica de S de parâmetro u e diz-se que a superfície é dada na forma paramétrica.

Notando que $x = x(u)$ é uma função vetorial, também se usam, neste caso, as denominações equação vetorial ou representação vetorial de S e diz-se que a superfície S é dada na forma vetorial.

2) Forma Catesiana Explícita

Uma função $x_3 = f(x_1, x_2)$ contínua em $D \subset \mathbb{R}^2$ (D é região fechada. Por brevidade consideraremos, salvo expressão em contrário, toda região fechada citada neste texto de região fechada e limitada) dá margem a uma superfície contínua.

De fato, considerando a função $x = x(u) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$, contínua em D , onde $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$ e $x_3 = f(x_1, x_2)$, ela é uma representação paramétrica de uma superfície S . Sendo $x_3 = f(x_1, x_2)$ uma função de classe r em D , evidentemente a superfície $S: x(u) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)), D$ é de classe r .

Assim, a função $x_3 = f(x_1, x_2)$ contínua em D denomina-se representação ou equação cartesiana explícita da superfície S .

Notemos ainda que se $x(u)$ é uma representação paramétrica da superfície regular S em D , então um ao menos dos determinantes

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}, \quad \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2)}, \quad \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u_1, u_2)}$$

é diferente de zero em D . Suponhamos, por exemplo, que o primeiro destes determinantes seja diferente de zero em $u_0 \in D$. Pelo Teorema das Funções Universas a função $(x_1, x_2) = F(u)$ (de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$) é um difeomorfismo nas vizinhanças de u_0 ; existe, pois, a função $u = F^{-1}(x_1, x_2) = (\varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2))$ de classe igual a de S em qualquer região fechada $B \subset V(F(u_0))$, sendo $V(F(u_0))$ uma vizinhança conveniente de $F(u_0)$.



Nestas condições, a composta $x(u) = x(F^{-1}(x_1, x_2))$ será uma representação regular de uma superfície $S^*(S^* \subset S)$ em B , podendo expressá-la na forma $x_3 = x_3(u) = x_3(F(x_1, x_2)) = f(x_1, x_2)$, isto é, na forma cartesiana explícita.

Usaremos a notação $S : f(x_1, x_2), D$ para dar uma superfície S na forma cartesiana explícita correspondente a D .

3) Forma Cartesiana Implícita

Seja a aplicação $F : U \rightarrow \mathbb{R} (U \subset \mathbb{R}^3)$ (U é região aberta) e admitamos que a equação $F(x) = 0$ ($x = (x_1, x_2, x_3) \in U$) defina implicitamente uma das variáveis x_i ($i = 1, 2, 3$) como função das outras duas e que esta função seja contínua numa região fechada D ($D \subset \mathbb{R}^2$). Então, pelo que vimos no item anterior, esta função constitui uma representação de uma superfície contínua correspondente a D e indicamos pela notação $S : F(x_1, x_2, x_3) = 0, D$ ($D \subset \mathbb{R}^2$). A equação $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ chamamos de representação ou equação cartesiana implícita da superfície. Dizemos também, neste caso que a superfície é dada na forma cartesiana implícita. Se a aplicação $F : U \rightarrow \mathbb{R} (U \subset \mathbb{R}^3)$ é de classe r , tal que $F'(x) \neq 0$ em U e $F(x_0) = 0$ ($x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in U$), então ao menos uma das derivadas parciais F'_{x_1} , F'_{x_2} ou F'_{x_3} não se anula nas vizinhanças de x_0 ; digamos seja $F'_{x_3} \neq 0$, nas vizinhanças de x_0 . O teorema das funções implícitas garante a existência de uma função $x_3 = f(x_1, x_2)$ definida implicitamente pela equação $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ nas vizinhanças de (x_{01}, x_{02}) . Portanto, em qualquer domínio fechado B contido numa vizinhança conveniente de (x_{01}, x_{02}) a equação $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ é uma representação regular implícita de uma superfície S .

CURVAS NO $\mathbb{R}^3$

Definição: "Um conjunto Γ ($\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ e $\Gamma \neq \emptyset$) chama-se curva contínua ou simplesmente curva, se e somente se, existe uma aplicação contínua $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$) (I intervalo compacto) tal que $x(I) = \Gamma$."

Supondo que a curva contínua Γ seja dada pela função $x(t)$ contínua em I , usaremos a notação $\Gamma : x(t), I$. Diremos então que $x(t)$ é uma representação contínua de Γ .

Exemplos:

1. $\Gamma : x(t) = (2t, t-3, -1), I = [1, 4]$ é um segmento de reta.
2. $\Gamma : x(t) = (3 \cos t, 2 \sin t - 1, 0), I = [0, 2\pi]$ é uma elipse.

(x) $F'(x) = 0$ é aplicação linear nula.



3. $\Gamma: x(t) = (t+3, 2t-1, 3-t), I = [a, b]$ é um segmento de reta.
4. $\Gamma: x(t) = (a \cos t \cos 3t, a \sin t \cos 3t, 1), I = [0, \frac{\pi}{3}]$ é um arco de trevo de 3 folhas.
5. $\Gamma: x(t) = (1 + 2 \sec t, \operatorname{tg} t - 2, 2), I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$ é um arco de hipérbole.
6. $\Gamma: x(t) = (1 + 2 \operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t - 2, 2), I = [a, b]$ é um arco de hipérbole.
7. $\Gamma: x(t) = (3 \cos 3t, 2 \sin 3t - 1, 0), I = [0, \frac{2\pi}{3}]$ é um arco de elipse.
8. $\Gamma: x(t) = (t, \sqrt{4-t^2}, 0), I = [-2, 2]$ é uma semi-circunferência.
9. $\Gamma: x(t) = (a \sqrt{3} \cos t, a \cos t, 2a \sin t) (a > 0), I = [0, \frac{\pi}{2}]$ é um arco de circunferência.
10. $\Gamma: x(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, -2), I = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ é um arco de ciclóide.
11. $\Gamma: x(t) = (t, t^2, t^3), I = [a, b]$ é uma curva.
12. $\Gamma: x(t) = (2, 1, 3), I = [a, b]$ é uma curva.

Como no caso das superfícies, as curvas também possuem infinitas representações. Para ver, basta considerar todas as translações do intervalo I da representação de uma curva $\Gamma: x(t), I$, obtendo para cada translação um intervalo J e uma função $y(\tilde{t})$ tal que $y(\tilde{t})$ em J é uma outra representação da curva dada. Havendo infinitas translações, haverá também uma infinidade de representações diferentes para a curva Γ .

A representação do exemplo 5. correspondente ao intervalo $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ e a do exemplo 6. correspondente ao intervalo $[0, \log(1 + \sqrt{2})]$ são relativas à mesma curva.

As representações dos exemplos 2. e 7. correspondem à mesma curva.

Consideremos uma curva $\Gamma: x(t), I$ e suponhamos que a função $x(t)$ seja derivável e tenha derivada contínua no ponto $t_0 \in I$. O ponto P_0 da curva Γ tal que $P_0(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0))$ ($t_0 \in I$) chama-se ponto singular de Γ , se e só se $x'(t_0) = 0$ (vetor nulo no $\mathbb{R}^3$). Também dizemos, neste caso que P_0 é um ponto singular de Γ relativamente à representação $x(t)$. Quando um ponto de Γ é ponto singular da curva qualquer que seja sua representação, dizemos simplesmente que o mesmo é ponto singular de Γ . Quando $x'(t_0) \neq 0$, o ponto $P_0 \in \Gamma$ denomina-se ponto regular de Γ . O ponto $(0, \pi, -2)$ da curva do exemplo 10. é um ponto singular de Γ ; o único ponto $(2, 1, 3)$ da curva do exemplo 12. é ponto singular de Γ .



Definição: "Uma curva $\Gamma: x(t), I$ chama-se curva regular de classe $r (r \in \mathbb{N})$, se e somente se

- a) existe $x^{(i)}(t)$ e é contínua em $I (i=1,2,\dots,r)$;
- b) $x'(t) \neq 0$ em I ."

Se $\Gamma: x(t), I$ é uma curva regular de classe r , então dizemos que $x(t)$ é uma representação regular de classe r da curva Γ em I .

Convencionaremos chamar as curvas regulares de classe $r \geq 1$ simplesmente de curvas regulares. Assim temos, portanto, que todos os pontos de uma curva regular são pontos regulares. A curva do exemplo 10. correspondente ao intervalo $I = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ é curva regular de classe arbitrária. Todos os outros exemplos constituem curvas regulares correspondentes a intervalos convenientes, com exceção do exemplo 12. O exemplo 8. não representa curva regular; usando porém a mesma representação restrita a um intervalo $I = [a, b] ([a, b] \subset [-2, 2])$, obtemos uma nova curva regular.

Transformações Regulares:

Definição: "Uma sobrejeção $y: J \rightarrow I (I, J \subset \mathbb{R})$ (I e J são intervalos compactos) denomina-se transformação regular de J em I de classe $r (r \in \mathbb{N})$, se e somente se

- a) $y(\tau)$ é de classe r em J ;
- b) $y'(\tau) \neq 0$ em J ."

Quando uma transformação regular é de classe $r \geq 1$, diremos simplesmente que se trata de uma transformação ou mudança de variável regular.

Vemos pela definição acima que $y'(\tau)$ é contínua e diferente de zero em J . Daí, o Teorema das Funções Inversas garante que a função inversa $\tilde{t} = y^{-1}(t)$ (que certamente existe) é diferenciável em I . Além disso, sendo $y(\tau)$ de classe r em J , a função $y^{-1}(t)$ será também de classe r em I . Ainda o Teorema das Funções Inversas garante:

$$(y^{-1}(t))' = (y'(\tau))^{-1} = \frac{1}{y'(\tau)}$$

Quando $y'(\tau) > 0$, $y(\tau)$ e $y^{-1}(t)$ são estritamente crescentes em J e I respectivamente; no caso de $y'(\tau) < 0$, as duas funções acima se - rão decrescentes em seus respectivos intervalos. Consequentemente, a aplicação $y: J \rightarrow I$ é uma bijeção.

Proposição: "Se $x(t)$ é uma representação regular de classe r da

curva Γ em I ($r \in \mathbb{N}$) e se $y: J \rightarrow I$ tal que $t = y(\tilde{t})$ é uma transformação regular de J em I de classe r , então $x(y(\tilde{t}))$ é uma outra representação regular de classe r da curva Γ em J ."

Usando os resultados anteriores, facilmente se demonstra a proposição enunciada.

Certas curvas podem ter representações regulares e não regulares. A função do exemplo 8. é uma representação não regular da curva Γ , ao passo que $y(\tilde{t}) = (2 \sin \tilde{t}, 2 \cos \tilde{t}, 0)$ em $J = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ constitui uma representação regular da mesma curva.

MODOS DE DAR UMA CURVA

1) Forma Paramétrica ou Vetorial

Dizemos que uma curva Γ é dada na forma paramétrica ou vetorial quando é da forma $\Gamma: x(t), I$.

A função $x = x(t)$ denomina-se equação paramétrica ou vetorial de Γ .

2) Forma Cartesiana Explícita ou Forma Reduzida:

Duas funções $x_2 = f(x_1)$ e $x_3 = g(x_1)$ contínuas no intervalo compacto I ($I \subset \mathbb{R}$) dão origem a uma curva Γ . De fato, fazendo $x(t) = (t, f(t), g(t))$ onde $x_1 = t$, $x_2 = f(t)$ e $x_3 = g(t)$, temos que a função $x(t)$ é contínua em I e, portanto, constitui uma representação contínua de uma curva Γ . Sendo as funções $x_2 = f(x_1)$ e $x_3 = g(x_1)$ de classe r ($r \in \mathbb{N}$) em I , facilmente vemos que a curva $\Gamma: (t, f(t), g(t)), I$ será uma curva regular de classe r . Assim, as equações $x_2 = f(x_1)$ e $x_3 = g(x_1)$ denominamos equações cartesianas explícitas ou reduzidas de Γ e indicamos por

$$\Gamma: \begin{cases} x_2 = f(x_1) \\ x_3 = g(x_1) \end{cases}, I$$

Uma curva Γ dada nesta forma chamamos de forma cartesiana explícita ou reduzida de Γ .

Seja agora $\Gamma: x(t), I$ uma curva regular de classe r .

Sendo $x'(t) \neq 0$ em I , então ao menos uma das derivadas $\frac{dx_i}{dt}$ ($i=1, 2, 3$) é diferente de zero em cada ponto de I . Suponhamos, por exemplo que $\frac{dx_1}{dt}$ seja diferente de zero em $t_0 \in I$.

Pelo Teorema das Funções Inversas, nas vizinhanças de t_0 a função

$x_1 = \varphi(t)$ possui a função inversa $t = \varphi^{-1}(x_1)$ que é de classe r em todo intervalo fechado $J \subset V(\varphi(t_0))$, onde $V(\varphi(t_0))$ é uma vizinhança conveniente de $\varphi(t_0)$. Consequentemente, as funções $x_2 = x_2(\varphi^{-1}(x_1)) = f(x_1)$ e $x_3 = x_3(\varphi^{-1}(x_1)) = g(x_1)$ são de classe r em J e assim dão origem às equações reduzidas de uma curva regular Γ^* de classe r ($\Gamma^* \subset \Gamma$) em J que, portanto, pode ser representado na forma cartesiana explícita:

$$\Gamma^* : \begin{cases} x_2 = f(x_1) \\ x_3 = g(x_1) \end{cases}, J.$$

3) Forma Cartesiana Implícita:

Consideremos duas funções contínuas $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: U \rightarrow \mathbb{R}$ (U é região aberta) ($U \subset \mathbb{R}^3$). Daí podemos construir a função $H: U \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $H(x) = (F(x), G(x))$ ($x \in U$), que certamente é ainda uma função contínua.

Admitamos que a equação $H(x) = 0$ (vetor nulo no $\mathbb{R}^2$) defina implicitamente duas das variáveis x_i ($i=1,2,3$) como função da terceira, por exemplo (x_2, x_3) em função de x_1 e ainda, que esta função seja contínua num intervalo fechado I_1 ($I_1 \subset \mathbb{R}$). Seja $(x_2, x_3) = K(x_1) = (f(x_1), g(x_1))$ esta função que por ser contínua em I_1 , fornece as duas funções reais $x_2 = f(x_1)$ e $x_3 = g(x_1)$ contínuas em I_1 que como nós vimos no item anterior é uma representação reduzida de uma curva Γ em I_1 . Como as funções desta representação de Γ são determinadas pela equação $(F(x), G(x)) = 0$, Γ poderá ser indicada pela notação

$$\Gamma : \begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ G(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}, I_1.$$

Uma curva Γ dada nesta forma denomina-se forma cartesiana implícita da mesma, sendo que as equações $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ e $G(x_1, x_2, x_3) = 0$ denominam-se equações cartesianas implícitas de Γ .

Quando a aplicação $H: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($U \subset \mathbb{R}^3$) é de classe r ($r \in \mathbb{N}$) tal que $H(x_0) = 0$ e $H'(x_0) \neq 0$ (aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$) ($x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in U$), então o Teorema das Funções Implícitas garante que a equação $H(x) = 0$ define implicitamente uma função de duas das variáveis x_i ($i=1,2,3$) em função da terceira, de classe r nas vizinhanças do ponto x_{0i} de índice correspondente à terceira variável. Por exemplo, se esta função é da forma $(x_2, x_3) = K(x_1) = (f(x_1), g(x_1))$, então ela será de classe r nas vizinhanças de x_{01} . Assim, em qualquer intervalo compac-

to I_1 contido numa vizinhança conveniente de x_{01} ficam determinadas duas funções $x_2 = f(x_1)$ e $x_3 = g(x_1)$ de classe r e portanto a curva

$$\Gamma : \begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ G(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}, I_1$$

será também de classe r .

Quando uma curva Γ é dada por suas equações cartesianas implícitas $F(x) = 0$ e $G(x) = 0$ correspondentes a um intervalo I_i ($i=1, 2$ ou 3), geometricamente podemos interpretá-la como um subconjunto de $S_1 \cap S_2$, onde S_1 e S_2 são as superfícies tendo por representações as equações $F(x) = 0$ e $G(x) = 0$ correspondentes a um domínio fechado $D \subset \mathbb{R}^2$, respectivamente.

CAPÍTULO VI

COMPRIMENTO DE UMA CURVA

Seja $\Gamma: x(t), I$ uma curva contínua, onde $I = [a, b] : (\forall \Delta \in \mathcal{D}_I)$
 $(\exists \ell_\Delta \in \mathbb{R}_+) : \ell_\Delta = \sum_{i=1}^n \|x(t_i) - x(t_{i-1})\|$. $(\Delta = \{t_i \in I \ (i = 0, 1, 2, \dots, n)$
 $(a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = b)\}$). Consideremos o conjunto $\mathcal{L}_I =$
 $= \{ \ell_\Delta \in \mathbb{R} \mid \Delta \in \mathcal{D}_I \}$.

Definição: "Uma curva contínua $\Gamma: x(t)$ em I é retificável em I se e só se o conjunto linear $\mathcal{L}_I$ é limitado."

Nem toda curva contínua é retificável. De fato, consideremos o exemplo:

$$\Gamma: x(t), I = [0, 2] \text{ tal que } x_1(t) = t, \quad x_2(t) = \begin{cases} t \operatorname{sen} \frac{\pi}{t}, & \text{se } t \neq 0 \\ 0, & \text{se } t = 0 \end{cases} \text{ e } x_3(t) = 0$$

Evidentemente Γ , é uma curva contínua em I . Mostremos que Γ não é retificável. De fato, seja $\Delta_n \in \mathcal{D}_I : \Delta_n = \{ 0, \frac{2}{2n+1}, \dots, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 2 \}$; daí vem:

$$\ell_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^n \|x(t_i) - x(t_{i-1})\| > 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2i+1} > \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+1} . \quad \text{Mas a}$$

série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ sendo divergente, vê-se facilmente que o conjunto $\mathcal{L}_I$ é não limitado. Assim, Γ não é curva retificável.

Consideremos agora uma curva $\Gamma: x(t), I$ (uma curva retificável). Se o conjunto $\mathcal{L}$ limitado, então existe e é único o número real $L_I = \sup \mathcal{L}_I$. Não havendo ambiguidade quanto ao intervalo tomado escreveremos L ao invés de L_I . Notemos ainda que sendo o número 0 um limite inferior de $\mathcal{L}_I$, temos $L_I \geq 0$.

Proposição: "Toda curva regular é retificável."

Demonstração:

Seja $\Gamma: x(t), I$ uma curva regular de classe r . Então $(\forall \Delta \in \mathcal{D}_I)$:

$$\ell_{\Delta} = \sum_{i=1}^n \|x(t_i) - x(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^3 (x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}))^2}$$

Mas, se $x = x(t)$ é derivável em I , então $x_j = x_j(t)$ ($j=1,2,3$) são deriváveis e, portanto, contínuas em I . Assim as três funções acima são deriváveis e contínuas em $[t_{i-1}, t_i]$ ($i=1,2,\dots,n$). Portanto,

$(\exists \xi_{ji} \in]t_{i-1}, t_i[)$ ($j=1,2,3$ e $i=1,2,\dots,n$): $x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1}) \cdot x'_j(\xi_{ji})$. Notando que as funções $|x'_j(t)|$ ($j=1,2,3$) são contínuas em I , temos para todo $\Delta \in \mathcal{D}_I$:

$$\ell_{\Delta} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^3 x_j'^2(\xi_{ji})(t_i - t_{i-1})} \leq M \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = M(b-a),$$

onde $M = \sqrt{\sum_{j=1}^3 M_j^2}$ ($M_j = \max_{t \in I} |x'_j(t)|$) ($j=1,2,3$)

Isto significa que $\Gamma: x(t)$ em I é retificável.

Definição: "Chama-se comprimento de arco ou simplesmente comprimento de uma curva retificável $\Gamma: x(t), I$ ao número real positivo $L_I = \sup \mathcal{L}_I$."

Propriedades do Comprimento de Arco:

Convencionemos o seguinte: sendo $\Gamma: x(t), I$ uma curva e $J \subset I$ (J intervalo compacto), a curva determinada pela restrição de $x(t)$ a J será indicada por $\Gamma: x(t), J$. Para a curva Γ valem as seguintes propriedades:

1. $(\forall J \subset I)$ (J é intervalo compacto) ($L_J \leq L_I$)
2. $(\forall \Delta, \Delta' \in \mathcal{D}_I)$ ($\Delta \subset \Delta' \Rightarrow \ell_{\Delta} \leq \ell_{\Delta'}$)
3. $(\forall I_i \subset I)$ ($i=1,2$) (I_i é intervalo compacto) ($I = I_1 \cup I_2$ e $I_1 \cap I_2 = \{c\}$): $L_I = L_{I_1} + L_{I_2}$
4. Sendo $s: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $s(t) = \begin{cases} L_{I_t}, & \text{se } I_t = [a, t], \\ 0, & \text{se } t = a \end{cases}$ ($t > a$)
então, $s(t) \uparrow$ em $I = [a, b]$.

Demonstrações

1. $(\forall \Delta_J \in \mathcal{D}_J)(\exists \Delta_I \in \mathcal{D}_I)$ ($\Delta_J \subset \Delta_I \Rightarrow \ell_{\Delta_J} \leq \ell_{\Delta_I} \leq L_I \Rightarrow L_J \leq L_I$)
2. Se $\Delta = \Delta'$, então $\ell_{\Delta} = \ell_{\Delta'}$; se $\Delta' = \Delta \cup \{c\}$, então $(\exists i \in \mathbb{N}_n)$
 $(t_{i-1} < c < t_i \Rightarrow \ell_{\Delta} =$
 $= \sum_{k=1}^n \|x(t_k) - x(t_{k-1})\| + \|x(t_i) - x(t_{i-1})\| \leq \sum_{k=1}^n \|x(t_k) - x(t_{k-1})\| +$
 $+ \|x(t_i) - c\| + \|c - x(t_{i-1})\| = \ell_{\Delta'}, \Rightarrow \ell_{\Delta} \leq \ell_{\Delta'}).$

Por indução finita sobre m demonstra-se: se $\Delta' = \Delta \cup \{c_1, \dots, c_m\}$, então $\ell_{\Delta} \leq \ell_{\Delta'}$.

$$3. (\forall \Delta_{I_i} \in \mathcal{D}_{I_i}) (i=1,2) \quad (\exists \Delta_I = \Delta_{I_1} \cup \Delta_{I_2} \in \mathcal{D}_I) \quad (\ell_{\Delta_{I_1}} + \ell_{\Delta_{I_2}} = \ell_{\Delta_I} \leq L_I \Rightarrow L_{I_1} + L_{I_2} \leq L_I \quad (*). \text{ Por outro lado, } (\forall \Delta \in \mathcal{D}_I) \\ (\exists \Delta_I = \Delta \cup \{c\}) \quad (\exists \Delta_{I_i}) (\Delta_{I_i} = I_i \cap \Delta_I) (i=1,2) \\ (\ell_{\Delta} \leq \ell_{\Delta_I} = \ell_{\Delta_{I_1}} + \ell_{\Delta_{I_2}} \leq L_{I_1} + L_{I_2} \Rightarrow L_I \leq L_{I_1} + L_{I_2} \quad (**))$$

De (*) e (**) segue que $L_I = L_{I_1} + L_{I_2}$.

$$4. (\forall t_1, t_2 \in I) (a < t_1 < t_2 \Rightarrow I_{t_1} \subset I_{t_2} \Rightarrow L_{t_1} \leq L_{t_2} \\ \Rightarrow s(t_1) \leq s(t_2) \text{ e } (\forall t \in I) (t > a \Rightarrow 0 = s(a) \leq s(t)).$$

Portanto, $s(t) \uparrow$ em I .

Corolário: " $\Gamma: x(t)$ é retificável $\Rightarrow \lim_{\Delta \in \mathcal{D}_I} \ell_{\Delta} = L$ "

Demonstração:

Sendo ℓ_{Δ} limitada e isotônica no conjunto $\mathcal{D}_I$ orientado por $\succ$ então $(\exists \lim_{\Delta \in \mathcal{D}_I} \ell_{\Delta})$ e este é igual a $\sup_{\Delta \in \mathcal{D}_I} \ell_{\Delta}$. Consequentemente $\lim_{\Delta \in \mathcal{D}_I} \ell_{\Delta} = L$.

Teorema: "Se $\Gamma: x(t), I = [a, b]$ é regular de classe r ($r \in \mathbb{N}$), então $s(t) = \int_a^t \|x'(\lambda)\| d\lambda$ em I ".

Demonstração:

Se $t = a$, então $s(a) = 0 = \int_a^a \|x'(\lambda)\| d\lambda$.

Se $t > a$, então $(\exists I_{nt} = [a, t])$.

$(\forall \Delta_{I_t} \in \mathcal{D}_{I_t}): \ell_{\Delta_{I_t}} = \sum_{i=1}^n \|x(\lambda_i) - x(\lambda_{i-1})\|$. Usando o Teorema do valor médio para as funções $x_j(\lambda)$ ($j=1,2,3$) em cada um dos intervalos $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ ($i=1,2,\dots,n$), vem:

$$(\exists \bar{\xi}_{ji} \in]\lambda_{i-1}, \lambda_i[) (\ell_{\Delta_{I_t}} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{j=1}^3 x_j'^2(\bar{\xi}_{ji})} h_i) \\ (h_i = \lambda_i - \lambda_{i-1} > 0)$$

Consideremos agora a função $\|x'(\lambda)\| = [x_1'^2(\lambda) + x_2'^2(\lambda) + x_3'^2(\lambda)]^{1/2}$, que por ser contínua em $I_t = [a, t]$ é $\mathcal{R}$ -integrável em I_t .

Vamos introduzir agora um conjunto $\dot{\mathcal{D}}_{I_t}$ de divisões generalizadas de I_t , definido da seguinte maneira: $\Delta_{I_t} \in \dot{\mathcal{D}}_{I_t} \iff \Delta_{I_t} = \Delta_{I_t} \cup \{ \xi_{ji} \in]\lambda_{i-1}, \lambda_i[\mid j=1,2,3 \text{ e } i=1,2,\dots,n \}$, onde $\Delta_{I_t} \in \mathcal{D}_{I_t}$. (+)

(*) As divisões Δ_{I_t} e Δ_{I_t} chamaremos de divisões correspondentes.

Seja $\succsim$ uma relação de ordem sobre $\dot{\mathcal{D}}_{I_t}$ assim definida:

$(\forall \Delta_{I_t}, \Delta_{I_t}^* \in \dot{\mathcal{D}}_{I_t}) (\Delta_{I_t}^* \succsim \Delta_{I_t} \iff \Delta_{I_t}^* \succ \Delta_{I_t})$. Vemos facilmente que o conjunto $\dot{\mathcal{D}}_{I_t}$ é um conjunto orientado por $\succsim$. Sendo $s(\Delta_{I_t}; \parallel)$ e $S(\Delta_{I_t}; \parallel)$ as somas inferior e superior de $\|x'(t)\|$ relativas à divisão Δ_{I_t} ($\Delta_{I_t} \in \dot{\mathcal{D}}_{I_t}$) e $\mathcal{G}_\xi(\Delta_{I_t}; \parallel) = \sum_{i=1}^n [x_1'^2(\xi_{1i}) + x_2'^2(\xi_{2i}) + x_3'^2(\xi_{3i})]^{\frac{1}{2}} (t_i - t_{i-1})$.

Para toda divisão Δ_{I_t} temos $s(\Delta_{I_t}; \parallel) \leq \mathcal{G}_\xi(\Delta_{I_t}; \parallel) \leq S(\Delta_{I_t}; \parallel)$. Das hipóteses estabelecidas, bem como da Teoria dos Limites de Moore-Smith segue imediatamente que existe o limite $\lim_{\Delta_{I_t} \in \dot{\mathcal{D}}_{I_t}} \mathcal{G}_\xi(\Delta_{I_t}; \parallel)$ e este é igual à integral $\int_a^t \|x'(\lambda)\| d\lambda$.

Notando ainda que este limite independe dos pontos ξ_{ji} , bem como $(\forall \Delta_{I_t} \in \dot{\mathcal{D}}_{I_t}) \ell_{\Delta_{I_t}} = \mathcal{G}_\xi(\Delta_{I_t}; \parallel)$ e ainda $\lim_{\Delta_{I_t} \in \dot{\mathcal{D}}_{I_t}} \ell_{\Delta_{I_t}} = s(t)$, deduzimos finalmente que $\lim_{\Delta_{I_t} \in \dot{\mathcal{D}}_{I_t}} \mathcal{G}_\xi(\Delta_{I_t}; \parallel) = s(t)$, ou seja, $s(t) = \int_a^t \|x'(\lambda)\| d\lambda \quad (t \in I = [a, b])$.

Corolário I: "Se $\Gamma: x(t)$, I é uma curva regular de classe r , então $L_I = s(b) = \int_a^b \|x'(t)\| dt$."

Corolário II: "Se $\Gamma: x(t)$, I é uma curva regular de classe r , então

a) $s(t)$ é derivável em I , $\frac{ds}{dt} = \|x'(t)\| > 0$ e $s = s(t)^\uparrow$ (estritamente em I).

b) $s(t)$ é de classe r em I ;

c) existe a função inversa: $t = s^{-1}(s)$ e é de classe r em $s(I)$."

Corolário III: "Se $\Gamma: x(t)$, I é uma curva regular de classe r , então $y(s) = x(s^{-1}(s))$ é uma representação regular de classe r em $s(I)$."(*)

Teorema: "Se $\Gamma: x(t)$, I é uma curva regular de classe r e sendo P e Q pontos de Γ tais que $P(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ e $Q(x_1(t + \Delta t), x_2(t + \Delta t), x_3(t + \Delta t))$ ($t, t + \Delta t \in I$) ($\Delta t \neq 0$), então existe o limite

$$\lim_{PQ \rightarrow O} \frac{\overline{PQ}}{\widehat{PQ}} \text{ e é igual a } 1."$$

A demonstração deste teorema podemos fazer facilmente, utilizando os resultados anteriores.

(*) A representação $y(s)$ correspondente ao intervalo $s(I)$ denominaremos de representação natural da curva Γ .

Teorema: "Se $\Gamma: x(t)$, I é uma curva regular e $t = \varphi(\tau)$ é uma transformação regular de variável de J em I então $L = \int_I \|x'(t)\| dt = \int_J \|x'(\varphi(\tau))\| d\tau$."

Demonstração:

Seja $I = [a, b]$ e $J = [\alpha, \beta]$. Sabemos que $\frac{dt}{d\tau} \neq 0$ em J . Portanto se $\frac{dt}{d\tau} > 0$, então $L = \int_a^b \|x'(t)\| dt = \int_\alpha^\beta \left\| \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right\| \varphi'(\tau) d\tau = \int_\alpha^\beta \|x'(\varphi(\tau))\| d\tau$ e se $\frac{dt}{d\tau} < 0$, então $L = \int_a^b \|x'(t)\| dt = \int_\beta^\alpha \left\| \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right\| \varphi'(\tau) d\tau = - \int_\alpha^\beta \|x'(\varphi(\tau))\| d\tau = \int_\beta^\alpha \|x'(\varphi(\tau))\| d\tau$

Vimos assim que o comprimento de uma curva regular é um invariante para qualquer mudança regular de variáveis.

CAPÍTULO VII

a) O PARADOXO DE SCHWARZ

Pelo que vimos no capítulo V há muitas analogias entre as definições dadas para curvas e superfícies, as quais persistiam ainda ao analisarmos as diversas formas em que podem ser apresentadas, principalmente quando consideramos curvas e superfícies regulares. Tendo visto a definição de comprimento de uma curva retificável, a primeira idéia que nos aparece para definir a área de uma superfície S é a seguinte: Consideremos uma superfície poliédrica (poliedral) inscrita em S . Como toda poliedral se decompõe em polígonos e estes por sua vez em triângulos pelo que vimos no Capítulo I, podemos determinar a medida de cada um destes triângulos e chamar de medida da poliedral como sendo a soma das medidas de cada um dos triângulos em que a mesma se decompõe. Levando em consideração a definição de área de conjuntos $\mathcal{L}$ -mensuráveis dada no Capítulo IV, a medida da poliedral numa certa unidade escolhida arbitrariamente será a área da mesma. Poderíamos, então, chamar de área da superfície S o extremo superior do conjunto das áreas de todas as poliedrais inscritas em S , caso este extremo fosse finito. Entretanto, se aceitássemos esta definição de área de uma superfície, isso nos levará a valores de áreas de certas superfícies que seriam diferentes das que resultam da definição de área vista na Geometria Elementar para tais superfícies. Para outras superfícies, mesmo no caso de superfícies limitadas, a área poderia não existir (o supremo do conjunto das áreas das poliedrais inscritas em S poderá ser $+\infty$). Tal situação pode ocorrer em casos das mais simples, inclusive com superfícies regulares. Para ilustrar o que dissemos, vejamos o célebre Exemplo de Schwarz:

Consideremos a superfície cilíndrica $S : x(u) = (\cos u_1, \sin u_1, u_2)$, $D = [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Da Geometria Elementar sabemos que a área de S é igual a 2π unidades de área.

Para cada número $n (n \in \mathbb{N}) (n > 1)$ podemos determinar uma divisão do intervalo $[0,1]$ em intervalos parciais de amplitudes iguais correspondente à rede $\Delta = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Para cada valor $u_2 = \frac{i}{n} (i=0,1,\dots,n)$ o plano de equação $x_3 = u_2$ intercepta S segundo uma circunferência de raio 1.

Os valores de $i=0$ e $i=n$ correspondem às circunferências das bases inferior e superior do cilindro, respectivamente. Chamaremos de circunferências consecutivas as que se situam em planos de equações $x_3 = \frac{i}{n}$ com valores de i consecutivos.

Temos então $n+1$ circunferências de raios medindo uma unidade de comprimento. Dividamos cada uma dessas circunferências em m ($m \in \mathbb{N}) (m \geq 2)$ arcos iguais de tal modo que toda vertical traçada por um ponto de divisão de uma das circunferências intercepte a circunferência consecutiva ($i=0,1,\dots,n-1$) no ponto médio de um de seus arcos parciais. Unindo agora cada ponto de divisão com os dois pontos mais próximos da mesma circunferência e ainda com os dois mais próximos sobre a circunferência consecutiva, obtemos uma poliedral de $2mn$ faces triangulares iguais inscrita em S . A área de cada face será igual a $\frac{bh}{2}$, onde $b = 2 \sin \frac{\pi}{m}$ e $h = \sqrt{\frac{1}{n^2} + (1 - \cos \frac{\pi}{m})^2}$. Designemos a área total da poliedral por $A(m,n)$, pois a mesma é função de m e n . Assim, $A(m,n) = 2mn \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{1}{n^2} + (1 - \cos \frac{\pi}{m})^2} = 2m \sin \frac{\pi}{m} \sqrt{1 + 4n^2 \sin^4 \frac{\pi}{2m}}$.

Fixando os valores de m ou n ou então impondo alguma relação que ligue as variáveis entre si, a sequência dupla $A(m,n)$ se transforma numa sucessão simples e representa a sucessão de uma família de poliedrais inscritas em S cujas faces variam de tal modo que suas áreas tendem a zero quando m ou n tendem a $+\infty$. Vejamos o que ocorre com a função $A(m,n)$ quando as variáveis (ou pelo menos uma delas) tendem a $+\infty$. Consideremos os seguintes casos particulares:

Para $n = m^2$ temos: $\lim_{m \rightarrow +\infty} A(m,n) = \lim_{m \rightarrow +\infty} A(m,m^2) = 2\pi \sqrt{1 + \frac{\pi^4}{4}}$; para $m = n$, $A(m,n) \rightarrow 2\pi$; para $n = m$, $A(m,n) \rightarrow +\infty$; para m fixo $A(m,n) \rightarrow +\infty$ e para n fixo, $A(m,n) \rightarrow 2\pi$.

Considerando m ou n não necessariamente naturais, para $n = \frac{1}{\pi^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 - 4}$, onde a é um número real ($a \geq 2\pi$), temos que $A(m,n) \rightarrow a$.

Analisando os resultados precedentes, vemos de um lado que a área de uma superfície não pode ser definida como o supremo do conjunto das áreas de todas as poliedrais nela inscritas (analogamente à definição do comprimento de uma curva retificável), pois isto nos levará a resultados que estariam em conflito com os que conhecemos da Geometria Elementar. Notemos que isto pode ocorrer mesmo com superfícies regulares como é o caso da superfície cilíndrica vista no exemplo de

Schwarz. Por outro lado, vimos também que a condição de que os diâmetros das faces de uma família de poliedrais inscritas na superfície tendam todos a zero não é suficiente para que a sucessão das áreas correspondente forme um conjunto limitado. Este fato podemos apreciar no exemplo de Schwarz quando fizemos $n = m^3$, tendo daí resultado: $A(m, n) \rightarrow +\infty$.

Notemos que no caso das curvas retificáveis, a toda sequência de poligonais tais que os diâmetros de seus lados tendam a zero, corresponde uma sucessão de comprimentos formando um conjunto limitado.

Estas considerações nos mostram que o comportamento das superfícies no que se refere a definição de sua área é diferente que o das curvas, no que tange a definição do seu comprimento.

Com o intuito de restabelecer as analogias entre curvas e superfícies também no que toca as definições de seus comprimentos e áreas, respectivamente, procuraremos dar uma definição de área para superfícies regulares e depois apresentar uma definição semelhante para curvas regulares. Vejamos então o caso da

b) ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE REGULAR

Seja $S: x(u), D \subset \mathbb{R}^2$ uma superfície regular de classe r ($r \in \mathbb{N}$) sendo $x(u)$ e $x(u + \Delta u)$ dois pontos de S , temos evidentemente que $x(u + \Delta u) - x(u) = dx(u) + \vec{y}$, onde $\vec{y}$ é um vetor no $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \frac{\vec{y}}{\|\Delta u\|} = 0$$

Isto significa que $\Delta x(u) = x(u + \Delta u) - x(u) = \frac{\partial x}{\partial u_1} \Delta u_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} \Delta u_2 + \vec{y}$, onde $u = (u_1, u_2)$.

Facilmente se mostra que a distância do ponto $x(u + \Delta u)$ ao plano tangente a S em $x(u)$ é $d = |\Delta x(u) \times \vec{f}(u)|$, onde

$$\vec{f}(u) = \frac{\frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\|}$$

é o vetor normal a S em $x(u)$.

$$\text{Mas } \lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \frac{\Delta x(u) \times \vec{f}(u)}{\|\Delta u\|} = \lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \left[\frac{\partial x}{\partial u_1} \times \vec{f}(u) \frac{\Delta u_1}{\|\Delta u\|} + \frac{\partial x}{\partial u_2} \times \vec{f}(u) \frac{\Delta u_2}{\|\Delta u\|} + \frac{\vec{y}}{\|\Delta u\|} \times \vec{f}(u) \right] = \left(\lim_{\|\Delta u\| \rightarrow 0} \frac{\vec{y}}{\|\Delta u\|} \right) \times \vec{f}(u) = 0$$

Isto significa que a distância de um ponto $x(u + \Delta u)$ ao plano tangente à superfície S no ponto $x(u)$ é um infinitésimo de ordem maior



que $\|\Delta u\|$ para $\|\Delta u\| \rightarrow 0$.

Baseando-nos neste resultado fazemos a seguinte suposição:

Toda parte da superfície suficientemente pequena praticamente coincide com sua projeção ortogonal sobre o plano tangente a S num ponto pertencente à parte de S considerado. Este fato nos autoriza a definir a área de uma "região infinitamente pequena" da superfície como sendo a da sua projeção sobre o plano tangente a S correspondente a um ponto desta região, admitindo naturalmente, que tal projeção tenha uma área.

Consideremos agora $S : x(u), D \subset \mathbb{R}^2$ de classe r tal que $\mu(\partial D) = 0$ (*)

Sendo ∂D um compacto, ela terá conteúdo nulo e portanto D será $\mathcal{J}$ -mensurável. Seja $I \subset \mathbb{R}^2$ um intervalo compacto tal que $D \subset I$.

Sendo Δ uma divisão de I ($\Delta \in \mathcal{D}_I$), então $\mathcal{F}_\Delta$ tem m.n. intervalos I_{ij} compactos ($i, j = 1, \dots, m, n$).

Consideremos os pontos $\eta_{ij} = (u_{1i-1}, u_{2j-1})$ e os intervalos I_{ij} ($(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$) ($I_{ij} \subset D$). O paralelogramo construído sobre os vetores $x_{u_1}(\eta_{ij}) \Delta u_{1i}$ e $x_{u_2}(\eta_{ij}) \Delta u_{2j}$ aplicados ao ponto $x(\eta_{ij})$ o qual certamente está contido no plano tangente a S em $x(\eta_{ij})$, terá área igual a $\|x_{u_1}(\eta_{ij}) \wedge x_{u_2}(\eta_{ij})\| \Delta u_{1i} \Delta u_{2j} = \Delta A_{ij}$.

Notando que as quantidades $\|x_{u_1}(\eta_{ij})\| \Delta u_{1i}$ e $\|x_{u_2}(\eta_{ij})\| \Delta u_{2j}$ representam os comprimentos das curvas $u_2 = u_{2j-1} = \text{cte}$. e $u_1 = u_{1i-1} = \text{cte}$ nos intervalos $[u_{1i-1}, u_{1i}]$ e $[u_{2j-1}, u_{2j}]$ respectivamente, admitiremos que com um erro desprezível, a área da projeção de S correspondente ao intervalo parcial I_{ij} ($I_{ij} \in \mathcal{F}_\Delta$) ($I_{ij} \subset D$) sobre o plano tangente a S em $x(\eta_{ij})$ seja igual a ΔA_{ij} . Sendo Δ a divisão generalizada de I correspondente a Δ damos a seguinte

Definição: "Seja $S : x(u)$, D uma superfície regular de classe r tal que $\mu(\partial D) = 0$; sendo Δ uma divisão de I ($\Delta \in \mathcal{D}_I$) e η_{ij} o ponto de menores coordenadas do intervalo compacto I_{ij} ($I_{ij} \in \mathcal{F}_\Delta$) ($(i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$) ($m, n \in \mathbb{N}$), denomina-se área da superfície regular S ao limite

$$\lim_{\Delta \in \mathcal{D}_I} \sum_{I_{ij} \subset D} \|x_{u_1}(\eta_{ij}) \wedge x_{u_2}(\eta_{ij})\| \Delta u_{1i} \Delta u_{2j}, \text{ se este existir.}"$$

(*) Existem regiões fechadas D limitadas por curvas fechadas simples (não retificáveis) de $\mathcal{L}$ -medidas bidimensional não nulas (Curvas de Osgood), isto é $\mu(\partial D) > 0$. Neste caso tem-se $\mu(D) > \mu(D)$.



Notemos que Δ que aparece na definição dada é a divisão generalizada de I correspondente aos pontos η_{ij} ($\eta_{ij} \in I_{ij}$) ($(i,j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$).

Sendo $x(u)$ de classe r em D (D é $\mathcal{F}$ -mensurável), temos evidentemente que a função $\|x_{u_1}(u) \wedge x_{u_2}(u)\| = f(u)$ é $\mathbb{R}$ -integrável em D sendo $g(u)$ a função auxiliar para $f(u)$ relativamente a um intervalo compacto I ($D \subset I \subset \mathbb{R}^2$) ($g(u) = f(u)$ em D e nula em $I-D$), podemos escrever

$$\int_D f(u) du = \lim_{\Delta \in \dot{\mathcal{D}}_I} \sum_{x \in \mathcal{F}_\Delta} g(\xi_{ij}) \gamma(X), \text{ onde } \xi_{ij} \in X = I_{ij}.$$

Mas como o limite acima independe dos pontos $\xi_{ij} \in I_{ij}$, podemos pôr $\xi_{ij} = \eta_{ij}$. Além disso: $\sum_{x \in \mathcal{D}} g(\eta_{ij}) \gamma(X) = \sum_{x \in \mathcal{D}} f(\eta_{ij}) \gamma(X) = \sum_{I_{ij} \subset \mathcal{D}} \Delta A_{ij}$. Portanto,

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++})(\exists \Delta^* \in \dot{\mathcal{D}}_I)(\forall \Delta \in \dot{\mathcal{D}}_I) : \Delta \succ \Delta^* \Rightarrow \left| \sum_{x \in \mathcal{F}_\Delta} g(\eta_{ij}) \gamma(X) - \int_D f(u) du \right| < \varepsilon \quad (1)$$

Por outro lado, sendo $\partial(D)$ um conjunto de conteúdo nulo, temos: $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++})(\exists \Delta^{**} \in \dot{\mathcal{D}}_I)(\exists \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_{\Delta^{**}}) : \bigcup_{x \in \mathcal{F}} X \supset \partial D$ e $\sum_{x \in \mathcal{F}} \gamma(X) < \varepsilon$. (2)

Seja $\Delta_0 = \text{Res}(\Delta^*, \Delta^{**})$. Temos então:

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++})(\exists \Delta_0 \in \dot{\mathcal{D}}_I)(\forall \Delta \in \dot{\mathcal{D}}_I) : \Delta \succ \Delta_0 \xrightarrow{(1), (2)} \left| \sum_{I_{ij} \subset \mathcal{D}} \Delta A_{ij} - \int_D f(u) du \right| \\ & \leq \left| \sum_{I_{ij} \subset \mathcal{D}} \Delta A_{ij} - \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_\Delta} g(\eta_{ij}) \gamma(Y) \right| + \left| \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_\Delta} g(\eta_{ij}) \gamma(Y) - \int_D f(u) du \right| < \\ & < \left| \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_\Delta} g(\eta_{ij}) \gamma(Y) \right| + \varepsilon \leq \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_\Delta} |g(\eta_{ij})| \gamma(Y) + \varepsilon \leq L \sum_{\gamma \in \mathcal{F}_\Delta} \gamma(Y) + \varepsilon < (L+1)\varepsilon, \end{aligned}$$

onde $L = \sup_I g(u) = \max_D f(u)$ ($L > 0$).

Portanto, $\lim_{\Delta \in \dot{\mathcal{D}}_I} \sum_{I_{ij} \subset \mathcal{D}} \Delta A_{ij} = \int_D f(u) du$ e temos finalmente que a área A de S existe e pode ser dada pela fórmula

$$A = \iint_D \|x_{u_1}(u) \wedge x_{u_2}(u)\| du_1 du_2$$

Chamando $\|x_{u_1}\|^2 = E$, $x_{u_1} \times x_{u_2} = F$ e $\|x_{u_2}\|^2 = G$, obtemos a área de S com a notação de Gauss:

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du_1 du_2$$

Notando ainda que as componentes do vetor $x_{u_1}(u) \wedge x_{u_2}(u)$ são os determinantes

$$J_1(u) = \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2)}, \quad J_2(u) = \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u_1, u_2)} \quad \text{e} \quad J_3(u) = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}$$

a fórmula da área de S pode ser escrita na forma

$$A = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u_1, u_2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2)}\right)^2} du_1 \cdot du_2$$

a qual apresenta uma grande analogia com a fórmula do comprimento de arco de uma curva regular $\Gamma: x(t), [a, b] = I$, que como vimos é

$$s = \int_I \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Sendo agora $S: x(u)$, $I (I \subset \mathbb{R}^2)$ (I é intervalo compacto) uma superfície regular de classe r e D um conjunto ($D \subset I$) (D é $\mathcal{L}$ -mensurável) temos:

$$\int_D f(u) du = \int_I \chi_D(u) \cdot f(u) du.$$

Generalizando a definição de área de uma superfície regular, dizemos que a área da porção de S correspondente ao conjunto D (D é $\mathcal{L}$ -mensurável) é

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du_1 \cdot du_2$$

Mostremos agora que a área de S é invariante para toda transformação regular de variável $y: B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$. De fato, sendo $S: x(y(v))$, B uma outra representação regular da superfície, temos:

$$A = \iint_B \|x_{v_1} \wedge x_{v_2}\| dv_1 dv_2 = \iint_D \|x_{v_1}(u) \wedge x_{v_2}(u)\| |J(u)| du_1 du_2$$

$$\text{Mas } x_{u_1}(u) \wedge x_{u_2}(u) = \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_1} x_{v_1}(u) + \frac{\partial v_2}{\partial u_1} x_{v_2}(u) \right) \wedge$$

$$\wedge \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_2} x_{v_1}(u) + \frac{\partial v_2}{\partial u_2} x_{v_2}(u) \right) =$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} x_{v_1}(u) \wedge x_{v_2}(u) + \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_1} x_{v_2} \wedge x_{v_1} =$$

$$= \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_1} \frac{\partial v_2}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2} \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \right) x_{v_1}(u) \wedge x_{v_2}(u) = J(u) (x_{v_1} \wedge x_{v_2})$$

$$\text{Daí concluímos finalmente que } A = \iint_D \|x_{u_1} \wedge x_{u_2}\| du_1 \cdot du_2$$

CAPÍTULO VIII

a) UMA OUTRA DEFINIÇÃO DE COMPRIMENTO DE CURVA

Seja $\Gamma : x(t)$, $I = [a, b]$ uma curva regular e $\vec{t}(t)$ o vetor tangente a Γ no ponto $x(t)$. Facilmente se deduz que a distância de um ponto $x(t + \Delta t)$ à reta tangente a Γ em $x(t)$ é dada por $d = \| (x(t + \Delta t) - x(t)) \wedge \vec{t} \|$. Daí vem que $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\| x(t + \Delta t) - x(t) \| \wedge \vec{t}}{\Delta t} = \| x'(t) \wedge \vec{t} \| = 0$, ou seja, d é um infinitésimo de ordem maior que a de Δt para $\Delta t \rightarrow 0$. Este resultado nos leva a supor que um arco parcial de Γ de extremidades suficientemente próximos e sua projeção sobre a reta tangente a Γ num ponto deste arco parcial, a menos de infinitésimos desprezíveis, coincidem. Por outro lado, uma propriedade das curvas retificáveis nos diz que o comprimento de arco de Γ entre dois pontos suficientemente próximos da mesma e a medida da corda correspondente, são infinitésimos equivalentes.

Baseando nos nestes fatos, formularemos uma definição de comprimento de curva para curvas regulares de um modo semelhante à área de superfícies regulares vista no capítulo anterior.

Seja Δ uma divisão do intervalo compacto I em n intervalos parciais I_i ($n > 1$) ($I_i \in \mathcal{I}_\Delta$) ($i \in \mathbb{N}_n$) bem como ξ_i um ponto arbitrariamente tomado em I_i . Tomando Δ suficientemente fina, definimos comprimento do arco parcial $x(I_i)$ de Γ como sendo a medida da projeção da corda correspondente sobre a tangente a Γ no ponto $x(\xi_i)$ de Γ . Esta medida será igual ao número positivo $|(x(t_i) - x(t_{i-1})) \times \vec{t}(\xi_i)|$, onde $\vec{t}(\xi_i) = \frac{x'(\xi_i)}{\|x'(\xi_i)\|}$ é o vetor tangente a Γ no ponto $x(\xi_i)$. Daí vem:

$$\begin{aligned} |(x(t_i) - x(t_{i-1})) \times \vec{t}(\xi_i)| &= |x'(\eta_i) \times \vec{t}(\xi_i)| \Delta t_i = \\ &= \frac{|x'(\eta_i) \times x'(\xi_i)|}{\|x'(\xi_i)\|} \Delta t_i, \end{aligned}$$

onde η_i é um ponto conveniente de I_i . Como porém o ponto ξ_i pode ser



escolhido arbitrariamente, fazendo $\eta_i = \xi_i$, a expressão anterior pode ser simplificada e obtemos $\|x'(\eta_i)\| \Delta t_i$, onde η_i é um ponto conveniente de I_i . Sendo agora Δ a divisão generalizada de I correspondente a Δ bem como $\mathcal{G}_\xi(||||; \Delta) = \sum_{i=1}^n \|x'(\xi_i)\| \Delta t_i$ e ainda notando que a função $\|x'(t)\|$ é contínua em I , da Teoria dos limites de Moore-Smith temos que existe o limite $\lim_{\Delta \in \mathcal{D}_I} \mathcal{G}_\xi(||||; \Delta)$ e é igual à integral $\int_I \|x'(t)\| dt$. Como, porém, este limite independe dos pontos ξ_i tomados em cada intervalo I_i ($i \in \mathbb{N}_n$), temos também $\lim_{\Delta \in \mathcal{D}_I} \sum_{i=1}^n \|x'(\eta_i)\| \Delta t_i = \int_I \|x'(t)\| dt$.

Definição: "Seja $\Gamma: x(t), I$ uma curva regular de classe r e Δ uma divisão generalizada de I correspondente aos pontos ξ_i ($\xi_i \in I_i$) ($I_i \in \mathcal{D}_\Delta$) ($i \in \mathbb{N}_n$), chama-se comprimento da curva Γ ao limite

$$\lim_{\Delta \in \mathcal{D}_I} \sum_{i=1}^n \|x'(\xi_i)\| \Delta t_i$$

e indica-se por L ."

Notemos que a definição supra de comprimento de arco é menos geral que a dada para as curvas retificáveis, pois enquanto esta se aplica apenas para as curvas regulares, a outra vale para qualquer curva retificável.

Na definição precedente admitimos a continuidade de $x'(t)$ em I , o que geometricamente pressupõe a existência das tangentes à curva em todos os seus pontos.

Mediante esta definição podemos considerar restabelecida a analogia entre curvas e superfícies quanto às definições de comprimento e de área de curvas e superfícies regulares, respectivamente.

b) COMPRIMENTO DE CURVA COMO UMA MEDIDA

Seja $\Gamma: x(t), I$ uma curva regular de classe r ($I \subset \mathbb{R}$) (I intervalo compacto).

Sendo C ($C \subset I$) um conjunto $\mathcal{L}$ -mensurável, definimos comprimento do conjunto $x(C)$ através da $\mathcal{L}$ -integral $\int_C \|x'(t)\| dt$ e indicamos por L_C .

Consideremos agora o conjunto $\mathcal{E}_\Gamma = \{ \gamma \subset \Gamma \mid x^{-1}(\gamma) = C \text{ e } C \text{ é } \mathcal{L}\text{-mensurável} \} \cup \{ \emptyset \}$. Valem então as seguintes propriedades:

- (a) $(\forall \gamma_\nu) (\forall \nu \in \mathbb{N}) (\gamma_\nu \in \mathcal{E}_\Gamma) : \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \subset \mathcal{E}_\Gamma$
- (b) $(\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{E}_\Gamma) (\gamma_1 \cap \gamma_2 \in \mathcal{E}_\Gamma)$.

Isto significa que o conjunto $\mathcal{E}_\Gamma$ é uma σ -álgebra sobre Γ .

Definimos agora a aplicação $\nu: \mathcal{E}_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que para todo γ de

$\mathcal{C}_r$ temos $\nu(\gamma) = \int_C \|x'(t)\| dt$, onde $C = x^{-1}(\gamma)$.

Daí deduzimos, utilizando propriedades das $\mathcal{L}$ -integrais, que valem as seguintes propriedades:

$$(1) \nu(\emptyset) = 0$$

$$(2) (\forall \gamma \in \mathcal{C}_r) \quad (\nu(\gamma) \geq 0)$$

$$(3) (\forall (\gamma_n)) \quad (\gamma_n \in \mathcal{C}_r) \quad (m \neq n) (m, n \in \mathbb{N})$$

$$(\gamma_m \cap \gamma_n \neq \emptyset) : \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(\gamma_n).$$

Vemos assim que a aplicação ν é uma medida sobre $\mathcal{C}_r$.

c) ÁREA DE SUPERFÍCIE COMO UMA MEDIDA

Consideremos agora a superfície regular $S: x(u), I$ de classe r ($r \in \mathbb{N}$) (I é intervalo compacto) ($I \subset \mathbb{R}^2$). Sendo D um subconjunto de I $\mathcal{L}$ -mensurável, no Capítulo VII definimos área da porção de S correspondente a D , isto é, do conjunto $x(D)$ através da $\mathcal{L}$ -integral

$$\iint_D \|x_{u_1}(u) \wedge x_{u_2}(u)\| du_1 du_2$$

a qual indicaremos por A_D .

Também neste caso podemos mostrar que o conjunto $\mathcal{C}_S = \{T \subset S \mid x^{-1}(T) = D \text{ e } D \text{ é } \mathcal{L}\text{-mensurável}\} \cup \{\emptyset\}$ é uma σ -álgebra sobre S , bem como a aplicação $\mu: \mathcal{C}_S \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $(\forall T \in \mathcal{C}_S): \mu(T) = \iint_D \|x_{u_1} \wedge x_{u_2}\| du_1 du_2$, onde $D = x^{-1}(T)$ é uma medida sobre $\mathcal{C}_S$.

Estas considerações nos evidenciam mais um ponto de analogia existente entre curvas e superfícies. Vemos também que há uma grande semelhança entre a medida de Lebesgue definida e desenvolvida no Capítulo IV e as medidas ν e μ introduzidas nos itens b) e c) deste capítulo.



BIBLIOGRAFIA

1. BENEDITO CASTRUCCI
Lições de Geometria Plana - 1ª edição, 1955.
2. E.J. MC SHANE
Partial Orderings and Moore-Smith-Limits
AM.MATH.MONTLY - vol. 59 - pp. 1-11, 1952.
3. E. J. MC SHANE
Real Analysis - D. Van Nostrand Company, Inc. - 1959.
4. E. KREYSZIG
Differential Geometrie - Akademische Verlagsgesellschaft.
Leipzig - 1957.
5. ELON LAGES LIMA
Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$ - Editora E. Blücher Ltda. 1970.
6. ENCYCLOPEDIA BRITANNICA
Integration and Measure- 1966 - pp. 341-345.
7. J. REY PASTOR
Análisis Matemático - Editorial Kapelusz - 3ª ed. - 1965.
8. R. CREIGHTON BUCK
Advanced Calculus - McGraw-Hill Book Company.
9. RICHARD R. GOLDBERG
Methods of Real Analysis - Blaisdell Publ. Co. - 1963.
10. ROBERT G. BARTLE
The Elements of Real Analysis - John Wiley and Sons. Inc.-1964.
11. ROBERT G. BARTLE
The Elements of Integration - John Wiley and Sons. Inc.
12. RUY LUIS GOMES
Integral de Riemann - Junta de Investigação Matemática - 1949.
13. R. RADÓ
What is the Area of a Surface?
Am. Math. Monthly - vol. 50, pp. 139-141, 1943.
14. T. RADÓ
Length and Area.
Am. Math. Society - Colloquium Publ. - 1948.
15. UBIRATAN D'AMBROSIO
Superfícies Generalizadas e Conjuntos de Perímetro Finito - 1963.

