

WELLINGTON DA CRUZ

14

BOSONIZAÇÃO NA REDE E LAGRANGEANAS TOPOLÓGICAS  
(ALGUMAS APLICAÇÕES DO FORMALISMO DE DIRAC-KÄHLER)

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA  
AO INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

ORIENTADOR: PROF. DR. ABRAHAM HIRSZ ZIMERMAN



SÃO PAULO  
AGOSTO DE 1989

## AGRADECIMENTOS

- Ao Professor A. H. Zimmerman pela oportunidade deste trabalho.
- Aos funcionários, colegas e professores pelo ambiente agradável de estudo.
- Ao Rodrigo e à Denise por terem concordado com a minha ausência...
- Aos meus pais e irmãos pelo incentivo de sempre.
- À CAPES (Programa P.I.C.D.) pelo apoio financeiro.
- À Universidade Estadual de Londrina.

## AGRADECIMENTOS

- Ao Professor A. H. Zimmerman pela oportunidade deste trabalho.
- Aos funcionários, colegas e professores pelo ambiente agradável de estudo.
- Ao Rodrigo e à Denise por terem concordado com a minha ausência...
- Aos meus pais e irmãos pelo incentivo de sempre.
- À CAPES (Programa P.I.C.D.) pelo apoio financeiro.
- À Universidade Estadual de Londrina.

*Ao Rodrigo, à Denise  
e à Aline...  
que está por chegar  
dedico.*

## RESUMO

Neste trabalho, estudamos o processo de bosonização na rede espacial a duas dimensões e também construímos Lagrangeanas Topológicas a uma e duas dimensões no contínuo, via formalismo de Dirac-Kähler.

O estudo do processo de transmutação fermion-boson na rede espacial é encaminhado em analogia ao que foi feito por Klaiber no contínuo. Concluímos que, ao menos para o nosso ansatz da solução da equação de Dirac-Kähler, o campo escalar especificado em termos deste ansatz não satisfaz a equação de Klein-Gordon na rede espacial e assim, a bosonização não foi possível.

A dedução de algumas Lagrangeanas Topológicas a 1-d e 2-d foi considerada assim como a quantização B.R.S.T. à la Kugo-Uehara de tais teorias.

## ABSTRACT

In this work, we study the bosonization process on the spatial lattice in two dimensions and we also construct Topological Lagrangians in one and two continuum dimensions, using Dirac-Kahler formalism.

The study of the fermion-boson metamorphosis on the spatial lattice was developed in analogy to the one already made by Klaiber in the continuum case. We conclude that, at least for our ansatz for the solution of Dirac-Kahler equation, the scalar field specified in terms of the ansatz above does not satisfy the Klein-Gordon equation on the spatial lattice and so, the bosonization was not possible.

The derivation of some Topological Lagrangians in 1-d and 2-d was considered as well as the B.R.S.T. quantization à la Kugo-Uehara of such theories was performed.

## ÍNDICE

Introdução .....	01
Capítulo I: Formalismo de Dirac-Kähler .....	04
Capítulo II: Férmions na rede a duas dimensões.....	13
Capítulo III: Bosonização	
3.1: Aspectos gerais do processo de bosonização.....	19
3.2: Bosonização à la Kläiber.....	22
3.3: Ansatz para a equação de Dirac-Kähler na rede....	27
3.4: Bosonização na rede.....	47
Capítulo IV: Lagrangeanas Topológicas	
4.1: Aspectos gerais das Teorias Topológicas.....	54
4.2: Derivação de Lagrangeanas Topológicas via formalismo de Dirac-Kähler.....	62
Apêndice A: A.1 Representação Bosônica.....	88
A.2 Anticomutatividade.....	93
A.3 Funções de Green.....	97
A.4 Propriedade de "Cluster".....	98
A.5 Invariança de Lorentz.....	98
A.6 Bilineares.....	99

Apêndice B:	B.1	Cálculo da expressão da corrente $J_\mu$ dada por Klaiber.....	117
	B.2	Relação de comutação de $C(k_1)$ .....	123
Apêndice C:	C.1	Relação de dispersão na rede.....	141
	C.2	Normalização das autofunções.....	144
	C.3	Ortogonalidade das autofunções. ( $k > 0$ ).....	147
	C.4	Cálculo das expressões $B_{2,k}^+$ , $A_{2,k}^{(+)*}$ , $B_{1,k}^-$ e $A_{1,k}^{(-)*}$ via equação (III.41).....	148
	C.5	Relação de anticomutação dos $\chi_\alpha$ , $\alpha=1,2$ .....	151
Apêndice D:	D.1	Equação da continuidade na rede.....	156
	D.2	Cálculo da componente $J_0$ em termos das expressões (III.42).....	162
	D.3	O campo escalar $\varphi(\eta)$ .....	171
	D.4	Expressão da componente $J_1$ em termos das expressões (III.42).....	179
	D.5	Expressão da componente $\tilde{J}_1 \equiv \Delta^+ \varphi(\eta)$ .....	189
Apêndice E:	E.1	Quantização B.R.S.T. de um modelo unidimensional.....	204
	E.2	Invariança B.R.S.T. da ação do modelo bidimensional.....	207
Referências.....			212

## INTRODUÇÃO

Cálculos não-perturbativos em teorias de gauge, tipo cromodinâmica quântica (teoria da interação forte - QCD) têm sido implementados via discretização do espaço-tempo. Esta abordagem constitui um método de regularização que elimina infinitudes ultravioletas (comprimentos de onda menores que o espaçamento da rede) da teoria. Por outro lado, resultados numéricos (via Métodos de Monte Carlo) garantem a existência da QCD, isto é, não foi observada nenhuma transição de fase tal que não possamos fazer a conexão entre o fenômeno de liberdade assintótica (acoplamento fraco dos quarks a curtas distâncias,  $\leq 10^{-14}$  cm, ou altas energias, região onde métodos perturbativos podem ser aplicados) e a propriedade de confinamento (acoplamento forte dos quarks a grandes distâncias,  $\sim 10^{-13}$  cm, ou baixas energias). Um outro resultado numérico é a relação entre a escala da QCD com a tensão da corda entre os quarks, o gap de massa (diferença de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado) e as massas dos hádrons.

A manifesta conexão entre teoria de campo e mecânica estatística, na equivalência entre a expansão de acoplamento forte e a expansão a altas temperaturas ( $g^2 \sim T$ ,  $g$  constante de acoplamento e  $T$  temperatura), isto é, entre a formulação integral funcional de um dado sistema quântico e a função de partição de um sistema estatístico análogo no espaço Euclidiano, é um outro ponto

a se ressaltar das teorias de gauge na rede. Agora, quando férmions são introduzidos na rede, graves dificuldades do ponto de vista técnico e computacional surgem, tais como, aumento do número de graus de liberdade (impedindo uma formulação realística para o espectro de massa dos quarks) e a quebra da simetria quiral (implicando para a superação do problema sofisticações que exigem mais tempo de máquina). Observamos que, na rede, é possível, mais de uma teoria para àquela do contínuo. Independente deste ponto, o limite do contínuo (espaçamento da rede:  $a \rightarrow 0$ ) tem de ser tomado, a fim de que se possa extrair alguma física do modelo em consideração, por exemplo, precisamos verificar se o grupo de simetria do contínuo como de resto outras quantidades são recuperadas. Agora, fenômenos inerentes à rede (não verificados no contínuo) também têm sido observados.<sup>(4)</sup>

Neste trabalho, vamos nos valer do formalismo de Dirac-Kähler, para estudar o fenômeno de bosonização (transmutação férmion-bóson) na rede espacial a duas dimensões e, de maneira preliminar, estudaremos como deduzir Lagrangeanas Topológicas a 1-d e 2-d no contínuo.

A distribuição dos tópicos está organizada como segue: no capítulo I introduzimos o formalismo de Dirac-Kähler naquilo que nos for essencial; no capítulo II discutimos o problema dos férmions na rede a duas dimensões; no capítulo III apresentamos o processo de bosonização e discutimos os resultados, e no capítulo IV introduzimos o contexto das Lagrangeanas Topológicas e

encaminhamos nossa proposta de estudo para este tópico. Deixamos para os apêndices aquelas passagens do texto mais tediosas ou repetitivas.

a se ressaltar das teorias de gauge na rede. Agora, quando férmions são introduzidos na rede, graves dificuldades do ponto de vista técnico e computacional surgem, tais como, aumento do número de graus de liberdade (impedindo uma formulação realística para o espectro de massa dos quarks) e a quebra da simetria quiral (implicando para a superação do problema sofisticações que exigem mais tempo de máquina). Observamos que, na rede, é possível, mais de uma teoria para àquela do contínuo. Independente deste ponto, o limite do contínuo (espaçamento da rede:  $a \rightarrow 0$ ) tem de ser tomado, a fim de que se possa extrair alguma física do modelo em consideração, por exemplo, precisamos verificar se o grupo de simetria do contínuo como de resto outras quantidades são recuperadas. Agora, fenômenos inerentes à rede (não verificados no contínuo) também têm sido observados.<sup>(1)</sup>

Neste trabalho, vamos nos valer do formalismo de Dirac-Kähler, para estudar o fenômeno de bosonização (transmutação férmion-bóson) na rede espacial a duas dimensões e, de maneira preliminar, estudaremos como deduzir Lagrangeanas Topológicas a 1-d e 2-d no contínuo.

A distribuição dos tópicos está organizada como segue: no capítulo I introduzimos o formalismo de Dirac-Kähler naquilo que nos for essencial; no capítulo II discutimos o problema dos férmions na rede a duas dimensões; no capítulo III apresentamos o processo de bosonização e discutimos os resultados, e no capítulo IV introduzimos o contexto das Lagrangeanas Topológicas e

encaminhamos nossa proposta de estudo para este t3pico. Deixamos para os ap3ndices aquelas passagens do texto mais tediosas ou repetitivas.

## CAPITULO I

### FORMALISMO DE DIRAC-KÄHLER

O estudo dos férmions na rede (ver cap. II), via formalismo de Dirac-Kähler, foi implementado por Becher e Joos<sup>(2)</sup>, que estabeleceram a completa equivalência entre o contínuo e a rede.

No contínuo, os campos são representados por formas diferenciais (tensores antissimétricos) definidos sobre os espaços das simetrias internas (espaços tangentes ao espaço-tempo Euclidiano), enquanto que na rede, os campos são representados por cocadeias (funcionais dos elementos da rede: pontos, segmentos (links), plaquetas, cubos, etc.).

Uma forma diferencial geral é dada por:

$$\Phi = \sum_H \phi_H(x) dx^H \quad (I.1)$$

onde  $H = \{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_h \}$ , com  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_h$  notação de multi-índice e  $h$  dimensão. A equação de Dirac-Kähler vem escrita como:

$$i(d - \delta)\Phi = 0 \quad (I.2)$$

ou

$$(d + \delta)\Phi = 0$$

onde  $d$  e  $\delta$  operadores lineares atuando sobre o espaço das  $p$ -formas:

$$d: \mathcal{P} \Omega \longrightarrow \mathcal{P}+1 \Omega$$

$$\delta: \mathcal{P} \Omega \longrightarrow \mathcal{P}-1 \Omega$$

e definidos por:

$$d = dx^m \wedge \partial_m$$

(1.3)

$$\delta = -e^m \lrcorner \partial_m$$

onde  $\wedge$  produto exterior definido como bilinear, distributivo e associativo:

$$\wedge: \mathcal{P} \Omega \otimes \mathcal{Q} \Omega \longrightarrow \mathcal{P}+Q \Omega$$

Assim,

$$dx^H \wedge dx^K = \begin{cases} \rho_{H,K} dx^{H \cup K} & \text{se } H \cap K = \emptyset \\ 0, & \text{em outra hipótese.} \end{cases}$$

$e^M \lrcorner$  representa uma diferenciação em relação a  $dx^M$ :

$$e^M \lrcorner dx^H = \begin{cases} g^{nr} e_r \lrcorner dx^H = g^{nr} dx^{H \setminus r} & \text{se } r \in H \\ 0, & \text{em outra hipótese.} \end{cases}$$

com  $\rho_{H,K}$  função sinal (conta as permutações necessárias para o ordenamento com  $H \cap K = \emptyset$ ) e é definida  $\rho_{H,K} = (-1)^\gamma$ ,  $\gamma$  número de pares  $(i, j)$  com  $i \in H$ ,  $j \in K$ ,  $(i, j) \in H \Delta K = (H \setminus K) \cup (K \setminus H)$  diferença simétrica. A álgebra exterior das formas diferenciais sobre o espaço-tempo Euclidiano é gerada por 1-formas, tal que

$$dx^H = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \quad , \text{ etc.}$$

A ação dos operadores  $d$  e  $\delta$  sobre a forma diferencial geral

produz:

$$d\varphi = \sum_{\#} \partial_r \phi_{\#}(x) dx^r \wedge dx^{\#}$$

$$d^2\varphi = \sum_{\#} \partial_m \partial_r \phi_{\#}(x) dx^{mr} \wedge dx^{\#}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\#} (\partial_m \partial_r - \partial_r \partial_m) \phi_{\#}(x) dx^{mr} \wedge dx^{\#}$$

$$d^2 = 0$$

(I.4)

e

$$\delta\varphi = \sum_{\#} \partial_r \phi_{\#}(x) e^r \lrcorner dx^{\#}$$

$$= \sum_{\#} \partial_m \partial_r \phi_{\#}(x) e^{mr} \lrcorner dx^{\#}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\#} (\partial_m \partial_r - \partial_r \partial_m) \phi_{\#}(x) e^{mr} \lrcorner dx^{\#}$$

$$\delta^2 = 0,$$

(I.5)

verificamos, então, a propriedade de nilpotência dos operadores  $d$  e  $\delta$ .

O operador de Laplace faz o seguinte mapeamento:

$$[i(d-\delta)]^2 = d\delta + \delta d : \mathcal{P}_R \rightarrow \mathcal{P}_R$$

Definimos, ainda, o morfismo A e o anti-morfismo B:

$$A dx^H = (-1)^h dx^H$$

$$\otimes dx^H = (-1)^{\frac{h(h-1)}{2}} dx^H$$

com as propriedades:

$$A(\Phi \wedge \Psi) = A\Phi \wedge \Psi$$

$$\otimes(\Phi \wedge \Psi) = \otimes\Psi \wedge \otimes\Phi$$

Uma cocadeia geral é dada por:

$$\Phi = \sum_{x, H} \phi(x, H) dx^H \quad (I.6)$$

onde  $dx^{x, H}$  cocadeia elementar dual à cadeia elementar  $[X, H]$ , e satisfazendo

$$dx^{x, H} [y, k] = \delta_{xy} \delta_{Hk}$$

A equação de Dirac-Kähler na rede vem escrita como:

$$(\overset{\vee}{\Delta} - \overset{\vee}{\nabla})\Phi = 0$$

ou

$$(\overset{\vee}{\Delta} + \overset{\vee}{\nabla})\Phi = 0$$

(1.7)

onde  $\overset{\vee}{\Delta}$  e  $\overset{\vee}{\nabla}$  são operadores lineares atuando sobre o espaço das p-cocadeias:

$$\overset{\vee}{\Delta} : \phi \ell^{\vee} \longrightarrow \phi^{+1} \ell^{\vee}$$

$$\overset{\vee}{\nabla} : \phi \ell^{\vee} \longrightarrow \phi^{-1} \ell^{\vee}$$

e definidos por:

$$\overset{\vee}{\Delta} = d^M \wedge A_{\mu}^{-}$$

$$\overset{\vee}{\nabla} = -\tau^M \lrcorner \Delta_{\mu}^{-}$$

(1.8)

com  $\Delta_{\mu}^{-}$  operador diferença finita,  $\wedge$  é o análogo do produto exterior na rede:

$$\wedge : \phi \ell^{\vee} \otimes \eta \ell^{\vee} \longrightarrow \phi \eta \ell^{\vee}$$

Assim,

$$d^{\alpha, H} \wedge d^{\beta, K} = \begin{cases} \rho_{H, K}^{\alpha + \beta} \sum_{\#1}^{\#2} d^{\gamma, H \cup K} & , \text{ se } H \cap K = \emptyset \\ 0, & \text{ em outra hipótese} \end{cases}$$

e  $e^m \lrcorner$  "diferenciação" em relação a  $d^{\alpha, M}$ :

$$e^m \lrcorner d^{\alpha, H} = \begin{cases} \rho_{r, H \Delta r}^{m, r} d^{\alpha, H \cup r} & , \text{ se } r \subset H \\ 0, & \text{ em outra hipótese} \end{cases}$$

A ação dos operadores  $\overset{\vee}{\Delta}$  e  $\overset{\vee}{\nabla}$  sobre a cocadeia geral

produz:

$$\overset{\vee}{\Delta} \Phi = \sum_{\alpha, H} \Delta_r \phi(\alpha, H) d^{\alpha, r} \wedge d^{\alpha, H}$$

$$\overset{\vee}{\Delta} \Phi = \sum_{\alpha, H} \Delta_r^- \Delta_r^- \phi(\alpha, H) d^{\alpha, r} \wedge d^{\alpha, H}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, H} (\Delta_r^- \Delta_r^- - \Delta_r^- \Delta_r^-) \phi(\alpha, H) d^{\alpha, r} \wedge d^{\alpha, H}$$

$$\overset{\vee}{\Delta}^2 = 0$$

(I.9)

$$\overset{\vee}{\nabla} \Phi = \sum_{\alpha, H} \Delta_r^- \phi(\alpha, H) e^r \lrcorner d^{\alpha, H}$$

$$= \sum_{\alpha, H} \Delta_r^- \Delta_r^- \phi(\alpha, H) e^{m, r} \lrcorner d^{\alpha, H}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, H} (\Delta_r^- \Delta_r^- - \Delta_r^- \Delta_r^-) \phi(\alpha, H) e^{m, r} \lrcorner d^{\alpha, H}$$

$$\overset{\vee}{\nabla}^2 = 0,$$

(I.10)

e a nilpotência dos operadores  $\overset{\vee}{\Delta}$  e  $\overset{\vee}{\nabla}$  é verificada.

Definimos os operadores diferenças finitas por:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu}^{+} \phi(x) &= \frac{1}{e^{\mu}} [\phi(x+e^{\mu}) - \phi(x)] \\ \Delta_{\mu}^{-} \phi(x) &= \frac{1}{e^{\mu}} [\phi(x) - \phi(x-e^{\mu})] \end{aligned} \quad (I.11)$$

onde  $e^{\mu}$  é o espaçamento da rede, na direção  $\mu$ .

Observamos aqui, que nos é bastante conveniente definir as seguintes operações matriciais, o produto exterior e a contração (com análogos na rede):

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu} \wedge \rho^{\#} &= \rho_{\mu, \#} \rho^{\#} \mu \\ \gamma^{\mu} \lrcorner \rho^{\#} &= \rho_{\mu, \#} \rho^{\#} \mu \end{aligned}$$

temos, então, as equivalências:

$$\begin{aligned} dx^{\mu} \wedge dx^{\#} &\sim \gamma^{\mu} \wedge \rho^{\#} \\ dx^{\mu} \lrcorner dx^{\#} &\sim \gamma^{\mu} \lrcorner \rho^{\#} \\ dx_{\mu} \wedge dx^{\#} &\sim \gamma^{\mu} \wedge \rho^{\#} \\ dx_{\mu} \lrcorner dx^{\#} &\sim \gamma^{\mu} \lrcorner \rho^{\#} \end{aligned}$$

e a forma diferencial e a cocadeia podem assumir expressões matriciais:

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{\#} \phi_{\#}(x) dx^{\#} \sim \sum_{\#} \phi_{\#}(x) \gamma^{\#} \\ \Phi &= \sum_{x, \#} \phi(x, \#) dx_{\mu}^{\#} \sim \sum_{x, \#} \phi(x, \#) \gamma^{\#} \end{aligned}$$

A passagem contínuo-rede constitui um mapeamento de formas diferenciais sobre cocadeias, e pelo Teorema de Stokes:

$$\oint_C ([x, H]) \equiv \int_{\Delta C} \Phi = \int_{\Delta C} \Phi \quad (I.12)$$

onde  $[x, H]$  elemento da rede:

$[x, h]$ : ponto

$[x, \mu]$ : segmento (link)

$[x, \mu^v]$ : plaqueta

$[x, \mu^v \alpha]$ : cubo, etc.

Assim, temos os mapeamentos:

$$d \rightarrow \Delta^U, \quad \text{com } \Delta^U \oint ([x, H]) = \oint (\Delta [x, H])$$

$$\delta \rightarrow \nabla^V, \quad \text{com } \nabla^V \oint ([x, H]) = \oint (\nabla [x, H])$$

onde  $\Delta$  e  $\nabla$  operadores fronteira e cofronteira atuando sobre cadeias (combinações lineares de elementos da rede ou células)\*

---

\* Observamos aqui que outras particularidades do formalismo foram omitidas<sup>(2)</sup>

CAPÍTULO II  
FERMIONS NA REDE A DUAS DIMENSÕES

Vamos verificar, como é que surge o problema da degenerescência da energia quando introduzimos férmions na rede.<sup>(3)</sup>

O campo de Dirac sem massa a duas dimensões é um espinor de componentes  $\psi_1$  e  $\psi_2$  :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

tal que na representação das matrizes- $\gamma^*$ :

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^3 = \gamma^2 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha$$

as equações de movimento vem dadas por:

$$\not{\partial} \psi = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \psi_1 - \partial_x \psi_2 = 0 \\ \partial_t \psi_2 - \partial_x \psi_1 = 0 \end{array} \right. \quad \text{(II.1)}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \partial_t \psi &= \gamma_3 \partial_x \psi \\ &= \alpha \partial_x \psi \end{aligned}$$

e

$$\partial_x \psi = \alpha \partial_t \psi$$

---

\* Estamos usando índice  $\mu=1$  para espaço e  $\mu=2$  para tempo.

logo:

$$\alpha = \pm 1.$$

Na rede, a derivada contínua é substituída por diferenças finitas:

$$\psi(x+a) = \psi(x) + a \partial_x \psi(x)$$

$$\psi(x) = \psi(x-a) + a \partial_x \psi(x)$$

e

$$\partial_x \psi(x) = \frac{1}{2a} \left\{ \psi(x+a) - \psi(x-a) \right\}$$

com  $x = na$  no  $n$ -ésimo ponto da rede, e portanto:

$$\partial_x \psi(n) = \frac{\alpha}{2a} \left\{ \psi(n+1) - \psi(n-1) \right\} \quad (\text{II.2})$$

Para uma solução tipo onda plana:

$$\psi(x) = e^{i(n\omega t + kx)}$$

com  $-\infty < k < \infty$ , a relação de dispersão no contínuo é dada por

$$\omega = \alpha k \quad (\text{II.3})$$

enquanto que na rede, tendo em conta as soluções:

$$\psi(n) = e^{i(\omega t + kna)}$$

$$\psi(n+1) = e^{i(\omega t + k(n+1)a)}$$

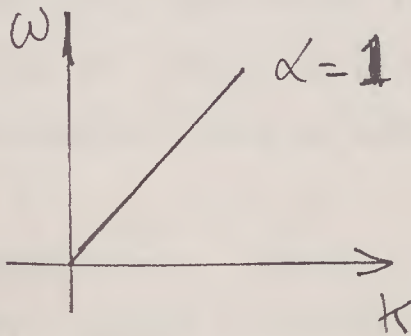
$$\psi(n-1) = e^{i(\omega t + k(n-1)a)}$$

a relação de dispersão assume a seguinte forma:

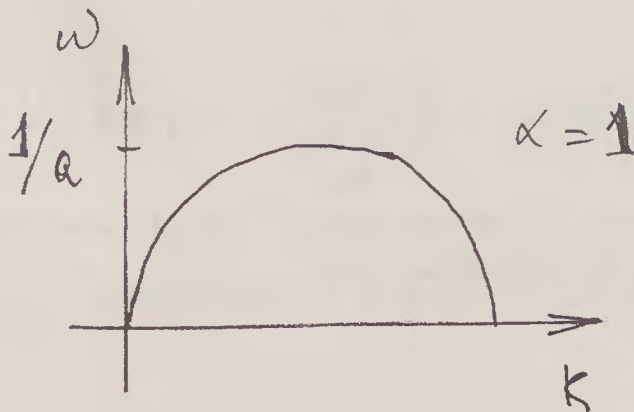
$$\omega = \frac{\alpha}{a} \sin ka \quad (\text{II.4})$$

Graficamente, as relações de dispersão (para  $\alpha=1$  e  $\omega > 0$ ), para o contínuo e a rede, respectivamente, são as seguintes:

i)



ii)



Observamos, então, do gráfico da lei de dispersão do contínuo, que a solução é uma onda plana deslocando-se para a direita. Da relação de dispersão na rede, verificamos que a frequência é proporcional ao inverso do espaçamento da rede e assim, no limite do contínuo, a frequência diverge. As frequências finitas para este setor do gráfico que estamos analisando estão próximas de

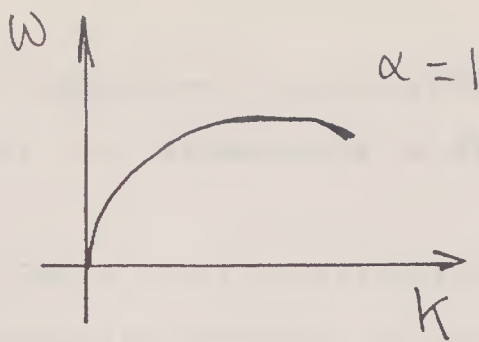
$$ka \simeq 0 \text{ e } ka \simeq \pi$$

. Assim sendo, verificamos que no primeiro destes pontos temos uma onda deslocando-se para a direita e no segundo ponto uma onda deslocando-se para a esquerda. Diferente da situação do contínuo, na rede constatamos a duplicação dos férmions. O segundo fermion está na região de grandes momenta ou de baixa frequência. Observamos pois, que há um problema de degenerescência da energia, em razão da presença deste outro fermion. Portanto, estes modos de baixa frequência tem de ser removidos.

Wilson<sup>(4)</sup> tentou contornar este problema, acrescentando à Hamiltoniana de Dirac discreta um termo tal que a energia próxima a  $ka = \pi$  fosse deslocada. Neste caso, a equação de movimento tem a seguinte forma:

$$\partial_t \psi(n) = \frac{i\alpha}{a} \mu u ka \psi(n) + \frac{2\gamma_2 \beta}{a} (1 - \cos ka) \psi(n)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro arbitrário adimensional. Graficamente a relação de dispersão (para  $\alpha = 1$  e  $W > 0$ ) é dada por:



Agora, observe que para  $ka \ll 0$ , o termo extra não afeta o limite do contínuo, enquanto que para  $ka \sim \pi$ , ocorre uma contribuição tipo massa, da ordem de  $\frac{1}{a}$ , que no limite do contínuo diverge, quebrando a simetria quiral da teoria.

Já a aproximação na rede da equação de Dirac-Kähler é tal que, o número de graus de liberdade do contínuo é o mesmo que o da rede. Comparando-se a representação matricial da equação de Dirac-Kähler com a de Dirac, verificamos que a primeira contém dois espinores de Dirac. A forma diferencial é escrita como:

$$\psi = f_0 + f_1 d\alpha^1 + f_2 d\alpha^2 + f_{12} d\alpha^{12}$$

e assim, a representação matricial é dada por:

$$\psi = \begin{pmatrix} f_0 + f_2 & f_{12} - f_1 \\ f_{12} + f_1 & f_0 - f_2 \end{pmatrix}$$

onde  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  e  $f_{12}$  são variáveis de Grassmann reais.

A multiplicidade dos férmions estabelecida na formulação de Becker-Joos, é igual a de Susskind<sup>(9)</sup> para a aproximação na rede da equação de Dirac.

## CAPÍTULO III

### BOSONIZAÇÃO

Neste capítulo estabelecemos um *ansatz* para equação de Dirac-Kähler na rede espacial, tendo sempre como guia o contínuo. Calculamos, em seguida, a expressão da conservação da corrente na rede, obtendo as componentes da corrente em termos desse *ansatz*. O processo de bosonização na rede espacial é, então, estudado.

#### 3.1- ASPECTOS GERAIS DO PROCESSO DE BOSONIZAÇÃO

Modelos bidimensionais de teorias de campos, embora não-realísticos, têm servido como laboratório para formulações a dimensões superiores e, o fenômeno de bosonização (transmutação férmion-bóson) observado neste contexto, surge como uma fonte muito importante de informação a respeito mesmo das estruturas de tais teorias. A equivalência entre uma teoria fermiônica e outra bosônica pode ser verificada à luz das seguintes linhas<sup>(5)</sup>:

- i) através da comparação das respectivas funções de Green, após ajuste de parâmetros,
- ii) construindo-se uma solução operatorial da equação de campo de uma teoria em termos de expressões não-locais (point split) do operador da outra.

Tem-se que, para implementarmos o primeiro método, devemos ter um conhecimento a priori de que as duas teorias estão relacionadas, a fim de que possamos saber como compará-las. A segunda via desponta como a mais interessante, uma vez que a construção explícita do operador fermiônico em termos do bosônico é mais direta e permite de algum modo elucidar, independente do modelo e não-perturbativamente, as características de uma teoria com muitas componentes. A formulação bosônica de uma teoria multi-fermiônica com simetrias quiral e interna, em particular, é de grande interesse.

O processo de transmutação férmion-bóson só tem validade se os operadores fermiônicos\*:

- i) satisfazem as relações de anticomutação canônicas,
- ii) dão as funções de Green corretas,
- iii) satisfazem a propriedade de "Cluster"
- iv) são invariantes de Lorentz.

Dentre os modelos para os quais têm-se estabelecido tal equivalência, um exemplo clássico devido a Coleman<sup>(6)</sup>, é aquele entre o modelo de Thirring massivo e a teoria Sine-Gordon quântica. Aqui, um férmion elementar e a carga do primeiro modelo corresponde a um sóliton e ao número topológico deste sóliton no segundo modelo.

---

\* Ver apêndice A

Na bosonização Abeliana a duas dimensões, via método operatorial, o campo fermiônico é escrito como uma exponencial do campo bosônico:

$$\psi(x) = : e^{i X_{\pm}(x)} : \quad (\text{III.1})$$

onde  $: \cdot :$  significa ordenamento normal e  $X_{\pm}(x) = \varphi(x) \mp \tilde{\varphi}(x)$ ,

com  $\tilde{\varphi}$  dual de  $\varphi$ . A existência da relação

$$J_{\mu} = \frac{1}{i\pi} \partial_{\mu} \varphi \quad (\text{III.2})$$

aparece como o ponto básico na verificação da equivalência entre as teorias. Aqui,  $J_{\mu}$  é uma corrente vetorial, associada a um campo fermiônico sem massa, escrita como o gradiente de um campo bosônico real livre,  $\varphi$ , relacionado com o seu dual,  $\tilde{\varphi}$ , da seguinte forma:

$$\partial_{\mu} \varphi = \epsilon_{\mu\nu} \partial_{\nu} \tilde{\varphi} \quad (\text{III.3})$$

Agora, a bosonização não-Abeliana tem sido estudada via métodos funcionais, onde o determinante fermiônico aparece como objeto fundamental<sup>(7)</sup>.

### 3.2- BOSONIZAÇÃO À LA KLAIBER

Em 1967 Klaiber<sup>(8)</sup> propôs uma solução operatorial para a teoria de Dirac sem massa a duas dimensões, que possui certas peculiaridades em razão da dimensionalidade do espaço-tempo.

Considera-se um espinor de componentes  $\psi_1$  e  $\psi_2$ , cuja equação de movimento é dada por:

$$\not\partial\psi(x) = 0$$

com as matrizes- $\gamma$  na representação:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \gamma^3 = \gamma^2\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A decomposição de Fourier é da forma:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk_1 \left( a(k_1) e^{ik \cdot x} + b(k_1) e^{-ik \cdot x} \right) u(k_1) \quad (\text{III.4})$$

com  $k_0 = |k_1|$ . O espinor  $u(k_1)$  é representado por:

$$u(k_1) = \begin{pmatrix} \theta(-k_1) \\ \theta(k_1) \end{pmatrix}$$

satisfazendo

$$\gamma \cdot k u(k_1) = 0$$

e

$$u(k_1) \bar{u}(k_1) = \frac{1}{2k_0} \gamma \cdot k_1 \quad (\text{III.5})$$

Das equações de movimento,

$$(\partial_t - \partial_x) \psi_1(x) = 0$$

$$(\partial_t + \partial_x) \psi_2(x) = 0$$

temos que  $\psi_1 = \psi_1(t+x)$  e  $\psi_2 = \psi_2(t-x)$ , isto é, as

componentes dependem de  $(t+x)$  e  $(t-x)$ , respectivamente.

O campo  $\psi(x)$ , então, tem como componentes:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dk_1 \left( a^\dagger(-k_1) e^{ik_1(t+x)} + b(-k_1) e^{-ik_1(t+x)} \right)$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dk_1 \left( a^\dagger(k_1) e^{ik_1(t-x)} + b(k_1) e^{-ik_1(t-x)} \right) \quad (\text{III.6})$$

tal que os operadores  $a$  e  $b$  satisfazem as relações de anticomutação:

$$\{a(k_1), a^\dagger(k'_1)\} = \{b(k_1), b^\dagger(k'_1)\} = \delta(k_1 - k'_1)$$

Considere a seguinte notação para os operadores:

$$A_1^\#(u_1) = a^\#(-u_1)$$

$$B_1(u_1) = b(-u_1)$$

(III.7)

$$A_2^\#(u_1) = a^\#(u_1)$$

$$B_2(u_1) = b(u_1)$$

então:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty du_1 \left( B_1(u_1) e^{-ik_1(t+x)} + A_1^\#(u_1) e^{ik_1(t+x)} \right)$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty du_1 \left( B_2(u_1) e^{-ik_1(t-x)} + A_2^\#(u_1) e^{ik_1(t-x)} \right)$$

A corrente vetorial

$$J_\mu(x) = : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) :$$

(III.8)

e a pseudo-corrente:

$$\begin{aligned} J_{\mu 3}(x) &= : \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \gamma_3 \psi(x) : \\ &= \epsilon^{\mu\nu} J_{\nu}(x) \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

onde  $\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\gamma_{\mu} \gamma_3 = \epsilon^{\mu\nu} \gamma_{\nu}$

(relação válida somente em 2-d), são ambas conservadas na teoria sem massa:

$$\partial_{\mu} J^{\mu}(x) = \partial_{\mu} \epsilon^{\mu\nu} J_{\nu}(x) = 0 \quad (\text{III.10})$$

e o campo  $J_{\mu}(x)$  satisfaz

$$\square J_{\mu}(x) = 0 \quad (\text{III.11})$$

isto é,  $J_{\mu}(x)$  é um campo livre sem massa. As componentes da corrente são dadas por:

$$J_0(x) = : \psi_1^{\dagger}(x) \psi_1(x) : + : \psi_2^{\dagger}(x) \psi_2(x) : \quad (\text{III.12})$$

$$J_1(x) = : \psi_1^{\dagger}(x) \psi_1(x) : - : \psi_2^{\dagger}(x) \psi_2(x) :$$

Klaiber encontrou uma representação para  
seguinte forma\*:

$J_{\mu}(x)$

da

$$J_{\mu}(x) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dk_1}{\sqrt{2k_0}} k_{\mu} \left( c(k_1) e^{-i k \cdot x} - c^{\dagger}(k_1) e^{i k \cdot x} \right) \quad (\text{III.13})$$

onde

$$c(k_1) = \frac{i}{\sqrt{k_0}} \int dp_1 \left( \theta(k_1, p_1) \left[ b^{\dagger}(p_1) b(p_1 + k_1) - a^{\dagger}(p_1) a(p_1 + k_1) \right] + \theta(p_1, (k_1 - p_1)) a(k_1 - p_1) b(p_1) \right) \quad (\text{III.14})$$

e satisfazendo a relação de comutação:

$$[c(k_1), c^{\dagger}(p_1)] = \delta(k_1 - p_1)$$

tal que,  $c(k_1) \Omega = 0$ , onde  $\Omega$  vácuo original de  $a$  e  $b$ .

---

\* Ver apêndice B.

A corrente é escrita, então, como em (III.2), e o campo bosônico vem dado por:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int \frac{dk_1}{\sqrt{2k_0}} \left( c(k_1) e^{-ik \cdot x} - c^\dagger(k_1) e^{ik \cdot x} \right) \quad (\text{III.15})$$

Observamos aqui que Klaiber partindo de uma teoria fermiônica chegou a uma bosônica, ou dito de outro modo, ele implementou um processo de bosonização para a teoria de Dirac sem massa a duas dimensões. O que nos propomos estudar, neste ponto, é a possibilidade de um tal processo na rede espacial via formalismo de Dirac-Kähler.

### 3.3- "ANSATZ" PARA A EQUAÇÃO DE DIRAC-KÄHLER NA REDE

Vamos considerar, no contínuo, um campo fermiônico expresso por uma forma diferencial real e par<sup>(40)</sup>:

$$\psi = f_0 + \frac{f_{\mu\nu}}{2!} dx^{\mu\nu} \quad (\text{III.16})$$

que na forma matricial, é dada por:

$$\psi = \begin{pmatrix} f_0 - f_{12} & 0 \\ 0 & f_0 + f_{12} \end{pmatrix}$$

com as matrizes-  $\gamma$  na representação:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^3 = \gamma^2 \gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

As variáveis de Grassmann,  $f_0$  e  $f_{12}$ , satisfazem relações de anticomutação a tempos iguais, dadas por:

$$\{f_0(x), f_0(y)\} = \{f_{12}(x), f_{12}(y)\} = \delta(x-y)$$

$$\{f_0(x), f_{12}(y)\} = 0$$

e, na rede espacial, vamos impor que:

$$\{f_0(n), f_0(m)\} = \{f_{12}(n), f_{12}(m)\} = \delta_{n,m}$$

$$\{f_0(n), f_{12}(m)\} = 0$$

estas últimas também sejam satisfeitas.

Dadas as densidades Lagrangeanas para o contínuo e a rede espacial, respectivamente:

$$\mathcal{L} = \frac{i\dot{f}_0}{2} (\partial_t f_0 + \partial_x f_{12}) + \frac{i\dot{f}_{12}}{2} (\partial_x f_0 + \partial_t f_{12})$$

(III.17)

$$\mathcal{L} = \frac{i\dot{f}_0}{2} (\partial_t f_0 + \Delta f_{12}) + \frac{i\dot{f}_{12}}{2} (\Delta f_0 + \partial_t f_{12})$$

das equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = 0$$

$$\Delta_\mu^+ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\Delta_\mu^- f)} + \Delta_\mu^- \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\Delta_\mu^+ f)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta f} = 0$$

(III.18)

e tendo em conta o carácter de Grassmann de  $f_0$  e  $f_{12}$ , seguem as equações em movimento:

$$\left. \begin{aligned} \partial_t f_0 + \partial_x f_{12} &= 0 \\ \partial_t f_{12} + \partial_x f_0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(III.19)

$$\left. \begin{aligned} \partial_t f_0 + \Delta^- f_{12} &= 0 \\ \partial_t f_{12} + \Delta^+ f_0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(III.20)

Assim, as equações de Klein-Gordon são dadas por:

$$\left. \begin{aligned} (\partial_t^2 - \partial_x^2) f_0 &= 0 \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2) f_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.21)}$$

$$\left. \begin{aligned} (\partial_t^2 - \bar{\Delta} \Delta^+) f_0 &= 0 \\ (\partial_t^2 - \bar{\Delta} \Delta^+) f_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.22)}$$

Considere, agora,  $\eta_1 = f_0 - f_{12}$  e  $\eta_2 = f_0 + f_{12}$ , logo:

$$f_0 = \frac{f_0 + f_{12}}{2} + \frac{f_0 - f_{12}}{2} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}$$

$$f_{12} = \frac{f_0 + f_{12}}{2} - \frac{f_0 - f_{12}}{2} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2}$$

assim, para o contínuo e a rede espacial, respectivamente, temos

i)

$$\left. \begin{aligned} (\partial_t - \partial_x) \eta_1 &= 0 \\ (\partial_t + \partial_x) \eta_2 &= 0 \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2) \eta_1 &= 0 \\ (\partial_t^2 - \partial_x^2) \eta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.23)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & \left. \begin{aligned}
 & \left( \partial_t - \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) \eta_1 - \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \eta_2 = 0 \\
 & \left( \partial_t + \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) \eta_2 + \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \eta_1 = 0 \\
 & \left( \partial_t^2 - \Delta^- \Delta^+ \right) \eta_1 = 0 \\
 & \left( \partial_t^2 - \Delta^- \Delta^+ \right) \eta_2 = 0
 \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.24)}
 \end{aligned}$$

Observamos que, as componentes  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , na rede espacial, ficam misturadas pela equação de Dirac-Kähler.

A cocadeia geral é da forma:

$$\begin{aligned}
 \vec{\Phi}(n) &= \sum_{n, H} \phi(n, H) d^{n, H} \\
 &= \phi(n, 11) d^{n, 11} + \phi(n, 12) d^{n, 12} \\
 &= f_0(n) d^{n, 11} + f_{12}(n) d^{n, 12}
 \end{aligned}$$

$$\vec{\Phi}(n) = \begin{pmatrix} \eta_1(n) & 0 \\ 0 & \eta_2(n) \end{pmatrix} \quad \text{(III.25)}$$

onde,

$$\eta_1^+(n) = (t_0 - t_{12}) (n)$$

$$\eta_2^+(n) = (t_0 + t_{12}) (n)$$

Consideremos as soluções de onda plana:

$$\phi^+ = u_+(k, \#) e^{-i(\omega t + kna)}$$

$$\phi^- = u_-(k, \#) e^{-i(\omega t - kna)}$$

(III.26)

tal que:

$$\eta_1^+ = [u_+(k, 0) - u_+(k, 12)] e^{-i(\omega t + kna)}$$

$$\eta_2^+ = [u_+(k, 0) + u_+(k, 12)] e^{-i(\omega t + kna)}$$

(III.27)

$$\eta_1^- = [u_-(k, 0) - u_-(k, 12)] e^{-i(\omega t - kna)}$$

$$\eta_2^- = [u_-(k, 0) + u_-(k, 12)] e^{-i(\omega t - kna)}$$

(III.28)

Assim, verifiquemos a relação de dispersão na rede usando

(III.19), com

$$f_0^+ = u_+(k, 0) e^{-i(\omega t + kna)}$$

$$f_{12}^+ = u_+(k, 1/2) e^{-i(\omega t + kna)}$$

$$f_0^- = u_-(k, 0) e^{-i(\omega t - kna)}$$

$$f_{12}^- = u_-(k, 1/2) e^{-i(\omega t - kna)}$$

Lembrando que:

$$\Delta^+ f(n) = \frac{1}{a} [f(n+1) - f(n)]$$

$$\Delta^- f(n) = \frac{1}{a} [f(n) - f(n-1)]$$

Então,

$$\partial_t f_0^+ + \Delta^- f_{12}^+ = 0$$

$$\partial_t f_{12}^+ + \Delta^+ f_0^+ = 0$$

$$\partial_t f_0^+ = (-i\omega) f_0^+$$

$$\Delta^+ f_0^+ = f_0^+ \left( \frac{-i\kappa a - 1}{a} \right) = (-i\kappa) f_0^+ e^{-\frac{i\kappa a}{2}}$$

$$\Delta^- f_0^+ = f_0^+ \left( \frac{1 - e^{i\kappa a}}{a} \right) = (-i\kappa) f_0^+ e^{\frac{i\kappa a}{2}}$$

$$\partial_t f_{12}^+ = (-i\omega) f_{12}^+$$

$$\Delta^- f_{12}^+ = f_{12}^+ \left( \frac{1 - e^{i\kappa a}}{a} \right) = (-i\kappa) f_{12}^+ e^{\frac{i\kappa a}{2}}$$

$$\Delta^+ f_{12}^+ = f_{12}^+ \left( \frac{-i\kappa a - 1}{a} \right) = (-i\kappa) f_{12}^+ e^{-\frac{i\kappa a}{2}}$$

com  $\Omega = \frac{2}{a} \operatorname{sen} \frac{ka}{2}$ , vem

$$(-i\omega) f_0^+ + (-i\Omega) f_{1/2}^+ e^{i\frac{ka}{2}} = 0$$

$$(-i\omega) f_{1/2}^+ + (-i\Omega) f_0^+ e^{-i\frac{ka}{2}} = 0 \quad \therefore$$

$$\omega u_+(u, 0) + \Omega e^{i\frac{ka}{2}} u_+(u, 1/2) = 0$$

$$\Omega e^{-i\frac{ka}{2}} u_+(u, 0) + \omega u_+(u, 1/2) = 0$$

assim

$$\begin{pmatrix} \omega & \Omega e^{i\frac{ka}{2}} \\ \Omega e^{-i\frac{ka}{2}} & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_+(u, 0) \\ u_+(u, 1/2) \end{pmatrix} = 0$$

e para uma solução não trivial, temos:

$$\omega^2 - \Omega^2 = 0 \rightarrow \omega = \pm \Omega = \frac{2}{a} \operatorname{sen} \frac{ka}{2}$$

De  $u_+(u, 0) + e^{i\frac{ka}{2}} u_+(u, 1/2) = 0$

se escolhermos  $u_+(u, 0) = 1$ , então:

$$u_+(u, 1/2) = -e^{-i\frac{ka}{2}}$$

assim:

$$\eta_1^+ = \left( 1 + e^{-\frac{i\kappa a}{2}} \right) e^{-i(\omega t + \kappa na)}$$

(III.29)

$$\eta_2^+ = \left( 1 - e^{-\frac{i\kappa a}{2}} \right) e^{-i(\omega t + \kappa na)}$$

Por outro lado,

$$\partial_t f_0^- + \Delta^- f_{12}^- = 0$$

$$\partial_t f_{12}^- + \Delta^+ f_0^- = 0$$

E

$$\partial_t f_0^- = (-i\omega) f_0^-$$

$$\Delta^- f_0^- = f_0^- \left( \frac{1 - e^{-i\kappa a}}{a} \right) = i\kappa f_0^- e^{-\frac{i\kappa a}{2}}$$

$$\Delta^+ f_0^- = f_0^- \left( \frac{e^{i\kappa a} - 1}{a} \right) = i\kappa f_0^- e^{\frac{i\kappa a}{2}}$$

$$\partial_t f_{12}^- = (-i\omega) f_{12}^-$$

$$\Delta^- f_{12}^- = f_{12}^- \left( \frac{1 - e^{-i\kappa a}}{a} \right) = i\kappa f_{12}^- e^{-\frac{i\kappa a}{2}}$$

$$\Delta^+ f_{12}^- = f_{12}^- \left( \frac{e^{i\kappa a} - 1}{a} \right) = i\kappa f_{12}^- e^{\frac{i\kappa a}{2}}$$

então

$$(-i\omega) u_-(x,0) + i\Omega e^{-\frac{i\kappa a}{2}} u_-(x,1z) = 0$$

$$(-i\omega) u_-(x,1z) + i\Omega e^{\frac{i\kappa a}{2}} u_-(x,0) = 0$$

$$\omega u_-(x,0) - \Omega e^{-\frac{i\kappa a}{2}} u_-(x,1z) = 0$$

$$-\Omega e^{\frac{i\kappa a}{2}} u_-(x,0) + \omega u_-(x,1z) = 0$$

Assim:

$$\begin{pmatrix} \omega & -\Omega e^{-\frac{i\kappa a}{2}} \\ -\Omega e^{\frac{i\kappa a}{2}} & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_-(x,0) \\ u_-(x,1z) \end{pmatrix} = 0$$

e para uma solução não trivial, temos:

$$\omega^2 - \Omega^2 = 0 \rightarrow \omega = +\Omega = \frac{z}{a} \operatorname{sen} \frac{\kappa a}{2}$$

De  $u_-(x,0) - e^{-\frac{i\kappa a}{2}} u_-(x,1z) = 0$

se escolhemos  $u_-(x,0) = 1$ , então

$$u_-(x,1z) = e^{\frac{i\kappa a}{2}}$$

assim:

$$\eta_1^- = \left(1 - e^{i\frac{\mu a}{2}}\right) e^{-i(\omega t - \mu na)}$$

(III.30)

$$\eta_2^- = \left(1 + e^{i\frac{\mu a}{2}}\right) e^{-i(\omega t - \mu na)}$$

Para as equações:

$$\left(\partial_t - \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}\right) \eta_1^+ - \left(\frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2}\right) \eta_2^+ = 0$$

(III.31)

$$\left(\partial_t + \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}\right) \eta_2^+ + \left(\frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2}\right) \eta_1^+ = 0$$

também verificamos a relação de dispersão na rede\*

$$\omega = \frac{2}{a} \mu \mu \frac{a}{2}$$

(III.32)

---

\* Ver apêndice C

As auto-funções normalizadas ficam:

$$\eta_1^+ = \frac{\left(1 + e^{-i\frac{\kappa a}{2}}\right) e^{-i(\omega t + \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left(1 + \cos\frac{\kappa a}{2}\right)}}$$

(III.33)

$$\eta_2^+ = \frac{\left(1 - e^{i\frac{\kappa a}{2}}\right) e^{-i(\omega t + \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left(1 - \cos\frac{\kappa a}{2}\right)}}$$

$$\eta_1^- = \frac{\left(1 - e^{i\frac{\kappa a}{2}}\right) e^{-i(\omega t - \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left(1 - \cos\frac{\kappa a}{2}\right)}}$$

(III.34)

$$\eta_2^- = \frac{\left(1 + e^{i\frac{\kappa a}{2}}\right) e^{-i(\omega t - \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left(1 + \cos\frac{\kappa a}{2}\right)}}$$

Vamos considerar, agora, as superposições:

$$\chi_1 = \int_0^{\pi/a} d\kappa \left\{ \begin{aligned} & \Phi_{1,\kappa}^+ \eta_1^+ + A_{1,\kappa}^{(+)*} \eta_1^{(+)*} + \Phi_{1,\kappa}^- \eta_1^- + A_{1,\kappa}^{(-)*} \eta_1^{(-)*} \end{aligned} \right\}$$

$$X_L = \int_0^{\pi/a} du \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{B}_{2,\kappa}^+ \eta^+ + A_{2,\kappa}^{(+)*} \eta^{(+)*} + \mathcal{B}_{2,\kappa}^- \eta^- + A_{2,\kappa}^{(-)*} \eta^{(-)*} \end{aligned} \right\}$$

então:

$$\begin{aligned}
 X_I = \int_0^{\pi/a} du & \left\{ \frac{\mathcal{B}_{1,\kappa}^+ \left( 1 + e^{-\frac{i\kappa a}{2}} \right) e^{-i(\omega t + \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 + \cos \frac{\kappa a}{2} \right)}} + \right. \\
 & + \frac{A_{1,\kappa}^{(+)*} \left( 1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}} \right) e^{i(\omega t + \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 + \cos \frac{\kappa a}{2} \right)}} + \\
 & + \frac{\mathcal{B}_{1,\kappa}^- \left( 1 - e^{\frac{i\kappa a}{2}} \right) e^{-i(\omega t - \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 - \cos \frac{\kappa a}{2} \right)}} + \\
 & \left. + \frac{A_{1,\kappa}^{(-)*} \left( 1 - e^{-\frac{i\kappa a}{2}} \right) e^{i(\omega t - \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 - \cos \frac{\kappa a}{2} \right)}} \right\}
 \end{aligned}$$

(III. 35a)

$$\begin{aligned}
\chi_2 = & \int_0^{\pi/a} dk \left\{ \frac{\Phi_{2,\kappa}^+ \left( 1 - e^{-\frac{i\kappa a}{2}} \right) e^{-i(\omega t + \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 - \cos \frac{\kappa a}{2} \right)}} + \right. \\
& + \frac{A_{2,\kappa}^{(+)*} \left( 1 - e^{\frac{i\kappa a}{2}} \right) e^{i(\omega t + \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 - \cos \frac{\kappa a}{2} \right)}} + \\
& + \frac{\Phi_{2,\kappa}^- \left( 1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}} \right) e^{-i(\omega t - \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 + \cos \frac{\kappa a}{2} \right)}} + \\
& \left. + \frac{A_{2,\kappa}^{(-)*} \left( 1 + e^{-\frac{i\kappa a}{2}} \right) e^{i(\omega t + \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 + \cos \frac{\kappa a}{2} \right)}} \right\}
\end{aligned}$$

(III.35b)

Da equação de Dirac-Kähler:

$$\left( \partial_t - \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) \chi_1 - \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \chi_2 = 0$$

(III.36)

vamos estabelecer, agora, as relações entre os coeficientes das superposições, assim:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi/a} du \left[ \frac{\Phi_{1,\mu}^+ \left( 1 + e^{\frac{-iku}{2}} \right)}{\sqrt{4\pi \left( 1 + \cos \frac{ku}{2} \right)}} \left( -i\omega + iR \cos \frac{ku}{2} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{\Phi_{2,\mu}^+ \left( 1 - e^{\frac{-iku}{2}} \right)}{\sqrt{4\pi \left( 1 - \cos \frac{ku}{2} \right)}} \left( \frac{-iku/2 - e^{\frac{iku}{2}}}{2} \right) (-iR) \right] \\
 & \cdot e^{-i(\omega t + kna)} + \left[ \frac{A_{1,\mu}^{(+)*} \left( 1 + e^{\frac{iku}{2}} \right)}{\sqrt{4\pi \left( 1 + \cos \frac{ku}{2} \right)}} \left( i\omega - iR \cos \frac{ku}{2} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{A_{2,\mu}^{(+)*} \left( 1 - e^{\frac{iku}{2}} \right)}{\sqrt{4\pi \left( 1 - \cos \frac{ku}{2} \right)}} \left( \frac{e^{\frac{iku}{2}} - e^{-\frac{iku}{2}}}{2} \right) iR \right] e^{i(\omega t + kna)} + \\
 & + \left[ \frac{\Phi_{1,\mu}^- \left( 1 - e^{\frac{iku}{2}} \right)}{\sqrt{4\pi \left( 1 - \cos \frac{ku}{2} \right)}} \left( -i\omega - iR \cos \frac{ku}{2} \right) - \frac{\Phi_{2,\mu}^- \left( 1 + e^{\frac{iku}{2}} \right)}{\sqrt{4\pi \left( 1 + \cos \frac{ku}{2} \right)}} \right. \\
 & \left. (iR) \cdot \left( \frac{e^{\frac{iku}{2}} - e^{-\frac{iku}{2}}}{2} \right) \right] e^{-i(\omega t - kna)} +
 \end{aligned}$$

$$+ \left[ \frac{A_{1,\kappa}^{(-)*} (1 - e^{\frac{-i\kappa a}{2}})}{\sqrt{4\pi(1 - \cos \frac{\kappa a}{2})}} \left( i\omega - (-i\kappa) \cos \frac{\kappa a}{2} \right) - \frac{A_{2,\kappa}^{(-)*} (1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}) (-i\kappa)}{\sqrt{4\pi(1 + \cos \frac{\kappa a}{2})}} \right] e^{i(\omega t - \kappa na)} = 0 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{i\theta_{1,\kappa} (1 + e^{\frac{-i\kappa a}{2}}) (\cos \frac{\kappa a}{2} - 1)}{\sqrt{4\pi(1 + \cos \frac{\kappa a}{2})}} + \frac{\theta_{2,\kappa} (1 - e^{\frac{-i\kappa a}{2}}) \sin \frac{\kappa a}{2}}{\sqrt{4\pi(1 - \cos \frac{\kappa a}{2})}} \right] e^{-i(\omega t + \kappa na)} +$$

$$+ \left[ \frac{iA_{1,\kappa}^{(+)*} (1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}) (1 - \cos \frac{\kappa a}{2}) + A_{2,\kappa}^{(+)*} (1 - e^{\frac{i\kappa a}{2}}) \sin \frac{\kappa a}{2}}{\sqrt{4\pi(1 + \cos \frac{\kappa a}{2})}} \right] e^{i(\omega t + \kappa na)} +$$

$$+ \left[ \frac{-i\theta_{1,\kappa} (1 - e^{\frac{i\kappa a}{2}}) (1 + \cos \frac{\kappa a}{2}) + \theta_{2,\kappa} (1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}) \sin \frac{\kappa a}{2}}{\sqrt{4\pi(1 - \cos \frac{\kappa a}{2})}} \right] e^{-i(\omega t - \kappa na)} +$$

$$+ \left[ \frac{iA_{1,\kappa}^{(-)*} (1 - e^{\frac{-i\kappa a}{2}}) (1 + \cos \frac{\kappa a}{2}) + A_{2,\kappa}^{(-)*} (1 + e^{\frac{-i\kappa a}{2}}) \sin \frac{\kappa a}{2}}{\sqrt{4\pi(1 - \cos \frac{\kappa a}{2})}} \right] e^{i(\omega t - \kappa na)} = 0$$

Então,

$$\theta_{2,\kappa}^+ = i \frac{\frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \left( 1 - \cos \frac{\kappa a}{2} \right) \left( 1 + e^{\frac{-i\kappa a}{2}} \right) \theta_{1,\kappa}^+}{\sin \frac{\kappa a}{2} \left( 1 - e^{\frac{-i\kappa a}{2}} \right)} \quad (\text{III.37})$$

e quando

$$a \rightarrow 0 : \Phi_{2,k}^+ \rightarrow 0$$

$$A_{2,k}^{(+)*} = -i \frac{\sqrt{1 - \cos \frac{ka}{2}}}{1 + \cos \frac{ka}{2}} \frac{\left(1 - \cos \frac{ka}{2}\right) \left(1 + e^{\frac{ika}{2}}\right) A_{1,k}^{(+)*}}{\sin \frac{ka}{2} \left(1 - e^{\frac{ika}{2}}\right)}$$

(III.38)

e quando

$$a \rightarrow 0 : A_{2,k}^{(+)*} \rightarrow 0$$

$$\Phi_{1,k}^- = -i \frac{\sqrt{1 - \cos \frac{ka}{2}}}{1 + \cos \frac{ka}{2}} \frac{\sin \frac{ka}{2} \left(1 + e^{\frac{ika}{2}}\right) \Phi_{2,k}^-}{\left(1 + \cos \frac{ka}{2}\right) \left(1 - e^{\frac{ika}{2}}\right)}$$

(III.39)

e quando

$$a \rightarrow 0 : \Phi_{1,k}^{(-)} \rightarrow 0$$

$$A_{1,k}^{(-)*} = i \frac{\sqrt{1 - \cos \frac{ka}{2}}}{1 + \cos \frac{ka}{2}} \frac{\sin \frac{ka}{2} \left(1 + e^{-\frac{ika}{2}}\right) A_{2,k}^{(-)*}}{\left(1 + \cos \frac{ka}{2}\right) \left(1 - e^{-\frac{ika}{2}}\right)}$$

(III.40)

e quando

$$a \rightarrow 0 : A_{1,k}^{(-)*} \rightarrow 0$$

Usando

$$\left(\partial_t + \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}\right) \chi_2 + \left(\frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2}\right) \chi_1 = 0 \quad (\text{III.41})$$

verificamos as mesmas expressões para  $\Phi_{2,\kappa}^+$ ;  $A_{2,\kappa}^{(+)*}$ ;  $\Phi_{1,\kappa}^- = A_{1,\kappa}^{(-)*}$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \chi_1 = & \int_0^{\pi/a} dk \left\{ \frac{\Phi_{1,\kappa} \left(1 + e^{-\frac{i\kappa a}{2}}\right) e^{-i(\omega t + \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left(1 + \cos \frac{\kappa a}{2}\right)}} + \right. \\ & \left. + \frac{A_{1,\kappa}^* \left(1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}\right) e^{i(\omega t + \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left(1 + \cos \frac{\kappa a}{2}\right)}} + \right. \\ & - \frac{i \Phi_{2,\kappa} \left(1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}\right) \kappa n \frac{\kappa a}{2} e^{-i(\omega t - \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left(1 + \cos \frac{\kappa a}{2}\right)} \left(1 + \cos \frac{\kappa a}{2}\right)} \\ & \left. + \frac{i A_{2,\kappa}^* \left(1 + e^{-\frac{i\kappa a}{2}}\right) \kappa n \frac{\kappa a}{2} e^{i(\omega t - \kappa na)}}{\sqrt{4\pi \left(1 + \cos \frac{\kappa a}{2}\right)} \left(1 + \cos \frac{\kappa a}{2}\right)} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.42a})$$

$$\chi_2 = \int_0^{\infty} dk \left\{ \frac{i B_{1,k} \left( 1 + e^{-\frac{i k a}{2}} \right) \sin \frac{k a}{2} e^{-i(\omega t + k a)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 + \cos \frac{k a}{2} \right)} \left( 1 + \cos \frac{k a}{2} \right)} \right. \\ \left. - \frac{i A_{1,k} \left( 1 + e^{\frac{i k a}{2}} \right) \sin \frac{k a}{2} e^{i(\omega t + k a)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 + \cos \frac{k a}{2} \right)} \left( 1 + \cos \frac{k a}{2} \right)} \right\} +$$

(III. 42b)

$$+ \frac{B_{2,k} \left( 1 + e^{\frac{i k a}{2}} \right) e^{-i(\omega t - k a)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 + \cos \frac{k a}{2} \right)}} +$$

$$+ \frac{A_{2,k} \left( 1 + e^{-\frac{i k a}{2}} \right) e^{i(\omega t - k a)}}{\sqrt{4\pi \left( 1 + \cos \frac{k a}{2} \right)}} \left. \right\}$$

tal que, quando  $a \rightarrow 0$  :

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dk \left\{ B_{1,k} e^{-i(\omega t + k x)} + A_{1,k} e^{i(\omega t + k x)} \right\}$$

(III. 43)

$$\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dk \left\{ B_{2,k} e^{-i(\omega t - k x)} + A_{2,k} e^{i(\omega t - k x)} \right\}$$

as componentes do campo  $\chi(n)$  no contínuo são recuperadas, com os coeficientes dados como em (III.7).

### 3.4- BOSONIZAÇÃO NA REDE

A equação da conservação da corrente na rede espacial é da seguinte forma\*:

$$\partial_t J_0 - \Delta J_1 = 0 \quad (\text{III.44})$$

onde

$$J_0 = \chi_1^*(n) \chi_1(n) + \chi_2^*(n) \chi_2(n)$$

$$e \quad J_1 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \chi_1^*(n) \chi_1(n+1) + \chi_1^*(n+1) \chi_1(n) \right] \\ & - \left[ \chi_2^*(n) \chi_2(n+1) + \chi_2^*(n+1) \chi_2(n) \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.45})$$

Agora, sabemos que no contínuo, a duas dimensões, a corrente é dada por:

$$J_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_m \psi$$

onde  $\psi$  é um campo escalar e  $J_m$  uma corrente fermiônica.

\*

Ver Apêndice D

$$\chi_2 = \int_0^{\infty} dk \left\{ \frac{i \mathcal{B}_{1,k} \left(1 + e^{\frac{-ika}{2}}\right) \sin \frac{ka}{2} e^{-i(\omega t + kx)}}{\sqrt{4\pi \left(1 + \cos \frac{ka}{2}\right)} \left(1 + \cos \frac{ka}{2}\right)} \right. \\ \left. - \frac{i A_{1,k} \left(1 + e^{\frac{ika}{2}}\right) \sin \frac{ka}{2} e^{i(\omega t + kx)}}{\sqrt{4\pi \left(1 + \cos \frac{ka}{2}\right)} \left(1 + \cos \frac{ka}{2}\right)} \right\} +$$

(III.42b)

$$+ \frac{\mathcal{B}_{2,k} \left(1 + e^{\frac{ika}{2}}\right) e^{-i(\omega t - kx)}}{\sqrt{4\pi \left(1 + \cos \frac{ka}{2}\right)}} +$$

$$+ \frac{A_{2,k} \left(1 + e^{\frac{-ika}{2}}\right) e^{i(\omega t - kx)}}{\sqrt{4\pi \left(1 + \cos \frac{ka}{2}\right)}} \left. \right\}$$

tal que, quando  $a \rightarrow 0$  :

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dk \left\{ \mathcal{B}_{1,k} e^{-i(\omega t + kx)} + A_{1,k} e^{i(\omega t + kx)} \right\}$$

(III.43)

$$\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dk \left\{ \mathcal{B}_{2,k} e^{-i(\omega t - kx)} + A_{2,k} e^{i(\omega t - kx)} \right\}$$

as componentes do campo  $\chi(n)$  no contínuo são recuperadas, com os coeficientes dados como em (III.7).

### 3.4- BOSONIZAÇÃO NA REDE

A equação da conservação da corrente na rede espacial é da seguinte forma\*:

$$\partial_t J_0 - \Delta J_1 = 0 \quad (\text{III.44})$$

onde

$$J_0 = \chi_1^*(n) \chi_1(n) + \chi_2^*(n) \chi_2(n)$$

e

$$J_1 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \chi_1^*(n) \chi_1(n+1) + \chi_1^*(n+1) \chi_1(n) \right] \\ & - \left[ \chi_2^*(n) \chi_2(n+1) + \chi_2^*(n+1) \chi_2(n) \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.45})$$

Agora, sabemos que no contínuo, a duas dimensões, a corrente é dada por:

$$J_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_m \psi$$

onde  $\psi$  é um campo escalar e  $J_m$  uma corrente fermiônica.

\*

Ver Apêndice D

Assim sendo, nos perguntamos se para tempo contínuo e espaçamento discreto é possível a transmutação férmion-bóson.

Em analogia à Klaiber, definimos então, as seguintes componentes para a corrente na rede:

$$\vec{J}_0 = \partial_t \varphi(n) \quad \text{e} \quad \vec{J}_1 = \Delta^+ \varphi(n) \quad (\text{III.46})$$

tal que estas nos dê, via equação (III.44), a equação de Klein-Gordon na rede:

$$\left( \partial_t^2 - \Delta^- \Delta^+ \right) \varphi(n) = 0 \quad (\text{III.47})$$

para o campo escalar  $\varphi(n)$ .

O cálculo da componente  $\vec{J}_0$  em termos das expressões (III.42) e do campo escalar  $\varphi(n)$  que satisfaz  $\vec{J}_0 = \partial_t \varphi(n)$ , são deixados para o apêndice D.

O que procuramos, agora, estabelecer, é se  $\vec{J}_1$  coincide com  $\vec{J}_1$  dado por (III.45).

Vamos concentrar a nossa atenção naqueles termos de  $\vec{J}_1$  dados por (III.42) que não vão a zero no limite do contínuo\*:

$$\vec{J}_1 = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8.$$

---

\* Ver Apêndice D

onde:

$$g_1 = \int_0^{\pi/a} du' du \bar{g}_1 \cos\left(\frac{u+u'}{2}a\right) e^{i\frac{(u-u')a}{2}}$$

$$g_2 = \int_0^{\pi/a} du' du \bar{g}_2 \cos\left(\frac{u-u'}{2}a\right) e^{i\frac{(u+u')a}{2}}$$

$$g_3 = \int_0^{\pi/a} du' du \bar{g}_3 \cos\left(\frac{u-u'}{2}a\right) e^{-i\frac{(u+u')a}{2}}$$

$$g_4 = \int_0^{\pi/a} du' du \bar{g}_4 \cos\left(\frac{u+u'}{2}a\right) e^{-i\frac{(u-u')a}{2}}$$

$$g_5 = - \int_0^{\pi/a} du' du \bar{g}_5 \cos\left(\frac{u+u'}{2}a\right) e^{-i\frac{(u-u')a}{2}}$$

$$g_6 = - \int_0^{\pi/a} du' du \bar{g}_6 \cos\left(\frac{u-u'}{2}a\right) e^{-i\frac{(u+u')a}{2}}$$

$$g_7 = - \int_0^{\pi/a} du du' \bar{g}_7 \frac{\cos \frac{(u-u')a}{2}}{2} e^{\frac{i(u+u')a}{2}}$$

$$g_8 = - \int_0^{\pi/a} du du' \bar{g}_8 \frac{\cos \frac{(u+u')a}{2}}{2} e^{\frac{i(u-u')a}{2}}$$

e a componente  $\tilde{J}_1$  (a menos dos termos que vão a zero no limite do contínuo) é escrita como:

$$\tilde{J}_1 = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 + \tilde{g}_3 + \tilde{g}_4 + \tilde{g}_5 + \tilde{g}_6 + \tilde{g}_7 + \tilde{g}_8.$$

onde:

$$\tilde{g}_1 = \int_0^{\pi/a} du du' \bar{g}_1 \frac{\frac{\sin \frac{(u-u')a}{2}}{2} - \frac{\sin u'a}{2}}{\frac{\sin ua}{2} - \frac{\sin u'a}{2}} e^{\frac{i(u-u')a}{2}}$$

$$\tilde{g}_2 = \int_0^{\pi/a} du du' \bar{g}_2 \frac{\frac{\sin \frac{(u+u')a}{2}}{2}}{\frac{\sin ua}{2} + \frac{\sin u'a}{2}} e^{\frac{i(u+u')a}{2}}$$

$$\alpha_3^2 = \int_0^{\frac{\pi}{a}} du du' \bar{g}_3 \frac{\sin\left(\frac{u+u'}{2}a\right)}{\frac{\sin ua}{2} + \frac{\sin u'a}{2}} e^{-i\left(\frac{u+u'}{2}a\right)}$$

$$\alpha_4^2 = \int_0^{\frac{\pi}{a}} du du' \bar{g}_4 \frac{\sin\left(\frac{u-u'}{2}a\right)}{\frac{\sin ua}{2} - \frac{\sin u'a}{2}} e^{-i\left(\frac{u-u'}{2}a\right)}$$

$$\alpha_5^2 = - \int_0^{\frac{\pi}{a}} du du' \bar{g}_5 \frac{\sin\left(\frac{u-u'}{2}a\right)}{\frac{\sin ua}{2} - \frac{\sin u'a}{2}} e^{-i\left(\frac{u-u'}{2}a\right)}$$

$$\alpha_6^2 = - \int_0^{\frac{\pi}{a}} du du' \bar{g}_6 \frac{\sin\left(\frac{u+u'}{2}a\right)}{\frac{\sin ua}{2} + \frac{\sin u'a}{2}} e^{-i\left(\frac{u+u'}{2}a\right)}$$

$$\tilde{g}_7 = - \int_0^{\frac{\pi}{a}} du du' \bar{g}_7 \frac{\frac{\sin \frac{(u+u')a}{2}}{2}}{\frac{\sin \frac{ua}{2} + \sin \frac{u'a}{2}}{2}} e^{i \frac{(u+u')a}{2}}$$

$$\tilde{g}_8 = - \int_0^{\frac{\pi}{a}} du du' \bar{g}_8 \frac{\frac{\sin \frac{(u-u')a}{2}}{2}}{\frac{\sin \frac{ua}{2} - \sin \frac{u'a}{2}}{2}} e^{i \frac{(u-u')a}{2}}$$

Da análise dos termos obtidos para as componentes:

$$J_1 = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & [X_1^\dagger(n) X_1(n+1) + X_1^\dagger(n+1) X_1(n)] \\ & - [X_2^\dagger(n) X_2(n+1) + X_2^\dagger(n+1) X_2(n)] \end{aligned} \right\}$$

e

$$\tilde{J}_1 = \Delta^\dagger \varphi(n).$$

verificamos que, nesta transposição ingênua do processo de bosonização à la Klaiber, para a rede espacial, a transmutação

férmion-bóson não se completa. A razão é que, os coeficientes dados em termos de senos e cossenos que aparecem nas expressões  $g$  e  $\tilde{g}$  das correntes  $J_1$  e  $\tilde{J}_1$ , não se reduzem um no outro. Independente deste ponto, o limite do contínuo destas correntes é o mesmo.

Concluimos, pois, que ao menos para o nosso ansatz não temos a bosonização correta, isto é, o campo  $\psi(n)$  definido à la Klaiber não satisfaz a equação de Klein-Gordon na rede espacial.

## CAPÍTULO IV

### LAGRANGEANAS TOPOLÓGICAS

Vamos tentar derivar, via formalismo de Dirac-Kähler, algumas Lagrangeanas Topológicas. Tais teorias têm relevância tanto do ponto de vista físico como matemático.

A construção de um operador Dirac-Kähler nilpotente é obtida com a introdução de operadores fermiônicos modos zero de Kato-Ogawa. Especificamos, então, um ansatz para os campos e Lagrangeanas a 1-d e 2-d são obtidas. Em particular, quantizamos a teoria unidimensional e bidimensional, via formalismo B.R.S.T., e verificamos para a teoria unidimensional que soluções tipo instanton não contribuem para o termo de superfície da ação.

#### 4.1- ASPECTOS GERAIS DAS TEORIAS TOPOLÓGICAS

Não faz muito tempo que técnicas de teorias de campos, vem sendo usadas, para o cálculo de invariantes topológicos relacionados com espaços de dimensão inferior a quatro. Witten<sup>(44)</sup>, mais recentemente, construiu uma teoria supersimétrica a quatro dimensões, cujos invariantes topológicos surgem como funções de correlação desta teoria.

Um invariante topológico é caracterizado como alguma coisa que depende unica e exclusivamente da estrutura suave ou diferenciável da variedade na qual uma dada teoria é construída.

Uma teoria de campo topológica, por definição, é uma teoria quântica de campo cuja função de partição independe da métrica, isto é, entendemos que a teoria possui uma covariância geral. Em geral, neste tipo de teoria, não há graus de liberdade dinâmicos, todas as excitações são de natureza topológica ou, dito de outro modo, não há observáveis locais em razão da invariância por difeomorfismo da teoria.

Verifica-se que estruturas relacionadas com instantons, monopolos, vórtices, etc., surgem de maneira natural no processo de quantização de Lagrangeanas nulas, Gaussianas, etc. Tem-se, então, que a simetria é mais fundamental que a própria Lagrangeana<sup>(12)</sup>.

Tome-se, por exemplo, o seguinte objeto:

$$S_T = \int_M \text{tr} (F \wedge F) \quad (\text{IV.1})$$

um invariante topológico que mede a primeira classe de Pontryagin do "Vector Bundle", onde a conexão  $A_\mu$  e a curvatura  $F_{\mu\nu}$  são definidas. Assim,  $S_T$  é uma função constante, invariante sob todas as transformações e não apenas invariante segundo o grupo de transformações de gauge como a ação de Yang-Mills ordinária:

$$S_{Y-M} = \int_M \text{tr} (*F \wedge F) \quad (\text{IV.2})$$

O integrando de  $S_T$  pode ser escrito como uma derivada total:

$$S_T = \int_M dt_n \left( F_n A - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (\text{IV.3})$$

e assim, classicamente, nenhuma dinâmica não-trivial surge.

As ações  $S_T$  e  $S_{YM}$  são invariantes por transformações de gauge, com os campos na representação adjunta.

$$\delta A_\mu = g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g$$

e

$$g \equiv e^{-\epsilon(x)}$$

, elemento do grupo de gauge.

Assim,

$$\begin{aligned} \delta A_\mu &= [1 + \epsilon(x)] A_\mu [1 - \epsilon(x)] \\ &\quad - [1 + \epsilon(x)] \partial_\mu \epsilon(x) [1 - \epsilon(x)] \\ &= A_\mu - (\partial_\mu + [A_\mu, \cdot]) \epsilon(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

então:

$$\delta^g A_\mu = -\mathcal{D}_\mu \epsilon(x)$$

com  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \cdot]$  derivada covariante de gauge

na representação adjunta e  $\epsilon(x)$  parâmetro infinitesimal com

valores na álgebra de Lie do grupo de gauge.

Essencialmente,  $S_T$  é um invariante topológico porque não muda sob variações locais do potencial  $A_\mu$ :

$$\delta A_\mu = \epsilon_\mu(x) \equiv \epsilon_\mu^a(x) t_a$$

onde  $t_a$  geradores da álgebra de Lie.

O tensor intensidade de campo,  $F_{\mu\nu}$ , transforma-se como o campo de gauge:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \\ \delta F_{\mu\nu} &= \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu + [\delta A_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \delta A_\nu] \\ &= \partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu + [\epsilon_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \epsilon_\nu] \\ &= (\partial_\mu + [A_\mu, \cdot]) \epsilon_\nu \\ &\quad - (\partial_\nu + [A_\nu, \cdot]) \epsilon_\mu \\ &= D_\mu \epsilon_\nu - D_\nu \epsilon_\mu \\ &\equiv \frac{D\epsilon}{[\mu\nu]} \end{aligned}$$

A variação da ação, então, pode ser calculada:

$$\begin{aligned}
 \delta S_T &= \int t_n \left( \delta {}^*F^{nr} F_{nr} + {}^*F^{nr} \delta F_{nr} \right) dv \\
 &= \int t_n \left( \frac{1}{2} f^{nr\alpha\beta} \delta F_{\alpha\beta} F_{nr} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} f^{nr\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \delta F_{nr} \right) dv \\
 &= c \int t_n ({}^*F^{nr} \delta F_{nr}) dv \\
 &= c \int t_n ({}^*F^{nr} D_\mu \epsilon_r) dv
 \end{aligned}$$

e como:

$$D_\mu ({}^*F^{nr} \epsilon_r) = D_\mu {}^*F^{nr} \epsilon_r + {}^*F^{nr} D_\mu \epsilon_r$$

o primeiro termo é nulo pela identidade de Bianchi:  $D_\mu F_{\alpha\beta} = 0$ ,

assim:

$$\delta S_T = c \int t_n \left( D_\mu ({}^*F^{nr} \epsilon_r) - D_r ({}^*F^{nr} \epsilon_n) \right) dv$$

e para transformações arbitrárias de  $A_\mu$ :  $\delta A_\mu = \epsilon_\mu(x)$ .

vem:

$$\delta S_T = c \int t_n \left( D_\mu ({}^*F^{nr} \delta A_r) - D_r ({}^*F^{nr} \delta A_n) \right) dv$$

$$= c \int dt \left[ \left( {}^*F^{M\nu} D_\mu \delta A_\nu \right) - \left( {}^*F^{M\nu} g_{\nu\rho} \delta A_\mu \right) \right] dV$$

$$= \tilde{c} \int dt \left( {}^*F^{M\nu} D_\mu \delta A_\nu \right) dV$$

e integrando por partes, com  $\delta A_\nu(x) = 0$  no infinito, verificamos que a ação é invariante:

$$\delta S_T = 0$$

A ação clássica  $S_T$ , temos visto, leva a uma dinâmica trivial, porque pode ser escrita como uma derivada total. Por outro lado, verifica-se, que a situação torna-se outra quando quantizamos a teoria via formalismo B.R.S.T, isto é, a teoria quântica assume um caráter topológico. Isto vem do fato de que a função de partição da teoria depende da estrutura suave da variedade e não da métrica. A métrica está presente na ação B.R.S.T. em razão do processo de fixação de gauge da quantização.

O método de quantização B.R.S.T.<sup>(13)</sup>, é um procedimento que envolve a ampliação do espaço de Hilbert de uma dada teoria, via introdução de objetos não físicos, chamados fantasmas e anti-fantasmas. Estes campos asseguram a unitariedade da teoria,

no sentido de que as transformações físicas são aquelas que preservam a norma dos estados físicos e, a transformação B.R.S.T., que é nilpotente nos campos, mistura-os com outros de estatísticas diferentes. Assim, estes campos como um todo são considerados componentes de um único objeto geométrico.

O formalismo B.R.S.T. fixa o gauge, eliminando os graus de liberdade espúrios tal que os estados físicos são adequadamente definidos como aqueles estados com norma definida positiva. Por outro lado, ao contrário do procedimento comum de fixação de gauge que quebra a invariância de gauge, este formalismo mantém a invariância B.R.S.T. do sistema.

O princípio de simetria B.R.S.T. garante que os estados físicos são aqueles que ficam invariantes sob a ação da carga B.R.S.T.,  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B} | \text{fis} \rangle = 0$$

e uma vez que a Lagrangeana efetiva é invariante por B.R.S.T., à Lagrangeana original acrescentamos uma transformação B.R.S.T. de uma função geral dos campos físicos, não-físicos e auxiliares.

Assim, temos:

$$\mathcal{L}_{ef} = \mathcal{L}_0 + \delta \mathcal{G} \tag{IV.4}$$

onde

$$\delta \mathcal{G} = -i \epsilon \{ \mathcal{B}, \mathcal{G} \}$$

e  $\epsilon$  um parâmetro anticomutativo.

A carga B.R.S.T.,  $\mathcal{Q}$ , é o gerador das transformações e vem do teorema de Noether após a fixação de gauge da teoria.

A função de partição é do tipo:

$$Z = \int \mathcal{D}[\text{campos}] e^{-S_q} \quad (\text{IV.5})$$

onde a ação quântica é dada por:

$$S_q = S_x + \hbar \mathcal{Q}, \quad (\text{IV.6})$$

## 4.2- DERIVAÇÃO DE LAGRANGEANAS TOPOLÓGICAS

### VIA FORMALISMO DE DIRAC-KÄHLER

Vimos que no formalismo diferencial a equação de Dirac-Kähler no contínuo pode ser escrita na forma:

$$(d + \delta) \Phi = 0$$

Por outro lado, podemos verificar que, a derivada exterior carrega a transformação do campo de gauge:

$$\delta^G A = d \lambda \tag{IV.7}$$

onde  $A$  é a 1-forma conexão dada por

$$A = A_\mu(x) dx^\mu$$

e  $\lambda(x)$  é o parâmetro infinitesimal da transformação

$$\delta^G A_\mu dx^\mu = \partial_\mu \lambda dx^\mu$$

isto é

$$\delta^G A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda(x)$$

para o caso de uma teoria de gauge Abelianiana.

A ação de uma dada teoria, neste formalismo, pode ser escrita como:

$$S = \psi^+ Q \psi \tag{IV.8}$$

onde  $Q$  operador de Dirac-Kähler nilpotente,  $Q^2 = 0$ , e  $\psi$  um campo qualquer expresso como uma forma diferencial.

A transformação de gauge, neste caso, vem dada por:

$$\delta^6 \psi = Q \lambda$$

(IV.9)

sendo a ação invariante pela mesma:

$$\begin{aligned} \delta^6 S &= \delta^6 \psi + Q \psi + \psi + Q \delta^6 \psi \\ &= \lambda^\dagger Q + Q \psi + \psi + Q Q \lambda \\ &= \lambda^\dagger Q^2 \psi + \psi + Q^2 \lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

com  $Q$  hermitiano,  $Q = Q^\dagger$ .

Observe agora que, se os operadores derivada exterior e seu dual, para uma teoria unidimensional são dados por:

$$d = \frac{\partial}{\partial x} \cdot dt$$

$$\delta = - \frac{\partial}{\partial x} \cdot e_t$$

com  $e_t$  e  $dt$  satisfazendo  $\langle e_t, dt \rangle = 1$  e,  $d$  e  $\delta$ , nilpotentes,  $d^2 = 0$  e  $\delta^2 = 0$ , verificamos que  $Q^2 \neq 0$ :

$$Q^2 = d\delta + \delta d$$

$$\begin{aligned} Q^2 \psi &= \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot dt \right) \left( - \frac{\partial}{\partial x} \cdot e_t \right) + \left( - \frac{\partial}{\partial x} \cdot e_t \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot dt \right) \right\rangle \psi \\ &= - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \langle e_t, dt \rangle \psi \end{aligned}$$

logo

$$Q^2 = - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Assim sendo, para tornar  $Q$  nilpotente introduzimos os operadores fermiônicos modos zero de Kato-Ogawa,  $C$  e  $\bar{C}$ , que satisfazem<sup>(14)</sup>:

$$C = C^\dagger; \quad \bar{C} = \bar{C}^\dagger; \quad C^2 = 0; \quad \bar{C}^2 = 0; \quad \{C, \bar{C}\} = 1$$

e impomos:

$$\{C, \alpha^m\} = \{\bar{C}, \alpha^m\} = \{C, p^m\} = \{\bar{C}, p^m\} = 0$$

Agora, temos dois vácuos distintos para àqueles modos zero.

Considere  $|+\rangle$  um estado aniquilado por  $C$ :

$$C|+\rangle = 0$$

e da nilpotência de  $\bar{C}$ , vem que o estado

$$|-\rangle = \bar{C}|+\rangle$$

é a vácuo de  $\bar{C}$ :

$$\bar{C}|-\rangle = 0$$

e portanto:

$$|+\rangle = C|-\rangle$$

fecha a definição dos vácuos  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ .

Usando  $\langle c, \bar{c} \rangle = 1$ , verificamos que os estados  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  têm norma zero:

$$\begin{aligned}\langle +|+\rangle &= \langle +|(c\bar{c} + \bar{c}c)|+\rangle \\ &= \langle +|c\bar{c}|+\rangle + \langle +|\bar{c}c|+\rangle \\ &= \langle +|c^\dagger\bar{c}|+\rangle + \langle +|\bar{c}^\dagger c|+\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle -|-\rangle &= \langle -|(c\bar{c} + \bar{c}c)|-\rangle \\ &= \langle -|c\bar{c}|-\rangle + \langle -|\bar{c}c|-\rangle \\ &= \langle -|c^\dagger\bar{c}|-\rangle + \langle -|\bar{c}^\dagger c|-\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Introduzindo, agora, o operador métrico:

$$\theta = c + \bar{c}$$

vem:

$$i) \quad \langle +|\theta|+\rangle = \langle +|c|+\rangle + \langle +|\bar{c}|+\rangle = \langle +|-\rangle$$

$$ii) \quad \langle -|\theta|-\rangle = \langle -|c|-\rangle + \langle -|\bar{c}|-\rangle = \langle -|+\rangle$$

$$\text{iii)} \quad \langle - | \theta | + \rangle = \langle - | c | + \rangle + \langle - | \bar{c} | - \rangle = \langle - | - \rangle$$

$$\text{iv)} \quad \langle + | \theta | - \rangle = \langle + | c | - \rangle + \langle + | \bar{c} | - \rangle = \langle + | + \rangle$$

De (i) e (ii) o produto interno entre os vácuos  $| + \rangle$  e  $| - \rangle$  é normalizado a unidade:

$$\langle + | - \rangle = \langle - | + \rangle = 1$$

e de (iii) e (iv), temos:

$$\begin{aligned} \langle - | \theta | + \rangle &= \langle - | (c + \bar{c}) c | - \rangle \\ &= \langle - | c^2 | - \rangle + \langle - | \bar{c}^+ c | - \rangle \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\langle - | - \rangle = 0 ;$$

$$\begin{aligned} \langle + | \theta | - \rangle &= \langle + | (c + \bar{c}) \bar{c} | + \rangle \\ &= \langle + | c^+ \bar{c} | + \rangle + \langle + | \bar{c}^2 | + \rangle \end{aligned}$$

$$\langle + | + \rangle = 0$$

Vamos escolher o vácuo  $| - \rangle$ , tal que uma transformação dos campos vem escrita como:

$$\theta | - \rangle = Q \Lambda | - \rangle \quad (\text{IV.10})$$

onde  $Q$  atua sobre a zero-forma  $\Lambda | - \rangle$ .

Podemos, então, verificar, que o operador de Dirac-Kähler,  $Q$ , definido como:

$$Q = d + \delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2} c - \bar{c}$$

para a teoria unidimensional em consideração é nilpotente,  $Q^2 = 0$ :

$$Q^2 = \left( d + \delta - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \cdot c - \bar{c} \right)^2$$

e atuando sobre a zero forma:

$$\begin{aligned} Q^2 \lambda | \rightarrow &= \hbar d \delta + \delta d - dc \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - d\bar{c} - \delta c \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \delta \bar{c} \\ &- cd \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - c\delta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \bar{c}d - \bar{c}\delta + c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 + \bar{c}c \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \\ &+ c\bar{c} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \bar{c}^2 \hbar \lambda | \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^2 \lambda | \rightarrow &= \hbar d \delta + \delta d - (cd + dc) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (\delta c + c\delta) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &- (d\bar{c} + \bar{c}d) - (\delta\bar{c} + \bar{c}\delta) + (c\bar{c} + \bar{c}c) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left\{ \lambda | \rightarrow \right. \end{aligned}$$

$$Q^2 \lambda | \rightarrow = \left( -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \lambda | \rightarrow$$

e

$$Q^2 = 0$$

A. Ação para a teoria unidimensional.

Considere os campos  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  dados pelas formas diferenciais.

$$\psi = x dt + Gc$$

$$\psi^\dagger = x e_t + Gc$$

onde  $G$  é um campo auxiliar.

A ação assume a seguinte forma:

$$S = \int \langle -1 \psi^\dagger Q \psi | \rightarrow dt$$

onde

$$Q = \frac{\partial}{\partial x} dt - \frac{\partial}{\partial x} e_t - c \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \bar{c}$$

Calculando,

$$\langle -1 (x e_t + Gc) \left( \frac{\partial}{\partial x} dt - \frac{\partial}{\partial x} e_t - c \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \bar{c} \right) (x dt + Gc) | \rightarrow,$$

tendo em conta as propriedades de  $c$ ,  $\bar{c}$ ,  $dt$  e  $e_t$ , os únicos termos que contribuem são:

$$\langle -1 (x e_t) \left( \frac{\partial}{\partial x} dt \right) (Gc) | \rightarrow = x \frac{\partial G}{\partial x}$$

$$\langle -1 (Gc) \left( -\frac{\partial}{\partial x} e_t \right) (x dt) | \rightarrow = -G \frac{\partial x}{\partial x}$$

$$\langle -1 (x e_t) \left( -c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (x dt) | \rightarrow = x \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$$

$$\langle -1 (Gc) (-\bar{c}) (Gc) | \rightarrow = -G^2$$

Assim, a ação vem dada por:

$$\begin{aligned}
 S &= \int \left( x \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial x}{\partial t} + x \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \phi^2 \right) dt \\
 &= \int \left\{ \partial_t (x \phi) - \phi \dot{x} + \phi \dot{x} + \partial_t (x \dot{x}) - \dot{x}^2 - \phi^2 \right\} dt \\
 &= - \int dt (\dot{x} + \phi)^2 + \int \partial_t (x \dot{x} + x \phi) dt
 \end{aligned}$$

e a menos do termo de superfície (ver apêndice E para o cálculo da quantização B.R.S.T. de um modelo unidimensional):

$$S = - \int dt (\dot{x} + \phi)^2$$

Observe que, se se desvia  $\phi \rightarrow \phi - \dot{x}$ , a dependência em  $x$  é eliminada e o resultado é que temos uma função de partição que é uma integral Gaussiana pura.

Procuremos, agora, as transformações que deixam  $S$  invariante:

$$\delta \psi \rightarrow = Q \psi \rightarrow$$

temos:

$$\delta (x \dot{t} + \phi c) \rightarrow = \left( \frac{\partial}{\partial t} \dot{t} - \frac{\partial}{\partial t} \dot{t} - c \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \bar{c} \right) \psi \rightarrow$$

e assim, as transformações de simetria são as seguintes\*:

$$\delta x = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad \therefore \delta \dot{x} = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

$$\delta \phi = - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}$$

---

\* Observamos aqui que, na verdade, tal teoria é invariante por transformações arbitrárias, o mesmo valendo para as outras teorias derivadas nas páginas seguintes.

então:

$$\begin{aligned} \delta S &= -2 \int dt (\dot{x} + 6) (\delta \dot{x} + \delta 6) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Considere, agora, o seguinte ansatz para os campos:

$$\psi = x_j \sigma_j \dot{t} + \sigma_j G_j c$$

$$\psi^\dagger = x_n \sigma_n \dot{t} + \sigma_n G_n c$$

com:

$$t_n \sigma_n^2 = 1$$

$$t_n \sigma_n \sigma_j = \delta_{nj}$$

Calculando,  $\langle - | \psi^\dagger \otimes \psi | - \rangle$ , os termos que contribuem são os

seguintes:

$$\langle - | (x_n \sigma_n \dot{t}) \left( \frac{\partial}{\partial x} \cdot \dot{t} \right) (G_j \sigma_j c) | - \rangle = x_n t_n (\sigma_n \sigma_j) \frac{\partial}{\partial t} G_j$$

$$\langle - | (G_n \sigma_n c) \left( -\frac{\partial}{\partial x} \cdot \dot{t} \right) (x_j \sigma_j \dot{t}) | - \rangle = -G_n t_n (\sigma_n \sigma_j) \frac{\partial}{\partial x} x_j$$

$$\langle - | (x_n \sigma_n \dot{t}) \left( -c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (x_j \sigma_j \dot{t}) | - \rangle = x_n t_n (\sigma_n \sigma_j) \frac{\partial^2 x_j}{\partial t^2}$$

$$\langle - | (G_n \sigma_n c) (-c) (G_j \sigma_j c) | - \rangle = -G_n G_j t_n (\sigma_n \sigma_j)$$

Então,

$$S = \int (\dot{x}_i \dot{G}_i - G_i \dot{x}_i - x_i \ddot{x}_i - G_i^2) dt$$
$$= - \int (\dot{x}_i + G_i)^2 dt + \int \partial_t (x_i G_i + x_i \dot{x}_i) dt$$

e a menos do termo de superfície:

$$S = - \int (\dot{x}_i + G_i)^2 dt$$

As transformações de simetria são calculadas considerando

$$\Lambda = \sigma_i \lambda_i :$$

$$\delta \psi | \rightarrow = Q \lambda | \rightarrow$$
$$= Q \sigma_i \lambda_i | \rightarrow$$

assim:

$$\delta x^i = \frac{\partial \lambda^i}{\partial t} \quad \therefore \quad \delta \dot{x}^i = \frac{\partial^2 \lambda^i}{\partial t^2}$$

$$\delta G^i = - \frac{\partial^2 \lambda^i}{\partial t^2}$$

e a ação é invariante segundo estas transformações. Por outro lado, considere :

$$G^i \rightarrow G^i + \delta^i_j \partial_j V$$

assim:

$$\delta G^i = - \frac{\partial^2 \lambda^i}{\partial t^2} - \delta^i_j \partial_j \delta V$$

mas  $V = V(x^k)$ , então:

$$\delta V = V' \delta x^k = V' \lambda^k$$

E

$$\delta G^i = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} x^i - \delta^{ij} \dot{\Lambda}^k \partial_j \partial_k V - \delta^{ij} \partial_k V \partial_j \dot{\Lambda}^k$$

mas

$$\Lambda^i = \Lambda^i(t), \text{ logo } \partial_j \dot{\Lambda}^k = 0$$

E

$$\delta G^i = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} x^i - \dot{\Lambda}^k \partial_k (\delta^{ij} \partial_j V)$$

Assim, a ação Gaussiana na forma

$$S = - \int dt \left( G^i + \delta^{ij} \partial_j V + \dot{x}^i \right)^2$$

é invariante pelas transformações

$$\delta x^i = \frac{\partial \Lambda^i}{\partial t}$$

$$\delta G^i = -\frac{\partial^2 \Lambda^i}{\partial t^2} - \dot{\Lambda}^k \partial_k (\delta^{ij} \partial_j V)$$

Considere, agora, esta última ação com o termo de superfície:

$$S = - \int (\dot{x}^i + G^i + \delta^{ij} \partial_j V) dt$$

$$+ \int \partial_t (x_i b_i + x_i \dot{x}_i + x_i \delta^{ij} \partial_j V + G^i) dt$$

com a escolha  $\delta^i = 0$ , temos:

$$S = - \int (\dot{x}^i + v'(x^i))^2 dt + \int \partial_t (x_i \dot{x}_i + x_i v'(x_i)) dt$$

Sabemos da teoria supersimétrica de Witten, que soluções tipo instanton (soluções clássicas das equações de movimento no espaço-tempo Euclidiano com energia finita) são dadas por:

$$\dot{x}^i = \pm v'(x^i) \quad (\text{IV.11})$$

então, para estas soluções, verificamos que o termo de superfície, de fato, não contribui para a ação Gaussiana:

$$S = - \int dt (\dot{x}^i + v'(x^i))^2$$

## B. Ação para uma teoria bidimensional

Aqui, o operador de Dirac-Kähler é escrito como:

$$\mathbb{Q} = \partial_\mu dx^\mu - \partial_\mu e^\mu - \partial_\mu^2 c - \bar{c}$$

e o ansatz para os campos vem dado por:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{21}} (\psi \eta_\mu dx^\mu - c \mathbb{Q})$$

$$\psi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{21}} (\psi^* \eta_\mu^* e^\mu - c \mathbb{Q}^*)$$

onde  $\eta_2 = 1 = \eta_2^*$ ,  $\eta_1 = i$  e  $\eta_1^* = -i$ .  $\psi$  é um campo escalar complexo e  $\phi$  um campo Gaussiano aleatório.

O campo  $\psi$  pode também ser escrito como:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi (i dx^1 + dx^2) - c \phi \right]$$

$$\psi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi^* (-i e^1 + e^2) - c \phi^* \right]$$

ou

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi dx^\dagger - c \phi \right]$$

$$\psi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi^* e^- - c \phi^* \right]$$

onde

$$dx^\dagger = dx^2 + i dx^1 = dt + i dx$$

$$e^- = e^2 - i e^1 = e_t - i e_x$$

Calculando  $\langle -|\psi^\dagger \phi \psi| \rangle$ , os termos que contribuem

são:

$$\langle -| (\psi^\dagger \eta_\alpha^* e^\alpha) (\partial_m dx^m) (-c \phi) | \rangle$$

$$= -\psi^\dagger \eta_m^* \partial_m \phi = -\psi^\dagger (\partial_t - i \partial_x) \phi = -\psi^\dagger \partial \phi$$

$$\langle - | (\psi^\dagger \gamma_\alpha^\dagger e^\alpha) (-\partial_m^2 c) (\psi \gamma_\beta d\alpha^\beta) | - \rangle$$

$$= \psi^\dagger \gamma_\alpha^\dagger \partial_m^2 \psi \gamma_\beta \delta^{\alpha\beta} = 2 \psi^\dagger \partial_m^2 \psi$$

$$\langle - | (-c \sigma^*) (\partial_m d\alpha^m) (\psi \gamma_\beta d\alpha^\beta) | - \rangle$$

$$= -c \partial_m \psi \gamma_\beta d\alpha^m = -c \partial_1 \psi \gamma_2 dx^{12} - c \partial_2 \psi \gamma_1 dx^{21}$$

$$= -c (i \partial_x \psi - \partial_t \psi) dx^{12} = c (\partial_t + i \partial_x) \psi dx^{12}$$

$$= \partial_t \psi dx^{12} \cdot c$$

$$\langle - | (-c \sigma^*) (-\partial_m \epsilon^m) (\psi \gamma_\beta d\alpha^\beta) | - \rangle$$

$$= c \partial_m \psi \gamma_\beta \delta^m \beta = c \partial_m \psi \gamma_m = c (\partial_t + i \partial_x) \psi$$

$$= c \partial_t \psi$$

$$\langle - | (-c \sigma^*) (-c) (-c \sigma) | - \rangle$$

$$= -c c \sigma^*$$

Então:

$$\begin{aligned} \langle -|\psi^\dagger \not{\partial} \psi| \rangle &= -\psi^\dagger \not{\partial}_\mu \psi + 2\psi^\dagger \partial_\mu^2 \psi - G^\dagger \partial_\mu \psi \not{\partial}^\mu + \\ &+ G^\dagger \partial_\mu \psi \not{\partial}^\mu - G G^\dagger \end{aligned}$$

e a ação fica:

$$\begin{aligned} S &= \int \langle -|\psi^\dagger \not{\partial} \psi| \rangle dx dt \\ &= \int \left\{ -\psi^\dagger \not{\partial}_\mu \psi + 2\psi^\dagger \partial_\mu^2 \psi + \right. \\ &\quad \left. + G^\dagger \partial_\mu \psi \not{\partial}^\mu - G G^\dagger \right\} dx dt \end{aligned}$$

Agora, considere o termo

$$2\psi^* \partial_\mu^2 \psi$$

, temos que:

$$\partial_+ = \partial_t + i\partial_x$$

$$\partial_- = \partial_t - i\partial_x$$

então

$$\partial_+ \partial_- = \partial_t^2 + \partial_x^2 = \partial_\mu^2$$

logo,

$$2\psi^* \partial_\mu^2 \psi = 2\psi^* \partial_+ \partial_- \psi$$

Por outro lado,

$$\partial_- (\psi^* \partial_+ \psi) = \partial_- \psi^* \partial_+ \psi + \psi^* \partial_- \partial_+ \psi$$

$$\partial_+ (\psi^* \partial_- \psi) = \partial_+ \psi^* \partial_- \psi + \psi^* \partial_+ \partial_- \psi$$

$$\begin{aligned} 2\psi^* \partial_+ \partial_- \psi &= \partial_- (\psi^* \partial_+ \psi) + \partial_+ (\psi^* \partial_- \psi) - \partial_- \psi^* \partial_+ \psi \\ &\quad - \partial_+ \psi^* \partial_- \psi \end{aligned}$$

Ainda, considere:

$$dx^+ = dt + i dx$$

$$dx^- = dt - i dx$$

então:

$$\begin{aligned} dx^+ dx^- &= -i dt dx + i dx dt \\ &= -2i dt dx \\ &= 2i dx dt \quad \therefore \end{aligned}$$

$$dx dt = \frac{dx^+ dx^-}{2i}$$

O segundo termo da ação fica:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int 2 \psi^* \partial_m^2 \psi dx dt \\ &= \int 2 \psi^* \partial_+ \partial_- \psi \frac{dx^+ dx^-}{2i} \\ &= \frac{1}{2i} \int \left\{ 2 (\psi^* \partial_+ \psi) + \partial_+ (\psi^* \partial_- \psi) - \partial_- \psi^* \partial_+ \psi \right. \\ &\quad \left. - \partial_+ \psi^* \partial_- \psi \right\} dx^+ dx^- \\ &= \frac{1}{2i} \int \left\{ \partial_+ (\psi^* \partial_- \psi) dx^+ dx^- - \partial_- (\psi^* \partial_+ \psi) dx^- dx^+ \right. \\ &\quad \left. - \partial_+ \psi^* \partial_- \psi + \partial_- \psi^* \partial_+ \psi \right\} dx^+ dx^- \\ &= T_5 - \frac{1}{2i} \int \left\{ \partial_- \psi^* \partial_+ \psi + \partial_+ \psi^* \partial_- \psi \right\} dx^+ dx^- \end{aligned}$$

onde

$$T_P = \frac{1}{2i} \left\{ \partial_+ (\psi^* \partial_- \psi) dx^+ dx^- - \partial_- (\psi^* \partial_+ \psi) dx^- dx^+ \right\}$$

termo de superfície.

Voltando à expressão da ação:

$$\begin{aligned} S &= \int \left( \psi^* \partial_- \psi - \partial_+ \psi^* \psi - \partial_+ \psi^* \partial_- \psi + \partial_- \psi^* \partial_+ \psi - \psi^* \partial_+ \psi - \psi \partial_- \psi^* \right) \frac{dx^+ dx^-}{2i} \\ &\quad + T_P \\ &= \int \left( \psi^* \partial_- \psi + \partial_- \psi^* \psi + \partial_+ \psi^* \partial_- \psi - \partial_- \psi^* \partial_+ \psi + \psi^* \partial_+ \psi + \psi \partial_- \psi^* \right) dt dx \\ &\quad + T_P \\ &= \int \left( \psi^* \partial_- \psi + \partial_- \psi^* \psi + \partial_+ \psi^* \partial_- \psi - \partial_- \psi^* \partial_+ \psi + \psi^* \partial_+ \psi + \psi \partial_- \psi^* \right) dt dx \\ &\quad + T_S \\ &= \int (\psi - \partial_+ \psi) (\psi^* - \partial_- \psi^*) dt dx \\ &\quad + \int \left( \partial_- (\psi^* \psi) - \partial_+ (\psi^* \partial_- \psi) \right) dt dx \end{aligned}$$

Então, a menos do termo de superfície

$$\begin{aligned} S &= \int (\psi - \partial_+ \psi) (\psi^* - \partial_- \psi^*) dt dx \\ &= \int (\psi - \dot{\psi} - i\psi') (\psi^* - \dot{\psi}^* + i\psi') dt dx \end{aligned}$$



Em resumo, temos:

$$\lambda = \frac{1}{2} \partial_- \lambda_+$$

$$\delta\psi = \lambda$$

$$\delta\phi = \partial_+ \lambda$$

Agora:

$$\langle - | \delta\psi^\dagger = \langle - | \lambda_{\xi}^* \eta_{\xi}^* \mathcal{Q}^\dagger$$

então:

i)

$$\delta\psi_{\xi}^* \eta_{\xi}^* = \partial_{\beta} \lambda_{\xi}^* \eta_{\xi}^* = \partial_{\beta} (\lambda_{\xi}^* - i \lambda_{\xi}^*) = \partial_{\beta} \lambda_{\xi}^* = \partial_{\beta} \lambda$$

e

$$\left. \begin{array}{l} \delta\psi^* = \partial_t \lambda_- \\ -i \delta\psi^* = \partial_x \lambda_- \end{array} \right\} \delta\psi^* = \frac{1}{2} (\partial_t + i \partial_x) \lambda_- = \frac{1}{2} \partial_+ \lambda_- = \lambda^*$$

ii)

$$\begin{aligned} \delta \phi^* &= \partial_\beta \lambda^* \gamma^* = \partial_\beta \phi^* \gamma^* \\ &= (\partial_t - i \partial_x) \delta \psi^* \\ &= \partial_- \delta \psi^* = \partial_- \lambda^* \end{aligned}$$

As transformações de simetria são as seguintes:

$$\begin{aligned} \delta \psi &= \lambda \\ \delta \phi &= \partial_+ \lambda \\ \delta \psi^* &= \lambda^* \\ \delta \phi^* &= \partial_- \lambda^* \end{aligned}$$

A invariância da ação sob este conjunto de transformações é, então, verificada:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int h (\delta \phi - \partial_+ \delta \psi) (\phi^* - \partial_- \psi^*) + \\ &+ (\phi - \partial_+ \psi) (\delta \phi^* - \partial_- \delta \psi^*) \Big| dt dx = 0 \end{aligned}$$

Considere, agora,

$$G \rightarrow \tilde{G} + \frac{\partial V^*}{\partial \psi^*}$$

e

$$G^* \rightarrow \tilde{G}^* + \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

onde  $V$  função analítica de uma única variável, então:

$$S = \int (h + e) \left( \tilde{G}^* + \frac{\partial V}{\partial \phi} - e \phi^* \right) dt dx$$

como:

$$\tilde{G} = G - \frac{\partial V^*}{\partial \phi^*}$$

$$\tilde{G}^* = G^* - \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

as transformações vem dadas por:

$$\delta \tilde{G} = \delta G - \frac{\partial^2 V^*}{\partial \phi^{*2}} \delta \phi^*$$

$$\delta \tilde{G}^* = \delta G^* - \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \delta \phi$$

e assumindo, ainda, que:

$$\delta G = e \delta \phi$$

$$\delta G^* = e^* \delta \phi^*$$

a nova  $S$  é invariante por:

$$\delta \phi = \delta \phi$$

$$\delta \tilde{G}^* = e^* \delta \phi^* - \delta \phi^* \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^{*2}}$$

$$\delta \phi^* = \delta \phi^*$$

$$\delta \tilde{G} = e \delta \phi - \delta \phi \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Observamos aqui, que Birmingham e colaboradores<sup>(15)</sup>

consideraram uma teoria do tipo:

$$S_0 = \int dt dx \left( G - \psi \left( G + \frac{\partial V^{\dagger}}{\partial \psi^{\dagger}} - i\psi \right) \right) \left( G^{\dagger} - \psi^{\dagger} \left( G^{\dagger} + \frac{\partial V}{\partial \psi} + i\psi^{\dagger} \right) \right)$$

onde a Lagrangeana clássica é dada por:

$$\mathcal{L}_0 = (G - \eta) (G^{\dagger} - \eta^{\dagger})$$

e

$$\begin{aligned} \eta &= \psi - \frac{\partial V^{\dagger}}{\partial \psi^{\dagger}} + i\psi \\ \eta^{\dagger} &= \psi^{\dagger} - \frac{\partial V}{\partial \psi} - i\psi^{\dagger} \end{aligned}$$

são as equações de Langevin.

$S_0$  é invariante segundo as seguintes transformações:

$$\delta \psi = \lambda_0$$

$$\delta G = \lambda_0 + i\lambda_0'$$

$$\delta G^{\dagger} = -\lambda_0 \frac{\delta^2 V}{\delta \psi^2}$$

e seus complexos.

Ao fazerem a quantização B.R.S.T. desta teoria e sob a escolha de gauge  $G = G^{\dagger} = 0$  após o processo de quantização, eles recuperaram o modelo supersimétrico  $N = 2$  a duas dimensões:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_{\mu} \psi^{\dagger} \partial^{\mu} \psi + \bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi + \frac{\partial V^{\dagger}}{\partial \psi^{\dagger}} \frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{1}{2} \bar{\psi} (1 - \gamma_3) \psi \frac{\delta^2 V^{\dagger}}{\delta \psi^{\dagger 2}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \bar{\psi} (1 + \gamma_3) \psi \frac{\delta^2 V}{\delta \psi^2} \end{aligned}$$

Então, a exemplo desses autores, vamos quantizar a nossa teoria e verificar se ela se reduz a este modelo supersimétrico. A quantização B.R.S.T. que desejamos implementar é à la Kugo-Uehara<sup>(16)</sup>, na qual ao fixarmos o gauge  $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}^* = 0$ , a ação perde a invariância original e assim, introduzimos campos fantasmas tal que a ação torna-se, agora, invariante por B.R.S.T.

Começamos com a ação

$$S = \int (w^{1*} - \partial_+ \psi) (w^1 - \partial_- \psi^*) dt dx$$

onde

$$w^{1*} = \frac{\partial V}{\partial \psi^*} \quad \text{e} \quad w^1 = \frac{\partial V}{\partial \psi}$$

e levando em conta as transformações  $\delta\psi = 1, \delta\psi^* = 0$ , verificamos que  $\delta S \neq 0$ , isto é, a ação não é invariante por tais transformações. Assim sendo, podemos verificar que se assumimos as seguintes transformações B.R.S.T.<sup>(17)</sup>:

1)

$$\delta\psi = 0$$

$$\delta\psi^* = i \in \psi_+$$

$$\delta\psi_+ = 0$$

$$\delta\psi_+^* = -i \in (\partial_+ + i\partial_x)\psi$$

$$\delta\psi_- = 0$$

$$\delta\psi_-^* = -i \in w^1$$

ou

ii)

$$\delta\varphi = i\theta\varphi_-$$

$$\delta\varphi^* = 0$$

$$\delta\varphi_- = 0$$

$$\delta\varphi_+^* = -i\theta w_+^*$$

$$\delta\varphi_+ = 0$$

$$\delta\varphi_-^* = -i\theta(\partial_t - i\partial_x)\varphi_-^*$$

onde  $\theta$  e  $\theta$  parâmetros anticomutativos e,  $\varphi_+$ ,  $\varphi_-$  e  $\varphi_+^*$ ,  $\varphi_-^*$  são as componentes quirais dos campos fantasmas e anti-fantasmas, respectivamente. A ação efetiva escrita como:

$$S_{ef} = \int dt dx \left\{ (w_+^* - \partial_+ \varphi)(w_- - \partial_- \varphi^*) + \varphi_+^* (\partial_t - i\partial_x)\varphi_+ + \varphi_-^* (\partial_t + i\partial_x)\varphi_- + \varphi_+^* \varphi_- w_+'' + \varphi_-^* \varphi_+ w_-'' \right\}$$

é invariante por estas últimas transformações (ver apêndice E). Por outra, a menos dos termos de superfície, a ação pode ser escrita como:

$$S_{ef} = \int dt dx \left\{ \partial_m \varphi^* \partial^m \varphi + w_+^* w_+ + \bar{\psi} \gamma^m \partial_m \psi + \bar{\psi} \left( \frac{1-\gamma_3}{2} \right) \psi w_+'' + \bar{\psi} \left( \frac{1+\gamma_3}{2} \right) \psi w_-'' \right\}$$

com as matrizes  $\gamma$  na representação:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^3 = \gamma^2 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Assim, temos o modelo supersimétrico  $N = 2$  a  $2-d$  no espaço-tempo Euclidiano. Concluimos que seria interessante considerar a construção de outras Lagrangeanas Topológicas via formalismo de Dirac-Kähler e verificar, neste processo, a necessidade ou não de condições adicionais para a obtenção das mesmas.

A.1 - Representação Bosônica

Vamos seguir a Ref. (5) para obter a representação bosônica na forma exponencial. Considere os operadores-corrente como variáveis dinâmicas básicas dadas por:

$$J^{\mu}(x) = \frac{1}{4} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \bar{\psi}(x + \frac{\epsilon}{2}), \gamma^{\mu} \psi(x - \frac{\epsilon}{2}) \right] \quad (a.1)$$

Tais operadores e o campo fermiônico têm relações de comutação a tempos iguais da forma:

$$\left[ J^{\mu}(x), \psi(y) \right] = - \left( g^{\mu\alpha} + \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} \gamma^{\beta} \right) \psi(x) \delta(x-y) \quad (a.2)$$

com  $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$ , e junto com a equação de Heisenberg de movimento:

$$\left[ P_{\mu}, A(x) \right] = -i \partial_{\mu} A(x) \quad (a.3)$$

onde  $A(x)$  qualquer operador, determina completamente a dinâmica do sistema.

Os operadores-momentum são dados por:

$$P^{\mu} = \int T^{0\mu}(x') dx' \quad (a.4)$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{\pi}{2} \left( J^{\mu} J^{\nu} + J^{\nu} J^{\mu} - g^{\mu\nu} J_{\lambda} J^{\lambda} \right)$$

com  $g^{00} = -g^{11} = 1$ , é o tensor energia-momento na forma de Sugawara.

A equação de movimento do operador  $\psi(x)$  é, então, obtida. De (a.3):

$$\partial_0 \psi(x) = i [P_0, \psi(x)]$$

$$\partial_1 \psi(x) = i [P_1, \psi(x)]$$

e de (a.4):

$$P_0 = \int T^{00}(x') dx'$$

$$P_1 = \int T^{01}(x') dx'$$

$$T^{00} = \frac{\pi}{2} \left( \psi^0 \psi^0 + \psi^0 \psi^0 - g^{00} \mathcal{J}_\lambda \mathcal{J}^\lambda \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left( \psi^0 \psi^0 + \mathcal{J}_\lambda \mathcal{J}^\lambda \right)$$

$$T^{01} = \frac{\pi}{2} \left( \psi^0 \psi^1 + \psi^1 \psi^0 - g^{01} \mathcal{J}_\lambda \mathcal{J}^\lambda \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \left( \psi^0 \psi^1 + \psi^1 \psi^0 \right)$$

Então

$$\partial_0 \psi(x) = \frac{i\pi}{2} \left[ \int (\mathcal{J}^0 \mathcal{J}^0 + \mathcal{J}_1 \mathcal{J}'_1) dx', \psi(x) \right]$$

e usando  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ , vem:

$$\begin{aligned} \partial_0 \psi(x) &= \frac{i\pi}{2} \int \left\{ [\mathcal{J}^0(x') \mathcal{J}^0(x'), \psi(x)] + [\mathcal{J}_1(x') \mathcal{J}'_1(x'), \psi(x)] \right\} dx' \\ &= \frac{i\pi}{2} \int \left\{ [\mathcal{J}^0(x'), \psi(x)] + [\mathcal{J}^0(x'), \psi(x)] \mathcal{J}^0(x') + \mathcal{J}_1(x') [\mathcal{J}'_1(x'), \psi(x)] \right. \\ &\quad \left. + [\mathcal{J}_1(x'), \psi(x)] \mathcal{J}'_1(x') \right\} dx' \end{aligned}$$

mas por (a.2):

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}^0(x'), \psi(x)] &= -(g^{00} + \epsilon^{00} \gamma^3) \psi(x) \delta(x'-x) \\ &= -\psi(x) \delta(x'-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}'_1(x'), \psi(x)] &= -(g^{01} + \epsilon^{01} \gamma^3) \psi(x) \delta(x'-x) \\ &= -\gamma^3 \psi(x) \delta(x'-x) \end{aligned}$$

Substituindo:

$$\begin{aligned} \partial_0 \psi(x) &= \frac{i\pi}{2} \int \left\{ -\mathcal{J}^0(x') \psi(x) \delta(x'-x) - \psi(x') \delta(x'-x) \mathcal{J}^0(x') \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{J}'_1(x') \gamma^3 \psi(x') \delta(x'-x) - \gamma^3 \psi(x) \delta(x'-x) \mathcal{J}_1(x') \right\} dx' \\ &= \frac{i\pi}{2} \int \left\{ -2 \mathcal{J}^0(x') \psi(x) \delta(x'-x) - 2 \gamma^3 \mathcal{J}_1(x') \delta(x'-x) \right\} dx' \end{aligned}$$

$$\partial_0 \psi(x) = -i\pi \left\{ J^0(x) + \gamma^3 J^1(x) \right\} \psi(x) \quad (a.5)$$

Seguindo o mesmo procedimento, encontramos que:

$$\partial_1 \psi(x) = i\pi \left\{ J^1(x) + \gamma^3 J^0(x) \right\} \psi(x) \quad (a.6)$$

Para as matrizes  $\gamma$  na representação:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{, vem:}$$

$$\gamma^0 \partial_0 \psi(x) = -i\pi \left( \gamma^0 J^0(x) + \gamma^0 \gamma^3 J^1(x) \right) \psi(x)$$

$$\gamma^1 \partial_1 \psi(x) = i\pi \left( \gamma^1 J^1(x) + \gamma^1 \gamma^3 J^0(x) \right) \psi(x)$$

$$i \gamma^m \partial_m \psi(x) = 0 \quad (a.7)$$

é a equação de Dirac para férmions sem massa.

O campo fermiônico por (a.6) fica:

$$\psi(x) = \exp \left\{ i\pi \int \left( J^1(x') + \gamma^3 J^0(x') \right) dx' \right\} \psi_0 \quad (a.8)$$

onde  $\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  é um espinor constante.

As componentes de  $\psi(x)$  em termos do campo escalar  $\varphi(x)$  são obtidas, considerando-se  $J_\mu(x)$  na forma:

$$J^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi(x)$$

assim:

$$J^0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \epsilon^{00} \partial_0 \varphi + \epsilon^{01} \partial_1 \varphi \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_1 \varphi(x)$$

e

$$J^1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \epsilon^{10} \partial_0 \varphi + \epsilon^{11} \partial_1 \varphi \right) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_0 \varphi(x)$$

logo, a equação (a.8) fica:

$$\psi(x) = \exp \left\{ i\sqrt{\pi} \int \left( -\partial_0 \varphi + x^3 \partial_1 \varphi \right) dx' \right\} \psi_0$$

ou

$$\begin{pmatrix} \psi_+(x) \\ \psi_-(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp \left[ i\sqrt{\pi} \left( \varphi(x) - \int_{-\infty}^x \partial_0 \varphi(x') dx' \right) \right] \\ \exp \left[ -i\sqrt{\pi} \left( \varphi(x) + \int_{-\infty}^x \partial_0 \varphi(x') dx' \right) \right] \end{pmatrix} \quad (a.9)$$

a menos de constantes a ajustar tal que as componentes espinoriais satisfaçam as regras de anticomutação canônicas.

O campo dual  $\tilde{\psi}$  é dado como:

$$\tilde{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_0 \psi(x') dx' \quad (a.10)$$

e escrevendo:

$$\psi_{\pm}^{\pm}(x) = \frac{1}{2} \left( \psi(x) \mp \tilde{\psi}(x) \right)$$

vem que  $\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x)$  se decompõe em termos quirais.

#### A.2- Anticomutatividade

Considere

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(x) &= : e^{i X_{\pm}(x)} : \\ &= e^{i X_{\pm}^+(x)} e^{-i X_{\pm}^-(x)} \end{aligned} \quad (a.11)$$

onde  $X^+$  e  $X^-$  carregam os operadores de criação e de aniquilação. Para um objeto mais geral, temos<sup>(\*)</sup>:

$$\chi_{\alpha, \beta}(x) = \alpha \psi(x) + \beta \tilde{\psi}(x)$$

tal que

$$\psi_{\alpha, \beta} = e^{i\chi_{\alpha, \beta}^+} \quad e^{i\chi_{\alpha, \beta}^-}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são as cargas dos campos.

Desde que os operadores  $A$  e  $B$  comutam, temos:

$$e^A \cdot e^B = e^{[A, B]} e^B \cdot e^A$$

então:

$$\begin{aligned} i) \quad & [\chi_{\alpha, \beta}^-(x), \chi_{\gamma, \delta}^+(y)] = [\alpha \bar{\psi}(x) + \beta \tilde{\psi}^-(x), \gamma \psi^+(y) + \delta \tilde{\psi}^+(y)] \\ & = \alpha \gamma [\bar{\psi}(x), \psi^+(y)] + \alpha \delta [\bar{\psi}(x), \tilde{\psi}^+(y)] + \beta \gamma [\tilde{\psi}^-(x), \psi^+(y)] \\ & \quad + \beta \delta [\tilde{\psi}^-(x), \tilde{\psi}^+(y)] \\ & = \alpha \gamma \frac{\bar{D}^-}{i}(x-y) + \alpha \delta \frac{\bar{D}^-}{i}(x-y) + \beta \gamma \frac{\bar{D}^-}{i}(x-y) + \beta \delta \frac{\bar{D}^-}{i}(x-y) \\ & = (\alpha \gamma + \beta \delta) \frac{\bar{D}^-}{i}(x-y) + (\alpha \delta + \beta \gamma) \frac{\bar{D}^-}{i}(x-y) \quad (a.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii) \quad & \left[ \chi_{\alpha, \beta}^+(x), \chi_{\gamma, \delta}^-(y) \right] = - \left[ \chi_{\gamma, \delta}^-(y), \chi_{\alpha, \beta}^+(x) \right] \\
& = - \left[ \gamma \psi^-(y) + \delta \tilde{\psi}^-(y), \alpha \psi^+(x) + \beta \tilde{\psi}^+(x) \right] \\
& = - \left\{ \gamma \alpha \left[ \psi^-(y), \psi^+(x) \right] + \gamma \beta \left[ \psi^-(y), \tilde{\psi}^+(x) \right] + \delta \alpha \left[ \tilde{\psi}^-(y), \psi^+(x) \right] \right. \\
& \quad \left. + \delta \beta \left[ \tilde{\psi}^-(y), \tilde{\psi}^+(x) \right] \right\} \\
& = - (\gamma \alpha + \delta \beta) \frac{\mathcal{D}^-}{i}(y-x) - (\gamma \beta + \delta \alpha) \frac{\tilde{\mathcal{D}}^-}{i}(y-x) \quad (a.13)
\end{aligned}$$

Então,

$$\psi_{\alpha, \beta}(x) \psi_{\gamma, \delta}(y) = \psi_{\gamma, \delta}(y) \psi_{\alpha, \beta}(x) : \exp \left\{ - \left[ \chi_{\alpha, \beta}(x), \chi_{\gamma, \delta}(y) \right] \right\} :$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\left[ \chi_{\alpha, \beta}(x), \chi_{\gamma, \delta}(y) \right] & = \left[ \alpha_{\alpha, \beta}^-(x) + \chi_{\alpha, \beta}^+(x), \chi_{\gamma, \delta}^-(y) + \chi_{\gamma, \delta}^+(y) \right] \\
& = \left[ \chi_{\alpha, \beta}^-(x), \chi_{\gamma, \delta}^+(y) \right] + \left[ \chi_{\alpha, \beta}^+(x), \chi_{\gamma, \delta}^-(y) \right] + \left[ \chi_{\alpha, \beta}^-(x), \chi_{\gamma, \delta}^-(y) \right] \\
& \quad + \left[ \chi_{\alpha, \beta}^+(x), \chi_{\gamma, \delta}^+(y) \right] \\
& = \left[ \alpha_{\alpha, \beta}^-(x), \chi_{\gamma, \delta}^+(y) \right] - \left[ \chi_{\gamma, \delta}^-(y), \alpha_{\alpha, \beta}^+(x) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha\gamma + \beta\delta) \frac{\bar{D}^-}{i}(x-y) + (\alpha\delta + \beta\gamma) \frac{\tilde{D}^-}{i}(x-y) \\
&\quad - (\gamma\alpha + \delta\beta) \frac{\bar{D}^-}{i}(y-x) - (\gamma\beta + \delta\alpha) \frac{\tilde{D}^-}{i}(y-x) \\
&= \frac{1}{i} (\alpha\gamma + \beta\delta) \left\{ \bar{D}^-(x-y) - \bar{D}^-(y-x) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{i} (\beta\gamma + \alpha\delta) \left\{ \tilde{D}^-(x-y) - \tilde{D}^-(y-x) \right\}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\psi_{\alpha, \beta}(x) \psi_{\gamma, \delta}(y) &= \psi_{\gamma, \delta}(y) \psi_{\alpha, \beta}(x) \exp \left\{ \left( \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{i} \right) \left[ \bar{D}^-(y-x) - \bar{D}^-(x-y) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{\beta\gamma + \alpha\delta}{i} \right) \left[ \tilde{D}^-(x-y) - \tilde{D}^-(y-x) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Tem-se que<sup>(8)</sup>:

$$\bar{D}^-(x-y) - \bar{D}^-(y-x) = \bar{D}^-(\zeta) - \bar{D}^-(-\zeta) = \frac{1}{2} \epsilon(\zeta^0) \theta(\zeta^2)$$

e

$$\tilde{D}^-(x-y) - \tilde{D}^-(y-x) = \tilde{D}^-(\zeta) - \tilde{D}^-(-\zeta) = -\frac{1}{2} \epsilon(\zeta^1) \theta(-\zeta^2)$$

então:

$$\psi_{\alpha, \beta}(x) \psi_{\gamma, \delta}(y) = \psi_{\gamma, \delta}(y) \psi_{\alpha, \beta}(x) \exp \left\{ - \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)}{2i} \cdot \right.$$

(a.14)

$$\left. \epsilon(\zeta^0) \theta(\zeta^2) + \frac{(\beta\gamma + \alpha\delta)}{2i} \epsilon(\zeta^1) \theta(-\zeta^2) \right\}$$

Exigindo, pois, a anticomutatividade para os campos fermiônicos, temos para as cargas o vínculo:

$$\beta\gamma + \alpha\delta = 2(2n+1)\pi$$

se o intervalo é tipo espaço  $\xi^2 < 0$ .

### A.3- Funções de Green

Aqui a função de dois pontos ou de n-pontos obtida para o campo fermiônico livre, escrita em termos do campo bosônico:

$$\psi_{\alpha, \beta}(x) = : e^{i \left\{ \alpha \varphi(x) + \beta \tilde{\varphi}(x) \right\}} :$$

tem de ser igual à função de dois pontos ou n-pontos obtida para o campo fermiônico, escrita no espaço dos momentos como:

$$\psi(x) = \int \frac{d^4 k_{\perp}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ a(k_{\perp}) e^{+i k \cdot x} + b(k_{\perp}) e^{-i k \cdot x} \right\} u(k_{\perp}) \quad (a.15)$$

onde

$$u(k_{\perp}) = \begin{pmatrix} \theta(-k_{\perp}) \\ \theta(k_{\perp}) \end{pmatrix}$$

com

$$\theta(k_1) = \begin{cases} 1, & k_1 > 0 \\ 0, & k_1 < 0 \end{cases}$$

#### A.4- Propriedade de "Cluster"

Tem-se que o vácuo é único se e somente se a função de  $n$ -pontos pode ser decomposta em cluster, isto é, se  $D^-(x_1, \dots, x_n)$  pode ser escrito como uma soma de produtos de todas as possíveis funções de dois pontos na representação bosônica. Esta propriedade é satisfeita por qualquer teoria de campo que satisfaça as condições de invariância relativística, espectro e localidade<sup>(8)</sup>.

#### A.5- Invariância de Lorentz

Aqui, temos que verificar se o campo fermiônico introduzido apresenta, de fato, caráter espinorial quando sob transformação de Lorentz. Tal invariância é verificada através da relação:

$$i[M^{\mu\nu}, \psi(x)] = x^\mu \partial^\nu \psi(x) - x^\nu \partial^\mu \psi(x) + \frac{1}{4} [\sigma^{\mu\nu}] \psi(x) \quad (a.16)$$

onde

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu$$

é a densidade de momentum angular.

## A.6- Bilineares

O caráter não-local da relação entre o campo fermiônico e o bosônico não impede que certos objetos fermiônicos transformem-se como densidades locais de objetos bosônicos. Seja verificar para  $\psi(x)$  na forma:

$$\psi_{\alpha, \beta}(x) = e^{i(\alpha\psi(x) + \beta\hat{\psi}^{\sim})} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

alguns bilineares. Temos,

$$\begin{pmatrix} \psi_{1, \alpha, \beta} \\ \psi_{2, \alpha, \beta} \end{pmatrix} = \left[ \mathbb{1} + i \left\{ \mathbb{1} \alpha \psi + \beta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \hat{\psi}^{\sim} \right\} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + i(\alpha\psi - \beta\hat{\psi}^{\sim}) & 0 \\ 0 & 1 + i(\alpha\psi + \beta\hat{\psi}^{\sim}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{1\alpha, \beta} \\ \psi_{2\alpha, \beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i(\alpha\psi - \beta\hat{p}) \\ 1 + i(\alpha\psi + \beta\hat{p}) \end{pmatrix} \dots$$

$$\psi_{1\alpha, \beta} = e^{i(\alpha\psi - \beta\hat{p})} = e^{i\chi_{\alpha, -\beta}}$$

$$\psi_{2\alpha, \beta} = e^{i(\alpha\psi + \beta\hat{p})} = e^{i\chi_{\alpha, \beta}}$$

(A)  $\bar{\psi}\psi$  :

Consider

$$\bar{\psi}_{\alpha, \beta}(x) \psi_{\gamma, \delta}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\psi}_{\alpha, \beta}(x) \psi_{\gamma, \delta}(x+\epsilon)$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \\ \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix}_{\alpha, \beta}(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_{\gamma, \delta}(x+\epsilon)$$

$$= \begin{pmatrix} \psi_2^* & \psi_1^* \\ \psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}_{\alpha, \beta}(x) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_{\gamma, \delta}(x+\epsilon)$$

$$= \psi_{2\alpha, \beta}^*(x) \psi_{1\gamma, \delta}(x+\epsilon) + \psi_{1\alpha, \beta}^*(x) \psi_{2\gamma, \delta}(x+\epsilon)$$

$$= e^{-i\chi_{\alpha, \beta}(x)} \cdot e^{i\chi_{\gamma, -\delta}(x+\epsilon)} + e^{-i\chi_{\alpha, -\beta}(x)} \cdot e^{i\chi_{\gamma, \delta}(x+\epsilon)}$$

$$= e^{-i\chi_{\alpha, \beta}^+(x)} \cdot e^{-i\chi_{\alpha, \beta}^-(x)} \cdot e^{i\chi_{\gamma, -\delta}^+(x+\epsilon)}$$

$$e^{i\chi_{\gamma, -\delta}^-(x+\epsilon)} +$$

$$+ \bar{\epsilon} e^{i\chi_{\alpha, -\beta}^+(x)} \cdot e^{-i\chi_{\alpha, -\beta}^-(x+\epsilon)} \cdot e^{i\chi_{\delta, \gamma}^+(x+\epsilon)} \cdot e^{i\chi_{\delta, \gamma}^-(x+\epsilon)}$$

Então

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{\alpha, \beta}^-(x) \psi_{\delta, \gamma}^+(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ e^{-i\chi_{\alpha, \beta}^+(x)} \cdot e^{i\chi_{\delta, \gamma}^+(x+\epsilon)} \cdot e^{-i\chi_{\alpha, \beta}^-(x)} \cdot e^{i\chi_{\delta, \gamma}^-(x+\epsilon)} \right. \\ &\quad \cdot e^{i\chi_{\alpha, \beta}^-(x)} \cdot e^{i\chi_{\delta, \gamma}^+(x+\epsilon)} \left. + e^{-i\chi_{\alpha, \beta}^+(x)} \cdot e^{i\chi_{\delta, \gamma}^+(x+\epsilon)} \cdot e^{-i\chi_{\alpha, \beta}^-(x)} \cdot e^{i\chi_{\delta, \gamma}^-(x)} \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{i\chi_{\delta, \gamma}^-(x+\epsilon)} \cdot e^{i\chi_{\alpha, \beta}^-(x)} \cdot e^{i\chi_{\delta, \gamma}^+(x+\epsilon)} \right] = \textcircled{1} + \textcircled{2} \end{aligned}$$

Temos:

$$(a) -i\chi_{\alpha, \beta}^+(x) = -i\hbar\alpha\psi^+(x) + p\tilde{\psi}^+(x)$$

$$(b) i\chi_{\delta, \gamma}^+(x+\epsilon) = i\hbar\gamma(\psi^+(x) + \epsilon^m \partial_m \psi^+(x)) - \delta(\tilde{\psi}^+(x) + \epsilon^m \partial_m \tilde{\psi}^+(x))$$

Somando: (a) + (b) :

$$i\hbar(\gamma - \alpha)\psi^+(x) - (\delta + p)\tilde{\psi}^+(x) + \epsilon^m(\gamma\partial_m\psi^+(x) - \delta\partial_m\tilde{\psi}^+(x))$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$(a) + (b) = i\hbar(\gamma - \alpha)\psi^+(x) - (\delta + p)\tilde{\psi}^+(x)$$

$$(c) -i\chi_{\alpha, \beta}^{-}(x) = -i\hbar(\alpha\bar{\psi}(x) + \beta\tilde{\psi}^{-}(x))$$

$$(d) i\chi_{\delta, \gamma}^{-}(x+\epsilon) = i\hbar\left(\gamma(\bar{\psi}(x) + \epsilon^m\partial_m\bar{\psi}(x)) - \delta(\tilde{\psi}^{-}(x) + \epsilon^m\partial_m\tilde{\psi}^{-}(x))\right)$$

Somando (c) + (d) :

$$i\hbar(\gamma - \alpha)\bar{\psi}(x) - (\delta + \beta)\tilde{\psi}^{-}(x) + \epsilon^m(\gamma\partial_m\bar{\psi}(x) - \delta\partial_m\tilde{\psi}^{-}(x))$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$(c) + (d) = i\hbar(\gamma - \alpha)\bar{\psi}(x) - (\delta + \beta)\tilde{\psi}^{-}(x)$$

Então:

$$\textcircled{1} = \exp\left\{i\hbar(\gamma - \alpha)\bar{\psi}(x) - (\delta + \beta)\tilde{\psi}^{-}(x)\right\}$$

Agora

$$(e) -i\chi_{\alpha, \beta}^{+}(x) = -i\hbar(\alpha\psi(x) + \beta\tilde{\psi}^{+}(x))$$

$$(f) i\chi_{\delta, \gamma}^{+}(x+\epsilon) = i\hbar\left(\gamma(\psi(x) + \epsilon^m\partial_m\psi(x)) + \delta(\tilde{\psi}^{+}(x) + \epsilon^m\partial_m\tilde{\psi}^{+}(x))\right)$$

Somando (e) + (f) :

$$i \hbar (\gamma - \alpha) \psi^+(x) + (\delta + \beta) \tilde{\psi}^+(x) + \epsilon^m \left( \gamma \partial_m \psi^+(x) + \delta \partial_m \tilde{\psi}^+(x) \right)$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$(e) + (f) = i \hbar (\gamma - \alpha) \psi^+(x) + (\delta + \beta) \tilde{\psi}^+(x)$$

$$(g) - i \chi_{\alpha, \beta}^-(x) = -i \hbar \alpha \psi^-(x) - \beta \tilde{\psi}^-(x)$$

$$(h) i \chi_{\gamma, \delta}^-(x + \epsilon) = i \hbar \gamma \left( \psi^-(x) + \epsilon^m \partial_m \psi^-(x) \right) + \delta \left( \tilde{\psi}^-(x) + \epsilon^m \partial_m \tilde{\psi}^-(x) \right)$$

Somando (g) + (h) :

$$i \hbar (\gamma - \alpha) \psi^-(x) + (\delta + \beta) \tilde{\psi}^-(x) + \epsilon^m \left( \gamma \partial_m \psi^-(x) + \delta \partial_m \tilde{\psi}^-(x) \right)$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$(g) + (h) = i \hbar (\gamma - \alpha) \psi^-(x) + (\delta + \beta) \tilde{\psi}^-(x)$$

Assim,

$$\textcircled{2} = \exp \left\{ i \hbar (\gamma - \alpha) \psi(x) + (\delta + \beta) \tilde{\psi}(x) \right\}$$

Agora:

$$\begin{aligned} \text{ii)} \left[ \chi_{\alpha, \beta}^-(x), \chi_{\gamma, \delta}^+(x+\epsilon) \right] &= \left[ \left\{ \begin{aligned} &h\alpha\bar{\psi}(x) + \beta\tilde{\psi}^-(x) \\ &h\gamma[\psi^+(x) + \epsilon^m \partial_m \psi^+(x)] - \delta[\tilde{\psi}^+(x) + \epsilon^m \partial_m \tilde{\psi}^+(x)] \end{aligned} \right\} \right. \\ &= \left. \left[ \begin{aligned} &h\alpha\bar{\psi}(x) + \beta\tilde{\psi}^-(x), h\gamma\psi^+(x+\epsilon) - \delta\tilde{\psi}^+(x+\epsilon) \\ &- \alpha\gamma[\bar{\psi}(x), \psi^+(x+\epsilon)] + \beta\delta[\tilde{\psi}^-(x), \psi^+(x+\epsilon)] \\ &- h\alpha\delta[\bar{\psi}(x), \tilde{\psi}^+(x+\epsilon)] + \beta\gamma[\tilde{\psi}^-(x), \psi^+(x+\epsilon)] \end{aligned} \right] \right\} \end{aligned}$$

Quando  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$(i) = (\alpha\gamma - \beta\delta) \frac{\bar{D}^-}{i}(x-y) + (\beta\delta - \alpha\gamma) \frac{\tilde{D}^-}{i}(x-y)$$

Fazendo  $\alpha = \gamma$  e  $\beta = \delta$

$$(i) = (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\bar{D}^-}{i}(x-y)$$

Agora:

$$\begin{aligned} \text{ii)} \left[ \chi_{\alpha, \beta}^-(x), \chi_{\gamma, \delta}^+(x+\epsilon) \right] &= \left[ \alpha\bar{\psi}(x) - \beta\tilde{\psi}^-(x), \gamma\psi^+(x+\epsilon) + \delta\tilde{\psi}^+(x+\epsilon) \right. \\ &= \alpha\gamma[\bar{\psi}(x), \psi^+(x+\epsilon)] + \alpha\delta[\bar{\psi}(x), \tilde{\psi}^+(x+\epsilon)] - \beta\gamma[\tilde{\psi}^-(x), \\ &\psi^+(x+\epsilon)] - \beta\delta[\tilde{\psi}^-(x), \tilde{\psi}^+(x+\epsilon)] \\ &= (\alpha\gamma - \beta\delta) \frac{\bar{D}^-}{i}(x-y) - (\beta\delta - \alpha\gamma) \frac{\tilde{D}^-}{i}(x-y) \end{aligned}$$

Fazendo:  $\alpha = \gamma$  e  $\beta = \delta$

$$(ii) = (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\bar{D}^-}{i}(x-y)$$

Então

$$\psi_{\alpha, \beta}(x) \psi_{\gamma, \delta}(x) = e^{-i\alpha\beta\tilde{\varphi}(x)} e^{(\alpha^2 - \beta^2) \frac{\tilde{\varphi}}{i}(x-y)} e^{i\alpha\beta\tilde{\varphi}(x)} + e^{(\alpha^2 - \beta^2) \frac{\tilde{\varphi}}{i}(x-y)} \cos 2\beta\tilde{\varphi}(x)$$

$$\doteq 2(-\mu^2 \epsilon^2) - \left[ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4\pi} \right] \cos 2\beta\tilde{\varphi}(x)$$

Isto é

$$\bar{\psi} \psi \propto \cos 2\beta\tilde{\varphi}$$

B)  $\bar{\psi} \gamma_3 \psi$

Considere:

$$\psi_{\alpha, \beta}(x) \gamma_3 \psi_{\gamma, \delta}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\psi}_{\alpha, \beta}(x) \gamma_3 \psi_{\gamma, \delta}(x+\epsilon) = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \\ \psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}_{\alpha, \beta}(x) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}_{\gamma, \delta}(x+\epsilon)$$

$$= -\psi_{2\alpha, \beta}^*(x) \psi_{1\gamma, \delta}(x+\epsilon) + \psi_{1\alpha, \beta}^*(x) \psi_{2\gamma, \delta}(x+\epsilon)$$

Levando em conta o que foi feito em (A), vem:

$$\psi_{\alpha, \beta}(x) \gamma_3 \psi_{\gamma, \delta}(x) = -\left(-\mu^2 \epsilon^2\right) - \left[ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4\pi} \right] e^{-i\alpha\beta\tilde{\varphi}(x)}$$

$$+ e^{i\alpha\beta\tilde{\varphi}(x)} \left(-\mu^2 \epsilon^2\right) \left[ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4\pi} \right]$$

$$= 2i \left(-\mu^2 \epsilon^2\right) - \left[ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4\pi} \right] \sin 2\beta\tilde{\varphi}(x)$$

então

$$\bar{\psi} \gamma_3 \psi \propto i \text{sen } 2\theta \tilde{\psi}(x)$$

$$\text{c) } \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

Lembrando que

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x^+) \\ \psi_2(x^-) \end{pmatrix}$$

onde

$$x^+ = x^0 + x^1 \quad \text{e} \quad x^- = x^0 - x^1,$$

Vamos considerar o seguinte ansatz

$$\psi = e^{i 2\sqrt{\mu} x} \varphi(x)$$

para o cálculo de  $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ , tal que

$$\varphi(x) = \varphi(x^+) + \varphi(x^-) \quad \text{e} \quad \langle 0 | \varphi(x) | 0 \rangle = 0$$

Define-se, então,

$$J_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = : \bar{\psi}(x+\epsilon) \gamma_\mu \psi(x) : - i \langle 0 | \bar{\psi}(x-\epsilon) :$$

$$: \gamma_\mu \psi(x) | 0 \rangle :$$

onde a subtração é introduzida para <sup>evitar</sup> evitar singularidades. Assim,

$$J_0 = \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \left\langle \psi_1^*(x^+ + \epsilon^+) \psi_1(x^+) \right\rangle + \lim_{\epsilon^- \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \left\langle \psi_2^*(x^- + \epsilon^-) \psi_2(x^-) \right\rangle$$

$$- \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \left\langle \psi_1^*(x^+ - \epsilon^+) \psi_1(x^+) \right\rangle$$

$$- \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \langle 0 | \psi_2^{\dagger}(x-\epsilon^-) \psi_2(x^-) | 0 \rangle.$$

$$= \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \left\{ e^{-i2\sqrt{\pi}\phi(x^++\epsilon^+)} \frac{-i2\sqrt{\pi}}{e} \psi^-(x^++\epsilon^+) \frac{i2\sqrt{\pi}}{e} \psi^{\dagger}(x^+) \right.$$

$$\cdot e^{i2\sqrt{\pi}\phi(x^+)} \psi^-(x^+) - \langle 0 | e^{-i2\sqrt{\pi}\phi(x^+-\epsilon^+)} \frac{-i2\sqrt{\pi}}{e} \psi^{\dagger}(x^+-\epsilon^+) \frac{-i2\sqrt{\pi}}{e} \psi^-(x^+-\epsilon^+) \right.$$

$$\cdot e^{i2\sqrt{\pi}\phi(x^+)} \psi^{\dagger}(x^+) \left. e^{i2\sqrt{\pi}\phi(x^+)} \psi^-(x^+) \right\} | 0 \rangle \Bigg\} +$$

$$+ \lim_{\epsilon^- \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \left\{ e^{-i2\sqrt{\pi}\phi(x^-+\epsilon^-)} \frac{-i2\sqrt{\pi}}{e} \psi^{\dagger}(x^-+\epsilon^-) \frac{-i2\sqrt{\pi}}{e} \psi^-(x^-+\epsilon^-) \frac{i2\sqrt{\pi}}{e} \psi^{\dagger}(x^-) \right.$$

$$\cdot e^{i2\sqrt{\pi}\phi(x^-)} \psi^-(x^-) - \langle 0 | e^{-i2\sqrt{\pi}\phi(x^--\epsilon^-)} \frac{-i2\sqrt{\pi}}{e} \psi^{\dagger}(x^--\epsilon^-) \frac{-i2\sqrt{\pi}}{e} \psi^-(x^--\epsilon^-) \right.$$

$$\cdot e^{i2\sqrt{\pi}\phi(x^-)} \psi^{\dagger}(x^-) \left. e^{i2\sqrt{\pi}\phi(x^-)} \psi^-(x^-) \right\} | 0 \rangle \Bigg\}$$

$$J_0 = \textcircled{1} + \textcircled{2}.$$

$$\textcircled{1} = \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \left\{ e^{-i2\sqrt{\pi}\phi(x^+)} \frac{-i2\sqrt{\pi}}{e} [\psi^{\dagger}(x^+), e^{+\epsilon^+} \partial_{x^+} \psi^{\dagger}(x^+)] \right.$$

$$\cdot e^{i2\sqrt{\pi}\phi(x^+)} \psi^{\dagger}(x^+) \frac{-i2\sqrt{\pi}}{e} [\psi^-(x^+) + e^{+\epsilon^+} \partial_{x^+} \psi^-(x^+)] \Bigg\}.$$

$$\frac{i2\sqrt{\pi}}{e} \psi^-(x^+) \frac{4\pi}{e} [\psi^-(x^++\epsilon^+), \psi^{\dagger}(x^+)]$$

$$- \langle 0 | e^{-i2\sqrt{\pi}\phi(x^+)} [\psi^{\dagger}(x^+) - e^{+\epsilon^+} \partial_{x^+} \psi^{\dagger}(x^+)] \Bigg\}.$$

$$e^{-i2\sqrt{\pi}} \bar{\psi}(x^+) \cdot e^{4\pi [\bar{\psi}(x^+ - \epsilon^+), \psi^+(x^+)]} |0\rangle$$

$$(1) = \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \left\{ e^{-i2\sqrt{\pi}} \epsilon^+ \partial_{x^+} \psi^+(x^+) - i2\sqrt{\pi} \epsilon^+ \partial_{x^+} \bar{\psi}(x^+) \right.$$

$$\cdot \ln(i\mu \epsilon^+)^{-1} - \langle 0 | e^{i2\sqrt{\pi}} \epsilon^+ \partial_{x^+} \psi^+(x^+) \cdot e^{i2\sqrt{\pi}} \epsilon^+ \partial_{x^+} \bar{\psi}(x^+) |0\rangle$$

$$\cdot e^{\ln(i\mu \epsilon^+)^{-1}} |0\rangle$$

onde usamos:

$$[\bar{\psi}(x^+ + \epsilon^+), \psi^+(x^+)] = -\frac{1}{4\pi} \ln(i\mu \epsilon^+)$$

$$[\bar{\psi}(x^+ - \epsilon^+), \psi^+(x^+)] = -\frac{1}{4\pi} \ln(i\mu \epsilon^+)$$

$$(2) = \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{i\mu \epsilon^+} \left( 1 - i2\sqrt{\pi} \epsilon^+ \partial_{x^+} \psi^+(x^+) \right.$$

$$\left. \cdot (1 - i2\sqrt{\pi}) \epsilon^+ \partial_{x^+} \bar{\psi}(x^+) \right) -$$

$$\frac{i2V\hbar}{e} \psi^+(x^-) \quad \frac{i2V\hbar}{e} \psi^-(x^-)$$

$$- \langle 0 | \frac{-i2V\hbar}{e} \psi^-(x^- - \epsilon^-) \quad \frac{-i2V\hbar}{e} \psi^-(x^- - \epsilon^-)$$

$$\frac{i2V\hbar}{e} \psi^+(x^- - \bar{\epsilon}) \quad \frac{i2V\hbar}{e} \psi^-(x^- - \bar{\epsilon}) | 0 \rangle$$

e encontramos que:

$$\textcircled{2} = - \frac{\partial}{\partial x^-} \psi(x^-)$$

Então,

$$\bar{\psi} \gamma_0 \psi = - \frac{1}{V\hbar} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^+} \psi(x^+) + \frac{\partial}{\partial x^-} \psi(x^-) \right\}$$

mas

$$\psi = \psi(x^+) + \psi(x^-)$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^+} \frac{\partial x^+}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \psi}{\partial x^-} \frac{\partial x^-}{\partial x^0} dx^0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x^+} \psi(x^+) + \frac{\partial}{\partial x^-} \psi(x^-)$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^+} \frac{\partial x^+}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \psi}{\partial x^-} \frac{\partial x^-}{\partial x^1} dx^1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^1} = \frac{\partial \psi(x^+)}{\partial x^+} - \frac{\partial \psi(x^-)}{\partial x^-}$$

vem que:

$$\frac{\partial}{\partial x^+} \psi(x^+) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^1} \right) \psi(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^-} \psi(x^-) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial}{\partial x^1} \right) \psi(x)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma_0} \psi &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \left[ (\partial_0 + \partial_1) \psi(x^+) + (\partial_0 - \partial_1) \psi(x^-) \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_0 \psi(x) \end{aligned}$$

Agora

$$\mathcal{J}_1 = \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \frac{\hbar}{2\pi} \left\langle 0 \left| -\psi_1^*(x^+ + \epsilon^+) \psi_1(x^+) \right| 0 \right\rangle + \lim_{\epsilon^- \rightarrow 0} \frac{\hbar}{2\pi} \left\langle 0 \left| \psi_2^*(x^- + \epsilon^-) \psi_2(x^-) \right| 0 \right\rangle$$

$$- \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \frac{\hbar}{2\pi} \left\langle 0 \left| -\psi_1^*(x^+ - \epsilon^+) \psi_1(x^+) \right| 0 \right\rangle$$

$$- \lim_{\epsilon^- \rightarrow 0} \frac{\hbar}{2\pi} \left\langle 0 \left| \psi_2^*(x^- - \epsilon^-) \psi_2(x^-) \right| 0 \right\rangle = \textcircled{1}^+ + \textcircled{2}^-$$

$$\textcircled{1}^+ = \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \frac{\hbar}{2\pi} \frac{1}{i\pi\epsilon^+} \left\langle 0 \left| -1 + i2\sqrt{\pi}\epsilon^+ \partial_{x^+} \psi(x^+) + 4\pi\epsilon^+ \partial_{x^+}^2 \psi(x^+) \right| 0 \right\rangle$$

$$+ \epsilon^+ \partial_{x^+} \bar{\psi}(x^+) + 1 \langle 0 | 0 \rangle + i2\sqrt{\pi}\epsilon^+ \langle 0 | \partial_{x^+} \bar{\psi}(x^+) +$$

$$+ \partial_{x^+} \psi^+(x^+) | 0 \rangle - \sqrt{\pi} \langle 0 | (\epsilon^+)^2 \partial_{x^+} \psi^+(x^+) \partial_{x^+} \bar{\psi}(x^+) | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{x^+} \psi(x^+)$$

Segundo o mesmo procedimento, temos

$$\textcircled{2}^- = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{x^-} \psi(x^-)$$

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \partial_{x^+} \psi(x^+) - \partial_{x^-} \psi(x^-) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ (\partial_0 + \partial_1) \psi(x) - (\partial_0 - \partial_1) \psi(x) \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_1 \psi(x) \quad , \text{ então}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \bar{\psi} \gamma_0 \psi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_0 \psi(x) \\
 \bar{\psi} \gamma_1 \psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_1 \psi(x)
 \end{cases}$$

mas

$$\partial_\mu \psi = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \tilde{\psi}$$

e

$$\partial_0 \psi = \epsilon_{01} \partial^1 \tilde{\psi}(x) \quad , \quad \partial_1 \psi = \epsilon_{10} \partial^0 \tilde{\psi}(x)$$

então

$$\bar{\psi} \gamma_0 \psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon_{01} \partial^1 \tilde{\psi}(x)$$

$$\bar{\psi} \gamma_1 \psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon_{10} \partial^0 \tilde{\psi}(x)$$

Assim,

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \tilde{\psi}(x)$$

D)  $\bar{\psi} \gamma_3 \gamma_\mu \psi$

Para

$$J_{30} = : \bar{\psi} \gamma_3 \gamma_0 \psi :$$

temos

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\gamma_3 \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

assim:

$$J_{30} = \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \left[ \int \psi_1^*(x^+ + \epsilon^+) \psi_1(x^+) \right]$$

$$- \langle 0 | \psi_1^*(x^+ - \epsilon^+) \psi_1(x^+) | 0 \rangle + \lim_{\epsilon^- \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \left[ - \psi_2(x^+ + \epsilon^+) \cdot \right]$$

$$\cdot \psi_2(x^-) - \langle 0 | - \psi_2(x^- - \epsilon^-) \psi_2(x^-) | 0 \rangle \left. \right]$$

De cálculos anteriores

$$(1) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{x^+} \psi(x^+)$$

$$(2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{x^-} \psi(x^-)$$

então:

$$J_{30} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \partial_{x^-} \psi(x^-) - \partial_{x^+} \psi(x^+) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ (\partial_0 - \partial_1) \psi(x) - (\partial_0 + \partial_1) \psi(x) \right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_1 \psi(x)$$

ou

$$\partial_\mu \psi = \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \tilde{\psi}(x)$$

assim

$$\begin{aligned} \partial_1 \psi &= \epsilon_{10} \partial^0 \tilde{\psi}(x) \\ &= -\partial^0 \tilde{\psi}(x) \end{aligned}$$

logo

$$J_{30} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^0 \tilde{\psi}(x)$$

para

$$J_{31} = \bar{\psi} \delta_3 \delta_1 \psi$$

temos

$$\begin{aligned} J_{31} &= \lim_{\epsilon^+ \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \int_1 \psi_1^*(x^+ + \epsilon^+) \psi_1(x^+) - \langle 0 | \psi_1^*(x^+ - \epsilon^+) \psi_1(x^+) | 0 \rangle \\ &+ \lim_{\epsilon^- \rightarrow 0} \frac{\mu}{2\pi} \int_2 \psi_2^*(x^- + \epsilon^-) \psi_2(x^-) - \langle 0 | \psi_2^*(x^- - \epsilon^-) \psi_2(x^-) | 0 \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{x^+} \varphi(x^+) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{x^-} \varphi(x^-) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_0 \varphi(x) \end{aligned}$$

mas

$$\partial_0 \varphi = \epsilon_{01} \partial^1 \tilde{\varphi}(x)$$

então

$$J_{31} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial^1 \tilde{\varphi}(x)$$

Assim,

$$J_{3\mu} = \bar{\psi} \delta_3 \delta_\mu \psi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_\mu \tilde{\varphi}(x)$$

Verifica-se também que

$$\bar{\psi} \not{\partial} \psi \sim (\partial \tilde{\varphi})^2$$

. Resumindo

podemos dizer que os bilineares aparecendo na Lagrangeana de uma teoria fermiônica, substituídos, agora, pelos seus correspondentes objetos bosônicos transmutam àquela teoria numa bosônica.

APÊNDICE B

B.1 Cálculo da expressão da corrente  $J_\mu$  dada por Klaiber

Temos que,

$$J_\mu(x) = : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) :$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp_1 \left\{ a^\dagger(p_1) e^{ip \cdot x} + b(p_1) e^{-ip \cdot x} \right\} u(p_1)$$

com

$$u(p_1) = \begin{pmatrix} \theta(-p_1) \\ \theta(p_1) \end{pmatrix}$$

Considere:

$$\bar{u}(k_1) \gamma_\mu u(p_1)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(k_1) \gamma_0 u(p_1) &= \tilde{u}^\dagger(k_1) \gamma_0^2 u(p_1) \\ &= \overbrace{\theta(-k_1) \theta(k_1)} \begin{pmatrix} \theta(-p_1) \\ \theta(p_1) \end{pmatrix} = \theta(-k_1) \theta(-p_1) + \theta(k_1) \theta(p_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(k_1) \gamma_1 u(p_1) &= \tilde{u}^\dagger(k_1) \gamma_0 \gamma_1 u(p_1) \\ &= \overbrace{-\theta(-k_1) \theta(k_1)} \begin{pmatrix} \theta(-p_1) \\ \theta(p_1) \end{pmatrix} = -\theta(-k_1) \theta(-p_1) + \theta(k_1) \theta(p_1) \end{aligned}$$

$$\bar{u}(k_1) \gamma_\mu u(p_1) = \begin{cases} \theta(-k_1) \theta(-p_1) + \theta(k_1) \theta(p_1) \\ -\theta(-k_1) \theta(-p_1) + \theta(k_1) \theta(p_1) \end{cases}$$

Representaremos os produtos de espinores no espaço dos momentos da seguinte forma<sup>(\*)</sup>:

$$\bar{u}(k_1) \gamma_\mu u(p_1) = \begin{cases} \frac{k_\mu}{k_0} \theta(p_1, k_1) \\ \frac{p_\mu}{p_0} \theta(p_1, k_1) \\ \frac{(k+p)_\mu}{(k_0+p_0)} \theta(p_1, k_1) \\ \frac{(k-p)_\mu}{(k_0-p_0)} \theta(p_1, k_1) + \frac{(p-k)_\mu}{(p_0-k_0)} \theta(p_1, k_1) \end{cases}$$

Entzö.

$$J_{\mu}(x) = : \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x) :$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dk_{\pm} \left( a(k_{\pm}) e^{-ik_{\pm}x} + b^{*}(k_{\pm}) e^{ik_{\pm}x} \right)$$

$$\cdot \int dp_{\pm} \left( a^{*}(p_{\pm}) e^{ip_{\pm}x} + b(p_{\pm}) e^{-ip_{\pm}x} \right) \left\{ \bar{u}(k_{\pm}) \gamma_{\mu} u(p_{\pm}) \right\}$$

$$J_{\mu}(x) = : I_1 + I_2 + I_3 + I_4 :$$

$$I_1 = - \frac{1}{2\pi} \int dk_1 dp_1 a^{*}(p_1) a(k_1) e^{-i(k-p)_1 x} \left\{ \frac{(k-p)_1 \mu}{(k_0-p_0)} \theta(p_1, (k_1-p_1)) + \frac{(p-k)_1 \mu}{(p_0-k_0)} \theta((p_1-k_1)k_1) \right\}$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int dk_1 dp_1 a(k_1) b(p_1) e^{-i(k+p)_1 x} \frac{(k+p)_1 \mu}{(k_0+p_0)} \theta(p_1, k_1)$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int dk_1 dp_1 b^{*}(k_1) a^{*}(p_1) e^{i(k+p)_1 x} \frac{(k+p)_1 \mu}{(k_0+p_0)} \theta(p_1, k_1)$$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi} \int dk_1 dp_1 b^{*}(k_1) b(p_1) e^{i(k-p)_1 x} \left\{ \frac{(k-p)_1 \mu}{(k_0-p_0)} \theta(p_1, (k_1-p_1)) + \frac{(p-k)_1 \mu}{(p_0-k_0)} \theta((p_1-k_1)k_1) \right\}$$

Em  $I_1$ , fazemos  $k - p = k'$  tal que para  $\phi_1$  fixo, os limites de  $k'$  são os de  $k_1$  e  $p - k = p'$  idem:

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \int dk'_1 dp_1 a^*(p_1) a(k'_1 + p_1) e^{-i k'_1 \cdot x} \frac{k'_1}{k'_0} \theta(k_1, k'_1) \\ - \frac{1}{2\pi} \int dp'_1 dk_1 a^*(p'_1 + k_1) a(k_1) e^{i p'_1 \cdot x} \frac{p'_1}{p'_0} \theta(k_1, p'_1)$$

Em  $I_2$ ,  $k + p = k''$ , então

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int dk''_1 dp_1 a(k''_1 - p_1) b(p_1) e^{-i k''_1 \cdot x} \frac{k''_1}{k''_0} \theta(k_1, (k''_1 - p_1))$$

Em  $I_3$ ,  $k + p = p''$ , então

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int dk_1 dp''_1 b^*(k_1) a^*(p''_1 - k_1) e^{i p''_1 \cdot x} \frac{p''_1}{p''_0} \theta((p''_1 - k_1), k_1)$$

Em  $I_4$ ,  $k - p = k'$  e  $p - k = p'$ , então

$$I_4 = \frac{1}{2\pi} \int dk'_1 dp_1 b^*(k'_1 + p_1) b(p_1) e^{i k'_1 \cdot x} \frac{k'_1}{k'_0} \theta(k_1, k'_1) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int dk_1 dp'_1 b^*(k_1) b(p'_1 + k_1) e^{-i p'_1 \cdot x} \frac{p'_1}{p'_0} \theta(k_1, p'_1)$$

No segundo termo de  $I_1$ :  $p' \leftrightarrow k'$  e  $k \leftrightarrow p$ , vem

$$I_1 = -\frac{1}{2\pi} \int dk'_\perp dp_\perp a^*(p_\perp) a(k'_\perp + p_\perp) e^{-ik'_\perp \cdot x} \frac{k'_\perp}{k'_0} \vartheta(p_\perp, k'_\perp) \\ - \frac{1}{2\pi} \int dk'_\perp dp_\perp a^*(k'_\perp + p_\perp) a(p_\perp) e^{ik'_\perp \cdot x} \frac{k'_\perp}{k'_0} \vartheta(p_\perp, k'_\perp)$$

Em  $I_2$ ,  $k'' \leftrightarrow k'$ :

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int dk'_\perp dp_\perp a(k'_\perp - p_\perp) b(p_\perp) e^{-ik'_\perp \cdot x} \frac{k'_\perp}{k'_0} \vartheta(p_\perp, (k'_\perp - p_\perp))$$

Em  $I_3$ ,  $p'' \leftrightarrow k'$  e  $k \leftrightarrow p$ :

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} \int dp_\perp dk'_\perp b^*(p_\perp) a^*(k'_\perp - p_\perp) e^{ik'_\perp \cdot x} \frac{k'_\perp}{k'_0} \vartheta((k'_\perp - p_\perp), p_\perp)$$

Em  $I_4$ , no segundo termo  $k \leftrightarrow p$  e  $p' \leftrightarrow k'$ :

$$I_4 = \frac{1}{2\pi} \int dk'_\perp dp_\perp b^*(k'_\perp + p_\perp) b(p_\perp) e^{ik'_\perp \cdot x} \frac{k'_\perp}{k'_0} \vartheta(p_\perp, k'_\perp) + \\ + \frac{1}{2\pi} \int dk'_\perp dp_\perp b^*(p_\perp) b(k'_\perp + p_\perp) e^{-ik'_\perp \cdot x} \frac{k'_\perp}{k'_0} \vartheta(p_\perp, k'_\perp)$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 J_{\mu}(x) &= : \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x) : \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int d k_{\perp} d p_{\perp} \frac{k_{\mu}}{k_0} \left\{ \left[ \theta(p, k_{\perp}) \left\{ b^{\dagger}(p) b(k+p) - a^{\dagger}(p) a(k+p) \right. \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \theta(p, (k_{\perp}-p)) a(k-p) b(p) \right] e^{-i k \cdot x} + \left[ \theta(p, k_{\perp}) \left\{ b^{\dagger}(k+p) b(p) - \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. \left. a^{\dagger}(k+p) a(p) \right\} + \theta(p, (k_{\perp}-p)) b^{\dagger}(p) a^{\dagger}(k-p) \right] e^{i k' \cdot x} \right\}
 \end{aligned}$$

Definindo:

$$\begin{aligned}
 c(k_{\perp}) &= \frac{i}{\sqrt{k_0}} \int d p_{\perp} \left\{ \left[ b^{\dagger}(p) b(p+k) - a^{\dagger}(p) a(p+k) \right] \theta(k, p) + \right. \\
 &\left. + \theta(p, (k_{\perp}-p)) a(k-p) b(p) \right\}
 \end{aligned}$$

A corrente fica:

$$J_{\mu}(x) = \frac{-i}{\sqrt{2}\pi} \int \frac{d k_{\perp}}{\sqrt{2 k_0}} k_{\mu} \left\{ c(k_{\perp}) e^{-i k \cdot x} - c^{\dagger}(k_{\perp}) e^{i k \cdot x} \right\}$$

B.2- Relação de comutação de C (K<sub>1</sub>):

Considere o operador bosônico dado por Klaiber

$$c(k_{\perp}) = \frac{1}{\sqrt{k_0}} \int dp_{\perp} \left\{ \theta(k_{\perp}, p_{\perp}) \left[ b^{\dagger}(p_{\perp}) b(p_{\perp} + k_{\perp}) - a^{\dagger}(p_{\perp}) a(p_{\perp} + k_{\perp}) \right] + \theta[p_{\perp}, (k_{\perp} - p_{\perp})] a(k_{\perp} - p_{\perp}) b(p_{\perp}) \right\}$$

O comutador fica:

$$\begin{aligned} [c(k_{\perp}), c^{\dagger}(k'_{\perp})] &= \int \frac{dp_{\perp} dp'_{\perp}}{\sqrt{k_0 k'_0}} \left\{ \theta(k_{\perp}, p_{\perp}) \theta(k'_{\perp}, p'_{\perp}) \left[ \left[ b^{\dagger}(p_{\perp}) b(p_{\perp} + k_{\perp}), b^{\dagger}(p'_{\perp} + k'_{\perp}) b(p'_{\perp}) \right] \right. \right. \\ &- \left. \left[ b^{\dagger}(p_{\perp}) b(p_{\perp} + k_{\perp}), a^{\dagger}(p'_{\perp} + k'_{\perp}) a(p'_{\perp}) \right] \right\} + \theta(k_{\perp}, p_{\perp}) \theta[p'_{\perp}, (k'_{\perp} - p'_{\perp})] \cdot \\ &\cdot \left[ b^{\dagger}(p_{\perp}) b(p_{\perp} + k_{\perp}), b^{\dagger}(p'_{\perp}) a^{\dagger}(k'_{\perp} - p'_{\perp}) \right] + \theta(k_{\perp}, p_{\perp}) \theta(k'_{\perp}, p'_{\perp}) \left\{ \left[ a^{\dagger}(p_{\perp}) a(p_{\perp} + k_{\perp}), \right. \right. \\ &a^{\dagger}(p'_{\perp} + k'_{\perp}) a(p'_{\perp}) \left. \right] - \left[ a^{\dagger}(p_{\perp}) a(p_{\perp} + k_{\perp}), b^{\dagger}(p'_{\perp} + k'_{\perp}) b(p'_{\perp}) \right] \left\} - \\ &- \theta(k_{\perp}, p_{\perp}) \theta[p'_{\perp}, (k'_{\perp} - p'_{\perp})] \left[ a^{\dagger}(p_{\perp}) a(p_{\perp} + k_{\perp}), b^{\dagger}(p'_{\perp}) a^{\dagger}(k'_{\perp} - p'_{\perp}) \right] + \\ &+ \theta[p_{\perp}, (k_{\perp} - p_{\perp})] \theta(k'_{\perp}, p'_{\perp}) \left\{ \left[ a(k_{\perp} - p_{\perp}) b(p_{\perp}), b^{\dagger}(p'_{\perp} + k'_{\perp}) b(p'_{\perp}) \right] - \right. \\ &\left. - \left[ a(k_{\perp} - p_{\perp}) b(p_{\perp}), a^{\dagger}(p'_{\perp} + k'_{\perp}) a(p'_{\perp}) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$+ \theta [p_1(u_1 - b_1)] \theta [p'_1(u'_1 - p'_1)] \left[ a(u_1 - p_1) b(p_1), b^*(p'_1) a^*(u'_1 - p'_1) \right]$$

Então,

$$\begin{aligned} [c(u_1), c^*(u'_1)] &= \int \frac{dp_1 dp'_1}{\sqrt{u'_1 u_1}} \left\{ \theta(u_1, p_1) \theta(u'_1, p'_1) \left[ b^*(p_1) b(p_1 + u_1), b^*(p'_1 + u'_1) b(p'_1) \right] \right. \\ &+ \left. \left[ a^*(p_1) a(p_1 + u_1), a^*(p'_1 + u'_1) a(p'_1) \right] \right\} + \theta [p_1(u_1 - b_1)] \theta [p'_1(u'_1 - p'_1)] \cdot \\ &\cdot \left[ a(u_1 - p_1) b(p_1), b^*(p'_1) a^*(u'_1 - p'_1) \right] + \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \\ &+ \textcircled{4} + \textcircled{5}. \end{aligned}$$

onde:

$$\textcircled{1} = - \theta(u_1, p_1) \theta(u'_1, p'_1) \left[ b^*(p_1) b(p_1 + u_1), a^*(p'_1 + u'_1) a(p'_1) \right]$$

$$\textcircled{2} = - \theta(u_1, p_1) \theta [p'_1(u'_1 - p'_1)] \left[ a^*(p_1) a(p_1 + u_1), b^*(p'_1 + u'_1) b(p'_1) \right]$$

$$\textcircled{3} = - \theta(u_1, p_1) \theta [p'_1(u'_1 - p'_1)] \left[ a^*(p_1) a(p_1 + u_1), b^*(p'_1) a^*(u'_1 - p'_1) \right]$$

$$\textcircled{4} = \theta [p_i, (u_i - p_i)] \theta (u'_i, p'_i) \left\{ \left[ a(u_i - p_i) b(p_i), b^*(p'_i + u'_i) b(p'_i) \right] - \left[ a(u_i - p_i) b(p_i), a^*(p'_i + u'_i) a(p'_i) \right] \right\}$$

$$\textcircled{5} = \theta(u_i, p_i) \theta [p'_i, (u'_i - p'_i)] \left[ b^*(p_i) b(p_i + u_i), b^*(p'_i) a^*(u'_i - p'_i) \right]$$

De (1), vem:

$$\textcircled{A} = \left[ b^*(p_i) b(p_i + u_i), a^*(p'_i + u'_i) a(p'_i) \right]$$

$$= b^*(p_i) b(p_i + u_i) a^*(p'_i + u'_i) a(p'_i) - \underbrace{a^*(p'_i + u'_i) a(p'_i) b^*(p_i) b(p_i + u_i)}_{\textcircled{1}}$$

$$\textcircled{i} = - a^*(p_i + u_i) a(p'_i) b^*(p_i) b(p_i + u_i)$$

$$= + a^*(p'_i + u'_i) b^*(p_i) a(p'_i) b(p_i + u_i)$$

$$= - a^*(p'_i + u'_i) b^*(p_i) b(p_i + u_i) a(p'_i)$$

$$= + b^*(p_i) a^*(p'_i + u'_i) b(p_i + u_i) a(p'_i)$$

$$= - b^*(p_i) b(p_i + u_i) a^*(p'_i + u'_i) a(p'_i)$$

onde temos usado as relações de anticomutação canônicas dos operadores. Assim  $\textcircled{A} = 0$  e da mesma forma  $\textcircled{2} = 0$ .

De  $\textcircled{3}$ , vem:

$$\textcircled{B} = \left[ a^\dagger(p_1) a(p_1 + u_1), b^\dagger(p'_2) a^\dagger(k'_2 - p'_2) \right]$$

$$= a^\dagger(p_1) a(p_1 + u_1) b^\dagger(p'_2) a^\dagger(k'_2 - p'_2) - b^\dagger(p'_2) a^\dagger(k'_2 - p'_2) a^\dagger(p_1) a(p_1 + u_1)$$

$$\textcircled{B_1} = a^\dagger(p_1) a(p_1 + u_1) b^\dagger(p'_2) a^\dagger(k'_2 - p'_2)$$

$$\textcircled{B_2} = - a^\dagger(p_1) b^\dagger(p'_2) a(p_1 + u_1) a^\dagger(k'_2 - p'_2)$$

$$- a^\dagger(p_1) b^\dagger(p'_2) a^\dagger(k'_2 - p'_2) a(p_1 + u_1)$$

$$+ a^\dagger(p_1) b^\dagger(p'_2) a^\dagger(k'_2 - p'_2) a(p_1 + u_1)$$

onde somamos e subtraímos um termo, assim:

$$\textcircled{B_2} = - a^\dagger(p_1) b^\dagger(p'_2) \delta_{p_2, k'_2 - p'_2 - u_2} + a^\dagger(p_1) b^\dagger(p'_2) a^\dagger(k'_2 - p'_2) a(p_1 + u_1)$$

$$\textcircled{B_3} = - b^\dagger(p'_2) a^\dagger(k'_2 - p'_2) a^\dagger(p_1) a(p_1 + u_1)$$

$$= + b^\dagger(p'_2) a^\dagger(p_1) a^\dagger(k'_2 - p'_2) a(p_1 + u_1)$$

$$= - a^\dagger(p_1) b^\dagger(p'_2) a^\dagger(k'_2 - p'_2) a(p_1 + u_1)$$

Daí :

$$\textcircled{3} = \theta(k_1, p_1) \theta \left[ p'_2 (u'_2 - p'_2) \right] a^*(p_1) b^*(p'_2) \delta_{p'_2, u'_2 - k_1 - p_1}$$

De  $\textcircled{4}$ , vem:

$$\begin{aligned} \textcircled{C} &= \left[ a(k_1 - p_1) b(p_1), b^*(p'_1 + u'_1) b(p'_2) \right] \\ &= a(k_1 - p_1) b(p_1) b^*(p'_1 + u'_1) b(p'_2) - b^*(p'_1 + u'_1) b(p'_2) a(k_1 - p_1) b(p_1) \\ &= a(k_1 - p_1) b(p_1) \delta_{p'_2, p_1 - u'_1} \end{aligned}$$

Daqui em diante está implícito que estamos seguindo o mesmo procedimento dos cálculos anteriores.

$$\begin{aligned} \textcircled{B} &= \left[ a(k_1 - p_1) b(p_1), a^*(p'_1 + u'_1) a(p'_2) \right] \\ &= a(k_1 - p_1) b(p_1) a^*(p'_1 + u'_1) a(p'_2) - a^*(p'_1 + u'_1) a(p'_2) a(k_1 - p_1) b(p_1) \\ &= - b(p_1) a(p'_2) \delta_{p'_2, k_1 - p_1 - u'_1} \end{aligned}$$

Assim,

$$\textcircled{4} = \theta[p_1(u_1 - b_1)] \theta(u'_1 p'_1) a(u_1 - b_1) b(p'_1) \delta_{p'_1, p_1 - u'_1} + \\ + \theta[p_1(u_1 - b_1)] \theta(u'_1 p'_1) b(b_1) a(p'_1) \delta_{p'_1, u_1 - p_1 - u'_1}.$$

e a expressão para  $\textcircled{5}$  fica:

$$\textcircled{5} = \theta(u_1, p_1) \theta[p'_1(u'_1 - b'_1)] b^*(p_1) a^*(u'_1 - p'_1) \delta_{p'_1, p_1 + u'_1}.$$

Agora, seja integrar as expressões obtidas:

$$I_3 = \int dp_1 dp'_1 \textcircled{3} \\ = \int dp_1 dp'_1 \theta(u_1, p_1) \theta[p'_1(u'_1 - b'_1)] a^*(p_1) b^*(p'_1) \delta_{p'_1, u'_1 - u_1 - p_1} \\ = \int dp_1 \theta(u_1, p_1) \theta[(u'_1 - u_1 - b_1)(u_1 + b_1)] a^*(p_1) b^*(u'_1 - u_1 - p_1)$$

Da mesma forma:

$$I_4 = \int dp_1 \left\{ \theta[p_1(u_1 - b_1)] \theta[u'_1(b_1 - u'_1)] a(u_1 - b_1) b(b_1 - u'_1) + \right. \\ \left. + \theta[p_1(u_1 - b_1)] \theta[u'_1(u_1 - b_1 - u'_1)] b(b_1) a(u_1 - b_1 - u'_1) \right\}$$

$$I_9 = \int d p_1 \theta(u, p_1) \theta[(p_1 + u_1)(u'_1 - p_1 - u_1)] b^*(p_1) a^*(u'_1 - p_1 - u_1)$$

Agora, fazemos em  $I_9$   $u'_1 - u_1 - p_1 = p'_1$ , então:

$$I_9 = - \int_{-\infty}^{\infty} d p'_1 \theta[u_1(u'_1 - u_1 - p'_1)] \theta[p'_1(u'_1 - p'_1)].$$

$$\cdot a^*(u'_1 - u_1 - p'_1) b^*(p'_1)$$

$$= \int d p_1 \theta[u_1(u'_1 - u_1 - p_1)] \theta[p_1(u'_1 - p_1)].$$

$$\cdot a^*(u'_1 - u_1 - p_1) b^*(p_1).$$

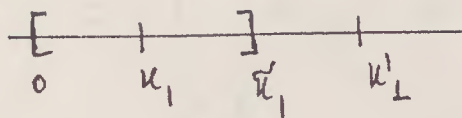
Analisemos o intervalo de integração:

i)

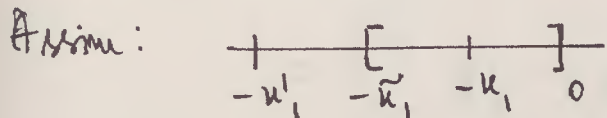
$$u_1 > 0 \quad ; \quad u'_1 - u_1 - p_1 > 0 \quad \therefore \quad p_1 < u'_1 - u_1 \equiv \tilde{u}_\perp$$

$$p_1 > 0 \quad ; \quad u'_1 - p_1 > 0 \quad \therefore \quad p_1 < u'_1$$

Assim:



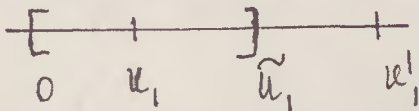
ii)  $u_1 < 0$ ;  $u'_1 - u_1 - p_1 < 0 \therefore p_1 < u'_1 - u_1 \equiv \tilde{u}_1$   
 $p_1 < 0$ ;  $u'_1 - p_1 < 0 \therefore p_1 > u'_1$ .



Para  $I_5$ :

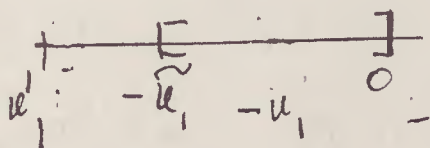
i)  $u_1 > 0$ ;  $p_1 > 0$   
 $u_1 + p_1 > 0 \therefore p_1 > -u_1$ ;  $u'_1 - u_1 - p_1 > 0 \therefore p_1 < u'_1 - u_1 \equiv \tilde{u}_1$

Assim:



ii)  $u_1 < 0$ ;  $p_1 < 0$   
 $u_1 + p_1 < 0 \therefore p_1 > -u_1$ ;  $u'_1 - u_1 - p_1 < 0 \therefore p_1 > u'_1 - u_1 \equiv \tilde{u}_1$

Assim:



Temos, então, que:

$$\begin{aligned}
 I_3 + I_5 &= \int_{-\bar{u}_1}^0 dp_1 \{ a^*(u_1 - p_1 - u'_1), b^*(p_1) \} + \\
 &+ \int_{\bar{u}'_1} dp_1 \{ a^*(u_1 - p_1 - u'_1), b^*(p_1) \} \\
 &= \int_{-\bar{u}_1}^{\bar{u}'_1} dp_1 \{ a^*(u_1 - p_1 - u'_1), b^*(p_1) \} = 0
 \end{aligned}$$

Façamos, agora, no primeiro termo de  $I_4$ ,

$$p_1 - u'_1 = p'_1 \quad \therefore \quad p_1 = p'_1 + u'_1 \quad \text{e depois } p_1 \leftrightarrow p'_1$$

assim:

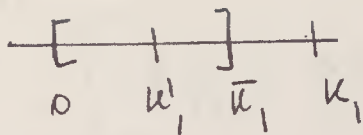
$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int dp_1 \theta[(p_1 + u'_1)(u_1 - p_1 - u'_1)] \theta(u'_1, p_1) \cdot a(u_1 - p_1 - u'_1) b(p_1) + \\
 &+ \theta[p_1(u_1 - p_1)] \theta[u'_1(u_1 - p_1 - u'_1)] b(p_1) a(u_1 - p_1 - u'_1)
 \end{aligned}$$

Analisemos o intervalo de integração:

$$i) \quad p_1 > 0; \quad u'_1 > 0$$

$$p_1 + u'_1 > 0 \quad \therefore \quad p_1 > -u'_1; \quad u_1 - p_1 - u'_1 > 0 \quad \therefore \quad p_1 < u_1 - u'_1 \equiv \bar{u}_1$$

Assim:

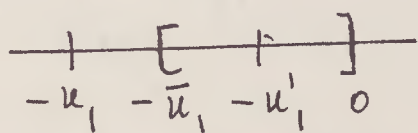


ii)

$$p_1 < 0; u' < 0$$

$$p_1 + u' < 0 \therefore p_1 < -u'; u_1 - p_1 - u' < 0 \therefore p_1 > u_1 - u' \equiv \bar{u}$$

Assim:

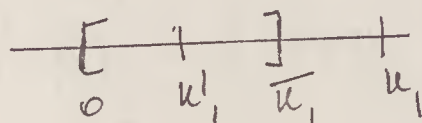


iii)

$$p_1 > 0; u_1 - p_1 > 0 \therefore p_1 < u_1$$

$$u' > 0; u_1 - p_1 - u' > 0 \therefore p_1 < u_1 - u' \equiv \bar{u}$$

Assim:

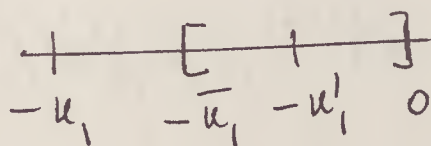


iv)

$$p_1 < 0; u_1 - p_1 < 0 \therefore p_1 > u_1$$

$$u' < 0; u_1 - p_1 - u' < 0 \therefore p_1 > u_1 - u' \equiv \bar{u}$$

Assim



1. fica:

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_{-\bar{u}_1}^0 dp_1 \left\{ a(u_1 - p_1 - u'_1), b(p_1) \right\} + \\
 &+ \int_0^{\bar{u}_1} dp_1 \left\{ a(u_1 - p_1 - u'_1), b(p_1) \right\} \\
 &= \int_{-\bar{u}_1}^{\bar{u}_1} dp_1 \left\{ a(u_1 - p_1 - u'_1), b(p_1) \right\} = 0
 \end{aligned}$$

Voltemos à expressão do comutador:

$$\begin{aligned}
 [c(u_1), c^*(u'_1)] &= \int \frac{dp_1 dp'_1}{\sqrt{u_0 u'_0}} \left[ \theta(u_1, p_1) \theta(u'_1, p'_1) \left\{ b^*(p_1) b(p_1 + u_1), \right. \right. \\
 &b^*(p'_1 + u'_1) b(p'_1) \left. \right\} + \theta \left[ p_1, (u_1 - p_1) \right] \theta \left[ p'_1, (u'_1 - p'_1) \right] \cdot \\
 &\cdot \left. \left[ a(u_1 - p_1) b(p_1), b^*(p'_1) a^*(u'_1 - p'_1) \right] \right]
 \end{aligned}$$

Temos que:

$$[b^*(p_1) b(p_1 + u_1), b^*(p'_1 + u'_1) b(p'_1)] = b^*(p_1) b(p'_1) \left\{ b(p_1 + u_1), b^*(p'_1 + u'_1) \right\}$$

$$- b^*(p'_1 + u'_1) b(p_1 + u_1) \Big| b(p'_2), b^*(p_1) \Big|$$

$$= \int_{p'_2, p_1 + u_1 - u'_1} b^*(p_1) b(p'_2) - \int_{p'_2, p_2} b^*(p'_2 + u'_2) b(p_1 + u_2)$$

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \int dp_1 \left[ \theta(u_1, p_1) \theta \left[ u'_1 (p_1 + u_1 - u'_1) \right] \Big| b^*(p_1) b(p_1 + u_1 - u'_1) + \right. \\ &+ a^*(p_1) a(p_1 + u_1 - u'_1) \Big| - \theta(u_1, p_1) \theta(u'_1, p_1) \Big| b^*(p_1 + u'_1) b(p_1 + u_1) + \\ &\left. + a^*(p_1 + u'_1) a(p_1 + u_1) \Big| \right] \end{aligned}$$

Façamos no segundo termo:  $p_1 + u'_1 = p'_1$  e depois  $p'_1 \leftrightarrow p_1$ .

então:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int dp_1 \left[ \theta(u_1, p_1) \theta \left[ u'_1 (p_1 + u_1 - u'_1) \right] \Big| b^*(p_1) b(p_1 + u_1 - u'_1) + \right. \\ &+ a^*(p_1) a(p_1 + u_1 - u'_1) \Big| - \\ &- \theta \left[ u_1 (p_1 - u'_1) \right] \theta \left[ u'_1 (p_1 - u'_1) \right] \Big| b^*(p_1) b(p_1 + u_1 - u'_1) + \\ &\left. + a^*(p_1) a(p_1 + u_1 - u'_1) \Big| \right] \end{aligned}$$

Agora,

$$I_B \equiv \int dp_1 \theta [p_1(u_1 - b_1)] \theta [p'_1(u'_1 - b'_1)] \left[ a(u_1 - b_1) b(b_1) b^*(p'_1) a^*(u'_1 - b'_1) \right]$$

Calculando:

$$\begin{aligned} & \left[ a(u_1 - b_1) b(b_1) b^*(p'_1) a^*(u'_1 - b'_1) \right] = \\ & = a(u_1 - b_1) b(b_1) b^*(p'_1) a^*(u'_1 - b'_1) - b^*(p'_1) a^*(u'_1 - b'_1) a(u_1 - b_1) b(b_1) \\ & = a(u_1 - b_1) a^*(u'_1 - b'_1) \delta_{p'_1, p_1} - b^*(p'_1) b(b_1) \delta_{p'_1, u'_1 - u_1 + b_1} \end{aligned}$$

então:

$$\begin{aligned} I_B & = \int dp_1 \theta [p_1(u_1 - b_1)] \theta [p_1(u'_1 - b_1)] a(u_1 - b_1) a^*(u'_1 - b_1) - \\ & - \theta [p_1(u_1 - b_1)] \theta [(u'_1 - u_1 + b_1)(u_1 - b_1)] b^*(u'_1 - u_1 + b_1) b(b_1) \\ & = \textcircled{a} + \textcircled{b}. \end{aligned}$$

Considere o segundo termo de  $I_B$ , façamos

$$u'_1 - b_1 = p'_1 =$$

$$u'_1 - b_1 = p'_1$$

e depois  $p'_1 \leftrightarrow p_1$ :

$$(ii) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dp'_1 \theta [(u'_1 - p'_1)(u_1 - u'_1 + p'_1)] \theta [(u'_1 - p'_1) p'_1].$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot b^*(p'_\perp) b(k_\perp - k'_\perp + p'_\perp) \\
 = & \int d^2 p_\perp \theta \left[ (k'_\perp - p_\perp)(k_\perp - k'_\perp + p_\perp) \right] \theta \left[ (k'_\perp - p_\perp) p_\perp \right] \cdot \\
 & \cdot b^*(p_\perp) b(k_\perp - k'_\perp + p_\perp)
 \end{aligned}$$

Façamos, agora, em (i)  $k'_\perp - p_\perp = p'_\perp$  e

depois  $p'_\perp \leftrightarrow p_\perp$  :

$$(i) = - \int_{-\infty}^{\infty} d^2 p'_\perp \theta \left[ (k'_\perp - p'_\perp)(k_\perp - k'_\perp + p'_\perp) \right] \theta \left[ (k'_\perp - p'_\perp) p'_\perp \right] \cdot$$

$$\cdot a(k_\perp - k'_\perp + p'_\perp) a^*(p'_\perp)$$

$$= \int d^2 p_\perp \theta \left[ (k'_\perp - p_\perp)(k_\perp - k'_\perp + p_\perp) \right] \theta \left[ (k'_\perp - p_\perp) p_\perp \right] \cdot$$

$$\cdot a(k_\perp - k'_\perp + p_\perp) a^*(p_\perp)$$

e usando, agora,  $\{ a(k_\perp - k'_\perp + p_\perp), a^*(p_\perp) \} = \delta_{k_\perp, k'_\perp}$  .

fica:

$$I_B = - \int d^2 p_\perp \theta \left[ (k'_\perp - p_\perp)(k_\perp - k'_\perp + p_\perp) \right] \theta \left[ (k'_\perp - p_\perp) p_\perp \right] \cdot$$

$$\cdot b^*(p_\perp) b(k_\perp - k'_\perp + p_\perp) + a^*(p_\perp) a(k_\perp - k'_\perp + p_\perp) +$$

$$+ \int dp_1 \theta [p_1(u_1 - p_1)] \theta [p_1(u'_1 - p_1)] \delta_{u_1, u'_1}$$

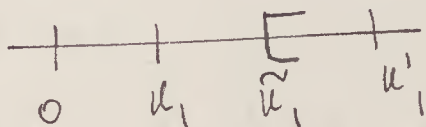
Analisemos, agora, o intervalo de integração de  $I_7 = A - B$

A)

$$p_1 > 0 ; u_1 > 0$$

$$u'_1 > 0 ; p_1 + u_1 - u'_1 > 0 \therefore p_1 > u'_1 - u_1 \equiv \tilde{u}_1$$

Assim:

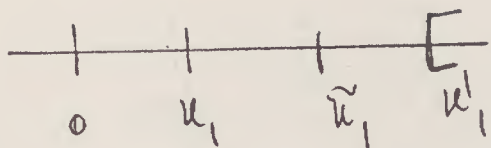


B)

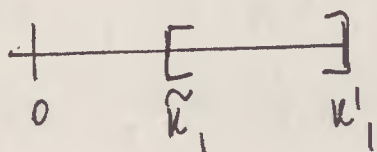
$$u_1 > 0 ; p_1 - u'_1 > 0 \therefore p_1 > u'_1$$

$$u'_1 > 0 ; p_1 - u'_1 > 0 \therefore p_1 > u'_1$$

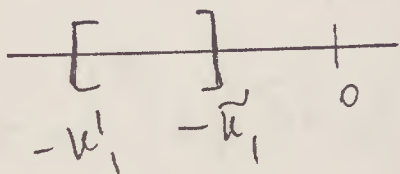
Assim



e o intervalo de  $I_7$  fica:



Também, temos:

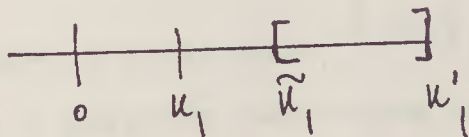


De  $I_8 = C + D$

c)  $p_1 > 0$  ;  $u'_1 - p_1 > 0 \therefore p_1 < u'_1$

$u'_1 - p_1 > 0 \therefore p_1 < u'_1$  ;  $u_1 - u'_1 + p_1 > 0 \therefore p_1 < u_1 - u'_1 \equiv \tilde{u}_1$

Assim:



Também, temos:

$$\frac{| \quad | \quad [ \quad ] \quad |}{-u_1 \quad -\tilde{u}_1 \quad -u_1 \quad 0}$$

Então  $I_7 + C = 0$ . Assim, ficamos com a parte D de  $I_8$ :

D)

$$p_1 > 0 ; u_1 - p_1 > 0 \therefore p_1 < u_1$$

$$p_1 > 0 ; u'_1 - p_1 > 0 \therefore p_1 < u'_1$$

Assim

$$\frac{| \quad |}{0 \quad u_1, u'_1}$$

$$\begin{aligned} D &= \int_0^{u_1} dp_1 \delta_{u_1, u'_1} + \int_{-u_1}^0 dp_1 \delta_{u_1, u'_1} \\ &= \int_{-u_1}^{u_1} dp_1 \delta_{u_1, u'_1} = 2u_1 \delta_{u_1, u'_1} \end{aligned}$$

O comutador fica:

$$\left[ c(u_1), c^\dagger(u'_1) \right] = \frac{2u_1 \delta_{u_1, u'_1}}{\sqrt{u_0 u'_0}}$$

Obs.: Quando utilizamos  $\left\{ a(u_1 - u'_1 + p_1), c^\dagger(p_1) \right\} = \delta_{u_1, u'_1}$   
 a  $\delta_{u_1, u'_1}$  é definida para todos os valores de  $u_1 (\pm)$ , então, ao

integrarmos separadamente as regiões, um fator de  $\frac{1}{2}$  deve ser incluído, assim:

$$[c(k_1), c^\dagger(k'_1)] = \frac{k_1 \delta_{k_1, k'_1}}{\sqrt{k_0 k'_0}}$$

tal que  $k_0 = |k_1|$  e  $k'_0 = |k'_1|$  e quando  $k_1 = k'_1$ , vem:

$$[c(k_1), c^\dagger(k'_1)] = \delta_{k_1, k'_1}$$

## APÊNDICE C

### C.1 Relação de dispersão na rede:

Vamos verificar para as equações: (III.32) a relação de dispersão.

Considere

$$\left( \partial_t - \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) \eta_1^+ - \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \eta_2^+ = 0$$

$$\left( \partial_t + \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) \eta_2^+ + \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \eta_1^+ = 0$$

Temos que:

$$\left( \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) \eta_1^+ = (-i\Omega) \cos \frac{\kappa a}{2} \cdot \eta_1^+$$

$$\left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \eta_1^+ = -\Omega \sin \frac{\kappa a}{2} \eta_1^+$$

$$\left( \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) \eta_2^+ = (-i\Omega) \cos \frac{\kappa a}{2} \cdot \eta_2^+$$

$$\left(\frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2}\right) \eta_2^+ = -\Omega \sin \frac{\kappa a}{2} \cdot \eta_2^+$$

Assim,

$$\left(-i\omega + i\Omega \cos \frac{\kappa a}{2}\right) \eta_1^+ + \Omega \sin \frac{\kappa a}{2} \cdot \eta_2^+ = 0$$

$$\left(-i\omega - i\Omega \cos \frac{\kappa a}{2}\right) \eta_2^+ - \Omega \sin \frac{\kappa a}{2} \eta_1^+ = 0$$

$$= \begin{pmatrix} i(\omega - \Omega \cos \frac{\kappa a}{2}) & -\Omega \sin \frac{\kappa a}{2} \\ \Omega \sin \frac{\kappa a}{2} & i(\omega + \Omega \cos \frac{\kappa a}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^+ \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} = 0,$$

$$\text{logo: } -\omega^2 + \Omega^2 = 0 \quad \therefore \omega = +\Omega = \frac{2}{a} \sin \frac{\kappa a}{2}.$$

Considerare

$$\left(\partial_t - \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}\right) \eta_1^- - \left(\frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2}\right) \eta_2^- = 0$$

$$\left(\partial_t + \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}\right) \eta_2^- + \left(\frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2}\right) \eta_1^- = 0$$

Temos:

$$\left(\frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}\right) \eta_1^- = i\Omega \cos \frac{\kappa a}{2} \cdot \eta_1^-$$

$$\left(\frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2}\right) \eta_1^- = -\Omega \sin \frac{\kappa a}{2} \cdot \eta_1^-$$

$$\left(\frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2}\right) \eta_2^- = i\Omega \cos \frac{\kappa a}{2} \cdot \eta_2^-$$

$$\left(\frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2}\right) \eta_2^- = -\Omega \sin \frac{\kappa a}{2} \eta_1^-$$

Assim:

$$\left(-i\Omega - i\Omega \cos \frac{\kappa a}{2}\right) \eta_1^- + \Omega \sin \frac{\kappa a}{2} \cdot \eta_2^- = 0$$

$$\left(-i\Omega + i\Omega \cos \frac{\kappa a}{2}\right) \eta_2^- - \Omega \sin \frac{\kappa a}{2} \cdot \eta_1^- = 0$$

E

$$\begin{pmatrix} i\left(\omega + \Omega \cos \frac{\kappa a}{2}\right) & -\Omega \sin \frac{\kappa a}{2} \\ \Omega \sin \frac{\kappa a}{2} & i\left(\omega - \Omega \cos \frac{\kappa a}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1^- \\ \eta_2^- \end{pmatrix} = 0,$$

Logo  $\Omega^2 - \omega^2 = 0 \therefore \omega = \pm \Omega = \frac{\Omega}{a} \sin \frac{\kappa a}{2}$ .

### C.2 Normalização das autofunções

Dadas as autofunções:

$$\eta_1^+(n) = \left(1 + e^{-i \frac{\kappa a}{2}}\right) e^{-i \kappa n a}$$

$$\eta_1^-(n) = \left(1 - e^{i \frac{\kappa a}{2}}\right) e^{i \kappa n a}$$

$$\eta_2^+(n) = \left(1 - e^{-i \frac{\kappa a}{2}}\right) e^{-i \kappa n a}$$

$$\eta_2^-(n) = \left(1 + e^{i \frac{\kappa a}{2}}\right) e^{i \kappa n a}$$

Temos que:

$$c) \sum_m \eta_{\pm, k}^{(+)*}(\eta) \eta_{\pm, k'}^+(\eta) = \frac{\left(1 + e^{\frac{i k a}{2}}\right) \left(1 + e^{-\frac{i k' a}{2}}\right)}{N_1^{(+)^2}} \sum_m e^{i m(k-k') a}$$

$$= 2\pi \delta_{k, k'} \left(1 + e^{\frac{i k a}{2}}\right) \left(1 + e^{-\frac{i k' a}{2}}\right)$$

$$1 = \frac{4\pi \left(1 + \cos \frac{k a}{2}\right)}{N_1^{(+)^2} \cdot 2\pi} \therefore N_1^{(+)} = \sqrt{4\pi \left(1 + \cos \frac{k a}{2}\right)}$$

$$d) \sum_m \eta_{\pm, k}^{(-)*}(\eta) \eta_{\pm, k'}^-(\eta) = \frac{\left(1 - e^{\frac{i k a}{2}}\right) \left(1 - e^{-\frac{i k' a}{2}}\right)}{N_1^{(-)^2}} \sum_m e^{-i m(k-k') a}$$

$$= 2\pi \delta_{k, k'} \left(1 - e^{\frac{i k a}{2}}\right) \left(1 - e^{-\frac{i k' a}{2}}\right)$$

$$1 = \frac{4\pi \left(1 - \cos \frac{k a}{2}\right)}{N_1^{(-)^2} \cdot 2\pi} \therefore N_1^{(-)} = \sqrt{4\pi \left(1 - \cos \frac{k a}{2}\right)}$$

$$ii) \sum_m \eta_{2,k}^{(+)*} \eta_{2,k'}^+ = \frac{\left(1 - e^{\frac{ika}{2}}\right) \left(1 - e^{-\frac{ik'a}{2}}\right)}{N_2^{(+)^2}} \sum_m e^{im(k-k')a}$$

$$= \frac{2\pi \delta_{k,k'} \left(1 - e^{\frac{ika}{2}}\right) \left(1 - e^{-\frac{ik'a}{2}}\right)}{N_2^{(+)^2}}$$

$$\underline{1} = \frac{4\pi (1 - \cos \frac{ka}{2})}{N_2^{(+)^2} \cdot 2} \therefore N_2^{(+)^2} = \sqrt{4\pi (1 - \cos \frac{ka}{2})}$$

$$iv) \sum_m \eta_{1,k}^{(-)*} \eta_{1,k'}^- = \frac{\left(1 + e^{\frac{ika}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{ik'a}{2}}\right)}{N_2^{(-)^2}} \sum_m e^{-im(k-k')a}$$

$$= \frac{2\pi \delta_{k,k'} \left(1 + e^{\frac{ika}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{ik'a}{2}}\right)}{N_2^{(-)^2}}$$

$$\underline{1} = \frac{4\pi (1 + \cos \frac{ka}{2})}{N_2^{(-)^2} \cdot 2} \therefore N_2^{(-)^2} = \sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{ka}{2})}$$

C.3 Ortogonalidade das autofunções ( $k > 0$ )

$$a) \sum_m \eta_{1,k}^{(+)*}(m) \eta_{1,k'}^-(m) = \frac{\left(1 + e^{\frac{i k a}{2}}\right) \left(1 - e^{\frac{i k' a}{2}}\right)}{2 \sqrt{1 + \frac{c m k a}{2}} \sqrt{1 - \frac{c m k' a}{2}}} \sum_m \frac{e^{i m (k + k') a}}{2\pi}$$

$$\neq \dots \delta_{k, -k'}$$

$$= 0$$

$$b) \sum_m \eta_{2,k}^{(+)*}(m) \eta_{2,k'}^-(m) = \frac{\left(1 - e^{\frac{i k a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i k' a}{2}}\right)}{2 \sqrt{1 + \frac{c m k a}{2}} \sqrt{1 - \frac{c m k' a}{2}}} \sum_m \frac{e^{i m (k + k') a}}{2\pi}$$

$$= \dots \delta_{k, -k'}$$

$$= 0$$

C.4 Cálculo das expressões  $B_{2,k}^+$ ,  $A_{2,k}^{(+)*}$ ,  $B_{1,k}^-$  e  $A_{1,k}^{(-)*}$  via equação (III.41)

Temos que

$$\int_0^{\pi/a} dx \left\{ \frac{B_{2,k}^+ (1 - e^{-i\kappa a/2}) (-i\omega + (-i\kappa) \cos \frac{\kappa a}{2})}{\sqrt{4\pi (1 - \cos \frac{\kappa a}{2})}} + \frac{B_{1,k}^+ (1 + e^{-i\kappa a/2})}{\sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{\kappa a}{2})}} \right.$$

$$\cdot (-i\kappa) \left( \frac{e^{-i\kappa a/2} - e^{i\kappa a/2}}{2} \right) \cdot e^{-i(\omega t + \kappa na)} + \left[ \frac{A_{2,k}^{(+)*} (1 - e^{i\kappa a/2})}{\sqrt{4\pi (1 - \cos \frac{\kappa a}{2})}} \right.$$

$$\cdot (i\omega + i\kappa \cos \frac{\kappa a}{2}) + \frac{i\kappa A_{1,k}^{(+)*} (1 + e^{i\kappa a/2})}{\sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{\kappa a}{2})}} \left( \frac{e^{i\kappa a/2} - e^{-i\kappa a/2}}{2} \right) \left. \right]$$

$$\cdot e^{i(\omega t + \kappa na)} + \left[ \frac{B_{2,k}^- (1 + e^{i\kappa a/2}) (-i\omega + i\kappa \cos \frac{\kappa a}{2})}{\sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{\kappa a}{2})}} + \frac{B_{1,k}^- (1 - e^{i\kappa a/2})}{\sqrt{4\pi (1 - \cos \frac{\kappa a}{2})}} \right.$$

$$\cdot i\kappa \left( \frac{e^{i\kappa a/2} - e^{-i\kappa a/2}}{2} \right) \cdot e^{-i(\omega t - \kappa na)} + \left[ \frac{A_{2,k}^{(-)*} (1 + e^{-i\kappa a/2})}{\sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{\kappa a}{2})}} \right.$$

$$\cdot (i\omega + (-i\kappa) \cos \frac{\kappa a}{2}) + \frac{A_{1,k}^{(-)*} (1 - e^{-i\kappa a/2}) (-i\kappa) \left( \frac{-i\kappa a}{2} - e^{i\kappa a/2} \right)}{\sqrt{4\pi (1 - \cos \frac{\kappa a}{2})}} \left. \right]$$

$$\cdot e^{i(\omega t - \kappa na)} \left. \right\} = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} dk \left\{ \left[ \frac{-iB_{2,\mu}^+ (1 - e^{\frac{i\mu a}{2}})}{\sqrt{4\pi (1 - \cos \frac{\mu a}{2})}} \left(1 + \cos \frac{\mu a}{2}\right) - \frac{B_{1,\mu}^+ (1 + e^{\frac{-i\mu a}{2}})}{\sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{\mu a}{2})}} \sin \frac{\mu a}{2} \right] \right.$$

$$\cdot e^{-i(\omega t + \mu na)} + \left[ \frac{iA_{2,\mu}^{(+)*} (1 - e^{\frac{i\mu a}{2}})}{\sqrt{4\pi (1 - \cos \frac{\mu a}{2})}} \left(1 + \cos \frac{\mu a}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{A_{1,\mu}^{(+)*} (1 + e^{\frac{i\mu a}{2}}) \sin \frac{\mu a}{2}}{\sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{\mu a}{2})}} \right] e^{i(\omega t + \mu na)} + \left[ \frac{-iB_{2,\mu}^- (1 + e^{\frac{i\mu a}{2}})}{\sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{\mu a}{2})}} \right.$$

$$\left. \left(1 - \cos \frac{\mu a}{2}\right) - \frac{B_{1,\mu}^- (1 - e^{\frac{i\mu a}{2}}) \sin \frac{\mu a}{2}}{\sqrt{4\pi (1 - \cos \frac{\mu a}{2})}} \right] e^{-i(\omega t - \mu na)} +$$

$$+ \left[ \frac{iA_{2,\mu}^{(-)*} (1 + e^{\frac{-i\mu a}{2}})}{\sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{\mu a}{2})}} \left(1 - \cos \frac{\mu a}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{A_{1,\mu}^{(-)*} (1 - e^{\frac{-i\mu a}{2}}) \sin \frac{\mu a}{2}}{\sqrt{4\pi (1 - \cos \frac{\mu a}{2})}} \right] e^{i(\omega t - \mu na)} \left. \right\} = 0$$

Então

$$\begin{aligned}
 \Phi_{2,1}^+ &= i \Phi_{1,1}^+ \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}}} \left( \frac{1 + e^{-i \frac{\kappa a}{2}}}{1 - e^{i \frac{\kappa a}{2}}} \right) \frac{\sin \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \\
 &= i \Phi_{1,1}^+ \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}}} \frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{\sin \frac{\kappa a}{2}} \cdot \left( \frac{1 + e^{-i \frac{\kappa a}{2}}}{1 - e^{i \frac{\kappa a}{2}}} \right)
 \end{aligned}$$

e quando  $a \rightarrow 0$  :  $\Phi_{2,1}^+ \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 A_{2,1}^{(+)*} &= -i A_{1,1}^{(+)*} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}}} \frac{\sin \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \left( \frac{1 + e^{i \frac{\kappa a}{2}}}{1 - e^{-i \frac{\kappa a}{2}}} \right) \\
 &= -i A_{1,1}^{(+)*} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}}} \frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{\sin \frac{\kappa a}{2}} \cdot \left( \frac{1 + e^{i \frac{\kappa a}{2}}}{1 - e^{-i \frac{\kappa a}{2}}} \right)
 \end{aligned}$$

e quando  $a \rightarrow 0$  :  $A_{2,1}^{(+)*} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{1,1}^- &= -i \Phi_{2,1}^- \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}}} \frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{\sin \frac{\kappa a}{2}} \left( \frac{1 + e^{i \frac{\kappa a}{2}}}{1 - e^{-i \frac{\kappa a}{2}}} \right) \\
 &= -i \Phi_{2,1}^- \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}}} \frac{\sin \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \left( \frac{1 + e^{i \frac{\kappa a}{2}}}{1 - e^{-i \frac{\kappa a}{2}}} \right)
 \end{aligned}$$

e quando  $a \rightarrow 0$  :  $\Phi_{1,1}^- \rightarrow 0$

$$A_{1,1}^{(-)*} = i A_{2,1}^{(-)*} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}}} \frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{\sin \frac{\kappa a}{2}} \left( \frac{1 + e^{-i \frac{\kappa a}{2}}}{1 - e^{i \frac{\kappa a}{2}}} \right)$$

$$A_{1,1}^{(-)*} = i A_{2,1}^{(-)*} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}}} \frac{\sin \frac{\kappa a}{2}}{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \left( \frac{1 + e^{-i \frac{\kappa a}{2}}}{1 - e^{i \frac{\kappa a}{2}}} \right)$$

e quando

$a \rightarrow 0$  :  $A_{1,1}^{(-)*} \rightarrow 0$

C.5 Relação de Anticomutação dos  $\chi_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Dado que  $A_{1,k}, A_{2,k}, B_{1,k}$  e  $B_{2,k}$  satisfazem as relações de anticomutação canônicas, considere:

$$\chi_1(n,0) = \int_0^\pi dk \left\{ \frac{B_{1,k} (1 + e^{i\pi/2})}{\sqrt{4\pi (1 + \cos k/2)}} e^{-ikn} + \frac{A_{1,k}^\dagger (1 + e^{i\pi/2})}{\sqrt{4\pi (1 + \cos k/2)}} e^{ikn} - \frac{iB_{2,k} (1 + e^{i\pi/2})}{\sqrt{4\pi (1 + \cos k/2)}} \frac{\sin k/2}{1 + \cos k/2} e^{ikn} + \frac{iA_{2,k}^\dagger (1 + e^{-i\pi/2})}{\sqrt{4\pi (1 + \cos k/2)}} \frac{\sin k/2}{1 + \cos k/2} e^{-ikn} \right\}$$

então

$$\{ \chi_1(n,0), \chi_1^\dagger(m,0) \} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \text{ (termos que contribuem)}$$

$$I_1 = \int_0^\pi dk dk' \frac{B_{1,k} B_{1,k'}^\dagger (1 + e^{-ik'/2}) (1 + e^{ik/2})}{2 \sqrt{1 + \cos k/2} \sqrt{1 + \cos k'/2}} e^{-ikn} e^{ik'm}$$

$$I_2 = \int_0^\pi dk dk' \frac{A_{1,k}^\dagger A_{1,k'} (1 + e^{ik/2}) (1 + e^{-ik'/2})}{2 \sqrt{1 + \cos k/2} \sqrt{1 + \cos k'/2}} e^{ikn} e^{-ik'm}$$

$$I_3 = \int_0^\pi \frac{du du' \{ B_{2,k}, B_{2,k'} \} (1 + e^{\frac{k}{2}})(1 + e^{-\frac{i k'}{2}})}{2 \cdot 2\pi \sqrt{1 + \cos \frac{k}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'}{2}}} \cdot \frac{\sin \frac{k}{2} \cdot \sin \frac{k'}{2}}{(1 + \cos \frac{k}{2})(1 + \cos \frac{k'}{2})} \cdot e^{i k n} \cdot \frac{-i k' m}{2}$$

$$I_4 = \int_0^\pi \frac{du du' \{ A_{2,k}, A_{2,k'} \} (1 + e^{-\frac{i k}{2}})(1 + e^{\frac{i k'}{2}})}{2 \cdot 2\pi \sqrt{1 + \cos \frac{k}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'}{2}}} \cdot \frac{\sin \frac{k}{2} \cdot \sin \frac{k'}{2}}{(1 + \cos \frac{k}{2})(1 + \cos \frac{k'}{2})} \cdot e^{-i k \cdot n} \cdot \frac{i k' m}{2}$$

Temos então, que:

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{du}{2\pi} e^{-i(n-m)k}$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{du}{2\pi} e^{i(n-m)k}$$

$$I_3 = \int_0^\pi \frac{du}{2\pi} \left( \frac{\sin u/2}{1 + \cos \frac{u}{2}} \right)^2 e^{i(n-m)k}$$

$$I_4 = \int_0^{\pi} \frac{du}{2\pi} \left( \frac{\sin u/2}{1 + \cos u/2} \right)^2 e^{-i(n-m)u}$$

Assim,

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{-i2\pi(n-m)} \left. e^{-i(n-m)\pi} \right\} - 1 \left. + \frac{1}{i2\pi(n-m)} \right\} e^{i(n-m)\pi} \left. - 1 \right\}$$

$$= \frac{\sin(n-m)\pi}{(m-m)\pi}$$

$$= \delta_{n,m}$$

$$I_3 + I_4 = 2 \int_0^{\pi} \frac{du}{2\pi} \left( \frac{\sin u/2}{1 + \cos u/2} \right)^2 \cos(m-m)u$$

fazendo:

$$u' = u - \pi/2$$

e quando  $u = 0 : u' = -\pi/2$

e quando  $u = \pi : u' = \pi/2$

então

$$I_3 + I_4 = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du'}{2\pi} \left( \frac{\sin(u' - \pi/2)}{1 + \cos \frac{u' - \pi/2}{2}} \right)^2 \cos(n-m)(u' - \pi/2)$$

mas

$$\cos(n-m)(u' - \pi/2) = \cos(n-m)u' \cos(n-m)\frac{\pi}{2} + \sin(n-m)u' \sin(n-m)\frac{\pi}{2}$$

então:

$$I_3 + I_4 = 2 \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du'}{2\pi} \left( \frac{\sin(u' - \frac{\pi}{2})}{1 + \cos \frac{u' - \pi/2}{2}} \right)^2 \sin(n-m)u' \right] \frac{\sin(n-m)\pi}{2}$$

$$= 0$$

Para

$$\chi_2(n, 0) = \int_0^{\pi} dk \left\{ \frac{iB_{1,k} (1 + e^{-\frac{ik}{2}}) \sin \frac{k}{2} e^{-ikn}}{\sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{k}{2})} (1 + \cos \frac{k}{2})} - \frac{-iA_{1,k}^* (1 + e^{\frac{ik}{2}}) \sin \frac{k}{2} e^{ikn} + B_{2,k} (1 + e^{\frac{ik}{2}}) e^{ikn}}{\sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{k}{2})} (1 + \cos \frac{k}{2})} + \frac{A_{2,k}^* (1 + e^{-\frac{ik}{2}}) e^{-ikn}}{\sqrt{4\pi (1 + \cos \frac{k}{2})}} \right\}$$

Da mesma forma temos que:

$$\langle \chi_2(n,0), \chi_2^*(m,0) \rangle = \delta_{m,n}$$

e

$$\langle \chi_d(n,0), \chi_p(m,0) \rangle = \langle \chi_d^*(n,0), \chi_p^*(m,0) \rangle = 0$$

com

$$d, p = 1, 2.$$

D.1 Equação da continuidade na rede

Temos,

$$\left( \partial_t - \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) \chi_1 - \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \chi_2 = 0$$

$$\left( \partial_t + \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) \chi_2 + \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \chi_1 = 0$$

então:

$$\chi_1^* \left( \partial_t - \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) \chi_1 - \chi_1^* \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \chi_2 = 0$$

$$\chi_1^\alpha \left( \partial_t - \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) \chi_1 - \chi_2^\alpha \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \chi_1 = 0,$$

Vem que:

$$\chi_1^* \partial_t \chi_1 + \left( \partial_t \chi_1^\alpha \right) \chi_1 - \frac{1}{2} \left\{ \chi_1^* \left[ (\Delta^+ + \Delta^-) \chi_1 \right] + \left[ (\Delta^+ + \Delta^-) \chi_1^\alpha \right] \chi_1 \right\} -$$

$$- \left\{ \chi_1^* \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \chi_2 + \left[ \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) \chi_2^\alpha \right] \chi_1 \right\} = 0$$

Agora, considere os termos  $T_1$  e  $T_2$ :

$$T_1 = \chi_1^* \left[ (\Delta^+ + \Delta^-) \chi_1 \right] + \left[ (\Delta^+ + \Delta^-) \chi_1^\alpha \right] \chi_1$$

$$T_2 = \alpha_1^* \left[ (\Delta^+ - \Delta^-) \chi_2 \right] + \left[ (\Delta^+ - \Delta^-) \alpha_2^* \right] \chi_1$$

e usando

$$\Delta^+ \chi_1(n) = \Delta^- \chi_1(n+1)$$

seguem

$$\begin{aligned} T_2 &= \alpha_1^*(n) \Delta^- \chi_1(n+1) + \alpha_1^*(n) \Delta^- \chi_1(n) + \left[ \Delta^- \alpha_1^*(n+1) \right] \chi_1(n) \\ &+ \left[ \Delta^- \alpha_1^*(n) \right] \chi_1(n) \\ &= \alpha_1^*(n) \chi_1(n+1) - \alpha_1^*(n) \chi_1(n) + \alpha_1^*(n) \chi_1(n) - \alpha_1^*(n) \chi_1(n-1) \\ &+ \alpha_1^*(n+1) \chi_1(n) - \alpha_1^*(n) \chi_1(n) + \alpha_1^*(n) \chi_1(n) - \alpha_1^*(n-1) \chi_1(n) \\ &= \alpha_1^*(n+1) \chi_1(n) - \alpha_1^*(n) \chi_1(n-1) + \alpha_1^*(n) \chi_1(n+1) - \alpha_1^*(n-1) \chi_1(n) \\ &= \Delta^+ \left[ \alpha_1^*(n) \chi_1(n-1) \right] + \Delta^- \left[ \alpha_1^*(n) \chi_1(n+1) \right] \\ &= \Delta^- \left[ \alpha_1^*(n+1) \chi_1(n) \right] + \Delta^+ \left[ \alpha_1^*(n) \chi_1(n+1) \right] \\ T_2 &= \Delta^- \left\{ \alpha_1^*(n) \chi_1(n+1) + \alpha_1^*(n+1) \chi_1(n) \right\} \end{aligned}$$

$$\tau_2 = x_{1(n)}^\alpha \left[ \Delta^- x_{2(n+1)} \right] - x_{1(n)}^\alpha \Delta^- x_{2(n)} + \left[ \Delta^- x_{2(n+1)} \right] x_{1(n)} - \left[ \Delta^- x_{2(n)} \right] x_{1(n)}$$

$$= x_{1(n)}^\alpha x_{2(n+1)} - x_{1(n)}^\alpha x_{2(n)} - x_{1(n)}^\alpha x_{2(n)} + x_{1(n)}^\alpha x_{2(n-1)} + x_{2(n+1)} x_{1(n)} - x_{2(n)} x_{1(n)} - x_{2(n)}^\alpha x_{1(n)} + x_{2(n-1)}^\alpha x_{1(n)}$$

Por outro lado,

$$x_2^\alpha \left( \partial_t + \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) x_2 + x_2^\alpha \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) x_1 = 0$$

$$x_2^\alpha \left( \partial_t + \frac{\Delta^+ + \Delta^-}{2} \right) x_2 + x_1^\alpha \left( \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2} \right) x_2 = 0$$

assim:

$$x_2^\alpha \partial_t x_2 + (\partial_t x_2^\alpha) x_2 + \frac{1}{2} \left\{ x_2^\alpha \left[ (\Delta^+ + \Delta^-) x_2 \right] + \left[ (\Delta^+ + \Delta^-) x_2^\alpha \right] x_2 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ x_2^\alpha \left[ (\Delta^+ - \Delta^-) x_1 \right] + \left[ (\Delta^+ - \Delta^-) x_1^\alpha \right] x_2 \right\} = 0$$

Considere os termos  $T_3$  e  $T_4$ .

$$T_3 = \chi_2^\alpha \left[ (\Delta^+ + \Delta^-) \chi_2 \right] + \left[ (\Delta^+ + \Delta^-) \chi_2^\# \right] \chi_2$$

$$T_4 = \chi_2^\alpha \left[ (\Delta^+ - \Delta^-) \chi_1 \right] + \left[ (\Delta^+ - \Delta^-) \chi_1^\# \right] \chi_2$$

então

$$\begin{aligned} T_3 &= \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n+1) - \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n) + \chi_2^\#(n) \chi_2(n) - \\ &\quad - \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n-1) + \chi_2^\#(n+1) \chi_2(n) - \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n) + \\ &\quad + \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n) - \chi_2^\alpha(n-1) \chi_2(n) \\ &= \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n+1) - \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n) + \chi_2^\#(n+1) \chi_2(n) - \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n-1) \\ &= \Delta^- \left[ \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n+1) \right] + \Delta^+ \left[ \chi_2^\#(n) \chi_2(n-1) \right] \\ &= \Delta^- \left\{ \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n+1) + \chi_2^\alpha(n+1) \chi_2(n) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_4 &= \alpha_1^*(n) \Delta^- \chi_2(n+1) - \alpha_1^*(n) \Delta^- \chi_2(n) + [\Delta^- \alpha_2^*(n+1)] \chi_1(n) \\
&\quad - [\Delta^- \alpha_2^*(n)] \chi_1(n) \\
&= \alpha_1^*(n) \chi_2(n+1) - \alpha_1^*(n) \chi_2(n) - \alpha_1^*(n) \chi_2(n) + \alpha_1^*(n) \chi_2(n) \\
&\quad + \alpha_2^*(n+1) \chi_1(n) - \alpha_2^*(n) \chi_1(n) - \alpha_2^*(n) \chi_1(n) + \alpha_2^*(n-1) \chi_1(n)
\end{aligned}$$

Vemos, pois, que  $T_2 = T_4$ ; assim

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^*(n) (\partial_t \chi_1(n)) + (\partial_t \alpha_1^*(n)) \chi_1(n) - \frac{1}{2} \Delta^- \left\{ \alpha_1^*(n) \chi_1(n+1) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha_1^*(n+1) \chi_1(n) \right\} - \frac{1}{2} T_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_2^*(n) (\partial_t \chi_2(n)) + (\partial_t \alpha_2^*(n)) \chi_2(n) + \frac{1}{2} \Delta^- \left\{ \alpha_2^*(n) \chi_2(n+1) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha_2^*(n+1) \chi_2(n) \right\} + \frac{1}{2} T_2 = 0
\end{aligned}$$

dai temos:

$$\begin{aligned}
&\partial_t \left( \alpha_1^*(n) \chi_1(n) + \alpha_2^*(n) \chi_2(n) \right) - \frac{\Delta^-}{2} \left\{ \left( \alpha_1^*(n) \chi_1(n+1) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha_1^*(n+1) \chi_1(n) \right) - \left( \alpha_2^*(n) \chi_2(n+1) + \alpha_2^*(n+1) \chi_2(n) \right) \right\} = 0
\end{aligned}$$

onde

$$J_0 = \chi_1^\alpha(n) \chi_1(n) + \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n)$$

$$J_\pm = \frac{1}{2} \left\{ \left( \chi_1^\alpha(n) \chi_1(n+1) + \chi_1^\alpha(n+1) \chi_1(n) \right) - \left( \chi_2^\alpha(n) \chi_2(n+1) + \chi_2^\alpha(n+1) \chi_2(n) \right) \right\}$$

tal que

$$\partial_t J_0 - \Delta J_\pm = 0$$

é a equação da conservação da corrente na rede espacial e, no limite do contínuo:

$$J_0 = : \chi_1^\alpha(x, t) \chi_1(x, t) : + : \chi_2^\alpha(x, t) \chi_2(x, t) :$$

$$J_\pm = : \chi_1^\alpha(x, t) \chi_1(x, t) : - : \chi_2^\alpha(x, t) \chi_2(x, t) :$$

D.2 Cálculo da componente  $J_0$  em termos das expressões (III.42)

Temos que

$$J_0 = \chi_{1,k}^\#(n,t) \chi_{1,k'}(n,t) + \chi_{2,k}^\#(n,t) \chi_{2,k'}(n,t) = T_1 + T_2$$

com

$$T_1 = \underline{1} + \dots + \underline{16}.$$

$$T_2 = \underline{17} + \dots + \underline{32}$$

onde,

$$\underline{1.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' (1 + e^{iua/2}) (1 + e^{-iu'a/2})}{\sqrt{1 + \cos \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'a}{2}}} B_{1,k}^\# B_{2,k'}.$$

$$\cdot e^{i[(\omega - \omega')t + \pi(k - k')a]}$$

$$\underline{2.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' (1 + e^{iua/2}) (1 + e^{iu'a/2})}{\sqrt{1 + \cos \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'a}{2}}} B_{1,k}^\# A_{2,k'}^-.$$

$$\cdot e^{i[(\omega + \omega')t + \pi(k + k')a]}$$

$$\underline{3.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{ik'u'}{2}}\right) \operatorname{sen} \frac{u'a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'u'}{2}} \left(1 + \cos \frac{u'a}{2}\right)} \mathcal{B}_{1,u}^* \mathcal{B}_{2,u'}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega - \omega')t + \eta(u + u')a]}$$

$$\underline{4.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-ik'u'}{2}}\right) \operatorname{sen} \frac{u'a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'u'}{2}} \left(1 + \cos \frac{u'a}{2}\right)} \mathcal{B}_{1,u}^* A_{2,u'}^*$$

$$\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t + \eta(u - u')a]}$$

$$\underline{5.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-ik'u'}{2}}\right)}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'u'}{2}}} A_{1,u}^* \mathcal{B}_{1,u'}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t + \eta(u + u')a]}$$

$$\underline{6.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{ik'u'}{2}}\right)}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'u'}{2}}} A_{1,u}^* A_{1,u'}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega - \omega')t + \eta(u - u')a]}$$

$$\underline{7.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-\frac{iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{ik'u'}{2}}\right) \sin \frac{ku'a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'u'}{2}} \left(1 + \cos \frac{ku'a}{2}\right)} A_{1,k}^* B_{2,k'}$$

$$e^{-i[(w+w')t + \eta(k+u')a]}$$

$$\underline{8.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-\frac{iku}{2}}\right) \left(1 + e^{-\frac{ik'u'}{2}}\right) \sin \frac{ku'a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'u'}{2}} \left(1 + \cos \frac{ku'a}{2}\right)} A_{1,k}^* A_{2,k'}$$

$$e^{-i[(w-w')t + \eta(k+u')a]}$$

$$\underline{9.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-\frac{iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{ik'u'}{2}}\right) \sin \frac{ku'a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'u'}{2}} \left(1 + \cos \frac{ku'a}{2}\right)} B_{2,k}^* B_{1,k'}$$

$$e^{i[(w-w')t - \eta(k+u')a]}$$

$$\underline{10.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-\frac{iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{ik'u'}{2}}\right) \sin \frac{ku'a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'u'}{2}} \left(1 + \cos \frac{ku'a}{2}\right)} B_{2,k}^* A_{1,k'}$$

$$e^{i[(w+w')t - \eta(k-u')a]}$$

$$11. = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-i\frac{ka}{2}}) (1 + e^{i\frac{k'a}{2}}) \frac{\sin \frac{ka}{2}}{2} \frac{\sin \frac{k'a}{2}}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'a}{2}} (1 + \cos \frac{ka}{2}) (1 + \cos \frac{k'a}{2})} \mathcal{B}_{2,k}^* \mathcal{B}_{2,k'}$$

$$e^{i[(\omega - \omega')t - \eta(k - k')a]}$$

$$12. = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-i\frac{ka}{2}}) (1 + e^{-i\frac{k'a}{2}}) \frac{\sin \frac{ka}{2}}{2} \frac{\sin \frac{k'a}{2}}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'a}{2}} (1 + \cos \frac{ka}{2}) (1 + \cos \frac{k'a}{2})} \mathcal{B}_{2,k}^* \mathcal{A}_{2,k'}$$

$$e^{i[(\omega + \omega')t - \eta(k + k')a]}$$

$$13. = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{i\frac{ka}{2}}) (1 + e^{-i\frac{k'a}{2}}) \frac{\sin \frac{ka}{2}}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'a}{2}} (1 + \cos \frac{ka}{2})} \mathcal{A}_{2,k} \mathcal{B}_{2,k'}$$

$$e^{-i[(\omega + \omega')t - \eta(k - k')a]}$$

$$14. = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{i\frac{ka}{2}}) (1 + e^{i\frac{k'a}{2}}) \frac{\sin \frac{ka}{2}}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'a}{2}} (1 + \cos \frac{ka}{2})} \mathcal{A}_{2,k} \mathcal{A}_{2,k'}$$

$$e^{-i[(\omega - \omega')t - \eta(k + k')a]}$$

$$\underline{15.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \frac{du du' (1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}) (1 + e^{\frac{i\kappa' a}{2}}) \operatorname{sech} \frac{\kappa a}{2} \operatorname{sech} \frac{\kappa' a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}} (1 + \cos \frac{\kappa a}{2}) (1 + \cos \frac{\kappa' a}{2})} A_{2,\kappa} B_{2,\kappa'}$$

$$e^{-i[(\omega + \omega')t - n(\kappa + \kappa')a]}$$

$$\underline{16.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}) (1 + e^{\frac{-i\kappa' a}{2}}) \operatorname{sech} \frac{\kappa a}{2} \operatorname{sech} \frac{\kappa' a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}} (1 + \cos \frac{\kappa a}{2}) (1 + \cos \frac{\kappa' a}{2})} A_{2,\kappa} A_{2,\kappa'}$$

$$e^{-i[(\omega - \omega')t - n(\kappa - \kappa')a]}$$

$$\underline{17.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{dk du' (1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}) (1 + e^{\frac{-i\kappa' a}{2}}) \operatorname{sech} \frac{\kappa a}{2} \operatorname{sech} \frac{\kappa' a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}} (1 + \cos \frac{\kappa a}{2}) (1 + \cos \frac{\kappa' a}{2})} B_{2,\kappa} B_{2,\kappa'}$$

$$e^{i[(\omega - \omega')t + n(\kappa - \kappa')a]}$$

$$\underline{18.} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}) (1 + e^{\frac{i\kappa' a}{2}}) \operatorname{sech} \frac{\kappa a}{2} \operatorname{sech} \frac{\kappa' a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}} (1 + \cos \frac{\kappa a}{2}) (1 + \cos \frac{\kappa' a}{2})} B_{2,\kappa} A_{2,\kappa'}$$

$$e^{i[(\omega + \omega')t + n(\kappa + \kappa')a]}$$

$$\underline{19.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{iku}{2}}) (1 + e^{\frac{i k' u'}{2}}) \operatorname{sech} \frac{u}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k' u'}{2}} (1 + \cos \frac{ku}{2})} \mathcal{B}_{2,k}^* \mathcal{B}_{2,k'}$$

$$e^{i[(\omega - \omega')t + m(k + k')a]}$$

$$\underline{20.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{i ku}{2}}) (1 + e^{\frac{-i k' u'}{2}}) \operatorname{sech} \frac{u}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k' u'}{2}} (1 + \cos \frac{ku}{2})} \mathcal{B}_{2,k}^* \mathcal{A}_{2,k'}$$

$$e^{i[(\omega + \omega')t + m(k - k')a]}$$

$$\underline{21.} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{-i ku}{2}}) (1 + e^{\frac{-i k' u'}{2}}) \operatorname{sech} \frac{u}{2} \operatorname{sech} \frac{u'}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k' u'}{2}} (1 + \cos \frac{ku}{2}) (1 + \cos \frac{k' u'}{2})} \mathcal{A}_{2,k} \mathcal{B}_{2,k'}$$

$$e^{-i[(\omega + \omega')t + m(k + k')a]}$$

$$\underline{22.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{-i ku}{2}}) (1 + e^{\frac{i k' u'}{2}}) \operatorname{sech} \frac{u}{2} \operatorname{sech} \frac{u'}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k' u'}{2}} (1 + \cos \frac{ku}{2}) (1 + \cos \frac{k' u'}{2})} \mathcal{A}_{2,k} \mathcal{A}_{2,k'}$$

$$e^{-i[(\omega - \omega')t + m(k - k')a]}$$

$$\underline{23.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-\frac{iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{ik'u'}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u-u'}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{u}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{u'}{2}} \left(1 + \operatorname{sech} \frac{u}{2}\right)} A_{1,u} B_{2,u'}$$

$$\cdot e^{-i[(w+w')t + n(u-u')a]}$$

$$\underline{24.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-\frac{iku}{2}}\right) \left(1 + e^{-\frac{ik'u'}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u+u'}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{u}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{u'}{2}} \left(1 + \operatorname{sech} \frac{u}{2}\right)} A_{1,u} A_{2,u'}$$

$$\cdot e^{-i[(w-w')t + n(u+u')a]}$$

$$\underline{25.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-\frac{iku}{2}}\right) \left(1 + e^{-\frac{ik'u'}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u-u'}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{u}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{u'}{2}} \left(1 + \operatorname{sech} \frac{u'}{2}\right)} B_{2,u}^* B_{1,u'}$$

$$\cdot e^{i[(w-w')t - n(u+u')a]}$$

$$\underline{26.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-\frac{iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{ik'u'}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u+u'}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{u}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{u'}{2}} \left(1 + \operatorname{sech} \frac{u'}{2}\right)} B_{2,u}^* A_{1,u'}$$

$$\cdot e^{i[(w+w')t - n(u-u')a]}$$

$$\underline{27.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-iua/2})(1 + e^{iu'a/2})}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}}} \mathcal{D}_{2,u} \mathcal{D}_{2,u'}$$

$$\cdot e^{i[(w-w')t - n(u-u')a]}$$

$$\underline{28.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{iue/2})(1 + e^{-iu'a/2})}{\sqrt{1 + \cos \frac{ue}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}}} \mathcal{D}_{2,u} \mathcal{A}_{2,u'}$$

$$\cdot e^{i[(w+w')t - n(u+u')a]}$$

$$\underline{29.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{iua/2})(1 + e^{-iu'a/2}) \sin \frac{u'a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}} (1 + \cos \frac{u'a}{2})} \mathcal{A}_{2,u} \mathcal{D}_{4,u'}$$

$$\cdot e^{-i[(w+w')t - n(u-u')a]}$$

$$\underline{30.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{iue/2})(1 + e^{iu'e/2}) \sin \frac{u'a}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ue}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}} (1 + \cos \frac{u'a}{2})} \mathcal{A}_{2,u} \mathcal{A}_{2,u'}$$

$$\cdot e^{-i[(w-w')t - n(u+u')a]}$$

$$\underline{31.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{i\frac{ku}{2}}) (1 + e^{i\frac{k'u'}{2}})}{\sqrt{1 + \cos\frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos\frac{k'u'}{2}}} A_{2,k} \mathcal{B}_{2,k'}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t - \eta(u + u')a]}$$

$$\underline{32.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{i\frac{ku}{2}}) (1 + e^{-i\frac{k'u'}{2}})}{\sqrt{1 + \cos\frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos\frac{k'u'}{2}}} A_{2,k} A_{2,k'}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega - \omega')t - \eta(u - u')a]}$$

D.3 O campo escalar  $\varphi(\tau)$

O campo escalar  $\varphi(\tau)$  que satisfaz  $\tilde{J}_0 = \partial_\tau \varphi(\tau)$  é dado por:

$$\varphi(\tau) = \underline{1} + \dots + \underline{32}.$$

onde:

$$\underline{1.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-i\kappa' a}{2}}\right) B_{1,\kappa} B_{1,\kappa'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}} i(\omega - \omega')}$$

$$e^{i[(\omega - \omega')t + \pi(\kappa - \kappa')a]}$$

$$\underline{2.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i\kappa' a}{2}}\right) B_{1,\kappa} A_{1,\kappa'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}} i(\omega + \omega')}$$

$$e^{i[(\omega + \omega')t + \pi(\kappa + \kappa')a]}$$

$$\underline{3.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i\kappa a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i\kappa' a}{2}}\right) \frac{\sin \frac{\kappa' a}{2}}{2} B_{1,\kappa} B_{2,\kappa'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}\right) i(\omega - \omega')}$$

$$e^{i[(\omega - \omega')t + \pi(\kappa + \kappa')a]}$$

$$4. = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{iua}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-iu'a}{2}}\right) \frac{\sin u'a}{2} B_{1,u}^{\#} A_{2,u'}^{\#}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u'a}{2}\right) i(\omega + \omega')}$$

$$e^{-i[(\omega + \omega')t + n(u - u')a]}$$

$$5. = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-iua}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-iu'a}{2}}\right) A_{1,u}^{\#} B_{1,u'}^{\#}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}} -i(\omega + \omega')}$$

$$e^{-i[(\omega + \omega')t + n(u + u')a]}$$

$$6. = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{iua}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i u'a}{2}}\right) A_{1,u}^{\#} A_{1,u'}^{\#}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}} -i(\omega - \omega')}$$

$$e^{-i[(\omega - \omega')t + n(u - u')a]}$$

$$7. = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-iua}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i u'a}{2}}\right) \frac{\sin u'a}{2} A_{1,u}^{\#} B_{2,u'}^{\#}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u'a}{2}\right) -i(\omega + \omega')}$$

$$e^{-i[(\omega + \omega')t + n(u + u')a]}$$

$$8. = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-i\kappa a/2}) (1 + e^{-i\kappa' a/2}) \operatorname{sech} \frac{\kappa a}{2} A_{1,\kappa}^* A_{2,\kappa'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}} (1 + \cos \frac{\kappa a}{2})} - i(\omega - \omega')$$

$$e^{-i[(\omega - \omega')t + n(\kappa + \kappa')a]}$$

$$9. = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-i\kappa a/2}) (1 + e^{-i\kappa' a/2}) \operatorname{sech} \frac{\kappa a}{2} B_{2,\kappa}^* B_{1,\kappa'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}} (1 + \cos \frac{\kappa a}{2})} i(\omega - \omega')$$

$$e^{i[(\omega - \omega')t - n(\kappa + \kappa')a]}$$

$$10. = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-i\kappa a/2}) (1 + e^{i\kappa' a/2}) \operatorname{sech} \frac{\kappa a}{2} B_{2,\kappa}^* A_{1,\kappa'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}} (1 + \cos \frac{\kappa a}{2})} i(\omega + \omega')$$

$$e^{i[(\omega + \omega')t - n(\kappa - \kappa')a]}$$

$$11. = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-i\kappa a/2}) (1 + e^{i\kappa' a/2}) \operatorname{sech} \frac{\kappa a}{2} \operatorname{sech} \frac{\kappa' a}{2} B_{2,\kappa}^* B_{2,\kappa'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{\kappa a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{\kappa' a}{2}} (1 + \cos \frac{\kappa a}{2}) (1 + \cos \frac{\kappa' a}{2})} i(\omega - \omega')$$

$$e^{i[(\omega - \omega')t - n(\kappa - \kappa')a]}$$

$$\underline{12.} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{dud u' \left( 1 + e^{-\frac{i u a}{2}} \right) \left( 1 + e^{-\frac{i u' a}{2}} \right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} \operatorname{sech} \frac{u' a}{2} A_{2,u} A_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left( 1 + \cos \frac{u a}{2} \right) \left( 1 + \cos \frac{u' a}{2} \right) n(\omega + \omega')}$$

$$e^{-i[(\omega + \omega')t - n(u + u')a]}$$

$$\underline{13.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{dud u' \left( 1 + e^{\frac{i u a}{2}} \right) \left( 1 + e^{\frac{i u' a}{2}} \right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} A_{2,u} B_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left( 1 + \cos \frac{u a}{2} \right) -i(\omega + \omega')}$$

$$e^{-i[(\omega + \omega')t - n(u - u')a]}$$

$$\underline{14.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{dud u' \left( 1 + e^{\frac{i u a}{2}} \right) \left( 1 + e^{\frac{i u' a}{2}} \right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} A_{2,u} A_{1,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left( 1 + \cos \frac{u a}{2} \right) -i(\omega - \omega')}$$

$$e^{-i[(\omega - \omega')t - n(u + u')a]}$$

$$\underline{15.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{dud u' \left( 1 + e^{\frac{i u a}{2}} \right) \left( 1 + e^{\frac{i u' a}{2}} \right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} \operatorname{sech} \frac{u' a}{2} A_{2,u} B_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left( 1 + \cos \frac{u a}{2} \right) \left( 1 + \cos \frac{u' a}{2} \right) n(\omega + \omega')}$$

$$e^{-i[(\omega + \omega')t - n(u + u')a]}$$

$$\underline{16.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-i u' a}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} \operatorname{sech} \frac{u' a}{2} A_{2, u} A_{2, u'}^*}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{u' a}{2}\right) - i(\omega - \omega')} \cdot e^{-i[(\omega - \omega')t - n(u - u')a]}$$

$$\underline{17.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-i u' a}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} \operatorname{sech} \frac{u' a}{2} B_{1, u}^* B_{1, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{u' a}{2}\right) + i(\omega - \omega')} \cdot e^{i[(\omega - \omega')t + n(u - u')a]}$$

$$\underline{18.} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i u' a}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} \operatorname{sech} \frac{u' a}{2} B_{1, u}^* A_{1, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{u' a}{2}\right) + i(\omega + \omega')} \cdot e^{i[(\omega + \omega')t + n(u + u')a]}$$

$$\underline{19.} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i u' a}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} \cdot B_{1, u}^* B_{2, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) + i(\omega - \omega')} \cdot e^{i[(\omega - \omega')t + n(u + u')a]}$$

$$\underline{20.} = \frac{-i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-iku'}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{ku}{2} \cdot \operatorname{sech} \frac{ku'}{2} \cdot A_{1,u} A_{2,u'}}{\sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{ku'}{2}} \left(1 + \operatorname{sech} \frac{ku}{2}\right) \left(1 + \operatorname{sech} \frac{ku'}{2}\right) - i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t + n(u - u')a]}$$

$$\underline{21.} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-iku'}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{ku}{2} \cdot \operatorname{sech} \frac{ku'}{2} \cdot A_{1,u} B_{2,u'}}{\sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{ku'}{2}} \left(1 + \operatorname{sech} \frac{ku}{2}\right) \left(1 + \operatorname{sech} \frac{ku'}{2}\right) - i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t + n(u + u')a]}$$

$$\underline{22.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{iku'}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{ku}{2} \cdot \operatorname{sech} \frac{ku'}{2} \cdot A_{1,u} A_{2,u'}}{\sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{ku'}{2}} \left(1 + \operatorname{sech} \frac{ku}{2}\right) \left(1 + \operatorname{sech} \frac{ku'}{2}\right) - i(\omega - \omega')}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega - \omega')t + n(u - u')a]}$$

$$\underline{23.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{iku'}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{ku}{2} \cdot A_{1,u} B_{2,u'}}{\sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sech} \frac{ku'}{2}} \left(1 + \operatorname{sech} \frac{ku}{2}\right) - i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t + n(u - u')a]}$$

$$24. = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\frac{\pi}{a}}{0} \frac{dud u' \left( 1 + e^{\frac{-iku}{2}} \right) \left( 1 + e^{\frac{-ik'u'}{2}} \right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} A_{1,k} A_{2,k'}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma u a}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sigma u' a}{2}} \left( 1 + \frac{\sigma u a}{2} \right) - i(\omega - \omega')}$$

$$e^{-i[(\omega - \omega')t + n(k + k')a]}$$

$$25. = \frac{i}{4\pi} \left[ \frac{\frac{\pi}{a}}{0} \frac{dud u' \left( 1 + e^{\frac{-iku}{2}} \right) \left( 1 + e^{\frac{-ik'u'}{2}} \right) \operatorname{sech} \frac{u' a}{2} B_{2,k} B_{2,k'}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma u a}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sigma u' a}{2}} \left( 1 + \frac{\sigma u' a}{2} \right) i(\omega - \omega')}$$

$$e^{i[(\omega - \omega')t - n(k + k')a]}$$

$$26. = -\frac{i}{4\pi} \left[ \frac{\frac{\pi}{a}}{0} \frac{dud u' \left( 1 + e^{\frac{-iku}{2}} \right) \left( 1 + e^{\frac{ik'u'}{2}} \right) \operatorname{sech} \frac{u' a}{2} B_{2,k} A_{2,k'}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma u a}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sigma u' a}{2}} \left( 1 + \frac{\sigma u' a}{2} \right) i(\omega + \omega')}$$

$$e^{i[(\omega + \omega')t - n(k - k')a]}$$

$$27. = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\frac{\pi}{a}}{0} \frac{dud u' \left( 1 + e^{\frac{-iku}{2}} \right) \left( 1 + e^{\frac{ik'u'}{2}} \right) B_{2,k} B_{2,k'}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma u a}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sigma u' a}{2}} i(\omega - \omega')}$$

$$e^{i[(\omega - \omega')t - n(k - k')a]}$$

$$\underline{28.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left( 1 + e^{-i u a} \right) \left( 1 + e^{-i u' a} \right) \mathcal{B}_{2,u} \mathcal{A}_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} i(\omega + \omega')}$$

$$\bullet e^{-i[(\omega + \omega')t - n(u + u')a]}$$

$$\underline{29.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left( 1 + e^{\frac{i u a}{2}} \right) \left( 1 + e^{\frac{-i u' a}{2}} \right) \mathcal{B}_{2,u} \mathcal{B}_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left( 1 + \cos \frac{u' a}{2} \right) -i(\omega + \omega')}$$

$$\bullet e^{-i[(\omega + \omega')t - n(u - u')a]}$$

$$\underline{30.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left( 1 + e^{\frac{i u a}{2}} \right) \left( 1 + e^{\frac{i u' a}{2}} \right) \mathcal{B}_{2,u} \mathcal{A}_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left( 1 + \cos \frac{u' a}{2} \right) -i(\omega - \omega')}$$

$$\bullet e^{-i[(\omega - \omega')t - n(u + u')a]}$$

$$\underline{31.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left( 1 + e^{\frac{i u a}{2}} \right) \left( 1 + e^{\frac{i u' a}{2}} \right) \mathcal{A}_{2,u} \mathcal{B}_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} -i(\omega + \omega')}$$

$$\bullet e^{-i[(\omega + \omega')t - n(u + u')a]}$$

$$32. = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{-\frac{i u' a}{2}}\right) A_{2,u} A_{2,u'}^*}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} - i(\omega - \omega')} e^{-i[(\omega - \omega')t - u(k - u')a]}$$

#### D.4 Expressão da componente $J_{\perp}$ em termos das expressões (III.42)

Temos que

$$J_{\perp} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \chi_1^{\dagger}(n) \chi_1(n+1) + \chi_1^{\dagger}(n+1) \chi_1(n) \right) - \left( \chi_2^{\dagger}(n) \chi_2(n+1) + \chi_2^{\dagger}(n+1) \chi_2(n) \right) \right\}$$

É fácil ver que os termos de  $J_{\perp}$ , diferem dos termos de  $J_{\parallel}$  já obtidos, por um fator do tipo  $\frac{\pm}{e} i u' a$ , a menos da constante multiplicativa 1/2 e do conjugado das partes que envolve produtos de  $\chi_1$  e  $\chi_2$ , sendo que este último vem com sinal negativo. Assim sendo, considere os seguintes algoritmos:

A. Para a parte que envolve produtos de  $\chi_1$ :

i)

$B_{1,k}^{\dagger}$	$A_{1,k}^{\dagger}$	$i B_{2,k}^{\dagger}$	$-i A_{2,k}$
$B_{1,u'}$	$A_{1,u'}$	$-i B_{2,u'}$	$i A_{2,u'}^{\dagger}$

$B_{1,u'}^*$	$A_{1,u'}^*$	$iB_{2,u'}^*$	$-iA_{2,u'}$
$B_{2,u}$	$A_{2,u}$	$-iB_{1,u}$	$iA_{1,u}^*$

Aqui, os termos de  $J_{\perp}$  incluem os seguintes produtos de operadores:

i)

$$\begin{aligned}
 & \underline{B_{1,u}^* B_{2,u'}}; \underline{B_{2,u}^* A_{2,u'}}; -iB_{1,u}^* B_{2,u'}; iB_{1,u}^* A_{2,u'}^*; \underline{A_{1,u}^* B_{2,u'}}; \underline{A_{1,u}^* A_{2,u'}} \\
 & -iA_{2,u}^* B_{2,u'}; iA_{1,u}^* A_{2,u'}^*; iB_{2,u}^* B_{1,u'}; iB_{2,u}^* A_{2,u'}; B_{2,u}^* B_{2,u'}; -B_{2,u}^* A_{2,u'}^* \\
 & -iA_{2,u} B_{1,u'}; -iA_{2,u} A_{2,u'}; -A_{2,u} B_{2,u'}; A_{2,u} A_{2,u'}^*
 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 & \underline{B_{1,u'}^* B_{2,u}}; \underline{B_{2,u'}^* A_{2,u}}; -iB_{1,u'}^* B_{2,u}; iB_{1,u'}^* A_{2,u}^*; \underline{A_{1,u'}^* A_{2,u}} \underline{A_{2,u}^* B_{1,u'}} \\
 & -iA_{1,u'}^* B_{2,u}; iA_{1,u'}^* A_{2,u}^*; iB_{2,u'}^* B_{1,u}; iB_{2,u'}^* A_{2,u}; B_{2,u'}^* B_{2,u}; \\
 & -B_{2,u'}^* A_{2,u}^*; -iA_{2,u'} B_{1,u}; -iA_{2,u'} A_{2,u}; -A_{2,u'} B_{2,u}; A_{2,u'} A_{2,u}^*
 \end{aligned}$$

Os termos que sobram no limite do contínuo são aqueles sublinhados.

Assim, temos as combinações:

$$\underline{\mathcal{D}_{1,\kappa}^\# \mathcal{D}_{2,\kappa'}} + \underline{\mathcal{D}_{1,\kappa'}^\# \mathcal{D}_{2,\kappa}}$$

$$\underline{\mathcal{D}_{1,\kappa}^\# A_{2,\kappa'}} + \underline{\mathcal{D}_{1,\kappa'}^\# A_{2,\kappa}}$$

$$\underline{A_{1,\kappa'}^\# \mathcal{D}_{2,\kappa}} + \underline{A_{1,\kappa}^\# \mathcal{D}_{2,\kappa'}}$$

$$\underline{A_{1,\kappa'}^\# A_{2,\kappa}} + \underline{A_{1,\kappa}^\# A_{2,\kappa'}}$$

B. Para a parte que envolve produtos de

$\chi_2$ .

iii)

$-i\mathcal{D}_{1,\kappa}^\#$	$iA_{2,\kappa}$	$\mathcal{D}_{2,\kappa}$	$A_{2,\kappa}$
$i\mathcal{D}_{1,\kappa'}$	$-iA_{2,\kappa'}^\#$	$\mathcal{D}_{2,\kappa'}$	$A_{2,\kappa'}^\#$

iv)

$-i\mathcal{D}_{2,\kappa'}^\#$	$iA_{1,\kappa'}$	$\mathcal{D}_{2,\kappa'}$	$A_{2,\kappa'}$
$i\mathcal{D}_{2,\kappa}$	$-iA_{1,\kappa}^\#$	$\mathcal{D}_{2,\kappa}$	$A_{2,\kappa}^\#$

Aqui, os termos de  $J_L$  incluem os seguintes produtos de operadores:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{B}_{1,k}^* \mathcal{B}_{1,k'}^* ; - \mathcal{B}_{1,k}^* A_{1,k'}^* ; -i \mathcal{B}_{1,k}^* \mathcal{B}_{2,k'}^* ; -i \mathcal{B}_{1,k}^* A_{2,k'}^* ; - A_{1,k} \mathcal{B}_{2,k} \\
& A_{1,k} A_{1,k'}^* ; i A_{1,k} \mathcal{B}_{2,k'}^* ; i A_{1,k} A_{2,k'}^* ; i \mathcal{B}_{2,k}^* \mathcal{B}_{1,k'}^* ; -i \mathcal{B}_{2,k}^* A_{1,k'}^* \\
& \underline{\mathcal{B}_{2,k}^* \mathcal{B}_{2,k'}^*} ; \underline{\mathcal{B}_{2,k}^* A_{2,k'}^*} ; i A_{2,k} \mathcal{B}_{1,k'}^* ; -i A_{2,k} A_{1,k'}^* ; A_{2,k} \underline{\mathcal{B}_{2,k'}} \\
& \underline{A_{2,k} A_{2,k'}^*}
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
& \mathcal{B}_{1,k'}^* \mathcal{B}_{2,k} ; - \mathcal{B}_{1,k'}^* A_{1,k}^* ; -i \mathcal{B}_{1,k'}^* \mathcal{B}_{2,k} ; -i \mathcal{B}_{1,k'}^* A_{2,k}^* ; - A_{1,k'} \mathcal{B}_{2,k} ; A_{1,k'} A_{2,k}^* \\
& A_{2,k'} \mathcal{B}_{2,k} ; i A_{1,k'} A_{2,k}^* ; i \mathcal{B}_{2,k'}^* \mathcal{B}_{1,k} ; -i \mathcal{B}_{2,k'}^* A_{1,k}^* ; \underline{\mathcal{B}_{2,k'}^* \mathcal{B}_{2,k}} ; \underline{\mathcal{B}_{2,k'}^* A_{2,k}^*} \\
& i A_{2,k'} \mathcal{B}_{1,k} ; -i A_{2,k'} A_{1,k}^* ; \underline{A_{2,k'} \mathcal{B}_{2,k}} ; \underline{A_{2,k'} A_{2,k}^*}
\end{aligned}$$

e combinando os termos que sobram no limite do contínuo:

$$\mathcal{B}_{2,k}^* \mathcal{B}_{2,k'}^* + \mathcal{B}_{2,k'}^* \mathcal{B}_{2,k}$$

$$\mathcal{B}_{2,k}^* A_{2,k'}^* + \mathcal{B}_{2,k'}^* A_{2,k}^*$$

$$A_{2,k} \mathcal{B}_{2,k'} + A_{2,k'} \mathcal{B}_{2,k}$$

$$A_{2,k} A_{2,k'}^* + A_{2,k'} A_{2,k}^*$$

Assim, os termos de  $J_1$  que nos interessa, por ora, são:

$$g_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' (1 + e^{\frac{i u u'}{2}}) (1 + e^{\frac{-i u' a}{2}}) \mathcal{B}_{1,u}^* \mathcal{B}_{1,u'}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma u a}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sigma u' a}{2}}}$$

$$\cdot \frac{i}{\epsilon} \left[ (\omega - \omega') t + n(u - u') a \right] e^{-i u' a} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' (1 + e^{\frac{i u' a}{2}}) (1 + e^{\frac{-i u a}{2}}) \mathcal{B}_{1,u'}^* \mathcal{B}_{1,u}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma u a}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sigma u' a}{2}}}$$

$$\cdot \frac{-i}{\epsilon} \left[ (\omega - \omega') t + n(u - u') a \right] e^{i u' a}$$

$$g_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' (1 + e^{\frac{i u a}{2}}) (1 + e^{\frac{i u' a}{2}}) \mathcal{B}_{1,u}^* \mathcal{A}_{1,u'}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma u a}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sigma u' a}{2}}}$$

$$\cdot \frac{i}{\epsilon} \left[ (\omega + \omega') t + n(u + u') a \right] e^{i u a} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' (1 + e^{\frac{i u a}{2}}) (1 + e^{\frac{i u' a}{2}}) \mathcal{B}_{1,u'}^* \mathcal{A}_{1,u}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma u a}{2}} \sqrt{1 + \frac{\sigma u' a}{2}}}$$

$$\cdot \frac{i}{\epsilon} \left[ (\omega + \omega') t + n(u + u') a \right] e^{i u' a}$$

$$g_3 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-i u a}\right) \left(1 + e^{-i u' a}\right) A_{\perp, u}^* A_{\perp, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}}}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t + \pi(u + u')a]} \cdot e^{-i u' a} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-i u a}\right) \left(1 + e^{-i u' a}\right) A_{\perp, u}^* A_{\perp, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}}}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t + \pi(u + u')a]} \cdot e^{-i u' a}$$

$$g_4 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-i u a}\right) \left(1 + e^{i u' a}\right) A_{\perp, u}^* A_{\perp, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}}}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega - \omega')t + \pi(u - u')a]} \cdot e^{i u' a} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-i u a}\right) \left(1 + e^{i u' a}\right) A_{\perp, u}^* A_{\perp, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}}}$$

$$\cdot e^{i[(\omega - \omega')t + \pi(u - u')a]} \cdot e^{-i u' a}$$

$$g_s = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-iua}) (1 + e^{iu'a}) \mathcal{B}_{2,u}^* \mathcal{B}_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}}}$$

$$\cdot e^{i[(w-w')t - n(u-u')a]} \cdot e^{ik'a} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-iu'a}) (1 + e^{iua}) \mathcal{B}_{2,u'}^* \mathcal{B}_{2,u}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}}}$$

$$\cdot e^{-i[(w-w')t - n(u-u')a]} \cdot e^{-ik'a}$$

$$g_o = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-iua}) (1 + e^{-iu'a}) \mathcal{B}_{2,u}^* \mathcal{B}_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}}}$$

$$\cdot e^{i[(w+w')t - n(u+u')a]} \cdot e^{-ik'a} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-iua}) (1 + e^{-iu'a}) \mathcal{B}_{2,u'}^* \mathcal{B}_{2,u}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}}}$$

$$\cdot e^{i[(w+w')t - n(u+u')a]} \cdot e^{-ik'a}$$

$$g_7 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{iua}{2}}) (1 + e^{\frac{iu'a}{2}}) A_{2,u} \Phi_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}}}$$

$$\cdot e^{-i[(w+w')t - n(u+u')a]} \cdot e^{iu'a} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{iua}{2}}) (1 + e^{\frac{iu'a}{2}}) A_{2,u'} \Phi_{2,u}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}}}$$

$$\cdot e^{-i[(w+w')t - n(u+u')a]} \cdot e^{iu'a}$$

$$g_8 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{iua}{2}}) (1 + e^{-\frac{iu'a}{2}}) A_{2,u} A_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}}}$$

$$\cdot e^{-i[(w-w')t - n(u-u')a]} \cdot e^{-iu'a} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{-\frac{iua}{2}}) (1 + e^{\frac{iu'a}{2}}) A_{2,u'} A_{2,u}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}}}$$

$$\cdot e^{i[(w-w')t - n(u-u')a]} \cdot e^{iu'a}$$

e, verificamos que:

$$g_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{i u a}{2}}) (1 + e^{-\frac{i u' a}{2}}) \mathcal{D}_{\perp, u}^* \mathcal{D}_{\perp, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}}} \cdot e^{i[(\omega - \omega')t + \eta(u - u')a]} \cdot e^{-\frac{i u' a}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{i u' a}{2}}) (1 + e^{-\frac{i u a}{2}}) \mathcal{D}_{\perp, u'}^* \mathcal{D}_{\perp, u}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}}} \cdot e^{-i[(\omega - \omega')t + \eta(u - u')a]} \cdot e^{\frac{i u' a}{2}}$$

fazendo no segundo termo  $u \rightarrow u'$ , encontramos:

$$g_{\perp} = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{1}{4\pi} \frac{du du' (1 + e^{\frac{i u a}{2}}) (1 + e^{-\frac{i u' a}{2}}) \mathcal{D}_{\perp, u}^* \mathcal{D}_{\perp, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}}} \cdot \left( \frac{-e^{-\frac{i u' a}{2}} + e^{\frac{i u a}{2}}}{2} \right) \cdot e^{i[(\omega - \omega')t + \eta(u - u')a]}$$

onde o fator  $1/2$  veio da definição de  $\mathcal{D}_{\perp}$ , então:

$$g_{\perp} = \int_0^{\frac{\pi}{a}} du du' \frac{1}{g_{\perp}} \cos \frac{(u + u')a}{2} e^{\frac{i(u - u')a}{2}}$$

$$g_2 = \int_0^{\pi/a} du du' \bar{g}_2 \cos \frac{(u-u')a}{2} e^{i \frac{(u+u')a}{2}}$$

$$g_3 = \int_0^{\pi/a} du du' \bar{g}_3 \cos \frac{(u-u')a}{2} e^{-i \frac{(u+u')a}{2}}$$

$$g_4 = \int_b^{\pi/a} du du' \bar{g}_4 \cos \frac{(u+u')a}{2} e^{-i \frac{(u-u')a}{2}}$$

$$g_5 = - \int_0^{\pi/a} du du' \bar{g}_5 \cos \frac{(u+u')a}{2} e^{-i \frac{(u-u')a}{2}}$$

$$g_6 = - \int_0^{\pi/a} du du' \bar{g}_6 \cos \frac{(u-u')a}{2} e^{-i \frac{(u+u')a}{2}}$$

$$g_7 = - \int_b^{\pi/a} du du' \bar{g}_7 \cos \frac{(u-u')a}{2} e^{i \frac{(u+u')a}{2}}$$

$$g_0 = - \int_0^{\pi/a} du du' \frac{1}{\sigma_8} \cos \frac{(k+u')a}{2} e^{i \frac{(u-u')a}{2}}$$

D.5 Expressão da componente  $\tilde{f}_1 \equiv \Delta^+ \psi(m)$

Temos que

$$\tilde{f}_1 = \underline{1} + \dots + \underline{32}.$$

onde

$$\frac{1}{\sigma_8} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} du du' \frac{(1 + e^{iua/2})(1 + e^{-iu'a/2}) \mathcal{D}_{\perp, k}^* \mathcal{D}_{\perp, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ua}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'a}{2}} i(\omega - \omega')}$$

$$e^{i[(\omega - \omega')t + m(u - u')a]} \left( \frac{e^{i(u-u')a} - 1}{a} \right)$$

$$\underline{2.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' (1 + e^{i\frac{ka}{2}}) (1 + e^{i\frac{k'a}{2}}) \mathcal{B}_{1,k}^* \mathcal{A}_{2,k'}}{\sqrt{1 + \sigma \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \sigma \frac{k'a}{2}} i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{i[(\omega + \omega')t + n(k + k')a]} \cdot \left( \frac{e^{i(k + k')a} - 1}{a} \right)$$

$$\underline{3.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{i\frac{ka}{2}}) (1 + e^{i\frac{k'a}{2}}) \sin \frac{k'a}{2} \mathcal{B}_{1,k}^* \mathcal{B}_{2,k'}}{\sqrt{1 + \sigma \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \sigma \frac{k'a}{2}} \left(1 + \sigma \frac{k'a}{2}\right) i(\omega - \omega')}$$

$$\cdot e^{i[(\omega - \omega')t + n(k + k')a]} \cdot \left( \frac{e^{i(k + k')a} - 1}{a} \right)$$

$$\underline{4.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{i\frac{ka}{2}}) \left(1 + e^{-i\frac{k'a}{2}}\right) \sin \frac{k'a}{2} \mathcal{B}_{1,k}^* \mathcal{A}_{2,k'}}{\sqrt{1 + \sigma \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \sigma \frac{k'a}{2}} \left(1 + \sigma \frac{k'a}{2}\right) i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{i[(\omega + \omega')t + n(k - k')a]} \cdot \left( \frac{e^{i(k - k')a} - 1}{a} \right)$$

$$5. = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-i\frac{u}{a}}\right) \left(1 + e^{-i\frac{u'}{a}}\right) A_{1,u}^* \delta_{1,u'}}{\sqrt{1 + \cos\frac{u}{a}} \sqrt{1 + \cos\frac{u'}{a}} - i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{-i\left[(\omega + \omega')t + n(u + u')a\right]} \cdot \left(\frac{-i(u + u')a}{e - 1} - 1\right)$$

$$6. = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-i\frac{u}{a}}\right) \left(1 + e^{i\frac{u'}{a}}\right) A_{1,u}^* A_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos\frac{u}{a}} \sqrt{1 + \cos\frac{u'}{a}} - i(\omega - \omega')}$$

$$\cdot e^{-i\left[(\omega - \omega')t + n(u - u')a\right]} \cdot \left(\frac{-i(u - u')a}{e - 1} - 1\right)$$

$$7. = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-i\frac{u}{a}}\right) \left(1 + e^{i\frac{u'}{a}}\right) \frac{\sin\frac{u'}{a}}{2} A_{1,u}^* \delta_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos\frac{u}{a}} \sqrt{1 + \cos\frac{u'}{a}} \left(1 + \cos\frac{u'}{a}\right) - i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{-i\left[(\omega + \omega')t + n(u + u')a\right]} \cdot \left(\frac{-i(u + u')a}{2} - 1\right)$$

$$\frac{8.}{=} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-ik'u'}{2}}\right) \sin \frac{u'a}{2} A_{1,1k}^* A_{2,1k'}^*}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'u'}{2}} \left(1 + \cos \frac{u'a}{2}\right) - i(\omega - \omega')}$$

$$e^{-i[(\omega - \omega')t + n(k + k')a]} \cdot \left( \frac{-i(k + k')a}{e - 1} \right)$$

$$\frac{9.}{=} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-ik'u'}{2}}\right) \sin \frac{ku}{2} \sin \frac{k'u'}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'u'}{2}} \left(1 + \cos \frac{ku}{2}\right) i(\omega - \omega')}$$

$$e^{i[(\omega - \omega')t - n(k + k')a]} \cdot \left( \frac{-i(k + k')a}{e - 1} \right)$$

$$\frac{10.}{=} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-iku}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{ik'u'}{2}}\right) \sin \frac{ku}{2} \sin \frac{k'u'}{2}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'u'}{2}} \left(1 + \cos \frac{ku}{2}\right) i(\omega + \omega')}$$

$$e^{i[(\omega + \omega')t - n(k - k')a]} \cdot \left( \frac{-i(k - k')a}{e - 1} \right)$$

$$\underline{11.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{-i \frac{ka}{2}}\right) \left(1 + e^{i \frac{k'a}{2}}\right) \frac{\sin \frac{ka}{2}}{2} \frac{\sin \frac{k'a}{2}}{2} \delta_{2,k} \delta_{2,k'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'a}{2}} \left(1 + \cos \frac{ka}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{k'a}{2}\right) i(\omega - \omega')}$$

$$\cdot e^{i[(\omega - \omega')t - n(k - k')a]} \cdot \left( \frac{-i(k - k')a}{\epsilon - 1} \right)$$

$$\underline{12.} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{-i \frac{ka}{2}}\right) \left(1 + e^{-i \frac{k'a}{2}}\right) \frac{\sin \frac{ka}{2}}{2} \frac{\sin \frac{k'a}{2}}{2} \delta_{2,k} \delta_{2,k'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'a}{2}} \left(1 + \cos \frac{ka}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{k'a}{2}\right) i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{i[(\omega + \omega')t - n(k + k')a]} \cdot \left( \frac{-i(k + k')a}{\epsilon - 1} \right)$$

$$\underline{13.} = \frac{-i}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{i \frac{ka}{2}}\right) \left(1 + e^{-i \frac{k'a}{2}}\right) \frac{\sin \frac{ka}{2}}{2} \frac{\sin \frac{k'a}{2}}{2} \delta_{2,k} \delta_{2,k'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ka}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{k'a}{2}} \left(1 + \cos \frac{ka}{2}\right) -i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t - n(k - k')a]} \cdot \left( \frac{i(k - k')a}{\epsilon - 1} \right)$$

$$\frac{14.}{=} = -\frac{i}{4\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{iua}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{iu'a}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u}{2} \operatorname{sech} \frac{u'}{2} A_{2,u} A_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'}{2}} \left(1 + \cos \frac{u}{2}\right) - i(\omega - \omega')}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega - \omega')t - n(u + u')a]} \cdot \left( \frac{e^{i(u + u')a} - 1}{a} \right)$$

$$\frac{15.}{=} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{iue}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{iue'}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{ue}{2} \operatorname{sech} \frac{ue'}{2} A_{2,u} A_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ue}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{ue'}{2}} \left(1 + \cos \frac{ue}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{ue'}{2}\right) - i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t - n(u + u')a]} \cdot \left( \frac{e^{i(u + u')a} - 1}{a} \right)$$

$$\frac{16.}{=} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{iue}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-iu'a}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{ue}{2} \operatorname{sech} \frac{u'a}{2} A_{2,u} A_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ue}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'e}{2}} - i(\omega - \omega') \left(1 + \cos \frac{ue}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{u'e}{2}\right)}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega - \omega')t - n(u - u')a]} \cdot \left( \frac{e^{i(u - u')a} - 1}{a} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{17.} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-i u' a}{2}}\right) \frac{\sin \frac{u a}{2} \cdot \sin \frac{u' a}{2}}{2} \mathcal{D}_{1, u}^* \mathcal{D}_{2, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{u' a}{2}\right) i(\omega - \omega')} \\
 &\cdot e^{i[(\omega - \omega')t + n(k - k')a]} \cdot \left( \frac{e^{i(k - k')a} - 1}{a} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{18.} &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i u' a}{2}}\right) \frac{\sin \frac{u a}{2} \cdot \sin \frac{u' a}{2}}{2} \mathcal{D}_{1, u}^* \mathcal{D}_{2, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{u' a}{2}\right) i(\omega + \omega')} \\
 &\cdot e^{i[(\omega + \omega')t + n(k + k')a]} \cdot \left( \frac{e^{i(k + k')a} - 1}{a} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{19.} &= -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\pi/a} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i u' a}{2}}\right) \frac{\sin \frac{u a}{2} \cdot \sin \frac{u' a}{2}}{2} \mathcal{D}_{1, u}^* \mathcal{D}_{2, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) i(\omega - \omega')} \\
 &\cdot e^{i[(\omega - \omega')t + n(k + k')a]} \cdot \left( \frac{e^{i(k + k')a} - 1}{a} \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{20.}{=} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-i u' a}{2}}\right) \frac{\sin \frac{u a}{2} \cdot \sin \frac{u' a}{2}}{2} A_{1, u} A_{2, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{u' a}{2}\right) - i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{+i[(\omega + \omega')t + n(u - u')a]} \cdot \left( \frac{e^{\frac{i(u - u')a}{a}} - 1}{a} \right)$$

$$\frac{21.}{=} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{-i u' a}{2}}\right) \frac{\sin \frac{u a}{2} \cdot \sin \frac{u' a}{2}}{2} A_{1, u} A_{2, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{u' a}{2}\right) - i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t + n(u + u')a]} \cdot \left( \frac{e^{\frac{-i(u + u')a}{a}} - 1}{a} \right)$$

$$\frac{22.}{=} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{\frac{-i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i u' a}{2}}\right) \frac{\sin \frac{u a}{2} \cdot \sin \frac{u' a}{2}}{2} A_{1, u} A_{2, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{u' a}{2}\right) - i(\omega - \omega')}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega - \omega')t + n(u - u')a]} \cdot \left( \frac{e^{\frac{-i(u - u')a}{a}} - 1}{a} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \underline{23.} &= \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-i u \frac{a}{2}}\right) \left(1 + e^{i u' \frac{a}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} A_{1, u} \delta_{2, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) - i(\omega + \omega')} \\
 &\cdot e^{-i[(\omega + \omega')t + n(u - u')a]} \cdot \left( \frac{-i(u - u')a}{e - 1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{24.} &= \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-i u \frac{a}{2}}\right) \left(1 + e^{-i u' \frac{a}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} A_{1, u} A_{2, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) - i(\omega - \omega')} \\
 &\cdot e^{-i[(\omega - \omega')t + n(u + u')a]} \cdot \left( \frac{-i(u + u')a}{e - 1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{25.} &= \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-i u \frac{a}{2}}\right) \left(1 + e^{-i u' \frac{a}{2}}\right) \operatorname{sech} \frac{u a}{2} \delta_{1, u} \delta_{2, u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) + i(\omega - \omega')} \\
 &\cdot e^{i[(\omega - \omega')t - n(u + u')a]} \cdot \left( \frac{-i(u + u')a}{e - 1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{26.}{=} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i u' a}{2}}\right) \cancel{\frac{\sin u' a}{2}} \cancel{\frac{\sin u a}{2}}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} \left(1 + \cos \frac{u a}{2}\right) i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{i[(\omega + \omega')t - n(k - k')a]} \cdot \left( \frac{-i(k - k')a}{\epsilon - 1} \right)$$

$$\frac{27.}{=} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{\frac{i u' a}{2}}\right) \cancel{\frac{\sin u' a}{2}} \cancel{\frac{\sin u a}{2}}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} i(\omega - \omega')}$$

$$\cdot e^{i[(\omega - \omega')t - n(k - k')a]} \cdot \left( \frac{-i(k - k')a}{\epsilon - 1} \right)$$

$$\frac{28.}{=} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' \left(1 + e^{-\frac{i u a}{2}}\right) \left(1 + e^{-\frac{i u' a}{2}}\right) \cancel{\frac{\sin u' a}{2}} \cancel{\frac{\sin u a}{2}}}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} i(\omega + \omega')}$$

$$\cdot e^{i[(\omega + \omega')t - n(k + k')a]} \cdot \left( \frac{-i(k + k')a}{\epsilon - 1} \right)$$

$$\underline{29.} = \frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{iku}{2}}) (1 + e^{\frac{-i'k'a}{2}}) \operatorname{sen} \frac{k'a}{2} A_{2,k} B_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'e}{2}} (1 + \cos \frac{u'e}{2}) - i(\omega + \omega')}$$

$$\circ e^{-i[(\omega + \omega')t - n(k - u')a]} \cdot \left( \frac{e^{\frac{i(k - u')a}{2}} - 1}{a} \right)$$

$$\underline{30.} = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{iku}{2}}) (1 + e^{\frac{i'k'a}{2}}) \operatorname{sen} \frac{u'e}{2} A_{2,k} A_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'e}{2}} (1 + \cos \frac{u'e}{2}) - i(\omega - \omega')}$$

$$\circ e^{-i[(\omega - \omega')t - n(k + u')a]} \cdot \left( \frac{e^{\frac{i(k + u')a}{2}} - 1}{a} \right)$$

$$\underline{31.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{du du' (1 + e^{\frac{iku}{2}}) (1 + e^{\frac{i'k'a}{2}}) A_{2,k} B_{2,u'}}{\sqrt{1 + \cos \frac{ku}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u'e}{2}} - i(\omega + \omega')}$$

$$\circ e^{-i[(\omega + \omega')t - n(k + u')a]} \cdot \left( \frac{e^{\frac{i(k + u')a}{2}} - 1}{a} \right)$$

$$\underline{32.} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/a} du du' \frac{\left(1 + e^{i u a/2}\right) \left(1 + e^{-i u' a/2}\right) A_{2,u} A_{2,u'}^*}{\sqrt{1 + \cos \frac{u a}{2}} \sqrt{1 + \cos \frac{u' a}{2}} - i(\omega - \omega')}$$

$$\cdot e^{-i[(\omega - \omega')t - n(u - u')a]} \cdot \left( \frac{e^{i(u - u')a} - 1}{a} \right)$$

Vamos coleccionar, agora, somente aqueles termos de  $\tilde{J}_1$  que sobram no limite do contínuo:

$$\tilde{J}_1 = \int_0^{\pi/a} du du' \bar{g}_1 \frac{e^{\frac{i(u - u')a}{2}}}{i(\omega - \omega')} \left( \frac{e^{i(u - u')a} - e^{-i(u - u')a}}{a} \right)$$

$$= \int_0^{\pi/a} du du' \bar{g}_1 \frac{\sin \frac{(u - u')a}{2}}{\sin \frac{u a}{2} - \sin \frac{u' a}{2}} \cdot e^{\frac{i(u - u')a}{2}}$$

$$\tilde{g}_2 = \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_2 \frac{e^{i(k+u')a/2}}{i(\omega+\omega')} \left( \frac{e^{i(k+u')a/2} - e^{-i(k+u')a/2}}{a} \right)$$

$$= \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_2 \frac{\sin \frac{(k+u')a}{2}}{\frac{\sin \frac{ka}{2} + \sin \frac{k'a}{2}}{2}} \cdot e^{i \frac{(k+u')a}{2}}$$

$$\tilde{g}_3 = \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_3 \frac{e^{-i(k+u')a/2}}{-i(\omega+\omega')} \left( \frac{-e^{-i(k+u')a/2} - e^{i(k+u')a/2}}{a} \right)$$

$$= \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_3 \frac{\sin \frac{(k+u')a}{2}}{\frac{\sin \frac{ka}{2} + \sin \frac{k'a}{2}}{2}} \cdot e^{-i \frac{(k+u')a}{2}}$$

$$\tilde{g}_4 = \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_4 \frac{e^{-i(k-u')a/2}}{-i(\omega-\omega')} \left( \frac{-e^{-i(k-u')a/2} - e^{i(k-u')a/2}}{a} \right)$$

$$= \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_4 \frac{\sin \frac{(k-u')a}{2}}{\frac{\sin \frac{ka}{2} - \sin \frac{k'a}{2}}{2}} \cdot e^{-i \frac{(k-u')a}{2}}$$

$$\tilde{g}_5 = \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_5 \frac{e^{-i \frac{(u-u')a}{2}}}{i(\omega-\omega')} \left( \frac{-i \frac{(u-u')a}{2}}{e^{\frac{(u-u')a}{2}} - e^{-\frac{(u-u')a}{2}}} \right)$$

$$= - \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_5 \frac{\frac{\sin \frac{(u-u')a}{2}}{2}}{\frac{\sin \frac{u'a}{2} - \sin \frac{u'e}{2}}{2}} \cdot \frac{-i \frac{(u-u')a}{2}}{e^{\frac{(u-u')a}{2}} - e^{-\frac{(u-u')a}{2}}}$$

$$\tilde{g}_6 = \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_6 \frac{e^{-i \frac{(u+u')a}{2}}}{i(\omega+\omega')} \left( \frac{-i \frac{(u+u')a}{2}}{e^{\frac{(u+u')a}{2}} - e^{-\frac{(u+u')a}{2}}} \right)$$

$$= - \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_6 \frac{\frac{\sin \frac{(u+u')a}{2}}{2}}{\frac{\sin \frac{u'a}{2} + \sin \frac{u'e}{2}}{2}} \cdot \frac{-i \frac{(u+u')a}{2}}{e^{\frac{(u+u')a}{2}} - e^{-\frac{(u+u')a}{2}}}$$

$$\tilde{g}_7 = \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_7 \frac{e^{i \frac{(u+u')a}{2}}}{-i(\omega+\omega')} \left( \frac{i \frac{(u+u')a}{2}}{e^{\frac{(u+u')a}{2}} - e^{-\frac{(u+u')a}{2}}} \right)$$

$$= - \int_0^{\pi/a} du du' \tilde{g}_7 \frac{\frac{\sin \frac{(u+u')a}{2}}{2}}{\frac{\sin \frac{u'a}{2} + \sin \frac{u'e}{2}}{2}} \cdot \frac{i \frac{(u+u')a}{2}}{e^{\frac{(u+u')a}{2}} - e^{-\frac{(u+u')a}{2}}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{a}} du du' \overline{g}_8 \frac{i \frac{(k-u')a}{2}}{e^{\frac{i(k-u')a}{2}} - i(\omega - \omega')} \left( \frac{i \frac{(k-u')a}{2}}{e^{\frac{i(k-u')a}{2}} - e^{\frac{-i(k-u')a}{2}}} \right) a$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{a}} du du' \overline{g}_8 \frac{\text{sen} \left( \frac{(k-u')a}{2} \right)}{\text{sen} \frac{ka}{2} - \text{sen} \frac{u'a}{2}} \cdot e^{\frac{i(k-u')a}{2}}$$

E.1 Quantização B.R.S.T. de um modelo unidimensional:

Considere a ação<sup>(15)</sup>:

$$S = \int (\dot{G} - \varrho(x))^2 dt$$

onde  $\varrho(x) = \dot{x} + v'$  é a equação de Langevin,  
 $G$  um campo Gaussiano aleatório e  $v' = \partial v / \partial x$ .

A ação é invariante pelas transformações arbitrárias:

$$\begin{aligned} \delta \varphi &= \lambda \\ \delta G &= \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} \lambda \end{aligned} \quad x = \varphi$$

Agora, se fixamos o gauge  $G = 0$ , a ação deixa de ser invariante. Neste caso, introduzimos campos fantasmas, tal que a ação efetiva fica invariante, agora, pelas transformações B.R.S.T.:

$$\delta G = 0$$

$$\delta x = -\epsilon \varphi \quad \therefore \delta \dot{x} = -\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\delta \varphi = 0$$

$$\delta \bar{\varphi} = 2\epsilon \varrho$$

$$\delta \varrho = \delta \dot{x} + v'' \delta x = -\epsilon \left( \frac{\partial}{\partial t} + v'' \right) \varphi$$

onde  $\epsilon$  parâmetro anticomutativo e,  $\varphi$  e  $\bar{\varphi}$ , campos fantasmas e antifantasmas, respectivamente.

A Lagrangeana efetiva é dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{ef}} = (\dot{x} + v')^2 + \bar{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v'' \right) \psi$$

e a função de partição tem a seguinte forma:

$$Z = \int \mathcal{D}x \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \, e^{-\int \left[ (\dot{x} + v')^2 + \bar{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial t} + v'' \right) \psi \right] dt}$$

tal que a integração nos campos fermiônicos dá:

$$Z = \int \mathcal{D}x \, \det \left( \frac{\partial}{\partial t} + v'' \right) e^{-\int (\dot{x} + v')^2 dt}$$

Temos que:

$$\eta = \dot{x} + v'$$

e

$$d\eta = \det \left| \frac{\delta \eta}{\delta x} \right| dx$$

Assim,

$$\begin{aligned} \delta \eta &= \frac{d}{dt} \delta x + v'' \delta x \\ &= \left( \frac{d}{dt} + v'' \right) \delta x \end{aligned}$$

e

$$\frac{\delta \eta}{\delta x} = \frac{\partial}{\partial t} + v''$$

logo

$$d\xi = \det \left( \frac{\partial}{\partial x} + V'' \right) dx \cdot i$$

$$dx = \frac{d\xi}{\det \left( \frac{\partial}{\partial x} + V'' \right)}$$

Então,

$$Z = \int d\xi e^{-\int \xi^2 dt},$$

isto é, a função de partição é uma integral Gaussiana pura e, portanto, um invariante topológico.

## E.2 Invariança B.R.S.T. da ação do modelo bidimensional

A ação efetiva é dada por:

$$\begin{aligned}
 S_{ef} = \int dt dx \left( \right. & \partial_t \psi^* \partial_t \psi + \partial_x \psi^* \partial_x \psi + w'^* w' - \\
 & - w'^* (\partial_t - i\partial_x) \psi^* - w' (\partial_t + i\partial_x) \psi - \underline{i\partial_x \psi^* \partial_t \psi} \\
 & + \underline{i\partial_x \psi \partial_t \psi^*} + \psi_+^* (\partial_t - i\partial_x) \psi_+ + \psi_-^* (\partial_t + i\partial_x) \psi_- + \\
 & \left. + \psi_+^* \psi_- w'' + \psi_-^* \psi_+ w''^* \right)
 \end{aligned}$$

Aqui, verificamos que os termos da  $S_{ef}$  sublinhados constituem um termo de superfície que não contribui.

Consideremos, agora, as transformações

$$\begin{aligned}
 \delta \psi &= 0 & ; & \delta \psi^* = i \epsilon \psi_+ \\
 \delta \psi_+ &= 0 & ; & \delta \psi_+^* = -i \epsilon (\partial_t + i\partial_x) \psi \\
 \delta \psi_- &= 0 & ; & \delta \psi_-^* = -i \epsilon w'
 \end{aligned}$$

para a variação da ação:

$$\begin{aligned} \delta S_{eff} = \int dt dx \left\{ \right. & \partial_t \delta \psi^* \partial_t \psi + \partial_x \delta \psi^* \partial_x \psi + w''^* \delta \psi^* w' - \\ & - w''^* \delta \psi^* (\partial_t - i\partial_x) \psi^* - w'^* (\partial_t - i\partial_x) \delta \psi^* + \\ & + \delta \psi^* (\partial_t - i\partial_x) \psi_+ + \delta \psi^* (\partial_t + i\partial_x) \psi_- + \\ & \left. + \delta \psi^* \psi_- w'' + \delta \psi^* \psi_+ w''^* + \psi_-^* \psi_+ w''''^* \delta \psi^* \right\} \end{aligned}$$

Destaquemos os termos:

$$1) \partial_t \delta \psi^* \partial_t \psi + \partial_x \delta \psi^* \partial_x \psi = i\epsilon \partial_t \psi_+ \partial_t \psi + i\epsilon \partial_x \psi_+ \partial_x \psi$$

$$\begin{aligned} 2) \delta \psi^* (\partial_t - i\partial_x) \psi_+ &= -i\epsilon (\partial_t + i\partial_x) \psi (\partial_t - i\partial_x) \psi_+ \\ &= -i\epsilon \partial_t \psi \partial_t \psi_+ - i\epsilon \partial_x \psi \partial_x \psi_+ \\ &\quad + \epsilon \partial_x \psi \partial_t \psi_+ - \epsilon \partial_t \psi \partial_x \psi_+ \end{aligned}$$

Aqui, verificamos que os dois últimos termos constituem um termo de superfície que não contribui.

$$3) w''^* \delta \psi^* w' = i \epsilon \psi_+ w''^* w'$$

$$4) \delta \psi^* \psi_+ w''^* = -i \epsilon \psi_+ w' w''^*$$

$$5) \delta \psi^* \psi_- w'' = -i \epsilon (\partial_t + i \partial_x) \psi_- w''$$

observe que, de:

$$I = -i \epsilon \int (\partial_t + i \partial_x) \psi_- w'' dt dx$$

vem:

$$I_1 = \int \partial_t \psi_- w'' dt dx \rightarrow \int dw' \psi_- dx \rightarrow \int (\psi_- w') dx - \int w' \partial_t \psi_- dt dx$$

$$I_2 = \int \partial_x \psi_- w'' dt dx \rightarrow \int dw' \psi_- dt \rightarrow \int (\psi_- w') dt - \int w' \partial_x \psi_- dx dt$$

então

$$I = +i \epsilon \int (\partial_t + i \partial_x) \psi_- w' dt dx$$

isto é,

$$\delta \psi^* \psi_- w'' = +i \epsilon (\partial_t + i \partial_x) \psi_- w'$$

Temos verificado que a ação efetiva, de fato, é invariante pelas transformações B.R.S.T.

^  
REFERÊNCIAS

1. -Creutz, M: Quarks, Gluons and Lattices  
Cambridge University Press (1983)  
-Wilczek, F: Phys.Rev.Lett 59, 2397(1987)
  
2. -Becher, P and Joos, H: Zeit.Phys., C15, 343(1982)  
-Göckeler, M and Joos, H: Progress in Gauge Field Theory  
Cargese, 83, 247  
Editado por G. t'Hooft  
Plenum Press (1984)  
-Joss, H.: On Geometry and Physics of Staggered Lattice Fermions  
Preprint Desy 86-044 April(1986)  
-Goto, M: Rev. Bras.Fis. 17, n 3, 311, (1987)
  
3. -Susskind, L: Phys.Rev. D10, 3031, (1976)
  
4. -Wilson, K.G: Phys.Rev. D10, 2445, (1974)
  
5. -Ha, Y.K: Phys.Rev. D29, 1744, (1984)
  
6. -Coleman, S: Phys.Rev. D11, 2088, (1975)
  
7. -Witten, E: Commun.Math.Phys., 92, 455(1984)

8. -Klaiber, B: Lectures in Theoretical Physics  
Boulder, 141, (1967)  
Editado por A.Barut and W. Brittin.
9. -Abdalla, M.C.B.: Notas de Aula I.F.T./2 semestre/1987  
Modelos Bidimensionais
10. -Aratyn, H; Goto, M and Zimmerman, A.H:  
Nuovo Cimento A, 88, 225(1985)
11. -Witten, E: Commun.Math.Phys., 117, 353(1988)
12. -Shaposnicke, F.A.:  
Invited talk at V<sup>th</sup> Summer School J.A. Swieca  
Janeiro, 1989 São Paulo, Brasil
- Baulieu, L. and Singer, I.M: LPTHE Preprint 88/18
- Myers, R: Preprint NSF - ITP - 89 - 45
- Shaposnicke, F.A. and Thompson, G.: Preprint PAR-LPTH 88-51
- Baulieiu, L. and Grossman, B. Phys. Lett. 214B, 223(1988)
- Labatista, J.M.F., Pernici, M. and Witten, E.:  
Nucl.Phys. B310, 611(1988)

13. -Dalmazi, D.: Dissertação de Mestrado  
I.F.T. TM 03(87), Março(1987)  
-Nemeschansky, D.; Preistschoff, C. and Weinstein, M.  
Ann. of Phys. 183, 226(1988)  
-Henneaux, M. and Teitelboim, C:  
Commun.Math.Phys. 115, 213 (1988)
14. -Guzzo, M.M: Dissertação de Mestrado  
I.F.T. TM 09/87, Setembro(1987)  
-Kato, M and Ogawa, K: Nucl. Phys. B212, 443(1983)
15. -Birmingham, D; Rakowski, M and Thompson, G:  
Preprint ICTP 88/101.  
\_\_\_\_\_ Phys. Lett. B212, 187(1988)  
\_\_\_\_\_ Nucl. Phys., B315, 577(1989)
16. -Kugo, T and Uehara, S: Nucl. Phys. B197, 378(1982)
17. -Aratyn, H and Zimmerman, A.H.: Phys. Lett. 137B, 392(1984)

