



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
Campus de Rio Claro



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ROSEMEIRE DE FATIMA BATISTELA

**O TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL EM CURSOS DE LICENCIATURA
EM MATEMÁTICA**

Rio Claro - SP
2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
Campus de Rio Claro

ROSEMEIRE DE FATIMA BATISTELA

**O TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL EM CURSOS DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Rio Claro, como requisito para obtenção do grau de Doutora em Educação Matemática.

Orientadora: Maria A. V. Bicudo

Co-orientador: Henrique Lazari

Rio Claro - SP
2017

510.07 Batistela, Rosemeire de Fatima
B333t O teorema da incompletude de Gödel em cursos de
licenciatura em Matemática / Rosemeire de Fatima Batistela. -
Rio Claro, 2017
139 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Maria Aparecida Viggiani Bicudo
Coorientador: Henrique Lazari

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Filosofia da
matemática. 3. Método axiomático. I. Título.

ROSEMEIRE DE FATIMA BATISTELA

**O TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL EM CURSOS DE
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Rio Claro, como requisito para obtenção do grau de Doutora em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo
IGCE/UNESP - Rio Claro/SP - orientadora

Prof. Dr. Fábio Maia Bertato
CLE/UNICAMP – Campinas/SP

Prof. Dr. Irineu Bicudo
IGCE/UNESP - Rio Claro/SP

Prof. Dr. Orlando de Andrade Figueiredo
IGCE/UNESP - Rio Claro/SP

Prof. Dr. Gustavo Barbosa
Autônomo - Limeira/SP

Resultado: Aprovada

Rio Claro/SP, 2 de fevereiro de 2017

*Dedico este trabalho ao meu pai Valdomiro Batistela, à minha mãe
Pedrina Magali Zani Batistela e à minha irmã Rosângela Alice
Batistela.*

Agradecimentos

Chega-se ao fim de um ciclo e sinto necessidade de reconhecer publicamente que não estive sozinha nunca e, portanto, nem durante esse período. O sentimento que predomina é a gratidão. Gratidão pela vida, pela família, pelos amigos, pelos colegas, pelos meus professores, pelos funcionários desta Universidade, por aqueles com quem convivi por estes anos, pela UNESP de Rio Claro, pela UEFS, por minha orientadora, por meu co-orientador, pelos colegas de orientação, pelos colegas da PGEM...

Obrigada aos membros da banca de qualificação e da banca de defesa. Ao professor Jairo José da Silva e Jamur André Venturin que participaram da qualificação e contribuíram com ideias cruciais para/com a definição dessa versão do trabalho. Aos professores Fábio Maia Bertato, Orlando Andrade Figueiredo, Irineu Bicudo e Gustavo Barbosa pela atenção dispensada ao ler e comentar a pesquisa com seriedade.

Obrigada ao professor Henrique Lazari, co-orientador deste trabalho, pelas conversas sobre o tema de pesquisa, sobre assuntos adjacentes e pela orientação nos estudos da parte matemática dessa tese, que foram imprescindíveis para a realização deste trabalho.

Agradeço à Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS – por conceder o afastamento com ônus durante os dois últimos anos desse curso de Doutorado. Aos amigos que lá reconheci, aos colegas do Departamento de Ciências Exatas, em especial aos da área de Educação Matemática.

Obrigada aos colegas do grupo FEM da Unesp de Rio Claro e aos colegas de orientação pelas aprendizagens possibilitadas.

Obrigada aos funcionários desta Universidade pelas inúmeras gentilezas dispensadas e aos colegas da PEGEM e do campus com os quais me encontrei e estive nesse período.

O sentimento de estar sempre acompanhada é perene... obrigada aos “céus”.

Amor e muita gratidão ao meu pai, à minha mãe e à minha irmã. Estes, por serem os mais próximos a mim em meu mundo-vida, desde meu surgimento, são os mais conectados à cotidianidade que me enlaça e por isso são os mais envolvidos em minhas chatices e minhas carências.

Meu muito obrigada aos meus amigos, em particular àqueles que sabem o que estou pesquisando e que estiveram comigo em alguma parte desse processo que durou os últimos quatro anos. Amigo é casa...

A admiração acadêmica e a gratidão pela professora Maria Bicudo são enormes. Obrigada, Maria pela oportunidade de convivermos mais proximamente durante esses últimos anos, por me orientar nessa pesquisa e para além dela, por cultivarmos uma relação plasmada no respeito e no carinho, o que me permite intuir que, ao fim da relação orientadora-orientanda, seremos também colegas imbricadas nas lutas da Educação Matemática. Atrevo-me a afirmar que seremos amigas, talvez já o sejamos, mas a burocracia e o efeito do processo do Doutorado inibem tal explicitação.

RESUMO

Apresentamos nesta tese uma proposta de inserção do tema teorema da incompletude de Gödel em cursos de Licenciatura em Matemática. A interrogação norteadora foi: *como sentidos e significados do teorema da incompletude de Gödel podem ser atualizados em cursos de Licenciatura em Matemática?* Na busca de elaborarmos uma resposta para essa questão, apresentamos o cenário matemático presente à época do surgimento deste teorema, expondo-o como a resposta negativa para o projeto do Formalismo que objetivava formalizar toda a Matemática a partir da aritmética de Peano. Além disso, trazemos no contexto, as outras duas correntes filosóficas, Logicismo e Intuicionismo, e os motivos que impossibilitaram o completamento de seus projetos, que semelhantemente ao Formalismo buscaram fundamentar a Matemática sob outras bases, a saber, a Lógica e os constructos finitistas, respectivamente. Assim, explicitamos que teorema da incompletude de Gödel aparece oferecendo resposta negativa à questão da consistência da aritmética, que era um problema para a Matemática na época, estabelecendo uma barreira intransponível para a demonstração dessa consistência, da qual dependia o sucesso do Formalismo e, conseqüentemente, a fundamentação completa da Matemática no ideal dos formalistas. Num segundo momento, focamos na demonstração deste teorema expondo-a em duas versões distintas, que para nós se nos mostraram apropriadas para serem trabalhadas em cursos de Licenciatura em Matemática. Uma, como possibilidade de conduzir o leitor pelos meandros da prova desenvolvida por Gödel em 1931, ilustrando-a, bem como, as ideias utilizadas nela, aclarando a sua compreensão. Outra, como opção que valida o teorema da incompletude apresentando-o de maneira formal, portanto, com endereçamentos e objetivos distintos, por um lado, a experiência com a numeração de Gödel e a construção da sentença indecidível, por outro, com a construção formal do conceito de método de decisão de uma teoria. Na sequência, apresentamos uma discussão focada na proposta de Bourbaki para a Matemática, por compreendermos que a atitude desse grupo revela a forma como o teorema da incompletude de Gödel foi acolhido nessa ciência e como ela continuou após este resultado. Nessa exposição aparece que o grupo Bourbaki assume que o teorema da incompletude não impossibilita que a Matemática prossiga em sua atividade, ele apenas sinaliza que o aparecimento de proposições indecidíveis, até mesmo na teoria dos números naturais, é inevitável. Finalmente, trazemos a proposta de como atualizar sentidos e significados do teorema da incompletude de Gödel em cursos de Licenciatura em Matemática, aproximando o tema de conteúdos agendados nas ementas, propondo discussão de aspectos desse teorema em diversos momentos, em disciplinas que julgamos apropriadas, culminando no trabalho com as duas demonstrações em disciplinas do último semestre do curso. A apresentação é feita tomando como exemplar um curso de Licenciatura em Matemática. Consideramos por fim, a importância do trabalho com um resultado tão significativo da Lógica Matemática que requer atenção da comunidade da Educação Matemática, dado que as conseqüências deste teorema se relacionam com a concepção de Matemática ensinada em todos os níveis escolares, que, muito embora não tenham relação com conteúdos específicos, expõem o alcance do método de produção da Matemática.

Palavras-chave: Teorema da Incompletude de Gödel (TIG). Educação Matemática. Licenciatura em Matemática. Filosofia da Matemática. Método axiomático. Fenomenologia.

ABSTRACT

In this thesis we present a proposal to insert Gödel's incompleteness theorem in Mathematics Education undergraduate courses. The main research question guiding this investigation is: *How can the senses and meanings of Gödel's incompleteness theorem be updated in Mathematics Education undergraduate courses?* In answering the research question, we start by presenting the mathematical scenario from the time when the theorem emerged; this scenario proposed a negative response to the project of Formalism, which aimed to formalize all Mathematics based upon Peano's arithmetic. We also describe Logicism and Intuitionism, focusing on reasons that prevented the completion of these two projects which, in similarly to Formalism, were sought to support mathematics under other bases of Logic and finitists constructs. Gödel's incompleteness theorem, which offers a negative answer to the issue of arithmetic consistency, was a problem for Mathematics at that time, as the Mathematical field was passing through the challenge of demonstrating its consistency by depending upon the success of Formalism and upon the Mathematics' rationale grounded in formalists' ideal. We present the proof of Gödel's theorem by focusing on its two different versions, both being accessible and appropriate to be explored in Mathematics Education undergraduate courses. In the first one, the reader will have a chance to follow the details of the proof as developed by Gödel in 1931. The intention here is to expose Gödel's ideas used at the time, as well as to clarify understanding of the proof. In the second one, the reader will be familiarized with another proof that validates the incompleteness theorem, presenting it in its formal version. The intention here is to highlight Gödel's numbering experience and the construction of undecidable sentence, and to present the formal construction of the decision method concept from a theory. We also present a brief discussion of Bourbaki's proposal for Mathematics, highlighting Bourbaki's group perspective which reveals how Gödel's incompleteness theorem was important and welcome in science, and how the field has developed since its result. It seems to us that Bourbaki's group assumes that the incompleteness theorem does not preclude Mathematics from continuing its activity. Thus, from Bourbaki's perspective, Gödel's incompleteness theorem only indicates the arising of undecidable propositions, which are inevitable, occurring even in the theory of natural numbers. We suggest updating the senses and the meanings of Gödel's incompleteness theorem in Mathematics Education undergraduate courses by aligning Gödel's theorem with secondary mathematics school curriculum. We also suggest including discussion of this theorem in different moments of the secondary mathematics school curriculum, in which students will have elements to build understanding of the two proofs as a final comprehensive project. This study contributes to the literature by setting light on the importance of working with results of Mathematical Logic such as Gödel's incompleteness theorem in secondary mathematics courses and teaching preparation. It calls the attention of the Mathematical Education community, since its consequences are directly related to the design of mathematics and how it is being taught at all grade levels. Although some of these mathematics contents may not be related specifically to the theorem, the understanding of the theorem shows the broad relevance of the method in making sense of Mathematics.

Wordkeys: Gödel's Incompleteness Theorem. Mathematics Education. Secondary Mathematics Courses. Teaching preparation. Mathematical Proofs. Philosophy of Mathematics. Axiomatic Method. Phenomenology.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
Introduzindo o tema de investigação.....	9
O que diz a interrogação.....	13
Procedimentos assumidos para realizar a investigação.....	18
Capítulo I: O SURGIMENTO E O IMPACTO DO TIG NA MATEMÁTICA	20
O cenário matemático em que surge o TIG.....	20
O impacto do TIG na Matemática.....	29
Capítulo II: O TIG	39
Demonstração do TIG baseada em Nagel e Newman (1973).....	39
Demonstração do TIG na versão de Shoenfield (1967)	55
Por que provar esse teorema outra vez?	95
Capítulo III: A MATEMÁTICA APÓS O TIG	103
A Matemática após o TIG.....	103
Capítulo IV: O TIG EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA	114
O TIG em disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática	114
O TIG, os professores e o ensino de Matemática na Educação Básica.....	126
COMPREENDENDO O TIG E SUA IMPORTÂNCIA EM CURSOS DE LICENCIATURA DE MATEMÁTICA	129
REFERÊNCIAS	133
BIBLIOGRAFIA ESTUDADA	137

INTRODUÇÃO

Introduzindo o tema de investigação

Fiz Licenciatura em Matemática nesta Universidade – UNESP, campus de Rio Claro – entre os anos de 1998 e 2001 e esse curso não incluía a disciplina regular de Lógica Matemática.¹ Assim, para mim, a Lógica, apresentada como uma teoria matemática, a teoria dos sistemas formais, não foi explicitada. Isso quer dizer que, no currículo que realizei, não foram apresentados os critérios que acompanham o empenho da construção da Matemática, por meio do método axiomático. Hoje, considero que houve uma lacuna em minha formação matemática. Porém, naquela ocasião, não me dei conta disso e, em meus primeiros anos como professora, eu trabalhava a Matemática, ao ensinar meus alunos, sempre buscando contextualizá-la cultural, socialmente e entre os conteúdos matemáticos. E isso ocorria para que fizesse algum sentido para eles, sem, no entanto, preocupar-me em expor uma visão da Matemática vista como ciência da civilização Ocidental, com sua visão de mundo e de conhecimento.

Essa atitude começou a se modificar quando, casualmente, encontrei-me com uma discussão do *teorema da incompletude*, em 2005.² Ao tomar conhecimento de alguns resultados que mudaram o modo de conceber a Matemática, o Teorema da Incompletude de Gödel³ (TIG)⁴ se apresentava como um deles. Com isso, minha curiosidade sobre esse teorema e o que ele diz se aguçou. Passei então a estudá-lo. Vejo, focando minhas vivências havidas, que a gradual compreensão das conclusões estabelecidas por ele possibilitou uma experiência de mudança em minhas concepções referentes à Matemática. Isso se deu, particularmente, no que tange à compreensão da presença do matemático na produção dessa ciência, que antes não questionava, ainda que tivesse tido oportunidade de, em diferentes disciplinas, conhecer suas estruturas e o modo como foram produzidas, pois não me dava conta das peculiaridades do método axiomático. Com leituras sobre o TIG e depois por meio de estudo mais focalizado na sua demonstração, foi se abrindo, para mim, a compreensão sobre um aspecto fundamental do poder desse método.

¹ Lógica Matemática é uma disciplina regular do curso de Bacharelado; sendo assim é optativa do curso de Licenciatura e não foi uma das minhas escolhas.

² Pelo artigo *Etnometodologia, Etnomatemática, transdisciplinaridade: embasamentos crítico-filosóficos comuns e tendências atuais*, de Ubiratan D'Ambrósio, publicado em 2005.

³ Gödel (1977a) é a referência em português utilizada por nós para tomarmos conhecimento da demonstração de Gödel realizada em 1931.

⁴ Daqui em diante utilizaremos *TIG* como sigla correspondente a *teorema da incompletude de Gödel*.

Acredito que as experiências individuais significativas, e somente elas, podem levar à mudança de atitude em relação ao modo de ver o mundo que, neste caso em particular, diz da Matemática. Nessa trajetória, percebo que fui tornando-me mais consciente das características específicas da Matemática e do método de sua produção.

O TIG é um resultado da Lógica Matemática que evidencia uma característica dos sistemas formais que são utilizados na Matemática. Enquanto uma ciência produzida por meio do método axiomático e dos sistemas formais, ela carrega consigo a característica do sistema formal enunciado por Gödel em seu TIG, qual seja, a incompletude de grande parte das teorias matemáticas que tenham em sua base axiomática os axiomas da aritmética dos números naturais de Giuseppe Peano (1858-1932).⁵

Ciente da importância da compreensão do poder de um sistema axiomático para aquele profissional que trabalha com o ensino da Matemática e com a proposta de educar matematicamente o estudante, entendo como sendo de grande relevância que seja propiciado um encontro de alunos de graduação em Licenciatura em Matemática com o TIG, no contexto de disciplinas apropriadas e postas de forma alinhada com os conteúdos e aos conhecimentos dos estudantes ao estudá-las. A apresentação de ideias nucleares deste resultado na Licenciatura em Matemática estaria proporcionando o contato desses estudantes com a ideia da incompletude, a qual é característico de grande parte das teorias da Matemática. Neste trabalho, apresenta-se uma proposta de discussão das ideias entranhadas nas conclusões do TIG, no âmbito de disciplinas de um currículo de um curso de Licenciatura em Matemática, bem como o trabalho com uma demonstração informal e também com uma demonstração formal desse resultado no contexto de uma disciplina apropriada.

A experiência vivenciada⁶ está no cerne da constituição da pessoa (ALES BELLO, 2006; 2015) e, sendo assim, também de homens e mulheres que produzem ciência. Em

⁵ Também conhecidos como axiomas de Dedekind-Peano, pois Richard Dedekind (1831-1916), em 1888, propôs uma coleção de axiomas para os números naturais e Peano em 1889 publicou uma versão mais precisamente formulada das anteriores, em uma coleção de axiomas no seu livro, "Os princípios da Aritmética apresentados por um novo método" (*Arithmetices principia, nova methodo exposita*). Desde então, esse conjunto de axiomas vem sendo usado da forma como foram criados.

⁶ Ales Bello (2015) explica que "experiência é a relação que o ser humano tem com as coisas do mundo externo, mas também consigo mesmo. Portanto, trata-se de um movimento, [...] podendo ter o significado de um movimento cognoscitivo ou de experiência psíquica." (ALES BELLO, 2015, p. 77). As experiências são possíveis quando temos estados vitais e sentimentos vitais e Ales Bello expõe que Husserl especifica que as experiências passam pelas vivências das quais estamos cônecios. A experiência vivenciada se entrelaça, nas ações do corpo-vivente, de modo que o conhecimento da pessoa avança por camadas *hiléticas* (quando se fala no corpo da pessoa (materialidade) o *hilé* diz das sensações sentidas nessa carnalidade) das sensações, da percepção e intuições sensíveis, das da esfera psíquica que diz de sentimentos como medo, raiva, etc., e

cursos de formação de professores de Matemática, entendo que é preciso oferecer oportunidades para esses profissionais em forma/ação⁷ vivenciem experiências que os conduzam ao pensar matematicamente, trabalhando com intuições⁸ e, também, com o

das do espírito, que abrange as ações cognitivas e de julgamento. Todas as vivências podem se transformar em conhecimento intelectual e em juízo. “As vivências são o lugar do que conhecemos: não podemos examinar algo a não ser passando pelas vivências.” (ALES BELLO, 2015, p. 39). Desse modo, a expressão experiência vivenciada é tomada como as vivências das quais temos consciência e abrem possibilidades de constituirmos juízos que embasam proposições. Assim sendo, elas, as vivências, não dão conta do desenvolvimento completo de um conhecimento, mas esse conhecimento só é possível passando por elas. Partilhamos com Ales Bello as compreensões de Edith Stein de que existem dois níveis de identidade: o pessoal e o comunitário. Ales Bello destaca que o ser humano vive singularmente, mas vive também na comunidade onde se estabelece. Segundo Ales Bello, “a experiência vivenciada está no cerne da constituição da pessoa e, sendo assim, também do homem que produz ciência.” (ALES BELLO, 2015, p. 89). Essa autora ressalta a importância primal dessas vivências na constituição da individualidade, ao mesmo tempo em que este indivíduo participa de uma comunidade, que pode ser a científica, e levando consigo experiências individuais. Ainda, para a mesma “há que se ressaltar que soma simples das experiências individuais não basta para produzir a experiência comunitária. Para que a experiência comunitária se forme, as vivências individuais devem possuir um significado duradouro que faça surgir deles uma formação unitária superior.” (ALES BELLO, 2015, p. 89).

⁷ Entendemos que processos de forma/ação são específicos à formação da pessoa e, portanto, abrangem a Educação. Bicudo (2010) observa o seguinte: “Formação concebida com ‘pro-jeto’ de possibilidades que se atualizam, definindo estilos e modos de ser da pessoa. A educação escolar realiza um afunilamento em termos dessa maneira de compreender a formação, na medida em que trabalha com um projeto pedagógico. Este aponta direções, consideradas positivas, para a atualização das possibilidades das pessoas e daquelas referentes às áreas do conhecimento, e, nessas áreas, às disciplinas. Indica posturas, modos de relacionamento, procedimentos para conduzirem o ensino e a aprendizagem.” (BICUDO, 2010, p. 216). “Forma/ação diz de um jogo que envolve o cuidado com a *forma e com a ação*, possibilita a realização do homem que se torna sendo, ou seja, fazendo.” (BICUDO, 1999, p. 3). Na atividade de educar de um modo geral, e nesse caso podemos situar, educar matematicamente, é nuclear o *cuidado com*, que “envolve **pre-ocupação** com os rumos que o processo educacional toma, definindo possibilidades.” (BICUDO, 1999, p. 7). “Pre-ocupação com o modo de vir-a-ser do outro ou de si-mesmo; é um cuidado com a sociedade, com a preservação do existente, com o desabrochar da potencialidade do indivíduo, com a formação da pessoa...” (BICUDO, 1999, p. 3). O significado de formação se mostra como “uma ideia de perseguir a forma ideal, construída mediante a consciência do modo de vida de um povo, de seus anseios, usos e costumes, códigos de honra, valores prezados, da força que move as pessoas na direção da percepção do dever e que as faz se sentirem orgulhosas pelos seus feitos. Mas nunca assumido o *ideal* como uma forma perfeita que submeta a *formação* a um modelo que a aprisione dentro de limites rígidos. Ideal tido como imprimindo direção ao movimento. Porém, movimento que se efetua com o que se move e isso que se move também tem sua força, o que significa que a *forma* não pode conformar a *ação*, mas a própria *ação* ao agir com a *matéria* imprime nela a forma. Há, portanto, um jogo entre *ideal*, entendido como forma que imprime direção, *ação*, movida pela força imperante que vigorosamente impele a pessoa para um ato, e que brota do sentimento de dever e de orgulho, por ter conseguido tornar-se o que se tornou, e *matéria*, constituída pela realidade de vida do povo, que abrange sua historicidade, seus mitos, seus modos de advertir, de impor preceitos, comunicar conhecimentos e aptidões profissionais.” (BICUDO, 2003, p. 31). Nesta pesquisa, forma/ação está sendo compreendida como um processo contínuo e ininterrupto de devir em que *forma e ação* estão sempre em mudança, em transformação e estão implicados mutuamente, em marcha, em movimento de acontecer junto à matéria, de ir sendo, de mover-se continuamente...

⁸ A intuição revela-se para nós como uma fonte originária de doação de conhecimento. Fontana (2007, p. 168) afirma que “a fenomenologia husserliana recoloca a intuição como conhecimento evidente e racional plenamente capaz de alcançar o plano ontológico fundador de todo fenômeno”. Intuições aqui significam tanto as sensoriais como as essenciais. No Ideias I, Husserl (2006) inicia argumentando que a constituição do conhecimento de algo por alguém começa na experiência desse alguém com este algo. Essa *constituição* se dá mediante atos de consciência que ocorrem na subjetividade, passam à intersubjetividade e se mantêm na objetividade, conforme Bicudo (2010, p. 37), que também explica: “as raízes da objetividade se encontram nos atos da consciência, nos da “intuição sensorial” dada na experiência vivida diretamente com as

método axiomático dedutivo, além de compreenderem as aplicações dessa ciência e situações contextualizadas no mundo sociocultural em que a Matemática é importante.

Em se tratando de concepções de professores dessa ciência em relação à ela própria, Imenes (1989) afirma que o ponto de vista de um professor está ligado à visão de Matemática que aprendeu em seus cursos.

Ao oferecer oportunidades para que o estudante possa compreender o modo como a Matemática constrói suas teorias, e solicitando dele um pensar analítico e reflexivo *de/sobre* algumas dessas atividades, considera-se que se estará dando a possibilidade de discutir questões importantes da Matemática e de sua estrutura.

O TIG, ao ser filosoficamente desdobrado, pode oferecer uma perspectiva de homens e mulheres serem protagonistas no trabalho de elaboração das teorias matemáticas, uma vez que o encontro com um indecível implica que aquele sistema formal não é capaz de decidir sobre a veracidade daquela afirmação ou da negação dela, solicitando, assim, que a

ocorrências individuais e, também, na “intuição essencial” sendo esta entendida como o ver claro, ou a evidência permitida pela abstração intencional”. Sobre as intuições sensoriais, Husserl (2006, p. 33) explica: “A toda ciência corresponde um domínio de objetos como domínio de suas investigações, e a todos os seus conhecimentos, isto é, aqui a todos os seus enunciados corretos correspondem, como fontes originárias da fundação que atesta a legitimidade deles, certas intuições nas quais há doação dos próprios objetos desse domínio ou, ao menos parcialmente, *doação originárias deles*. A intuição *doadora* na primeira esfera “natural” de conhecimento e de todas as suas ciências é a experiência natural, e a experiência originariamente doadora é a *percepção*, a palavra entendida em seu sentido habitual. Tem um real originariamente dado, “adverti-lo” ou “percebê-lo” em intuição pura e simples é a mesma coisa. Temos experiência originária das coisas físicas na “percepção externa”, não mais, porém, na recordação ou na expectativa antecipatória; temos experiência originária de nós mesmos e de nossos estados de consciência na chamada percepção interna ou de si, mas não dos outros e de seus vividos na “empatia”. Husserl (2006) afirma ainda: “Observamos o que é vivido pelos outros” fundados na percepção de suas exteriorizações corporais. Essa observação por empatia, é, por certo, um ato intuente, dador, porém não mais *originariamente* doador. O outro e sua vida anímica são trazidos à consciência como estando “eles mesmos ali”, e junto com o corpo, mas, diferentemente deste, não como originariamente dados. O mundo é o conjunto completo dos objetos da experiência possível e do conhecimento possível da experiência, dos objetos passíveis de ser conhecidos com base em experiências atuais do pensamento teórico correto.” (HUSSERL, 2006, p. 33-34). Para compreender as intuições de essência é importante que se compreenda que elas mesmas são estudadas de um modo intuitivo. Fontana (2007) expõe: “Esta intuição não contradiz o caráter científico da fenomenologia transcendental, ao contrário, ela é a visão intelectual (*Einsicht*) perfeitamente clara das estruturas possibilitadoras de mundo. O método descritivo da fenomenologia permite resgatar o conceito de intuição como o fundamento da evidência originária, ou seja, a intuição de essências faz ver a verdade última dos fenômenos.” (FONTANA, 2007, p. 170). A fenomenologia afirma “a possibilidade da intuição empírica (*Erfahrende*) ou intuição do indivíduo ser convertida em visão de essência (*Wesens-Schauung*), em ideação. Tal possibilidade de conversão deve ser entendida não empiricamente, mas no próprio plano das essências. O termo visão corresponde à essência pura ou *eidos*. O termo visão caracteriza o modo de conhecimento das essências. Trata-se de um mostrar as essências, as estruturas de significação do mundo. Esta é uma visão imediata, não a sensível ou empírica, mas a visão em geral como consciência doadora originária sob todas as suas formas, que é a última fonte de direito para toda afirmação racional. Esta visão é intelectual (*Einsicht*) e não deve ser confundida com a mera percepção sensorial. A visão intelectual, a evidência é um processo irreduzível; por seu núcleo é a unidade que forma uma posição racional. Para designar toda tese racional usa-se “evidência originária.”” (FONTANA, 2007, p. 170-171).

decisão sobre como considerá-la seja realizada pelo elemento humano presente na atividade de produção matemática.

Além disso, ao se apresentar o matemático como aquele que reinterpreta logicamente a gênese dos conceitos, segundo a ordem dos raciocínios, acreditamos que podemos avançar para a abertura de uma visão dessa ciência que considere diferentes aspectos de sua constituição: os das vivências do sujeito que aprende, abrangendo os sentidos, os da sua aplicabilidade e importância no mundo sociocultural, trabalhando também com o ensino contextualizado social, histórico e culturalmente e, ainda, que considere seu sistema axiomático, enfatizando a compreensão do seu método de produção e explicitando os significados de seus conceitos.

A incompletude das teorias que contenham os axiomas da aritmética básica em seu sistema axiomático, aponta a inatingibilidade de qualquer sistematização final de numerosas áreas importantes e, também, a impossibilidade de que muitos ramos desta estejam inteiramente livres de contradição interna (NAGEL; NEWMAN, 1973, p. 16). Nesse entendimento se encontra o motivo pelo qual considero relevante propor o encontro entre estudantes de Licenciatura em Matemática com as ideias do TIG e com sua demonstração no contexto de disciplinas apropriadas.

A estrutura curricular de cursos de Licenciatura em Matemática não prevê de forma declarada o trabalho com o TIG, seja em sua dimensão técnica, seja na filosófica, seja na abordagem da própria ideia de incompletude de uma teoria. Em geral, ela assegura em seu plano de curso o ensino de disciplinas específicas de Matemática, Educação Matemática, Pedagogia, Física, Computação e Estatística, e pode oferecer entre as optativas uma disciplina de Lógica Matemática. No entanto, é comum os estudantes desconhecerem até mesmo o nome do teorema.

Esse modo de compreender possíveis caminhos para o estudante de Matemática, que busca pela profissão de ensinar essa ciência, educando matematicamente os alunos, leva-me a indagar como isso poderia ser realizado. Ou seja, *como sentidos e significados⁹ do TIG podem ser atualizados em cursos de Licenciatura em Matemática?*

O que diz a interrogação

⁹ *Sentidos e significados* serão explicitados no próximo item, no qual esclarecemos os termos que constituem a questão norteadora da pesquisa.

Vários autores apresentam seus pontos de vista sobre o que é pesquisa e o que é pesquisar. Como Joel Martins, compreendemos que pesquisar é “ter uma interrogação e andar em torno dela em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões e outra vez...” (BICUDO, 1993, p. 18). No âmbito dessa compreensão, depreendemos que uma interrogação é central em uma pesquisa, pois

Ela se comporta como se fosse um pano de fundo onde as perguntas do pesquisador encontram seu solo, fazendo sentido [...] ela diz da perplexidade do investigador diante do mundo, a qual se manifesta inclusive como força que o mantém alerta buscando, inquirindo [...]. (BICUDO, 2011, p. 23-24).

A interrogação que nos orienta nesse movimento, a qual objetiva se desdobrar em pesquisa, é, como exposto acima, *como sentidos e significados do TIG podem ser atualizados em cursos de Licenciatura em Matemática?*

O esclarecimento da interrogação se mostra, talvez, tão importante quanto a própria interrogação, pois o movimento empreendido de clareamento do foco da pergunta e dos termos que enunciam a questão pode contribuir com elucidações prévias a eventuais dúvidas que poderiam surgir no momento de o leitor compreender o indagado na interrogação formulada.

Desse modo, pomo-nos a esclarecer melhor o que nossa pergunta posta acima efetivamente interroga.

O *como* da interrogação indica *modos* pelos quais sentidos e significados do TIG vão se abrindo em compreensões para os sujeitos que estão envolvidos no processo de ensinar e de aprender esse teorema. Nesta investigação, está-se interrogando possíveis modos de se dar a *atualização* de *sentidos* e *significados* do TIG no horizonte da Educação Matemática.¹⁰ Ela já anuncia: a *possibilidade de atualização* e *sentidos e significados* do TIG.

Posto isso, faz-se necessário explicitar nossa compreensão sobre *sentidos e significados do TIG no horizonte da Educação Matemática* e sobre *atualização* desses sentidos e significados.

¹⁰ Falamos desse horizonte, pois entendemos que ao trabalhar com o ensino de Matemática, quer seja em cursos de Licenciatura ou de outros níveis de ensino, é importante que o ferramental dessa ciência seja objeto de atividades desenvolvidas, visando a sua apropriação e, para além disso, que os conteúdos matemáticos sejam compreendidos, criticamente, em seu processo de produção e de possíveis aplicabilidades. Entendemos ser nuclear à Educação Matemática, que se vá ficando atento, à medida que esse processo for avançando, ao modo de os alunos construírem argumentações em discursos não contraditórios e consequentes.

Por que estamos falando de *sentidos* e *significados* de modo geral sem adjetivar? Ora, poderíamos nos referir aos sentidos e significados *pedagógicos, culturais, sociais, históricos, filosóficos*, matemáticos, ou algum outro. Mas a quais *sentidos* e *significados* estamos nos referindo quando não os adjetivamos? Apreendemos que o TIG é um resultado da Matemática, pertencente ao corpo de teoremas que consideramos como sendo do campo de conhecimento matemático, ou seja, do seu *habitat*. Os significados desse teorema já são passíveis de serem clareados no mundo da Matemática. Portanto, ao estudá-lo, já se está no campo da Matemática e, ao se estar dirigindo à Educação Matemática, está-se também dialogando com pessoas que apresentam familiaridade com o ferramental matemático. Um primeiro impulso de adjetivação apontaria *matemáticos* como a qualificação que adjetivaria sentidos e significados. Entretanto, entendemos que essa adjetivação seria redundante, uma vez que é um teorema desse campo de conhecimento.

No que tange à nossa¹¹ compreensão sobre *sentidos e significados*, *sentido* diz do *Sinn*¹², do vivenciado no corpo encarnado que sensorialmente recebe dados do objeto tocado, visto, cheirado, degustado, ouvido e que, por entrelaçamento de informações sensoriais apreendidas por diferentes órgãos de sentidos, vai constituindo possibilidades de perceber e de intuir. Os sentidos dizem de uma camada pré-expressiva das vivências, que, uma vez enlaçadas pela intencionalidade, vão sendo articulados pelos atos da consciência, sendo organizados de modo a poderem ser expressos pela linguagem em expressões verbais, *Bedeutung*, entendido como significado.

O desenrolar dos dados sensíveis sob nosso olhar ou sob nossas mãos é como uma linguagem que se ensinaria por si mesma, em que a significação seria secretada pela própria estrutura dos signos, e é por isso que se pode dizer, literalmente, que nossos sentidos interrogam as coisas e que elas lhes respondem. (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 428).

Significado diz da expressão, mediante a linguagem, do sentido articulado nos atos da consciência, de modo que há uma simbiose entre a linguagem histórico culturalmente presente no mundo-vida¹³ e o que o sujeito intenciona expressar. Não se trata de um ato de

¹¹ Por estarmos afeitos às discussões do grupo de estudos e pesquisa do qual participamos, o FEM - Fenomenologia em Educação Matemática. Acesso do site do grupo em: <http://www.sepq.org.br/nucleos/avancado/FEM/>.

¹² De acordo com Derrida (1994, p. 26) nas *Investigações Lógicas*, Husserl não faz distinção entre *Sinn* e *Bedeutung*. Contudo, no *Ideias*, livro primeiro, (HUSSERL, 2006, p. 275 e seguintes) fala da distinção entre a face sensível e carnal da expressão e sua face não sensível ou espiritual. Em *Ideias*, livro segundo, Husserl (2005, p. 53; 183 e seguintes) trata das sensações e de como o corpo-vivente vai entrelaçando-as, tendo possibilidade de perceber e intuir.

¹³ Embora muitos autores latinos se expressem como *mundo-da-vida*, preferimos *mundo-vida*, conforme compreendemos em nosso grupo de estudos e pesquisa. Essa compreensão vem se constituindo para nós pelas

biunivocidade entre sentido e linguagem, pois a palavra, presente na linguagem, sempre diz mais do que o intencionado pelo sujeito, uma vez que traz sentidos já expressos histórica e culturalmente, e menos do que o sujeito compreende e quer expressar.

É preciso reconhecer antes dos ‘atos de significação’ (*Bedeutungsgewebende Akten*) do pensamento teórico e tético, ‘as experiências expressivas’ (*Ausdruckserlebnisse*); antes do sentido significado (*Zeichen-Sinn*), o sentido expressivo (*Audrucks-Sinn*); antes da subsunção do conteúdo à forma, a ‘pregnância’ simbólica da forma no conteúdo. (MERLEAU-PONTY, 1994, p. 426).

Entendemos ser esse movimento o de atualizar sentidos e significados, por meio da proposta de vivências com ideias do TIG em níveis e momentos distintos, que pode conduzir à compreensão do poder do método axiomático e do resultado que diz da incompletude das teorias que contenham os axiomas da aritmética de Peano em seus sistemas formais.

Com essa compreensão, não adjetivamos sentidos e significados últimos do TIG, pois buscamos trabalhar com os sentidos percebidos pelos sujeitos que se abrem aos seus significados, estes sendo vitalizados no âmbito daqueles, pertinentes ao teorema visto no contexto da Matemática, uma vez que o solo em que estes sujeitos estão, o curso de Licenciatura em Matemática, direciona as ações que produzem experiências nas quais os sentidos se atualizam.

Atualização diz de um movimento de *devir*, que é um conceito filosófico que adjetiva situações de mudanças constantes, perenes de algo ou de alguém. Refere-se à uma ação

leituras atentas dos textos de Husserl. Entendemos mundo-vida como solo de todas as vivências e horizonte aberto às ocorrências naturais e histórico-sociais e não como um lugar, espaço-temporal em que são depositadas coisas. Bicudo e Rosa (2007) afirmam: “Prefiro a expressão mundo-vida à mundo-da-vida. Ao demorar-me nessa última expressão, entendo que a vida assume primazia e que dada suas especificidades ela tem um mundo. Mundo-vida, mostra-se para mim como um mundo que tem vida. Entendo que esse sentido se faz valer à medida que olhamos atentadamente para o mundo e buscamos compreendê-lo com sua força, impondo-se e tudo abarcando, ao modo de um caldo grosso que vai se alastrando, cobrindo o que ai está, ao mesmo tempo em que se engrossa e nutre disso que ai está. É um mundo vivo. Portanto mutante, temporalizado, espacializado. Assim o sentido que para mim se faz é o de um mundo que é vida e não vida que tem um mundo. Talvez, esse modo de traduzir *Lebenswelt* seja influenciado pela tradução inglesa dessa palavra, que é *life-world*. Atenta a essa possibilidade, também busquei o estudo que Kluth (2000) faz desse termo, que apresenta: Kluth, ao investigar o significado desse termo em vários autores, citando inclusive Drosdowski (1989), afirma que atentando para sua etimologia, podemos dizer que *Lebenswelt* é uma composição das palavras *Leben* e *Welt*. A primeira é um substantivo derivado de *leben* que em português significa viver, tendo como palavras parentes *bleiben*, que quer dizer ficar, permanecer e *Leib*, um antigo substantivo que hoje significa partes de um corpo com vida. A palavra *Welt*, quando traduzida para o português, significa mundo, universo. Essa palavra tem suas raízes em *Werwolf* que significava *Mann*, *Menschen*, ‘Ser do sexo masculino e Ser humano’; mais tarde ganha o significado de *Menschenalter*, *Zeit*, ‘idade do ser humano no tempo’, e, posteriormente em *Menschenalter*, *Menschenzeit*, ‘idade do ser humano, tempo do ser humano’ (KLUTH, 2000, p. 110). É curioso notar como na língua alemã a palavra mundo carrega consigo a ideia de tempo e de humanidade, enquanto a palavra vida aponta para a ideia de lugar e permanência, posta pela palavra *bleiben*.” (BICUDO; ROSA, 2007, p. 2).

criadora de tornar atuais possibilidades presentes. Atualizar alude à criação, à invenção de uma forma de desdobramentos se darem numa ação, trabalhando com uma conformação dinâmica de forças e de finalidades já existentes. Assim, a atualização de sentidos e significados do TIG é aqui compreendida como um movimento de criação de uma forma de esses sentidos e significados desse teorema que se tornam presentes no horizonte da Educação Matemática no que tange à formação de professores dessa ciência. “A atualização se dá em um contexto social, político, cultural e histórico.” (BAUMANN, 2013, p. 28),¹⁴ nesse caso, nos cursos de Licenciatura em Matemática, em seu determinado contexto, com professores e alunos, com os recursos de infraestrutura disponíveis e no âmbito da legislação que os conforma.

A palavra *horizonte* diz respeito àquilo que é visível em um campo aberto à compreensão, desde onde se está até o alcance de nossa mirada perceptiva, aqui entendida como “espiritual”, ou seja, da clareza do nosso entendimento. Desse modo, *horizonte de possibilidades* revela o campo de possibilidades do que pode ser compreendido, pois não se pode determinar como e o que será compreendido pelos sujeitos cognoscentes. Neste trabalho, o *horizonte* da Educação Matemática expõe possibilidades de compreensões do teorema como dado, focando sua demonstração, sua inserção histórica no âmbito da Matemática, a importância da axiomatização na produção matemática e outras compreensões que a questão da incompletude pode disparar.

Educação Matemática é entendida por nós como um campo de investigação e de ação que efetua seu trabalho em diferentes frentes, por exemplo, como professores em escolas, como professores em centros de formação de professores, como autores de livros e materiais didáticos, ocupando cargos administrativos em secretarias, como pesquisadores em cursos de Pós-graduação, conforme destaca Bicudo (2010).

Na dimensão de linha de pesquisa, a Educação Matemática tem como objeto “as múltiplas relações e determinações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático” (LORENZATO; FIORENTINI, 2001, p. 1); enquanto região de inquérito, ela busca compreender fenômenos relacionados à Matemática, ao seu ensino e aprendizagem; por sua vez, na esfera de campo de atuação de professores, tem a pré-ocupação com o modo de vir-a-ser do outro, cuidando do vir-a-ser do outro, qualquer que seja este outro, e “seu

¹⁴ Baumann (2013) apresenta estudo aprofundado sobre atualização/realização e esse é nosso referencial sobre esse tema nesta pesquisa.

ensino organiza atividades que viabilizam efetivação daquele cuidado, traduzido em *formas, conteúdos e direções* trabalhadas” (BICUDO, 1999, p. 5-6, grifo do autor).

Enquanto educadores matemáticos, concebemos a Matemática como fim e como meio. Como fim, pois se trata de uma ciência importante no desenvolvimento histórico cultural primordialmente da Ocidental, tanto do ponto de vista científico, como técnico e tecnológico. Olhando-a dessa perspectiva, entendemos que seja importante que se trabalhe seu domínio teórico e suas ferramentas de produção de conhecimento matemático. Como meio, pois, ao ensinarmos essa ciência, estamos nos confrontando com pessoas que estão em movimento de forma/ação. Onde nos preocupamos com o seu devir como pessoas e cidadãos(ãs) que vivem em diversas comunidades e sociedades.¹⁵ Focando a formação do profissional que trabalha ensinando Matemática e ao mesmo tempo preocupado com o devir de seus alunos, elegemos o curso de Licenciatura em Matemática como um ambiente apropriado para que essas ideias sejam tratadas.

Procedimentos assumidos para realizar a investigação

Focando a interrogação “*Como sentidos e significados do teorema da incompletude de Gödel podem ser atualizados em cursos de Licenciatura em Matemática?*”, delineamos, neste item, os modos pelos quais buscaremos dar conta dela.

Inicialmente, no capítulo I, apresentaremos o cenário da ciência Matemática em que o TIG aparece, trazendo questionamentos à consistência da aritmética e estabelecendo uma barreira intransponível para a demonstração dessa consistência, da qual dependia o sucesso do projeto de David Hilbert (1862-1943) e, conseqüentemente, a fundamentação completa da Matemática no ideal dos formalistas. No panorama que apresentamos, figuram também

¹⁵ É sabido que um aspecto importante da concepção husserliana diz de o ser humano viver com o outro no mundo-vida. Há diferentes formas de estar com o outro, de associar-se, conforme os estudos de Ales Bello, sustentados em Husserl e Edith Stein. Aqui destacamos dois, estar com o outro em *sociedade* e estar com o outro em *comunidade*. Conforme Ales Bello (2015), “uma *sociedade* diz uma união de pessoas para uma finalidade racional, e nela cada indivíduo que lhe constitui é considerado por aquilo que serve à ela num certo momento. Ou seja leva-se em conta a funcionalidade e não é considerada a pessoa, isto é, por exemplo, numa sociedade financeira um indivíduo é conhecido pela proporção que sua aplicação representa ante ao todo, e não pelo vínculo com os demais indivíduos da associação.” ALES BELLO (2015, p. 89). Já “numa *comunidade* existe um vínculo pessoal entre os indivíduos, há uma relação que liga seus membros, isto é, um projeto comum compartilhado e desenvolvido com respeito recíproco.” (ALES BELLO, 2006, p. 74). O elemento que a caracteriza é sempre o da unidade espiritual, cultural e da vontade coletiva. Compreendemos, à luz de Ales Bello, que “o ser humano vive singularmente, mas também vive na comunidade, onde se estabelece”, ou seja “vivemos de modo pessoal o que a comunidade vive.” ALES BELLO (2015, p. 89). Viver em comunidade é viver numa *atitude comunitária* no sentido mais genuíno. Quando existir um vínculo psíquico e espiritual entre os indivíduos de uma sociedade ela *pode* vir a tornar-se uma comunidade.

as outras duas correntes filosóficas que tentaram fundamentar a Matemática e uma explicação dos motivos que impossibilitaram o “completamento” de seus projetos.

No Capítulo II, trazemos o próprio TIG, focando sua demonstração em duas versões, a demonstração de Nagel e Newman (1973) e de Shoenfield (1967). A demonstração baseada em *A Prova de Gödel*, de Nagel e Newman (1973), é técnica e não formal e cumpre apresentar o TIG como um teorema que examina e avalia minuciosamente as ideias sobre os fundamentos, tanto da Matemática quanto da Lógica, objetivando-se conduzir o leitor pelos meandros da prova desenvolvida por Gödel em 1931, ilustrando-a, bem como das ideias utilizadas nela, aclarando a sua compreensão. A demonstração baseada em *Mathematical Logic*, de Joseph Robert Shoenfield, edição de 1967, objetiva validar o TIG, apresentando-o de maneira formal. Finalmente, expomos o modo como compreendemos as demonstrações alternativas, bem como o que nos levou a apresentar duas demonstrações do mesmo resultado.

No Capítulo III, apresentaremos um estudo sobre a Matemática após o TIG. Neste estudo, focamos a proposta de Bourbaki para a Matemática porque compreendemos que a atitude desse grupo revela a forma como o TIG foi acolhido pelos matemáticos.

Dando seguimento, no Capítulo IV, traremos, então, a proposta de como atualizar sentidos e significados do TIG em cursos que se propõem formar professores de Matemática, tomando como exemplar um caso de uma Licenciatura em Matemática.¹⁶ Apresentamos nessa ocasião a proposta de inserção de trabalho com o tema do TIG em disciplinas apropriadas.

Com o intuito de apresentar uma síntese sobre nossa investigação, que nunca será efetivamente completa, traremos nossas considerações a respeito do TIG e sua importância para a Educação Matemática.

¹⁶ Será analisado a estrutura curricular e o programa das disciplinas do curso de graduação de Licenciatura em Matemática da UNESP de Rio Claro em vigência. Vale dizer que desde 2015 outra proposta de curso está sendo implementada.

CAPÍTULO I:

O SURGIMENTO E O IMPACTO DO TIG NA MATEMÁTICA

Neste capítulo, buscamos apresentar o panorama das discussões matemáticas mantidas entre os matemáticos à época da apresentação do TIG e das quais temos conhecimento por intermédio de leituras de textos de autores que delas tratam. Na sequência, apresentamos nosso argumento de que “o TIG é um teorema mais para a alma do matemático do que para as suas mãos” (informação verbal).¹⁷ Diga-se de passagem, que ele é importante porque mostra que a Matemática não pode comunicar (provar) todas as suas verdades, porém, que a prova da incompletude de Gödel não impossibilita que a Matemática continue sendo produzida com o método axiomático. Desse modo, nossa linha de argumentação seguirá apresentando brevemente o ponto de incidência deste resultado na Matemática, o impacto deste teorema nesta ciência, bem como a maneira em que ele foi compreendido pelos matemáticos.

O cenário matemático em que surge o TIG

Em meados do século XIX, a área de estudos sobre os fundamentos da Matemática se constituía. Motivada por resultados advindos dos progressos desenvolvidos em cálculo e principalmente em geometria, e alavancados por resultados da teoria dos conjuntos, matemáticos direcionaram seus esforços para a criação de sistemas de axiomas para a Matemática, em especial para a aritmética, visando em especial dar respostas às questões geradas pelos paradoxos.¹⁸

A consistência se configurava como um problema para o qual o coração dos matemáticos acreditava estar resolvido e o cérebro seguia ansioso por não ser capaz de expressar uma solução. Um abalo ocorreu no projeto de Hilbert quando Gödel anunciou que havia mostrado a existência de uma sentença verdadeira da aritmética, mas não demonstrável no sistema formal da aritmética dos números naturais e, ainda, que esse sistema não podia provar a sua própria consistência. Contudo, a crença de encontrar

¹⁷ Frase proferida por Henrique Lazari, co-orientador desta pesquisa, em sessão de orientação, em 2016.

¹⁸ O forte desenvolvimento da Matemática ao longo dos séculos XVIII e XIX evidenciou alguns paradoxos no centro das discussões acerca dos fundamentos da Matemática, entre os quais se destacam o Paradoxo de Burali-Forti, o Paradoxo de Cantor e o Paradoxo de Russell.

fundamentos firmes para a Matemática se manteve viva, conforme se pode observar pela revisão do programa de Hilbert feita após o TIG.

Os projetos de fundamentos da Matemática visavam estudar os conceitos matemáticos mais básicos (número, figura geométrica, conjunto, função, por exemplo) e buscavam entender como se formam hierarquias das estruturas e dos conceitos mais complexos, especialmente as estruturas fundamentalmente importantes que formam a linguagem da Matemática (fórmulas, teorias e seus modelos que dão um significado às fórmulas, definições, provas, algoritmos, ...). Esses conceitos também são chamados de conceitos metamatemáticos, quando se os olha da perspectiva dos aspectos filosóficos e da perspectiva da unidade da Matemática. A busca pelos fundamentos da Matemática é uma questão central da Filosofia da Matemática, visto que a abstração que constitui a Matemática apresenta desafios filosóficos especiais. Pensava-se que ao sistematizar e hierarquizar os conceitos pudesse juntar essa parte da Matemática ao restante do conhecimento humano e que dessa forma também seria possível investigar uma linguagem que representasse o infinito.

O TIG é posterior aos projetos de fundamentação da Matemática. Contudo, é relevante apresentarmos esse momento histórico imediatamente anterior ao aparecimento deste resultado porque ele dá a palavra final à escola que seguia tentando fundamentar a Matemática tendo como base a aritmética básica dos números naturais.

Como nos conta Ferreira (2009), referindo-se à época em que o TIG é apresentado à comunidade matemática,

O matemático “normal”, mesmo que não estivesse envolvido diretamente em questões de fundamentação, conhecia as disputas e seguia-as com interesse, senão mesmo com paixão. Com os teoremas de Gödel, abateu-se sobre a comunidade uma espécie de exaustão. (FERREIRA, 2009, p. 2).¹⁹

Ainda vale ressaltar que o TIG incidiu de modo distinto em cada uma das três escolas filosóficas: destruiu as esperanças dos formalistas de encontrar sistemas matemáticos formais completos e provas finitárias de consistência, bem como acabou com a expectativa dos logicistas de que houvesse um sistema formal que englobasse a Lógica. Já aos intuicionistas causou menos surpresa, embora tenha sido considerado importante, uma vez que a crença intuicionista na inesgotabilidade da Matemática por um sistema formal não

¹⁹ Trata-se de um texto de uma comunicação à Sessão da Classe de Ciências da Academia das Ciências de Lisboa, ocorrido em 15 de janeiro de 2009, conforme informações do próprio autor. Acesso em: <http://webpages.fc.ul.pt/~fjferreira/fundamentador_acl.pdf>.

inclui a necessidade de provas de consistência para a realização plena de seus constructos.

No entanto, Wang (1987) afirma:

Se a evidência finitária da consistência de sistemas matemáticos formais fosse obtida, poderia ser esperado ver as coisas que eles fazem muito menos convincentes e poderia levar a conclusões precisas que eles podiam ver parcialmente e de forma imprecisa. (WANG, 1987, p. 384).

As doutrinas que se empenharam em fundamentar a Matemática “tinham em comum a metáfora que o conhecimento é um edifício e por isso deve ter seus fundamentos seguros, fidedignos e especificáveis.” (ENCICLOPÉDIA, 2006, p. 376), e tinham o comprometimento e a esperança da possibilidade dessa realização. Contudo, diferiam a respeito de pontos de vista sobre o que seria legítimo considerar na base da fundamentação.

Em ordem cronológica, a primeira dessas doutrinas que se apresentou foi o Logicismo. Iniciada por volta de 1884, ela tinha como um dos principais representantes Gottlob Frege (1848-1925), Bertrand Russell (1872-1970), Peano e Alfred North Whitehead (1861-1947). Suas ideias centrais giraram em torno das proposições analíticas da Lógica, uma vez que estas eram tidas como o fundamento sobre o qual o conhecimento matemático poderia se justificar. Assim, a proposta dos logicistas apresentava dois eixos importantes: i) os axiomas matemáticos são princípios da Lógica, e, ii) a Matemática pode ser deduzida da Lógica.

A realização do projeto dessa escola se deu por meio da produção da obra *Principia Mathematica*²⁰

(*Principia*) de Russell e Whitehead. Essa obra foi considerada um marco para a construção de uma teoria formal dos conjuntos, na qual seus autores mostraram que toda Matemática clássica poderia ser deduzida da teoria dos conjuntos. O plano era mostrar que a Matemática clássica poderia ser escrita com as peças da Lógica.

No entanto, mostrar isso era equivalente a mostrar que os axiomas da teoria dos conjuntos pertenciam à Lógica. A formulação do programa dos logicistas transforma-se mais uma vez. A tarefa então passa a ser a seguinte: demonstrar que os axiomas do



Figura 1: Essa imagem faz referência às ideias dos logicistas: mostrar que a Matemática clássica era parte da Lógica. (SNAPPER, 1984, p. 85).

²⁰ Obra em três volumes, publicados em 1910, 1912 e 1913, nas quais tentou-se arrematar todas as verdades matemáticas baseando-se num arrolamento extremamente bem definido de axiomas e regras de dedução, usando uma linguagem lógico-simbólica própria.

Principia pertenciam à Lógica. Restava demonstrar que esses axiomas pertenciam à Lógica.

Os axiomas são:

1) Axioma da extensionalidade: $\forall x, y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

(diz que dois conjuntos são idênticos se, e somente se, têm os mesmos elementos);

2) Axioma do conjunto vazio: $\exists x; \forall y (\sim(y \in x))$

(enuncia a existência de um conjunto que não tem nenhum elemento);

3) Axioma da formação de pares: $\exists x, y \exists z; \forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \text{ ou } w = y)$

(enuncia que dados dois objetos x e y , existe um conjunto z cujos elementos são exatamente x e y);

4) Axioma da união: $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (z \in t \text{ e } t \in x))$

(afirma que dado um conjunto arbitrário x , existe um conjunto y tal que os elementos de y são os elementos de x);

5) Axioma da infinidade: $\exists x; (\emptyset \in x \text{ e } \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$

(afirma a existência de um conjunto que contém os seguintes elementos

$\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}; \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}\} \dots$)

6) Esquema de axiomas de substituição: se $A(x, y, t_1, t_2, \dots, t_n)$ é uma fórmula com variáveis livres x e y com parâmetros t_1, t_2, \dots, t_n , então $\forall t_1, t_2, \dots, t_n (\forall x, \exists \text{ um único } y; A(x, y, t_1, t_2, \dots, t_n) \rightarrow \forall u \exists v; B(u, v))$ onde $B(u, v)$ designa a fórmula $\forall r (r \in v \leftrightarrow \exists s; (s \in u \text{ e } A(s, r, t_1, t_2, \dots, t_n)))$.

(A fórmula A define uma função implícita de x em y . O axioma afirma que para qualquer conjunto u , existe um conjunto v , que é imagem de u através dessa função implícita;)

7) Axioma do conjunto das partes: $\forall x \exists y; \forall z (z \in x \leftrightarrow z \subset x)$

(enuncia que para qualquer conjunto x existe um conjunto y cujos elementos são os subconjuntos de x);

8) Axioma da escolha:

Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de conjuntos não vazios, então, existe uma função

$f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$. f é uma função escolha e equivale a:

Se $A_i \neq \emptyset, \forall i \in I$, então $\sum_{i \in I} A_i \neq \emptyset$

9) Axioma da fundação: $\forall x \exists y (x = \emptyset \text{ ou } (y \in x \text{ e } \forall z (z \in x \rightarrow \sim(z \in y)))$.

(afirma que nenhum conjunto é um de seus próprios elementos (isso evita o paradoxo de Russell²¹)).

Contudo, observou-se que o *axioma da escolha* e o *axioma da infinidade* não poderiam ser aceitos em virtude de seus conteúdos, o que contrariava a definição de proposição lógica aceita pelos logicistas.

E, mais uma vez, por fim, a implementação do plano dos logicistas transformou-se e equivalia logicamente a demonstrar que os nove axiomas acima eram proposições lógicas. Essas entendidas como “*uma proposição lógica é uma proposição que tem generalidade completa e é verdadeira em virtude de sua forma, e não do seu conteúdo*” (SNAPPER, 1984, p. 86), cuja proposição lógica tem o status de teorema. Como ainda destaca Snapper (1984), pode-se dizer que, “como pelo menos dois dos axiomas de ZF não são proposições lógicas no sentido do logicismo, é razoável dizer que esta escola fracassou em aproximadamente vinte por cento de seu esforço em dar fundamentos firmes à matemática” (SNAPPER, 1984, p. 86). Este autor diz de modo sintético que o *axioma da infinidade* e o *axioma da escolha* não podem ser considerados proposições lógicas, pois a aceitação destes se dá em virtude de seus conteúdos e não de suas formas sintáticas.²²

O enunciado do *axioma da escolha* não especifica se a coleção de conjuntos não-vazios é finita ou infinita. Isso implica dizer que toda coleção finita de conjuntos não-vazios tem uma função de escolha. No caso de termos uma coleção de um conjunto, uma função de escolha corresponde a apenas um elemento. Este exemplo diz que todo conjunto não-vazio tem um elemento, mas isso é válido trivialmente. E, então, o *axioma da escolha* pode

²¹ Também conhecido popularmente como paradoxo do barbeiro diz de uma contradição descoberta por Russell em 1901, a qual podia ser derivada do sistema utilizado por Frege em seu livro *Leis fundamentais da aritmética*, o qual evidenciava a tentativa de reduzir a aritmética à lógica. O paradoxo diz: considere-se o conjunto y de todas as entidades que não são membros de si próprias, isto é, $x \in y$ se, e só se $x \notin y$. Deduz-se disso que se $y \in y$ se, e só se, $y \notin y$.

²² Segundo Snapper: “A única maneira de avaliar o sucesso ou o fracasso do logicismo em efetuar sua tarefa é examinar todos os nove axiomas de ZF e verificar se cada um deles se enquadra no conceito logicista de proposição lógica. Isso exigiria um artigo separado, e seria interessante para leitores totalmente familiarizados com ZF. Assim, em vez disso, afirmamos simplesmente que pelo menos dois desses axiomas, ou seja, o *axioma da infinidade* e o *axioma da escolha* não podem ser considerados proposições lógicas. Por exemplo, o *axioma da infinidade* diz que existe conjuntos infinitos. Porque aceitamos este axioma como verdadeiro? A razão é que todos estamos muito familiarizados com inúmeros conjuntos infinitos, por exemplo, o conjunto dos números naturais, ou o conjunto de pontos do espaço euclidiano tridimensional. Portanto, aceitamos este axioma baseados em nossa experiência do dia-a-dia com conjuntos e isso claramente mostra que o aceitamos em virtude de seu conteúdo e não em virtude de sua forma sintática. Em geral, quando um axioma afirma a existência de objetos com os quais nos achamos familiarizados devido à nossa experiência do dia-a-dia, é quase certo que não se trata de uma proposição lógica no sentido do logicismo.” (SNAPPER, 1984, p. 86-87).

ser visto como afirmando a generalização dessa propriedade que já é evidente para coleções finitas.

O *axioma da infinidade* aponta para a existência de conjuntos infinitos com os quais nos familiarizamos matematicamente, seja com os inúmeros conjuntos infinitos que conhecemos, seja com o conjunto de pontos do espaço euclidiano. Isso mostra que o aceitamos em virtude de seu conteúdo, conforme em Snapper (1984).

No entanto, esse insucesso constatado nesse programa não caracteriza uma falta de importância para esta escola, principalmente pela influência que o *Principia* tem na história da Matemática e pelo tratamento lógico que possibilitou o desenvolvimento da Lógica Matemática Moderna. Isso ocorreu especialmente pela introdução da simbologia dos quantificadores \forall (para todo) e \exists (existe um), feita por Frege.

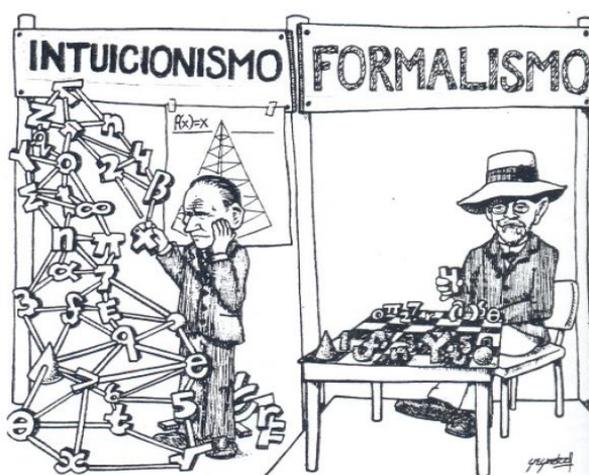


Figura 2: (SNAPPER, 1984, p. 90). Figura representativa do intuicionismo e do formalismo. Cada escola a seu jeito, construíam o que acreditavam que seria a base do edifício da Matemática: a intuição e a formalização, respectivamente.

A construção intuicionista era efetiva (uma vez completada a construção de um número, ele era considerado integralmente) e indutiva (para construir o número n , deve-se percorrer todos os passos mentais de construção desde o 1 até o n). A Matemática era concebida, então, como uma atividade mental, consistindo em efetuar construções mentais efetivas e indutivas uma após a outra, ou seja, efetuar constructos, um após outro. O mesmo que vale para os números vale para as demonstrações, para os teoremas e para as definições. Os teoremas intuicionistas em especial, por sua vez, tornaram-se muito longos. Ao serem feitos de maneira construtiva eram desprovidos da elegância, engenhosidade e brevidade dos mesmos teoremas provados ao modo da Matemática clássica. A escola intuicionista tem na pessoa de Brouwer a síntese de formação e fundação no ano de 1908. As consequências mais importantes da definição intuicionista de Matemática é que a

Quando surgiu o TIG, o Logicismo se encaminhava para ser um ramo técnico da Matemática, que atualmente conhecemos por Lógica Matemática Moderna.

Para o Intuicionismo, o alicerce eram os números naturais. A crença na intuição natural de todos os seres humanos em relação aos naturais amalgamava o método de construção que se iniciava no número 1 e seguia um por um até n , n natural.

Matemática é construtiva e que ela não pode ser reduzida a nenhuma outra ciência. Na segunda consequência, reside o embate fundamental entre o Logicismo e o Intuicionismo: os intuicionistas não aceitam as leis lógicas que entendem ser combinações de palavras sem sentido. A isso se deve a sua não aceitação da lei do terceiro excluído aceito pelos logicistas.

Os intuicionistas são seguros em relação a não terem reconstruído toda a Matemática clássica, mas, de terem reconstruído a parte que para eles era considerada Matemática. E a tranquilidade dos intuicionistas revela-se quando nos debruçamos mais demoradamente em seus objetivos em comparação ao dos logicistas: justificar toda a Matemática clássica. Dado o modo como os intuicionistas trabalharam, isto é, por meio de constructos, a Matemática intuicionista era desprovida de contradições e em termos de fundamentos da Matemática essa corrente filosófica oferece uma solução satisfatória.

O insucesso dos intuicionistas se deve: i) aos teoremas que não podem ser demonstrados pelo modo intuicionista²³; ii) os que podem ser demonstrados tanto da maneira clássica quanto da maneira intuicionista e, iii) os que são demonstrados como verdadeiros no intuicionismo e como falsos na Matemática clássica. Sobre o segundo tipo, incidem as rejeições em relação ao tamanho e a *deselegância*²⁴ das demonstrações, como afirmavam os matemáticos clássicos. Sobre os outros, a simples recusa por entenderem que a aceitabilidade das demonstrações intuicionistas é em razão delas serem “[...]de natureza emotiva, baseadas em um sentimento profundo do que seja realmente a Matemática [...] o fracasso da escola intuicionista foi em não tornar o intuicionismo aceitável, pelo menos para a maioria dos matemáticos.” (SNAPPER, 1984, p. 89-90).

Leary (2000, p. 3) nos conta que o plano de Hilbert era refutar a visão intuicionista, segundo a qual grande parte da Matemática era suspeita por não ser obtida por constructos²⁵ finitistas. Assim, ele se comprometeu a provar que toda Matemática clássica era consistente, usando métodos finitários também usados pelos intuicionistas, pois, sendo assim, tinha certeza de que sua prova seria aceita por Brouwer e seus seguidores.

²³ Por exemplo, o teorema assim enunciado “Existem pelo menos dois números irracionais distintos a e b tais que ab é um número racional”, para valores de $a \neq b$, pode ser provado no formalismo, mas para os intuicionistas este teorema não estaria provado, pois eles não aceitavam a regra de inferência Redução ao Absurdo, o Princípio do Terceiro Excluído e a Lei da Dupla Negação.

²⁴ Da Silva (2007) afirma: “A elegância em Matemática, como em qualquer contexto, se define como o máximo de efeito (ou consequências desejáveis) com o mínimo de recursos.” Da Silva (2007, p. 194, nota 10). Entendemos elegância como a intersecção entre usar a menor possível quantidade de recursos da teoria e obter o caminho da prova mais curto possível.

²⁵ Um constructo, de acordo com os intuicionistas, é toda construção mental efetiva e indutiva e pode ser reconhecida por todos os seres humanos.

Atribui-se à Hilbert o conceito moderno de Formalismo²⁶ e a criação da escola formalista por volta de 1910. Esse autor concebia a Matemática como um sistema puramente formal, consistindo de símbolos desprovidos de significado ou interpretação, cuja manipulação por meio de regras precisas e mecanismos finitários conduziria à prova da veracidade ou falsidade de todas as expressões que pudessem ser formuladas em tal sistema. Fazer isso era mostrar que a axiomática não levava a contradições. Assim, por meio de uma linguagem artificial com a manipulação de símbolos independentes de sentido, os formalistas conduziam a edificação que mantinha acesa a chama da esperança de que a Matemática seria o único ramo do conhecimento capaz de ostentar o privilégio de fundamentar-se a si mesmo. O propósito dos formalistas era trazer para as teorias matemáticas um conjunto de regras bastante definidas e explícitas acompanhado de uma simbologia e criar mecanismos para operar os algoritmos.

Para os formalistas, a tarefa era formalizar a Matemática clássica. Foi isso que Hilbert (1950) fez em *Fundamentos da Geometria*, obra na qual ele apresenta uma fundamentação para a Geometria Euclidiana (axiomatizada desde cerca do século III a.C.), objetivando tornar formalizada a Geometria Euclidiana e deixando claros possíveis pressupostos que estavam não explicitados ou tacitamente aceitos na obra de Euclides, como a continuidade da linha, por exemplo.

Note-se que axiomatização e formalização são distintos. A primeira se dá por um processo que envolve escolha de entes primitivos e de a menor quantidade necessária de axiomas para construir os seus objetos e demonstrar suas propriedades (que são relacionadas aos entes e aceitos como verdadeiros sem que seja necessário demonstrar suas veracidades), e relacionando as definições e os axiomas, por meio de regras de inferência, para finalmente deduzir e demonstrar os teoremas. A segunda, a formalização de uma teoria como a proposta por Hilbert, implicava a escolha de uma linguagem lógica de primeira ordem,²⁷ por meio da qual se faria a formalização dessa teoria. A escolha dessa linguagem é composta por cinco itens: i) escolha de uma lista enumerável de símbolos para as variáveis; ii) escolha de símbolos para os conectivos da linguagem comum; iii) escolha para

²⁶ Snapper (1984) afirma que “embora seja Hilbert considerado o fundador do formalismo, na obra *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege já se refere contrariamente a eles. Em *Grundgesetze der Arithmetik* (Leis básicas da Aritmética), publicado em 1903, Frege expõe um sistema lógico, no qual Bertrand Russell iria encontrar uma contradição, que ficou conhecida como o paradoxo de Russell.” (SNAPPER, 1984, p. 91).

²⁷ Eventualmente, poderia não ser de primeira ordem.

o sinal de igualdade; iv) escolha de um símbolo para os quantificadores “ \forall ” (para todo) e “ \exists ” (existe); e, v) escolha de um símbolo para cada signo não definido da teoria em questão.

Dessa forma, acreditavam os formalistas que ao formalizar as teorias matemáticas livrariam a Matemática de contradições, bem como de possíveis paradoxos, pois seriam eliminados pelo processo de reescrita da mesma com demonstrações rigorosas em um sistema formal. Assim, na teoria formalizada não existiria sentença para a qual se tivesse uma prova de verdade e de falsidade, simultaneamente. Logo, pensavam, provariam que as teorias matemáticas são completas e consistentes dentro da sua própria axiomática.

Pelo exame exaustivo (método finito), a filosofia de Hilbert expõe que no âmbito de um sistema é impossível ter fórmulas contraditórias a partir dos axiomas do cálculo dados. Nagel e Newman (1973, p. 37-38) salientam com detalhes a comparação entre a teoria da prova de Hilbert com a teoria do xadrez.

Com o resultado do TIG, o que cai por terra em 1931 é a possibilidade de demonstrar a compatibilidade dos axiomas da aritmética em um sistema que incluía a aritmética. A repercussão do resultado atingiu também o projeto de Hilbert e impôs a determinação da não possibilidade de efetivação do projeto, dada a impossibilidade de provar a consistência da aritmética dentro da própria aritmética.

Changeux e Connes (1996) explicam isso nas seguintes palavras:

No início do século, os matemáticos buscaram precisar o que é uma demonstração no campo da matemática. Hilbert construiu uma linguagem artificial baseada em um alfabeto finito, um número finito de regras de inferência lógica e de proposições que se supõem verdadeiras ou axiomáticas. A partir de um tal sistema, ou linguagem formal, um algoritmo universal permite decidir sobre a validade de uma demonstração formulada nessa linguagem. Podemos assim, pelo menos em teoria, estabelecer a lista de todos os teoremas demonstráveis em tal linguagem formal. Hilbert esperava poder reduzir os teoremas matemáticos aos que são demonstráveis em uma linguagem formal adequada. O teorema de Gödel mostra que é impossível. (CHANGEUX; CONNES, 1996, p.176).

Gregory Chaitin (2001) compara o projeto de Hilbert de fundamentar a Matemática com o projeto de fundamento da Biologia. Neste caso, segundo esse autor:

A Teoria Algorítmica da Informação é o verdadeiro fundamento matemático: Matemática lida com informação matemática contida em axiomas, exatamente como a informação biológica está contida nas sequências de DNA, que constituem o fundamento da biologia. Ao tentar encerrar a verdade matemática em um sistema formal rígido, Hilbert extraviou-se. Matemática, assim como a Biologia é dinâmica, encontra-se em transformação, e não pode ser dada de uma vez por todas [...]. Gödel e Turing são apenas a parte visível do *iceberg*. Existe certamente uma razão profunda para a incompletude e uma explicação natural para o

fato de que nenhum conjunto finito de axiomas seja completo. (CHAITIN, 2001, p. 163, tradução nossa)²⁸.

Da Silva (2007), a respeito do horizonte de possibilidades atual frente aos resultados da tentativa de fundamentação da Matemática, afirma que o Logicismo, o Intuicionismo e o Formalismo contribuíram sobremaneira para o projeto de fundamentação da Matemática, ainda que o sucesso total não tenha sido alcançado. Ou seja, cada qual ao seu modo, essas três correntes procuraram respectivamente mostrar as intersecções da Matemática com a Lógica, “demonstrar quais conhecimentos matemáticos podem ser construídos partindo de ideias intuitivas e, por fim, para o caso do formalismo, estabelecer a Matemática como a ciência dos sistemas formais.” (DA SILVA, 2007, p. 235-236).

Desta maneira, entendemos que o TIG é central aos empenhos de fundamentação da Matemática, mas ele não invalida parte alguma da Matemática já construída até o momento por nenhuma das três escolas. Ele conclui que toda teoria que tenha enlaçado em seu sistema formal os axiomas de Peano possui fórmulas que são verdadeiras e indemonstráveis ao mesmo tempo, e, como consequência disso, que essas teorias não são capazes de provar sua própria consistência.

O impacto do TIG na Matemática

O TIG aparece no artigo²⁹ *Sobre proposições formalmente indecidíveis nos Principia Mathematica e sistemas correlatos*, publicado em 1931. Trata-se de um dos mais importantes resultados da Lógica Matemática (muito importante também para a Filosofia da Matemática) que recai sobre o método axiomático. Nos desdobramentos de suas conclusões, esse resultado afirma que existe uma limitação fundamental no poder deste método, e além disso indica a impossibilidade de se ter, simultaneamente, um conjunto consistente e completo de axiomas nem mesmo para a aritmética de Peano.

²⁸ Do original: “AIT is the true foundations of mathematics: Mathematics deals with mathematical information, which is what axioms contain, just as biological information is contained in DNA, which is the foundation of biology. Hilbert's attempt to entomb mathematical truth in a fixed, formal system was completely misguided. Mathematics, like biology, is dynamic, not static. At any moment in time our mathematical knowledge consists of only a finite amount of information, but the Platonic world of pure mathematics contains an infinite amount of information. Gödel and Turing were only the tip of the iceberg. AIT provides a much deeper analysis of the limits of the formal axiomatic method. It provides a deeper source of incompleteness, a more natural explanation for the reason that no finite set of axioms is complete.” (CHAITIN, 2001, p. 163).

²⁹ Nome original: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Divulgado na revista *Monatshefte für Mathematik und Physik*, p. 349–360.

Esse resultado repercute em grande parte da Matemática, na medida em que muitas de suas teorias se apoiam na aritmética dos números naturais.

Os *Principia Mathematica*, mencionados no título do artigo, são os três volumes do tratado de Russell e Whitehead sobre Lógica Matemática e fundamentos da Matemática. Gödel mostrou que o sistema utilizado nos *Principia* ou qualquer outro sistema, no âmbito do qual a aritmética de Peano possa ser desenvolvida, é essencialmente incompleto.

O TIG provocou um abalo no projeto matemático da vida de Hilbert. O programa de Hilbert foi um programa que objetivava construir uma teoria rigorosa capaz de descrever toda a Matemática. Em outras palavras, propunha “formalizar as teorias matemáticas (ou, melhor ainda, toda a Matemática), e demonstrar por meios finitários que essas teorias (ou, melhor ainda, toda a Matemática formalizada) eram consistentes.” (DA SILVA, 2003, p. 33).

O resultado da incompletude incide pontualmente sobre o *problema 2³⁰* de Hilbert, que é o segundo da lista dos 23 problemas apresentados por ele no Congresso Internacional de Matemática ocorrido em 1900, em Paris. Tratava-se de problemas ainda não resolvidos do século XX e o problema 2 solicitava a prova da consistência da aritmética dos números inteiros não negativos.

Na apresentação de seu segundo problema, Hilbert (2000) inicia esclarecendo que a investigação dos fundamentos de uma ciência passa pela escolha de axiomas para a criação de um sistema de axiomas que contenha uma descrição exata e completa das relações existentes entre as ideias elementares dessa ciência. Esses sistemas criados definem as ideias elementares que compõem essa fundação, da qual serão derivadas, por meio de um número finito de passos lógicos, declarações consideradas corretas. Assim, a prova da consistência da aritmética dos números naturais, ou semelhantemente, a prova da não contradição dos axiomas da aritmética de Peano ou, ainda, a prova da compatibilidade dos axiomas da aritmética básica diz de uma prova que demonstre que nenhum teorema derivado dos axiomas aritméticos, que compõem o sistema formal da aritmética, pode ser demonstrado como verdadeiro e como falso, simultaneamente.

No âmbito da Lógica clássica, demonstrar a compatibilidade dos axiomas aritméticos é demonstrar que as conclusões geradas pelo conjunto desses axiomas não são contraditórias, ou seja, não são ao mesmo tempo verdadeiras e falsas. Semanticamente,

³⁰ Vale a pena lembrar que o problema 2 era uma questão matemática e ao mesmo tempo filosófica dado que sua demonstração era peça chave para o sucesso do Programa de Hilbert.

uma teoria é consistente se, e somente se, existir um modelo, isto é, se existir uma interpretação sob a qual todas as fórmulas são verdadeiras. A definição sintática diz que uma teoria é consistente se, e somente se, não existir nenhuma fórmula P , tal que, tanto P , como sua negação $\sim P$, sejam demonstráveis a partir dos axiomas da teoria do sistema dedutivo, cujas fórmulas estão associadas.

A consistência se firmou como um problema para a comunidade matemática no século XIX, no período de grande expansão e intensificação da pesquisa em Matemática. Nagel e Newman (1973) explicam que a conclusão da impossibilidade lógica da solução dos problemas clássicos da Antiguidade produziram investigações profundas sobre a natureza do número, definições rigorosas para conjuntos numéricos, chegando a fundar um novo ramo da Matemática, como um valioso subproduto dessas demonstrações. Além disso, o episódio protagonizado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), János Bolyai (1802-1860), Nikolai Lobachevsky (1792-1856) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) em torno da criação das geometrias não-euclidianas foi crucial junto a esse processo de abstração a que a Matemática estava se propondo. Resultados fecundos são obtidos quando se substitui o quinto postulado por versões de suas negações nos casos dos surgimentos das geometrias não-euclidianas, e estes “solaparam a crença tradicional, sustentada pela geometria euclidiana, de que os axiomas da geometria poderiam ser estabelecidos por sua aparente auto-evidência.” (NAGEL; NEWMAN, 1973, p. 19).

Disso se deu uma compreensão da própria comunidade a respeito de que o trabalho do matemático seria investigar se as conclusões matemáticas obtidas são consequências lógicas necessárias das pressuposições iniciais e não averiguar se os postulados ou as conclusões, por ele assumidos, são verdadeiras. Somado à crescente abstração da Matemática, isso resultou na questão de saber se um dado conjunto de postulados utilizados como fundamento de um sistema é internamente consistente. A pergunta sobre a consistência dos axiomas riemanianos fora admitida, bem como a questão sobre como provar que o conjunto de axiomas criado por Riemann não conduziam à teoremas contraditórios.

Por meio de modelos, vislumbrou-se que essa investigação seria possível. No entanto, tão logo iniciadas as tentativas, pode-se discernir que elas apenas deslocavam o problema para outro domínio, pois a prova, por exemplo, da consistência da geometria de Riemann apelava para a consistência da geometria de Euclides. A tentativa de fazê-lo, por meio da geometria de coordenadas cartesianas, que transformava os axiomas de Euclides em

verdades algébricas mostrou-se vulnerável. De acordo com Nagel e Newman (1973, p. 17-30), isso se dá pois da mesma forma que, pelo método de descoberta de um modelo, a prova da consistência não era absoluta, a geometria seria consistente se a álgebra o fosse.

Hilbert (2000) explica que a prova da compatibilidade dos axiomas da geometria pode ser efetuada por meio da construção de um corpo numérico adequado. Por isso, qualquer contradição nas deduções dos axiomas geométricos deveria, posteriormente, ser reconhecível na aritmética deste campo de números. A prova da compatibilidade da geometria dependeria da prova da compatibilidade dos axiomas da aritmética. Tal intento solicitava um método direto de prova, pois seus axiomas são, basicamente, as regras conhecidas do cálculo, juntamente com o *axioma da continuidade*.³¹ Hilbert (2000) afirma estar convencido de “ser possível encontrar uma prova direta para a compatibilidade dos axiomas aritméticos, por meio de um estudo cuidadoso e de modificação adequada dos métodos conhecidos de raciocínios na teoria dos números irracionais” (HILBERT, 2000, p. 414, tradução nossa).³²

A busca pela prova absoluta continuava como problema a ser resolvido pela Matemática e Hilbert novamente propôs a alternativa de fazê-lo “estabelecendo sistemas de consistência sem pressupor a consistência de outros sistemas, isso seguiria os passos de uma completa formalização de um sistema dedutivo.” (NAGEL; NEWMAN, 1973, p. 31).

A respeito da importância da investigação dos fundamentos da Matemática, Hilbert (1950) explica que, nessa ciência, provar a existência de um conceito é sinônimo de provar que, por meio da aplicação de um número finito de processos lógicos, os atributos associados ao conceito não conduzem a uma contradição. Desse modo, a prova da

³¹ O axioma da continuidade de Hilbert (1950) em *The Foundations of Geometry*, é o grupo V dos axiomas hilbertianos e torna possível a introdução da ideia de continuidade na Geometria. Esse grupo, é constituído por dois axiomas: 1) Propriedade Arquimediana: *Seja A_1 um ponto qualquer sobre a linha arbitrária entre os pontos A e B . Tome os pontos A_2, A_3, A_4, \dots , tal que A_1 se encontre entre A e A_2 , A_2 entre A_1 e A_3 , A_3 entre A_2 e A_4 , e assim por diante. Além disso, tome os segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$, de modo que sejam iguais entre si. Então, entre as séries de pontos, sempre existirá um certo ponto A_n tal que B fique entre A e A_n .* Hilbert (1950) assevera que esse é um axioma linear. O segundo axioma deste grupo, pode ser assim expresso: 2) Axioma da Integralidade (ou Axioma da completude): *Em um sistema de pontos, retas e planos, é impossível adicionar outros elementos de tal maneira que o sistema assim generalizado forme uma nova Geometria obedecendo todos os cinco grupos de axiomas. Em outras palavras, os elementos de geometria formam um sistema que não é suscetível a extensões, se considerarmos os cinco grupos de axiomas como válidos.* Hilbert (1950, p. 15-16) afirma que de um ponto de vista teórico, o valor deste axioma é que ele leva indiretamente para limitar a introdução de pontos, e, portanto, torna possível estabelecer uma correspondência um-para-um entre os pontos de um segmento e o sistema de números reais.

³² Do original: “I am convinced that it must be possible to find a direct proof for the compatibility of the arithmetical axioms, by means of a careful study and suitable modification of the known methods of reasoning in the theory of irrational numbers.” (HILBERT, 2000, p. 414).

compatibilidade dos axiomas aritméticos é, ao mesmo tempo, a prova da existência matemática do sistema completo de números naturais.

A resolução positiva do problema 2 de Hilbert forneceria a segurança necessária para a realização completa e satisfatória do programa de Hilbert. Ao mesmo tempo, faz-se importante dizer que as dúvidas expressas sobre a existência do sistema completo de números reais poderiam ser respondidas quando da prova da compatibilidade dos axiomas da aritmética, conforme pode-se ver em Hilbert (2000), quando ele afirma acreditar que a existência de números cardinais e do *continuum* pode ser atestada pela prova da não contradição do sistema de axiomas da aritmética, enfatizando a importância fundamental dessa prova tão almejada.

Da Silva (2003) explica porque o problema da consistência é tão importante,³³ já que ele parece ter sido resolvido: a consistência da teoria axiomática dos números naturais é *evidentemente* uma teoria consistente, por ser a teoria de um domínio dado de números naturais. No entanto, sua consistência evidente está vinculada a uma intuição que pressupõe ter a capacidade de nos oferecer uma teoria verdadeira e, sendo verdadeira, a aritmética dos naturais, *a fortiori*, seria consistente. Contudo, “a aritmética formal, entretanto, não é uma teoria de nenhum domínio pré-dado de objetos; logo, não é em nenhum sentido próprio nem verdadeira, nem falsa. Cabe-lhe apenas descrever uma estrutura formal, cuja realidade está sub *judice*.” (DA SILVA, 2003, p. 29). Em outras palavras, demonstração da compatibilidade dos axiomas aritméticos, significa “demonstrar que a estrutura formal que a teoria descreve é uma estrutura possível, ou seja, é a estrutura de um domínio possível de objetos”. Assim, *ser possível* diz de existir matematicamente, e sabemos que para Hilbert “existir em matemática tem apenas um significado, estar livre de contradições.” (DA SILVA, 2003, p. 29).

A respeito da estrutura a qual a aritmética formal descreve, Da Silva (2003) afirma:

A estrutura das sequências de tipo ω , ou sequências- ω . Uma sequência- ω é um tipo de sequência linear discreta de “pontos”, com primeiro, mas sem último elemento. Os axiomas da aritmética formal (axiomas de Dedekind-Peano) são simplesmente a descrição das propriedades características dessas sequências em uma linguagem formal apropriada. Eles nos dizem, com respeito a qualquer sequência- ω , que “há um primeiro ponto”, “a todo ponto segue-se um outro ponto, o ponto sucessor desse”, “a operação de obtenção de pontos sucessores é injetiva” e “não há pontos que não sejam obtidos do primeiro ponto por uma iteração finita da operação sucessor” (este é o axioma de indução completa). É

³³ Vale a pena lembrar que o problema 2 era uma questão matemática e ao mesmo tempo filosófica dado que sua demonstração era peça chave para o sucesso do Programa de Hilbert.

precisamente a consistência dessa teoria formal que Hilbert pede que se demonstre. (DA SILVA, 2003, p. 30).

Uma possibilidade de prova de consistência da aritmética seria dar uma interpretação para a teoria, ou seja, exibir uma sequência- ω , mas para isso haveria que novamente se apelar à intuição. Resta, então, mostrar a consistência de outro modo.

Um modo direto de se demonstrar a consistência de um sistema axiomático formal é simplesmente mostrar que nenhuma demonstração formal no contexto desse sistema termina numa contradição manifesta [...], ou seja, nenhuma contradição será jamais um teorema do sistema. (DA SILVA, 2003, p. 30).

Focando novamente o problema 2 de Hilbert, Da Silva (2003) explica com detalhes quando afirma que “uma solução do problema posto por Hilbert só pode ser dada no contexto de uma meta-teoria estritamente mais fraca que a própria aritmética formal. Hilbert chamava um tal contexto de *matemática finitária*” (DA SILVA, 2003, p. 31) e afirmava que tal demonstração finitária da consistência da aritmética cumpriria um papel fundacional de caráter matemático e epistemológico, visto que “ofereceria a essas teorias um *fundamento finitário*. Essa fundamentação teria evidentemente uma função epistemológica, uma vez que limitaria à esfera finitária das possibilidades humanas a constatação da realidade de conceitos infinitários.” (DA SILVA, 2003, p. 33).

O TIG atinge a aspiração de Hilbert “ao mostrar que demonstrações de consistência de teorias formais interessantes da matemática exigiriam recursos não finitários.” (DA SILVA, 2003, p. 34-35). Assim, mostrou que a incompletude da matemática formal é irreduzível e, desse modo, a impossibilidade de se formalizar *completamente* toda a Matemática, ou pelo menos as partes mais interessantes dela.

O TIG, ou Teoremas da Incompletude de Gödel, como ficaram conhecidos os teoremas VI e XI expostos na teoria da incompletude apresentada no artigo de Gödel, demonstra (primeiro teorema) “que a aritmética formal, e por extensão a maior parte das teorias matemáticas interessantes, era *incompleta* (e, pior, incompletável).” (DA SILVA, 2007, p. 204) [...]; e (segundo teorema, um corolário do primeiro) “que a demonstração da consistência da aritmética formal era *impossível* por métodos que pudessem ser formalizados na própria aritmética formal.” (DA SILVA, 2007, p. 204 -205). No artigo original de Gödel, encontramos a demonstração do primeiro teorema e um argumento da demonstração para o segundo.

Até esse momento, expusemos a ideia da proposta do Programa de Hilbert, o qual foi abalado pelo teorema da incompletude de Gödel; o *problema 2* de Hilbert que teve

importância capital no processo em que se deu a da prova da incompletude de Gödel, dado que ele foi o ponto que atingiu o programa de Hilbert; e uma breve apresentação do TIG, o qual provocou um revés nos esforços de se provar o problema 2 de Hilbert. Seguimos apresentando sobre o impacto do TIG na Matemática.

Embora o TIG tenha evidenciado a impossibilidade de demonstração da consistência da aritmética na própria aritmética, e isso tenha implicado a derrocada do programa idealizado por Hilbert e em execução naquele momento histórico, Gödel se via como um dos matemáticos da nova geração dispostos a resolver os problemas propostos por Hilbert (2000), conforme afirma GUERRERIO (2012).³⁴

Algumas interpretações do papel de Gödel ao demonstrar este resultado que colocou fim aos planos dos formalistas de fundamentar a Matemática, apoiando-se na aritmética, o entendem como um iconoclasta. Porém, o próprio Gödel expõe que seu empenho era em provar a consistência da análise matemática, pois ele precisava provar alguma coisa maior para obter o posto de *Privatdozent*³⁵ e ter acesso à carreira universitária na Universidade de Viena. Para isso, tomou o caminho de provar que a análise seria consistente se, e somente se, a aritmética o fosse, ao invés de atacar diretamente o problema da não contradição da análise, segundo Wang (1981).

Numa interpretação dramática da atitude de Gödel com o TIG, muito mais próximo daquela figura que prudentemente não acredita na opinião da maioria, aqui entendida como sendo a pertencente à escola de Hilbert, cujo trabalho era dedicado a formalizar toda a Matemática sem contradições, ele busca silenciosamente provas contrárias a essa meta. Mais distante da figura de um iconoclasta, que, supostamente, nesse caso, trata-se daquele que quebra a “imagem” da Matemática, ou que não respeita as tradições e as concepções estabelecidas, ou, ainda, que se oponha a ver a Matemática com admiração, a interpretação do próprio Gödel sobre o TIG é que a Matemática é inesgotável, sendo de se esperar que ela não se deixasse circunscrever.

É importante considerar que o próprio Gödel anunciou que seria possível que houvesse procedimentos finitários que não fossem formalizáveis na aritmética formal. Dois

³⁴ Gianbruno Guerrerio é autor dos textos sobre Gödel na edição da revista *Gênios da Ciência – Matemática*, a qual traz considerações sobre Poincaré, Gödel e Bourbaki. Ele é jornalista científico e autor da monografia *Kurt Gödel, paradossi logici e verità matematica*, publicada na coleção *I grandi della scienza*, suplemento especial da revista *Le Scienze*.

³⁵ *Privatdozent* é um título universitário próprio das universidades de língua alemã na Europa. Um professor *Privatdozent* recebe uma habilitação para poder lecionar, mas não recebe a cátedra de ensino ou de pesquisa. Assim seu pagamento não é por parte do governo e sim pelos alunos que se matriculam e cursam a disciplina que ele oferece. Este título é uma passagem obrigatória antes de obter a cátedra.

anos após o resultado que golpeou o programa de Hilbert, em 1933, num artigo de uma página intitulado *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*,³⁶ Gödel definiu um mapeamento da aritmética clássica formalizada em primeira ordem na aritmética intuicionista, de tal modo que a cada teorema da aritmética clássica correspondesse, como teorema da aritmética intuicionista, a sua tradução, como nos conta Da Silva (2003). Como consequência, ele conclui que se a aritmética intuicionista fosse consistente, então, a aritmética clássica também o seria, pois se uma contradição fosse derivável na aritmética clássica, sua tradução, que também seria uma contradição, seria derivável na aritmética intuicionista, o que é contra a hipótese. Mas, no Intuicionismo acreditava-se ter o direito de não duvidar da consistência da aritmética intuicionista... então, não se teria mais o direito de duvidar da aritmética clássica.

O Formalismo e o Intuicionismo, de Hilbert e de Brouwer, respectivamente, divergiam principalmente na concepção de existência em Matemática. Para Hilbert, existir é estar livre de contradição, porém para Brouwer existir é ser matematicamente verdadeiro, e “Brouwer acreditava que nenhuma demonstração da matemática clássica a fará verdadeira, pois a consistência mostra a possibilidade e não a realidade.” (DA SILVA, 2003, p. 36).

Gödel (1933) ressalta os caminhos para o programa de Hilbert após o surgimento do TIG. Daí o golpe que este teorema representou ao programa de Hilbert pode ser considerado não fatal. E essa foi também a compreensão de Gödel sobre seu resultado. Na apreciação de Da Silva (2003):

Seja como for, o programa de Hilbert certamente foi substancialmente enfraquecido pelos notáveis resultados de Gödel. Entretanto, não morreu, e o próprio Gödel contribuiu para uma versão modificada dele, a saber, estabelecer por meios construtivos apropriados (finitários, predicativos, intuicionistas, etc.) a consistência relativa de teorias formais nas quais partes da matemática clássica possam ser desenvolvidas. (DA SILVA, 2003, p. 35).

Com isso, Gödel mostrou que os métodos finitários de Hilbert não são a única alternativa aos modos clássicos de raciocínio. Ele sugeriu que requerêssemos apenas que os argumentos metamatemáticos fossem de caráter construtivo, permitindo tratar com formas mais gerais de inferência.

O TIG ratifica um limite técnico em relação ao modo de se fazer Matemática e concebemos que, por isso, ele é um resultado cultural que se relaciona diretamente ao modo

³⁶ Tradução nossa: Para aritmética intuicionista e teoria dos números.

como se compreende a Matemática e, por conseguinte, o modo com que a ensinamos. Como compreendemos esse limite? Limite do que pode ser axiomatizado? Não. Limite das teorias que podem ser axiomatizadas? Não. Limite do uso do método axiomático no âmbito de uma teoria? Não. Trata-se de um limite técnico do método, limite evidenciado pelo resultado que atesta a impossibilidade de provar toda questão verdadeira derivada de um conjunto de axiomas de Peano para a aritmética dos naturais, que são a base de uma teoria matemática, seja decidível. Consequentemente, em outras palavras, utilizando o método axiomático e o sistema formal, Gödel mostrou que a teoria em questão é incompleta.

O TIG oferece uma possibilidade de abertura, contrária à ideia de limite, haja vista que outros ramos de pesquisa da Lógica Matemática tais como *Teoria da Prova*³⁷ e *Matemática Reversa*³⁸ podem ser vistas como uma continuação natural do programa de Hilbert em sua formulação original (FEFERMAN³⁹, 2006). A mudança no objetivo do programa de Hilbert, imposta pelo TIG, situou o programa numa esfera de possibilidade e pode-se dizer que hoje, modificado após o TIG, pode ser completado com sucesso.

A respeito do impacto do TIG na Matemática, ancorado em trabalhos do próprio Gödel, Feferman afirma que a impossibilidade da formalização de toda Matemática não oferece resistência ao trabalho do matemático em suas explorações. E explica:

O “fenômeno da inescotabilidade da matemática” decorre do fato de que “a própria formulação dos axiomas [da teoria dos conjuntos sobre os números naturais] até um certo estágio dá origem à seguinte axioma “É verdade que na matemática de hoje os níveis mais altos dessa hierarquia são praticamente nunca utilizados. É seguro dizer que 99,9% da matemática atual está contida nos três primeiros níveis dessa hierarquia”. (FEFERMAN, 2006, p. 439).⁴⁰

Sintetizando a compreensão dos matemáticos sobre o TIG, acreditamos poder expô-la tal como dela fala Bourbaki desde sua primeira obra, em 1935, na qual este grupo assume

³⁷ Esta teoria é vista como sendo estabelecida por Hilbert por meio do seu projeto de formalização, no entanto, outras pessoas anteriores e posteriores a ele, avançaram nos estudos de formalização da Matemática que constituem este ramo. Teoria da prova é um ramo da Lógica Matemática que trata provas como objetos matemáticos. Isso promove a análise delas por técnicas matemáticas e sendo assim é um dos pilares das pesquisas sobre fundamentos da Matemática.

³⁸ Matemática Reversa é um programa de pesquisa em torno da aritmética de segunda ordem cuja pergunta principal é “Que axiomas são realmente necessários para provar teoremas em Matemática?” Trata-se de uma pergunta em voga desde os matemáticos gregos que se perguntavam se o quinto postulado era necessário para a geometria, porém, enquanto programa se iniciou por Harvey Friedman e foi estudado com detalhes por Stephen Simpson e outros.

³⁹ O próprio Solomon Feferman é um estudioso da repercussão do TIG sob o método axiomático, com foco na estrutura da sequência dos indecidíveis. O TIG também abre possibilidades de estudos sobre o método axiomático.

⁴⁰ Pode ser acessado em: <<https://math.stanford.edu/~feferman/impact.pdf>>.

que estavam conscientes do teorema da incompletude e que seguiriam fazendo Matemática como vinha se fazendo há 2500 anos, tendo sempre em vista a possibilidade de uma completa formalização e com rigor perfeito. A busca pelo *indecidível* que inicialmente atormentou os matemáticos, foi substituída pela atitude de seguir fazendo Matemática sabendo da possibilidade do encontro com um *indecidível* e compreendendo-o como um ponto onde se faz necessário uma tomada de decisão por parte do matemático.

CAPÍTULO II:

O TIG

Faz-se necessário ter clareza de que o que se nomeia por teorema de Gödel, dada a extensão da discussão que conduz à prova e a robustez das ideias que a permeiam, poderia ser chamado de *teoria da incompletude de Gödel*.

Demonstração do TIG baseada em Nagel e Newman (1973)

Uma demonstração do TIG, que apresenta uma prova técnica com explicação dos detalhes realizados por Gödel, porém sem a formalidade matemática utilizada por ele, está baseada no texto *A Prova de Gödel* de Nagel e Newman (1973). Com ela, nosso objetivo é ilustrar para os alunos de cursos de Licenciatura em Matemática a demonstração desse teorema, apresentando as ideias que a permeiam e as conclusões que ela estabelece.

O enunciado do TIG:

Aqui, nesta versão da demonstração, o enunciado do *primeiro TIG* está expresso nas seguintes palavras: “*Se a aritmética é consistente então G é não demonstrável*”. Em que G é uma fórmula verdadeira da aritmética. Em outras palavras, ele diz de existir na aritmética formalizada uma fórmula que é verdadeira, mas indecidível.

O *segundo TIG*: “*Se a aritmética é consistente então A não é demonstrável*”. Em que A é uma fórmula aritmética que representa a proposição metamatemática: “A aritmética é consistente”. Em outras palavras, ele afirma que, se a aritmética é consistente, a sua consistência não pode ser provada por nenhum argumento metamatemático que possa ser representado no formalismo da aritmética.

A ideia da demonstração

Gödel inicia a demonstração pela atribuição unívoca, garantida pelos teoremas da teoria dos números,⁴¹ de um número para cada símbolo, para cada expressão, para cada fórmula e para cada sequência finita de fórmulas da aritmética de Peano. Desse modo, ele cria uma linguagem estritamente numérica capaz de descrever e articular resultados

⁴¹ Em particular aqui pelo teorema fundamental da aritmética que afirma que todos os números inteiros positivos podem ser representados de maneira única (a menos da ordem) como um produto de fatores primos.

matemáticos. O sistema de numeração de Gödel institui o que se intitula *os números de Gödel*. Este sistema associa a toda sentença da aritmética elementar um único número, o qual pode depois ser transformado novamente na sentença que o originou e esta pode ser recuperada.

Para desviar do obstáculo de se ter o mesmo número de Gödel, representando mais de uma sentença, pois são diversos números dos diversos símbolos em um único número representando uma fórmula completa, Gödel estabelece o uso de cada número como o expoente dos números primos em sequência. Vale lembrar que nem toda sequência de fórmulas é uma prova. Em particular, por este procedimento, que associa um número a cada prova (e, portanto, a cada teorema que é a última linha de uma prova), tem-se um método para aritmetizar completamente o cálculo formal da aritmética.

Como toda expressão da aritmética é associada com um número de Gödel, para uma proposição metamatemática (meta-aritmética) sobre expressões aritméticas e suas relações, é construída uma proposição sobre os números de Gödel e pelas relações aritméticas estabelecidas entre eles. Consegue-se explorar questões metamatemáticas mediante a investigação das propriedades aritméticas e relações de certos inteiros. Disso se pode afirmar que a metamatemática (da aritmética) fica completamente aritmetizada. Gödel considera as fórmulas “ $(p \vee p) \rightarrow p$ ” e “ $(p \vee p)$ ” e estabelece o enunciado metamatemático de que a fórmula “ $(p \vee p)$ ” é uma parte inicial do axioma “ $(p \vee p) \rightarrow p$ ”, se e somente se, o número (de Gödel) **b** for um fator do número (de Gödel) **a**. Pressupondo que “fator de” é adequadamente definido no sistema aritmético formalizado, a fórmula aritmética que corresponde unicamente ao enunciado metamatemático é: “**b** é um fator de **a**”.

Então, ele generaliza que numa sequência de fórmulas cujo **x** seja o número de Gödel da sequência, e **z** o número de Gödel da última linha da prova, tem-se “**Dem(x, z)**” que significa “a sequência de fórmulas com o número de Gödel **x** é uma prova da fórmula com número de Gödel **z**”. A partir daí, tendo estabelecido a relação **Dem(x, z)**, ele constrói uma fórmula aritmética **G** que representa a proposição metamatemática “**G não é demonstrável**”. Seguindo a mesma pauta, ele mostra que **G** é demonstrável se e somente se $\sim G$ é demonstrável, e no passo seguinte mostra que **G** é uma fórmula verdadeira. Assim, **G** é verdade e é indecidível.

Disso deriva a conclusão de que *o sistema axiomático da aritmética não é completo*.

No último passo da prova, Gödel descreve como construir uma fórmula aritmética **A**, que representa a proposição metamatemática: “**A aritmética é consistente**”, e ele mostrou que $A \rightarrow G$ é um teorema, assim como **A** não é teorema. Assim, a consistência da aritmética

não pode ser estabelecida por um argumento que possa ser representado no cálculo aritmético formal.

Ponto final da discussão: “*Se a aritmética é consistente, então, ela é incompleta*”. Esta implicação é representada por uma fórmula demonstrável dentro da aritmética formalizada. “*A aritmética é consistente*” ($A \rightarrow G$) é equivalente a “*existe pelo menos uma fórmula que é não demonstrável no cálculo formal da aritmética*”.

Demonstração:

Delineamento do sistema formal da aritmética dos naturais

Ao provar o TIG, Gödel inicia delineando um sistema formal que, como todo sistema formal, consiste em: i) um catálogo completo de símbolos, que são o vocabulário que será usado no cálculo; ii) as regras para combinação desses símbolos, regras de formação, que explicitam as combinações dos símbolos que são aceitáveis como fórmulas no sistema; iii) as regras de transformação que descrevem a estrutura precisa das fórmulas a partir das quais outras fórmulas são derivadas na estrutura; iv) os axiomas, sendo um conjunto inicial de fórmulas, as fórmulas primitivas, que servem de fundamento para o sistema todo.

Esse sistema formal delineado por Gödel é uma adaptação do sistema utilizado nos *Principia* e nele podem ser expressas as notações aritméticas e as relações aritméticas dos números naturais. Particularmente, foi a aritmética de Peano, cujos termos indefinidos são três: ‘número’, ‘zero’ e ‘sucessor imediato de’ e cujos axiomas são cinco: i) zero é um número; ii) o sucessor imediato de um número é um número; iii) zero não é sucessor imediato de um número; iv) não há dois números que tenham o mesmo sucessor imediato; e v) (que formula o princípio da indução matemática) qualquer propriedade pertencente a zero e também ao sucessor imediato de cada número que tenha a propriedade pertence, a todos os números.

Os símbolos elementares pertencentes ao vocabulário fundamental do sistema delineado por Gödel são de dois tipos:

Constantes: $\sim, \vee, \rightarrow, \exists, =, 0, s, (,), e,$

Variáveis – três classes:

-Variáveis numéricas: x, y, z – são aquelas que podem ser substituídas por números (variáveis de primeira ordem)

-Variáveis sentenciais: p, q, r – são aquelas que podem ser substituídas por sentenças (fórmulas) [representam conjuntos de números]

-Variáveis de predicados: P , Q , R – são aquelas que podem ser substituídas por predicados (primo, maior que, fator de, etc.)

No artigo original, aparecem como variáveis de primeira ordem (números) de segunda ordem (conjuntos de números) de terceira ordem (conjuntos de conjuntos de números), etc...

A numeração de Gödel

O passo seguinte é a numeração de Gödel, que é um método que associa um único número a cada proposição do sistema delineado. Com essa atribuição, os enunciados aritméticos também se constituem enunciados metamatemáticos. Goldstein (2008) comenta, nessa passagem da prova, uma percepção mostrada a ela por Simon Kochen de uma semelhança entre a prova de Gödel e a obra *Alice no país das maravilhas*, ou seja, “uma sensação de que se adentrou um universo estranho onde as coisas se transformam em outras, inclusive os próprios significados” (GOLDSTEIN, 2008, p. 143). Contudo, em Gödel, tudo ocorre sobre a égide da lógica mais rigorosa. Goldstein ainda comenta que Simon Kochen realmente aprecia essa passagem da prova, em especial, “os intensos saltos de imaginação associados a uma espécie de esforço legalista” (GOLDSTEIN, 2008, p. 144).

A numeração dos símbolos

A numeração segue a seguinte estratégia: associa aos símbolos de constantes⁴² os números de 1 a 10, às variáveis independentes, às fórmulas e às propriedades dos números, os primos maiores que 10, quadrados de primos maiores que 10 e cubos de primos maiores que 10, respectivamente. Como se segue:

⁴² Não confundir com os símbolos de constantes da linguagem da aritmética. No caso, o único que é dos dois tipos é o 0 (zero).

Constantes

Símbolo	número associado
\sim (não)	1
\vee (ou)	2
\rightarrow (se... então)	3
\exists (existe)	4
= (igual)	5
0 (zero)	6
S (sucessor)	7
((pontuação)	8
) (pontuação)	9
, (pontuação)	10

Variáveis numéricas ou independentes

símbolo	x	y	z	...
número associado	11	13	17	

Variáveis sentenciais ou fórmulas

símbolo	p	q	r	...
número associado	11^2	13^2	17^2	

Variáveis de predicados ou propriedades dos números

símbolo	P	Q	R	...
número associado	11^3	13^3	17^3	

Uma vez que todos os símbolos do sistema formalizado têm um número atribuído, estende-se a regra para atribuir números para as combinações de símbolos em fórmulas e fórmulas deduzidas. Tudo do sistema é construído a partir dos símbolos acima expostos. Assim, uma fórmula é uma sequência desses símbolos e uma dedução é uma sequência de fórmulas na qual a conclusão é a última linha da sequência.

A numeração das fórmulas

Se ω é uma fórmula da aritmética, com, digamos, q símbolos, então, tomamos como o número de Gödel de ω o produto dos q primeiros primos, cada um elevado ao número do símbolo correspondente.

Exemplo: Tomemos a seguinte sentença do sistema formalizado delineado por Gödel: "Existe um x que é o sucessor de y ", associemos a ela um número de Gödel:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & (\exists x) & (x = s y) & & & & & & & \\
 & (\exists x) & (x = s y) & & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow \\
 8 & 4 & 11 & 9 & 8 & 11 & 5 & 7 & 13 & 9 \\
 \\
 m = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^{13} \cdot 29^9
 \end{array}$$

Aqui se pode ver o desvio realizado por Gödel do obstáculo de se ter o mesmo número de Gödel, representando mais de uma sentença, quando ele estabelece cada número obtido como expoente dos números primos em sequência.

O número m , embora muito grande, pode ser calculado e representa unicamente a fórmula $(\exists x)(x = sy)$.

Vejamos outro exemplo:

Na fórmula $(\exists x)(x = s0)$ o seu número de Gödel difere do exemplo anterior somente no expoente de 23, que passa a ser 23^6 , denotamos

$$n = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^6 \cdot 29^9$$

O sistema de numeração de Gödel cria os números de Gödel por meio do procedimento *mecânico* de numeração que associa a toda sentença da aritmética elementar um único número, o qual pode depois ser transformado novamente na sentença que o originou e esta pode ser recuperada. Em outras palavras, a ideia de codificação permite movimento de ida e volta, pois a numeração informa passo a passo como proceder nos dois sentidos. É o teorema da fatoração em primos que assegura a existência desse algoritmo utilizado na numeração.

Uma vez que cada fórmula foi dotada de um número, a partir dos números correspondentes de seus constituintes, vejamos como Gödel atribuiu números às sequências de fórmulas, ou seja, às provas.

Numeração de sequência de fórmulas

Começemos considerando o exemplo da numeração desse fragmento:

$(\exists x)(x = sy)$

$(\exists x)(x = s0)$

Se m é o número de Gödel de $(\exists x)(x = sy)$ e n é o número de Gödel de $(\exists x)(x = s0)$

O número de Gödel da sequência é $k = 2^m \cdot 3^n$

Generalizando a partir desse exemplo:

Se temos uma sequência de fórmulas, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ com número de Gödel $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ e designamos por p_m o m -ésimo primo, então o número de Gödel da sequência

φ_1

φ_2

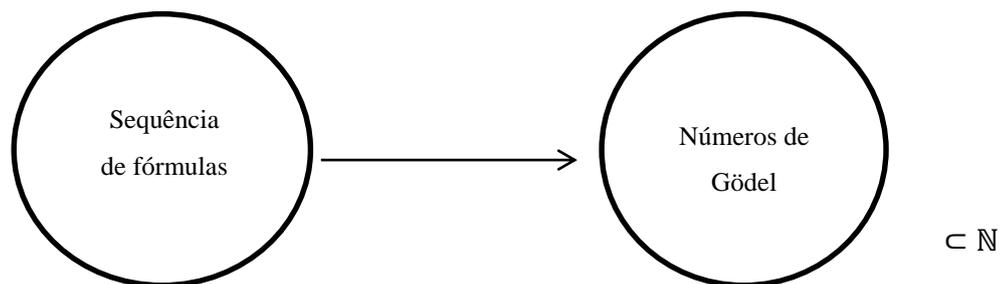
φ_3

\vdots

φ_n

$$\text{é: } 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \dots p_m^{n_m} = \prod_{i=1}^m p_i^{n_i}$$

Vale lembrar que nem toda **sequência** de fórmulas é uma prova. Contudo, em particular, por este procedimento que associa um número a cada prova (e, portanto, a cada teorema que é a última linha de uma prova), se tem um método para aritmetizar completamente o cálculo formal da aritmética. Esse é um esquema ilustrativo do processo de numeração de Gödel que atribui números a todos os símbolos, fórmulas e sequência de fórmulas do sistema formalizado delineado por ele:



Observemos que, dado um número em \mathbb{N} , pode-se saber se ele é ou não um número de Gödel, e se for, de que expressão. Basta para isso decompô-lo em seus fatores primos e verificar se esta decomposição contém todos os primos em sequência de 2 até um certo l que será o número primo de ordem igual ao número de símbolos utilizados na escrita da fórmula matemática.

Exemplos:

O número 243.000.000 é decomposto como $2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^6$ que corresponde à fórmula “ $0 = 0$ ”.

Já o número 100 não é número de Gödel, pois 100 é maior que 10, logo, não é o número de uma constante, já que 100 não é primo, nem quadrado e nem cubo de primo; logo, não corresponde à nenhuma variável e decompondo-o encontramos que ele é potência de 2 e de 5, mas não de 3.

Por sua vez, o número 1500 é um número de Gödel: sua decomposição em fatores primos é: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^3$, e após consulta na tabela de símbolos matemáticos encontramos que o número 1500 corresponde à expressão "ou não implica".

É fundamental observar que todo número que é número de Gödel possui uma expressão correspondente no âmbito da escrita matemática. Contudo, pode ocorrer que a expressão não tenha sentido algum. Cumpre-nos observar que, uma vez que cada símbolo, fórmula ou sequência de fórmulas sejam dotadas de um número correspondente, podemos

analisar *relações estruturais* entre as proposições pelas relações aritméticas entre seus números correspondentes. É isso que se apresenta a seguir.

Aritmetização da metamatemática

Toda expressão da aritmética é associada com um número de Gödel. Deste modo, uma proposição metamatemática (meta-aritmética) sobre expressões aritméticas e suas relações pode ser construída como uma proposição sobre os seus números de Gödel e pelas relações aritméticas entre eles.

Becker (1965) assim se expressa referindo-se a esse passo da prova:

Gödel conseguiu realizar esta proeza pelo seguinte passo genial, a que se deu o nome de “aritmetização da metamatemática”. Parte de que, considerada exteriormente, uma fórmula lógico-matemática é uma sequência finita de sinais para constante, variáveis e números lógicos, e que um argumento matemático total (uma demonstração ou toda uma teoria) é uma sequência finita de sequências finitas de sinais. Gödel numerou todos os sinais (o que se pode fazer de diferentes maneiras⁴³), e conseguiu assim uma correspondência biunívoca entre expressões lógico matemáticas e sequências finitas. E já que é possível ordenar de diferentes modos, sequências finitas de números e fazer corresponder biunivocamente a outras, argumentos inteiros podem ser substituídos por números. (BECKER, 1965, p. 150).

Assim, a metamatemática (da aritmética) fica completamente aritmetizada.

Exemplo:

A expressão $(p \vee p) \rightarrow p$ tem número de Gödel $a = 2^8 \cdot 3^{11^2} \cdot 5^2 \cdot 7^{11^2} \cdot 11^9 \cdot 13^8 \cdot 17^{11^2}$

Por outro lado, $(p \vee p)$ tem número de Gödel $b = 2^8 \cdot 3^{11^2} \cdot 5^2 \cdot 7^{11^2} \cdot 11^9$

A proposição metamatemática “ $(p \vee p)$ ” é um segmento inicial de “ $(p \vee p) \rightarrow p$ ” e é equivalente a b/a , em que a e b são números de Gödel. Os expoentes são iguais, mas ocorre um número menor de primos em b .

Com isso, uma fórmula será dedutível de outra precisamente se os números de Gödel das fórmulas estiverem aritmeticamente relacionados entre si da maneira correta. *Esse ponto é mágico*: olhar para as relações metamatemáticas do sistema formalizado por Gödel se reduz a olhar para as relações aritméticas entre os números de Gödel e vice-versa. Os números de Gödel das fórmulas que são sequência de fórmulas que são provas válidas dentro do sistema terão um certo tipo de propriedade aritmética. A partir disso, Gödel mostra que todos os teoremas do sistema têm certa propriedade aritmética.

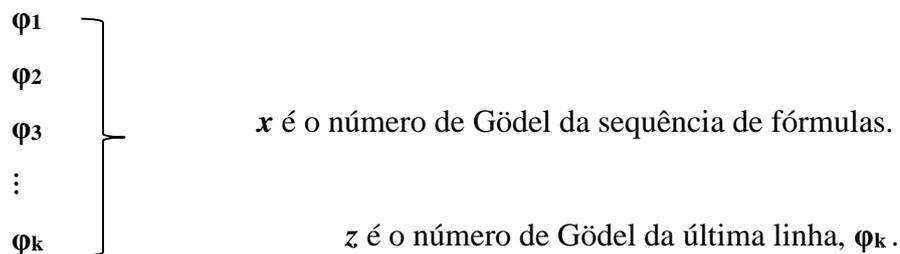
⁴³ Becker (1965) explica que Quine (1950), em *Method of Logic*, apresenta outro método, muito simples e muito elegante de “aritmetização” e distinto do apresentado por Gödel na demonstração da incompletude. (BECKER, 1965, p. 151).

A construção do indecidível

As proposições aritméticas expressáveis no sistema são o foco que também aborda a questão de sua própria dedutibilidade dentro do sistema. O processo de aritmetização de Gödel permite que certas proposições expressem algo aritmético ao mesmo tempo em que expressam se são dedutíveis no sistema.

Prosseguindo. Gödel denota por $Dem(x, z)$ a proposição metamatemática que corresponde à “a sequência de fórmulas com número de Gödel x é uma prova para a proposição com número de Gödel z ”.

Em representação:



Observemos:

Se x é número de Gödel de uma sequência, então a fórmula que tem como número de Gödel o expoente do maior primo é a última forma da sequência. Para o que acabamos de denotar por $Dem(x, z)$, isto não basta, é necessário que a sequência seja uma prova.

$Dem(x, z)$ é uma relação, mas se definirmos $f(x) = z$ se, e somente se, $Dem(x, z)$ então:

- i) f é uma função, já que uma prova x tem uma única última linha, e
- ii) f não é injetora, porque podem existir duas provas x_1 e x_2 do mesmo teorema z .

$Dem(x, z)$ é uma propriedade verdadeira para todos os números de Gödel das proposições dedutíveis do sistema e que possuem uma prova no sistema, e somente delas.

Exemplo: consideramos novamente a fórmula $(\exists x)(x = sy)$ que tem

$$m = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^{13} \cdot 29^9 \text{ como número de Gödel.}$$

E vamos considerar agora a fórmula $(\exists x)(x = sm)$, (o mesmo m), na qual substituímos a variável y de número de Gödel 13 pelo “numeral” de m .

E obtemos: “existe um x que é sucessor de m ”, que é uma fórmula da aritmética.

Definimos:

Numeral é um símbolo gráfico.

Número é o que é designado pelo numeral.

Prosseguindo, o número de Gödel desta última fórmula é r ,

$r = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^7 \dots \cdot p_{m+8}^7 \cdot p_{m+9}^6 \cdot p_{m+10}^9$ na qual, a segunda fórmula tem a forma usual (\mathbf{ax}) ($\mathbf{x} = s \dots s0$), na qual $s \dots s0$ é um numeral.

Assim podemos obter r de m e o processo acima se generaliza de forma a permitir uma expressão do número de Gödel de uma expressão na qual foi feita uma substituição de variável.

Seja a fórmula obtida da fórmula que tem número de Gödel m pela substituição da variável com número de Gödel 13 pelo numeral de m . Vamos designar de $\mathbf{sub}(m, 13, m)$ o seu número de Gödel.

Generalizando:

$\mathbf{sub}(y, 13, y)$ é a fórmula aritmética da caracterização metamatemática “o número de Gödel da fórmula que é obtida da fórmula com número de Gödel y pela substituição da variável com número de Gödel 13 pelo numeral de y ”

Importante: para cada numeral substituído por y em $\mathbf{sub}(y, 13, y)$ obtemos “um número natural bem definido que é um número de Gödel de uma fórmula”.

Observação: Como consequência do princípio geral de substituição em Lógica, se a fórmula com número de Gödel y não contém a variável com número de Gödel 13, então, o resultado da substituição é a própria fórmula.

Exemplo: $(\mathbf{sub}(243.000.000, 13, 243.000.000))$ é o número de Gödel da fórmula obtida pela substituição de y por 243.000.000 em “ $0 = 0$ ” o que obviamente é “ $0 = 0$ ”, assim:

$$\mathbf{sub}(243.000.000, 13, 243.000.000) = 243.000.000.$$

Importante:

Observe que $\mathbf{sub}(y, 13, y)$ é uma função que depende do valor que é substituído em y . É uma fórmula aritmética, mas não é uma fórmula da aritmética como “ $0 = 0$ ”, “ $\mathbf{Dem}(x, z)$ ” ou “ $(\mathbf{ax})(x = sy)$ ”, porque não assume valores V ou F.

Voltemos à fórmula $\mathbf{Dem}(x, z)$, que significa: *o conjunto de fórmulas cujo número de Gödel é x é uma prova da fórmula cujo número de Gödel é z .*

O núcleo do argumento de Gödel

i) Gödel mostrou como construir uma fórmula aritmética G que representa a proposição metamatemática ‘*não sou demonstrável*’.

Nessa oportunidade, vamos usar a notação (x) para a fórmula geralmente denotada $(\forall x)\varphi$. Assim, $(x) \sim Dem(x, z)$ representa a expressão da aritmética “não existe uma prova para a fórmula com número de Gödel z ”

E consideremos a fórmula: $(x) \sim Dem(x, sub(y, 13, y))$ (1)

Que representa o argumento metamatemático:

“a fórmula com número de Gödel $(sub(y, 13, y))$ não é demonstrável.”

Seja n o número de Gödel da fórmula (1) e vamos considerar a fórmula

$(x) \sim Dem(x, sub(n, 13, n))$ (G)

Afirmção: O número de Gödel de (G) é $sub(n, 13, n)$

Demonstração:

$sub(n, 13, n)$ é o número de Gödel da fórmula obtida da fórmula que tem número de Gödel n (ou seja (1)) pela substituição de y por n (ou seja de (G))

(G) é a imagem no cálculo aritmético da proposição metamatemática

“A fórmula com número de Gödel $sub(n, 13, n)$ não é demonstrável”

Como $sub(n, 13, n)$ é o número de Gödel de G, obtemos o que (G) exprime:

“G não é demonstrável”

G exprime sobre si mesma a afirmação “Eu não sou demonstrável”.

ii) *Gödel mostrou que G é demonstrável se e somente se $\sim G$ é demonstrável*

Demonstração: um lado ($\sim G$ é demonstrável \rightarrow G é demonstrável) é muito extenso e vamos então verificar somente o lado G é demonstrável $\rightarrow \sim G$ é demonstrável.

Supomos G demonstrável. Seja a sequência de fórmulas abaixo uma prova para G

φ_1	}	k é o número de Gödel dessa sequência de fórmulas.
φ_2		
φ_3		
\vdots		
φ_k		

G é o número de Gödel da última linha.

Então, ***Dem(k, sub(n, 13, n))*** é um teorema. E então, a generalização [regras da lógica] é obtida: $\sim(x)\sim Dem(x, sub(n, 13, n))$ é um teorema.

Mas se uma fórmula e sua negação são demonstráveis, então, o cálculo aritmético não é consistente. Assim, se a aritmética é consistente, então, não se consegue provar nem G nem $\sim G$, ou seja, não são formalmente deriváveis dos axiomas da Aritmética e temos:

“Se a Aritmética é consistente então G é indecidível”.

iii) Nessa etapa, *Gödel mostra que G é uma fórmula verdadeira.*

Seja a seguinte proposição metamatemática: “Se a Aritmética é consistente então G não é demonstrável” que é representada por G na Aritmética. Como a proposição metamatemática é verdadeira, o seu mapeado aritmético (G) o é. Disso, “ G é verdadeira”.

iv) *Como G é verdade e indecidível, então o sistema axiomático da aritmética não é completo.* Além disso, a aritmética é essencialmente incompleta, ou seja, se aumentarmos os axiomas para provar G então podemos construir uma outra fórmula verdadeira, mas indecidível.

Se G for adicionado como um novo axioma, podemos repetir o procedimento com outra variável e obter uma fórmula do mesmo tipo, portanto, a aritmética é essencialmente incompleta.

v) *Gödel descreveu como construir uma fórmula aritmética A que representa a proposição metamatemática: “A aritmética é consistente”, mostrou que $A \rightarrow G$ é um teorema, assim como A não é teorema.*

Então, a consistência da aritmética não pode ser estabelecida por um argumento que possa ser representado no cálculo aritmético formal.

Ponto final da discussão: “Se a aritmética é consistente então ela é incompleta”

Esta implicação é representada por uma fórmula demonstrável dentro da aritmética formalizada. “A aritmética é consistente” é equivalente a “existe pelo menos uma fórmula que é não demonstrável no cálculo formal”.

Consideremos agora $(A) (\exists y) (x) \sim \text{Dem} (x, y)$, meta-aritmeticamente (A) significa que existe uma fórmula com número de Gödel (y) tal que nenhuma sequência de fórmulas (com número de Gödel (x)) constitui uma prova para a mesma. Assim, no artigo Gödel provou que $A \rightarrow G$ é um teorema. Usando *Modus Ponens* (A) não é demonstrável. Pois, se fosse

A

$A \rightarrow G$

G

E então G seria demonstrável. Mas, G não é demonstrável.

Conclusão: se a aritmética é consistente então A não é demonstrável.

Mas (A) representa a afirmação metamatemática: “A aritmética é consistente”.

Se esta proposição puder ser estabelecida por algum argumento que possa ser mapeado no cálculo aritmético, então, A seria demonstrável e isso é impossível se a aritmética é consistente.

Resultado: Se a aritmética é consistente, a sua consistência não pode ser provada por nenhum argumento metamatemático que possa ser representado no formalismo da aritmética.

Uma eventual prova da consistência da aritmética não pode ser mapeada por uma dedução formal da aritmética. Grande parte da Matemática se apoia sobre a aritmética elementar. Por isso, o resultado deste teorema se desdobra para todas as demais teorias que se apoiam nela.

Discutindo e compreendendo a mensagem do TIG

O indecidível, uma sentença matematicamente verdadeira, no sentido técnico de verdade matemática, foi construído por Gödel no âmbito da aritmética formalizada, utilizando os axiomas de Peano em sua axiomatização. A demonstração de sua existência mostra que a questão da indecidibilidade de sentenças da aritmética de Peano ou qualquer uma das suas extensões consistentes é não-vazia. Com essa demonstração, Gödel estabeleceu a diferença entre demonstrabilidade matemática e verdade matemática, ao mostrar que na aritmética existem sentenças verdadeiras que não podem ser provadas como verdadeiras ou falsas nessa teoria.

A noção de *incompletude* é explicada por Nagel e Newman (1973) a partir de explicitação do que é a noção de completude do cálculo de predicados de primeira ordem. Estes autores afirmam que “os axiomas de um sistema dedutivo são “completos” se cada enunciado, que pode ser expresso no sistema, é formalmente deduzível dos axiomas. Por outro lado, se nem todo enunciado verdadeiro expressável no sistema for dedutível, os axiomas são incompletos.” (NAGEL; NEWMAN, 1973, p. 83). Na demonstração do TIG, Gödel estabelece que G^{44} é uma fórmula verdadeira da aritmética, não formalmente

⁴⁴ Vale a pena lembrar que Gödel construiu a fórmula G que diz de si mesma que não é demonstrável. Ela é a imagem especular *dentro* do cálculo aritmético do enunciado metamatemático: “A fórmula com o número de Gödel *sub* (n , 13, n) é não demonstrável”. (NAGEL, NEWMAN, 1973, p. 80).

dedutível nela. Assim sendo, na hipótese de que os axiomas da aritmética sejam consistentes, segue-se que os axiomas da aritmética são incompletos.

A noção de incompletável segue do fato de que se G , o *indecidível*, fosse acrescentado à base da aritmética como um axioma ulterior. O novo conjunto de axiomas aumentado ainda seria insuficiente para produzir formalmente todas as verdades aritméticas, pois outra fórmula aritmética verdadeira, mas indecidível, poderia ser construída no novo sistema ampliado. A construção dessa nova possível fórmula se daria pela repetição no novo sistema do processo efetuado para obter G . Disso se nota que, mesmo que o sistema seja frequentemente ampliado, a incompletude se mantém. Logo, o indecidível obriga-nos a reconhecer uma limitação fundamental no poder do método axiomático: “não é possível um conjunto de axiomas aritméticos produzir por meio das regras da lógica e da linguagem formal todo enunciado aritmético verdadeiro, ou seja, o vasto continente da verdade aritmética não pode ser levado a uma ordem sistemática”. (NAGEL; NEWMAN, 1973, p. 56).

Changeux e Connes (1996) explicitam suas compreensões a respeito do significado de indecidibilidade no interior de um dado sistema de axiomas, bem como a maneira como entendem o TIG:

AC⁴⁵: Um enunciado é indecidível se pudermos adicionar seja sua veracidade, seja sua falsidade, sem contradizer os axiomas com os quais trabalhamos cotidianamente, além de uma contradição possível da teoria dos conjuntos.

JPC⁴⁶: Os axiomas internos ao sistema não bastam, portanto, para a decisão.

AC: Sim. Podemos agora enunciar o teorema da incompletude de Gödel. Ele afirma que quaisquer que sejam os axiomas, em número finito ou dados de maneira recorrente, existem sempre questões às quais não podemos responder, que permanecem indecidíveis, e para as quais nos faltarão informações. Em outros termos, o teorema de Gödel especifica que é impossível tomar um número finito de axiomas de tal modo que toda questão seja decidível. O que significa que não podemos analisar uma questão a partir do que sabemos, mas que o número de questões interessantes e novas que precisarão ser adicionadas à resposta é infinito. Eis como se deve compreender o teorema de Gödel. Seria um erro, acredito, deduzir disto que o poder da máquina humana é limitado. O teorema afirma que, com um número finito de axiomas, não podemos ter resposta para tudo. Porém, se uma questão não é decidível, sob condição de tê-la demonstrado, podemos atribuir-lhe uma resposta e continuar a raciocinar. Isto significa que cada nova questão indecidível propicia uma bifurcação, a partir do momento em que escolhemos uma resposta positiva ou negativa. O mundo no qual nos movemos comporta diversas

⁴⁵ Refere-se ao que é pronunciado por Alain Connes.

⁴⁶ Refere ao que é pronunciado por Jean-Pierre Changeux no diálogo aqui citado diretamente.

bifurcações possíveis. Este é todo seu significado. Uma vez atribuída uma resposta à questão, podemos continuar e nos colocar novas questões. Antigas questões que não o eram tornam-se decidíveis... Cada questão indecidível cria uma bifurcação e impõe uma escolha. [...] Mas, considero que não é pertinente utilizar o teorema da incompletude para limitar nosso mecanismo de compreensão. Deve-se compreender simplesmente que haverá escolhas a fazer e que não podemos utilizar um procedimento recorrente para efetuá-las de uma vez por todas. Eis o que significa esse teorema.

JPC: A resposta é uma alternativa. Esse teorema incide mais sobre o processo de conhecimento do que sobre uma impossibilidade lógica ou epistemológica. [...]

AC: Este teorema define uma espécie de horizonte de compreensão determinado pelo número finito de escolhas já efetuadas. Quanto maior o número mais distante o horizonte. Não se deve ter uma visão estática segundo a qual deveria existir, de uma vez por todas, um número finito de axiomas fornecendo respostas para tudo. A nossa compreensão, pelo contrário, é dinâmica. Cada vez que ela aumenta podemos fornecer respostas a um número cada vez maior de questões, podemos escolher a cada nova bifurcação, de modo que nosso horizonte se amplie. É ilusório, evidentemente, pensar que um dia teremos compreendido tudo. É o problema da ciência em geral. Mas não devemos nos deixar limitar e desencorajar pelo enunciado desse teorema [...] ele mostra que não podemos reduzir a Matemática a uma linguagem formal [...] as proposições verdadeiras que incidam sobre os números inteiros positivos não podem ser reduzidas, via inferência lógica, a um número finito de axiomas. Logo, a quantidade de informações contida no conjunto de todas essas proposições é infinita. (CHANGEUX; CONNES, 1996, p. 174-176).

David Ruelle, (RUELLE, 1991) entende que, desde Euclides, o modo de fazer Matemática é com regras de inferência bem definidas e um número finito de afirmações completamente explícitas (axiomas). E, assim, aos poucos, surgia, progressivamente, a formalização. Depois que a aritmética foi formalizada, o sonho era a esperança de que sobre cada afirmação significativa a respeito dos números naturais se pudesse decidir se era verdadeira ou falsa.

Ante isso, Gödel destrói significativamente essa esperança quando demonstrou que, uma vez fixadas as regras de inferência e qualquer número finito de axiomas, há afirmações significativas que não podem ser provadas e nem refutadas. Precisamente falando, sendo os axiomas aceitos para os inteiros positivos não contraditórios e, ao aplicar as regras de inferência, haverá uma afirmação que é ao mesmo tempo verdadeira e falsa. Então, há uma propriedade dos números inteiros positivos que não pode ser derivada a partir dos axiomas. E se aceitar esta propriedade como um novo axioma, outra propriedade improvável restará. Por essa razão, seguindo os trilhos postulados por Ruelle (1991), na dimensão filosófica, pode-se afirmar que:

O teorema da incompletude de Gödel tem desempenhado um papel fundamental na nossa compreensão dos fundamentos da Matemática. No início foi um grande choque. Em seguida, ele levou a uma mudança progressiva no sistema de crenças de matemáticos. Simultaneamente, a prova difícil do teorema foi simplificada. Esta simplificação veio com a introdução de novos conceitos, em parte por Gödel, em parte por outros (a máquina de Turing é um exemplo relevante). No total, a descoberta do teorema da incompletude levou a uma mudança progressiva da paisagem da matemática. E o resultado é que o teorema aparece agora como bastante natural, e de fato um tanto trivial. (RUELLE, 1991, p. 145).

O TIG implica não o fim do projeto hilbertiano, mas as limitações internas a que estão sujeitos os sistemas formais da Matemática. Ou seja, mostra que o sistema pode operar, porém com limitações internas, o que leva ao entendimento de que não são simultaneamente completos e consistentes.

Por outro lado, a prova do TIG não exclui a possibilidade de que a prova da consistência da aritmética seja realizada em outro domínio que não seja o da aritmética formalizada que inclui os axiomas de Peano. Nagel e Newman (1973) e Hofstadter (2000) alertam sobre más interpretações desse resultado, as quais excluem a possibilidade da prova da consistência da aritmética. Gödel (1933) sinalizou que provas metamatemáticas da consistência da aritmética têm sido construídas, de maneira especial, por exemplo, a prova de Gerhard Gentzen de 1936. Contudo, essas provas não podem ser representadas na aritmética e também elas não são finitas e, por isso, não satisfazem as condições necessárias aos objetivos propostos pelo problema original de Hilbert.

Acompanhando a demonstração do TIG, fica claro o jogo que se joga: partir da construção de um sistema axiomático aritmético consistente e avançar em direção a um desejável sistema consistente e completo. Entretanto, à medida que o sistema “vai se completando”, ele próprio se depara com o indecidível que evidencia sua incompletude. Onde o sistema não poder ser completo, nunca.

Essa compreensão nos mostra que o teorema de Gödel não abalou o edifício do conhecimento matemático, mas a crença em uma ciência passível de auto-fundar-se.

Em termos de ideologia da certeza matemática imperante entre os matemáticos que se debruçaram sobre a questão dos fundamentos e que se expande para o ideário comum, esse resultado é de grande importância para a formação do profissional que trabalha com essa ciência, produzindo-a ou ensinando-a ou ambos.

Demonstração do TIG na versão de Shoenfield (1967)

A seguir, expomos uma demonstração do TIG na versão de Shoenfield (1967) trazida aqui por ser um modo de tocarmos uma demonstração formal do fenômeno da incompletude, depois de já tê-lo visto numa versão que ilustra a prova original de Gödel de 1931. Consideramos que este autor traz uma demonstração que se desvia de uma dificuldade⁴⁷ da prova original de Gödel e, além disso, utiliza em sua demonstração ideias de uma cultura matemática mais atual.

Enunciado do TIG

O teorema da incompletude de Gödel-Rosser é assim expresso: “Se T é uma extensão axiomatizada de \mathcal{N} , então T é não completa”. Dizer que T é uma extensão consistente de \mathcal{N} é dizer que a linguagem de T estende a linguagem de \mathcal{N} e todo teorema de \mathcal{N} é teorema de T . Dizer que T é não completa significa que há em T uma sentença verdadeira que não é derivável a partir de T . É este o enunciado do teorema, a seguir, que será provado.

Um introito para trazer a ideia geral do TIG

O ponto central do TIG de 1931, que será aqui apresentado na versão de Shoenfield (1967), é a construção formal de uma função, a função β , que permite apresentar uma fórmula verdadeira da aritmética de Peano que é indecidível nessa teoria.

Demonstração

Designamos por \mathcal{N} uma teoria que formaliza um sistema de axiomas clássico para os números naturais, composta por símbolos não-lógicos e axiomas não-lógicos da linguagem $L(\mathcal{N})$:

Os axiomas de Peano são um conjunto de axiomas para os números naturais.

Os símbolos não lógicos da linguagem $L(\mathcal{N})$, são:

0 - uma constante, denominada de *zero*.

S - um símbolo de função unária, denominado de *sucessor*.

$+$ - um símbolo de função binária, denominado de *adição*.

\cdot - um símbolo de função binária, denominado de *multiplicação*.

⁴⁷ Rosser (1936) apresenta uma versão do TIG na qual mostra que a condição de ω -consistência da teoria T não é necessária, assim, desvia-se de uma dificuldade presente na prova original de Gödel.

$<$ - um símbolo de predicado binário, denominado de *menor que*.

Os axiomas não-lógicos de $L(\mathcal{N})$:

$$N1. Sx \neq 0$$

$$N2. Sx = Sy \rightarrow x = y$$

$$N3. x + 0 = x$$

$$N4. x + Sy = S(x + y)$$

$$N5. x \cdot 0 = 0$$

$$N6. x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$$

$$N7. \sim (x < 0)$$

$$N8. x < Sy \leftrightarrow x < y \vee x = y$$

$$N9. x < y \vee x = y \vee y < x$$

A noção de método de decisão medeia certas relações entre as noções de teorias decidíveis e teorias completas.

Seja T uma teoria e A uma fórmula de T .

Perguntamos: A ou $\sim A$ é obtida dos axiomas de T pela aplicação das regras de inferência de T ? Refletindo, definimos: uma fórmula A é decidível em uma teoria T se A ou $\sim A$ são teoremas de T .

Ainda, em relação à mesma teoria T , questionamos: todas as fórmulas fechadas de T são decidíveis em T ? Uma teoria T é completa, se toda fórmula fechada A de T é decidível em T . Porém, ser decidível envolve a questão de existir um método.

Não necessitamos, neste momento, de uma definição exata do que seja um *método*, seguimos satisfeitos com a noção de método de decisão e definimos que uma teoria de primeira ordem T é decidível se existe um método de decisão para determinar se dada uma fórmula qualquer A de T , se ela é ou não um teorema de T .

Problema de caracterização

O objeto primário de um sistema formal é providenciar uma estrutura para provar teoremas. Seja \mathcal{F} um sistema formal e A uma fórmula de \mathcal{F} , o **problema de caracterização** para \mathcal{F} diz de *determinar condições necessárias e suficientes para provar que A é um teorema de \mathcal{F}* .

Vamos discutir o problema da caracterização para teorias. Seja T uma teoria, e A uma fórmula de T . A é um teorema se tem uma prova. A busca por uma solução para o problema

de caracterização que funcione para todas as teorias modifica-se um pouco, pois A ser ou não ser um teorema de T depende fortemente do que são os axiomas não-lógicos de T .

Refletindo um pouco, notamos que uma solução para este problema é: A é teorema se, e somente se, A tem uma prova. No entanto esta solução é insatisfatória porque a condição de A ser um teorema depende sobretudo das fórmulas que poderiam aparecer em uma prova de A . Em uma solução satisfatória para este problema, a condição deveria depender somente de A e das fórmulas fechadas relacionadas a A .

Uma vez que a solução não resolve o problema, vamos cercá-lo focando agora em calculabilidade.

Calculabilidade

Diz de existir um método de decisão para um sistema formal \mathcal{F} . Um método pelo qual, uma dada fórmula de \mathcal{F} , que pode decidir num número finito de passos se ela é ou não um teorema de \mathcal{F} . O problema de decisão de \mathcal{F} é o seguinte: encontrar um método de decisão para \mathcal{F} ou provar que tal método não existe.

Uma solução do problema de decisão para \mathcal{F} fornece uma solução para o problema de caracterização. A recíproca pode não valer, pois, a diferença entre problema de caracterização e calculabilidade é ter um número finito de passos. Se existir um método de decisão, então o problema da caracterização tem solução. Contudo, a solução do problema de caracterização não garante a calculabilidade.

Uma forma mais geral para o método de decisão para um sistema formal \mathcal{F} é:

Dado um sistema formal \mathcal{F} , seja E o conjunto de fórmulas de \mathcal{F} e A o conjunto de teoremas de \mathcal{F} .

Se $A \subseteq E$, então um método de decisão para A em E é um método que, em um número finito de passos, decide se $a \in A$ ou $a \notin A$, quando é dado um elemento $a \in E$.

O problema da decisão para A em E é o seguinte: determinar um método de decisão para A em E ou mostrar que não existe nenhum.

Diversos problemas de decisão ocorrem em Matemática. Por exemplo, o *décimo problema de Hilbert*, que questiona por um método que decida se uma equação diofantina tem solução; e o *problema da palavra para grupos*, ambos ainda não solucionados.

No presente contexto, para ter sentido o conceito de método de decisão para A em E , supomos que todo elemento de E pode ser obtido em um único passo. Os elementos de E

devem ser “concretos”. Por exemplo, os elementos de E não poderiam ser apresentados como soluções de equações que não se saiba se têm solução ou não.

O problema de decisão pode ser similarmente formulado para funções.

Seja $F: A \rightarrow B$

Um método de decisão para F é um método pelo qual dado $a \in A$ podemos calcular $F(a)$ em um número finito de passos. Só faz sentido quando os elementos já estão determinados, ou que não sejam um problema, quando são todos “concretos”.

O problema de decisão de F é determinar um método de decisão para F ou provar que tal método não existe.

O problema de decisão para funções é uma generalização do método para conjuntos.

Se $A \subseteq E$, definimos $F: E \rightarrow \mathbb{N}$ pondo
$$\begin{cases} F(a) = 0, & \text{se } a \in A \\ F(a) = 1, & \text{se } a \notin A \end{cases}$$

Assim, existir um método de decisão para uma função F implica a existência de um **método de decisão** para o conjunto de teoremas A e vice-versa.

Método?

Sobre qualquer método de decisão algumas características podem ser afirmadas:

i) um método sempre equivale a determinar se elementos de um dado conjunto C possuem ou não uma propriedade P .

ii) o método de decisão deve ser aplicado a todos os elementos do dado conjunto C ; uma vez que ele não decida se *um elemento* c de C possui ou não a propriedade P , ele não é um método de decisão para C .

iii) um método de decisão tem a propriedade de ser mecânico, isto significa que pode ser executado por uma “máquina abstrata e ideal”, que sempre vai reproduzir o mesmo procedimento, mecanicamente, sem julgamento e de modo que não envolve nenhuma escolha mística ou afetiva.

Uma máquina para computar F tem um dispositivo de *entrada*, no qual se pode colocar o argumento a e então ela computa $F(a)$ na saída. Necessariamente, produz um conjunto S não-vazio de elementos de *saída* e, eventualmente, o conjunto E de elementos de entrada pode ser vazio. Supomos que essa máquina independe do a colocado na sua entrada.

Ainda não temos uma noção exata de método, mas o que temos, por enquanto, basta para tratarmos de números naturais.

O que é ser calculável?

Sendo direto: uma função ou predicado é calculável se tiver um método que permita resolver, ou seja, se existe um algoritmo que determine os valores da função.

Em alguns casos, é possível dizer com precisão o que é ser calculável sem uma definição formal de método.

A seguir introduziremos uma classe de funções de números naturais para números naturais. Ao longo da discussão, estudaremos essa classe de funções e daremos argumentos para demonstrar que ela é uma classe de funções calculáveis. O objetivo é obter uma versão precisa do problema de decisão para teorias e um método para dar uma solução para esse problema.

Funções recursivas

A seguir apresentaremos algumas funções recursivas e resultados relativos a elas. Adotaremos algumas convenções que contribuirão para encurtar consideravelmente a declaração dos nossos resultados. Neste capítulo, salvo indicação em contrário, “número” é elemento de \mathbb{N} ; “conjunto” é subconjunto de \mathbb{N} ; “função” é $F: A \subset \mathbb{N} \rightarrow B \subset \mathbb{N}$; e “predicado” é predicado na linguagem de \mathcal{N} .

Notação convencional:

Utilizaremos letras latinas minúsculas em itálico a e b (também com sub-índices a_1, a_2, a_3 , etc.) para denotar números naturais; letras latinas maiúsculas para denotar funções e predicados (F, G e H para denotar funções e P, Q e R para denotar predicados). Utilizaremos a letra \vec{a} para denotar seqüências finitas, assim, escrevemos $F(\vec{a})$, ao invés de $F(a_1, \dots, a_n)$ para funções n -árias e $P(\vec{a})$, ao invés de $P(a_1, \dots, a_n)$ para predicados n -ários.

Se \vec{a} aparece como um argumento de uma função ou predicado, assumimos que a seqüência abreviada tem o número correto de letras, assim, se F é n -ária e escrevemos $F(\vec{a})$, então assumimos que \vec{a} é uma seqüência de n letras. Por fim, se \vec{a} denota a_1, \dots, a_n , então $\exists \vec{a}$ denota $\exists a_1, \dots, \exists a_n$ e $\forall \vec{a}$ denota $\forall a_1, \dots, \forall a_n$.

Usaremos os símbolos de \mathcal{N} em nossas discussões no sentido habitual e variáveis livres ou ligadas têm o significado usual.

Definição 1: Seja P um predicado n -ário. A função n -ária, K_P , chamada *função representante de P* , é tal que:

$$K_P(a) = \begin{cases} 0, & \text{se } P(a) \\ 1, & \text{se } \sim P(a) \end{cases}$$

Definição 2: Um predicado P é calculável se, e somente se, a sua função representação, K_P , é calculável.

As funções **1), 2), 3), 4), 5)** e **6)** abaixo são exemplos de funções calculáveis:

1) Definição 3: Para cada i , $1 \leq i \leq n$, chama-se *função projeção a função tal que*
 $I_i^n(a_1, \dots, a_n) = a_i$

2) As funções binárias $+$ e \cdot

3) O predicado binário $<$ é calculável, logo $K_<$ é calculável

$$\text{Em particular: } K_<(a_1, a_2) = \begin{cases} 0, & \text{se } a_1 < a_2 \\ 1, & \text{se } a_1 \geq a_2 \end{cases}$$

4) Se $F(\vec{a}) = G(H_1(\vec{a}), \dots, H_k(\vec{a}))$ onde G, H_1, \dots, H_k são funções calculáveis, então F é calculável.

Exemplo:

Nesse caso, $F(\vec{a})$ pode ser calculado primeiramente calculando os valores de b_1, \dots, b_k de $H_1(a), \dots, H_k(a)$, e depois calculamos $G(b_1, \dots, b_k)$.

Tomemos como exemplo,

$$(\vec{a}) = (a_1, \dots, a_n) = (a_1, a_2, a_3)$$

$$(\vec{b}) = (b_1, b_2)$$

$$G(b_1, b_2) = b_2 - b_1$$

$$H_1(a_1, a_2, a_3) = a_1$$

$$H_2(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2$$

Então, $F(\vec{a}) = G(H_1(\vec{a}), \dots, H_k(\vec{a}))$ em geral $k \neq n$

$$\begin{aligned} F(\vec{a}) &= F(a_1, a_2, a_3) = G(H_1(a_1, a_2, a_3), H_2(a_1, a_2, a_3)) = \\ &= H_2(a_1, a_2, a_3) - H_1(a_1, a_2, a_3) \\ &= (a_1 + a_2) - a_1 \\ &= a_2 \\ F(\vec{a}) &= I_2^3(\vec{a}) \end{aligned}$$

5) Seja $\dots x \dots$ uma sentença que é verdade para algum x , então $\mu(x)$ ($\dots x \dots$) denota o menor x para o qual $\dots x \dots$ é verdade.

Por exemplo, o valor de $\mu(x)$ ($x = a$) é a . Como mostra este exemplo, o valor de $\mu(x)$ ($\dots x \dots$) não depende do valor de x , ou seja, as ocorrências de x em $\mu(x)$ ($\dots x \dots$) são ligadas. Chamamos μx um μ -operador.

$$(\text{Se } (\dots x \dots) \text{ é } (x^2 > 8) \text{ daí, } \mu(x) (x^2 > 8) = 3)$$

μ é chamado operador μ

6) se G é uma função calculável e tal que para cada \vec{a} , existe um x tal que $G(\vec{a}, x)=0$ então, $F(\vec{a}) = \mu(x)(G(\vec{a}, x)=0)$ onde G é uma função calculável de tal modo que para cada um, existe um x tal que $G(\vec{a}, x) = 0$. (Esta última condição é necessária para assegurar que $F(\vec{a})$ é definida para todo \vec{a} .) Então, F é calculável.

Podemos calcular $F(\vec{a})$ através de sucessivos cálculos $G(\vec{a}, 0), G(\vec{a}, 1), \dots$ até que se obtenha um valor 0.

Vamos agora definir as funções recursivas por uma definição indutiva generalizada que consiste em três regras **R1**, **R2** e **R3**.

Definição 4: dizemos que uma *função é recursiva* se ela for obtida indutivamente pelas regras **R1** até **R3**:

R1: As funções I_i^n , $+$, \cdot , e $K_<$ são recursivas.

(a função projeção, a função adição, a função multiplicação, e a função representativa do predicado binário $<$ são recursivas)

R2: Se G, H_1, \dots, H_k são recursivas, e F é definido por $F(\vec{a}) = G(H_1(\vec{a}), \dots, H_k(\vec{a}))$, então F é recursiva.

(diz que a função composta por funções recursivas é uma função recursiva)

R3: Se G é recursiva e $\forall \vec{a} \exists x (G(\vec{a}, x)=0)$, e F é definida por $F(\vec{a}) = \mu x(G(\vec{a}, x)=0)$, então F é recursiva.

(afirma que uma função definida pelo operador μ é recursiva)

Observação metodológica:

Se queremos mostrar que uma função recursiva satisfaz uma propriedade P , temos que mostrar que **R1**, **R2** e **R3** permanecem válidos se substituirmos função recursiva por *função que satisfaz a propriedade P* .

Tal prova é chamada de prova por indução em funções recursivas. Usando a discussão acima, podemos provar por indução em funções recursivas que cada função recursiva é calculável. O inverso é de algum modo evidente. Voltaremos a isso mais a frente.

Definição 5: Um *predicado é recursivo* se a sua função de representação é recursiva.

Observação: **Todo predicado recursivo é calculável.**

Definições Explícitas:

Os resultados apresentados nesta seção permitem expandir a coleção de símbolos que podem ser usadas nas definições explícitas. Vamos continuar a lista **R1** até **R3** com novas regras para obtenção de funções e predicados recursivos.

Teorema R4⁴⁸: Se Q, H_1, \dots, H_k são recursivos, e P é definido por $P(\vec{a}) \leftrightarrow Q(H_1(\vec{a}), \dots, H_k(\vec{a}))$, então P é recursivo.

Demonstração:

Pela definição de predicado recursivo nós temos $K_P(\vec{a}) = K_Q(H_1(\vec{a}), \dots, H_k(\vec{a}))$, a função representação de P . Por **R2**, $K_P(\vec{a})$ é recursiva, logo, P é recursivo. ■

Teorema R5: Se P é recursivo e $\forall \vec{a} \exists x P(\vec{a}, x)$, e F é definida por $F(\vec{a}) = \mu x P(\vec{a}, x)$, então F é recursiva.

Demonstração:

Como $F(\vec{a}) = \mu x (K_P(\vec{a}, x) = 0)$, por **R3**, F é recursiva. ■

(Esta propriedade diz que se P é um predicado recursivo, então, $F(\vec{a}) = \mu x P(\vec{a}, x)$, que é uma função que associa a cada \vec{a} um número natural, que é o mínimo do conjunto não vazio associado à sequência finita \vec{a} , é recursiva.)

Anteriormente encontramos definições da forma $F(\vec{a}) = \dots$ e $P(\vec{a}) \leftrightarrow \underline{\quad}$, onde \dots e $\underline{\quad}$ contêm somente símbolos definidos anteriormente. Essas são as definições explícitas. Usando **R1** até **R5**, vamos verificar que funções e predicados definidos por certas definições explícitas são recursivos.

Exemplo de função recursiva:

Vamos mostrar que F , dada por $F(a, b, c) = G(H(b, c), K(G(b, c, c, a), c))$, onde G, H , e K são funções recursivas e previamente definidas, são recursivas, pois, partes cada vez maiores de lado direito são funções recursivas de a, b e c .

Para este efeito, construímos a sequência:

$$F_1(a, b, c) = a = I_1^3$$

$$F_2(a, b, c) = b = I_2^3$$

$$F_3(a, b, c) = c = I_3^3$$

$$F_4(a, b, c) = H(b, c)$$

$$F_5(a, b, c) = G(b, c, c)$$

$$F_6(a, b, c) = K(G(b, c, c, a)).$$

⁴⁸ **R1, R2** e **R3** são itens da definição, e, o texto denota por **R4, R5, ... , R14** como sendo propriedades que são consequências de **R1, R2** e **R3**.

Então: F_1 é I_1^3 e, portanto, é recursiva por **R1**. Da mesma forma, F_2 e F_3 são recursivas. Agora, $F_4(a, b, c) = H(F_2(a, b, c), F_3(a, b, c))$; assim F_4 é recursiva por **R2**. Da mesma forma, $F_5(a, b, c) = G(F_2(a, b, c), F_3(a, b, c), F_3(a, b, c))$ é recursiva por **R2**. Por sua vez, $F_6(a, b, c) = K(F_5(a, b, c), F_1(a, b, c))$, é recursiva por **R2**.

Finalmente, $F(a, b, c) = G(F_4(a, b, c), F_6(a, b, c), F_3(a, b, c))$ disso, são todas recursivas, F é recursiva por **R2** que afirma que uma função composta por funções recursivas é recursiva.

Observe-se:

A função F foi desmontada em todos os componentes dela e cada um desses componentes foi observado e verificou-se que são todos recursivos. A recursividade está associada com a possibilidade de calcular. Assim, como cada parte dela é recursiva, ela que é composta por funções recursivas, também o é.

Isso nos ensina que podemos obter funções recursivas a partir das definições de **R1**, **R2**, **R3**, **R4** e **R5** que já foram estabelecidas. Cada **R** fornece um passo na obtenção de funções recursivas.

Exemplo de predicado recursivo:

Semelhantemente, podemos obter predicados recursivos.

Seja P o predicado definido por $P(a, b) \leftrightarrow Q(b, \mu x R(x, F(b, a)))$.

Observemos que ocorrências ligadas de x ocorrem do lado direito, onde Q , R , e F são recursivas e são tais que $\mu x R(x, F(b, a))$ é definida para todo a e b .

Vamos à lista:

$$F_1(a, b, x) = F(b, a) = F(I_2^3(a, b, x), I_1^3(a, b, x))$$

$$P_1(a, b, x) \leftrightarrow R(x, F(b, a)) \leftrightarrow R(I_3^3(a, b, x), F_1(a, b, x))$$

$$F_2(b, a) = \mu x R(x, F(a, b)) = \mu x P_1(a, b, x),$$

$$P(a, b) \leftrightarrow Q(I_2^2(a, b), F_2(a, b))$$

Como P é definido por meio de predicados e funções recursivas, portanto, P é recursivo por **R2**.

Usamos **R1** a **R5** e mostramos que a função F e o predicado P dos exemplos acima são recursivos.

Resumindo: Se uma função ou um predicado tem uma definição explícita usando somente variáveis, símbolos para funções e predicados recursivos, e μ -operador, então a função ou o predicado é recursivo. (Entende-se que μ -operadores devem estar definidos para todos os valores das variáveis para que possam ser utilizados).

Continuamos nossos resultados que nos permitirão expandir a classe de símbolos que podem ser usados nas definições explícitas.

Teorema R6: Toda função constante é recursiva.

Demonstração:

Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $F_k(\vec{a} = k)$, a função n -ária com valor constante k , para todo \vec{a}

Mostraremos por indução em k que F_k é recursiva.

Para $k = 0$ temos a definição explícita $F_0(\vec{a}) = \mu x (I_{n+1}^{n+1}(\vec{a}, x) = 0)$.

Supomos que $k = r$ é recursiva.

Mostramos que vale para $k = r + 1$.

Para $k = r + 1$, nós construímos a definição explícita:

$$F_{r+1}(\vec{a}) = \mu x (F_r(\vec{a}) < x) = F_{r+1}(\vec{a}) = \mu x (F_r(\vec{a}) < x)$$

A última definição é admissível porque $<$ é recursivo, por **R1**. Disso, F_{r+1} é recursiva.

■

Resulta de **R6** que podemos usar constantes nas definições explícitas de funções e predicados recursivos.

Definição 6: definimos os seguintes predicados:

$$(\sim P)(\vec{a}) \leftrightarrow \sim P(\vec{a})$$

$$P \vee Q(\vec{a}) \leftrightarrow P(\vec{a}) \vee Q(\vec{a})$$

$$P \rightarrow Q(\vec{a}) \leftrightarrow \sim P(\vec{a}) \vee Q(\vec{a})$$

$$P \wedge Q(\vec{a}) \leftrightarrow \sim(\sim P(\vec{a}) \vee \sim Q(\vec{a}))$$

$$P \leftrightarrow Q(\vec{a}) \leftrightarrow (P(\vec{a}) \rightarrow Q(\vec{a}) \wedge Q(\vec{a}) \rightarrow P(\vec{a}))$$

Teorema R7: Se P é recursivo, então $\sim P$ é recursivo. Se P e Q são recursivos, então, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \wedge Q$ e $P \leftrightarrow Q$ são recursivos.

Demonstração:

Vamos mostrar que $\sim P$ e $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \wedge Q$ e $P \leftrightarrow Q$ são recursivas

Temos as definições explícitas:

$K_{\sim P}(\vec{a}) = K_{<}(0, K_P(\vec{a}))$ e $K_{P \vee Q}(\vec{a}) = K_P(\vec{a}) \cdot K_Q(\vec{a}) = 0$ se, e somente se, $P(\vec{a})$ ou $Q(\vec{a})$

Desta definição e da de predicado recursivo, lembrando que

$$K_P(\vec{a}) = \begin{cases} 0, & \text{se } P(\vec{a}) \\ 1, & \text{se } \sim P(\vec{a}) \end{cases} \quad \text{e} \quad K_{<}(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{se } a < b \\ 1, & \text{se } a > b \text{ ou } a = b \end{cases}$$

Vemos que $\sim P$ e $P \vee Q$ são recursivos.

Falta mostrar ainda que $P \rightarrow Q$, $P \wedge Q$ e $P \leftrightarrow Q$ são recursivos. Para tratar os restantes casos, usamos o fato de que

$$P \rightarrow Q \leftrightarrow \sim P \vee Q$$

$$P \wedge Q \leftrightarrow \sim(P \rightarrow \sim Q) \text{ e}$$

$$P \leftrightarrow Q \leftrightarrow P \rightarrow Q \wedge Q \rightarrow P, \text{ conforme visto em R6.}$$

Olhemos para o lado direito das definições explícitas:

$$K_{<}(0, K_P(\vec{a})) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 < K_P(\vec{a}) \leftrightarrow K_P(\vec{a}) = 1 \leftrightarrow \sim(P)(\vec{a}) \leftrightarrow (\sim P)(\vec{a}) \\ 1, \text{ se } 0 \geq K_P(\vec{a}) \leftrightarrow K_P(\vec{a}) = 0 \leftrightarrow \sim(\sim(P)(\vec{a})) \end{cases}$$

$$K_P(\vec{a}) \cdot K_Q(\vec{a}) = 0 \text{ se, e somente se, } P(\vec{a}) \text{ ou } Q(\vec{a})$$

Façamos um estudo das imagens de K_P e K_Q

$$K_P(\vec{a}) = \{0, 1\}$$

$$Im K_Q(\vec{a}) = \{0, 1\}$$

0	0	$P(a), Q(a)$
0	1	$P(a), \sim Q(a)$
1	0	$\sim P(a), Q(a)$
1	1	$\sim P(a), \sim Q(a)$

Assim, $K_P(\vec{a}) \cdot K_Q(\vec{a}) = 0$ se, e somente se, $P(\vec{a})$ ou $Q(\vec{a})$

Por definição,

$$P \vee Q(\vec{a}) = P(\vec{a}) \vee Q(\vec{a})$$

$$P \rightarrow Q(\vec{a}) = \sim P(\vec{a}) \vee Q(\vec{a})$$

$$P \wedge Q(\vec{a}) \leftrightarrow \sim(\sim P(\vec{a}) \vee \sim Q(\vec{a}))$$

$$P \leftrightarrow Q(\vec{a}) \leftrightarrow (P(\vec{a}) \rightarrow Q(\vec{a}) \wedge Q(\vec{a}) \rightarrow P(\vec{a}))$$

Mostramos acima que $\sim P$ é recursivo. Com isso, acabamos de mostrar que $P \rightarrow Q$, $P \wedge Q$ e $P \leftrightarrow Q$ são recursivos. ■

Decorre de **R7** que nós podemos usar \sim , \vee , \rightarrow , \wedge e \leftrightarrow em definições explícitas de funções e predicados recursivos.

Teorema R8: Os predicados $<$, \leq , $>$, \geq e $=$ são recursivos.

Demonstração:

Por **R1**, $<$ é recursivo. Os outros têm as seguintes definições explícitas:

$$a \leq b \leftrightarrow \sim(b < a)$$

$$a > b \leftrightarrow b < a$$

$$a \geq b \leftrightarrow b \leq a$$

$$a = b \leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq a$$

Disso, \leq , $>$, \geq e $=$ são predicados recursivos. ■

Como consequência desse resultado, podemos usar os símbolos $<$, \leq , $>$, \geq e $=$ nas definições explícitas de funções e predicados recursivos.

Vamos agora definir um tipo modificado operador, o μ -operador limitado.

Definição 7: Se $_x_$ é uma fórmula e \dots é uma expressão que não contém x , que representa um número; o *operador μx limitado*, denotado por $\mu x_{x < _}$, é aquele tal que:

$$\mu x_{x < \dots} (_x_) = \mu x (_x_ \vee x = \dots), \text{ tal que o lado direito está sempre definido.}$$

Em outras palavras, o valor de $\mu x_{x < \dots} (_x_)$ é o menor x menor que \dots e que torna $_x_$ verdadeiro, se existir um tal x .

$$\text{Exemplos: } \mu x_{x < 5} (x \text{ é par}) = 0 \quad \text{e} \quad \mu x_{x < 5} (x \neq 0 \text{ e } 7/x) = 5$$

Se não existir o tal x , então $\mu x_{x < \dots} (_x_) = \dots$

Observação: as ocorrências de x em $\mu x_{x < \dots} (_x_)$ são ligadas.

Teorema R9: Se P é recursivo, e F é definido por $F(a, \vec{a}) = \mu x_{x < a} P(\vec{a}, x)$, então F é recursiva.

Demonstração:

É imediato, pois F pode ser definida explicitamente por:

$$F(a, \vec{a}) = \mu x (P(\vec{a}, x) \vee x = a). \blacksquare$$

Segue disso, que podemos usar μ -operadores limitados nas definições explícitas de funções e predicados recursivos.

Definição 8: Se $_x_$ é uma fórmula e \dots é uma expressão não contendo x , o *quantificador existencial limitado* $\exists x_{x < \dots}$ e o *quantificador universal limitado* $\forall x_{x < \dots}$ são, respectivamente, aqueles tais que:

$$\exists x_{x < \dots} (_x_) \leftrightarrow \sim \mu x_{x < \dots} \sim (_x_) < a$$

$$\forall x_{x < \dots} (_x_) \leftrightarrow \sim \exists x_{x < \dots} \sim (_x_),$$

$\exists x_{x < \dots}$ e $\forall x_{x < \dots}$ são chamados quantificadores limitados.

Em outras palavras:

$\exists x_{x < \dots} (_x_)$ é verdadeiro se, e somente se, $_x_$ é verdadeiro para algum x menor que \dots .

$\forall x_{x < \dots} (\text{---}x\text{---})$ é verdadeiro se, e somente se, $\text{---}x\text{---}$ é verdadeiro para todo x menor que

Das definições dos quantificadores limitadas e dos resultados anteriores, temos:

Teorema R10: Se R é recursivo, e P e Q são definidos por $P(a, \vec{a}) \leftrightarrow \exists x_{x < a} R(\vec{a}, x)$ e $Q(a, \vec{a}) \leftrightarrow \forall x_{x < a} R(\vec{a}, x)$, então, P e Q são recursivos.

Demonstração:

Como P e Q podem ser definidos explicitamente por:

$P(a, \vec{a}) \leftrightarrow \mu x_{x < a} R(\vec{a}, a) < a$, e $Q(a, \vec{a}) \leftrightarrow \sim \exists x_{x < a} \sim R(\vec{a}, a)$, e por hipótese, R é recursivo, e além disso, de **R9** $\exists x_{x < \dots}$ é recursivo, então P e Q são recursivos. ■

Segue-se de **R10** que podemos usar os quantificadores limitados nas definições explícitas de funções e predicados recursivos. Em μx , $\exists x$, e $\forall x$ vamos $x \leq \dots$ como um, aliás $x < \dots + 1$ nos subscritos e podemos usar isso em definições explícitas.

Definição 9: A função subtração $\dot{-}$ é tal que: $a \dot{-} b = \begin{cases} a - b, & \text{se } a \geq b \\ 0, & \text{se } a < b \end{cases}$

Teorema R11: A função $\dot{-}$ é recursiva.

Demonstração:

Seja a definição explícita $a \dot{-} b$, como $a \dot{-} b = \mu x_{x < 0} (b + x = a) \vee (x = 0)$.

Disso, a função $\dot{-}$ ser recursiva é uma consequência imediata da definição por casos. ■

Teorema R12: Sejam G_1, \dots, G_k funções recursivas, e R_1, \dots, R_k predicados recursivos de modo que para cada \vec{a} , exatamente um dos $R_1(\vec{a}), \dots, R_k(\vec{a})$ ocorre. Se F é definida por

$$F(\vec{a}) = \begin{cases} G_1(\vec{a}), & \text{se } R_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ G_k(\vec{a}), & \text{se } R_k(\vec{a}) \end{cases}, \text{ então } F \text{ é recursiva.}$$

Demonstração:

Nós temos a definição explícita

$F(\vec{a}) = G_1(\vec{a}) \cdot K_{\sim R_1}(\vec{a}) + \dots + G_k(\vec{a}) \cdot K_{\sim R_k}(\vec{a})$. Da hipótese, G_1, \dots, G_k e R_1, \dots, R_k são funções e predicados recursivos, respectivamente, assim, $F(\vec{a}) = G_1(\vec{a}) \cdot K_{\sim R_1}(\vec{a}) + \dots + G_k(\vec{a}) \cdot K_{\sim R_k}(\vec{a})$ é recursiva. ■

Teorema R13: Se Q_1, \dots, Q_k são predicados recursivos, e R_1, \dots, R_k são predicados recursivos, tais que, para cada um, exatamente um dos $R_1(\vec{a}), \dots, R_k(\vec{a})$ vale, e se P é

definida por $P(\vec{a}) \leftrightarrow \begin{cases} Q_1(\vec{a}), \text{ se } R_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ Q_k(\vec{a}), \text{ se } R_k(\vec{a}) \end{cases}$, então P é recursivo.

Demonstração:

Definimos K_P como em **R12**, $K_P(\vec{a}) = \begin{cases} K_{Q_1}(\vec{a}), \text{ se } R_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ K_{Q_k}(\vec{a}), \text{ se } R_k(\vec{a}) \end{cases}$, disso, P é recursivo. ■

Exemplo: os predicados e funções $G_1, \dots, G_k, R_1, \dots, R_k$ de **R12** e $Q_1, \dots, Q_k, R_1, \dots, R_k$ de **R13**, costumam ser substituídas por suas definições explícitas dessas funções e predicados.

Como R_k deve ser $\sim(R_1 \vee \dots \vee R_{k-1})$ costumamos escrever R_k como caso contrário, ou nenhum dos anteriores, por exemplo.

Assim, uma definição típica em que **R12** é aplicável é:

$$F(a, b) = \begin{cases} a, \text{ se } a < b \\ b + 2, \text{ se } b \leq a \text{ e } a = 4 \\ 2, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Como conjuntos são predicados unários, podemos aplicar os resultados acima para conjuntos. Um conjunto pode ou não ser recursivo, mas uniões, intersecções e complementos de conjuntos recursivos são recursivos, como vimos em **R7**. Além disso, todo conjunto finito A é recursivo.

Experimentemos pensar sobre o conjunto A .

Se $A = \emptyset$, A tem a definição explícita

$A(a) \leftrightarrow a < a$ que define conjunto vazio.

Se $A = \{k_1, \dots, k_n\}$ então ele tem a definição explícita

$A(a) \leftrightarrow a = k_1 \vee \dots \vee a = k_n$

Observação de notação:

Nós inserimos aqui uma advertência sobre o uso de pontos nas definições explícitas. No exemplo acima, a expressão representada pelos pontos depende de A ; se soubéssemos o que A é, poderíamos escrevê-lo na íntegra. No entanto, não devemos usar pontos quando a expressão que representam depende do valor de um argumento. Assim,

$P(a, b) \leftrightarrow a = F(0) \vee a = F(1) \vee \dots \vee a = F(b)$ não é uma legítima definição explícita, uma vez que a expressão representada pelos pontos depende do valor de b .

Números de sequência

O objetivo agora é atribuir um número a cada sequência finita de números de tal forma que as funções e predicados associados sejam recursivos.

Isto dependerá de alguns resultados necessários que antecedem a definição da função β , que é a função de atribuição de um número natural a cada sequência finita de números naturais.

Devemos lembrar que a linguagem em que estamos trabalhando é \mathcal{N} .

Notação:

Escrevemos $Div(a, b)$ se a é divisível por b , isto é, se $\exists x, (a = b \cdot x)$. Se a e b não são nulos e $\forall x (Div(ax, b) \rightarrow Div(x, b))$ dizemos que a e b são primos entre si, e escrevemos $RP(a, b)$.

Lema 1: $RP(a, b) \rightarrow RP(b, a)$. (1)

Demonstração:

Supomos $RP(a, b)$ e $Div(bx, a)$. Então $bx = ay$ para algum y . Consequentemente, $Div(ay, b)$; assim, por hipótese, $Div(y, b)$; então $y = bz$ para algum z .

Disso, $bx = abz$ ou $b(x-az) = 0$. Como $b \neq 0$, por hipótese, temos $x = az$; e finalmente $Div(x, a)$, logo $RP(b, a)$. ■

Lema 2: Sejam $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ todos diferentes de 0 e 1 e tais que $RP(a_i, b_j)$ para todos i e j . Então, existe um número c , que é divisível por todos os a_i e nenhum dos b_j (c é múltiplo de a_i , mas não é múltiplo de b_j), ou seja tal que $Div(c, a_i)$ e $\sim Div(c, b_j)$

Demonstração:

Provaremos por indução finita em n .

Se $n = 0$, tomamos $c = 1$.

Se $n \neq 0$, supomos que o resultado vale para $n-1$, então, existe um c' , que é divisível por a_1, \dots, a_{n-1} e não por b_1, \dots, b_m .

Consideremos $a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, b_1, \dots, b_m$ como nas hipóteses e tomamos $c = a_n \cdot c'$, então, certamente, $a_1, \dots, a_n / c$ e por outro lado, se $b_i / c = a_n \cdot c' / b_i$ e $RP(b_i, a_n)$ resulta b_i / c' , contradição. Disso, $\exists c$ tal que $Div(c, a_i)$ e $\sim Div(c, b_j)$. ■

Lema 3:

Sejam: $k \neq 0$ e $z \neq 0$ e $Div(z, k) \rightarrow RP(1 + (j+k)z, 1+jz)$ (2)

Demonstração:

Primeiramente, temos $Div(x + xjz, z) \rightarrow Div(x, z)$ para todo x .

De fato, se z divide $x(I + jz)$ e z não divide x , então, z divide $(I + jz)$, contradição.

Então, temos $RP(I + jz, z)$ e por (1), temos $RP(z, I + jz)$.

Agora, suponha que $Div(x + x(j + k)z, I + jz)$.

Como $x + x(j + k)z = x(I + jz) + xkz$

Temos que $I + jz \mid x(I + jz) + xkz$

Assim, $I + jz \mid xkz$ ou $Div(xkz, I + jz)$. Como $RP(z, I + jz)$ temos que $Div(xk, I + jz)$.

Como por hipótese, $Div(z, k)$, segue-se que $\lambda(I + jz) = xk$ e $\mu k = z$ para algum λ, μ

Temos $xz = x\mu k = x\mu\lambda(I + jz)$ e vale $Div(xz, I + jz)$ como $RP(z, I + jz)$ temos $Div(x, I + jz)$, mas, então $I + jz \mid x$, pois por hipótese, $I + jz \mid x(I + (j+k)z)$

Logo: $RP(I + (j+k)z, I + jz)$. Isto prova (2). ■

Lema 4: Nós definimos uma função OP por

$$OP(a, b) = (a + b) \cdot (a + b) + a + I \quad (3)$$

$$\text{Então: } OP(a, b) = OP(a', b') \rightarrow a = a' \text{ e } b = b' \quad (4)$$

Demonstração:

Vamos supor que $OP(a, b) = OP(a', b')$

Se $a + b < a' + b'$, então, $OP(a, b) = (a+b)^2 + a + I \leq (a + b)^2 + 2(a+b) + I = (a+b+1)^2 \leq (a' + b')^2 < OP(a', b')$ o que é impossível.

De modo que $a + b = a' + b'$

A partir disso e $OP(a, b) = OP(a', b')$ obtemos $a = a'$, e, $a + b = a' + b'$,

daí, $a = a'$ e finalmente, $b = b'$. ■

Tendo esses lemas, a seguir definiremos β , que é o primeiro passo para associar um número a uma sequência. As contas que estamos fazendo perseguem a ideia de Gödel de que havia sentenças indemonstráveis na **aritmética**.

O **Lema de Gödel** introduzirá uma função recursiva que permite associar um número natural a cada sequência de números naturais.

Lema de Gödel: existe uma função recursiva β tal que $\beta(a, i) \leq a - 1$ para todos a e i , e tal que, para quaisquer números a_0, a_1, \dots, a_{n-1} existe um número a tal que $\beta(a, i) = a_i$ para todo $i < n$.

(SHOENFIELD, 1967, p.115) e (CARNIELLI; EPSTEIN, 2006, p. 253)⁴⁹

Demonstração:

A função β tem a seguinte definição explícita:

$$\beta(a, i) = \mu x_{x < a-1} \exists y_{y < a} \exists z_{z < a} (a = OP(y, z) \wedge Div(y, l + OP(x, i) + 1) \cdot z) \quad (5)$$

Onde $OP(a, b) = (a+b) \cdot (a+b)+a+1$ e $Div(a, b) = \exists y_{y \leq a} (a = x \cdot b)$

Levando em conta esta definição explícita, a recursividade de β segue se mostrarmos que Div e OP são recursivas. Mas, Div tem a definição explícita $Div(a, b) \leftrightarrow \exists x_{x \leq a} (a = x \cdot b)$ e OP tem a definição explícita (4). É também evidente que $\beta(a, i) \leq a \div 1$.

Vamos mostrar que OP é recursiva.

Agora, seja a_0, a_1, \dots, a_{n-1} dado; vamos encontrar a como no lema. Seja c o maior dos $OP(a_i, i) + 1$, $c = \max\{OP(a_i, i) + 1\}$, e seja z um número que é divisível por todo número menor que c , pois $[t < c \rightarrow t/z]$.

Tomemos $j < l < c$, então $RP(l + jz, l + lz)$, como podemos ver a partir de (2).

Se $k = l - j$, segue pelo resultado obtido anteriormente (**Lema 3**) que, como $Div(z, l)$ e $Div(z, j)$, temos $Div(z, k)$ e vale $RP(l + (j=k)z, l + jz)$ ou $RP(l + lz, l + jz)$ e pelo **Lema 1** $RP(l + jz, l + lz)$.

Pelo **Lema 2**, como os $l + jz$ são todos primos entre si, existe um número y tal que se $j < c$, e $l + jz \setminus y$ se e somente se j é um dos $OP(a_i, i)$

Colocamos então $a = OP(y, z)$. Então temos que como $l + j OP(a_i, i) \setminus y$ temos $a_i < y < a$ e $z < a$ pela definição de OP . Pelo **Lema 4**, temos que y e z são os únicos números que satisfazem $a = OP(y, z)$.

Assim, para provar que $\beta(a, i) = a_i$, isso será suficiente mostrar que a_i é o menor número x tal que $Div(y, l + (OP(x, i) + 1) \cdot z)$

Para isso, basta que se prove que se $x < a_i$, então, $OP(x, i) < c$ e $OP(x, i)$ não é um dos $OP(a_j, j)$.

Mas $x < a_i \rightarrow OP(x, i) \leq OP(a_i, i) < c$ e $OP(x, i)$

Agora, se $OP(x, i) = OP(a_j, j)$ então $i=j$ e $x=a_i$, contradição, pois $x < a_i$

Disso, $OP(x, i)$ não é um dos $OP(a_j, j)$ pelo **Lema 4**.

Com isso, mostramos que β é recursiva. ■

Propriedades da função β

⁴⁹ Carnielli e Epstein (2006) também utilizam a função beta de Gödel na parte destinada a tratar dos teoremas de Gödel.

β é a função definida por (5) para associar um número natural a cada n -upla (a_1, a_2, \dots, a_n) de números naturais.

(No entanto, a única propriedade de β que usamos são aquelas dadas pelo **Lema de Gödel**). Note-se que a partir de $\beta(a, i) \leq a - 1$ obtemos

$$\beta(0, i) = 0 \quad (6)$$

$$\text{e quando } a \neq 0 \rightarrow \beta(a, i) < a \quad (7)$$

Vejam agora como utilizar a função β para associar um número natural a cada n -upla (a_1, a_2, \dots, a_n) de números naturais.

Vamos atribuir a cada n -upla (a_1, a_2, \dots, a_n) o menor número a tal que

$$\beta(a, 0) = n \text{ e } \beta(a, i) = a_i, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Assim, definimos:

Definição 10: o número de sequência de uma sequência (a_1, a_2, \dots, a_n) de números naturais é o menor número tal que $\beta(a, 0) = n$ e $\beta(a, i) = a_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Pelo **Lema de Gödel** tal número existe, pois ele garante a existência do número de sequência, para qualquer sequência finita de números naturais.

Denotaremos por $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ o número de sequência da sequência (a_1, \dots, a_n)

Para $n=0$, tendo em vista (6), colocamos $\langle \rangle = 0$.

Propriedade 1: para cada n fixo, o número-sequência $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ é uma função recursiva de a_1, \dots, a_n .

Demonstração:

Para cada n , o número-sequência $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, é uma função recursiva com a seguinte definição explícita

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \mu x (\beta(x, 0) = n \wedge \beta(x, 1) = a_1 \wedge \dots \wedge \beta(x, n) = a_n). \blacksquare$$

Propriedade 2: Se a é um número que é um número de sequência $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, então existe uma função lh recursiva, tal que $lh(a) = n$, isto é, lh determina recursivamente o comprimento da sequência da qual a é o número.

Demonstração:

Temos a seguinte definição explícita: $lh(a) = \beta(a, 0)$. ■

Propriedade 3: Se a é um número que é um número de sequência $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$, então, existe uma função $(a)_i$ recursiva, tal que $(a)_i = a_i$, isto é, $(a)_i$ determina recursivamente o i -ésimo elemento da sequência $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$.

Demonstração:

Temos a seguinte definição explícita: $(a)_i = \beta(a, i+1)$ ■

Seguindo, nós introduziremos algumas outras funções recursivas e predicados associados à números de sequência.

Denotaremos o conjunto de números de sequência por Seq . Então, Seq como conjunto (predicado unitário) é recursivo com a definição explícita:

$$Seq(a) \leftrightarrow \forall x_{x < a} (lh(x) \neq lh(a) \vee \exists i_{i < lh(a)} ((x)_i \neq (a)_i))$$

Também definimos a função binária $In(\langle a_1, \dots, a_n \rangle, i) = \langle a_1, \dots, a_i \rangle$, para $i \leq n$, recursiva e definida explicitamente por:

$$In(\langle a_1, \dots, a_n \rangle, i) = \mu x (lh(x) = i \wedge \forall j_{j < i} ((x)_j = (a)_j))$$

Finalmente, definimos a função $*$, função binária e recursiva tal que

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle * \langle b_1, b_2, \dots, b_m \rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m \rangle$$

Cuja definição explícita é:

$$\begin{aligned} a * b &= \mu x (lh(x) = lh(a) + lh(b) \wedge \\ &\wedge \forall i_{i < lh(a)} ((x)_i = (a)_i) \wedge \\ &\wedge \forall i_{i < lh(a)} (x)_{lh(a)+i} = (b)_i) \end{aligned}$$

O uso de *números de sequências* permite em certos casos alternar funções e predicados n -ários por funções e predicados unários. O que pode ser feito por meio das definições e dos resultados a seguir.

Definição 11: Se F é uma função n -ária, a *contração de F* , denotada por $\langle F \rangle$, é a função recursiva unária definida explicitamente por

$$\langle F \rangle(a) = F((a)_0, \dots, (a)_{n-1}) \quad (9)$$

Note-se que podemos recuperar F a partir de $\langle F \rangle$ por

$$F(a_1, \dots, a_n) = \langle F \rangle((a)_1, \dots, (a)_n) \quad (10)$$

Definição 12: Se P é um predicado n -ário, a *contração de P* , denotado por $\langle P \rangle$, é o predicado recursivo unário definido explicitamente por

$$\langle P \rangle(a) \leftrightarrow P((a)_0, \dots, (a)_{n-1}) \quad (11)$$

Notemos que também podemos recuperar P a partir de $\langle P \rangle$ por

$$P(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow \langle P \rangle (\langle a_1, \dots, a_n \rangle) \quad (12)$$

As fórmulas (9) (10), (11) e (12), que permitem correlacionar F e $\langle F \rangle$, P e $\langle P \rangle$, são chamadas de *fórmulas de contração*.

Observação: como consequência dessas fórmulas, F é recursiva se e somente se $\langle F \rangle$ é recursiva e P é recursivo se, e somente se, $\langle P \rangle$ o é. Além disso, note que $\langle KP \rangle = K_{\langle P \rangle}$.

Vamos agora ver como os números de sequência podem ser usados para definir funções e predicados recursivos por indução.

Definição 13: Se F é uma função n -ária com $n \neq 0$, a nova função n -ária \bar{F} é definida por $\bar{F}(a, \vec{a}) = \langle F(0, \vec{a}), F(1, \vec{a}), \dots, F(a-1, \vec{a}) \rangle$ (13)

Grosso modo, $F(a, \vec{a})$ contém todas as informações fornecidas pelos valores de $F(i, \vec{a})$, para $i < a$.

Como a definição acima não é uma definição explícita que garante que \bar{F} é recursiva, pois a definição depende do argumento a de \bar{F} . Temos que mostrar então a seguinte proposição.

Proposição: F é recursiva se, e somente se, \bar{F} é recursiva.

Demonstração:

Suponha que F é recursiva, disso, nós não podemos usar (13) como uma definição explícita, já que a expressão representada pelos pontos (...) dependem do valor de a .

Colocamos então a definição explícita

$$F(a, \vec{a}) = \mu x (lh(x) = a \wedge \forall i_{i < a} ((x)_i) = F(i, \vec{a})). \blacksquare \quad (14)$$

Se \bar{F} é recursiva, temos a definição explícita $F(a, \vec{a}) = \bar{F}(a+1, \vec{a})_a$ para F . (15)

Agora, suponha que G é uma função $(n+1)$ -ária. A equação $F(a, \vec{a}) = G(\bar{F}(a, \vec{a}), a, \vec{a})$ então, determina o valor de $F(a, \vec{a})$ quando os valores de $F(i, \vec{a})$ para $i < a$ são conhecidos. É, por conseguinte, uma definição legítima por indução de F .

O teorema conseguinte legitima definições explícitas que utilizam a indução.

Teorema R14. Se G é recursiva e F é definida indutivamente por $F(a, \vec{a}) = G(\bar{F}(a, \vec{a}), a, \vec{a})$, então F é recursiva.

Demonstração:

Como F está bem definida e G é uma função $n+1$ -ária que determina $F(a, \vec{a})$ quando são conhecidos os valores de $\bar{F}(i, \vec{a})$ para $i < a$.

Vamos mostrar que F é recursiva

Definimos explicitamente H por

$$H(a, \vec{a}) = \mu x (\text{Seq}(x) \wedge lh(x) = a \wedge \forall i_{i < a} ((x)_i = G(\text{In}(x, i), i, \vec{a}))) \quad (16)$$

Claramente, $H(a, \vec{a})$ é exatamente $\bar{F}(a, \vec{a})$. Então, definimos explicitamente F por

$$F(a, \vec{a}) = G(H(a, \vec{a}), a, \vec{a}) \quad (17)$$

Como G e H são definidas explicitamente a partir de definições explícitas de funções recursivas, (16) e (17), então F é recursiva. ■

Observação: nas aplicações práticas do teorema **R14**, G é definido por uma definição explícita de uma definição por casos, uma primeira impressão é que F tem uma definição explícita ou por casos de $F(a, \vec{a})$ exceto que $\bar{F}(a, \vec{a})$ pode aparecer no lado direito.

Exemplo: Se uma função recursiva F é definida por

$$F(a, b) = \bar{F}(a, b) + K(b) + a, \text{ onde } K \text{ é uma função recursiva previamente definida.}$$

$$\text{No caso de uma definição por casos, } F(a, b) = \begin{cases} F(G(a, b), \text{ se } G(a) < a \\ H(a, b), \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Para colocar as coisas na forma de **R14**, notamos $G(a) < a \rightarrow F(G(a), b) = \bar{F}(a, b))_{G(a)}$.

Exemplo: uma forma comum de ocorrências deste tipo de definição é

$$F(0, \vec{a}) = G(\vec{a}),$$

$F(a+1, \vec{a}) = H(F(a, \vec{a}), a, \vec{a})$, em que G e H são definidos anteriormente. Para ver que este vem sob **R14**, nós reescreveremos como

$$F(a, \vec{a}) = \begin{cases} G(\vec{a}), \text{ se } a = 0 \\ H(F(a-1, \vec{a}), a-1, \vec{a}), \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Temos uma forma similar para predicados.

A tese⁵⁰ de Church

Tese de Church: uma função ou um predicado é calculável se, e somente se, é recursivo.

Já vimos que toda função ou predicado recursivo é calculável.

Se a tese de Church vale para funções então ela vale para predicados.

⁵⁰ Consideramos, conforme Post (1936) afirma, que hipótese de Church soa mais adequado, mas seguiremos chamando de tese, porque é mais comum e entendemos que essa diferenciação para efeito do que pretendemos aqui é irrelevante. O termo tese de Church aparece pela primeira vez em Kleene (1952), e ele se refere ao trabalho Church (1935), no qual ele introduz o conceito de cálculo-lambda associando com funções recursivas e propõe uma formalização da noção de função *efetivamente computável*, através do conceito de lambda-definibilidade. Foi Kleene (1936) que mostra que os conceitos de lambda-definibilidade e recursividade são equivalentes.

De fato, um predicado é calculável ou recursivo se sua função característica é calculável ou recursiva.

Não se tem notícia de alguém que tenha conseguido provar a tese de Church para funções, tampouco isolar uma propriedade de funções calculáveis que seria necessária em tal demonstração.

Há alguns fortes indícios de que ela é verdadeira. Existem evidências que fazem com que a maioria dos lógicos e matemáticos acreditem que a hipótese de Church é correta:

i) Muitas funções calculáveis foram mostradas serem recursivas, tanto na aritmética elementar, como na teoria dos conjuntos e na análise. Por exemplo, na aritmética elementar podem ser definidas indutivamente. No caso da exponenciação, tem-se definido $a^b = \begin{cases} 1, & \text{se } b = 0 \\ a^{b-1} \cdot a, & \text{se } b \neq 0 \end{cases}$

ii) Até agora ninguém apresentou uma função calculável que não seja recursiva e nem mesmo um argumento plausível para eventualmente produzir uma tal função.

iii) Muitos métodos usuais para se obter funções calculáveis de funções calculáveis também produzem funções recursivas a partir de outras funções recursivas.

iv) Ninguém sugeriu um método que produzisse o contrário: algo que não fosse funções calculáveis a partir de funções calculáveis e funções recursivas a partir de funções recursivas.

Disso, por fim, argumentamos a favor da tese de Church, pois se tem que todas as funções calculáveis são funções recursivas, ou seja, o conceito de calculabilidade é equivalente ao de função recursiva.

O ponto de evidência mais forte a favor da Tese de Church, conforme Tassinari (2003)

É que toda tentativa de apresentar a classe mais geral das funções que seriam calculáveis (dentre elas podemos listar: λ -definibilidade (**Church 1935**), Turing-computabilidade (**Turing 1936**), Post-computabilidade (**Post 1936**), Gödel-Herbrand-computabilidade (**Gödel 1934**), Markov-computabilidade (**Markov 1954**), ser representável em uma extensão de N) resultou não só funções da classe de funções recursivas, mas, exatamente, na própria classe das funções recursivas. (TASSINARI, 2003, p. 84, grifos do autor).

Isso, de acordo com Shoenfield (1967), sugere que esta seria a classe natural das funções calculáveis, pois se torna difícil entender porque isto ocorreria se as funções recursivas não fossem justamente a classe das funções calculáveis.

Uma tentativa de definir calculável diretamente

Vamos considerar uma função unária F . O cálculo de F pode ser reduzido a escrever expressões numéricas em uma folha de papel [números de Gödel, na verdade] e podemos descrever este fato como na sequência (a_0, a_1, \dots, a_n) onde a_0 é a e a_n é $F(a)$. O método de decisão deve nos dizer como derivar a_i de a_0, a_1, \dots, a_{i-1} ou de $\langle a_0, a_1, \dots, a_{i-1} \rangle$.

Existe uma função calculável G tal que $G(\langle a_0, a_1, \dots, a_{i-1} \rangle) = a_i$

O método de decisão deve nos dizer também como a computação está completa: para isso existe um predicado calculável P , tal que

$$P(\langle a_0, a_1, \dots, a_i \rangle) = \begin{cases} \text{Verdade, se } i = n \\ \text{Falso, se } i < n \end{cases}$$

Temos aqui uma *circularidade* porque temos que supor G e P calculáveis.

A ideia é que:

G descreve um único passo na computação;

P indica o fim da computação.

G e P devem ser “simples”.

Assim como podemos esperar que G e P sejam recursivas, e neste caso, definimos.

$$H(i, a) = \begin{cases} a, \text{ se } i = 0 \\ G(\bar{H}(i, a)), \text{ se } i \neq 0 \end{cases}$$

Temos então que:

$$\bar{H}(i, a) = \langle H(0, a), \dots, H(i-1, a) \rangle$$

$$H(0, a) = a$$

$$H(1, a) = G(\bar{H}(0, a)) = G(\langle a \rangle) = G(a)$$

$$H(2, a) = G(\bar{H}(1, a)) = G(\langle \bar{H}(0, a), \bar{H}(1, a) \rangle) = G(\langle a, G(a) \rangle)$$

⋮

E definimos também

$$K(a) = \mu x P(\bar{H}(x+1, a)),$$

Se $n = K(a)$ então $P(\bar{H}(x+1, a))$ é verdadeiro ou $P(\langle H(0, a), \dots, H(n, a) \rangle)$ é verdade e é o menor tal n . Assim: $a_0 = a = H(0, a), \dots, H(n, a) = (\bar{H}(n, a))_a = F(a)$.

Entre os diversos tipos de tentativas de definições de funções calculáveis, podemos destacar o que diz que é a classe das funções que podem ser computadas por um tipo de máquina.

Vamos aceitar a tese de Church (mas não vamos usar este fato na teoria. Só vamos usar na forma). Assim para nós, a partir de agora, funções calculáveis são as recursivas. Para

provar que A não é recursivo, podemos mostrar uma solução negativa para o problema da decisão para A.

Definição 14: Seja P um predicado n -ário. Dizemos que P é *positivamente calculável* se existe um método que aplicado a \vec{a} fornece:

$$\begin{cases} \text{conclusão} \rightarrow P(\vec{a}) \text{ é verdade} \\ P(\vec{a}) \text{ é falso} \rightarrow \text{não tem conclusão} \end{cases}$$

Proposição: P é *positivamente calculável* se, e somente se, existe um *predicado calculável* Q tal que $P(\vec{a}) \leftrightarrow \exists x Q(\vec{a}, x)$ para todo \vec{a} .

Demonstração:

Se existe Q tal que $P(\vec{a}) \leftrightarrow \exists x Q(\vec{a}, x)$, então fazemos os cálculos

$Q(\vec{a}, 0)$

$Q(\vec{a}, 1)$

⋮

Se atingirmos um (\vec{a}) que for verdade então concluímos que $P(\vec{a})$ é verdade.

Reciprocamente, se P é *positivamente calculável*, seja $Q(\vec{a}, 0)$ o predicado que diz que x passos no cálculo de $P(\vec{a})$ nos leva à conclusão que $P(\vec{a})$ é verdadeiro, então Q é calculável e $P(\vec{a}) \leftrightarrow \exists x Q(\vec{a}, x)$, para todo \vec{a} .

Levando em conta a Tese de Church, podemos, então, propor as seguintes definições:

Definição 15: Um predicado P é *recursivamente enumerável* se existe um predicado recursivo Q , tal que $P(\vec{a}) \leftrightarrow \exists x Q(\vec{a}, x)$ para todo \vec{a} .

Corolário: todo predicado *recursivamente enumerável* é *positivamente calculável* e assumindo a tese de Church vale a recíproca.

Observação: Todo predicado recursivo é *recursivamente enumerável*.

[De fato, P é recursivo, então $P(\vec{a}) \leftrightarrow \exists x Q(\vec{a}, x)$ em que Q é o predicado recursivo definido por $Q(\vec{a}, x) \leftrightarrow P(\vec{a})$].

A recíproca será vista depois.

Números de Expressão

Vamos convencionar que todas as linguagens de primeira ordem e teorias têm apenas um número finito de muitos símbolos não-lógicos.

[Vamos agora mostrar como ligar o problema de decisão para as teorias com funções recursivas. Em outras palavras, vamos mostrar como representar fórmulas e sequência de

fórmulas por números e, então, relacionar teorias axiomatizadas com as funções recursivas, mostrando como as demonstrações nestas teorias estão associadas às funções recursivas.]

Seja L uma linguagem de primeira ordem, com a hipótese acima. Vamos atribuir um número a cada símbolo de L .

Definição 16: Seja u um símbolo do alfabeto de L . O número atribuído ao símbolo u é o número de símbolo de u e denotamos $SN(u)$.

Se $z_0, z_1 \dots$ são as variáveis em ordem alfabética, colocamos $SN(z_i) = 2i$

Para os símbolos restantes (em número finito) atribuímos números sob a única restrição de que a atribuição seja injetora.

[Por exemplo, uma das possibilidades de atribuição seria $SN(\sim) = 1$; $SN(\forall) = 3$; $SN(\exists) = 5$; $SN(=) = 7$; $SN(0) = 9$; $SN(S) = 11$; $SN(+)$ = 13; $SN(\cdot) = 15$; $SN(<) = 17$; outra seria a utilizada por Nagel e Newman (1973).]

Como o alfabeto é enumerável, então essa função pode ser definida. Disso, a cada expressão u da linguagem que é um termo ou uma fórmula e tem, portanto, a forma $v_1 \dots v_n$, podemos associar uma sequência de $n + 1$ números: o primeiro número da sequência é o número do primeiro símbolo, v_1 , que ocorre na expressão, o segundo número da sequência é o número da expressão v_1 que ocorre na expressão u e, assim por diante, até o último número da sequência que é o número da expressão v_n .

Como vimos anteriormente, a função β permite associar um número a cada sequência de números. Com efeito, à sequência (a_1, a_2, \dots, a_n) associa-se o número de sequência $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ que era o menor número a tal que $\beta(a, 0) = n$ e $\beta(a, i) = a_i$, para todo $i = 1, \dots, n$.

Notemos que toda fórmula é uma expressão e, assim, temos como associar a cada fórmula um número. Então, como podemos associar um número a cada sequência de fórmulas, podemos associar uma sequência de números a cada sequência de fórmulas: o primeiro número da sequência é o número da primeira fórmula, o segundo número da sequência é o número da segunda fórmula, e assim por diante. Assim, a cada sequência de fórmulas temos associada uma sequência de números, e, novamente, pela função β , podemos associá-la a um número: temos, portanto, um número associado a cada sequência de fórmulas, chamado de *número da sequência de fórmulas*.

Vamos, então, aplicar este método à linguagem, definindo, inicialmente, seus números das expressões, já que seu alfabeto é enumerável.

Lembrando que a atribuição não é única, a única restrição é que a atribuição seja injetora, e desde que o alfabeto seja enumerável essa função pode ser definida.

Vamos supor então que uma atribuição de números é fixada para cada linguagem de primeira ordem considerada.

Como a cada expressão associa-se uma sequência de números e, pela função SN podemos associar uma sequência de números a um único número, vamos associar, a cada designador u (termo ou fórmula) de L , um número, que denotaremos por $[u]$ e chamamos *número da expressão u* .

$[u]$ é definida por indução no comprimento de u .

Pelo teorema de formação, u é $vv_1 \cdots v_n$, onde v é um símbolo unário (do índice) e $v_1 \cdots v_n$ são designadores. Então, definimos.

Definição 17: O *número da expressão* de L é a função $[\]$, do conjunto das expressões de $L(N)$ no conjunto dos números naturais, tal que, sendo u uma expressão da forma $vv_1 \cdots v_n$, então: $[u] = \langle SN(v), [v_1], \dots, [v_n] \rangle$ **(Lema de Gödel)**

É imediato que expressões diferentes tem números de expressão diferentes, já que a função n -ária número-sequência $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ é recursiva.

[Mais ainda, podemos calcular o número de qualquer expressão de uma linguagem de alfabeto enumerável, desde que esteja definida uma função análoga à função SN acima. Inversamente, existe um procedimento mecânico para determinar se, dado um número, este é o número de uma expressão u de $L(N)$, ou o número de qualquer expressão de uma linguagem de alfabeto enumerável, novamente, desde que esteja definida uma função análoga à função SN acima.

Com efeito, dado um número, podemos determinar se ele é, ou não, um número de uma sequência, já que o predicado Seq é recursivo. Mais ainda, podemos determinar, pelas funções recursivas lh e $(a)_i$, qual é esta sequência de números.

Lembremos, então, que definimos o número das expressões para as expressões que são termos ou fórmulas. Assim, se a sequência de números tem $n + 1$ elementos, então, ou (1): $(a)_0$ é o número de um símbolo que forma uma expressão a partir de n elementos (por exemplo, se $(a)_0$ é o número de um predicado n -ário, a sequência tem que ter $n + 1$ elementos, se $(a)_0$ é o número de uma função n -ária, a sequência tem que ter $n + 1$ elementos, se é um conectivo binário, a sequência tem que ter três elementos, etc.). Ou (2): $(a)_0$ não é o número de um símbolo que forma uma expressão a partir de n elementos. No caso (2), a não é o número de uma expressão. No caso (1), por hipótese de indução, já que cada $(a)_i$ é menor que o número inicial a , podemos aplicar o mesmo procedimento em cada um dos $(a)_i$ da sequência para verificar se cada um deles é um número de uma expressão

(até chegar aos números de variáveis individuais ou constantes, que são os casos bases, dos quais parte qualquer formação de expressões).]

Observação: supondo fixada a lista de símbolos não lógicos e seus números de símbolos, dado u podemos efetivamente calcular $[u]$ porque a função $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ é calculável.

Reciprocamente: dado um número a , podemos decidir se a é um número de expressão, e, se for, podemos encontrar o designador do qual ele, a , é o número de expressão.

Como Seq é calculável, podemos *decidir* se a é ou não um número de sequência diferente do $\langle \ \ \rangle$. Se o for, podemos determinar a_0, a_1, \dots, a_n de modo que $a = \langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle$, já que lh e $(x)_i$ são calculáveis.

Temos que verificar se a_0 é o número símbolo de um símbolo v de índice n . Se não for, a não é um número de expressão. Se for, temos que verificar se para cada $i = 1, \dots, n$, a_i é o número de expressão de um designador v_i .

Isso pode ser feito por indução, pois $a_i < a$. Agora só resta verificar se $v v_1 \dots v_n$ é um designador.

Seguindo, definimos:

Seja, agora, T uma teoria com linguagem L , e seja Thm_T o conjunto de números de expressão dos teoremas de T .

Teorema 15: Uma teoria T tem um método de decisão se, e somente se, Thm_T é calculável.

Demonstração:

Supomos que existe um método de decisão para T . Dado um número $a \in N$, se a não é um número expressão, $a \notin Thm_T$. Se a é um número de expressão procuramos u , tal que $a = [u]$.

$a \in Thm_T$ se, e somente se, u é uma fórmula e um teorema de T .

Supomos que Thm_T é calculável. Dada uma fórmula A de T , então A é um teorema de T se, e somente se, $A \in Thm_T$. ■

Definição 17: dizemos que T é decidível se Thm_T é recursivo; caso contrário, dizemos que T é indecidível.

Combinando a discussão acima com a tese de Church, vemos que T tem um método de decisão se, e somente se, T é decidível.

Nós mostramos anteriormente que o conjunto de números de expressão é calculável. O mesmo pode ser mostrado para outros conjuntos importantes de números de expressão. De acordo com a tese de Church, segue que estes conjuntos são recursivos.

Vamos verificar isso para alguns desses conjuntos. Além de dar mais um argumento para a tese de Church.

Tendo obtido então os números das expressões de $L(\mathcal{N})$, vamos, a partir de agora, fazer uma sequência de definições de funções e predicados recursivos (denominaremos, por abuso de linguagem, os predicados unários por *conjuntos*), seguidos do papel que desempenham na representação das expressões de $L(\mathcal{N})$. Nós as utilizaremos mais adiante para definir uma teoria axiomatizada, para construir o predicado recursivo que representa a demonstração em \mathcal{N} , bem como, para definir a função recursiva que representa a substituição de variáveis por termos, que nos permitirá construir a fórmula da Gödel e demonstrar o teorema da incompletude.

$$\mathbf{A)} \quad Vble(a) \leftrightarrow a = \langle (a)_0 \rangle \wedge \exists y_{y \leq a} ((a)_0 = 2 \cdot y)$$

(assim $Vble(a)$ significa $a = [x]$ para alguma variável x .)

As definições (B) e (C) são específicos da teoria \mathbf{N} , mas valem em geral.

$$\mathbf{B)} \quad Term(a) \leftrightarrow a = 0 \quad se \quad a = \langle SN(0) \rangle$$

$$\leftrightarrow Term((a)_1) \quad se \quad a = \langle SN(S), (a)_1 \rangle$$

$$\leftrightarrow Term((a)_1) \wedge Term((a)_2) \quad se \quad a = \langle SN(+), (a)_1, (a)_2 \rangle \vee a =$$

$$\langle SN(\cdot), (a)_1, (a)_2 \rangle$$

$$\leftrightarrow Vble, \quad nos \quad outros \quad casos$$

($Term(a)$ significa que $a = [a]$ para algum termo a . Isto prossegue de anteriormente.)

$$\mathbf{C)} \quad AFor(a) \leftrightarrow a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge ((a)_0 = SN(=) \vee (a)_0 =$$

$$SN(<) \wedge Term((a)_1) \wedge Term(a)_2)$$

($AFor(a)$ significa que $a = [A]$ para alguma fórmula atômica A .)

$$\mathbf{D)} \quad For(a) \leftrightarrow For((a)_1) \quad se \quad a = \langle SN(\sim), (a)_1 \rangle,$$

$$\leftrightarrow For((a)_1) \wedge For((a)_2) \quad se \quad a = \langle SN(\vee), (a)_1, (a)_2 \rangle$$

$$\leftrightarrow Var((a)_1) \wedge For((a)_2) \quad se \quad a = \langle SN(\exists), (a)_1, (a)_2 \rangle$$

$$\leftrightarrow AFor(a) \quad noutros \quad casos$$

(For(a) significa que $a = [A]$ para alguma fórmula A.)

As próximas três definições são para uma teoria na qual haja somente símbolos de funções unárias e binárias e símbolos de predicado.

$$\begin{aligned} \mathbf{E)} \quad & Sub(a, b, c) = c, \text{ se } Vble(a) \wedge a = b \\ & = \langle (a)_0, Sub((a)_1, b, c) \rangle, \text{ se } a = \langle (a)_0, (a)_1 \rangle \\ & = \langle (a)_0, Sub((a)_1, b, c), Sub(a)_2, b, c \rangle, \text{ se } a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge (a)_0 \neq SN(\exists), \\ & = \langle (a)_0, (a)_1, Sub((a)_2, b, c) \rangle, \text{ se } a = \langle SN(\exists), (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge (a)_1 \neq b \\ & = a, \text{ noutros casos} \end{aligned}$$

Temos que $Sub([a], [x], [b]) = [a_x [b]]$; $Sub([A], [x], [a]) = [A_x [a]]$

$$\begin{aligned} \mathbf{F)} \quad & Fr(a, b) \leftrightarrow a = b \quad \text{se } Vble(a) \\ & \leftrightarrow Fr((a)_1, b) \quad \text{se } a = \langle (a)_0, (a)_1 \rangle \\ & \leftrightarrow Fr((a)_1, b) \vee Fr((a)_2, b) \text{ se } a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge ((a)_0 \neq SN(\exists)) \\ & \leftrightarrow Fr((a)_2, b) \wedge a1 \neq b \text{ noutros casos} \\ & (Fr([A], [x]) \text{ significa que } x \text{ é livre em } A.) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G)} \quad & Subtl(a, b, c) \leftrightarrow Subtl((a)_1, b, c), \text{ se } a = \langle (a)_0, (a)_1 \rangle, \\ & \leftrightarrow Subtl(a)_1, b, c) \wedge Subtl((a)_2, b, c), \text{ se } a = \langle (a)_0, (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge (a)_0 \neq SN(\exists), \\ & \leftrightarrow Subtl((a)_2, b, c) \wedge (\sim Fr((a)_2, b) \vee \sim Fr(c, (a)_1)), \text{ se } a = \langle SN(\exists), (a)_1, (a)_2 \rangle \wedge (a)_1 \neq \\ & b, \end{aligned}$$

$$\leftrightarrow 0 = 0 \text{ nos outros casos}$$

(Subtl([A], [x], [a]) significa que **a** é substituível por **x** em **A**.)

$$\mathbf{H)} \quad PAx(a) \leftrightarrow \exists x_{x < a} (For(x) \wedge a = \langle SN(\vee), \langle SN(\sim), x \rangle, x \rangle).$$

(PAx(a) significa que **a** é um número de expressão de um axioma proposicional.)

As próximas três definições correspondem similarmente ao axioma da substituição, axioma da identidade e axioma de igualdade.

I) Axioma da substituição:

$$Sax(a) \leftrightarrow \exists x_{x < a} \exists y_{y < a} \exists z_{z < a} (Vble(x) \wedge For(y) \wedge Term(z) \wedge subtl(y, x, z) \wedge a = \langle SN(\vee), \langle SN(\sim), Sub(y, x, z) \rangle, \langle SN(\exists), x, y \rangle \rangle)$$

(Sax(a) significa que **a** é o número da expressão de um axioma de substituição.)

J) Axioma da identidade:

$$IAx(a) \leftrightarrow \exists x_{x < a} (Vble(x) \wedge a = \langle SN(=), x, x \rangle)$$

(IAx(a) significa que **a** é o número da expressão de um axioma da identidade.)

K) Axioma da igualdade

$$EAX(a) \leftrightarrow (a = \langle NS(\vee), \langle NS(\sim), \langle NS(=), a, b \rangle \rangle, \langle NS(=), a, b \rangle \rangle \wedge Var(a) \wedge Var(b))$$

$$\begin{aligned}
& \vee \\
& (a = \langle NS(\vee), \\
& \langle NS(\sim), \langle NS(=), a, b \rangle \rangle, \\
& \langle NS(\vee), \\
& \langle NS(\sim), \langle NS(=), c, d \rangle \rangle, \\
& \langle NS(=), \langle NS(+), a, c \rangle, \langle NS(+), a, c \rangle \rangle \rangle \rangle \\
& \wedge \text{Var}(a) \wedge \text{Var}(b) \wedge \text{Var}(c) \wedge \text{Var}(d)) \\
& \vee \\
& (a = \langle NS(\vee), \\
& \langle NS(\sim), \langle NS(=), a, b \rangle \rangle, \\
& \langle NS(\vee), \\
& \langle NS(\sim), \langle NS(=), c, d \rangle \rangle, \\
& \langle NS(=), \langle NS(\cdot), a, c \rangle, \langle NS(\cdot), a, c \rangle \rangle \rangle \rangle \\
& \wedge \text{Var}(a) \wedge \text{Var}(b) \wedge \text{Var}(c) \wedge \text{Var}(d)) \\
& \vee \\
& (a = \langle NS(\vee), \\
& \langle NS(\sim), \langle NS(=), a, b \rangle \rangle, \\
& \langle NS(\vee), \\
& \langle NS(\sim), \langle NS(=), c, d \rangle \rangle, \\
& \langle NS(\vee), \langle NS(\sim), \langle NS(<), a, c \rangle \rangle, \langle NS(<), a, c \rangle \rangle \rangle \rangle \\
& \wedge \text{Var}(a) \wedge \text{Var}(b) \wedge \text{Var}(c) \wedge \text{Var}(d)).
\end{aligned}$$

$EAx(a)$ significa que a é o número da expressão de um axioma da igualdade, nos casos dos símbolos de função S , $+$ e \cdot e do símbolo de predicado \langle , que são os símbolos não-lógicos de $L(N)$. Notemos que o método é extensível a outras teorias com outros símbolos não-lógicos.

$$\mathbf{L}) ER(a, b) \leftrightarrow b = \langle SN(\vee), (b)_l, a \rangle$$

($ER([A], [B])$ significa que B é inferível de A pela Regra de Expansão.)

As próximas quatro definições correspondem semelhantemente à regra de contração, à regra associativa, à regra de corte, e à regra \exists – introdução.

M) Regra de contração:

$$CR(a, b) \leftrightarrow a = \langle SN(\vee), b, b \rangle$$

($CR([A], [B])$ significa que B é inferida de A , pela Regra de Contração.)

N) Regra associativa

$$AR(a, b) \leftrightarrow (a)_0 = SN(\vee) \wedge (a)_{2,0} = SN(\vee) \wedge b = \langle SN(\vee), \langle SN(\vee), (a)_1, (a)_{2,1} \rangle, (a)_{2,2} \rangle$$

($AR([A], [B])$ significa que B é inferida de A , pela Regra Associativa.)

O) Regra de corte

$$\begin{aligned}
TR(a, b, c) & \leftrightarrow (a)_0 = SN(\vee) \wedge (b)_0 = SN(\vee) \wedge (b)_1 \\
& = (SN(\sim), (a)_l) \wedge c = (SN(\vee), (a)_2, (b)_2)
\end{aligned}$$

($TR([A], [B], [C])$) significa que C é inferida de A e B , pela Regra do Corte.)

P) Regra \exists – introdução

$IR(a,b) \leftrightarrow (a)_0 = SN(\vee) \wedge (a)_{1,0} = SN(\sim) \wedge \sim Fr((a)_2, (b)_{1,1,1}) \wedge b = \langle SN(\vee), \langle SN(\sim), \langle SN(\exists), (b)_{1,1,1}, (a)_1 \rangle \rangle, (a)_2 \rangle$

($IR([A], [B])$ significa que B é inferida de A , pela *Regra de Introdução* do \exists .)

Notação: Designamos por $NLax_T$ o conjunto dos números das expressões dos axiomas não-lógicos de T , e, por For_T o conjunto dos números de expressão das fórmulas de T .

Temos que $NLax_T \subseteq For_T$, mas $NLax_T$ pode não ser recursivo. Pois, o conjunto de fórmulas que podem ser axiomas de uma teoria T é completamente arbitrário. Isso motiva uma definição de teoria axiomatizada, a partir do conceito de número de expressão.

Definição 19: Dizemos que a teoria T é axiomatizável se $NLax_T$ é recursivo.

Vamos, agora, definir algumas funções e predicados relativos a teorias. Logo, as definições, a seguir, aplicam-se à teoria N .

Se T é axiomatizável, as funções e predicados que definimos serão recursivos.

Observação: toda teoria finitamente axiomatizada é axiomatizada.

Em particular \mathcal{N} é axiomatizada.

Q) $Ax(a) \leftrightarrow PAx(a) \vee SAx(a) \vee FAX(a) \vee Eax(a) \vee NLax(a)$

(Ax é o conjunto dos números de expressão dos axiomas.)

Vamos agora atribuir um **número** a cada sequência finita de expressões, atribuindo o número $\langle [u_1], \dots, [u_n] \rangle$ para a sequência de u_1, \dots, u_n .

R) $Prf(a) \leftrightarrow Seq(a) \wedge lh(a) \neq 0 \wedge \forall i < lh(a) ((Ax((a)_i) \vee \exists j < i \exists k < i (ER((a)_j, (a)_i) \vee CR((a)_j, (a)_i) \vee AR((a)_j, (a)_i) \vee TR((a)_j, (a)_k, (a)_i) \vee IR((a)_j, (a)_i))) \wedge For((a)_i))$

(Prf é o conjunto dos números das provas.)

Gödel fez com que teoremas e provas fossem convertidos em números. Como um teorema e sua própria demonstração são relacionados, então, os respectivos números de Gödel podem ser relacionados.

S) $Pr(a, b) \leftrightarrow Pr f(b) \wedge a = (b)_{lh(b)-1}$

($Pr([A], b)$ significa que b é o número de uma prova de A .)

Notemos que este predicado é recursivo, e que, portanto, é calculável, isto é, dados dois números a e b , podemos calcular se $Pr(a, b)$, calculando o valor da sua função representante $K_{Pr}(a, b)$ e, portanto, verificar se b é o número de uma demonstração para a fórmula de número a .

Se b é o número de uma demonstração para a fórmula de número a , então $K_{Pr}(a, b) = 0$, caso contrário, $K_{Pr}(a, b) = 1$, e, portanto, dados dois números a e b , sempre podemos calcular se b é, ou não, o número de uma demonstração para a fórmula de número a .

Podemos, agora, definir o conjunto dos números das fórmulas que são teoremas de T .

Definição 20: dizemos que $\mathbf{Thm}(a)$ [ou $a \in \mathbf{Thm}$] por $\mathbf{Thm}(a) \leftrightarrow \exists xPr(a, x)$.

Como \exists é um quantificador convencional, então só podemos concluir que \mathbf{Thm} é recursivamente enumerável e não necessariamente recursivo. Entretanto temos o seguinte resultado.

Teorema 19: Se T é uma teoria axiomatizada, então, \mathbf{Thm}_T é recursivamente enumerável.

Demonstração: segue imediatamente da definição 15 de predicado recursivamente enumerável e da definição acima de \mathbf{Thm}_T .

Em particular \mathbf{Thm}_T é recursivamente enumerável.

Definição 21: (exclusiva para \mathcal{N})

T) $Num(0) = \langle SN(0) \rangle$

$Num(a + 1) = \langle Sn(s), Num(a) \rangle$ ou seja $Num(a)$ é a expressão de N que designa o número natural a .

Pela Tese de Church de que um procedimento é mecânico se, e somente se, pode ser simulado por um predicado recursivamente enumerável, temos, então, que a demonstração de teoremas de uma teoria axiomatizada é um procedimento mecânico. Cabe, agora, perguntar pelo inverso do teorema acima: se \mathbf{Thm}_T é recursivamente enumerável, então T é uma teoria axiomatizada⁵¹?

Assim, existe uma correspondência entre teorias formais e predicados recursivamente enumeráveis.

Passemos agora à definição de função representável em uma extensão de \mathcal{N} . Esta definição nos será útil para construir a fórmula de Gödel, na próxima seção. Notemos, que a definição de função representável nos permite utilizar a “maquinaria” demonstrativa de uma extensão T de \mathcal{N} , para calcular uma função representável em T .

⁵¹ Diz-se que uma teoria é axiomatizada se o conjunto de seus axiomas é finito.

Representabilidade

O núcleo dessa parte consiste mostrar que cada função ou predicado recursivos na estrutura de Peano pode ser representado nessa teoria.

Notação:

Denotamos \vdash_N por \vdash .

Os termos $0, S0, SS0, \dots$ são chamados numerais.

Denotamos por k_n o numeral que contém n ocorrências de S . Assim, os numerais são K_0, K_1, K_2, \dots

Definição 22: Sejam F uma função n -ária e A uma fórmula de \mathcal{N} ; x_1, \dots, x_n, y variáveis distintas. Dizemos que A com x_1, \dots, x_n, y representa F se, para todos a_1, \dots, a_n , a fórmula $\vdash_{A_{x_1, \dots, x_n}} [k_{a_1}, \dots, k_{a_n}] \leftrightarrow y = k_b$ ⁵², onde $b = F(a_1, \dots, a_n)$.

(A fórmula $A_{x_1, \dots, x_n} [k_{a_1}, \dots, k_{a_n}] \leftrightarrow y = k_b$ é teorema de \mathbf{F})

Definição 23: Seja P um predicado n -ário; A uma fórmula de \mathcal{N} e x_1, \dots, x_n variáveis distintas. Dizemos que A com x_1, \dots, x_n representa P , se para todo a_1, \dots, a_n $P(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \vdash_{A_{x_1, \dots, x_n}} [k_{a_1}, \dots, k_{a_n}]$ e $\sim P(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \vdash_{A_{x_1, \dots, x_n}} [k_{a_1}, \dots, k_{a_n}]$

Teorema 17: Se F é representável, e x_1, \dots, x_n, y são variáveis distintas, então existe uma fórmula A tal que A , com x_1, \dots, x_n, y representa F .

Demonstração:

Se A' com x'_1, \dots, x'_n, y' representa F , podemos supor que x_1, \dots, x_n, y não são ligadas em A' (na prática, são livres) e tomamos, então A como sendo:

$$A'x'_1, \dots, x'_n, y'[X_1, \dots, X_n, y]. \blacksquare$$

Observação: um resultado similar aplica-se a predicados representáveis.

Definição 24: Seja F uma função n -ária; \vec{a} um termo de \mathcal{N} , x_1, \dots, x_n variáveis distintas. Nós dizemos que \vec{a} com x_1, \dots, x_n representa F se para todo a_1, \dots, a_n

$$\vdash_{a_{x_1, \dots, x_n}} [k_{a_1}, \dots, k_{a_n}] = k_b \quad \text{onde } b = F(a_1, \dots, a_n).$$

Agora, se y é uma nova variável, então segue-se do teorema de igualdade que $y = a$ com x_1, \dots, x_n, y representa F .

Vamos agora considerar alguns exemplos.

⁵² $A_{x_1, \dots, x_n} [k_{a_1}, \dots, k_{a_n}]$ é obtida substituindo cada ocorrência livre de x_i por k_{a_i} para todo i .

Exemplo 1: A fórmula $A(x = y)$ com variáveis x_1, y (x, y) representa $P (=)$.

Basta mostrar que:

$$\vdash k_m = k_n \quad \text{se } m = n \quad (1) \quad (a_1 = a_2 \rightarrow x = y [k_{a_1}, \dots, k_{a_n}])$$

$$\vdash k_m \neq k_n \quad \text{se } m \neq n \quad (2)$$

(1) segue a partir dos axiomas de igualdade.

(2) segue do teorema de simetria, basta considerar $m > n$.

Fazemos isso por indução em n .

Se $n = 0$, decorre de **N1**.

Se $n > 0$, então, $\vdash k_m = k_n \rightarrow k_{m-1} = k_{n-1}$, por **N2**, e $\vdash k_{m-1} \neq k_{n-1}$, por hipótese de indução. Logo $\vdash k_m \neq k_n$ pelo teorema de tautologia.⁵³

Exemplo 2: Agora mostraremos que $x + y$ com x, y representando $+$.

$$\text{Temos de provar que } \vdash k_m + k_n = \vdash k_{m+n} \quad (3)$$

Provaremos por indução nos números naturais.

Se $n = 0$, (3) segue-se de **N3**. Suponha-se que (3) se mantém por algum n . Então pelo teorema de igualdade, $\vdash S(k_m + k_n) = k_{m+n+1}$

Disso, pelo teorema da igualdade e de **N4**, $\vdash k_m + k_{n+1} = k_{m+n+1}$ que é (3) com n substituído por $n + 1$.

$$\text{Uma prova semelhante, usando } \mathbf{N5}, \mathbf{N6}, \text{ e (3), mostra } \vdash k_m \cdot k_n = k_{mn} \quad (4)$$

Daí $x \cdot y$ com x, y representa \cdot .

Exemplo 3: Seja $x < y$ com x, y representando $[<]$.

Temos que mostrar que

$$\vdash k_m < k_n \quad \text{se } m < n \quad (5)$$

$$\vdash \sim k_m < k_n \quad \text{se } m \geq n \quad (6)$$

Provamos isso por indução em n .

Se $n = 0$, segue de **N7**.

Vamos supor que (5) e (6) valem para qualquer n .

Temos que: (**N8**): $\vdash k_m < k_{n+1} \leftrightarrow k_m < k_n \vee k_m = k_n$, se $m < n + 1$.

Se $m < n$, então $\vdash k_m < k_n$, por hipótese de indução

Se $m = n$, então $\vdash k_m = k_n$, por (1).

Em ambos os casos, $\vdash k_m < k_{n+1}$ por (7) e pelo teorema de tautologia.

⁵³ Teorema de tautologia (Post): Se B é uma consequência tautológica de A_1, A_2, \dots, A_n e $\vdash A_1, A_2, \dots, A_n$, então $\vdash B$. Corolário: toda tautologia é um teorema. Shoenfield (1967, p. 26-30) traz discussão e demonstração deste teorema.

Se $m \geq n+1$. Então, $\vdash \sim(k_m < k_n)$ pela hipótese indução e $\vdash \sim(k_m = k_n)$ por (2).

Daí $\vdash \sim(k_m < k_{n+1})$ por (7) e o teorema de tautologia.

[supomos $\vdash k_m < k_n$ se $m < n$

$\vdash \sim(k_m < k_n)$ se $m \geq n$ e mostramos que

$\vdash k_m < k_{n+1}$ se $m < n+1$

$\vdash \sim(k_m < k_{n+1})$ se $m \geq n+1$

Fizemos isto esgotando os casos.

$m < n+1 \rightarrow \vdash k_m < k_n$

$m \geq n+1 \rightarrow \vdash \sim(k_m < k_n)$

Certamente $k_m < k_n$ ou $\sim(k_m < k_n)$.

Lema 5. Para cada predicado P , P é representável se, e somente se, K_P é representável.

Demonstração:

Supomos que A , com x_1, \dots, x_n representa P .

Seja B a fórmula $(A \wedge y = k_0) \vee (\sim A \wedge y = k_1)$, então B com x_1, \dots, x_n, y representa K_P . De fato: se $P(a_1, \dots, a_n)$ então $\vdash A[k_{a_1}, \dots, k_{a_n}]$ e temos nesse caso, pelo teorema de tautologia, $\vdash B[k_{a_1}, \dots, k_{a_n}] \leftrightarrow y = k_0$

De modo similar, vale para $\sim P(a_1, \dots, a_n)$ ($K_P(\vec{a}) = 1$)

Vamos supor que A com x_1, \dots, x_n, y representa K_P .

Vamos ver que $Ay[0]$ com x_1, \dots, x_n representa P .

Se $P(a_1, \dots, a_n)$ então, $K_P(a_1, \dots, a_n) = 0$ e conseqüentemente $\vdash A[k_{a_1}, \dots, k_{a_n}, k_0]$

Substituindo k_0 por y e utilizando (1) e o teorema tautologia, temos $\vdash A[k_{a_1}, \dots, k_{a_n}, k_0]$.

Se $\sim P(a_1, \dots, a_n)$ procedemos da mesma forma, para $\sim P(a_1, \dots, a_n)$. ■

Notemos que P é representável em \mathcal{N} se, e somente se, sua função representante K_P é representável em \mathcal{N} .

Teorema da Representabilidade: uma função é recursiva se, e somente se, é representável em uma extensão axiomatizada de \mathcal{N} ; e um predicado é recursivo se, e somente se, é representável em uma extensão axiomatizada de \mathcal{N} .

A **demonstração** desta proposição se encontra em (SHOENFIELD, 1967, p. 128).

Notemos que para realizá-la é necessário mostrar que as funções I_1^n , $+$, \cdot e $K<$ são representáveis (cláusula **R1** da definição das funções recursivas), e que as funções representáveis são fechadas em relação à composição de funções (cláusula **R2** da definição das funções recursivas) e em relação ao operador μ (cláusula **R3** da definição das funções recursivas).

Em particular, um predicado ou uma função são recursivos se, e somente se, são representáveis em \mathcal{N} . Como vimos anteriormente, este resultado pode ser interpretado como uma aplicação da tese de Church, na medida em que identifica duas definições possíveis de calculabilidade.

Porém, pode ser demonstrado, sem apelo à tese de Church. Na realidade nos utilizaremos apenas da implicação direta deste teorema: se um predicado ou uma função são recursivos, então são representáveis em \mathcal{N} .

O Teorema de Church e o TIG

Com o teorema da representabilidade, estamos agora em condições de aplicar os resultados obtidos até esse momento ao problema de decisão para teorias.

Seja P um predicado binário. Para cada número b , definimos um predicado unário $P_{(b)}$ por $P_{(b)}(a) \leftrightarrow P(a, b)$.

O seguinte lema desempenha um papel fundamental.

Lema da Diagonal (Cantor): Sejam P um predicado binário e Q o predicado unário definido por $Q(a) \leftrightarrow P(a, a)$. Então Q é distinto de todos os $P_{(b)}$.

(significa negar qualquer posição na diagonal)

Demonstração:

Se Q é $P_{(b)}$, então $P(b, b) \leftrightarrow P_{(b)}(b) \leftrightarrow Q(b) \leftrightarrow \sim P(b, b)$. Contradição. ■

Seja z uma variável fixada (digamos, a primeira variável em ordem alfabética). Seja T uma extensão de \mathcal{N} . Para cada fórmula \mathcal{A} de T , definimos o conjunto:

$$E(\mathcal{A}) = \{n \in \mathbb{N} : \vdash_T \mathcal{A}_z [k_n]\}$$

Observação: Se T é inconsistente, cada $E(\mathcal{A}) = \mathbb{N}$, para todo \mathcal{A}

Lema 6: Se T é consistente, então $A \subseteq E(\mathcal{A})$ para todo conjunto recursivo A .

Demonstração:

Seja A um conjunto recursivo definido, e pelo teorema de representabilidade, seja \mathcal{A} tal que \mathcal{A} com z representa A .

Se $n \in A$, então, $\vdash_N \mathcal{A}_z[k_n]$; logo $\vdash_T \mathcal{A}_z[k_n]$; e assim $n \in E(\mathcal{A})$

Se $n \notin A$, então, $\vdash_{N\sim} \mathcal{A}_z[k_n]$; assim $\vdash_T \mathcal{A}_z[k_n]$. Pela consistência de T , logo $n \notin E(\mathcal{A})$. ■

Agora definimos $P(a, b) \leftrightarrow Thm_T(Sub(b, [z], Num(a)))$

$$(\mathcal{A}_z Num(a) = \mathcal{A}_z[k_a])$$

Temos que se $b = [A]$ então: $P(b) = E(\mathcal{A})$

Definimos agora Q por $Q(a) \leftrightarrow P(a, a)$, segue-se pelo lema da diagonal que Q é diferente de todos os $P_{(b)}$, logo de todos os $E(\mathcal{A})$, e, portanto, Q não é recursivo.

Mas Q tem a definição explícita

$$Q(a) \leftrightarrow \sim Thm_T(Sub(a, [z], Num(a)))$$

Como Sub e Num são recursivas, decorre que Thm_T não é recursiva e temos o teorema abaixo.

Teorema de Church: Se T é uma extensão consistente de \mathcal{N} , então T é indecidível.

Em particular, \mathcal{N} é indecidível.

Corolário - Thm_N é um conjunto recursivamente enumerável que não é recursivo.

Veremos na seção seguinte que o teorema de Church pode ser usado para mostrar que muitas outras teorias são indecidíveis.

Teorema da Negação. Um predicado P é recursivo se, e somente se, P e $\sim P$ são recursivamente enumeráveis.

Demonstração:

Se P é recursivo, então $\sim P$ também é recursivo; daí, ambos, P e $\sim P$, são recursivamente enumeráveis.

Agora, se P e $\sim P$ são recursivamente enumeráveis; digamos

$P(\vec{a}) \leftrightarrow \exists x Q(\vec{a}, x)$ e $\sim P(\vec{a}) \leftrightarrow \exists x R(\vec{a}, x)$, onde Q e R são recursivas.

Como para cada \vec{a} , devemos ter $P(\vec{a})$ ou $\sim P(\vec{a})$; então existe x de tal modo que qualquer $Q(\vec{a}, x)$ ou $R(\vec{a}, x)$ e definimos uma função F recursiva por $F(\vec{a}) = \mu x(Q(\vec{a}, x) \vee R(\vec{a}, x))$.

Afirmamos que $P(\vec{a}) \leftrightarrow Q(F(\vec{a}), \vec{a})$. **(14)**

De fato, se $Q(F(\vec{a}), \vec{a})$, então, $\exists x Q(\vec{a}, x)$; daí $P(\vec{a})$.

Se $\sim Q(F(\vec{a}), \vec{a})$, então $R(F(\vec{a}), \vec{a})$; assim $\exists x R(\vec{a}, x)$; assim $\sim P(\vec{a})$.

A partir da definição explícita (1), vemos que P é recursivo. ■

Lema 6: Se T é axiomatizada e completa, então T é decidível.

Demonstração:

Como T é axiomatizada, podemos definir funções recursivas F e K por

$$F(0, a) = a$$

$$F(n+1, a) = \langle SN(\sim), SN(\exists), \langle 2n \rangle, \langle SN(\sim), F(n, a) \rangle \rangle,$$

$$K(a) = F(a+1, a)$$

Se $a = [A]$ então, $F(0, a) = [A]$

$$F(1, a) = \langle SN(\sim), \langle SN(\exists), \langle 2 \rangle, \langle SN(\sim), a \rangle \rangle \rangle$$

$$F(2, a) = \forall z_0, \dots, \forall z_n A$$

⋮

Onde z_0, z_1, \dots são as variáveis em ordem alfabética.

Agora, se z_i ocorre em A , então $i < \bar{z}_i < \bar{A} = a$.

Portanto, $\forall z_0, \forall z_1, \dots, \forall z_n \mathcal{A}$ é uma fórmula fechada; e pela regra de generalização, é um teorema se, e somente se, \mathcal{A} é um teorema. Simbolicamente, $\vdash_T \forall z_0 \dots \forall z_n \mathcal{A}$ se, e somente se, $\vdash_T \mathcal{A}$ e pelo teorema da completude de T , \mathcal{A} não é um teorema se, e somente se, $\sim \forall z_0 \dots \forall z_n \mathcal{A}$ é um teorema. Temos, assim,

$$\sim Thm(a) \leftrightarrow \sim Sen(a) \vee Thm(\langle Sn(\sim), K(a) \rangle) \leftrightarrow \exists y (\sim Sen(a) \vee Pr(\langle Sn(\sim), K(a) \rangle, y))$$

(diz que: ou a não é sentença ou tem um teorema de negação.)

E $\sim Thm$ é recursivamente enumerável.

Como $\sim Thm$ é recursivamente enumerável segue que Thm é recursivo e T é decidível. ■

A partir do **lema 6** e do **teorema de Church**, obtém-se o seguinte resultado:

Teorema da incompletude (Gödel-Rosser): Se T é uma extensão axiomatizada de \mathcal{N} , então T é não completa.

Compreendendo a mensagem do TIG

O TIG tem implicações importantes sobre o método axiomático. A ideia do método axiomático é que, dados certos conceitos, introduzimos uma linguagem para *expressar* fatos sobre esses conceitos e, em seguida, introduzimos um sistema de axiomas para *provar* fatos sobre esses conceitos. O sistema axiomático deve ser tal que todos os teoremas do sistema de axiomas sejam verdadeiros; e esperamos que sejam de tal forma que todas as frases verdadeiras da linguagem sejam teoremas. Seja como for, certamente, espera-se que os axiomas e as regras do sistema de axiomas sejam de tal forma que se possa decidir o que é e o que não é uma prova. Caso contrário, poderíamos alcançar o nosso objetivo, simplesmente adotando todas as frases verdadeiras como axiomas.

Agora, suponha que os conceitos são os de \mathcal{N} e que a linguagem selecionada é $L(\mathcal{N})$. Suponha ainda que desejamos que nosso sistema de axiomas seja formalizável como uma teoria. A exigência de que sejamos capazes de reconhecer uma prova implica que devemos ser capazes de reconhecer um axioma não-lógico quando virmos um. Em vista da tese de Church, isto significa que a nossa teoria T deve ser axiomatizada. Se as frases verdadeiras de \mathcal{N} , e somente elas, são prováveis em T , então T deve ser equivalente a $Th(\mathcal{N})$, e, portanto, deve ser uma extensão completa de \mathcal{N} . Mas isso é impossível pelo teorema da incompletude.

Se estamos dispostos a discutir um pouco mais informalmente, podemos ver que a restrição a teorias ou à linguagem $L(\mathcal{N})$ é irrelevante para o argumento. Suponha que temos um sistema de axiomas em que cada fórmula fechada A de \mathcal{N} é expressa por uma fórmula A^* ; e suponhamos que possamos realmente construir A^* quando A é dado. Suponhamos, ainda, que A^* é demonstrável no nosso sistema de axiomas se, e somente se, A é verdadeiro em \mathcal{N} . Finalmente, suponhamos que o nosso sistema de axiomas satisfaz a exigência de que podemos reconhecer uma prova.

Então, nós podemos decidir se A é verdadeiro ou falso. Tudo o que temos a fazer é olhar em todas as sequências de fórmulas em nosso sistema de axiomas, até que cheguemos a um que é ou uma prova de A^* ou de $(\sim A)^*$. Se for uma prova de A^* , A é verdadeira; se é uma prova de $(\sim A)^*$, A é falso. Assim, temos um método de decisão para $Th(\mathcal{N})$, o que

é impossível pelo teorema de Church. Somos assim levados à seguinte conclusão: não existe um sistema de axiomas correto em que se possa provar todos os fatos verdadeiros sobre os números naturais expressivos em $L(\mathcal{N})$ e, muito menos, todas as verdades matemáticas.

O teorema da incompletude nos diz que se T é uma extensão axiomatizada consistente de \mathcal{N} , então alguma fórmula fechada A de T é indecidível em T . Acontece que, se examinarmos os detalhes da prova de perto, vemos que podemos realmente construir a fórmula A quando T é dado.

Decorre do TIG que não existe uma teoria axiomatizada sobre os números naturais cujas todas suas verdades sejam teoremas da aritmética dos naturais.

Isso significa que não existe procedimento mecânico para gerar todas as sentenças válidas da aritmética. Em outras palavras, não se pode construir uma teoria axiomatizada que contenha todas as sentenças válidas sobre números naturais.

A demonstração de Gödel evidencia que há uma estreita relação entre as teorias axiomatizadas e os processos mecânicos, no sentido da tese de Church. Assim, construir uma teoria que contenha todas as fórmulas válidas sobre números naturais não é uma atividade mecânica e não pode ser simulada por uma função recursiva.

Dessa forma, divisamos que processos mecânicos que se referem à determinação de teoremas e não teoremas da aritmética envolvem invariavelmente capacidades humanas não-mecânicas. O que mostra o protagonismo insubstituível do homem ao construir até mesmo a aritmética dos naturais.

Como resultado do TIG, tem-se que a aritmética não é recursivamente enumerável. De fato, pois, se o TIG mostra a não existência de procedimento mecânico para gerar todas as fórmulas válidas sobre números naturais, e se assumimos que um procedimento é mecânico se, e somente se, pode ser simulado por um predicado recursivamente enumerável, disso deduz-se que ela não é recursivamente enumerável.

Outra consequência é: não existe um procedimento mecânico capaz de gerar toda a aritmética e, conseqüentemente, não existe um procedimento mecânico capaz de gerar toda a Matemática.

Esse resultado é estabelecido na prova de Gödel quando se mostra que a fórmula de Gödel, da aritmética é verdadeira, mas não é demonstrável por essa teoria. Um ponto crucial da demonstração de Gödel é a determinação de que a fórmula é verdadeira. Isso aponta que

a capacidade de identificação da validade de fórmulas não pode ser descrita por uma teoria e que, portanto, não é mecânica.

Embora esta seja uma característica restritiva importante, não deve ser mal interpretada. Isto não diz que há uma verdade matemática que não pode ser provada em qualquer sistema de axiomas correto. Claramente não é assim, já que se poderia obter um novo sistema correto, adicionando esta verdade como um novo axioma. Uma questão importante é se toda a verdade matemática (ou pelo menos a cada verdade matemática exprimível em $L(\mathcal{N})$) pode ser comprovada a partir de axiomas que sejam evidentemente verdadeiros.

Por que provar esse teorema outra vez?

Neste trabalho, o TIG é demonstrado baseando-se em dois textos distintos. Por fim, tem-se duas demonstrações do mesmo resultado, uma seguindo os passos de Nagel e Newman (1973) e outra valendo-se da obra de Shoenfield (1967). Aclarando o porquê disso, apresentaremos uma discussão que expõe o modo como compreendemos a existência de demonstrações alternativas em Matemática.

A respeito de provas alternativas, Dawson (2015) usa uma metáfora para dizer do porquê de matemáticos provarem novamente teoremas, ele compara matemáticos à alpinistas e afirma que estes são levados a resolver problemas já resolvidos pela mesma razão que alpinistas são levados a escalar montanhas que já foram escaladas. Ele entende que os matemáticos o fazem porque se veem frente aos problemas e tal como no montanhismo, mesmo já existindo registro de rotas realizadas que alcançam o topo da montanha, pode ser desafiador a realização de outra trilha pelos alpinistas. Por um lado, há alpinistas que sobem usando apenas a bússola e desdenham oxigênio suplementar e ajudas mecânicas, assim como há matemáticos que consideram suficiente régua e compasso, por exemplo. As novas trilhas podem apresentar caminhos alternativos, percepções incomuns, exibir economia de meios, assim como também ocorre nas provas matemáticas.

Uma vez realizadas as duas demonstrações, fica claro que elas foram criadas para atender a objetivos diferentes e são provas diferentes do TIG. O argumento pedagógico que nos parece evidente em cada uma delas é suficiente para demonstrar suas diferenças. No entanto, abaixo apresentamos nosso estudo que busca compreender o porquê de haver várias demonstrações para um mesmo teorema.

Demonstrações alternativas podem surgir simplesmente como expressões dos padrões individuais de pensamento, talvez, refletindo predileções ou preferências para utilizar as ferramentas particulares. E podem aparecer independentes das necessidades de corrigir erros, eliminar hipóteses supérfluas, ser mais inteligível ou aumentar alcance do resultado. Dawson põe em relevo que provas alternativas servem para aumentar a confiança no resultado que foi provado

Tornando-o inquestionavelmente verdadeiro, pois a maioria dos resultados matemáticos estão numa rede geral de teoremas que podem ser alcançados em muitas maneiras, que a sua incorreção é simplesmente impensável (DAWSON, 2015, p. 11).

A confiança em resultados matemáticos é baseada nas muitas deduções que levam à conclusividade, pois, os vários raciocínios dedutivos matemáticos que levam à mesma conclusão formam uma cadeia mais forte do que apenas um elo, uma vez que são intimamente conectadas. Compreendemos que a atividade matemática se estende também a criar provas alternativas de resultados. É comum nos depararmos com textos que trazem novas provas de teoremas já demonstrados. Vide exemplo das muitas demonstrações do teorema de Pitágoras, porém, são escassas as discussões de haver ou não distinção entre elas, seja por historiadores, filósofos da matemática ou lógicos (DAWSON, 2015).

Henkin (1996) e Halmos (1985) dissertam, respectivamente, sobre o processo de demonstração de um resultado provado por ele próprio e sobre a vida profissional de um matemático. Em seus discursos o matemático é tido como pessoa humana que, no emaranhado de relações está com outras pessoas e necessita expor suas produções e manter-se ativo em seu ambiente de trabalho e de pesquisa, pois criação e publicação de resultados é uma parte regular de trabalho de um matemático profissional e de um professor de matemática. Nessa esfera, também captamos que provas alternativas podem responder à algum intento pessoal de compreensão, como é o caso de Cifuentes (2013)⁵⁴, ou pode ser a expressão de alguma compreensão obtida, a qual desejou-se explicitar com roupagem distinta das conhecidas por ele.

Aqui neste texto, prova formal e demonstração em matemática são tratadas como sinônimos. Embora essa discussão seja importante, optamos por apenas tangenciá-la a fim de não desviarmos nosso foco neste momento. A respeito do que seja uma prova ou uma

⁵⁴ Trata-se de um texto (que não foi publicado) intitulado “A Verdade Matemática, mais que um Objeto de Conhecimento, é um Objeto de Contemplação” escrito, segundo o próprio autor afirmou verbalmente, como um exercício de compreensão dos dois resultados mais profundos da Matemática: o teorema de indefinibilidade de Tarski e o de incompletude de Gödel.

demonstração, Garnica (1995; 2002; 2010) nos permite compreender que ambas denotações são sinônimas e que uma prova (bem-sucedida, assim o é, por produzir convicção de que o resultado que propõe a provar é verdade) depende não só da correção formal do argumento, mas de conhecimentos e da sofisticação matemática do público ao qual é apresentada, bem como da comunidade matemática em geral.

A noção do que constitui uma prova em uma teoria formalizada é perfeitamente precisa.⁵⁵ Conforme se sabe essa noção de prova é central em Lógica Matemática e levou a importantes avanços na compreensão de muitas questões fundamentais e metamatemáticas que permitiram acreditar que todas as teorias matemáticas atuais podem ser formalizadas no âmbito de Zermelo-Fraenkel de primeira ordem.

Embora estejamos falando de provar teoremas, o mais adequado aqui e o que trataremos será *demonstração*. Provas formais são recentes e aparecem quase exclusivamente em textos de Lógica Matemática ou Ciências da Computação. O discurso matemático envolve demonstrações pela justificativa principal da tentativa de tornar compreensível e convencer o leitor da veracidade do resultado.

Assim,

Uma *demonstração* em S (um sistema formal, pensado como uma linguagem, um conjunto de sinais e um conjunto de regras para a manipulação de sinais) é uma sequência finita não vazia de sentenças de S tal que cada uma delas é um axioma ou uma consequência imediata, por regras de inferência admitidas em S , de suas sentenças anteriores na sequência. Um teorema de S é uma sentença A de S tal que existe uma demonstração em S onde A é a última sentença da sequência. (GARNICA, 2010, p. 70).

Uma vez clareado o entendimento de demonstração matemática, passamos a pensar sobre o que faz com que demonstrações alternativas sejam distintas. Dawson questiona se uma prova baseada em hipóteses menos ou mais fracas deve/pode ser considerada como constituindo o mesmo ou um teorema mais forte. Sobre isso ele articula:

Suponha, por exemplo, que um teorema T é primeiramente provado a partir de um conjunto H de hipóteses, mas que mais tarde uma prova de T que emprega como hipóteses apenas algum subconjunto P de H é encontrada. Assim, nós temos duas provas diferentes de T , ou temos provado no primeiro caso a implicação $\Lambda H \rightarrow T$ (onde ΛH indica o conjunto de todas as hipóteses em H) e, no segundo caso, a implicação $\Lambda P \rightarrow T$ (um resultado mais forte)? Formalmente, a distinção é meramente uma questão de perspectiva, uma vez que o Teorema da

⁵⁵ “É uma sequência finita de fórmulas bem formadas, a última das quais é a declaração para ser provada, e cada uma dos quais é ou um axioma, uma hipótese, ou o resultado de aplicação de uma de uma lista específica de regras de inferência para fórmulas anteriores da sequência”. (DAWSON, 2015, p. 03).

Dedução para a lógica de primeira ordem estabelece a equivalência de uma $\mathbf{A} \vdash \mathbf{T}$ e $\vdash \Lambda \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{T}$ para qualquer conjunto \mathbf{A} de axiomas não-lógicos. (DAWSON, 2015, p. 2).

Segue que duas provas do mesmo teorema baseadas em conjuntos logicamente inequivalentes de premissas devem ser consideradas diferentes, visto que a totalidade do contexto em que uma prova é válida não é o mesmo que aquele em que a outra é. Compreendemos que as duas demonstrações do TIG que realizamos são diferentes principalmente atendendo ao objetivo pedagógico a que se apresentam.

Historicamente, os argumentos aceitos como convincentes numa época podem não ser assim entendidos em outra, pois o conceito de rigor não tem permanecido constante. Pedagogicamente, uma prova rigorosamente correta pode não ser convincente para aqueles que não têm a maturidade matemática requisitada, chegando ao ponto de alguns resultados parecerem tão óbvios que a sofisticação matemática é necessária até mesmo para entender a necessidade de que eles sejam provados, como consideramos que seja o caso da prova da consistência da aritmética.

O reconhecimento de tais dimensões abre oportunidade para a discussão sobre necessidade e distinção de provas alternativas em Matemática. Dawson (2015, p. 4-5) argumenta que provas podem ser diferentes:

i) Podem ser diretas ou construtivas, podem ser distinguidas daquelas que não são. Uma prova que emprega uma técnica particular (indução matemática, por exemplo, ou determinada por uma regra de inferência) difere taticamente de uma que não o faz;

ii) Uma prova pode dar uma maior informação do que uma outra;

iii) Provas diferentes podem produzir diferentes consequências, um resultado empregado como lema em uma demonstração de um teorema pode aparecer como um corolário desse teorema se for provado por outros meios;

iv) Uma prova pode ser válida num contexto mais amplo do que outra e pode ser compreensível para um público específico, enquanto para outro não;

v) As provas também podem diferir na forma como noções primitivas são organizadas nos diferentes níveis dos conceitos, refletindo uma interação entre provas e definições.

Ainda, ao se pensar no que pode diferenciar provas, deve-se, evidentemente, reconhecer que as diferenças entre elas são, muitas vezes, uma questão de grau, que envolve o julgamento se são essencialmente diferentes ou simples variantes uma da outra, ou se são *mais simples*, ou *mais pura*, do que outra.

No que tange às razões pelas quais os matemáticos têm realizado provas alternativas de resultados conhecidos, Polya (1964), quando expõe sua compreensão sobre porque resolver o mesmo problema de outra maneira, afirma:

Mesmo que tenhamos êxito em encontrar uma solução satisfatória, nós ainda podemos estar interessados em encontrar uma outra solução. Desejamos nos convencer da validade de um resultado teórico por duas diferentes derivações como nós desejamos para perceber um objeto material através de dois sentidos diferentes. Tendo encontrado uma prova, queremos encontrar uma outra prova de como queremos tocar um objeto depois de tê-lo já visto. (POLYA, 1964, p. 61-62).

Além dessa perspectiva apresentada por Polya, quatro são os motivos, segundo Dawson (2015), que impulsionam a busca por novas provas de resultados estabelecidos anteriormente: para corrigir os erros e preencher as lacunas percebidas em argumentos anteriores (os esforços de Euclides para evitar, sempre que possível, provas que envolvessem o emprego de superposição de figuras); para eliminar hipóteses supérfluas ou controversas, (as tentativas persistentes, antes às obras de Bolyai e Lobachevsky, para deduzir o postulado paralelo dos outros axiomas da geometria euclidiana); para aumentar o alcance da validade de um teorema (um exemplo prova de completude de Henkin para lógica de primeira ordem, Henkin (1996), aplicável para linguagens finitas bem como para aquelas infinitas); para realizar provas mais perspicazes, (que encerrassem objeções, por exemplo, as dos matemáticos dos séculos XVI e XVII em relação à prova de Arquimedes pelo método de exaustão)

O aspecto exemplificado pelo desejo de evitar o emprego de argumentos de superposição em provas euclidianas diz de buscar por se conseguir realizar a demonstração utilizando método puro. Essa preocupação é distinta da do rigor em que uma prova pode ser considerada deficiente. Um episódio da busca pela pureza do método pode ser a antiga exigência grega de que construções geométricas sejam realizadas somente com régua sem numeração e compasso. Outro caso seria a busca para encontrar uma prova elementar do teorema dos números primos e outro ainda abarca a tentativa falha de Hilbert para estabelecer a consistência da aritmética formalizada de Peano, utilizando métodos formalizáveis no âmbito da própria teoria. Um desdobramento do TIG mostra que uma prova pura da consistência da aritmética é impossível.

Em um sentido um pouco mais amplo, a preocupação com o decoro metodológico se reflete na prática matemática como o desejo de substituir provas indiretas ou não-constitutivas por aquelas diretas ou constitutivas.

A simplicidade de uma prova é um critério estético que tem sido perseguido, porém o julgamento sobre se uma prova é mais simples do que outra, tem até agora sido feito principalmente com base em critérios informais, pois o conceito de simplicidade não é formalmente preciso. Nos escritos de Hilbert, acessados após sua morte, localizou-se o registro daquele que seria o 24º problema na lista que elaborou para a apresentação em seu famoso discurso no Segundo Congresso Internacional de matemáticos de 1900. Esta nota dizia da necessidade de se ter claro os critérios de simplicidade de uma prova, com o entendimento de que sob um dado conjunto de condições, pode haver uma prova mais simples.

A respeito de simplicidade de provas, uma prova pode ser mais simples do que outra, em vários aspectos: pode ser significativamente mais curta; pode envolver menos pré-requisitos conceituais; e, pode reduzir a extensão de cálculos a ser realizado ou o número de casos a ser considerado.

A Matemática é, afinal, um esforço humano. A habilidade de provar teoremas é melhor desenvolvida por tentativas de provar resultados dela própria, e no curso de fazê-lo, pode-se conceber um argumento não dado anteriormente, pois as pessoas pensam de distintas maneiras. Em alguns casos, podem não estar cientes de outras provas que foram dadas por diferentes pessoas. Por exemplo, pode surgir em diferentes culturas ou um novo resultado pode ser descoberto, em simultâneo e de forma independente, por diferentes indivíduos com diferentes argumentos.

As provas de Nagel e Newman (1973) e Shoenfield (1967) são taticamente diferentes e têm diferentes endereçamentos. Diferem por oferecerem distintos teores de informação, embora produzam consequências equivalentes. Podemos afirmar que a diferença entre as duas provas pode ser compreendida também como uma questão de “qualidade”, enquanto propriedade que determina suas essências, de abordagem. Uma, (Nagel e Newman (1973)), é ilustrativa da demonstração original de Gödel (1977a) de 1931 e objetiva tornar acessível ao não especialistas o teor da prova original; a outra, (Shoenfield (1967)), realiza-se em um livro de Lógica Matemática num capítulo⁵⁶ específico intitulado *Incompletude e Indecidibilidade*.

⁵⁶ Capítulo 1: A natureza da Lógica Matemática; Capítulo 2: Teorias de Primeira Ordem; Capítulo 3: Teoremas em Teorias de Primeira Ordem; Capítulo 4: O Problema da Caracterização; Capítulo 5: A Teoria de Modelos; Capítulo 7: Teoria da Recursão; Capítulo 8: Os Números Naturais; Capítulo 9: Teoria dos Conjuntos.

A demonstração de Nagel e Newman (1973) objetiva esclarecer o argumento utilizado por Gödel em sua demonstração de 1931 e clarear alguns pontos na Lógica em que são relacionados ao resultado. Eles afirmam que o raciocínio da prova de Gödel na época em que foi apresentado era muito novo e só alguns lógicos que estivessem intimamente familiarizados com a literatura técnica desse campo altamente especializado poderiam acompanhar o argumento com compreensão. Nesse sentido, este ensaio busca tornar a substância do achado de Gödel e o caráter de sua prova acessíveis ao não especialista.

A demonstração de Shoenfield (1967) para o TIG, por se realizar em um livro de Lógica Matemática, utiliza na demonstração os tópicos anteriores do sumário. Especificamente, inicia discutindo calculabilidade no âmbito de um sistema formal para, em seguida, definir funções recursivas, e explicitar como obter estas funções. Em prosseguimento, apresenta resultados que permitem expandir essa classe de funções. Feito isso, Shoenfield toma o caminho de demonstrar a existência de uma função que permite atribuir um número natural a cada sequência finita de números naturais, a função *beta*, que é recursiva e que tem propriedade de: para cada n fixo atribuir recursivamente um número de sequência $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ para cada sequência a_1, a_2, \dots, a_n ; se a é um número que é um número de sequência, determinar recursivamente o comprimento da sequência da qual a é o número e , também de determinar recursivamente o *i-ésimo* elemento da sequência da qual a é um número de sequência. E segue de acordo com o que podemos acompanhar no item anterior.

Ambas executam uma prova construtiva, ou seja, a que permite efetivamente derivar uma contradição que dá origem ao resultado de que não existe nenhuma demonstração de consistência para a aritmética que possa ser formalizada nessa teoria quando ela for consistente.

Sobre a demonstração própria de Gödel (1977a), Lannes (2009) afirma que Turing e Church com suas teorias, participaram da divulgação e da simplificação da prova do TIG. Uma vez que sua importância, principalmente para os empenhados na fundamentação da Matemática, dependia do conhecimento de sua demonstração, esse resultado foi aos poucos sendo recebido no seio da comunidade.

Vale dizer também que duas provas diferentes podem ter validade com amplitude diferente num mesmo contexto, ou que uma pode ser compreensível para um público específico enquanto a outra não. Isso reflete o que compreendemos a respeito das duas demonstrações que motivaram esse estudo.

Nossa proposta envolve o trabalho com as duas demonstrações aqui expostas, em momentos diferentes. Estarmos interessados em “tocar” o resultado do TIG, experienciando-o por meio dessas duas demonstrações, que compreendemos ser apropriadas para evidenciar a estrutura da demonstração realizada por Gödel. Por um lado, uma demonstração apresenta o método utilizado por Gödel no processo de aritmetização da metamatemática, pelo qual ele constrói o indecidível e o conclui como tal, e, em seguida prova o corolário que afirma que a prova da consistência da aritmética é impossível nessa teoria. Por outro lado, a outra expõe a formalização da noção intuitiva de computável, que traz em si as funções recursivas, oferecendo a oportunidade da construção passo a passo da função β , a qual atribui um número natural a cada sequência finita de números naturais, de tal forma que as funções e predicados associados sejam recursivos. Essa função compõe o método para encontrar uma fórmula verdadeira sobre os números naturais no sistema formal \mathcal{F} que contém os axiomas de Peano.

Nossa experiência com o TIG, inicialmente por meio de autores que explanavam sobre as consequências que ele estabelecia para a Matemática e para além dela, e, posteriormente, estudando essas demonstrações, sustenta a apresentação dessa proposta. O pano de fundo da proposta aqui apresentada diz da imprescindibilidade da vivência com o TIG, que aqui é sugerida inserindo-o entre os conteúdos já elencados nas ementas, explorando as facetas desse resultado, tal qual ele se mostrou para nós em nossas vivências com este resultado.

CAPÍTULO III:

A MATEMÁTICA APÓS O TIG

Neste capítulo apresentamos nosso entendimento de como a Matemática acolheu o TIG, trazendo principalmente a postura adotada por Bourbaki revelada em suas obras e na atitude expressa de seguir fazendo Matemática, mesmo depois do choque da prova da existência do indecidível e conseqüentemente da incompletude de toda teoria que contenha a aritmética de Peano em sua formalização.

A Matemática após o TIG

O que ainda pode a Matemática após o TIG? Essa pergunta é pertinente numa época em que o grupo Bourbaki⁵⁷ se colocava a tarefa de estruturar a Matemática. No bojo da questão acima, a respeito do TIG, Bourbaki em *Eléments*⁵⁸ de *Mathématique: Théorie des Ensembles*, expõe que, mesmo sabendo do resultado da incompletude, a proposta do grupo, de estruturar a Matemática, valer-se-ia do método axiomático, tendo sempre em vista a possibilidade de uma formalização completa das teorias e com perfeito rigor. O grupo assume uma atitude realista e, em relação à questão da consistência da aritmética, afirma que uma vez que, involuntariamente, seja levado a uma contradição, não permitiria que essa, a contradição encontrada, permanecesse sem tornar inútil a teoria em que ela ocorresse.

Vale dizer que esta obra é o primeiro dos vários livros de Bourbaki e isso a que estamos nos referindo aparece na introdução de sete páginas da obra, em que são apresentadas questões do método que o grupo se propunha a seguir e as crenças que os moviam na proposta que estavam publicando.

⁵⁷ Nicolas Bourbaki é o pseudônimo coletivo de um grupo de matemáticos franceses que objetivavam fundamentar toda a Matemática na teoria dos conjuntos. Os membros fundadores foram: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné e André Weil. O grupo lutou por mais rigor e simplicidade, criando uma nova terminologia e conceitos ao longo dos tempos. Escreveu uma série de livros que começou a ser editada em 1935 e expunha a Matemática Moderna Avançada para que pudessem servir de referência a estudantes e pesquisadores. Embora o Grupo Bourbaki seja oficialmente conhecido como a Associação dos colaboradores de Nicolas Bourbaki. Para saber mais sobre Bourbaki, pode-se, entre outros títulos e obras, ler *Scientific American Brasil – Coleção Gênios da Ciência*, 2012, p. 68-98.

⁵⁸ “Era um livro texto para ensinar a análise matemática sob novas bases. O título de *Elementos* já indicava o desejo de codificar os estilos de matemática segundo os padrões defendidos pelo grupo, mas aos poucos o empreendimento foi estendido para compreender todos os ramos da matemática. Ao invés da diversificação de métodos e objetos que tinha imperado na matemática até aquele momento.” (ROQUE, 2012, p. 475).

A menção ao nome de Gödel nesta obra de Bourbaki aparece na página E.L 12 no terceiro parágrafo em comentário sobre a impossibilidade da prova da consistência da aritmética:

Para escapar desse dilema, a consistência de uma linguagem formalizada teria de ser "provada" por argumentos que poderão ser formalizados em uma linguagem menos rica e, conseqüentemente, mais digna de confiança; mas um famoso teorema de meta-matemática, devido a Gödel, afirma que isto é impossível para uma linguagem deste tipo que devemos descrever, que é rica o suficiente em axiomas para permitir a formulação dos resultados de aritmética clássica. (BOURBAKI, 1968, p. 12, tradução nossa).⁵⁹

Na continuação da apresentação das ideias que norteariam suas obras, Bourbaki (1968) argumenta, em relação à teoria dos conjuntos, que das provas relativas de consistência, que ligam logicamente as várias teorias matemáticas à teoria dos conjuntos, segue que qualquer contradição encontrada em alguma teoria deve dar origem a uma contradição na teoria dos conjuntos. Contudo, por essa razão, não se pode deduzir a consistência da teoria dos conjuntos.

Ainda sobre isso:

No entanto, durante o meio século desde os axiomas desta teoria foram pela primeira vez precisamente formulados, esses axiomas foram utilizados para inferir conclusões nos mais diversos ramos da matemática sem chegar a uma contradição, de modo que temos motivos para esperança de que a contradição nunca vai surgir. (BOURBAKI, 1968, p. 13, tradução nossa).⁶⁰

Prosseguindo, Bourbaki comenta que se a contradição vir de outra forma é porque ela é inerente aos princípios fundamentais da teoria dos conjuntos, fato esse que exige modificações, semelhantemente ao que aconteceu quando surgiram os paradoxos nessa teoria e esta foi revisada. Por isso, adotou-se então essa linguagem formalizada que é essencialmente equivalente a essa que eles descrevem na obra *Elementos de Mathematica: Teoria dos Conjuntos* e que utilizam em sua proposta de estruturação e formalização da Matemática.

⁵⁹ Do original: "To escape this dilemma, the consistency of a formalized language would have to be "proved" by arguments which could be formalized in a language less rich and consequently more worthy of confidence; but a famous theorem of metamathematics, due to Gödel, asserts that this is impossible for a language of the type we shall describe, which is rich enough in axioms to allow the formulation of the results of classical arithmetic". (BOURBAKI, 1968, p. 12).

⁶⁰ Do original: "Nevertheless, during the half-century since the axioms of this theory were first precisely formulated, these axioms have been applied to draw conclusions in the most diverse branches of mathematics without leading to a contradiction, so that we have grounds for hope that no contradiction will ever arise." (BOURBAKI, 1968, p. 13).

Na sequência, Bourbaki (1968) apresenta que encararão o futuro com serenidade, pois, a Matemática, em seus mais de dois mil e quinhentos anos, foi corrigindo seus erros e se enriquecendo. Baseados na experiência com as superações da própria Matemática, o grupo Bourbaki crê que esta ciência está destinada a sobreviver, mesmo que uma contradição apareça subitamente.

Entendemos que na explicitação do grupo da compreensão deles de que a Matemática vai se desenvolvendo e com o passar do tempo ela resolve uns problemas e se dá conta da existência de outros, se tem implicitamente a consideração ao TIG, tomado por eles como um dado expresso que afirma algo a mais do que apenas a experiência observada, mas que será contornada ou superada em algum momento.

Compreendemos que, para Bourbaki, a ameaça trazida pelo TIG estava tão longe da base da teoria que podia ser ignorado. Desse modo, os bourbakistas, conscientes do fenômeno da incompletude, seguiam, conforme acima exposto, norteados pelo ideal de um rigor perfeito em sua obra e da possibilidade de fazer a formalização total da Matemática.

A compreensão de Alain Connes (1996), a respeito do TIG, enfatiza o modo como Bourbaki se posicionou fazendo Matemática após esse teorema, dada a postura dele de continuar esperando nunca encontrar um indecidível.

O teorema afirma apenas que, com um número finito de axiomas não podemos ter resposta para tudo. Porém, se uma questão não é decidível, sob condição de tê-la demonstrado, poderemos atribuir-lhe uma resposta e continuar a raciocinar. Isto significa que cada nova questão indecidível propicia uma bifurcação, a partir do momento em que escolhemos uma resposta positiva ou negativa. O mundo no qual nos movemos comporta diversas bifurcações possíveis. Esse é todo seu significado. Uma vez atribuída uma resposta à questão, podemos continuar e nos colocar novas questões. Antigas questões que não o eram tornam-se então decidíveis... cada questão indecidível cria uma bifurcação e impõe uma escolha. Por exemplo, no teorema de Paul Cohen sobre a hipótese do contínuo⁶¹ ocorre uma bifurcação: escolhe ou que não existem números cardinais entre o divisível e o contínuo, ou que existem trinta e seis deles. A primeira resposta se impõe por sua simplicidade. Mas é muito importante que as escolhas de resposta incidam sobre as questões mais primitivas possíveis

⁶¹ A *hipótese do contínuo* (não existe nenhum conjunto com mais elementos do que o conjunto dos números inteiros e menos elementos do que o conjunto dos números reais) foi proposta por George Cantor que acreditava que ela era verdadeira. No entanto, graças aos trabalhos de Gödel, que demonstrou que a negação da *hipótese do continuum* não poderia ser provada a partir dos axiomas de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha, se eles são consistentes, e de Paul Cohen, que provou que a *hipótese do continuum* também não poderia ser provada a partir dos mesmos axiomas, se eles são consistentes, tem-se que é independente dos axiomas de Zermelo-Fraenkel. A palavra *indecidível*, tem o sentido da teoria da prova e se relaciona aos teoremas de Gödel, sobre uma sentença não ser demonstrável nem refutável em um sistema dedutivo específico. É sabido por nós que, por vezes, a palavra independente é utilizada como sinônimo de indecidível, mas também somos cientes que a hipótese do contínuo é independente e diferente de ZF que é um *indecidível* como o de Gödel. Sugerimos Gödel (1977b) como leitura imprescindível sobre esse tema.

e existem de fato questões mais primitivas do que a do contínuo. (CHANGEUX; CONNES, 1996, p. 174).

Há controvérsias sobre Bourbaki ter acolhido o resultado do TIG com atenção e entendimento à altura de sua importância. Mathias (1992), em relação ao acolhimento e referência de Bourbaki ao TIG, adjetiva a postura do grupo como aquela que ignorou este resultado. Este autor apresenta um estudo das principais obras de Bourbaki das décadas de 1930 e 1940 e, passando por textos de Henri Cartan, Jean Dieudonné e André Weil, interpreta que Bourbaki demonstra ausência de entendimento dos distintos significados dos termos *verdadeiro* e *demonstrável* tratados por Gödel. Para Mathias, isso revela uma consciência cética dos resultados de Gödel, presumindo que o leitor conheça o resultado. Mathias entende que ao evitar tocar no nome ou considerar o TIG, Bourbaki não deu a atenção devida ao resultado tendo-se em conta o vigor de sua mensagem.

Em relação ao efeito que Gödel teve sobre Bourbaki, para Mathias (1992):

Quase se pode dizer que eles o ignoraram, exceto que o tom de algumas das suas obras sugere um conflito entre uma consciência inquieta que algo aconteceu e um desejo de fingir que não aconteceu. É como se tivessem descoberto que estavam em uma ilha com um dragão e em resposta escolheram acreditar que, se ao dragão não foi dado nenhum nome, então ele não existe. (MATHIAS, 1992, p. 6, tradução nossa).⁶²

Mathias (1992) entende que a atitude de Bourbaki não considera a importante contribuição de Gödel para questões fundamentais e questiona o motivo. Na tessitura de sua exposição, ele comenta e apresenta curiosidades, mas pondera, ao fim, que não tem nenhuma explicação sociológica ou psicológica sobre a resistência de Bourbaki ao resultado da incompletude estabelecido por Gödel, no entanto, lança uma hipótese: “pode ser que os bourbakistas tenham sido seduzidos por Hilbert e pelo compromisso com seu programa, e isso, em princípio, poderia causar muita dificuldade para aceitarem o trabalho de Gödel”. (MATHIAS, 1992, p. 6). Mathias ainda observa que Hilbert se recuperou do choque mais rapidamente do que seus possíveis discípulos franceses muito mais jovens. E, finaliza afirmando que mais explicações sobre o comportamento de Bourbaki em consideração ao TIG fazem-se necessárias.

Um palpite de Mathias (1992) sobre aquilo que ele alcunha como *desconhecimento do grupo sobre a incompletude das teorias que contenham os axiomas de Peano que foi*

⁶² Do original: “One might almost say that they ignored him, except that the tone of certain of their works suggests a conflict between an uneasy awareness that something has happened and a desire to pretend that it has not. It is as though they had discovered that they were on an island with a dragon and in response chose to believe that if the dragon were given no name it would not exist”. (MATHIAS, 1992, p. 6).

deduzida por Gödel é que os bourbakistas não estavam prontos para enfrentar a consequência do TIG, qual seja, a possibilidade de não existir fundamentos para a Matemática, ou seja, de não existir forma de circunscrever a Matemática em um solo.

Mathias (1992) mostra sua consideração ao trabalho de Bourbaki e sua compreensão de que eles ignoraram uma das ideias mais revigorantes da Matemática. Entre elas está o TIG:

[...] Não discuto o valor positivo de seus livros, nem a magnitude de sua realização; mas eu sugiro que a sua atitude em relação à lógica e à teoria dos conjuntos, que foi transmitida às gerações mais jovens de matemáticos, é prejudicial porque exclui a consciência da percepção da natureza da matemática que são revigorantes; e eu quase me atrevo a sugerir que, se, como alguns dizem, Bourbaki agora está morto, ele foi morto pela esterilidade de suas próprias atitudes. (MATHIAS, 1992, p. 8, tradução nossa).⁶³

A isto que viemos tecendo acima sobre a consideração de Bourbaki ao TIG, Mashaal (2012) afirma que Bourbaki fingiu-se de avestruz, referindo-se a atitude do grupo sobre a axiomatização da teoria dos conjuntos, às pesquisas sobre os fundamentos da Matemática e à demonstração dada por Gödel de que qualquer que seja o sistema de axiomas escolhido, jamais seria possível demonstrar a não contradição da Matemática, que resulta desses axiomas pela utilização dos próprios axiomas.

Diante dessa “crise dos fundamentos” que abateu a matemática na primeira metade do século 20, Bourbaki preferiu fingir-se de avestruz e considerar desinteressantes, para o matemático ativo, os problemas metamatemáticos que atormentavam os lógicos. É difícil compreender, porém, que a coerência lógica de uma teoria axiomática possa ser uma questão desprovida de interesse para um matemático que, como Bourbaki, parece atribuir tanta importância à abordagem axiomática. Essa atitude um tanto esquizofrênica de Bourbaki - compartilhada, digamos de passagem pela maior parte dos matemáticos que não trabalham diretamente com os fundamentos de sua disciplina - aparece concretamente traduzida no ‘livro’ de teoria dos conjuntos dos *Elementos de matemática*. Esse livro foi severamente criticado, sobretudo pelos lógicos, em razão de seu enfoque excessivamente restrito e pelo fato de escamotear a questão dos fundamentos. (MASHAAL, 2012, p. 96).

É controversa a discussão se Bourbaki estaria morto. Consideramos que suas obras, mesmo não tendo acolhido a contento as consequências do TIG, refletem como a Matemática vem sendo feita após esse teorema.

⁶³ Do texto original: “I do not dispute the positive worth of their books nor the magnitude of their achievement; but I suggest that their attitude to logic and to set theory, which has been passed on to younger generations of mathematicians, is harmful because it excludes awareness of perceptions of the nature of mathematics that are invigorating; and I almost venture to suggest that if, as some say, Bourbaki is now dead, he was killed by the sterility of his own attitudes” (MATHIAS, 1992, p. 8).

Focamos agora em Bourbaki (1950)⁶⁴ nas estruturas que o grupo propõe para a Matemática⁶⁵. Apreendemos que esta obra define a tarefa do matemático e legitima essa profissão, pois categoriza os objetos com os quais, a partir de então, o matemático deveria trabalhar.

Bourbaki argumenta que a Matemática trata de uma vasta extensão de temas e que desde o século XIX tem aumentado o número de publicações sobre esses assuntos. Além disso, observa que o trabalho dos matemáticos é realizado em domínios estanques no âmbito da própria Matemática. Desse modo, apresentar uma visão dela como um todo, como campo científico que abarque todos os tópicos é uma tarefa quase incontornável. Porém, ciente disso, se lança ao desafio.

Sobre a distribuição dos matemáticos na Matemática, pontua:

Muitos matemáticos assumem porções num canto do domínio da matemática, do qual não pretendem sair; não somente eles ignoram quase que completamente o que não diz respeito ao seu campo específico como, também, eles são incapazes de entender a linguagem e a terminologia usada por seus colegas que estão trabalhando em um canto de outro campo muito distante do seu. (BOURBAKI, 1950, p. 221, tradução nossa).⁶⁶

Frente ao isolamento dos matemáticos produzindo matemática, cada qual em seu domínio, o grupo sugere a questão se há uma Matemática ou várias Matemáticas, já que, embora o trânsito dos matemáticos entre os diferentes domínios seja permitido, como observa Bourbaki, isso é raro. Da mesma forma, questiona se a exuberante proliferação da produção matemática faz dela um organismo mais forte, coeso e em unidade com seus novos crescimentos, ou se evidencia uma tendência de fragmentação progressiva em que disciplinas são separadas umas das outras em objetivos, métodos e línguas diferentes.

Seguindo a argumentação, os bourbakistas observam que o aspecto comum a toda produção matemática se revela nos procedimentos utilizados, que são, os sistemas formais e o método axiomático, sendo este último o que tem trazido a unidade mais estreita entre suas diferentes partes.

⁶⁴ Este manifesto foi escrito em 1948 por J. Dieudonné, em nome do grupo, e defende a edificação da Matemática sobre estruturas de tipos diferentes. Roque afirma que “A metáfora de que se estava propondo uma ‘arquitetura’ esclarece muito sobre o desejo do autor de construir uma teoria unificada que, como um edifício, se assentasse solidamente sobre suas fundações” (ROQUE, 2012, p. 475).

⁶⁵ “Nessa obra não há, novamente, nenhuma menção de Gödel, mas nesta ocasião há uma sugestão de dificuldades a que a matemática terá que transpor” (MATHIAS, 1992, p. 5).

⁶⁶ Do original: “Many mathematicians take up quarters in a corner of the domain of mathematics, which they do not intend to leave; not only do they ignore almost completely what does not concern their special field, but they are unable to understand the language and the terminology used by colleagues who are working in a corner remote from their own” (BOURBAKI, 1950, p. 221).

Eles entendem que após a falência dos projetos do Logicismo, Intuicionismo e Formalismo, que buscavam por diferentes sistemas que caracterizassem a Matemática como uma ciência marcada por um método definitivo específico, mostrou-se uma tendência para olhá-la como "um conjunto de disciplinas com base em conceitos particulares, exatamente especificados [...] interligados por mil estradas de comunicação, permitindo que os métodos de qualquer uma dessas disciplinas pudesse fertilizar os outros" (BOURBAKI, 1950, p. 223).

Com essa argumentação como base, afirma que compreende que toda teoria Matemática é uma concatenação de proposições, cada uma derivando dos precedentes, em conformidade com as regras de um sistema lógico, convenientemente adaptados aos objetivos particulares do matemático e explica que o raciocínio dedutivo não é um princípio unificador para a Matemática, muito embora, superficialmente, seja assim compreendido. Argumenta que o fato dos diversos ramos usarem o mesmo método, por meio de cadeias de silogismos, não pode ser o eixo unificador para esta ciência, pois este é a forma externa que o matemático dá ao seu pensamento, o veículo que o torna acessível para os outros. Porém, que o método axiomático fornece a inteligibilidade da Matemática, que começa a partir da crença *a priori* na convicção de que este método, nas demonstrações

Vai separar a parte mais importante de seus argumentos; depois, tomando cada um deles separadamente e formulando-os numa forma abstrata, ele irá desenvolver as consequências as quais se seguem dele sozinho. Retornando depois disso à teoria em consideração, ele recombinará os elementos componentes, os quais tinham previamente sido separados, e irá inquirir como aqueles diferentes componentes influenciam um ao outro. Não existe na verdade nada de novo neste clássico indo e vindo entre análise e síntese; a originalidade do método situa-se inteiramente no caminho no qual ele é aplicado. (BOURBAKI, 1950, p. 223-224, tradução nossa).⁶⁷

Frente ao argumentado, Bourbaki (1950) apresenta então as estruturas matemáticas, quais sejam, algébricas, de ordem e topológica, como proposta para padronizar a Matemática por meio da linguagem da teoria dos conjuntos.

Lembrando que a principal característica do método axiomático é uma economia considerável de pensamento e considerando que as estruturas propostas por Bourbaki são

⁶⁷ Do original: "It will try, in the demonstrations of a theory, to separate out the principal mainsprings of its arguments; then, taking each of these separately and formulating it in abstract form, it will develop the consequences which follow from it alone. Returning after that to the theory under consideration, it will recombine the component elements, which had previously been separated out, and it will inquire how these different components influence one another. There is indeed nothing new in this classical going to-and-fro between analysis and synthesis; the originality of the method lies entirely in the way in which it is applied" (BOURBAKI, 1950, p. 223-224).

estabelecidas com objetivo de oferecerem ferramentas para o matemático, na medida em que elas permitem que o matemático lance mão de teoremas gerais que pertencem a uma estrutura, ao reconhecer entre os elementos que está estudando relações que satisfaçam os axiomas de outra estrutura.

Isso é importante, nesta discussão, porque revela a forma pela qual a Matemática é produzida desde então, sobretudo depois da falência dos projetos que objetivavam sua fundamentação e do resultado do TIG.

Notemos que, para este autor, o trabalho do matemático, antes desse modo padronizado que ele próprio propõe,

Obrigava os matemáticos a forjarem para si mesmos os meios de ataque ao seu problema; sua força dependia de seus talentos pessoais e eles foram carregados com hipóteses restritivas, resultantes das peculiaridades do problema que estava sendo estudado. (BOURBAKI, 1950, p. 227).

Porém, Bourbaki reflete:

O matemático não trabalha como uma máquina, nem como o operário na esteira de produção; não podemos exagerar o papel fundamental desempenhado em sua pesquisa por uma intuição especial, que não é o sentido popular de intuição, mas sim um tipo de adivinhação direta (a frente de todo raciocínio) do comportamento normal, que ele parece ter o direito de esperar dos seres matemáticos, com quem uma longa convivência o tornou tão familiar quanto com os seres do mundo real. (BOURBAKI, 1950, p. 227, tradução nossa).⁶⁸

Nessa passagem estaria o argumento principal da proposta do grupo, que em nosso entendimento, seria facilitar o trabalho dos matemáticos no sentido de mostrar-lhes que há estruturas que aproximam suas produções, que até então vinham sendo realizadas isoladamente.

Explicando mais detalhadamente do que trata uma estrutura, Bourbaki (1950) afirma que essa ideia pode ser aplicada a conjuntos de elementos cuja natureza não é especificada, pois na definição de uma estrutura, tomam-se como dadas uma ou várias relações entre esses elementos. Em seguida, postulam-se uma determinada relação ou relações para satisfazer os axiomas da estrutura em causa. Para configurar o sistema axiomático de uma determinada estrutura, elevam-se os axiomas da estrutura às consequências da dedução lógica, desconsiderando toda e qualquer hipótese sobre os elementos do conjunto em causa,

⁶⁸ Do original: The mathematician does not work like a machine, nor as the workingman on a moving belt; we can not over-emphasize the fundamental role played in his research by a special intuition, which is not the popular sense-intuition, but rather a kind of direct divination (ahead of all reasoning) of the normal behavior, which he seems to have the right to expect of mathematical beings, with whom a long acquaintance has made him as familiar as with the beings of the real world." (BOURBAKI, 1950, p. 227).

bem como à sua própria natureza. Logo, ele expõe que “cada estrutura traz consigo sua própria linguagem carregada de referências intuitivas especiais derivadas das teorias de que a análise axiomática descrita acima tem derivadas da estrutura” (BOURBAKI, 1950, p. 227, tradução nossa).⁶⁹ Disso, Bourbaki, justifica que na proposta das estruturas, os matemáticos acabam tendo à disposição poderosas ferramentas fornecidas pela teoria dos grandes tipos de estruturas;

Que permite que de um único ponto de vista alcance domínios imensos, agora unificadas pelo método axiomático, domínios esses que estavam anteriormente em um estado completamente caótico. O que tudo isso significa é que a matemática tem menos do que nunca sido reduzida a um jogo puramente mecânico de fórmulas isoladas e mais do que nunca a intuição domina na gênese das descobertas. (BOURBAKI, 1950, p. 228, tradução nossa).⁷⁰

Referindo-se ao trabalho matemático posteriormente ao TIG, Morris Kline (1980), compara o matemático a um limpador de terreno que, ao limpar, se apercebe da presença de animais selvagens escondidos no bosque à sua volta e mesmo limpando uma área maior, ele sabe que apenas afugentou para mais longe estes animais, compreendidos aqui por nós como sendo os indecidíveis, os quais vivem escondidos no bosque e podem um dia surpreendê-lo.

Vale lembrar que Gödel provou a existência do indecidível. Todavia, nenhum matemático ainda o encontrou em alguma teoria, ainda que já se tenha cogitado que a *hipótese do contínuo* e a *conjectura de Goldbach* o fossem, por exemplo. Diante da questão da hipótese do contínuo, formularam-se hipóteses que a tornou decidível e posteriormente testaram as consequências dessa hipótese. Assim, para a certificação de sua ‘indecidibilidade’, requerem-se: i) mostrar que a hipótese não resultava dos axiomas precedentes⁷¹ e, ii) destacar que a negação da hipótese não resultava dos axiomas precedentes.⁷² Desse modo, demonstra-se que a *hipótese do contínuo* é independente, como

⁶⁹ Do original: “Now, each structure carries with it its own language, freighted with special intuitive references derived from the theories from which the axiomatic analysis described above has derived the structure.” (BOURBAKI, 1950, p. 227).

⁷⁰ Do original: “What all this amounts to is that mathematics has less than ever been reduced to a purely mechanical game of isolated formulas; more than ever does intuition dominate in the genesis of discoveries. But henceforth, it possesses the powerful tools furnished by the theory of the great types of structures; in a single view, it sweeps over immense domains, now unified by the axiomatic method, but which were formerly in a completely chaotic state.” (BOURBAKI, 1950, p. 228).

⁷¹ Teorema de Paul Cohen para a hipótese do contínuo.

⁷² Teorema que Gödel provou a respeito da hipótese do contínuo.

ocorre com o processo que se efetuou em geometria com o quinto postulado quando do surgimento das geometrias não-euclidianas.

A presença de um indecidível, no âmbito de uma teoria, indica a não contradição dessa teoria. Na demonstração de Gödel, decorre que a não contradição da aritmética de Peano implica a indecidibilidade de uma proposição G e, inversamente, a indecidibilidade da proposição $\sim G$ garante a não contradição da aritmética de Peano, dado que, de uma teoria contraditória é possível deduzir toda proposição exprimível na linguagem dessa teoria. Na prova de Gödel, G indecidível significa “que em aritmética e, mais geralmente, em toda teoria axiomatizada não contraditória e suficientemente rica para conter a aritmética básica dos naturais, a não contradição da própria teoria não é demonstrável na linguagem da teoria” (GUERRERIO, 2012, p. 50).

Diante disso, entendemos que a mensagem que sobressai para o trabalho dos matemáticos é que à certeza da presença dos animais selvagens soma-se a incerteza frente às bifurcações que solicitam escolhas, porém, estas ao serem feitas mostram caminhos para a continuação da atividade de produção matemática.

No que tange à Matemática e aos matemáticos contemporâneos, Boyer (1996) pontua:

Ao aproximar-se o fim do século, as atitudes em relação ao futuro da matemática não exibem nem o pessimismo dos pensadores do fim do século dezoito que diziam que a maior parte dos problemas estava resolvida, nem o otimismo de Hilbert ao fim do século XIX quando dizia que todos os problemas podiam ser resolvidos. Ocasionalmente parece que a questão dominante é se problemas matemáticos devem ser resolvidos. Pois o ensino e a pesquisa da matemática em muitos setores estão entre o Scylla⁷³ dos que condenam a área por causa das aplicações que a tornaram potencial participante na destruição da humanidade e o Charybidis dos que querem retirar-lhe tudo salvo suas aplicações para torna-la mais útil socialmente, seja para a medicina seja para a guerra. Mas a história parece apoiar a reflexão de André Weil, que emergiu de um período mais sombrio: “O grande matemático do futuro, como o do passado, fugirá do caminho muito palmilhado. É por *rapprochements* inesperados, a que nossa imaginação não saberia como chegar, que ele

⁷³ Ales Bello apresenta uma explicação sobre o significado de *Scylla* e *Charybidis*: “Na antiguidade essas duas partes constituíam o berço da civilização Ocidental; é a região do Mediterrâneo, onde está a Itália e também onde estão a Calábria e a Sicília. Os antigos pensavam que nessas duas partes, que são muito rochosas e íngremes, existiam dois monstros. Um que se chamava *Scylla* e o outro *Cariddi*. E quando as embarcações passavam por ali, por ser um estreito muito agitado, tinham que tomar o máximo cuidado para não bater nem em *Scylla* e nem em *Cariddi*. E, decorrente desse sentido, existe um provérbio italiano que diz que se quisermos que a vida proceda bem, precisamos evitar *Scylla* e *Cariddi*. Não sei se ainda hoje esse provérbio é mencionado. Mas, a ideia é que entre *Scylla* e *Cariddi*, há um estreito perigoso que deve ser ultrapassado com todo o cuidado.” Ales Bello em (BICUDO; ANTÚNEZ, p. 85).

BICUDO, M. A. V. B. ; ANTÚNES, A. E. A. (Org). *Fenomenologia, Psicopatologia e Neurociências: e a consciência? Seminários com Angela Ales Bello. Na Universidade de São Paulo*. São Paulo: editora da USP, 2016. ISBN: 978-85-86736-69-8.

resolverá, dando-lhes outra forma, os grandes problemas que lhes legaremos”. Olhando para o futuro, Weil confia ainda em outra coisa: “No futuro, como no passado, as grandes ideias devem ser ideias simplificadoras”. (BOYER,1996, p. 440).

Compreendemos que a acolhida do TIG na Matemática, embora com insatisfações, se mostra no modo como o grupo Bourbaki encara o fato de que o conjunto dos indecidíveis em teorias que contenham a aritmética é não vazio: decidindo pela continuidade da atividade de produção matemática, como se tem feito desde Euclides, ciente da característica da impossibilidade simultânea de consistência e completude, até mesmo de teorias simples que tratem da aritmética dos naturais.

CAPÍTULO IV:

O TIG EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Neste capítulo, expomos nossa proposta de como os sentidos e significados do TIG podem ser atualizados em cursos de Licenciatura em Matemática. Além disso, apresentamos também nossa argumentação sobre a relevância do trabalho com este teorema com futuros professores, sobretudo com estudantes que, uma vez que estão em processo de qualificação para o ensino de Matemática, provavelmente, virão a fazê-lo. A exposição da proposta se dá por meio de um exercício que buscou inserir o trabalho com o assunto TIG num curso de Licenciatura.

O TIG em disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática

Entendemos que é fundamental atualizar sentidos e significados do TIG em cursos de Licenciatura em Matemática, posto que a concepção de Matemática dos estudantes de Licenciatura tem forte relação com a compreensão que eles têm de Matemática, conforme afirma Imenes (1989).

À época do aparecimento do TIG reinava a concepção que trazia o entendimento de que não havia *ignorabimus*⁷⁴, Hilbert (2003), isto é, de que não haveria problema bem colocado que com o devido empenho dos matemáticos não tivesse solução. Após Gödel, essa concepção não se sustenta mais. O encontro de Gödel com o indecidível em seu TIG confere a esta ciência uma visão de que nela há sentenças matematicamente bem formuladas e verdadeiras que não podem ser formalmente expressas como tal.

Assim, posteriormente ao TIG, compreende-se que as teorias que incluem números naturais em sua formalização são constituídas por proposições demonstradas (teoremas), proposições não demonstrados (conjecturas) e proposições indemonstráveis (indecidíveis). Os teoremas são verdades demonstradas na teoria. Os enunciados não demonstrados se mantêm demandando solução. Alguns, porém, demandam também uma extensão da teoria

⁷⁴ Em Hilbert (2003, p. 11) pode-se ler: “O axioma da solubilidade de cada problema é somente uma particularidade característica do pensamento matemático ou é possível uma lei geral inerente à natureza de nosso pensamento que todas as perguntas colocadas possuem respostas? [...] Esta convicção de que a solubilidade de um problema matemático nos dá um forte estímulo durante o trabalho, nós ouvimos um grito contínuo que vem de dentro: *Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!* (Aí está o problema, procura a solução. Você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois na Matemática não existe “ignoremos”!)”.

na qual possam ser resolvidos. Resolvidos, neste caso, significa: demonstrados como verdadeiros ou falsos na teoria específica. Além, dos teoremas e das conjecturas, há também as proposições verdadeiras que não podem ser provadas como tal (ou como não verdadeira) na teoria.

Desse modo, pode-se afirmar que a incompletude de uma teoria é uma consequência de seu sistema axiomático. Uma teoria consiste em um sistema axiomático e todos os seus teoremas, os quais são derivados do conjunto de axiomas da base da teoria por meio do método axiomático. Uma vez que há um indecidível em uma teoria, sendo o indecidível uma declaração verdadeira, deduzida por um argumento metamatemático, o que fica evidente é que aquela teoria tem possibilidade de deduzir verdades e que ela própria não tem possibilidade de provar todas. Disso entendemos que, na prática, não é toda prova que pode ser reduzida aos axiomas da base do sistema, ou seja, tem-se que aqueles axiomas que estão na base do sistema formal daquela teoria não são uma coleção que dá conta de provar todas as verdades daquela teoria. Isso também evidencia que não se tem clareza sobre a coleção de axiomas que tal indecidível necessitaria para ser provado. Por exemplo, pode-se ter uma sentença verdadeira da teoria dos números expressa na linguagem da aritmética, ou seja, derivada dos axiomas de Peano, cuja prova poderia necessitar de algum axioma da topologia ou da análise complexa, isto é, pode ser que a prova da sentença necessite de algum(s) outro(s) axioma(s) de alguma(s) outra(s) teoria(s).

Gödel institui que os axiomas de Peano apenas descrevem parcialmente a teoria dos números naturais. Logo, não é todo corpo consistente de proposições que pode ser descrito por uma coleção de axiomas. O TIG diz que o corpo da teoria dos números naturais é um corpo consistente de proposições sem axiomatização recursiva. Uma vez computadas as instruções, um computador pode reconhecer axiomas e regras básicas para derivar teoremas e reconhecer se uma prova é válida. Contudo, não pode determinar se a prova para uma afirmação existe, pois, para saber isso, deve-se esperar e ver se a prova ou a negação dela é gerada. Disso, resulta que não se saberá por este método quais proposições são teoremas. Daí procede a afirmação de que o método axiomático possui uma limitação técnica.

O TIG confirma a existência de uma característica fundamental em relação ao modo de se fazer Matemática, e nossa visão é que por isso ele é um resultado cultural que se relaciona diretamente ao modo como se compreende Matemática e por conseguinte, à que ensinamos.

Dada a importância desse teorema, principalmente no que se refere à sua relevância cultural para a Matemática, entendemos que a apresentação do resultado do fenômeno

gödeliano é uma informação imprescindível que deve estar presente entre os conteúdos elencados para serem trabalhados em cursos de Licenciatura em Matemática. Apoiamos que este tratamento seja realizado de forma intelectualmente honesta de modo que oportunize ao graduando em Matemática conhecê-lo, vivenciando o resultado desde o primeiro ano do curso, e, revê-lo em sua dimensão de ideias de que ele se vale, que ele estabelece, bem como suas conclusões e sua demonstração, em diferentes níveis durante o curso, culminando no trabalho com sua demonstração formal.

Distinguimos que a formação cultural matemática de um professor solicita que desde o primeiro ano de um curso de graduação em Matemática, estes professores em forma/ação tomem contato com o TIG, o qual diz das possibilidades de ser da própria Matemática e da distinção entre *verdade* matemática e *demonstrabilidade* matemática. As principais ideias que permeiam o resultado podem aparecer em diferentes oportunidades no decorrer dos quatro anos de curso.

Tratando-se de um resultado que é provado no âmbito da *aritmética de Peano*, poderia ser referenciado nos momentos em que este assunto estiver sendo focado.

Da mesma forma, a ideia de resultado que anuncia impossibilidades (e possibilidades também) conecta-se até certo ponto com *os problemas clássicos da Antiguidade* (a quadratura do círculo, trissecção de um ângulo qualquer, duplicação do cubo), com o teorema de Abel sobre a impossibilidade de resolver equações de quinto grau com radicais, entre outros. O TIG, que anuncia a impossibilidade da solução positiva do segundo problema de Hilbert o qual solicitava a demonstração, na própria aritmética, da compatibilidade dos axiomas aritméticos. Este fato que repercute na impossibilidade da realização do seu programa original, pode ser apresentado junto aos demais teoremas de impossibilidade e, ao mesmo tempo, diferenciando-o, por ser um resultado de impossibilidade da metamatemática.

O TIG aparece num momento histórico em que a Matemática vinha passando por tentativas de fundamentação em diferentes bases. As escolas intuicionistas e logicistas, cada uma pelo seu motivo, tinham fracassado na realização completa do objetivo idealizado. Os formalistas seguiam em pé, mas o resultado de Gödel de 1931 dá a última palavra que decreta a impossibilidade do intento originalmente concebido por essa escola. Esse assunto, *as correntes filosóficas que buscaram fundamentar a Matemática*, costuma ser tratado em cursos de Licenciatura e vislumbramos que este seria também uma ocasião de apresentação do TIG, pois ele aponta a impossibilidade de se fundamentar a Matemática completamente sob a base da aritmética, que era o objetivo dos formalistas. Este resultado

reverbera também sob as ambições e expectativas de a Matemática ser uma ciência absoluta que produz e prova, simultaneamente, todas as suas verdades.

Outra ocasião oportuna julgamos que seja em situações de ensino em que se mostre a Matemática como uma realização histórico-cultural humana, sujeita às características de seu modo de produção, o método axiomático, e como uma ciência viva em acontecimento, ainda sujeita a dúvidas. Nesse momento, seria plausível apresentar a incompletude da Matemática como uma impossibilidade, mas também como abertura para essa ciência, já que permite um revigoramento e surgimento de outras teorias. Também seria apropriado evidenciar mudanças no modo pelo qual na Matemática são encarados os problemas após o TIG, pois esse teorema afirma que há um conjunto de problemas indemonstráveis que independe do ideal cognitivo dos matemáticos e do empenho destinado às suas provas. Estes, embora indemonstráveis, trazem ao conhecimento a natureza revigorante da Matemática que não permite se circunscrever, ou seja, ter os limites de suas teorias bem determinados e circunscritos a elas.

O tema da criação das *geometrias não-euclidianas*, por ser um resultado que diz sobre a relatividade de verdades matemáticas em relação aos axiomas do sistema, também mostra que tais verdades são restritas aos axiomas da teoria. Isso desmente a concepção de que a Matemática é uma estrutura única e totalizante, assemelhando-se à mensagem do TIG, quando afirma que haverá verdades matemáticas que não são deduzidas dos axiomas da base da teoria e que não podem ser provadas naquela teoria. Por esse viés, entendemos que cabe fazer dessa uma oportunidade de abordagem e discussão das ideias do TIG para professores em forma/ação.

Conforme afirmamos anteriormente, a estrutura curricular de cursos de Licenciatura em Matemática⁷⁵ não prevê o trabalho específico com o TIG.

Abaixo expomos um quadro que apresenta a distribuição das disciplinas por semestre em cada uma das áreas que compõem a grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática aqui focado, tendo em vista apresentar uma proposta da inserção do TIG em conexão com os conteúdos já agendados para o ensino e ampliando. Segue em destaque as

⁷⁵ Na grade curricular do curso de Bacharelado desta mesma Universidade, em que as disciplinas comuns aos dois cursos são cursadas conjuntamente, a disciplina Lógica Matemática obrigatória do 4º ano tem o conteúdo TIG previsto no programa de ensino. Concordamos que os bacharéis em Matemática devam conhecer o TIG, pela importância do resultado e também porque, embora eles se formem pesquisadores em Matemática, além do seu trabalho com a Matemática pura, é rotineiro o retorno destes bacharéis às Universidades contratados como professores de cursos de graduação em Matemática, lecionando em cursos de graduação à futuros pesquisadores e futuros professores. Desse modo, a nossa proposta de inserção do tratamento em disciplinas da Licenciatura solicita destes professores, também, a atenção ao trabalho com o TIG em disciplinas da Licenciatura e, sempre que for possível, articular com os conteúdos ou as ideias em tratamento.

disciplinas nas quais compreendemos que aspectos do TIG podem ser ensinados neste curso de Licenciatura.

Licenciatura em Matemática – UNESP Rio Claro – vigente de 2006 a 2015									
	Disciplinas da área de Análise	Disciplinas da área de Álgebra	Disciplinas da área de Fundamentos da Matemática	Disciplinas da área de Geometria	Disciplinas da área de Educação Matemática	Disciplinas da área de Computação	Disciplinas da área de Educação	Disciplinas da área de Física	Disciplinas da área de Estatística
1º s	Cálculo Diferencial e Integral I		Aritmética e Álgebra Elementares	Geometria Analítica Geometria Elementar					
2º s	Cálculo Diferencial e Integral I	Introdução à Álgebra Linear	Aritmética e Álgebra Elementares	Geometria Euclidiana I		Introdução à Ciência da Computação		Física Geral I	
3º s	Cálculo Diferencial e Integral II	Estruturas Algébricas		Geometria Euclidiana II	Filosofia da Educação: questões da Educação Matemática			Física Geral II	
4º s	Cálculo Diferencial e Integral II	Estruturas Algébricas		Desenho Geométrico e Geometria Descritiva		Cálculo Numérico		Física Geral III Laboratório de Ensino de Física	
5º s	Análise Matemática I		Teoria dos Números		Fundamentos da Matemática Elementar		Didática Psicologia da Educação Prática de Ensino e Estágio Supervisionado I	Física Geral IV	
6º s	Análise Matemática II Funções de Variável Complexa				Fundamentos da Matemática Elementar		Didática Psicologia da Educação Prática de Ensino e Estágio Supervisionado I		
7º s				Espaços Métricos			Prática de Ensino e Estágio Supervisionado II Política Educacional Brasileira		Probabilidade e Estatística
8º s			História da Matemática Matemática Elementar do Ponto de Vista Axiomático				Prática de Ensino e Estágio Supervisionado I		Probabilidade e Estatística

DISCIPLINAS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Nesse curso, as áreas envolvidas nas quais as disciplinas estão alocadas, são: Matemática, Educação Matemática, Educação, Física, Computação e Estatística. Um estudo pormenorizado das disciplinas elencadas na grade curricular do projeto deste curso de Licenciatura em Matemática, buscando conhecer os seus objetivos e os conteúdos estabelecidos em suas ementas, permitiu-nos afirmar que a menção ao TIG, a inserção da discussão das ideias veiculadas por suas conclusões, a abordagem das ideias desse resultado, tal como a demonstração formal do TIG são plausíveis em disciplinas diferentes e de forma independente, avançando em complexidade. Compreendemos ser possível e coerente trabalhar essas ideias em disciplinas das áreas de Fundamentos da Matemática, de Educação Matemática, Geometria e Álgebra.

No caso do curso de Licenciatura em Matemática acima exposto, em que estamos tomando como uma possibilidade de exercício de reflexão sobre a atualização de sentidos e significados do TIG, a área de Fundamentos da Matemática compõe-se das disciplinas: *Aritmética e Álgebra Elementares*, *Teoria dos Números*, *História da Matemática* e *Matemática Elementar do Ponto de Vista Axiomático*. Vamos apresentar abaixo os conteúdos e os objetivos que constam nas ementas e buscaremos com isso evidenciar nossos argumentos.

No programa da componente *Aritmética e Álgebra Elementares*, do primeiro e segundo semestres do curso, os objetivos elencados são:

Suprir falhas da formação do aluno que ingressa no curso de Matemática, fazendo um tratamento de tópicos do Ensino Fundamental e Médio, dando enfoque diferente daquele visto pela maioria dos alunos. Deve dar um embasamento não só para as demais disciplinas do primeiro ano, mas também para o curso de um modo geral. O desenvolvimento deverá ser de maneira integrada com as demais disciplinas do 1º ano e deve ser rica em exemplos que envolvam principalmente o Cálculo, a Álgebra e a Geometria. É importante que se faça um estudo introdutório de lógica, dando ao aluno uma noção do que é uma demonstração, do que é a negação de uma afirmação, entre outras. Familiarizar o aluno com seu futuro ambiente de trabalho.⁷⁶

Trata-se de uma disciplina que objetiva, como afirmado na própria ementa, familiarizar os alunos com a Matemática. Por isso, tópicos dos anos anteriores do Ensino Básico são retomados e busca-se trabalhar com exemplos, integrando as componentes Cálculo Diferencial e Integral I, Geometria Analítica, Geometria Elementar, Introdução à Ciência da Computação e Física Geral I, sempre que possível, isto é, integrar todas as disciplinas alojadas no primeiro ano do curso. O objetivo é apresentar ao aluno um modo de trabalho que o convide à realização do curso, qual seja, demonstrar e provar formalmente. É possível e, conforme nosso

⁷⁶ Programa de ensino dessa disciplina disponível em:
<<http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/edm0033.pdf>>.

entendimento, desejável, mencionar em *Aritmética e Álgebra Elementares* a existência do fenômeno gödeliano, mesmo que não esteja presente na sua ementa, expondo um aspecto do TIG: o de que há na aritmética fórmulas verdadeiras e que não é possível prová-las formalmente.

A disciplina *Teoria dos Números* estabelece que o conhecimento da aritmética dos números inteiros é um requisito essencial tanto para o futuro professor de Matemática quanto para o futuro pesquisador. Tendo isso em vista, o curso se detém sobre assuntos usualmente associados à aritmética clássica. Como conteúdo programático, estabelece:

1. Divisibilidade; representação na base “a”: Algoritmo de Euclides, máximo divisor comum e mínimo divisor comum, Teorema Fundamental da Aritmética, a função maior inteiro; 2. Congruências, Teorema chinês do resto, raízes primitivas da unidade, a função Euler; 3. Restos quadráticos, Lema de Gauss, Teorema Fundamental; 4. Equações Diofantinas, o Teorema de Fermat; 5. Noções sobre o problema de distribuição dos primos.

Observamos um ponto de tangência entre os conteúdos dessa disciplina com a prova da incompletude, qual seja, o teorema fundamental da aritmética que é utilizada no processo de numeração de Gödel. Assim, sugerimos que ao se trabalhar com este teorema se apresente o processo de atribuição unívoca dos números de Gödel que é garantida por este resultado.

Em *Estruturas Algébricas*,⁷⁷ quando do trabalho com o tópico previsto *problemas clássicos da Antiguidade*, pode-se apresentar o enunciado do TIG e discutir com os licenciandos a dimensão de impossibilidade que esse resultado estabelece. Ainda, salientamos que esse tópico, trata de teoremas clássicos provados posteriormente e que anunciam impossibilidades para umas coisas e possibilidades para outras, nas condições dos enunciados dos problemas. No caso do TIG, ele anuncia a impossibilidade de se demonstrar a consistência na aritmética na própria aritmética, mas não impossibilita que essa demonstração seja feita fora dela.

Na área de Educação Matemática, o programa de ensino de *Filosofia da Educação: questões da Educação Matemática*⁷⁸, declara entre seus conteúdos estipulados a serem realizados, o Formalismo, o Intuicionismo e o Logicismo e, como objetivos, propõe levar os alunos a terem consciência sobre a questão ética da educação e sobre as questões específicas do ensino da Matemática e, entre outros, levá-los a refletir sobre filosofias subjacentes às linhas de pensamento e correntes de ensino de Matemática. Entendemos ser esse um ambiente apropriado para, junto com os licenciandos, pensarem sobre a postura filosófica implícita ao

⁷⁷ O programa de ensino dessa componente pode ser acessado em:
<<http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/mma5777.pdf>>.

⁷⁸ Disponível em:
<<http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/edm0038.pdf>>.

formalismo e refletirem sobre a mensagem que o TIG direciona a esta corrente de produção da Matemática e conseqüentemente de ensino de Matemática.

Por sua vez, no que tange à *História da Matemática*, o programa de curso do quarto ano designa que:

O objetivo de um curso de História da matemática deve ser o de contrapor-se à conversão formalista de reinterpretar logicamente, segundo a ordem das razões, a gênese real dos conceitos, segundo a ordem das ideias. Mostrar que a Matemática formalizada é precedida por uma matemática informal e quase empírica, que não se desenvolve como uma seqüência inexorável de teoremas acumulados estabelecidos além de toda dúvida, mas por uma dialética própria, pelo jogo das conjecturas através da especulação, da crítica e da dinâmica dos interesses práticos e teóricos. Mostrar que existe uma ligação muito forte entre o desenvolvimento social e o desenvolvimento da Matemática.⁷⁹

Pode-se, em cursos direcionados a tratar da Matemática em diferentes contextos e tempos, apresentar a dimensão cultural do TIG na Matemática. Esse assunto pode ser tratado nos momentos de discussão de episódios⁸⁰ históricos na Matemática que exibem quebra de expectativa cristalizada. A incompletude de teorias que englobem em sua formalização os axiomas de números naturais, anunciada pelo TIG, embora possa ter o tom de limitação, pois ele quebra a expectativa sedimentada de que a Matemática poderia expressar e provar todas as suas verdades. Por fim, ele abre horizonte para uma Matemática que se deu conta dessa característica da incompletude de grande parte de suas teorias, evidenciando que de forma alguma invalidou a Matemática já construída ou impossibilitou que ela continuasse sendo feita. Além disso, mostra a Matemática como uma produção humana de homens de tempos diferentes, com necessidades e anseios de compreensão conectados às questões de sua época e de seu lugar; reconhecendo um fazer matemático característico e direcionado ao alcance de soluções abstratas que sejam universais e neutras.

Embora no programa de curso de *História da Matemática* esteja explícito o trabalho com a Matemática até o século XVII, entendemos ser possível trabalhar apresentando-a até os dias atuais abrangendo o séculos XIX e XX, bem como perspectivas de seu desenvolvimento na atualidade. Sendo assim, o TIG teria mais esse espaço para ser discutido como um evento

⁷⁹ O programa de ensino está disponível em:

<<http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/edm0042.pdf>>.

⁸⁰ Quais sejam esses episódios históricos com os quais reconhecemos similaridade com abertura de horizontes: por exemplo: 1) a crise dos incomensuráveis, historiada modernamente ressalte-se, que se enreda por apresentar a superação, na própria Matemática, de uma frustração de expectativa. A ‘crise’ teria aberto caminhos para a construção dos números irracionais; 2) a dúvida e as tentativas de provar o quinto postulado de Euclides, o que desencadeou no surgimento das geometrias não-euclidianas, e que não invalida a geometria euclidiana; 3) a questão da decifração do infinito pelos matemáticos, cuja culminância se dá na teoria de números transfinitos de Cantor, que trata da parte matematizável do infinito. Porém, ele se vê diante de um paradoxo que envolvia a ideia de *conjunto de todos os conjuntos*. Não se pode negar que essa questão está longe de ser uma crise para a Matemática, sendo matriz propulsora do desenvolvimento da Matemática desde tempos remotos.

interno à Matemática, um importante episódio do século XX, responsável pelo amadurecimento da compreensão da característica de incompletude inevitável às teorias matemáticas que contenham a aritmética de Peano em sua formalização. Além disso, é algo apropriado abordar o viés de que a Matemática não é capaz de demonstrar sua própria consistência.

Focando a componente *Matemática Elementar do Ponto de Vista Axiomático*, tem-se como finalidade prevista:

Fornecer ao estudante elementos para compreensão do método axiomático no contexto de teorias elementares: geometria, aritmética e teoria dos conjuntos. Ao final, o estudante deverá ser capaz de compreender e apreciar o papel arquitetural, lógico e formal desse método e o caráter constitutivo da natureza da própria matemática que lhe cabe.⁸¹

Entendemos que a abordagem e o trabalho mais sólido com o TIG é oportuno a essa disciplina, especialmente pela coerência com os assuntos propostos nos seus conteúdos programáticos que se referem ao estudo de sistemas axiomáticos e suas propriedades. Abaixo, são trazidos os conteúdos programáticos dessa disciplina, os quais evidenciam a coerência apontada:

1. Estudo de um sistema axiomático-formal simples (como, por exemplo, uma geometria finita, cujos objetos sejam “pontos”, “retas” e “planos”, mas cuja única relação seja a de incidência) e suas possíveis propriedades metamatemáticas: consistência (relativa e absoluta), categoricidade e independência; 2. A axiomatização da Aritmética: a) a aritmética dos inteiros positivos: a aritmética primitivamente recursiva (definições recursivas da soma, produto e exponenciação; propriedade elementares das operações aritméticas assim definidas deduzidas axiomáticamente); b) A aritmética de Dedekind-Peano (axiomas), construção de um modelo da aritmética de Dedekind-Peano em teoria ingênua (isto é, não axiomática) de conjuntos, relação entre a aritmética primitivamente recursiva e a aritmética de Dedekind-Peano; c) A aritmética dos números reais tratamento axiomático (estudo em particular, das várias versões do axioma da completude); 3. A axiomatização da geometria: Euclides e a axiomática informal, o quinto postulada, as geometrias não euclidianas – alguns modelos euclidianos de geometrias não euclidianas, a axiomática formal de Hilbert – a existência de um modelo aritmético da geometria euclidiana (a geometria analítica), as ideias de Klein, Helmholtz e Riemann. 4. A teoria axiomática de conjuntos: a axiomática de Zermelo-Fraenkel.

É importante colocar em relevo que há várias camadas possíveis de se dar a compreensão do TIG. A inserção da apresentação da demonstração do TIG numa disciplina apropriada requer que componentes curriculares anteriores do curso tenham exposto ideias, discutido aspectos do TIG, bem como trabalhado com resultados importantes da Lógica Matemática que subsidiem a compreensão dos pormenores da prova e das conclusões estabelecidas, que possibilitem a inteligibilidade do TIG e da mensagem por ele veiculada. A proposta da disciplina *Matemática*

⁸¹ Acesse o Programa de ensino em:

<<http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/edm0041.pdf>>.

Elementar do Ponto de Vista Axiomático é apresentar o método axiomático, construindo algumas teorias elementares, tal como se tem exposto na ementa acima detalhada em seus conteúdos previstos. Embora essa disciplina não seja o momento reservado para se trabalhar com modelos lógicos, compreendemos que seria o local apropriado para se trabalhar com uma demonstração do teorema da incompletude, uma vez que se tenha apresentado a teoria da aritmética e se proponha que nela se pense de maneira formal, formalizando e colocando numa estrutura lógica. Finalmente, abrindo-se espaço para apresentar as limitações do edifício matemático por consequência da incompletude da teoria formal dos números naturais. Nessa disciplina, poder-se-ia trabalhar com a demonstração baseada em Nagel e Newman (1973)⁸², exposta no capítulo II, a qual apresenta uma ilustração da demonstração do TIG tal qual realizado por Gödel em 1931. Por meio desse trabalho acreditamos que seja possível proporcionar aos alunos a inteligibilidade das ideias engenhosas e dos processos utilizados por Gödel em sua demonstração original, bem como, das ideias imbricadas nela e das conclusões que ela estabelece.

É oportuno apresentar, comentar, discutir e mencionar o TIG sempre que for possível realizá-lo em cursos de graduação em Matemática. Professores de diferentes disciplinas poderiam (e seria desejável que o fizessem!) articular com a apresentação do TIG em diferentes dimensões, perspectivas e objetivos, especialmente ao se organizarem para abordar os temas agendados nas ementas.

Julgamos ser apropriado, na disciplina *Lógica Matemática*,⁸³ optativa da Licenciatura e obrigatória do Bacharelado do curso que analisamos, apresentar o estudo do TIG, em seu desenho formalizado, uma vez que essa componente trata de apresentar a Lógica Matemática como uma teoria dos sistemas formais e como fundamento da Matemática. Esse trabalho, que viria a coroar o curso, pode ser feito com o texto da demonstração também exibida no capítulo II. Trata-se de uma demonstração formal baseada em Shoenfield (1967), a qual é uma demonstração alternativa do TIG, que, notavelmente, é distinta da demonstração original de Gödel, e é uma validação do TIG na Matemática que, objetivamente, se ocupa de apresentar o resultado numa versão formal e direta, desviando-se de discussões e adendos.

⁸² Conscientes do objetivo deste texto, conforme anunciado por seus autores, propor uma aproximação do TIG, com liberdade de abordar o TIG no sentido amplo, sendo uma prova técnica com explicação dos detalhes, sem a preocupação de ser uma demonstração formal do teorema de Gödel.

⁸³ Plano de curso disponível em:

<<http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/edm0043-logica-matematica--mat.pdf>>.

Faz-se importante explicitar novamente o contexto de nossa proposição: o curso que analisamos e que aqui está sendo tomado como um exemplar para a apresentação da proposta é o curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de Rio Claro, curso esse realizado por nós na graduação entre os anos 1998 e 2001. Cabe dizer que nossa proposta de inserção do TIG, entre os conteúdos a serem trabalhados em cursos de Licenciatura em Matemática, de forma alguma implica a subtração de algum outro conteúdo de alguma das disciplinas, aqui sinalizadas como tendo conteúdo com possibilidade de conexão com o TIG ou de outra(s) que não tenha(m) sido aqui citada(s). No tocante ao curso que examinamos, estamos cientes da importância de todas as demais disciplinas estabelecidas no projeto do curso e de seus tópicos de conteúdo. E também estamos atentos ao objetivo geral desse curso, qual seja, *formar o professor para o trabalho em sala de aula imediatamente após a conclusão do curso*. Desse modo, ciente de ser um resultado fundamental, recomendamos, fortemente, que seu ensino esteja assegurado para este público também.

Damo-nos conta que o currículo do curso de Licenciatura é amplo, visto que estabelece o ensino de disciplinas vinculadas a diferentes departamentos e prioriza a formação de professores. Isso importante para que conheçam as principais áreas da Matemática contemporânea e das metodologias de ensino de Matemática, bem como de desenvolvimento do senso de cooperação, conforme consta na apresentação do curso. Além disso, é flexível, na medida em que permite a escolha, por parte do licenciando, de duas disciplinas optativas, entre as opções oferecidas. Entre as alternativas para os licenciandos está a disciplina *Lógica Matemática* como uma opção a ser cursada no oitavo semestre do curso.

É importante que os alunos de cursos de Licenciatura conheçam o TIG, as ideias que podem ser discutidas com aspectos que ele releva, também com uma demonstração desse resultado para que possam conhecer a arquitetura de sua prova, o impacto e a ressonância dele na Matemática e, de certa forma, conheçam a limitação do seu método de produção.

Neste trabalho investigativo, afirmamos que as características da formalização matemática deve ser foco de preocupação em cursos que qualificam bacharéis e licenciandos em Matemática. Afirmamos também que trabalhar com o TIG e suas interpretações é importante, senão crucial, para a compreensão tanto da estrutura da Matemática, como da instabilidade implícita aos sistemas. Entretanto, devemos deixar claro que há várias outras demonstrações que circulam em livros clássicos de *Lógica Matemática* que poderiam cumprir o papel de permitir que se conheça o desenvolvimento da prova e o estabelecimento das conclusões.

O TIG, os professores e o ensino de Matemática na Educação Básica

O TIG não se relaciona diretamente aos conteúdos da Matemática elencados para o Ensino Básico, pois ele é um resultado significativo no cerne do método formal da Matemática. Ainda assim, faz-se importante que o professor que esteja se qualificando para ensinar Matemática na Educação Básica conheça esse resultado para que tenha clareza da incompletude que ocorre nessa ciência e possa trabalhar essa ideia, não construindo aquela plasmada na concepção de soberania, tomando-a como ciência da verdade absoluta, muitas vezes mitificada entre matemáticos.

A cultura matemática de um professor em forma/ação solicita o agendamento do TIG em sua grade curricular e o seu ensino, uma vez que ele apresenta uma característica do modo de produção matemático. Este modo que se estende à toda a Matemática e também, à Matemática ensinada na escola, já que esta reflete a concepção trabalhada em cursos de formação de professores.

Cientes da importância do ensino do TIG para professores, devido à clarificação que este resultado mostra sobre o limite das possibilidades do método axiomático, prosseguimos.

A tendência predominante na organização da Matemática e, por sua vez, uma forte tendência sobre a metodologia de ensino da Matemática é derivada do método de Euclides e do grupo Bourbaki. O método euclidiano, por um lado, privilegia a axiomática, na qual os aspectos formais lógicos e linguísticos são prevalentemente considerados; a proposta de Bourbaki, por outro, utiliza o método axiomático e prioriza o estruturalismo organizado em torno das estruturas algébricas, topológicas e de ordem.

Das três correntes filosóficas que mais influenciaram a Matemática, sua produção e consequentemente seu ensino, o Formalismo de Hilbert é o que mais se sobressai, muito embora tenha sido a corrente que mais foi afetada pelo TIG. De acordo com Wittman (2001), “embora o sonho de Hilbert tenha sido fadado ao insucesso em 1931 quando Gödel provou seu teorema da incompletude, a definição formal do programa de Hilbert sobreviveu e se transformou em uma teoria implícita do ensino e aprendizagem” (WITTMAN, 2001, p. 6, tradução nossa).⁸⁴

O método axiomático de uma determinada teoria é um ápice que coroa as lapidações e revela a vida adulta da teoria. Nossa interpretação é a de que o TIG é um evidenciador de uma característica da Matemática, isto é, a incompletude de parte de suas teorias e consequentemente

⁸⁴ Do original: “Although Hilbert's dream burst already in 1930 when Gödel proved his incompleteness theorem, the formalistic setting of Hilbert's programme has survived and turned into an implicit theory of teaching and learning”. (WITTMAN, 2001, p. 6).

de seu todo, ou seja, sua impossibilidade de provar todas as questões verdadeiras derivadas do conjunto de axiomas de Peano, sua incapacidade de provar sua própria consistência. Isso, entendemos, influencia o modo pelo qual a Matemática é compreendida, mas não o modo pelo qual a Matemática é produzida.

A compreensão de que a Matemática é respondedora de todas as suas questões é impregnada da ideologia da superioridade, além de ser peculiar aos que desconhecem a característica da impossibilidade simultânea de consistência e completude desta ciência. Compreender a Matemática para além do ensinado aos alunos é algo que oferece uma visão ampla dessa ciência. Metaforicamente, essa afirmação se parece com aquela sobre um piloto de avião precisar ter conhecimentos que os passageiros não precisam ter, muito embora façam a mesma viagem, no mesmo avião. O piloto precisa saber, por exemplo, a capacidade de armazenamento de combustível e a taxa de queima deste por km voado. Ao professor cabe saber mais do que as características do que ele está ensinando, as ideias que subjazem os temas matemáticos trabalhados e as que transcendem o desígnio da Matemática formalizada.

A importância que atribuímos à compreensão dos resultados desse teorema está em sintonia com nossa visão do seu alcance e da sua repercussão para a Matemática escolar, na medida em que as questões da realidade social que comumente são explicadas com base na certeza matemática podem ser questionadas na dimensão da base da própria estrutura dessa ciência.

A verdade matemática é um fato cultural e não apenas um resultado de uma demonstração. O TIG evidencia que há proposições matemáticas verdadeiras que não podem ser provadas como verdadeiras e, tampouco, como falsas. Em outras palavras, há teorias nas quais sempre haverá proposições verdadeiras que fogem às regras de demonstração.

Disso tudo, argumentamos, por fim, que é fundamental o trabalho com o teorema da incompletude de Gödel em cursos de Licenciatura em Matemática, em especial pela visão de mundo da Matemática que ele aponta, iluminando as possibilidades e as impossibilidades dessa ciência em seu trabalho de produzir e provar verdades. Depois de 85 anos passados, desde que o TIG foi provado, é questionável que professores de Matemática se qualifiquem sem terem conhecimento desse revés na Matemática. Afinal, ele desfaz a ideia de uma Matemática que tenha todas suas teorias capazes de derivar seus enunciados verdadeiros, prová-los todos e tê-los circunscritos na baila do sistema axiomático que os conforma.

Acreditamos que o ensino do TIG pode levar o professorando de Matemática a divisar que há um abalo da certeza de que um sistema axiomático possa assegurar seus fundamentos

na ciência com a qual trabalha. A incompletude embora não impeça a continuidade da Matemática, traz um dado muito importante a respeito da estrutura de conhecimento da Matemática, elemento esse que frustra a grande expectativa sedimentada e bastante divulgada de que ela produziria e resolveria toda e qualquer questão de seu próprio escopo. Além disso, oferece, também, certeza aos assuntos abrangidos por ela em termos de aplicabilidade.

COMPREENDENDO O TIG E SUA IMPORTÂNCIA EM CURSOS DE LICENCIATURA DE MATEMÁTICA

Apresentamos neste trabalho uma proposta de como atualizar sentidos e significados do TIG em um curso de Licenciatura em Matemática. Indicamos o trabalho com este tema em diferentes momentos durante o processo do curso de modo a ir desdobrando a discussão das ideias que ele estabelece em diferentes disciplinas e trazendo o tema em conexão com outros que constam nas ementas dessas componentes curriculares.

Compreendemos que há vários níveis possíveis de se trabalhar com o TIG com alunos de graduação em Matemática. Desde uma discussão do enunciado, sem entrar nos detalhes da prova, até, por exemplo, uma discussão que abranja uma demonstração e a discussão das ideias utilizadas nela. No entanto, apreendemos que o ensino do TIG abordando todos os detalhes deste teorema demandaria muita maturidade. Para o efeito pretendido, a proposta aqui apresentada é suficiente e contempla o objetivo⁸⁵.

Pode-se envolver a apresentação dele como resultado que possui pontos de contato com outros temas, ter contato com uma demonstração desse resultado, discussão do juízo que ele formula, entre outras abordagens. Assim, consideramos apropriado que o TIG seja referenciado, explorado em aspectos, sempre que estiver em foco os assuntos: sistemas formais da Matemática; Aritmética de Peano; problemas clássicos da Antiguidade, correntes filosóficas da Matemática; Geometrias não-euclidianas, Matemática como realização histórico-cultural humana; e, quando se estiver trabalhando com duas demonstrações deste teorema em disciplinas que tratam de apresentar o edifício matemático e a lógica como teoria formal.

Segundo nossa compreensão, é imprescindível que este tema seja trabalhado na Educação Matemática com professores que se ocuparão oficiosamente de ensinar Matemática em escolas em qualquer que seja o nível, pois, este teorema apresenta a dimensão de alcance do que a Matemática pode produzir, é um teorema que se relaciona aos fundamentos dessa ciência.

Acreditamos que o contato direto dos estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática com esse teorema, no modo característico de esse resultado se dar à experiência, pode se oferecer compreensões do TIG em seus diversos aspectos e principalmente em sentidos e significados para a Matemática. A experiência com o TIG é a forma que visualizamos de os

⁸⁵ O objetivo é apresentar proposta de como proporcionar aos estudantes de Licenciatura em Matemática a oportunidade da vivência com o TIG em diversos aspectos que permitam a experiência com a incompletude nos fundamentos da Matemática e rompa com a ideia do dogmatismo do método axiomático.

estudantes tomarem contato com esse resultado. Acreditamos que essa forma proposta torna possível a tomada de consciência por parte dos professorandos sobre a incompletude da Matemática e sobre o significado, disso principalmente para ela própria, para os matemáticos profissionais, para os professores de matemática na escola básica.

É sabido por nós que cursos de Licenciatura em Matemática podem apresentar propostas curriculares diferentes nos quais o ensino do TIG pode aparecer de diferentes formas, variando o enfoque. Por exemplo, sendo abordada sua dimensão técnica, filosófica, pode-se trabalhar com a ideia de incompletude de uma teoria. A proposta que elaboramos foi pensada junto a este curso e de modo a mostrar possibilidade de o TIG ser trabalhado junto a temas indicados na proposta do curso.

De todo modo, nossa proposta é sustentada pela crença da imprescindibilidade da experiência pessoal do professorando com o TIG. Além disso, ponderamos que a sugestão apresentada poderia ter mais êxito se tratada em conexão com os conteúdos já presentes nas ementas e com disciplinas já existentes, articulando assim, junto com o que vem sendo desenvolvido, essa possibilidade de atualização do ensino do TIG. A esperança do êxito da proposta reside na possibilidade de criar formas de atualização nas quais seja possível resistir localmente, conforme sugere Santos (2000). O que propomos que seja trilhado e refletido junto com os professores dos cursos de Licenciatura é uma entre outras tantas possíveis alternativas de tornar presente o ensino do TIG em cursos de formação de professores dessa ciência. Salientamos que essa que é hoje uma alternativa, antes poderia parecer utópico.

Endereçado à própria Matemática, o fenômeno gödeliano transmite uma mensagem de revigoração e rompe, segundo D'Ambrósio (2003), com uma possível ideia de terminalidade da Matemática presente no discurso de Hilbert, em 1900, que expressava a importância da resolução dos 23 problemas, marcando o fim de uma era e provocando novos problemas que poderiam manter a vigorosidade da pesquisa em Matemática.

O TIG provou que, mesmo um conjunto finito de axiomas da aritmética básica, não poderia ser consistente e completo, simultaneamente. Como consequência disso, tem-se a impossibilidade da realização do anseio do programa de Hilbert, que dependia dessa prova para sua realização completa. O programa que angariava esforços de todo um grupo de matemáticos pertencentes à corrente filosófica do Formalismo, se empenhava em propor a consistência de sistemas mais complexos em termos de sistemas mais simples. Sendo assim, a consistência da Matemática poderia ser reduzida, em último grau, à consistência da aritmética básica. Porém, o segundo TIG, um corolário do primeiro, impôs uma restrição que impossibilita que um

sistema axiomático consistente prove que ele próprio é consistente. Em outras palavras, sistemas axiomáticos consistentes são obrigatoriamente humildes.

Boaventura Souza Santos (SANTOS, 1988) entende que o TIG mostra que, mesmo seguindo à risca as regras da Lógica Matemática, é possível formular questões indecidíveis, inclusive, a que postula o caráter não contraditório do sistema e que, por isso, assevera ele, o rigor da Matemática carece de fundamento. A ideia primordial de rigor em Matemática diz da aceitação de um resultado apenas e somente mediante a prova dele. Atualmente, podemos afirmar que uma teoria é rigorosa se ela é uma teoria formal e se os seus resultados são obtidos por meio das regras formais da Lógica Matemática. Gödel, procedendo rigorosamente, mostrou que não é possível conhecer (provar) tudo, na medida em que existem questões na Matemática que não podem ser resolvidas pelo método formal.

De todo modo, a prova da existência de questões indecidíveis, que aponta o não-“completamento” das teorias matemáticas formais que tratem dos números naturais, conforme expressou Gödel, possibilita problematizações a respeito da compreensão atual de rigor, principalmente por parte da Filosofia da Matemática. Conforme afirma Santos (1988), que tem estudado criticamente esse tema, o conceito de rigor matemático obedece a critérios que seleciona e, sendo assim, tem um lado construtivo e um lado destrutivo.

Este teorema destaca uma característica da ciência Matemática: que não existe algoritmo para decidir sobre a veracidade ou a falsidade de todas as declarações matemáticas, mesmo quando restritos à linguagem da teoria dos números naturais com as operações usuais de adição e multiplicação.

A existência de indecidíveis, que foi provada no âmbito da aritmética formalizada, se desdobra atingindo os ramos da Matemática que envolvem enunciados sobre números naturais com as operações de soma e multiplicação. Vale dizer que a teoria $(\mathbb{N}, +)$ cujo universo é o conjunto dos números naturais com a relação usual $+$ é decidível, isto é, nessa teoria não existe questão indecidível, tal como existe na teoria cujo modelo é $(\mathbb{N}, +, \times)$, o que se pode conferir com mais detalhes em Sipser (2007, p. 236-244).

Afirmar a presença de um indecidível na aritmética formalizada é o mesmo que afirmar que a teoria $(\mathbb{N}, +, \times)$ é indecidível, o que significa, em linguagem da computação, que nenhum algoritmo existe para decidir a veracidade ou a falsidade de enunciados matemáticos, mesmo quando restrito à linguagem de \mathcal{N} . Filosoficamente, o TIG demonstra que a Matemática não pode ser mecanizada. Já o corolário demonstra que uma teoria capaz de expressar todas suas sentenças demonstráveis pode provar sua consistência se, e somente se, for inconsistente.

Por sua vez, os matemáticos profissionais compreenderam o TIG como um esclarecimento essencial para o poder de alcance de seu modo de produção, aclarando os contornos efetivos da realização dos sistemas axiomáticos, não sendo de modo algum um impedimento para sua continuidade e ao seu modo de ser produzida.

De muitos vieses que observamos de como o TIG recai sobre professores de Matemática, ao trabalharem com ensino de Matemática, o mais relevante parece ser o de que este teorema com sua mensagem pode regular expectativas exageradas do poder da Matemática em produzir e provar todas as suas verdades no âmbito de teorias.

Na distinção entre verdade e demonstrabilidade estabelecida pelo TIG, reside um reconhecimento de que o estabelecimento da verdade não é ato particular do sistema, pois ele é incapaz de *provar* todas suas verdades, sugerindo assim que ele pode necessitar de sistemas vizinhos para efetuar essa prova.

Nossa expectativa é, sobretudo, dar ao futuro professor a possibilidade de discutir questões de filosofia da Matemática referentes à ela própria. Por sua vez, a Matemática é produzida por homens e mulheres e o anseio pelo conhecimento do seu alcance conjuntamente com a vontade de compreendê-la está na origem de grandes avanços tecnológicos e de outras ciências.

Enquanto perspectivas de pesquisa em Educação Matemática antevistas por nós, levantamos uma questão, dentre outras, que vão sendo percebidas em germinação, que nos colocamos e que entendemos estar à espera de outras investigações: como para o licenciando em Matemática, comumente inserido em discussões e atmosfera que compreende a Matemática como soberana, fará sentido, se fizer, essa visão de mundo de Matemática incompleta que apresentamos?

REFERÊNCIAS

- ALES BELLO, Angela. *Introdução à Fenomenologia*. Tradução de J. T. Garcia e M. Mahfoud. Bauru: EDUSC, 2006.
- _____. *Pessoa e Comunidade*. Belo Horizonte: Artesã, 2015.
- BAUMANN, Ana Paula Purcina. *Atualização do Projeto pedagógico nos cursos de formação de professores de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental: Licenciatura em Pedagogia e Licenciatura em Matemática*. 2013, 654 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.
- BECKER, Oscar. Os limites do pensamento matemático. In: _____. *O pensamento matemático: suas grandezas e seus limites*. São Paulo: Herder Editorial, 1965. p. 114-189.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa em Educação Matemática. *Pro-Posições*, v. 4, n. 1, p. 18-23, mar. 1993. Disponível em < <http://www.ime.usp.br/~dpdias/2016/Pesquisa%20-%20Bicudo.pdf>>. Acesso em: 30 mar. 2016.
- _____. Ensino de matemática e educação matemática: algumas considerações sobre seus significados. *Bolema*, Rio Claro, n. 13, p. 1-11, 1999.
- _____. A contribuição da Fenomenologia à Educação. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; CAPPELLETTI, Isabel Franchi. (Org.). *Fenomenologia: uma visão abrangente da Educação*. São Paulo: Olho d'Água, 1999. p. 11-51.
- _____. (Org.). *Formação de professores?: Da incerteza à compreensão*. Bauru: EDUSC, 2003.
- _____. (Org.). *Filosofia da Educação Matemática: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: Editora UNESP, 2010.
- _____. (Org.). *Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica*. São Paulo: Cortez, 2011.
- _____. A fenomenologia do cuidar na educação. In: PEIXOTO, Adão José; HOLANDA, Adriano Furtado. *A fenomenologia do cuidado e do cuidar: perspectivas multidisciplinares*. Curitiba: Juruá editora, 2011. p. 85-91.
- _____. O professor de matemática em forma/ação. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. *Anais...* Curitiba: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2013.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; ROSA, Maurício. Mundo-vida: desafios postos pela virtualidade do ciberespaço. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DA ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA DE FILOSOFIA FENOMENOLÓGICA, 3., 2007, Lisboa. *Anais...* Lisboa: Universidade de Lisboa, 2007. p. 1-19.
- BOURBAKI, Nicolas. The Architecture of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*. v. 57, n. 4, p. 221-232, 1950.
- _____. *Theory of Sets: Elements of Mathematics 1*. Paris: Hermann, 1968.
- BOYER, Carl. B. *História da Matemática*. Tradução de E. F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1996.
- CARNIELLI, Walter; EPSTEIN, Richard L. *Computabilidade, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2006.

CHAITIN, Gregory J. *Exploring randomness: Discrete Mathematics and theoretical Computer Science*. London: Springer, 2001.

CHANGEUX, Jean-Pierre; CONNES, Alain. *Matéria pensante*. Lisboa: Gradiva, 1996.

CHURCH, Alonzo. An Unsolvability Problem of Elementary Number Theory. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 41, p. 332-333, 1935.

D'AMBRÓSIO, U. Um brasileiro no Congresso Internacional de Matemáticos de 1900. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 3, n. 5, p. 131-139, 2003.

_____. Etnometodologia, Etnomatemática, transdisciplinaridade: embasamentos crítico-filosóficos comuns e tendências atuais. *Revista Pesquisa Qualitativa*, São Paulo, v. 1, p. 155-167, 2005.

DA SILVA, Jairo José. O segundo problema de Hilbert. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 3, n. 5, p. 29-37, 2003.

_____. *Filosofias da Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

DAWSON, John W. Jr. *Why Prove it Again?: Alternative Proofs in Mathematical Practice*. Basel: Birkhäuser, 2015.

DERRIDA, Jacques. *A voz e o fenômeno: introdução ao problema do signo na fenomenologia de Husserl*. Tradução de L. Magalhães. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1994.

ENCICLOPEDIA Britânica. São Paulo: *Encyclopaedia Britannica do Brasil*, 1995. p. 897-906. 6V.

FEFERMAN, Solomon. The Impact of the Incompleteness Theorems on Mathematics. *Notices American Mathematical Society*, v. 53, n. 4, p. 434-439, 2006.

FONTANA, Vanessa Furtado. Intuição de essências na Fenomenologia de Husserl. *Revista Faz Ciência*, Francisco Beltrão, n. 9, p. 167-183, 2007.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. *Fascínio da Técnica, Declínio da Crítica: um estudo sobre a prova rigorosa e a formação do professor de Matemática*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Rio Claro: UNESP, 1995.

_____. As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Bolema*, Rio Claro, v. 15, n. 18, p. 73-81, 2002.

_____. Da literatura sobre a prova rigorosa em Educação Matemática: um levantamento. In: BAUMANN, A. P. P.; MIARKA, R.; MONDINI, F.; LAMMOGLIA, B.; BORBA, M. C. (Org.). *Maria em Forma/Ação*. Rio Claro: Editora IGCE, 2010. p. 69-100. 1 CD.

GÖDEL, Kurt. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, v.4, p. 43-38, 1933.

_____. On Formally Undecidable Propositions of *Principia Mathematica* and Related Systems I. In: FEFERMAN, Solomon; DAWSON, John W. Jr.; KLEENE, S. C.; MOORE, G. H.; SOLOVAY, R. M.; HEIJENOORT (Ed.). *Kurt Gödel: Collected Works*. v. I. Publications 1929-1936. Oxford: Oxford University Press, 1986. p.144-195.

_____. Acerca das Proposições Formalmente Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos. In: LOURENÇO, M. (Org.). *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 1977a. p. 245-290.

_____. O que é o Problema do Contínuo de Cantor? In: LOURENÇO, M. (Org.). *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*. Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian, 1977b. p. 217-244.

GOLDSTEIN, Rebeca. *Incompletude: a prova e o paradoxo de Kurt Gödel*. Tradução de I. Koytowski. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

GUERRERIO, Gianbruno. Gödel, um tímido iconoclasta. *Scientific American Brasil*. A vanguarda da matemática: e os limites da razão. São Paulo: Duetto Editorial Ltda. Edição revista e atualizada. Coleção gênios da ciência, n. 8, p. 39-67, 2012.

HALMOS, Paul Richard. *I want to be a mathematician: an automathography*. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1985.

HENKIN, Leon. The discovery of my completeness proofs. *The Bulletin of Symbolic Logic*, v. 2, n. 2, p. 127-158, 1996.

HILBERT, David. *The Foundations of Geometry*. Tradução de E. J. Townsend. Illinois: The Open Court Publishing Company, 1950.

_____. Mathematical Problems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 37, n. 4, p. 407-436, jun. 2000. Disponível em <<http://www.math.tamu.edu/~rojas/hilbert23reprinted.pdf>>. Acesso em: 25 mai. 2015.

_____. Problemas matemáticos. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Tradução de S. Nobre. v. 3, n. 5, p. 5 -12, 2003.

HOFSTADTER, Douglas Richard. *Gödel, Escher, Bach: Laços Eternos*. Lisboa: Gradiva, 2000.

HUSSERL, Edmund. *Ideas relativas a una fenomenología pura y una filosofía fenomenológica: investigaciones fenomenológicas sobre la constitución*. Tradução de A. Zirió Q. 2. ed. México: Instituto de Investigaciones Filosóficas, 2005.

_____. *Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica: introdução geral à fenomenologia pura*. Tradução de M. Suzuki. Aparecida: Ideias & Letras, 2006.

IMENES, Luiz Márcio Pereira. *Um Estudo sobre o Fracasso do Ensino e da Aprendizagem da Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

KLEENE, Stephen C. General Recursive Functions of Natural Numbers. *Mathematischen Annalen*, v. 112, p. 727-742, 1936.

_____. *Introduction to Metamathematics*. Princeton: Van Nostrand, 1952.

KLIN, Morris. *Mathematics: The Loss of Certainty*. Oxford: Oxford University Press, 1980.

LANNES, Wagner. *A incompletude além da matemática: impactos culturais do teorema de Gödel no século XX*. 2009. 210 p. Tese (Doutorado em História) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

LEARY, Christopher C. *A Friendly Introduction to Mathematical Logic*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 2000.

LORENZATO, Sérgio; FIORENTINI, Dario. O profissional em Educação Matemática. Disponível em: <http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2016/07/O_profissional_em_Educacao_Matematica-Erica2108.pdf>. Acesso em 9 mai. 2016.

MASHAAL, Maurice. Foco na AXIOMÁTICA e nas estruturas. *Scientific American Brasil*. A vanguarda da matemática: e os limites da razão. São Paulo: Duetto Editorial Ltda. Edição revista e atualizada. Coleção gênios da ciência, n. 8, p. 88-98, dez. 2012.

MATHIAS, Adrian Richard David. The Ignorance of Bourbaki. *The Mathematical intelligencer*. v. 14, n. 3, p. 4-13, jun. 1992.

MERLEAU-PONTY, Maurice. Fenomenologia da percepção. Tradução de C. Moura. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James, R. *Prova de Gödel*. Tradução de G. K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

POLYA, George. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. 2. ed. Reeditada. New Jersey: Princeton University Press, 1964.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROSSER, J. Barkley. Extensions of some theorems of Gödel and Church. *The Journal of Symbolic Logic*. v. 1, p. 87-91, 1936.

RUELLE, David. Complexity and Gödel's Theorem. In: _____. *Chance and Chaos*. New Jersey: Princeton University Press, 1991. p. 143-149.

SANTOS, Boaventura Sousa. *Um Discurso sobre as Ciências*. Porto: Edições Afrontamento, 1988.

_____. *A crítica da razão indolente: contra o desperdício da experiência*. 1. ed. São Paulo: Editora Cortez, 2000.

SHOENFIELD, Joseph R. *Mathematical Logic*. London: Publishing Company, 1967.

SIPSER, Michael. Introdução à Teoria da Computação. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

SNAPPER, Ernst. As Três Crises da matemática: o Logicismo, o Intuicionismo, e o Formalismo. Tradução de J. P. de Carvalho. *Humanidades*, v. 2, n. 8, p. 85-93, jul/set. 1984.

TASSINARI, Ricardo Pereira. *Incompletude e auto-organização: sobre a determinação de verdades lógicas e matemáticas*. 2003. 238 p. Tese (Doutorado em Filosofia)-Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

WANG, Hao. *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge: MIT Press, 1987.

_____. Some Facts About Kurt Gödel. *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 46, n. 3, p. 653-659, 1981.

WITTMANN, Erich Ch. Developing Mathematics Education in a Systemic Process. *Educational Studies in Mathematics*, v. 48, n. 1, p. 1-20, 2001. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/3483113>>. Acesso em: 12 abr. 2016.

BIBLIOGRAFIA ESTUDADA

- ARISTÓTELES. *Da interpretação*. São Paulo: Editora UNESP, 2013.
- BARCO, Aron Pilotto. *A pertinência da crise nas ciências constatada por Husserl frente ao teorema da incompletude de Gödel*. 2011. Disponível em: <<https://anaisnepefe.fe.ufg.br/up/306/o/ComunAronPilloto.pdf>>. Acesso em: 15 fev. 2014.
- BORGES, Carloman Carlos. *A Matemática: suas origens, seus objetos e seus métodos*. Feira de Santana, 1983.
- BORNHEIM, Gerd. A. *Introdução ao filosofar: o pensamento filosófico em bases existenciais*. 11. ed. São Paulo: Globo, 2003.
- CASSOU-NOGUÈS, Pierre. *Les demons de Gödel: Logic et folie*. Paris: Seuil. 2007.
- COSTA, N. C. A da; DORIA, F. A. Undecidability and Incompleteness in Classical Mechanics. *International Journal of Theoretical Physics*, v. 30, n. 8, p. 1041-1073, 1991.
- COURANT, R; ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.
- CRIPPA, Davide. A solução cartesiana da quadratura do círculo. *Scientiae studia*, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 597-621, 2010.
- D'ALKAINE, C. V. Os trabalhos de Gödel e as denominadas ciências exatas. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 4, p. 525-530, 2006.
- DAVIES, P. *Alguém governa o Universo?* Revista Superinteressante (mensal) Editora Abril, n. 57, Jun. 1992. Disponível em <http://super.abril.com.br/superarquivo/1992/conteudo_113063.shtml/>. Acesso em 15 fev. 2014.
- DA SILVA, Jairo José. O método axiomático. 2010. Curso de verão. Disponível em: <<http://docslide.com.br/documents/historia-do-metodo-axiomatico.html>>. Acesso em: 12 mar. 2016.
- _____. Gödel and Transcendental Phenomenology. In: ORTIZ HILL, Claire; DA SILVA, Jairo José. *The Road Not Taken: on Husserl's Philosophy of Logic and Mathematics*. Londres: Lightning Source, 2013. p. 325-344.
- DAWSON, John. W. Jr. *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*. Massachusetts: A K Peters, 1997.
- _____. The reception of Gödel Incompleteness Theorems. In: SHANKER S. G. *Kurt Gödel in Sharper Focus*. In: SHANKER S. G. (Ed.) *Gödel Theorem in focus*. New York: Routledge, 1988. p. 74-95.
- DOXIADIS, Apostolos. *Tio Petrus e a conjectura de Goldbach*. Lisboa: Editora 34, 2001.
- DOXIADIS, Apostolos; PAPADIMITRIOU, Christos H. *Logicomix: uma jornada épica em busca da verdade*. São Paulo: Martins Fontes, 2013.
- FADIGAS, Inácio de Sousa (Org.). **A Matemática para todos**. Feira de Santana: Universidade Estadual de Feira Santana, 2006.
- FEFERMAN, Solomon; DAWSON, John W. Jr.; KLEENE, S. C.; MOORE, G. H.; SOLOVAY, R. M.; HEIJENOORT (Ed.). *Kurt Gödel: Collected Works*. v. I. Publications 1929-1936. Oxford: Oxford University Press, 1986.

- FEFERMAN, Solomon; DAWSON, John W. Jr.; GOLDFARB, Warren; PARSONS, Charles; SIEG, Wilfried (Ed.). *Kurt Gödel: Collected Works* v. III. Unpublished Essays and Lectures. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- FERREIRA, Fernando. A Matemática de Kurt Gödel. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*. n. 55, p. 39-62, 2006.
- FRANZÉN, T. *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*. Massachusetts: A K Peters, 2005.
- GLEICK, James. *A informação: uma história, uma teoria, uma enxurrada*. Tradução de A. Calil. São Paulo: Companhia das Letras, 2013.
- GÖDEL, Kurt. The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the light of Philosophy. In: GÖDEL, K. *Collected Works*. Vol. III: *Unpublished Essays and Lectures*. S. Feferman et al. (Ed.). Oxford: Oxford University Press, 1961. p. 375-386.
- GUILLEN, M. *Pontes para o infinito: o lado humano das matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1998.
- HEIJENOORT, J. V. (Org.). *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. London: Harvard University Press, 1967.
- HINTIKKA, J. *On Gödel*. Boston: Wadsworth, 2000.
- HOFSTADTER, D. R., *Gödel, Escher, Bach: Laços Eternos*. Gradiva, 2000.
- LADRIÈRE, J. *Limitaciones internas de los formalismos*. Madrid: Editorial Tecnos, 1969.
- LAKATOS, Imre. A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, v. 27, n.3, p. 201–223, sep. 1976.
- _____. *Provas e refutações: a lógica da descoberta matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.
- LEVIN, Janna. Um louco sonha a máquina universal. Tradução de I. Korytowski. São Paulo: Companhia das Letras, 2009.
- LIMA, Arlete Cerqueira. *Lógica formal: origens e aplicações*. Salvador: Quarteto, 2010.
- LUCAS, J. R. Minds, Machines and Gödel. *Philosophy*, n. 36, p. 112-127, 1961.
- LÜTZEN, Jesper. The Algebra of Geometric Impossibility: Descartes and Montucla on the Impossibility of the Duplication of the Cube and the Trisection of the Angle. *Centaurus*, v. 52, p. 4-37, fev. 2010.
- PENROSE, Roger. *A mente nova do rei: computadores, mentes e as leis da Física*. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1993.
- _____. *Shadows of the mind: a search for the missing science of consciousness*. Great Britain: Vintage, 1995.
- ROTA, Gian Carlo. Fine Hall in its Golden Age: Remembrances of Princeton in the early fifties. In: ROTA, Gian Carlos. PALOMBI, Frabrizio (Ed.). *Indiscrete Thoughts*. Boston: Birkhäuser, 1997.
- _____. The Phenomenology of Mathematical Beauty. *Synthese*, v. 111, p. 171-182, 1997.
- RUSSELL, Bertrand. *Sceptical Essays*. London: George Allen & Unwin Ltd, 1928.
- SPENCER BROWN, G. *Laws of Form*. London: George Allen and Unwin Ltda, 1969.
- SUÁREZ, C. A. C. Algunas consecuencias filosóficas del trabajo de Kurt Gödel. *DIÁNOIA*, v. XLVII, n. 49, p. 23–50, 2002.

SZABÓ, Árpád. Greek Dialectic and Euclide's Axiomatics. In: LAKATOS, Imre (Ed.). *Problems in the Philosophy of Mathematics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1967. p. 1-8.

TIESZEN, Richard. Gödel's Path from the Incompleteness Theorems (1931) to Phenomenology (1961). In: _____. *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*. New York: Cambridge University Press, 2005. p. 125-148.

_____. Kurt Gödel and Phenomenology. In: _____. *Phenomenology, Logic, and the Philosophy of Mathematics*. New York: Cambridge University Press, 2005. p. 93-111.

WHITEHEAD, A. N. ; RUSSELL, B. *Principia Mathematica*. v. 1. Cambridge: Cambridge: University Press, 1910.

WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus logico-philosophicus*. São Paulo: Edusp, 1994.