UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Estudo Analítico/Numérico do Problema de Ablação em Corpos Rombudos com Simetria Axial

Francisco Augusto Aparecido Gomes

Orientador: Prof. Dr. João Batista Campos Silva
Co-orientador: Prof. Dr. Antonio João Diniz

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP – Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.
Área de Conhecimento: Ciências Térmicas

Ilha Solteira – SP
Abril/2006

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

Gomes, Francisco Augusto Aparecido.
G633e Estudo analítico/numérico do problema de ablação em corpos rombudos com simetria axial / Francisco Augusto Aparecido Gomes. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2006
142 f. : il. (algumas color.)

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Ciências Térmicas, 2006

Orientador: João Batista Campos Silva
Co-orientador: Antonio João Diniz
Bibliografia: p. 107-111

1. Veículos espaciais – Entrada na atmosfera. 2. Aerotermodinâmica. 3. Calor - Transmissão. 4. Transformadas integrais.

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Estudo Analítico/Numérico do Problema de Ablação em Corpos Rombudos com Simetria Axial

AUTOR: FRANCISCO AUGUSTO APARECIDO GOMES
ORIENTADOR: Praf. Dr. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA MECÂNICA pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr, CASSIO ROBERTO MACEDO MAIA
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. PAULO GILBERTO DE PAULA TORO
Instituto de Estudos Avançados - Centro Técnico Aeroespacial - São José dos Campos/SP

Data da realização: 24 de abril de 2006.

Presidente da Comissão Examinadora
Prof. Dr. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA

À minha mãe Luzia,
meu pai Agostinho *(em memória)*, minha
avó Conceição *(em memória)*.
Ao meu irmão Luiz Augusto.

AGRADECIMENTO

Gostaria de agradecer primeiramente a meu irmão Luiz Augusto, razão de inspiração, vontade, coragem e garra de minha parte na busca intensa pelo ideal de aprender cada vez mais, respeitar e saber ouvir. Agradeço-o pela confiança, ajuda e incentivo em todo o meu processo de criação e aprendizado. Agradeço à minha mãe Luzia, meu pai Agostinho (*em memória*) e minha avó Conceição (*em memória*) pela educação, apoio e orientação nos caminhos percorridos de minha vida.

Agradeço ao Prof. Dr. João Batista Campos Silva, orientador e amigo, pela confiança delegada ao mérito do desenvolvimento desse trabalho. Agradeço pelo grandioso enriquecimento acadêmico, incentivo, paciência e pela grandiosa bondade, aprendizado de vida que levarei por toda a minha jornada na busca pelo conhecimento.

Agradeço ao Prof. Dr. Antônio João Diniz, co-orientador e amigo, pela confiança depositada no desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço à Lilian, minha namorada, pelas palavras de ternura, carinho e compreensão nesse momento tão importante de minha vida.

Minha eterna gratidão a todos àqueles que direta ou indiretamente contribuíram no meu processo de aprendizado.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro.

RESUMO

GOMES, Francisco Augusto Aparecido. **Estudo analítico/numérico do problema de ablação em corpos rombudos com simetria axial.** 2006. 142 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, 2006.

O fenômeno da ablação é um processo que envolve o estudo de proteções térmicas, com muitas aplicações, principalmente na engenharia mecânica e aeroespacial. O processo envolve transferência de calor com movimento de fronteira, onde a posição é desconhecida a priori. As equações governantes do processo formam um sistema não-linear de equações diferenciais acoplado. A análise unidimensional do processo ablativo é realizada em um corpo de revolução, o qual está sobre intenso aquecimento. Esse problema é resolvido utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG, para solução do sistema de equações governantes. Como condição de contorno é considerada um fluxo de calor transiente no contorno, como por exemplo, o que ocorre com veículos na reentrada da atmosfera. A teoria do fluxo de calor de Tauber e de Van Driest é utilizada nessa análise. Os resultados de interesse são, a espessura e a taxa de material ablatado. Os resultados obtidos são comparados com resultados disponíveis de outras técnicas de solução em literaturas.

Palavras-chave: Ablação, Transformada Integral, Técnica da Transformada Integral Generalizada, Difusão, Proteção Térmica

ABSTRACT

GOMES, Francisco Augusto Aparecido. **Analytical/Numerical Study of the Ablation Problem in Blunt Bodies with Axial Symmetry.** 2006. 142 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

The phenomenon of ablation is a process of thermal protection with several applications, mainly, in mechanical and aerospace engineering. This process involves heat transfer with a moving boundary which position is unknown a priori. The governing equations of the process are a non-linear system of coupled partial differential equations. The one-dimensional analysis of ablative process has been done in a revolution body, which is on intense heating. This problem is performed by using the generalized integral transform technique – GITT for solution of the system of governing equations. As boundary condition is considered a transient heat flux like ones that occur, for example, in re-entrance of aerospace vehicles in the atmosphere. The heat flux theory of Tauber and Van Driest were used in that analysis. The results of interest are the thickness and the rate of loss of the ablative material. The obtained results are compared with available results of other techniques of solution in the literature.

Keywords: Ablation, Integral Transform, Generalized Integral Transform Technique, Diffusion, Heat shield.

Lista de Figuras

Figura 2.1 Exemplo de aplicação da teoria hipersônica. (a)-Reentrada na atmosfera; (b) – Veículo hipersônico (NASA - Hyper-X, X43). 35

Figura 2.2 Escoamento em não-equilibrio termoquímico sobre a cápsula de reentrada Apollo, solução numérica (CFD) 36

Figura 2.3 Alterações do campo de escoamento ao longo da onda de choque. 37

Figura 2.4 Forma curvada da onda de choque passando por um corpo de revolução, ogiva-cone. 38

Figura 2.5 Formação da onda de choque em um corpo de revolução do tipo esfera-cone. 39

Figura 2.6 Escoamento sobre um coro de revolução durante a reentrada na atmosfera. .. 44

Figura 3.1 Geometria de Revolução. 47

Figura 3.2 Sistema Ortogonal de Coordenadas Curvilíneas. 49

Figura 3.3 Geometria de Revolução. 51

Figura 3.4 Elemento infinitesimal no corpo de revolução. 52

Figura 3.5 Pontos de interesse no cálculo das propriedades termodinâmicas após a onda de choque. 59

Figura 4.1 Aquecimento aerodinâmicosobre veículo espacial, com forma geométrica de revolução – corpo rombudo. 78

Figura 5.1 Trajetória de Reentrada considerando o *Modelo de Reentrada Vertical sem Sustentação*. 90

Figura 5.2 Análise comparativa do fluxo de calor no ponto de estagnação, entre a metodologia simplificada de Tauber e o Método de Van Driest. 91

Figura 5.3 Análise comparativa do fluxo de calor no ponto de estagnação, entre a metodologia simplificada de Tauber e o Método de Van Driest. 92

Figura 5.4 Análise comparativa do fluxo de calor no ponto de estagnação, entre a metodologia simplificada de Tauber e o Método de Van Driest. 93

Figura 5.5 Perfil de Temperatura comparativa entre os materiais de proteção térmica, para o Período Pré-Ablativo. Método de Tauber. 95

Figura 5.6 Perfil de Temperatura comparativa entre os materiais ablativos para o Período Pré-Ablativo. Método de Van Driest. 96

Figura 5.7 Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o Período Ablativo, N=50 termos. 97

Figura 5.8 Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o Período Ablativo, N=50 termos. 98

Figura 5.9 Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o Período Ablativo, N=50 termos. 98

Figura 5.10 Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o Período Ablativo, N=50 termos. 99

Figura 5.11 Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o Período Ablativo, N=50 termos. 100

Figura 5.12 Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o Período Ablativo, N=50 termos. 100

Figura 5.13 Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Cortiça. 102

Figura 5.14 Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Fibra de Vidro. 102

Figura 5.15 Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Resina Quartzo – Fenólica. 103

Figura 5.16 Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Cortiça. 104

Figura 5.17 Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Fibra de Vidro. 104

Figura 5.18 Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Resina Quartzo – Fenólica. 105

Figura A 1 Porção do corpo de revolução com o detalhe da superfície sob efeito do fluxo de calor [q(t)] responsável pela ablação no sólido. 114

Figura C1 Geometria do choque normal em um corpo de revolução. 123

Lista de Tabelas

Tabela 1 Regimes de escoamento em função do Número de Mach. 35

Tabela 2 Constantes para o cálculo do modelo de reentrada atmosférico. 61

Tabela 3 Propriedades físicas para os materiais de proteção térmica. 89

Tabela D.1 Distribuição de temperatura para o Período Pré-Ablativo. 125

Tabela D.2 Trajetória de reentrada. Modelo de Reentrada Vertical sem Sustentação. 127

Lista de Símbolos

Letras Romanas Maiúsculas

A_i	Parâmetro dependente do índice i
A_{ij}	Matriz de coeficientes para o Período Ablativo
B_m	Parâmetro dependente do índice m
$\hat{B}_{ij}$	Matriz de coeficientes do problema definido pela Eq. 4.118
$\hat{B}_{ii}$	Matriz de coeficientes do problema definido pela Eq. 4.118
P_{ijmk}	Matriz de coeficientes para o caso bidimensional
H	Calor de ablação por unidade do tempo
$K_i(\eta, y, \tau)$	Autofunção normalizada para o caso bidimensional
L	Operador matemático adimensional
$L_1,\ L_2$	Dimensão do retângulo nas direções x e y respectivamente [m]
M_∞	Número de Mach do escoamento não perturbado
M_k	Autofunção normalizada para o caso bidimensional
$\bar{K}_i$	Autofunção normalizada para o caso unidimensional do Período Ablativo
N_i	Norma das autofunções para o caso bidimensional do Período ablativa
N_k	Norma das autofunções para o caso bidimensional do Período ablativa
$\bar{N}_i$	Norma das autofunções para o caso unidimensional do Período Pré-Ablativo
$\bar{M}_i$	Norma das autofunções para o caso unidimensional do Período Ablativo
$P_1(x, y, \tau)$	Parâmetro definido em $\hat{\tilde{P}}_{im}(\tau)$
$P_2(x, y, \tau)$	Parâmetro definido em $\hat{\tilde{S}}_{im}(\tau)$
$\tilde{P}_i(x, \tau)$	Parâmetro definido em $\hat{\tilde{P}}_{im}(\tau)$
$\hat{\tilde{P}}_{im}(\tau)$	Parâmetro definido na Eq. 3.16
$Q(\tau) = \dfrac{q}{q_0}$	Fluxo de calor adimensional do problema unidimensional

$Q_1(\tau) = \frac{q_1}{q_0}$	Fluxo de calor adimensional absorvido do problema
$Q_2(\tau) = \frac{q_2}{q_0}$	Fluxo de calor adimensional rejeitado do problema
$\dot{Q}_2$	Derivada primeira do fluxo de calor rejeitado
R	Raio de curvatura do corpo rombudo (revolução)
U_∞	Velocidade do escoamento não perturbado [m/s]
T_∞	Temperatura do ar atmosférico [K]
P_∞	Pressão do ar atmosférico [Pa]
$S_t = \frac{c(T_m - T_0)}{H}$	Número de Stefan
$\hat{\tilde{S}}_{im}(\tau)$	Parâmetro definido na Eq. 3.21
T^*	Temperatura dimensional [K]
T_0	Temperatura inicial [K]
T_f	Temperatura de fusão [K]
$\tilde{Z}_i(x,\tau)$	Transformada integral do problema bidimensional do Período Pré-Ablativa
$\hat{\tilde{Z}}_{im}(\tau)$	Transformada integral do problema bidimensional do Período Pré-Ablativa
$\bar{g}_i$	Parâmetro definido na Eq. 4.90
I	Parâmetro definido na Eq. 4.77
II	Parâmetro definido na Eq. 4.76

Letras Romanas Minúsculas

$f_1(x,y)$	Condição inicial definida em $\hat{\tilde{f}}_{im}(\tau)$
$f_2(x,y)$	Condição inicial definida pela $\hat{\tilde{h}}_{im}(\tau)$
$\tilde{f}_i(x,\tau)$	Condição inicial transformada com relação a direção y
$\tilde{f}_i(y,\tau)$	Condição inicial transformada segundo a direção η

$\tilde{\tilde{f}}_{im}(\tau)$	Condição inicial transformada com relação a direção x
$\hat{\tilde{f}}_{ik}(\tau)$	Condição inicial transformada segundo a direção y
i	Índice dos autovalores e autofunções
j	Índice dos autovalores e autofunções
k	Condutividade térmica
$l = \frac{L_1}{L_2}$	Comprimento adimensional
$\overline{x}$	Espessura dimensional da parede do corpo de revolução
m	Índice dos autovalores e autofunções
q	Fluxo de calor dimensional incidente sobre a superfície de revolução
q_0	Fluxo de calor de referência, dimensional
$\dot{q}''(t) = \frac{k(T_f - T_0)}{\overline{x}}$	Fluxo de calor de referência
q_1	Fluxo de calor absorvido
q_2	Fluxo de calor rejeitado
r	Raio de revolução [m]
t	Tempo [s]
t_f	Tempo de início da ablação [s]
t_r	Tempo de referência [s]
x	Eixo de coordenadas cartesianas
y	Eixo de coordenadas cartesianas
c_p	Calor específico do material da proteção térmica [kJ/kg-K]
$c_{p_{ar}}$	Calor específico do ar [kJ/kg-K]
h_{aw}	Entalpia adiabática na parede [kJ/kg-mol]
h_w	Entalpia na parede [kJ/kg-mol]
h_∞	Entalpia do ar [kJ/kg-mol]
h_0	Entalpia de estagnação [kJ/kg-mol]
$\frac{du_e}{dx}$	Gradiente de velocidade do escoamento externo [m/s]

Letras Gregas

ρ_∞	Densidade do ar atmosférico [kg/m^3]
$\alpha_T = \frac{k}{c}$	Difusividade térmica
$\tau = \frac{\overline{x}^2}{\alpha_T}$	Tempo adimensional
τ_m	Tempo de início da ablação adimensional
ν	Inverso do número de Stefan
$\overline{\eta}_f$	Espessura adimensional do material ablativo
μ_i	Autovalor do problema bidimensional do Período Pré-Ablativa
μ_k	Autovalor do problema bidimensional do Período Ablativa
$\lambda_i(y,\tau)$	Autovalor do problema bidimensional do Período Ablativa
λ_m	Autovalor do problema bidimensional do Período Pré-Ablativa
$\phi_i(\eta,y,\tau)$	Autofunção do problema bidimensional do Período Ablativa
$\phi_m(x,\tau)$	Autofunção do problema bidimensional do Período Pré-Ablativa
$\psi_i(x,y,\tau)$	Autofunção do problema bidimensional do Período Pré-Ablativa
$\psi_k(y,\tau)$	Autofunção do problema bidimensional do Período Ablativa
φ	Potencial de temperatura generalizado em coordenadas curvilíneas
$\xi(\tau)$	Espessura de material ablativo
$\theta(x,y,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional do problema
$\theta_1(x,y,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional do Período Pré-Ablativa do problema bidimensional
$\theta_2(x,y,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional do Período Pré-Ablativa do problema bidimensional
$\widetilde{\theta}_i(x,\tau)$	Transformada integral do problema bidimensional segundo a direção y
$\widehat{\widetilde{\theta}}_{im}(\tau)$	Transformada integral do problema bidimensional segundo a direção x
$\theta^*(\eta,y,\tau)$	Distribuição de temperatura adimensional do Período Ablativa definida para homogeneizar as condições de contorno
$\widetilde{\theta}_i^*(y,\tau)$	Transformada integral do problema bidimensional do Período Ablativa
$\widehat{\widetilde{\theta}}_{im}^*(\tau)$	Transformada integral do problema bidimensional do Período Ablativa

Φ_i	Perfil de temperatura adimensional para o Período Pré-Ablativo para o caso unidimensional
$\overline{\Phi}_i$	Perfil de temperatura adimensional para o Período Pré-Ablativo para o caso unidimensional, condição para homogeneização das condições de contorno
$\overline{\psi}_i$	Autofunção do Período Pré-Ablativo para o caso unidimensional
$\overline{\mu}_i$	Autovalor do Período Pré-Ablativo para o caso unidimensional
$\tilde{\overline{\Phi}}_i$	Transformada Integral do Período Pré-Ablativo para o caso unidimensional
$\hat{\Phi}_i$	Perfil de temperatura adimensional do Período Pré-Ablativo para o caso unidimensional
$\overline{\eta}_i$	Posição da fronteira adimensional do Período Ablativo para o caso unidimensional
$\overline{\omega}_i$	Autofunção do Período Ablativo para o caso unidimensional
$\overline{\varepsilon}_i$	Autovalor do Período Ablativo para o caso unidimensional
$\tilde{\hat{\Phi}}_i$	Transformada Integral do Período Ablativo para o caso unidimensional
Ω_i	Parâmetro definido pela Eq. 4.114
Ω_j	Parâmetro definido pela Eq. 4.114
$\delta(\tau)$	Posição da fronteira móvel do Período Ablativo para o caso unidimensional
$\delta(\xi,\tau)$	Posição da fronteira móvel do Período Ablativo para o caso bidimensional

Sumário

1 Introdução 19

1.1 Desenvolvimento do Trabalho 22

1.2 Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) 23

1.3 Revisão Bibliográfica 26

1.3.1 Aquecimento Hipersônico 26

1.3.2 Ablação 30

2 Escoamento Hipersônico e Aquecimento Aerodinâmico 34

2.1 Descrição Preliminar 34

2.2 Escoamento Hipersônico 34

2.3 Os Efeitos dos Altos Números de Mach (M) 38

2.4 Efeitos da Baixa Densidade – Dissociação e Ionização do Ar 40

2.5 A Camada Limite e a Transferência de Calor em Escoamento Hipersônico 41

2.6 Transmissão de Calor na Reentrada na Atmosfera 42

2.7 Ablação 43

3 Formulação Matemática para o Problema Ablativo 47

3.1 Abordagem Clássica do Problema Ablativo (Problema de Stefan) 47

3.2 Modelamento Matemático 48

3.3 Análise do Processo de Aquecimento cinético pelos Métodos Simplificados 56

3.3.1 Método Simplificado de Tauber 56

3.3.2 Método de Van Driest 57

3.4 Trajetória de Reentrada 59

4 Aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada na Solução do Problema Ablativo 62

4.1 Modelo Matemático para o Corpo de Revolução Bidimensional 62

4.2 Simplificação do Modelo Matemático para o Caso do Corpo de Revolução Unidimensional 77

5 Resultados 89

5.1 Parâmetros Computacionais do Modelo de Solução Numérica 89

5.2 Trajetória de Reentrada 90
5.3 Resultados para a Convergência do Perfil de Temperatura do Período Pré-Ablativo 94
5.4 Resultados para o Perfil de Temperatura para Diferentes Tempos 97
5.4.1 Resultados para o Perfil de Temperatura para Método Simplificado de Tauber 97
5.4.2 Resultados para o Perfil de Temperatura para Método de Van Driest 99
5.5 Resultados para Posição na Fronteira e Velocidade Ablativa 101
5.5.1 Resultados para Posição na Fronteira e Velocidade Ablativa – Método Simplificado de Tauber 101
5.5.2 Resultados para Posição na Fronteira e Velocidade Ablativa – Método de Van Driest 103

6 Conclusão 107

Referências 109

Apêndices

A – Análise do Fenômeno Ablativo sobre o Corpo de Revolução 114
A.1 - Análise do processo ablativo na superfície do corpo 114
B – Abordagem Matemática para o Problema de Stefan 117
B.1 - Potencial de Temperatura em Coordenadas Ortogonais Curvilíneas 117
C – Análise do Problema de Aquecimento no Ponto de Estagnação do Corpo de Revolução 123
C.1 - Cálculo das propriedades do ar através da onda de choque normal - Considerando gás caloricamente perfeito 123
D – Resultados da Simulação Numérica..... 125
D.1 – Resultado numérico para a distribuição de temperatura do Período Pré-Ablativo 125
D.2 – Resultado numérico para a trajetória de reentrada 127

1 Introdução

O vôo atmosférico de veículos espaciais sujeitos as altas velocidades *(vôo hipersônico)* tem como característica o aquecimento aerodinâmico. O fenômeno se destaca como um dos principais problemas impostos à superfície do veículo espacial, durante sua passagem pela atmosfera.

O aquecimento aerodinâmico imposto à superfície do veículo espacial, na reentrada da atmosfera consiste basicamente na conversão da energia cinética do escoamento em energia térmica. Tal fenômeno ocorre, devido inicialmente à compressão do ar atmosférico após a onda de choque e, posteriormente, ao atrito das moléculas gasosas presentes na atmosfera com a superfície do veículo, (PESSOA FILHO; FILGUEIRAS, 2001).

O problema é mais intenso nos primeiros 100 km da atmosfera terrestre, que corresponde à região de maiores valores para a densidade do ar atmosférico. Logicamente, o aquecimento ocorre tanto no lançamento de veículos em direção ao espaço, quanto na reentrada de veículos espaciais através da atmosfera. Contudo, a reentrada do veículo espacial é o problema mais crítico, uma vez que as velocidades envolvidas no processo de reentrada na atmosfera terrestre, são da ordem de 8 a 10 km/s, (PESSOA FILHO; FILGUEIRAS, 2001) e (ANDERSON JR, 2003).

O objetivo da reentrada atmosférica é a recuperação da carga útil do veículo. Logo, torna-se necessário o desenvolvimento de técnicas eficientes que possam proteger a superfície do veículo espacial, das altas temperaturas envolvidas no processo de reentrada atmosférica. Bem como otimizar o peso da estrutura do veículo, com isso podendo melhorar as condições de reutilização do veículo espacial.

Para proteger a carga útil dos veículos de reentrada, devem-se utilizar materiais de proteção térmica, os quais são compostos a base de *Resina Quartzo-Fenólica*, *Fibra de Vidro* e até mesmo *Cortiça*, de tal forma a manter a temperatura no interior do veículo em valores aceitáveis.

Tais materiais serão "*ablatados" (fenômeno ablativo)* durante o período crítico da trajetória de reentrada do veículo espacial, devido à intensa transferência de calor para a superfície do veículo.

Para analisar o fenômeno ablativo são realizados experimentos em equipamentos, como Tubos de Choque e Túneis de Choque Hipersônico, visando à obtenção de resultados que possam amparar a solução de modelos matemáticos, resolvidos numericamente *(modelos numéricos)* com a utilização de códigos processados através de computadores. Onde tais modelos possam reproduzir o fenômeno físico, com a maior proximidade do modelo real, sem que haja a necessidade de altos investimentos na construção de equipamentos, minimizando os riscos da operação.

Com isso, as soluções de modelos analíticos de sistemas de equações diferenciais, do tipo que governam o fenômeno hipersônico, juntamente com modelos de transferência de calor e massa ganharam grande espaço nas pesquisas da área tecnológica aeroespacial.

O interesse na aerodinâmica do vôo hipersônico teve um considerável avanço em meio ao desenvolvimento tecnológico promovidos pelos programas espaciais tripulados, representados por Mercúrio (Mercury), Gêmeos (Gemini) e Apolo (Apollo).

Nas décadas de 1960 e 1970, houve um grande avanço na solução de modelos matemáticos via métodos numéricos, pois nessas décadas algumas soluções analíticas associadas a problemas complexos, mostraram-se mais confiáveis e suas manipulações computacionais tornaram-se mais simples, graças à utilização de teorias matemáticas mais avançadas. No final da década de 1970, pesquisadores do leste europeu, juntamente com pesquisadores americanos, desenvolveram técnicas híbridas analítico-numéricas, buscando melhores resultados na computação científica.

Os avanços na capacidade de processamento dos computadores contribuíram para que modelos numéricos fossem solucionados gerando um forte avanço na aerodinâmica hipersônica, proporcionando um novo paradigma nos novos projetos, bem como intensas pesquisas buscando o entendimento dos fenômenos envolvidos nos processos de reentrada na atmosfera, sobre tudo, em relação às intensas taxas de transferência de calor geradas pelo vôo hipersônico na reentrada atmosférica de veículos espaciais.

No campo numérico-computacional, vários métodos foram utilizados para solucionar problemas puramente difusivos, como apresentado por Hasiao e Chung (1985) e problemas envolvendo o cálculo da transferência de calor para superfícies de revolução, considerando o equilíbrio térmico e vôo com velocidade hipersônica como mostrado por Lees (1956).

A solução exata de problemas lineares difusivos foi largamente explorada pela técnica da transformada integral clássica, conforme apresentado em várias publicações, (STEG; LEW, 1962); (SANDERS, 1960); (HIDALGO, 1960) e (SUNDERLAND; GROSH, 1961), posteriormente revisada e apresentada por Özisik e Murray (1974).

O livro apresentado Mikhailov e Özisik, (1984) mostra como tratar, com a aplicação da técnica da transformada integral, soluções analíticas de problemas elípticos e parabólicos de equações diferenciais parciais não lineares. Eles mostraram a aplicação da técnica na solução de sete classes diferentes de problemas aplicados na teoria de transferência de calor e massa, consolidando-a como uma poderosa ferramenta para solução de equações diferenciais parciais, com grande destaque em relação a problemas de difícil manipulação computacional. Essas classes de problemas foram largamente exploradas visando soluções numéricas dos mais diversos modelos matemáticos, como mostrado por Cotta (1993).

Trabalhos envolvendo as questões da reentrada na atmosfera foram abordados utilizando como técnica analítico-numérica a transformada integral. As análises variam desde a solução do modelo ablativo, até a obtenção dos parâmetros que evidenciam o cálculo do fluxo de calor na superfície, (RUPERT JR; COTTA, 1991); (DINIZ, APARECIDO; COTTA, 1990) e (GOMES; CAMPOS SILVA; DINIZ, 2005).

O aquecimento na superfície de veículos espaciais ao reentrarem na atmosfera terrestre, depende da trajetória de reentrada, a qual é função das configurações do veículo, do peso, bem como do ângulo e da velocidade inicial de entrada.

Esse trabalho tem como objetivo principal a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG) em um modelo que represente as condições de reentrada de um veículo espacial na atmosfera terrestre, sob condições de escoamento hipersônico compressível, em um corpo com simetria axial (corpo de revolução). A solução considera o efeito do fenômeno ablativo para determinar a distribuição de temperatura no material de proteção térmica, bem como a velocidade de regressão da fronteira ablativa. Para simular o aquecimento da superfície do veículo, assume-se como fonte do aquecimento da superfície, um fluxo de calor prescrito na fronteira, basicamente sobre a região do ponto de estagnação. São consideradas no modelo de cálculo do fluxo de calor, as teorias simplificadas de Tauber e Van Driest. As teorias para o cálculo do fluxo de calor são acopladas ao modelo físico do problema, de modo a simularem o efeito do aquecimento provocado pelo atrito entre o escoamento externo e a superfície do veículo espacial, na reentrada da atmosfera terrestre.

O trabalho representa um avanço em relação ao trabalho de Diniz (1996), em que o fluxo de calor era representado através de equações matemáticas, como polinômios e equações exponenciais. Este trabalho também é uma preparação para obter a solução do problema de ablação no sólido acoplado ao campo de escoamento externo pela Técnica da Transformada Integral Generalizada.

1.1 – Desenvolvimento do Trabalho

O presente trabalho, utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada, versa sobre a solução de um típico problema de aquecimento cinético decorrente das elevadas velocidades envolvidas na reentrada de veículos espaciais na atmosfera terrestre. Nota-se na física do processo a forte presença do fenômeno ablativo na superfície do material de proteção térmica. Fato esse, responsável pela remoção (*Ablação*) do material da proteção térmica da superfície do veículo. O trabalho foi desenvolvido baseando-se em trabalhos publicados por diversos pesquisadores, tais como; Less (1956); Van Driest (1956); Hasiao e Shung (1984); Ostrach (1964); Thomas e Neier (1990), entre outros.

O trabalho foi motivado, sobre tudo, em pesquisas realizadas nos últimos anos, considerando um problema de transferência de calor na fronteira envolvendo o fenômeno ablativo, realizadas por Diniz, Maia e Zaparoli (1996) e Gomes, Campos Silva e Diniz (2005).

As informações que constituem o presente trabalho estão dispostas em seis capítulos e quatro apêndices. O presente capítulo constitui-se de uma breve revisão bibliográfica sobre o fenômeno estudado, dos objetivos, bem como dos avanços da técnica, utilizada para modelar numericamente o problema envolvendo o fenômeno ablativo.

Uma análise sobre escoamentos hipersônicos e problemas sobre aquecimento decorrente de vôos a altas velocidades é apresentada no capítulo 2.

No capítulo 3 são apresentadas as equações que modelam o fenômeno na camada limite hipersônica e da fusão do material sobre intenso efeito da ablação. O capítulo 4 trata da aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada no conjunto de equações apresentados no capítulo 3, visando uma solução híbrida-analítica numérica do sistema de equações diferencias resultante. No capítulo 5, apresentam-se resultados e no capítulo 6 as conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

Os apêndices apresentam problemas particulares, apresentados ao longo do presente trabalho, conforme será observado nos capítulos subseqüentes.

A seguir são apresentados tópicos que estão ligados diretamente com a técnica utilizada para solução do presente trabalho, bem como uma análise bibliográfica dos trabalhos de maior interesse ao desenvolvimento do presente trabalho.

1.2 – Técnica da Transformada Integral Generalizada (TTIG)

Com os avanços computacionais, a partir da década de 1970, gerou-se um crescimento no melhor aproveitamento das análises numéricas aliadas ao desenvolvimento de linguagens computacionais e métodos computacionais associados a problemas de matemática avançada. Com isso inúmeros métodos de solução de problemas voltados puramente para a análise física de processos de engenharia, ganharam espaço em muitos trabalhos publicados nas mais diversas literaturas, como são os casos dos métodos de discretização, denominados puramente numéricos, como diferenças finitas, elementos finitos, volumes finitos e suas variantes.

A partir da publicação de Özisik e Murray (1974), firmou-se um novo paradigma para solução de sistemas de equações diferenciais parciais, os quais representavam problemas de difícil abordagem pelas técnicas então conhecidas. Com essa publicação Özisik e Murray (1974) estabeleceram o formalismo básico da Técnica de Transformada Integral Clássica (TTIC).

Na década de 1980, a TTIC passou por uma contínua evolução gerando soluções computacionais bastante eficientes para uma vasta gama de problemas a priori não transformáveis ou não solucionáveis numericamente (COTTA, 1994), mostrando-se bastante competitiva. A partir da edição de (COTTA, 1994), convencionou-se nomear o método como Técnica de Transformada Integral Generalizada (TTIG).

Özisik e Mikhailov (1984) editaram um livro generalizando os formalismos da TTIC para sete classes de equações diferenciais parciais, definidas a partir de problemas de transferência de calor e massa encontrados na literatura.

A técnica da transformada integral clássica consiste, basicamente, em encontrar um problema auxiliar de autovalor apropriado, transformando a equação diferencial parcial original em um sistema desacoplado de equações diferenciais ordinárias. Torna-se assim um método para obtenção de soluções exatas de problemas lineares.

A solução de problemas com a TTIC torna-se possível com aplicação dos seguintes passos:

- Quando necessário, homogeneizar as equações representativas das fronteiras, através de mudança de direção dos eixos de coordenadas;
- Escolha de um problema auxiliar de autovalor compatível ao problema original,
- Obter, mediante propriedades de ortogonalidade, o par de transformadas integrais para os operadores *transformada* e *inversa*;

- Fazer a transformação integral da equação diferencial parcial original e suas respectivas condições de contorno;
- Resolver o sistema resultante de equações diferenciais ordinárias desacoplado;
- Utilizar a fórmula de inversão estabelecida para se obter o potencial completo desejado;

Entretanto, essa técnica é limitada para certas classes transformáveis de problemas lineares que envolvem problemas auxiliares de complexa solução numérica, ou ainda, quando a obtenção de um problema de autovalor relativo à equação diferencial parcial original, leva a um sistema desacoplado de equações diferenciais ordinárias com uma transformação integral que não pode ser resolvida.

Em função do processo evolutivo encontrado no método de transformada integral, Cotta e Mikhailov (1997) publicou o segundo livro relativo ao assunto, apresentando uma revisão do formalismo clássico, que são agora estendidos com ênfase para a solução de problemas não-lineares e fortemente acoplados e propondo técnicas para melhorar a eficiência da solução numérica.

A TTIG aplica-se aos mais diversos problemas de modelagem avançada, ciência e tecnologia, como os que seguem:

(a) Problemas que possuem coeficientes variáveis nas equações governantes;

- Problemas com coeficientes variáveis em suas condições de contorno, o coeficiente na equação de contorno depende do tempo em qualquer forma funcional;
- Problemas que apresentam contornos geométricos variáveis, a posição do contorno depende do tempo, caso em que se tem mudança de fase, caso do presente trabalho;
- Problemas que possuem problemas auxiliares de difícil solução. Esta classe de problemas, pode ser classificada de acordo com a natureza dos problemas de auxiliares associados:

    - ✓ Problemas de autovalor acoplados;
    - ✓ Problemas de Sturm-Liouville que apresentem variável de uma transformada de Laplace;
    - ✓ Problemas de Sturm-Liouville que apresentem funções complexas;
    - ✓ Problemas de Sturm-Liouville não clássicos;
    - ✓ Sistemas de Sturm-Liouville não separáveis;

- Problemas não-lineares caracterizado pela presença de equações, cujos termos fonte e/ou condições de contorno dependem do potencial a ser obtido.

Considerando a solução de um problema segundo o formalismo da TTIG, é necessário considerar a existência de um par "transformada-inversa" e de um problema auxiliar associado, que carregue características analíticas dos operadores do problema original. A eliminação das variáveis independentes, por meio de operadores de integração apropriados, leva a obtenção de um sistema de equações diferenciais ordinárias, que é denominado *"sistema transformado"*. Num passo seguinte, o sistema deve ser truncado para uma ordem finita e prescrita **N**, para ser resolvido analítico e numericamente.

Os passos básicos para se aplicar a Técnica da Transformada Integral Generalizada são os seguintes:

- Escolha de um problema auxiliar associado, que guarda o máximo de informações do problema original, em relação à geometria e operadores;
- Desenvolver o par transformada integral para os operadores *transformada* e *inversa*;
- Transformar o sistema de equações diferenciais parciais original, fazendo uso de operadores apropriados. Isto resulta na obtenção de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) infinito, não linear, que pode ou não ser acoplado. Se obtivermos o último, cada potencial transformado desacoplado pode ser independentemente resolvido chegando-se a uma solução exata;
- Truncar e resolver o sistema de EDO's, segundo uma precisão prescrita, com controle numérico de erro;
- Com uma escolha aceitável do problema auxiliar, os termos acoplados no sistema infinito serão desprezíveis em relação aos elementos da diagonal da matriz dos coeficientes do sistema de equações, permitindo assim, uma solução explícita aproximada;
- Construir os potenciais originais, através do uso das fórmulas de inversão.

A escolha de um problema simples de autovalor para geometrias mais complexas que as cartesianas, podem ser uma boa opção, mas essa escolha pode provocar um processo de convergência mais lento para o método, exigindo assim mais termos da expansão para o cálculo da solução numérica do problema.

1.3 – Revisão Bibliográfica

O escoamento hipersônico é abordado de diversas formas, na tentativa de se encontrar os principais parâmetros de interesse na solução das equações diferenciais parciais que definem a camada limite hipersônica. Pode ser tratado como um problema de aquecimento aerodinâmico em vôo, bem como ser acoplado ao fenômeno de mudança de fase pertinente ao problema da reentrada na atmosfera, como é o caso do presente trabalho.

Logo, devido ao vasto campo de interesse científico sobre a teoria hipersônica, a revisão de literatura será divida de modo a facilitar o entendimento envolvido no contexto do presente trabalho. A primeira parte contém uma revisão de trabalhos envolvendo a solução dos parâmetros de interesse do aquecimento aerodinâmico da camada limite, visando o cálculo da transferência de calor para a superfície. Numa segunda abordagem, são revisados os trabalhos que visam o conhecimento do fenômeno ablativo, ou até mesmo aqueles que contenham ambas as partes de interesse ao escoamento hipersônico.

1.3.1 - Aquecimento Hipersônico

Lees (1956) propõe duas formas de se calcular o fluxo de calor na superfície de duas geometrias bem caracterizadas, um hemisfério de uma circunferência e um corpo rombudo no estilo esfera-cone, onde segundo o autor, esse tipo de geometria é capaz de diminuir a magnitude da taxa de transferência de calor para a superfície. A primeira forma da análise assume-se o ar atmosférico em equilíbrio termodinâmico. Na segunda fase, a difusão é assumida como taxa governante, na qual as taxas de volume, recombinadas dentro da camada limite são mais lentas do que a difusão através da linha de corrente. Tal análise evidencia que a região onde se encontram os maiores valores para a taxa de transferência de calor é na região do ponto de estagnação.

Van Driest (1956) apresenta um estudo detalhado sobre o aquecimento aerodinâmico em condições de escoamento a altas velocidades. Destaca a condição de aquecimento da superfície devido ao efeito do atrito de escoamento externo diretamente na superfície do corpo, juntamente com a compressão próximo à região de estagnação, transformando a energia cinética em calor no interior da camada limite. Estabelece relações para o cálculo da taxa de transferência de calor para a superfície do corpo. As análises de transferência de calor

são relatadas para escoamento laminar e turbulento em corpos do tipo placa plana, cônica e de revolução, mostrando uma análise da transferência de calor entre a camada limite e a superfície do corpo através da lei de Newton Modificada.

Fay e Riddell (1958) realizam uma análise considerando a dissociação e a ionização na camada limite no cálculo da transferência de calor para a superfície na região do ponto de estagnação. São realizadas duas análises, uma considerando a camada limite no estado de não equilíbrio e em seguida em equilíbrio termodinâmico local, onde também é analisado o efeito de catálise na parede. Os autores sugerem várias análises simplificadas para facilitar a solução da camada limite, incluindo o efeito da difusão atômica. O estudo demonstra que o conjunto de equações da camada limite para o ponto de estagnação reduz-se a um conjunto de equações diferenciais ordinárias não lineares, onde devido às reações químicas ocorrerem lentamente, pode-se considerar equilíbrio termodinâmico local para um modelo de solução considerando de gás real.

Probstein (1960) realiza um estudo do processo de desenvolvimento do campo de escoamento contínuo e da onda de choque, considerando as principais características de sua formação, como por exemplo, como e onde são formados, na região do nariz de um corpo de revolução, o qual reentra através da atmosfera densa em velocidade hipersônica. A altitude considerada na solução foi suficientemente alta para que se pudesse assumir primeiramente a condição de escoamento molecular livre. Todos os parâmetros e características importantes do escoamento são analisados, exceto aqueles da região de transição entre os regimes da camada. Apresenta a relação da formação da onda de choque e a variação da densidade como resultado da forma da geometria. Os resultados são gerados para altas altitudes através da teoria cinética dos gases e para baixas altitudes através da teoria do contínuo e das equações completas de Navier-Stokes, incluindo a condução linear de calor de Fourier.

Jain e Admurthy (1974) realizam um estudo sobre as equações completas de Navier-Stokes através de similaridade local para certa faixa de números de Reynolds e de Mach, considerando o efeito rarefeito do ar. Os autores citam Probstein (1960) para analisar a questão dos vários tipos abordagem para a transferência de calor na superfície, encontrados por veículos espaciais na reentrada ou em vôos em altas altitudes, como efeito da rarefação do ar. Enfatiza as características abordadas devido se considerar o ar rarefeito na determinação das características do escoamento, bem com a transferência de calor para a superfície de um

corpo de revolução. Mostra uma simplificação das equações de Navier-Stokes que concordam com o método utilizado por Lvinsky e Yoshihara (1962), considerando nessa análise a condição de escorregamento da velocidade devido ao ar rarefeito. Enfatiza nessa última análise o efeito da variação da pressão sobre a superfície do corpo para uma faixa de valores para os números de Reynolds e Mach. Os resultados obtidos pela técnica são comparados com dados numéricos e experimentais obtidos por outras literaturas.

Wing (1974) estuda um método de cálculo para se determinar o aquecimento aerodinâmico e a tensão de cisalhamento na superfície de uma geometria com simetria axial com uma reta tangenciando em certo ponto de sua extremidade (ogiva-cilindro). O autor apresenta um método para gerar a geometria do tipo ogiva cilindro, geometria similar a um míssil. A geometria é escolhida para simular um caso próximo ao que ocorre nos modelos dos foguetes, e ainda para gerar o efeito de se aproximar a onda de choque à superfície do corpo, durante o período do vôo supersônico ou hipersônico no qual o aquecimento aerodinâmico na superfície é intenso. Analisa as condições da influência da variação do ângulo de inclinação de geração da ogiva, quando se considera uma onda de choque obliqua, na redução da transferência de calor para a ogiva em condições de vôo constante. A análise é realizada para escoamento laminar e turbulento, onde os resultados são gerados numericamente via programação FORTRAN IV em um sistema IBM 360/91.

Zoby, Moss e Sutton (1981) apresentam equações típicas da análise de engenharia (métodos aproximados) para o cálculo da taxa de transferência de calor convectivo sob corpos de revolução, em condições de vôo hipersônico, na reentrada da atmosfera em escoamento laminar e turbulento. Baseia-se em um procedimento que considera os efeitos da variação de entropia, na distribuição do aquecimento convectivo não dependendo do balanço de massa. Os resultados do método aproximado são comparados com métodos numéricos de solução da camada limite e da camada limite de choque viscoso.

Grumet, Anderson Jr. e Lewis (1994) mostram um estudo numérico bidimensional das equações de Navier-Stokes para investigar o efeito do não equilíbrio químico, e em particular, a catálise na parede (reação química das espécies formadoras na superfície) na interação entre a onda de choque e a camada limite para escoamento hipersônico. Bem como, a determinação de como a variação de pressão, devido à corrente externa, afeta a catalise na parede no campo de escoamento. A análise considera onda de choque oblíqua e escoamento de ar altamente

dissociado na camada limite ao se considerar os cálculos da transferência de calor para a superfície. Realiza cálculos utilizando uma larga faixa de valores para a pressão devido ao escoamento externo, considerando número de Reynolds constante, observando as variações no máximo valor para a taxa de transferência de calor. Os autores citam Van Driest (1956) para validarem o modelo numérico quanto ao cálculo da temperatura no escoamento laminar sobre uma placa plana, considerando gás caloricamente perfeito.

Toro (1997) estuda o problema envolvendo a reentrada na atmosfera de micro satélites recuperáveis envolvendo o cálculo da trajetória, determinação das propriedades da atmosfera em função da altitude, cálculo do aquecimento cinético decorrente da conversão de energia cinética em calor, desenvolvimento de materiais resistentes ao calor e ensaios aerodinâmicos em túneis de vento de alta entalpia. Os resultados foram obtidos para o fluxo de calor na região de estagnação do micro satélite recuperável SARA, o qual tem como objetivo de propiciar uma plataforma para experimentos em ambientes de micro gravidade.

Tirskii (1997) estuda um modelo de solução no meio contínuo para resolver um problema de escoamento supersônico e hipersônico em torno de corpos de revolução, incluindo uma análise das características geométricas da geração de corpos de revolução para o estudo de escoamentos ao seu redor. O estudo é baseado na solução através de um método assintótico das equações de Navier-Stokes, considerando um modelo para baixos valores de números de Reynolds, onde considera escoamento molecular livre e escoamento em transição, e para valores elevados de números de Reynolds, onde as características do escoamento são retiradas da camada limite e do escoamento inviscido na extremidade da camada de choque. Os autores citam Lees (1956) como referência para as equações da camada limite considerando o modelo de meio contínuo, onde foi possível realizar soluções aproximadas via método numérico, que previamente foi desenvolvido para resolver as equações da camada de choque viscoso. No presente trabalho o método foi utilizado para gerar resultados da camada limite em função do número de Reynolds e determinar as características aerodinâmicas e térmicas ao redor de corpos de revolução.

Cotta e Mayall (2004) apresentam uma solução via T.T.I.G. das equações da camada limite hipersônica e comparação com métodos típicos de análises aproximados que consideram o ar com um gás caloricamente perfeito e em outra etapa como um gás real em equilíbrio termodinâmico local citando Fay e Riddell (1958) para essa última análise. O autor

apresenta uma continuação do trabalho realizado por Toro (1997), reutilizando os dados obtidos para o micro satélite recuperável SARA, agora simulando resultados através da T.T.I.G. para o fluxo de calor na parede do micro satélite.

1.3.2 – Ablação

Landau (1950) aplicou o método de integração numérica discretizado por diferenças finitas numa região semi-infinita, com aquecimento constante na superfície, para resolver um problema de condução de calor sobre superfícies fundidas. O autor evidenciou a existência de reações químicas nos processos de fusão e congelamento de sólidos.

Goodman (1958) mostra um problema de mudança de fase utilizando como método o balanço integral de calor. Utiliza uma aproximação do balanço integral, proveniente de uma técnica matemática, para determinar a posição do contorno sob intenso processo de fusão com mudança de fase, considerando as seguintes soluções analíticas: fluxo de calor definido, temperatura fixada na fronteira, fluxo de calor gerado por radiação, fluxo de calor na fronteira especificado pelo material fundido e completamente removido e fluxo de calor transiente onde o material fundido começa a vaporizar. Os resultados são comparados com soluções dispostas em literatura.

Adams (1959). realizou pesquisas experimentais sobre proteção térmica para altas velocidades e altas temperaturas. Analisa a resistência ao aquecimento, bem como a determinação das propriedades do material a altas temperaturas, em vários materiais descritos na literatura utilizando como forma experimental de aquecimento forno solar, maçarico oxi-acetileno, descargas de foguetes, entre outras. O fenômeno ablativo não foi totalmente interpretado, pois dificuldades na realização de tais experimentos prejudicaram a análise física do fenômeno ablativo. O fenômeno ablativo foi analisado mediante os processos físico e formulações matemáticas, evidenciando a fusão e a sublimação. Foram abordados resultados teóricos e experimentais de reentrada de veículos espaciais na atmosfera terrestre e vôo na atmosfera terrestre.

Tellep (1959) estuda os efeitos da desaceleração em corpos em velocidade hipersônica na reentrada da atmosfera. A solução é baseada nas equações para a camada limite

hipersônica transiente, considerando os efeitos das forças de corpo na camada limite. A geometria estudada é uma placa plana com o escoamento alinhado com o bordo frontal da placa. Introduz-se a função corrente no conjunto de equações da camada limite e a solução é processada numericamente através do método integral. A análise busca uma comparação entre as taxas de transferência de calor e temperatura na interface com a taxa de fusão do material.

Ostrach, Goldstein e Hamman, (1960) analisam o problema do aquecimento e da transferência de calor numa superfície com proteção térmica ablativa, na reentrada na atmosfera em velocidades elevadas, onde se considera uma interface gás-líquido na camada limite. A solução versa sobre um método numérico que considera as equações da camada limite hipersônica juntamente com uma equação de acoplamento, representada pelo balanço de calor na superfície em corpos de revolução bidimensional com simetria axial. A solução busca determinar as condições nas quais os efeitos da desaceleração interferem nos valores das distribuições de velocidade e temperatura, bem como no movimento relativo entre a interface gás-líquido quando se considera um material típico de proteção térmica ablativa na superfície do corpo. Calor específico, densidade e condutividade térmica são constantes e se despreza o efeito da trajetória na desaceleração do corpo na reentrada.

Sunderland e Grosh (1961) mostram um estudo baseado na utilização da equação da condução unidimensional com propriedades físicas constantes. Buscando uma solução numérica para determinar a distribuição de temperatura em sólidos homogêneos semi-infinito, bem como a determinação da velocidade e da posição da fronteira em mudança de fase. O método é aplicado no cálculo da temperatura antes da mudança de fase, durante o processo transiente de mudança de fase e depois da mudança de fase. O sólido encontra-se inicialmente com temperatura constante e é repentinamente aquecido por um fluxo convectivo até ocorrer mudança de fase, onde a nova fase sofre o processo de sublimação e arrastada através da camada limite (pirólise). Esse método foi utilizado em problemas envolvendo fusão de materiais, congelamento ou sublimação e situações onde da temperatura e do coeficiente de transferência de calor variam com o tempo.

Vallerani (1974) aplica o método integral numa certa classe de problemas envolvendo o fenômeno ablativo em sólidos, sujeitos a fluxos de calor na forma exponencial. O modelo é resolvido utilizando a equação da condução unidimensional transiente, onde suas variáveis são simplificadas pela adimensionalização, de tais variáveis, em relação aos valores obtidos

no início do fenômeno ablativo e pela introdução de valores assintótico obtidos ao longo do tempo em intervalos suficientemente longos. Para simplificar a análise é assumido que exista completa remoção do material ablatado, considerando que o material seja removido com um gás da superfície graças a sublimado sem a presença de uma camada líquida. Os resultados são discutidos em termos dos parâmetros que expressam a capacidade térmica entre o calor armazenado no sólido e o calor latente se ablação.

Özisik e Murray (1975) apresentaram uma nova técnica com características analítico-numéricas visando à solução de sistemas de equações diferenciais parciais em problemas de difusão linear, com condições de fronteira variável. Até então esse tipo de equações diferenciais não eram tratadas pela teoria clássica de separação de variáveis. A nova temática para solução de equações diferenciais parciais proposta pelos autores, não necessita que o problema fosse separado a princípio. A solução final do problema envolve um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias e lineares de primeira ordem. Com esse novo paradigma, estava traçado o formalismo teórico básico para a conhecida Técnica da Transformada Integral Clássica.

Zien (1976) apresenta um estudo da solução aproximada através do método integral na determinação do fluxo de calor transiente num problema ablativo. A análise definida para a escolha do fluxo de calor, baseia-se no modelo de Landau (1950), onde são consideradas no fluxo de calor prescrito as seguintes aproximações, fluxo de calor polinomial e exponencial empregando duas condições de contorno, fluxo de calor constante e fluxo de calor transiente. Os resultados obtidos pelo método são comparados com o método integral clássico de balanço de calor.

Hasiao e Chung (1984) apresentam um estudo de transferência de calor com ablação numa região bidimensional, sujeita a um fluxo de calo transiente no contorno. O método do Balanço de Calor Integral Modificado é empregado na solução do problema, onde se utiliza uma integração dupla capaz de transformar o sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem em um sistema reduzido de equações diferenciais ordinárias. Os resultados para a perda total de material da proteção térmica em função do tempo são comparados com uma solução pelo método de Elementos Finitos.

Hasiao e Chung (1985) apresentam um estudo numérico sobre a transferência de calor transiente com ablação numa placa plana. A metodologia de solução baseia-se na aplicação de três métodos distintos, para resolver a equação da condução unidimensional. Uma simplificação é adotada para condição de aquecimento, onde é adotado um fluxo de calor prescrito na fronteira, os fluxos são assumidos considerando as mesmas análises citadas por Zien (1976), incluindo o modelo de fluxo de calor linear. Os métodos considerados são: Balanço Integral de Calor, Método Integral do Momento-θ e o Método de Diferenças Finitas Implícito. Juntamente com a condição de contorno que admite fronteira em movimento, representada pela equação do balanço de energia na fronteira, através dessa equação é possível encontrar a velocidade ablativa e a posição do contorno ao longo do tempo. O perfil de temperatura também é obtido através dos resultados numéricos.

Thomas e Neier (1990) apresentam um estudo numérico envolvendo a solução das equações de Navier-Stokes, as quais descrevem um caso tridimensional de escoamento hipersônico com ablação em corpos do tipo ogiva, considerando o gás em equilíbrio termodinâmico. As condições de contorno na parede são impostas mediante a presença da onda de choque, do escoamento externo e da condição de escorregamento para o escoamento rarefeito. As equações de Navier-Stokes são consideradas no regime transiente, onde a solução visa realizar testes de diversos materiais utilizados na proteção térmica ablativa através de uma discretização via volumes finitos, onde se assume malha móvel e condições de contorno implícitas, como temperatura prescrita e temperatura adiabática na superfície. Os resultados numéricos obtidos são comparados com dados experimentais.

Rupert Jr. e Cotta (1991) realizaram uma aplicação do método da transformada integral para analisar um problema de transferência de calor unidimensional com ablação. Foi considerada na análise uma região finita contendo multicamadas, onde os resultados da simulação numérica visam a convergência da solução híbrido analítico-numérica, através do truncamento da expansão de autovalores e comparados com valores já listados em literatura.

Storti (1995) estudou a fixação de certo domínio para uma análise numérica envolvendo o fenômeno ablativo baseado na formulação entálpica na qual a temperatura é uma função do tempo. Admite-se que certo material que ocupa uma porção da superfície é então ablatado. O método considera o típico problema de ablação contendo duas fases bem especificadas, uma até a fusão do material e outra após a fusão do material.

2 Escoamento Hipersônico e Aquecimento Aerodinâmico

Nesse capítulo será apresentado um relato teórico sobre o assunto envolvendo o escoamento hipersônico, sobre corpos de revolução, condições de geração de onda de choque, bem como suas principais características e abordagens de solução. Apresenta-se uma abordagem sobre o fenômeno ablativo e suas principais características, ligadas ao processo de reentrada na atmosfera de veículos espaciais, enfatizando modelos de geometria de revolução (corpo rombudo).

2.1 – Descrição Preliminar

Devido às limitações encontradas na análise simplificada para gás caloricamente perfeito, nesse capítulo também será abordado, qualitativamente, a questão da dissociação e ionização do ar, devido aos baixos valores de densidade em elevadas altitudes, bem como os efeitos dos altos valores de Mach e do próprio fenômeno ablativo decorrente do severo aquecimento proporcionado pela velocidade hipersônica na reentrada. O contexto do presente capítulo busca um enfoque mais generalizado para o conhecimento da teoria hipersônica de reentrada na atmosfera.

2.2 - Escoamento Hipersônico

O termo ***hipersônica*** foi usado primeiramente por Tsien, (1946), e implica em velocidades de vôo maiores que a velocidade ambiente do som. Os regimes de escoamentos aerodinâmicos podem ser classificados com base no valor do número de Mach (M), que representa uma razão entre a velocidade de vôo e a velocidade local do som que é uma função da altitude, (ANDERSON JR, 1989) e (US STANDARD ATMOSPHERE, 1976).

Com base no número de Mach, o escoamento pode ser classificado como hipersônico, quando $M > 5$, conforme Tabela 1.

Tabela 1 – Regimes de escoamento em função do Número de Mach.

Regime de Escoamento	**Faixa do Numero de Mach (M)**
Subsônico	0 – 0.8
Sônico	0.8 – 1.2
Supersônico	1.2 - 5
Hipersônico	Maior que 5

A Fig. 2.1 mostra dois exemplos típicos do estudo do escoamento hipersônico, de fundamental importância para o entendimento de tecnologias avançadas como é o caso do modelo "Hyper – X, X 43", um veículo hipersônico capaz de voar através da atmosfera terrestre em altíssima velocidade, aproximadamente Mach 10.



(a) (b)

Figura 2.1 - Exemplo de aplicação da teoria hipersônica. (a)-Reentrada na atmosfera; (b) – Veículo hipersônico (NASA - Hyper-X, X43).

Fonte: (a) http://en.wikipedia.org/wiki/Atmospheric_reentry; (b) http://www.spacedaily.com/reports/NASA_Goes_Hypersonic_In_X43a_Test.html

Entretanto os fenômenos que caracterizam o início do regime hipersônico, estão ligados à dissociação e a ionização do ar atmosférico, após a formação da onda de choque sobre o veículo espacial (PARK, 1989) e (BRÜCK; RADESPIEL; LONGO, 1997). Sob tais condições o modelo para solução numérico deve considerar a condição de não-equilíbrio do escoamento, e para tanto a equação que considera a fração mássica das espécies químicas, deverá ser alocada ao conjunto de equações governantes. Nessa condição o elevado aquecimento provoca sensíveis alterações nos modos químico, vibracional e eletrônico dos

elementos constituintes do ar atmosférico, conforme Josyula e Shange (1991) e Tchuen, Burtschell e Zeitoun (2005).

A área de estudos que envolvem a aerodinâmica hipersônica está ligada a problemas que envolvam reentradas de veículos espaciais através da atmosfera, bem como questões de vôos na atmosfera, como ilustra a Fig. 1.

A Fig. 2.2 ilustra uma condição como previsto pelas teorias envolvendo a condição de não-equilíbrio termoquímico do escoamento sobre a superfície do veículo espacial. O exemplo é baseado numa solução de Dinâmica dos Fluidos Computacional.

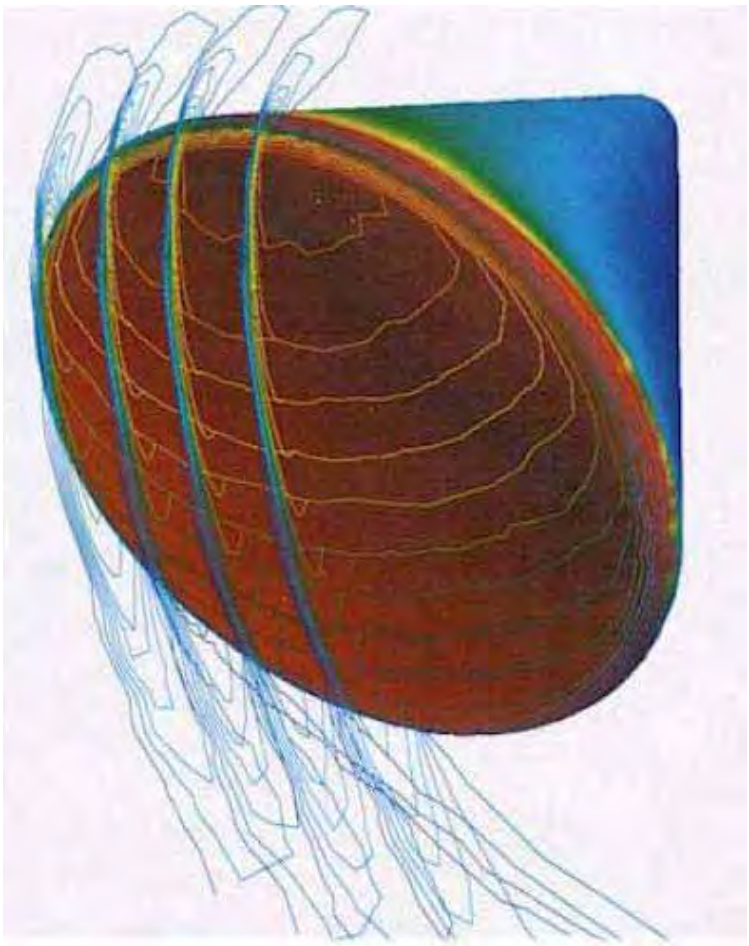


Figura 2.2 – Escoamento em não-equilibrio termoquímico sobre a cápsula de reentrada Apollo, solução numérica (CFD).

Fonte: http://hubbard.engr.scu.edu/docs/thesis/2003/SHARP_Thesis.pdf

Em condições de velocidades hipersônicas, a geometria a ser empregada deve ser tal que possa minimizar as severas condições de aquecimento provocadas pelas tensões viscosas

dentro da camada limite e pelas inúmeras reações químicas. Vários relatos na literatura, Anderson Jr. (1989); Ostrach (1964); Tirskii (1977) entre outros, evidenciam que corpos de nariz rombudo, têm como característica do escoamento ao seu redor, a redução da transferência de calor para permitir uma condução de calor interna suficientemente admissível pela proteção térmica do veículo.

Pode-se notar nas condições de escoamento hipersônico cuja geometria é um típico corpo de revolução, que existem partes do escoamento ao redor do corpo onde o escoamento perde velocidade, tornando-se subsônico, sônico e supersônico, conforme apresentado na Fig. 2.3. Esse efeito é observado devido à presença da curvatura da onda de choque, responsável pela diminuição da velocidade do escoamento ao longo da onda de choque.

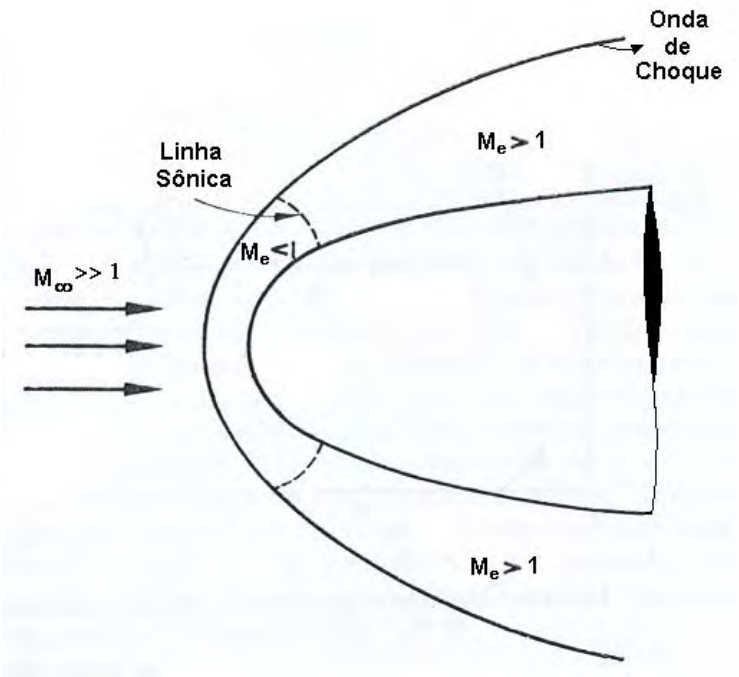


Figura 2.3 - Alterações do campo de escoamento ao longo da onda de choque.

Como observado na Fig. 2.3, uma onda de choque, separada do corpo, se destaca logo à frente do corpo de nariz rombudo, em vôo hipersônico e supersônico, tal onda é capaz de converter grande parte da energia cinética associada com a velocidade de vôo em energia térmica e química.

2.3 – Os Efeitos dos Altos Números de Mach (M)

Provavelmente a diferença notável entre os escoamentos com velocidades subsônica e supersônica é a formação da onda de choque à frente do corpo e asas, quando se está considerando vôo em velocidades abaixo da velocidade do som.

O escoamento na frente da onda de choque é completamente não perturbado, somente atrás da onda de choque é que são notadas as influências do corpo.

Em particular o comportamento da onda de choque devido a um escoamento passando por um corpo de revolução, conforme o número de Mach aumenta provocando a transição do escoamento de supersônico para hipersônico, observa-se que o ângulo entre o eixo de simetria e a onda de choque diminui.

A diminuição do ângulo entre a onda de choque e o eixo de simetria alcança um valor limite para um determinado número de Mach (M=10), Cox e Crabtree (1965) onde para $M \rightarrow \infty$ nota-se que existe uma variação muito pequena entre essa inclinação. Uma provável conseqüência para o valor limite na posição da onda de choque está ligada à taxa de densidade através da onda de choque alcançar um valor limite com o aumento do número de Mach, conforme ilustrado na Fig. 2.4.

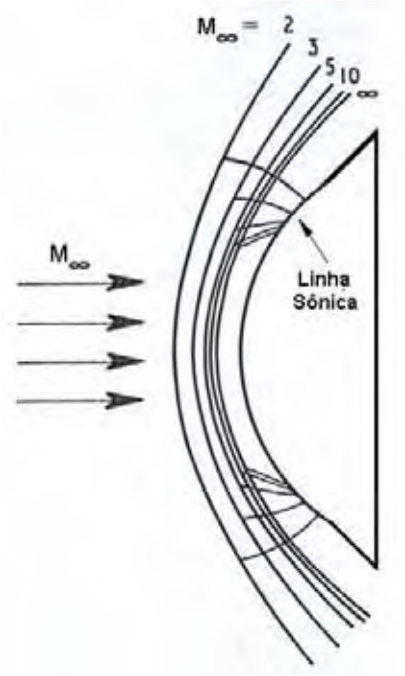


Figura 2.4 – Forma curvada da onda de choque passando por um corpo de revolução, ogiva-cone.

Nota-se que atrás da onda de choque o escoamento sofre uma diminuição de velocidade pela passagem do escamento através do choque deixando o escoamento subsônico, e torna a ganhar velocidade nas partes superiores do corpo, adquirindo condição de escoamento supersônico, como pode ser observado na Fig. 2.3.

O escoamento passando por um corpo de revolução gera uma onda de choque curvada, o que significa que existam fortes gradientes transversos nas quantidades do escoamento e esses gradientes exerce uma grande influência na determinação dos campos de escoamento.

Um exemplo da formação da onda de choque em um corpo de revolução sob condições de escoamento hipersônico é mostrado na Fig. 2.5.

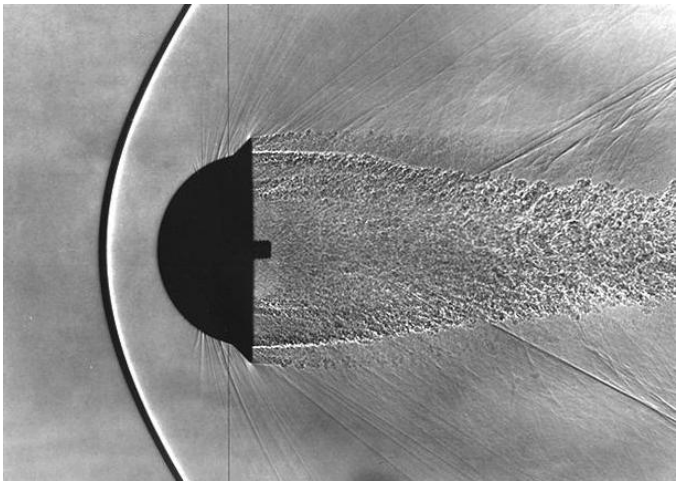


Figura 2.5 – Formação da onda de choque em um corpo de revolução do tipo esfera-cone.

Fonte: http://www.centennialofflight.gov/essay/Evolution_of_Technology/reentry/Tech19G3.htm

Nota: Imagem de domínio público da NASA (NASA's Ames Research Center).

Quando a densidade através da onda de choque é alta, o escoamento de massa atrás da onda de choque pode ser comprimido em uma pequena área. Logo, em corpos sobre escoamento hipersônico, significa que a distância entre corpo e a onda de choque pode ser pequena. Assim, o campo de escoamento entre a onda de choque e o corpo é definido pela onda de choque.

2.4 – Efeitos da Baixa Densidade – Dissociação e Ionização do Ar

Existem certas aplicações hipersônicas as quais envolvem escoamentos com baixas densidades. Por exemplo, como apresentado por Moss e Bird (1984), o escoamento, em torno da região do nariz de um veículo espacial ("*Space Shuttle")*, não pode ser propriamente tratado com hipóteses de escoamento contínuo para altitudes acima de 92 km. Como mencionada em Anderson Jr. (1989), em torno de 150 km o escoamento em torno da "*Space Shuttle"* é tratado sob condições onde só existem moléculas individuais colidindo com a superfície, isso é chamado de escoamento molecular livre.

Em tais condições de vôo pela atmosfera, onde a altitude aumenta progressivamente e os valores da densidade diminuem a condição tipicamente de escoamento contínuo de não escorregamento na parede, torna-se falha. Logo, em tais circunstanciais, deve se considerar que a variação de velocidade em relação não é nula, o que é conhecido como "*condição de escorregamento da velocidade na parede"*.

Quando um veículo hipersônico move-se através de uma atmosfera muito rarefeita para uma atmosfera mais densa, o veículo sairá de um regime molecular livre, onde se observa o impacto individual de moléculas na superfície, para o regime de transição, onde o efeito do *"escorregamento da velocidade na parede"* torna-se importante e então para o regime contínuo, torna-se verdadeira a condição de *"não escorregamento da velocidade na parede"*.

Percebe-se também, sob tais circunstanciais, que o choque normal pode ser tão forte que causa a dissociação das moléculas e eventualmente a ionização dos átomos, liberando energia em forma de calor diretamente na camada após o choque. Logo, contrário do que se pensa o atrito na superfície não é a única causa do aquecimento cinético na superfície de veículos na reentrada e em vôos em elevadas altitudes na atmosfera. A princípio não é fácil estabelecer limites para o início dos processos de dissociação e ionização do ar visto que tais processos são dependentes da pressão e da temperatura, Toro (1997).

A composição do ar em equilíbrio a altas temperaturas (em termos de fração molar) é dada como uma função da temperatura *(T)* com a pressão *(p)* a 1atm. Nessas condições, o O_2 começa a dissociar a uma temperatura de 2000 K. A 4000 K o O_2 está totalmente dissociado. O N_2 inicia seu processo de dissociação em torno de 4000 K, estando totalmente dissociado a 9000 K, (ANDERSON JR., 1989). A 9000 K inicia-se o processo de ionização, tanto do oxigênio como para o nitrogênio.

Portanto acima de 9000 K tem-se um plasma parcialmente ionizado consistindo principalmente de O, O^+, N, N^+ e elétrons. Esse plasma ionizado é responsável pelo

"*blackout*" que ocorrem em vários veículos espaciais em processos de reentrada na atmosfera. Esses valores limites de temperatura são válidos para pressão atmosférica. Entretanto, as condições de pressão e temperatura existentes em torno do corpo de reentrada são funções da trajetória de reentrada, Toro (1997).

2.5 – A Camada Limite e a Transferência de Calor em Escoamento Hipersônico

Os escoamentos com elevados número de Mach desenvolverão temperaturas muito altas na região onde o escoamento diminui a velocidade, tal como na região da camada limite próxima á superfície do corpo.

A alta velocidade do escoamento hipersônico gera uma grande quantidade de energia cinética, quando a intensidade desse escoamento é reduzida pelo efeito viscoso dentro da camada limite, a perda de energia cinética é transformada, em parte, em energia interna no gás, o que é chamado de dissipação viscosa.

Devido às altas temperaturas, a viscosidade aumenta e a densidade diminui. Com isso percebe-se que a espessura da camada limite pode ser maior no escoamento hipersônico, com o mesmo número de Reynolds em relação à corrente livre, do que nos escoamentos subsônico e supersônico.

A espessura da camada limite no escoamento hipersônico pode exercer um efeito de deslocamento no escoamento inviscido (despreza-se a viscosidade), fora da camada limite, causando certa forma (forma do corpo) na camada limite parecendo que é mais espessa do que é na realidade.

A parte exterior do escoamento inviscido é fortemente alterada devido à espessura da camada limite. Tais mudanças no escoamento inviscido afetam o crescimento da camada limite. Essas interações entre a camada limite e a parte externa do escoamento inviscido é chamada de *interações viscosas*.

As interações viscosas podem ter um importante efeito na distribuição de pressão, assim como na sustentação, no arrasto e na estabilidade de veículos hipersônicos. Além disso, o atrito na superfície e a transferência de calor são aumentados pelas interações viscosas.

O processo de transferência de calor através da camada limite em escoamento hipersônico não difere em princípio do que ocorre no escoamento supersônico, embora certas hipóteses simplificadoras tornam-se possíveis na camada limite hipersônica, como por

exemplo, considerar parede não aquecida, pois a densidade na parte exterior aquecida da camada limite deve ser menor do que próximo à parede.

A principal diferença entre a transferência de calor nos escoamentos supersônico e hipersônico, é que a diferença de temperatura entre a corrente livre e a parede é maior no escoamento hipersônico. Diferenciam-se também, pelo efeito da ionização e da dissociação do ar nas elevadas altitudes, quando consideradas, pois são responsáveis por grande parte do aquecimento na camada viscosa do escoamento, (ANDERSON JR., 1989). Logo, devido aos elevados gradientes de temperatura, existirão grandes mudanças na viscosidade.

O aquecimento aerodinâmico dos corpos submetidos a velocidades hipersônicas é um problema ainda mais complexo na reentrada da atmosfera, onde é necessário dispor de mecanismos para conter a dissipação do calor através da superfície do corpo, o que seria catastrófico para a subestrutura, conforme será apresentado nos próximos itens.

2.6 – Transmissão de Calor na Reentrada na Atmosfera

Quando um veículo espacial se aproxima de uma atmosfera planetária antes de aterrissar, ele possui uma grande quantidade de energia potencial, devido a sua posição acima da superfície do planeta, e energia cinética devido a sua posição velocidade; na vizinhança da atmosfera planetária, entretanto, a energia cinética é predominante.

Veículos de reentrada tem o dobro da energia cinética de um satélite em órbita circular em torno da Terra. Logo, o maior problema na reentrada na atmosfera, consiste em converter esta energia em uma forma que não danifique o veículo ou seu conteúdo, durante a passagem pelas camadas da atmosfera até a aterrissagem, (KREITH, 1973).

Se toda a energia potencial e cinética de um veículo, que entra na atmosfera do planeta, fosse convertida em energia interna, o veículo evaporaria. Entretanto, em virtude da resistência dinâmica do gás, a energia inicial do veículo é transformada em energia interna do gás que envolve o corpo, e somente parte dessa energia é transferida na forma de calor para a superfície do veículo. O calor total fornecido a um veículo durante a reentrada na atmosfera, não depende apenas do aquecimento, mas também do tempo que o mesmo se processa.

Uma reentrada segura na atmosfera requer uma trajetória própria de aproximação, responsável pela diminuição da velocidade do veículo, um projeto aerodinâmico adequado e um sistema de proteção térmica superficial. No presente trabalho apenas o último dos três problemas citados, será abordado.

O tipo de sistema de proteção térmica da superfície a ser usado para uma reentrada segura na atmosfera, depende fortemente da razão e da quantidade de energia cinética do veículo, que alcançam a superfície na forma de calor. A porcentagem de energia cinética do veículo que alcança a superfície, na forma de calor, é chamada freqüentemente de fração de conversão de energia. A fração de conversão de energia depende da forma do veículo, velocidade, altitude e trajetória.

Para proteger a estrutura e o conteúdo do veículo do aquecimento superficial durante a reentrada na atmosfera, uma variedade de sistemas de proteção e resfriamento foram propostas por trabalhos disponíveis na literatura: Masson e Gazley Jr. (1956); Vojvodich (1971); Shimidt (1964) e Steg e Lew (1962).

Esses sistemas, geralmente envolvem a absorção de calor pelo material da superfície, através de armazenamento de energia interna, mudança de fase, ou uma reação química ou rejeição de parte da energia que chega, por meio de um fluxo de massa da superfície, ou pela radiação.

O esquema de proteção da superfície, devido ao aquecimento aerodinâmico, provocado pela velocidade hipersônica na reentrada na atmosfera, é conhecido como proteção térmica ablativa, onde o termo ***ablativa*** oriunda do fenômeno físico presente na reentrada da atmosfera, chamado de ablação.

No presente trabalho o fenômeno ablativo será considerado como um material de proteção térmica que se funde ou é *ablatada* ao atingir a temperatura de fusão ou de ablação, com remoção de massa da superfície.

2.7 – Ablação

Uma definição apropriada para o fenômeno ablativo, graças a sua complexidade física, seria um processo envolvendo uma evaporação física (remoção de massa) ou pirólise na superfície de um material exposto a um gás a alta temperatura, todavia não conta apenas com o calor absorvido pelo processo de evaporação para a proteção térmica.

Logo, a ablação pode ser dividida em dois processos: ablação parcial que é caracterizada pela remoção parcial do material da superfície e ablação total, caracterizada pela perda total de massa do material da superfície.

A interação do escoamento aerodinâmico com o material ablativo resulta na erosão de uma pequena quantidade de massa, que é sacrificada para a absorção de energia, controlando a temperatura da superfície da subestrutura.

A capacidade de proteção de um sistema em ablação é limitada mais pela carga total de calor, do que pela razão de aquecimento, porque o peso do sistema depende principalmente da quantidade total de energia que deve ser absorvida durante a reentrada na atmosfera e a aterrissagem. Uma camada isolante por trás do material em ablação será ou não necessária em uma aplicação específica, dependendo da temperatura de ablação, da condutividade do material e da duração do aquecimento.

Para adquirir uma maior compreensão física do mecanismo da ablação e dos parâmetros de importância no processo, deve-se examinar o que acontece no ponto de estagnação de um corpo rombudo, entrando na atmosfera, conforme Fig. 2.6.



Figura 2.6 – Escoamento sobre um coro de revolução durante a reentrada na atmosfera.

O aquecimento devido ao atrito elevado produz um aumento na temperatura do material sólido para o ponto de fusão ou de sublimação. A ablação que aparece na superfície produz

uma camada fluida (líquida ou gasosa) que é transportada da interface por convecção para a camada limite, entre a onda de choque e a camada limite. O material ablatado, usualmente é vaporizado se mistura e esparge no meio do gás da camada limite, reduzindo assim a transferência de calor por convecção e aumentando a camada limite.

O aumento da transferência de massa para a camada limite é provocado pelo aumento da transferência de calor, que torna maior a camada e adiciona proteção à superfície.

No presente trabalho, propõe-se um modelo para solução de um problema de aquecimento cinético devido à reentrada na atmosfera. Para equacionamento do problema, utilizou-se o modelo físico composto pelas equações diferenciais parciais da camada limite hipersônico compressível, assumindo como hipótese simplificada, onde o ar é tratado com a hipótese de gás caloricamente perfeito, Apêndice C.

Nota-se que esse modelo deve ser empregado em altitudes onde os efeitos da dissociação e eventual ionização do ar não sejam tão relevantes no processo de aquecimento da superfície, a relação de altitudes para validar o modelo simplificado são encontradas em literaturas, Anderson Jr (1989); Toro (1997) e Cotta e Mayall (2004). As propriedades são calculadas através do choque normal, considerando o escoamento inviscido, e passadas como condição inicial da formação da camada limite hipersônica na superfície do corpo.

A solução do problema ablativo é realizada mediante a aplicação direta da técnica na equação da condução de calor bidimensional, considerando a hipótese de Stefan, que supõe que o material não se decompõe abaixo de uma temperatura de ablação, intitulada temperatura de fusão do material. Contudo, os parâmetros como condutividade térmica e calor específico, foram considerados constantes desde a temperatura inicial (T_0) até a evolução da temperatura de fusão do material (T_f). Ao atingir a temperatura de ablação ($T_a = T_f$), o material começa a se degradar para a camada gasosa. Para quantificar a velocidade ablativa e a posição do contorno considera-se a equação de balanço de calor na fronteira, caracterizada pela presença do inverso do número de Stefan $\nu = {h_{abla}}/{c_p\left(T_f - T_0\right)}$, onde h_{abla} é o calor de ablação e c_p é o calor específico à pressão constante do material da proteção térmica.

De posse do potencial de temperatura transformado, oriundo da solução da camada limite, é possível monitorar a temperatura no contorno para se calcular o fluxo de calor incidindo diretamente na superfície, desde a temperatura inicial, passando pela temperatura de ablação até o final do processo, quando restar uma porção pré-determinada de material da proteção térmica na superfície, de modo a não comprometer a subestrutura do intenso aquecimento.

Um enfoque mais detalhado sobre o processo pode ser encontrado nas seguintes Referências: Shimidt (1964); Lacaze (1967); Vojvodich (1971); Hasiao e Chung (1984); Hasiao e Chung (1985); Sutton (1982); Ostrach (1964) e Thomas e Neier (1990).

3 Formulação Matemática para o Problema Ablativo

Nesse capítulo são apresentadas as características do modelo matemático expresso pela equação da condução de calor, modelada como condição de aquecimento cinético devido ao processo de reentrada na atmosfera. O modelo baseia-se na Formulação Clássica do Problema de Stefan, tendo com condição do aquecimento aerodinâmico um fluxo de calor prescrito na fronteira do corpo de revolução.

3.1 Abordagem Clássica do Problema Ablativo (Problema de Stefan)

Considera-se um corpo de revolução como o apresentado na Fig. 3.1, o corpo está sujeito ao intenso escoamento devido ao processo de reentrada, onde se desenvolvem altíssimas velocidades. O atrito entre o ar e a superfície do corpo, bem como, ao efeito de dissociação do ar devido à onda de choque, provoca um intenso aquecimento na superfície do corpo. O corpo possui uma proteção térmica, de espessura $y_b(t)$, a qual está sujeita ao forte aquecimento. O aquecimento nessa abordagem será modelado mediante a aplicação de fluxos de calor prescritos na face frontal do corpo de revolução, simulando o efeito de aquecimento devido à reentrada na atmosfera.

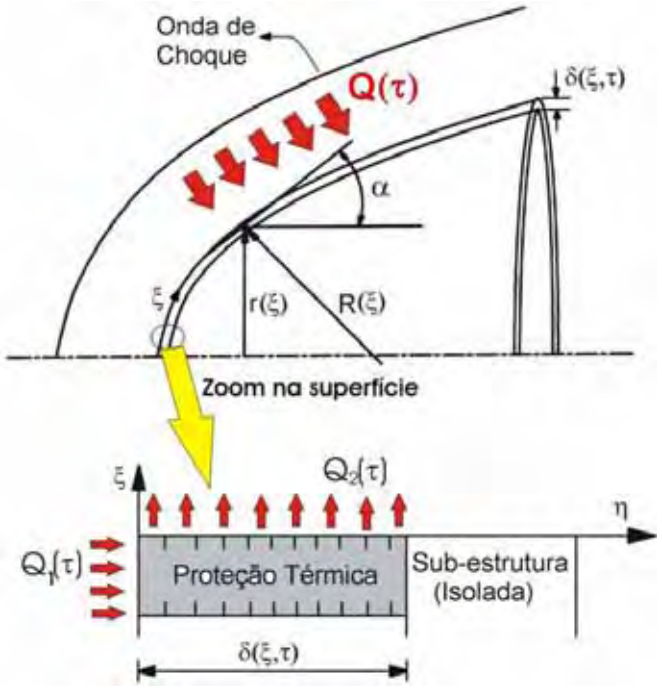


Figura 3.1 – Geometria de Revolução.

Inicialmente o corpo encontra-se a uma temperatura T_0 e é aquecido até que se atinja a temperatura de início da ablação, T_{ab}, a partir dessa temperatura o material da proteção térmica começa a ablatar, o qual é perdido para o meio sobre a ação do escoamento próximo à superfície.

Diante da abordagem clássica, nota-se duas situações decorrentes do processo de aquecimento cinético, uma fase onde o corpo é aquecido até a temperatura de ablação (Período Pré-Ablativo) e outra fase, onde o material da proteção térmica é ablatado e removido para o meio (Período Ablativo). Essa abordagem é também conhecida como Abordagem Clássica do Problema de Stefan. Obviamente, pode existir o período Pós-Ablativo quando o material de proteção térmica foi totalmente consumido e a estrutura do veículo estará sujeita ao fluxo de calor.

3.2 Modelamento Matemático

O problema ablativo é modelado segundo a equação da condução de calor bidimensional, a qual é apresentada na forma dimensional,

$$\frac{1}{\alpha_T}\frac{\partial T^*}{\partial t}\left(x,y,t\right)=\nabla^2 T^*\left(x,y,t\right) \tag{3.1}$$

onde, ∇^2 é o operador Laplaciano e α_T é a difusividade térmica do material

$$\alpha_T=\frac{k}{\rho c_p} \tag{3.1.1}$$

onde k, é a condutividade térmica, ρ é a densidade e c_p é o calor específico do material.

No presente trabalho as propriedades físicas dos materiais utilizados como parâmetros de teste para o modelo numérico foram considerados constantes em cada caso.

A Eq. (3.1) pode ser expressa da seguinte forma,

$$\frac{1}{\alpha_T}\frac{\partial T^*}{\partial t}(x,y,t)=\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2}(x,y,t)+\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2}(x,y,t) \tag{3.2}$$

As Eq. (3.2) representa a condução de calor através de uma dada superfície no sistema de coordenadas cartesiano. Para uma análise que corresponda ao tipo de geometria estudado no presente trabalho, utiliza-se uma mudança de coordenadas para o sistema Ortogonal Curvilíneo, o qual pode ser entendido mediante a Fig. 3.2.

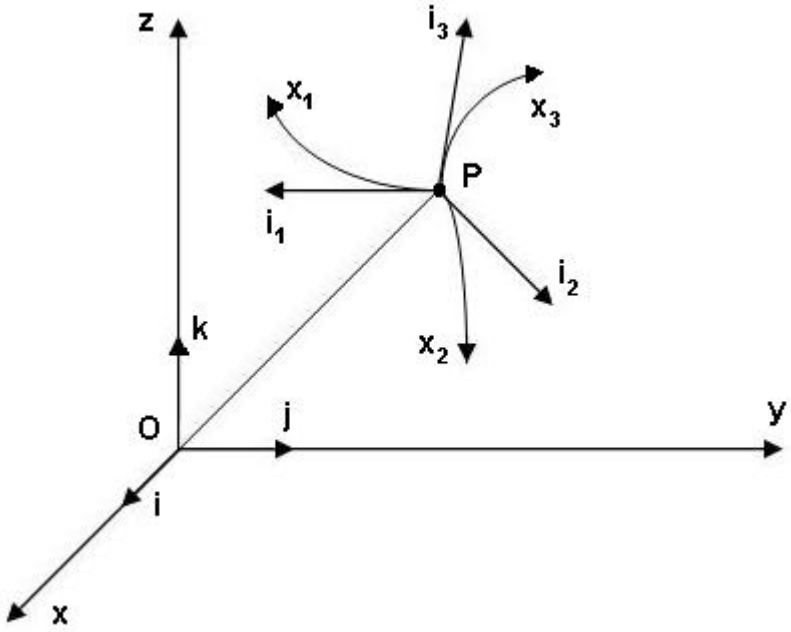


Figura 3.2 – Sistema Ortogonal de Coordenadas Curvilíneas.

Na Fig. 3.2 é definido um conjunto de coordenadas curvilíneas generalizadas, x_1, x_2, x_3, o qual tem sua origem no ponto *P* e seus respectivos vetores unitários, $\boldsymbol{i_1}$, $\boldsymbol{i_2}$, $\boldsymbol{i_3}$. O sistema de coordenadas cartesianas pode ser representado no sistema generalizado de coordenadas curvilíneas da seguinte forma,

$$\begin{aligned} x &= x(x_1,x_2,x_3) \\ y &= y(x_1,x_2,x_3) \\ z &= z(x_1,x_2,x_3) \end{aligned} \tag{3.3}$$

A forma diferencial do operador Laplaciano é diferente para cada sistema de coordenadas. Em coordenadas curvilíneas, o operador Laplaciano pode ser definido genericamente da seguinte forma,

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\right] \tag{3.4}$$

onde, φ é um escalar arbitrário.

O Jacobiano, em relação à Eq. (3.3) é dado por,

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} \tag{3.5}$$

Com o Jacobiano não nulo, tem-se

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x,y,z) \\ x_2 &= x_2(x,y,z) \\ x_3 &= x_3(x,y,z) \end{aligned} \tag{3.6}$$

O comprimento de arco de um elemento infinitesimal pode ser obtido da forma

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \tag{3.7}$$

Derivando a Eq. (3.3) e substituindo na Eq. (3.7), tem-se

$$(h_1)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 \tag{3.8a}$$

$$(h_2)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 \tag{3.8b}$$

$$(h_3)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)^2 \tag{3.8c}$$

Para caracterizar um corpo bidimensional (2-D) ou um corpo com simetria axial, os parâmetros contidos na Eq. (3.4), são definidos como segue,

$$\begin{array}{lll} x_1 = \xi & h_1 = 1 + R(\xi)\eta & u_1 = u \\ x_2 = \eta & h_2 = 1 & u_2 = v \\ x_3 = \phi & h_3 = \left[r(\xi) + \eta \cos\alpha(\xi) \right]^m & u_3 = mw \end{array} \tag{3.9}$$

onde, $R(\xi)$ é o raio de curvatura da geratriz de revolução , $r(\xi)$ é o raio da região rombuda (distância da superfície do corpo até o eixo de simetria) **u** é o vetor velocidade, e

$$m = \begin{cases} 0 \rightarrow \textit{para escoamento } 2-D \\ 1 \rightarrow \textit{para escoamento com simetria axial} \end{cases} \tag{3.10}$$

A Fig. 3.3 ilustra a geometria utilizada na análise do presente trabalho, lembrando que para o caso bidimensional, o parâmetro $u_3=mw=0$, Eq. (3.9).

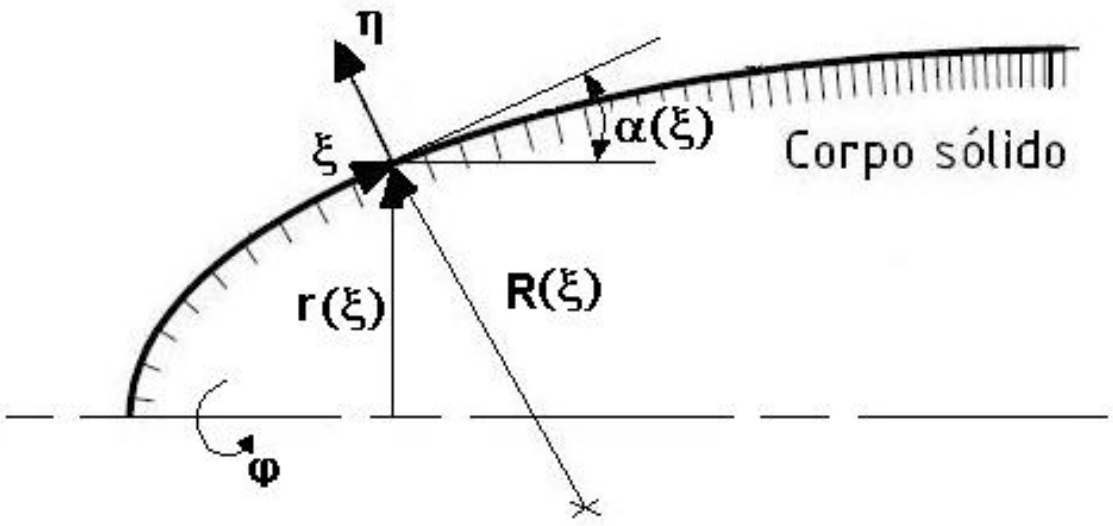


Figura 3.3 – Geometria de Revolução.

Aplicando a generalização em coordenadas curvilíneas, Eq. (3.4), na Eq. (3.1), tem-se a equação governante do problema ablativo de condução de calor bidimensional para o sistema ortogonal curvilíneo, na forma adimensional.

A Fig. 3.4 ilustra as características de um elemento infinitesimal no corpo de revolução.

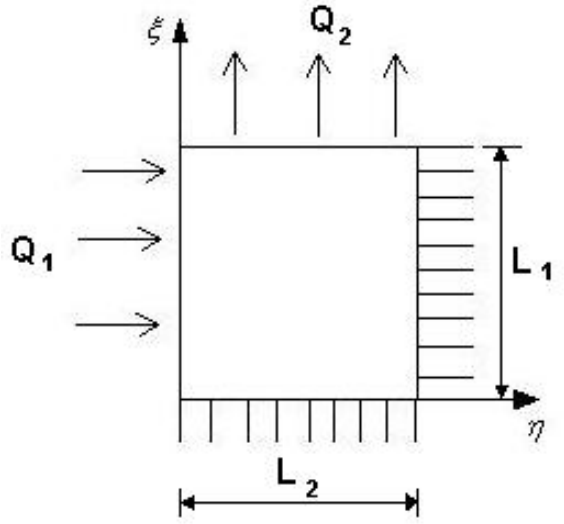


Figura 3.4 – Elemento infinitesimal no corpo de revolução.

onde, L_1 e L_2, são os comprimentos adimensionais do elemento infinitesimal.

- ✓ **<u>Período Pré-Ablativo</u>**

A equação governante, bem como suas condições de contorno e inicial, para o Período Pré-Ablativo nas variáveis adimensionais, é mostradas abaixo.

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi^2}+ A(\eta,\xi)\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta}+\bar{B}(\eta,\xi)\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi} \quad , \begin{cases}\tau>0\\ 0\le\xi\le l\\ 0\le\eta\le 1\end{cases} \tag{3.11}$$

onde,

$$A(\eta,\xi)=\left[\frac{R(\xi)}{a(\eta,\xi)}+\frac{\cos\alpha(\xi)}{b(\eta,\xi)}\right] \quad ; \quad \overline{B}(\eta,\xi)=B(\eta,\xi)+C(\eta,\xi) \tag{3.12a}$$

$$a(\eta,\xi)=1+R(\xi)\eta \quad ; \quad b(\eta,\xi)=r(\xi)+\eta\cos\alpha(\xi) \tag{3.12b}$$

onde,

$$B(\eta,\xi)=\frac{1}{b(\eta,\xi)a^2(\eta,\xi)}\left[\frac{dr(\xi)}{d\xi}+\eta\frac{d\cos\alpha(\xi)}{d\xi}\right] \tag{3.13}$$

$$C(\eta,\xi)=\frac{1}{a^3(\eta,\xi)}\left[\eta\frac{dR(\xi)}{d\xi}\right] \tag{3.14}$$

com as seguintes condições de contorno e inicial,

$$\frac{\partial\theta(\eta,\theta,\tau)}{\partial\xi}=0\,,\quad \xi=0\,,\quad 0\le\eta\le1 \tag{3.15a}$$

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta}=0\,,\quad \eta=0\,,\quad 0\le\xi\le l \tag{3.15b}$$

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta}=Q_1(\tau)\,,\quad \eta=1\,,\quad 0\le\xi\le l \tag{3.15c}$$

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi}=-Q_2(\tau)\,,\quad \xi=l\,,\quad 0\le\eta\le1 \tag{3.15d}$$

$$\theta(\eta,\xi,\tau)=0 \quad \tau=0 \quad , \quad \begin{cases} 0\le\xi\le l \\ 0\le\eta\le 1 \end{cases} \tag{3.15e}$$

- ✓ **<u>Período Ablativo</u>**

A equação governante, bem como suas condições de contorno e inicial, para o Período Ablativo nas variáveis adimensionais, é mostrada abaixo.

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi^2}+ A(\eta,\xi)\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta}+\bar{B}(\eta,\xi)\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi} \quad , \quad \begin{cases} \tau>\tau_f \\ 0\le\xi\le l \\ \delta(\xi,\tau)\le\eta\le 1 \end{cases} \tag{3.16}$$

com as seguintes condições de contorno e inicial,

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta}=0\,, \quad \eta=0\,, \quad 0\le\xi\le l \tag{3.17a}$$

$$\theta(\eta,\xi,\tau)=1, \quad \eta=\delta(\xi,\tau), \quad 0\le\xi\le l \tag{3.17b}$$

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,t)}{\partial\xi}=0\,, \quad \xi=0\,, \quad \delta(\xi,\tau)\le\eta\le 1 \tag{3.17c}$$

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi}=-Q_2(\tau), \quad \xi=l, \quad \delta(\xi,\tau)\le\eta\le 1 \tag{3.17d}$$

$$\theta(\eta,\xi,\tau)=\theta_f(\eta,\xi,\tau)\ ,\ \tau=\tau_f, \begin{cases} \delta(\xi,\tau)\le\xi\le l \\ 0\le\eta\le 1 \end{cases} \tag{3.17e}$$

onde, $\theta_f(\eta,\xi,\tau)$ é a distribuição de temperatura obtida no Período Pré-Ablativo para o tempo τ_f, ou seja, essa é a temperatura de início do processo ablativo.

O problema envolve uma fronteira móvel, cuja posição deve ser determinada após o início da ablação do material da proteção térmica, τ_f. O tempo de início do processo ablativo é determinado verificando quando a temperatura na superfície do material atinge a temperatura de ablação ou de fusão.

A equação de balanço de energia na fronteira é utilizada como equação para determinar a posição da fronteira e acopla o campo de temperatura do sólido com a espessura de material a ser ablatada em função do fluxo de calor oriundo do escoamento externo. No modelo de ablação bidimensional foi proposta a seguinte equação, (HASIAO; SHUNG, 1984).

$$-\left\{1+\left[\frac{d\zeta(\xi,\tau)}{d\xi}\right]^2\right\}\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta}+\nu\frac{d\zeta(\xi,\tau)}{d\tau}=Q_1(\tau) \tag{3.18a}$$

onde, $\theta(\eta,\xi,\tau)$ é o perfil de temperatura do Período Ablativo, ν é o inverso do número de Stefan e $\frac{d\zeta(\xi,\tau)}{d\tau}$ representa a porção do material da proteção térmica não ablatado.

No modelo de ablação unidimensional a equação de acoplamento tem forma

$$\frac{\partial\hat{\Phi}(\eta,\tau)}{\partial\eta}-\nu\frac{d\delta(\tau)}{d\tau}=Q(\tau) \tag{3.18b}$$

onde, $\hat{\Phi}(\eta,\tau)$ representa a distribuição de temperatura do Período Ablativo.

As variáveis adimensionais, a obtenção da equação de acoplamento a partir do balanço de energia na fronteira encontra-se no Apêndice A. A manipulação da Eqs. (3.1) para se obter a Eq. (3.11) são apresentados no Apêndice B.

3.3 Análise do Processo de Aquecimento cinético pelos Métodos Simplificados

Os Métodos Simplificados ou de Engenharia, são utilizados para estimar o aquecimento cinético em processos onde se consideram o desenvolvimento de velocidades elevadas, como é o caso da reentrada na atmosfera de veículos espaciais onde o número de Mach é suficientemente alto, a ponto de causar severo aquecimento aerodinâmico na superfície do veículo.

Tais métodos baseiam-se no cálculo do fluxo de calor incidente em uma dada superfície, sendo necessário o conhecimento das propriedades do ar atmosférico em cada altitude percorrida durante o vôo descendente.

Para se obter tais valores é calculada a trajetória de reentrada do corpo, simulando juntamente com o modelo difusivo o efeito do processo ablativo sobre a proteção térmica do corpo. A trajetória será tratada mais adiante, bem como as características adotadas para o modelo matemático que a representa.

No presente trabalho o cálculo do fluxo de calor será acoplado ao modelo de aquecimento aerodinâmico da superfície, simulando o efeito do atrito viscoso entre o ar atmosférico e a superfície do corpo, assim como do processo de dissociação e possível ionização do ar atmosférico após formação da onda de choque normal ao ponto de estagnação do corpo de revolução.

3.3.1 – Método Simplificado de Tauber

O Método Simplificado de Tauber, Anderson Jr. (1989), é o método mais simples para o cálculo do fluxo de calor no ponto de estagnação de um veículo em escoamento hipersônico na reentrada na atmosfera.

O fluxo de calor é dado pela seguinte expressão,

$$q_w = \rho_\infty^N U_\infty^M C \tag{3.19}$$

onde, N, M e C são constantes que dependem da geometria e da condição do escoamento (laminar ou turbulento). Para o ponto de estagnação em regime laminar N e M assumem, respectivamente, os valores de 0.5 e 3. A constante C é calculada pela seguinte relação,

$$C = 1.83 \times 10^{-8} R_N^{-1/2} \left(1 - \frac{h_w}{h_0} \right) \tag{3.20}$$

onde, R_N é o raio do nariz do veículo, h_w e h_0 são as entalpias da parede e de estagnação, respectivamente. A entalpia na parede e a entalpia de estagnação são dadas, respectivamente, pelas seguintes equações,

$$h_w = c_{p_{ar}} T_w \tag{3.21}$$

$$h_0 = h_\infty + \frac{U_\infty^2}{2} \tag{3.22}$$

onde, a entalpia estática (h_∞) é calculada na temperatura T_∞ e $c_{p_{ar}}$ é o calor específico a pressão constante do ar atmosférico.

3.3.2 – Método de Van Driest

O Método de Van Driest (1956) é utilizado para efetuar o cálculo em regime laminar, do fluxo de calor na região de estagnação em torno de uma esfera.

A expressão que quantifica essa análise, conforme mostrado por Van Driest (1956), é apresentada a seguir,

$$q_w = 0.763 \, \mathrm{Pr}^{-0.6} \left(\rho_e \mu_e \right)^{1/2} \sqrt{\frac{du_e}{ds}} \left(h_{aw} - h_w \right) \tag{3.23}$$

onde, Pr é o número de Prandtl, ρ_e é a densidade do ar depois da onda de choque normal e μ_e é a viscosidade dada pela Equação de Sutherland, conforme segue

$$\frac{\mu_e}{\mu_{ref}} = \left[\frac{T_e}{T_{ref}} \right] \frac{T_{ref} - S}{T_e - S} \tag{3.24}$$

onde os valores de referência para a Eq. (3.24) são: $\mu_{ref} = 1.789\times10^{-5}\ kg/ms$, $T_{ref} = 288\ K$ e $S = 110\ K$.

A entalpia adiabática na parede, h_{aw}, é dada por

$$h_{aw} = h_e + r\left(h_0 - h_e\right) \tag{3.25}$$

onde, h_e é a entalpia avaliada a T_e e r é o fator de recuperação. Para escoamentos laminares, r é dado pela seguinte expressão,

$$r = \sqrt{\mathrm{Pr}} \tag{3.26}$$

Para escoamento hipersônico, o gradiente de velocidade, $\frac{du_e}{ds}$, é obtido pela seguinte equação; Anderson Jr. (1989),

$$\frac{du_e}{ds} = \frac{1}{R_N}\sqrt{\frac{2\left(p_e - p_\infty\right)}{\rho_e}} \tag{3.27}$$

onde, s é a coordenada paralela ao escoamento do gás na camada limite hipersônica e R_N é o raio do nariz do corpo de revolução.

O subscrito *"e"* presente nas equações do método de Van Driest Eqs. (3.23) – (3.26), correspondem às condições na fronteira da camada limite, ponto 1 na Fig. 3.5.

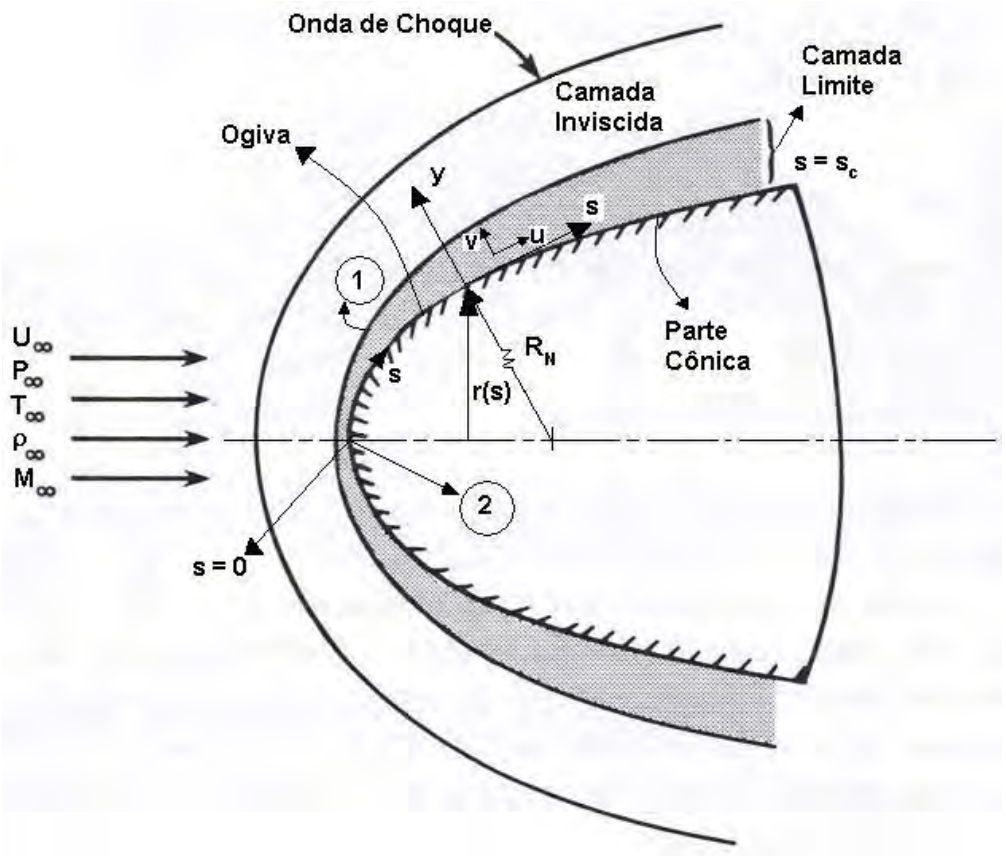


Figura 3.5 – Pontos de interesse no cálculo das propriedades termodinâmicas após a onda de choque.

Na região do ponto de estagnação, ponto 2 na Fig. 3.5, os valores de subscrito *"e"* são calculados utilizando as relações do choque normal, considerando que o ar se comporta como um gás caloricamente perfeito.

As relações do choque normal para cálculo das propriedades termodinâmicas, assumindo que o ar é um gás que se comporta como um gás caloricamente perfeito, após a onda de choque no ponto de estagnação, é mostrado no Apêndice C.

3.4 Trajetória de Reentrada

Com a finalidade de avaliar o aquecimento na região de escoamento compressível, em torno do ponto de estagnação do corpo rombudo, foi adotado um modelo que representa a dinâmica da reentrada atmosférica do corpo pela atmosfera densa. O modelo utilizado é conhecido como ***Reentrada Vertical sem Sustentação,*** (REGAN; ANANDAKRISHNAN, 1993).

Através do modelo de reentrada atmosférico, é possível acoplar o cálculo das propriedades atmosféricas do ar em cada altitude (U.S. STANDARD ATMOSPHERE, 1976). Tais valores são necessários para o cálculo do fluxo de calor que irá incidir diretamente na superfície do corpo, bem como a taxa de material ablatado consumida através da trajetória de reentrada.

O modelo adotado para o cálculo da trajetória representa o comportamento físico, variações de altitude e velocidade, de um determinado corpo ao entrar através da atmosfera, sofrendo uma rápida variação de densidade.

As equações governantes para o cálculo da trajetória de reentrada, considerando o modele de Reentrada Vertical sem Sustentação, são mostradas abaixo,

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{\rho g}{2\beta}\right)V^2 + g \tag{3.28}$$

$$\frac{dh}{dt} = -V \tag{3.29}$$

$$\rho = \rho_0 e^{-h/H} \tag{3.30}$$

onde,

$\boldsymbol{H} \rightarrow$ Escala de altitude atmosférica [m];

$\boldsymbol{h} \rightarrow$ Altitude geopotencial [m];

$\boldsymbol{\rho_0} \rightarrow$ Densidade ao nível do mar [kg/m^3];

$\boldsymbol{\rho} \rightarrow$ Densidade do ar atmosférico calculado ao longo da trajetória de reentrada [kg/m^3];

$\boldsymbol{\beta} \rightarrow$ Constante térmica [kg/(m-s-K$^{1/2}$)];

$\boldsymbol{V} \rightarrow$ Velocidade obtida na trajetória de reentrada [m/s];

$\mathbf{g} \rightarrow$ Aceleração da gravidade [m/s^2];

$\boldsymbol{t} \rightarrow$ Tempo de percurso da trajetória de reentrada [s].

As constantes envolvidas no modelo de reentrada tem os valores mostrados na Tabela 2.

Tabela 2 – Constantes para o cálculo do modelo de reentrada atmosférico.

	H (m)	***h (m)***	ρ_0 ***(kg/m^3)***	β**(kg/(m-s-K$^{1/2}$)**	***g (m/s^2)***
Constantes	300 000	6700	1,752	$1{,}325\times10^{-3}$	9,81

O problema envolvendo o sistema de equações diferenciais ordinárias representados pelas Eqs. (3.28), (3.29) e (3.30), foi resolvido através do método de Runge Kutta e incorporado à metodologia de cálculo numérico da solução do trabalho. O tempo é um valor atribuído a cada iteração executada pelo programa principal e incorporado ao modelo de cálculo da trajetória de reentrada.

Os resultados obtidos através do cálculo da trajetória de reentrada, são apresentados juntamente aos resultados do presente trabalho no Capítulo 5. A trajetória de reentrada foi calculada a partir da altitude de 300 km.

4 Aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada na Solução do Problema Ablativo

Esse capítulo destina-se à aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada para resolver o modelo de condução de calor adimensional acoplado com o movimento da fronteira. O sistema de equações diferenciais ordinárias resultantes define a solução do modelo, temperatura e velocidade ablativa, que serão resolvidos numericamente através do desenvolvimento de um código na linguagem Fortran.

4.1 Modelo Matemático para o Corpo de Revolução Bidimensional

Para a solução do problema ablativo o potencial de temperatura foi separado em duas partes,

$$\theta(\eta,\xi,\tau) = \theta_1(\eta,\xi,\tau) + \theta_2(\eta,\xi,\tau) \tag{4.1}$$

A solução do problema será efetuada mediante a homogeneização das condições de contorno, para tanto, são definidas duas novas variáveis cujo resultado corresponderá à solução do Período Pré-Ablativo.

- ✓ **Período Pré-Ablativo**

$$\theta_1(\eta,\xi,\tau) = \theta_1^*(\eta,\xi,\tau) + \frac{Q_1(\tau)}{2}\eta^2 \tag{4.2}$$

$$\theta_2(\eta,\xi,\tau) = \theta_2^*(\eta,\xi,\tau) - \frac{Q_2(\tau)}{2l}\xi^2 \tag{4.3}$$

Substituindo as Eqs. (4.2) e (4.3) na Eq. (3.11),

$$\frac{\partial \theta_1^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta_1^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta_1^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi^2} + A(\eta,\xi)\frac{\partial \theta_1^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \eta} + \left[B(\eta,\xi)+C(\eta,\xi)\right]\frac{\partial \theta_1^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi} + P_1(\eta,\xi,\tau) \tag{4.4}$$

onde, a variável $P_1(\eta,\xi,\tau)$ é da forma

$$P_1(\eta,\xi,\tau) = Q_1(\tau) - \dot{Q}_1(\tau)\frac{\eta^2}{2} + A(\eta,\xi)Q_1(\tau)\eta \tag{4.5}$$

com as seguintes condições de contorno e inicial,

$$\frac{\partial \theta_1^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0\,; \quad \frac{\partial \theta_1^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 1 \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \theta_1^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = 0\,; \quad \frac{\partial \theta_1^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = l \tag{4.7}$$

$$\theta_1^*(\eta,\xi,0) = f_1(\eta,\xi) = -Q_1(0)\frac{\eta^2}{2} \tag{4.8}$$

Para transformarmos a Eq. (4.4) na direção ξ definimos um problema auxiliar e homogêneo de autovalor da seguinte forma,

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial \xi^2} + \mu_i^2 \psi_i(\xi) = 0 \;;\; 0 \le \xi \le l \;\;;\; i=1,2,3,\ldots \tag{4.7}$$

Com as seguintes condições de contorno

$$\frac{\partial \psi_i(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad ; \quad \xi = 0 \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.8a}$$

$$\frac{\partial \psi_i(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad \xi = l \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.8b}$$

O problema auxiliar de autovalor tem a seguinte solução,

$$\psi_i(\xi) = J_i \cos\left(\mu_i \xi\right) \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.9a}$$

$$J_i = \sqrt{\frac{2}{l(1+\delta_{i1})}} \quad ; \qquad i=1,2,3, \ldots \tag{4.9b}$$

$$\mu_i = (i-1)\frac{\pi}{l} \qquad ; \qquad i=1,2,3, \ldots \tag{4.10}$$

onde J_i é a norma do problema de autovalor, ψ_i são as autofunções e μ_i são os autovalores.

Utilizando a propriedade de ortogonalidade do problema de autovalor, obtém-se a norma das autofunções, dada por

$$N_i^2 = \int_0^1 \left[\cos\left(\mu_i \eta\right)\right]^2 d\eta \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.11}$$

Define-se o par Transformada Integral e Inversa como mostrado por Özisik e Mikhailov, (1984) e Diniz (1996),

$$\widetilde{\theta}_i^*(\eta,\tau) = \int_0^l \psi_i(\xi)\theta_i^*(\eta,\xi,\tau)d\xi \quad ; \qquad \textbf{\textit{Transformada}} \tag{4.12}$$

$$\theta_i^*(\eta,\xi,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i(\xi)}{N_i}\widetilde{\theta}_i^*(\eta,\tau) \quad ; \qquad \textbf{\textit{Fórmula de Inversão}} \tag{4.13}$$

Após algumas manipulações matemáticas impostas pela TTIG, (COTTA, 1993), obtém-se a equação transformada,

$$\frac{\partial\tilde{\theta}_i(\eta,\tau)}{\partial\tau} + \mu_i^2\tilde{\theta}_i(\eta,\tau) = \frac{\partial^2\tilde{\theta}_i(\eta,\tau)}{\partial\eta^2} + \tilde{P}_i(\eta,\tau) + \tilde{M}_i(\eta,\tau) + \tilde{N}_i(\eta,\tau) \quad ; \qquad i=1,2,3, \ldots \tag{4.14}$$

com a seguinte condição inicial,

$$\tilde{\theta}_i(\eta,0) = \tilde{f}_i(\eta) \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.15}$$

e as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial\tilde{\theta}_i^*(\eta,\tau)}{\partial\eta} = 0 \quad \eta = 0 \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.16a}$$

$$\frac{\partial\tilde{\theta}_i(\eta,\tau)}{\partial\eta} = 0 \quad \eta = 1 \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.16b}$$

Para transformar no problema de autovalor a Eq. (4.14) segundo a direção η define-se um novo problema auxiliar de autovalor,

$$\frac{\partial^2 \phi_i(\eta)}{\partial \eta^2} + \lambda_i^2 \phi_i(\eta) = 0 \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.17}$$

com as condições de contorno,

$$\frac{\partial \phi_i(\eta)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 0 \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.18a}$$

$$\frac{\partial \phi_i(\eta)}{\partial \eta} = 0 \quad \eta = 1 \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.18b}$$

Pela solução da Eq. (4.17) obtêm-se as autofunções e os respectivos autovalores para o problema auxiliar de autovalor,

$$\phi_m(\eta) = I_m \cos(\lambda_m \eta) \quad ; \quad m=1,2,3, \ldots \tag{4.19a}$$

$$I_m = \sqrt{\frac{2}{(1+\delta_m)}} \quad ; \qquad m=1,2,3, \ldots \tag{4.19b}$$

$$\lambda_m = (m-1)\pi \quad ; \qquad m=1,2,3, \ldots \tag{4.20}$$

onde, I_m é a norma do problema de autovalor, ϕ_m são as autofunções e λ_m são os autovalores.

Realizando o mesmo procedimento na transformação da variável ξ, define-se o par Transformada Integral e Inversa,

$$\hat{\tilde{\theta}}_{im}^{*}(\tau) = \int_{0}^{1} \tilde{\theta}_{i}^{*}(\eta,\tau)\phi_{m}(\eta)d\eta \quad ; \; i=1,2,3, \ldots \; ; \qquad \textbf{\textit{Transformada}} \tag{4.21}$$

$$\tilde{\theta}_{i}^{*}(\eta,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_{m}(\eta)}{I_{m}} \hat{\tilde{\theta}}_{im}^{*}(\tau) \quad ; \; i=1,2,3, \ldots \; ; \qquad \textbf{\textit{Fórmula de Inversão}} \tag{4.22}$$

Manipulando as equações conforme a definição da TTIG, (COTTA, 1993), resulta no sistema de equações diferenciais ordinária,

$$\frac{d\hat{\tilde{\theta}}_{im}^{*}(\tau)}{d\tau} + (\mu_{i}^{2} + \lambda_{m}^{2})\hat{\tilde{\theta}}_{im}^{*}(\tau) = \hat{\tilde{P}}_{im}(\tau) + \hat{\tilde{M}}_{im}(\tau) + \hat{\tilde{N}}_{im}(\tau) \quad ; \quad \begin{matrix} i = 1,2,3,... \\ m = 1,2,3,... \end{matrix} \tag{4.23}$$

com a seguinte condição inicial,

$$\hat{\tilde{\theta}}_{im}(0) = \hat{\tilde{f}}_{im} \quad ; \quad \begin{matrix} i = 1,2,3,... \\ m = 1,2,3,... \end{matrix} \tag{4.24}$$

Sabendo que,

$$\hat{\tilde{P}}_{im}(\tau) = \int_{0}^{1} \tilde{P}_{i}\phi_{m}(\eta)d\eta = \int_{0}^{1}\int_{0}^{l} \psi_{i}(\xi)\phi_{m}(\eta)P_{1}(\eta,\xi,\tau)d\xi d\eta \tag{4.25a}$$

$$\hat{\tilde{f}}_{im}(\tau) = \int_{0}^{1} \tilde{f}_{i}(\eta)\phi_{m}(\eta)dx = \int_{0}^{1}\int_{0}^{l} \psi_{i}(\xi)\phi_{m}(\eta)f_{1}(\eta,\xi)d\xi d\eta \tag{4.25b}$$

$$\hat{\tilde{M}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{M}_i(\eta,\tau)\phi_m(\eta)d\eta = \int_0^1\int_0^l \psi_i(\xi)\phi_m(\eta)A(\eta,\xi)\frac{\partial\theta_1^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta}d\xi d\eta \tag{4.25c}$$

$$\hat{\tilde{N}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{N}_i(\eta,\tau)\phi_m(\eta)d\eta = \int_0^1\int_0^l \psi_i(\xi)\phi_m(\eta)\bar{B}(\eta,\xi)\frac{\partial\theta_1^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi}d\xi d\eta \tag{4.25d}$$

Substituindo as Eqs. (4.1) e (4.3) na Eq. (3.11),

$$\frac{\partial\theta_2^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_2^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\theta_2^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi^2} + A(\eta,\xi)\frac{\partial\theta_2^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta} + \left[B(\eta,\tau)+C(\eta,\tau)\right]\frac{\partial\theta_2^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi} + P_2(\eta,\xi,\tau) \tag{4.26}$$

onde,

$$P_2(\eta,\xi,\tau) = -\frac{Q_2}{l} + \frac{\dot{Q}_2}{2l}\xi^2 - \left[B(\eta,\xi)+C(\eta,\xi)\right]\frac{Q_2}{l}\xi \tag{4.27}$$

Com a seguinte condição inicial,

$$\theta_2^*(\eta,\xi,0) = f_2(\eta,\xi) = Q_2(0)\frac{\xi^2}{2l} \tag{4.28}$$

e com as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial\theta_2^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta} = 0 \quad ; \quad \eta = 0 \tag{4.29a}$$

$$\frac{\partial \theta_2^{*}(\eta,\xi,\tau)}{\partial \eta} = 0 \quad ; \quad \eta = 1 \tag{4.29b}$$

$$\frac{\partial \theta_2^{*}(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi} = 0 \quad ; \quad \xi = 0 \tag{4.29c}$$

$$\frac{\partial \theta_2^{*}(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi} = 0 \quad ; \quad \xi = l \tag{4.29d}$$

Para transformar no problema de autovalor a Eq. (4.26), define-se um problema auxiliar do tipo da Eq. (4.7) e realizando o mesmo procedimento analítico descrito anteriormente para se obter a transformação, define-se o par Transformada Integral e Inversa da seguinte forma,

$$\tilde{Z}_i^{*}(\eta,\tau) = \int_0^l \psi_i(\xi)\theta_2^{*}(\eta,\xi,\tau)d\xi \quad ; \qquad \textbf{\textit{Transformada}} \tag{4.30}$$

$$\theta_2^{*}(\eta,\xi,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\xi)\tilde{Z}_i^{*}(\eta,\tau) \quad ; \qquad \textbf{\textit{Fórmula de Inversão}} \tag{4.31}$$

Obtém-se a seguinte equação transformada:

$$\frac{\partial \tilde{Z}_i^{*}(\eta,\tau)}{\partial \tau} + \mu_i^{2}\tilde{Z}_i^{*}(\eta,\tau) = \frac{\partial^2 \tilde{Z}_i^{*}(\eta,\tau)}{\partial \eta^2} + \tilde{S}_i(\eta,\tau) + \tilde{T}_i(\eta,\tau) + \tilde{U}_i(\eta,\tau) \; ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.32}$$

com a seguinte condição inicial,

$$\tilde{Z}_i^{*}(\eta,0) = \tilde{h}_i(\eta,\tau) \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.33}$$

e com as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial \tilde{Z}_i^{*}(\eta,\tau)}{\partial \eta} = 0 \;\; ; \;\; \eta = 0 \;\; ; \;\; i=1,2,3, \ldots \tag{4.34a}$$

$$\frac{\partial \tilde{Z}_i^{*}(\eta,\tau)}{\partial \eta} = 0 \;\; ; \;\; \eta = 1 \;\; ; \;\; i=1,2,3, \ldots \tag{4.34b}$$

Para transformar na direção η define-se um problema do tipo da Eq. (4.17) e definindo-se o par Transformada Integral e Inversa,

$$\hat{\tilde{Z}}_{im}^{*}(\tau) = \int_0^1 \phi_m(\eta)\tilde{Z}_i^{*}(\eta,\tau)d\eta \;\; ; \;\; i=1,2,3, \ldots \;\; ; \qquad \textbf{\textit{Transformada}} \tag{4.35}$$

$$\tilde{Z}_i^{*}(\eta,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\eta)\hat{\tilde{Z}}_{im}^{\;*}(\tau) \;\; ; \;\; i=1,2,3, \ldots \;\; ; \qquad \textbf{\textit{Fórmula de Inversão}} \tag{4.36}$$

Portanto, substituindo a Eq. (4.35) na Eq. (4.4), a partir da definição da TTIG, (COTTA, 1993), obtém-se uma equação diferencial ordinária,

$$\frac{d\hat{\tilde{Z}}_{im}(\tau)}{d\tau} + (\mu_i^{\,2} + \lambda_m^{\,2})\hat{\tilde{Z}}_{im}(\tau) = \hat{\tilde{S}}_{im}(\tau) + \hat{\tilde{T}}_{im}(\tau) + \hat{\tilde{U}}_{im}(\tau) \;\; ; \;\; \begin{matrix} i = 1,2,3,\ldots \\ m = 1,2,3,\ldots \end{matrix} \tag{4.37}$$

com a seguinte condição inicial,

$$\hat{\tilde{Z}}_{im}(0) = \hat{\tilde{h}}_{im}(\tau) \;\; ; \;\; \begin{matrix} i = 1,2,3,\ldots \\ m = 1,2,3,\ldots \end{matrix} \tag{4.38}$$

onde,

$$\hat{\tilde{S}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{S}_i(\eta,\tau)\phi_m(\eta)dx = \int_0^1 \int_0^l P_2(\eta,\xi,\tau)\psi_i(\xi)\phi_m(\eta)d\xi d\eta \tag{4.39a}$$

$$\hat{\tilde{h}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{h}_i(\eta,\tau)\phi_m(\eta)dx = \int_0^1\int_0^l f_2(\eta,\xi)\psi_i(\xi)\phi_m(\eta)d\xi d\eta \tag{4.39b}$$

$$\hat{\tilde{T}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{T}_i(\eta,\tau)\phi_m(\eta)d\eta = \int_0^1\int_0^l A(\eta,\xi)\psi_i(\xi)\phi_m(\eta)\frac{\partial\theta_2^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta}d\xi d\eta \tag{4.39c}$$

$$\hat{\tilde{U}}_{im}(\tau) = \int_0^1 \tilde{U}_i(\eta,\tau)\phi_m(\eta)d\eta = \int_0^1\int_0^l \bar{B}(\eta,\xi)\psi_i(\xi)\phi_m(\eta)\frac{\partial\theta_2^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi}d\xi d\eta \tag{4.39d}$$

Resolvendo-se as equações diferenciais ordinárias, Eq. (4.37), Eq. (4.38) e Eq. (4.39) obtém-se a distribuição de temperatura para o Período Pré-Ablativo.

$$\theta(\eta,\xi,\tau) = J_1 I_1\hat{\tilde{\theta}}_{11}(\tau) + J_1\sum_{m=2}^{\infty} I_m\cos(\lambda_m x)\hat{\tilde{\theta}}_{1m}(\tau) + J_1 I_1\hat{\tilde{Z}}_{11}(\tau) + I_1\sum_{i=2}^{\infty} J_i\cos(\mu_i y)\hat{\tilde{Z}}_{i1}(\tau) + Q_1\frac{\eta^2}{2} - \frac{Q_2}{2l}\xi^2 \tag{4.40}$$

Concluído o período Pré-Ablativo, inicia-se a solução do **Período Ablativo** onde a condição inicial é obtida utilizando o potencial de temperatura obtido no Período Pré-Ablativo para $\tau = \tau_f$, onde τ_f corresponde ao tempo de início da fusão do material da proteção térmica. Define-se um potencial para homogeneizar as condições de contorno,

$$G^*(\eta,\xi,\tau) = \theta(\eta,\xi,\tau) - 1 \tag{4.41}$$

- ✓ **<u>Período Ablativo</u>**

Substituindo a Eq. (4.41) na Eq. (3.16) tem-se,

$$\frac{\partial G^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 G^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 Z^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi^2} + A(\eta,\xi)\frac{\partial G^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \eta} + \bar{B}(\eta,\tau)\frac{\partial G^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi} \tag{4.42}$$

com as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial G^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \eta} = 0 \;;\; \eta = 0 \;;\; 0 \le \xi \le l \tag{4.43a}$$

$$G^*(\eta,\xi,\tau) = 0 \;;\; \eta = \eta_b(\tau) \;;\; 0 \le \xi \le l \tag{4.43b}$$

$$\frac{\partial G^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi} = 0 \;;\; \xi = 0 \;;\; 0 \le \eta \le \eta_b(\tau) \tag{4.43c}$$

$$\frac{\partial G^*(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi} = -Q_2(\tau) \;;\; \xi = 0 \;;\; 0 \le \eta \le \eta_b(\tau) \tag{4.43d}$$

onde, $\eta_b(\tau) = 1 - \delta(\xi,\tau)$ (porção do material não ablatado) e com a seguinte condição inicial,

$$G^*(\eta,\xi,\tau) = \theta_{inicial}(\eta,\xi,\tau) - 1 \;;\; \tau = \tau_f \tag{4.44}$$

Para transformar no problema de autovalor a Eq. (4.42) na direção η , define-se um problema auxiliar de autovalor, como segue,

$$\frac{\partial^2 \phi_i(\eta,\xi,\tau)}{\partial \eta^2} + \lambda_i^2 \phi_i(\eta,\xi,\tau) = 0 \;;\; i=1,2,3,\ldots \tag{4.45}$$

com as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial \phi_i(\eta,\xi,\tau)}{\partial \eta} = 0 \quad ; \quad \eta = 0 \quad ; \; i=1,2,3, \ldots \tag{4.46a}$$

$$\phi_i(\eta,\xi,\tau) = 0 \quad ; \quad \eta = \eta_b(\tau) \quad ; \; i=1,2,3, \ldots \tag{4.46b}$$

Pela solução da Eq. (4.45), as autofunções (ϕ_i) e os autovalores (λ_i) são respectivamente,

$$\phi_i(\eta,\xi,\tau) = B_i \cos(\lambda_i \eta) \quad ; \; i=1,2,3, \ldots \tag{4.48}$$

$$\lambda_i = \frac{(2i-1)}{2\eta_b}\pi \quad ; \; i=1,2,3, \ldots \tag{4.47}$$

Definindo-se uma autofunção normalizada (K_i), tem-se

$$K_i(\eta,\xi,\tau) = \frac{\phi_i(\eta,\xi,\tau)}{N_i^{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta_b}} \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2\eta_b}\eta\right] \quad ; \; i=1,2,3, \ldots \tag{4.48}$$

Após algumas operações matemáticas utilizando as Eqs. (2.53) e (2.59), define-se o par Transformada Integral e Inversa,

$$\tilde{G}_i^*(\xi,\tau) = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,\xi,\tau) G^*(\eta,\xi,\tau) d\eta \quad ; \qquad \textbf{\textit{Transformada}} \tag{4.49}$$

$$G^*(\eta,\xi,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(\eta,\xi,\tau) \tilde{G}_i^*(\xi,\tau) \quad ; \qquad \textbf{\textit{Fórmula de Inversão}} \tag{4.50}$$

Logo, aplicando a definição obtemos a seguinte equação,

$$\frac{d\tilde{G}_i^*(\xi,\tau)}{d\tau} + \lambda^2 \tilde{G}_i^*(\xi,\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \tilde{G}_i^*(\xi,\tau) - \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \frac{\partial \tilde{G}_i^*(\xi,\tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \tilde{G}_i^*(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} = 0 ; \tag{4.51}$$

onde, *i=1,2,3, ...* .

As matrizes contendo os termos transformados são mostradas abaixo,

$$A_{ij} = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,\xi,\tau)\frac{\partial K_j(\eta,\xi,\tau)}{\partial \tau}d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,\xi,\tau)\frac{\partial^2 K_j(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi^2}d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,\xi,\tau)M(\eta,\xi)\frac{\partial K_j(\eta,\xi,\tau)}{\partial \eta}d\eta - \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,\xi,\tau)N(\eta,\xi)\frac{\partial K_j(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi}d\eta \tag{4.52}$$

$$B_{ij} = 2\int_0^{\eta_b} K_i(\eta,\xi,\tau)\frac{\partial K_j(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi}d\eta + \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,\xi,\tau)N(\eta,\xi)K_j(\eta,\xi,\tau)d\eta \tag{4.53}$$

com as condições de contorno transformadas,

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_{ij}\tilde{G}_i^*(\xi,\tau) + \frac{\partial \tilde{G}_i^*(\xi,\tau)}{\partial \xi} = 0 \quad ; \quad \xi = 0 \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.54}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{G}_i^*(\xi,\tau)C_{ij} + \frac{\partial \tilde{G}_i^*(\xi,\tau)}{\partial \xi} = f_i(\xi,\tau)Q_2(\tau) \quad ; \quad \xi = l \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.55}$$

onde,

$$C_{ij} = \int_0^{\eta_b} K_i(\eta,\xi,\tau)\frac{\partial K_j(\eta,\xi,\tau)}{\partial \xi}d\eta \quad ; \quad \begin{matrix} i = 1,2,3,\ldots \\ j = 1,2,3,\ldots \end{matrix} \tag{4.56}$$

$$f_i(y,\tau) = \frac{2\sqrt{2\eta_b}}{(2i-1)\pi}(-1)^{i+2} \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.57}$$

Para a transformada na direção ξ adota-se um novo problema auxiliar de autovalor,

$$\frac{\partial^2 \psi_i(\xi)}{\partial \xi^2} + \mu_i^2 \psi_i(\xi) = 0 \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.58}$$

com as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial \psi_i(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad ; \quad \xi = 0 \quad ; \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.59a}$$

$$\frac{\partial \psi_i(\xi)}{\partial \xi} = 0 \quad ; \quad \xi = l \quad i=1,2,3, \ldots \tag{4.59b}$$

A solução do problema auxiliar de autovalores fornece as expressões para o cálculo das autofunções (ψ_k) e dos autovalores (μ_k),

$$\psi_k(\xi) = \cos\left[\frac{(k-1)\pi}{l}\xi\right] \quad ; \quad k=1,2,3, \ldots \tag{4.60}$$

$$\mu_K = \frac{(k-1)}{l}\pi \quad ; \quad k=1,2,3, \ldots \tag{4.61}$$

Define-se uma autofunção normalizada (E_k) da seguinte forma,

$$E_k(\xi) = \frac{\psi_k(\xi)}{N_k^{1/2}} \quad ; \quad k=1,2,3, \ldots \tag{4.62}$$

Realizando o mesmo procedimento anterior, Eq. (4.42), transformando a Eq. (4.51) é possível definir o par Transformada Integral e Inversa,

$$\hat{\tilde{G}}_{ik}^{\,*}(\tau) = \int_0^l \tilde{G}_i^{\,*}(\xi,\tau) E_k(\xi) d\xi \quad ; \qquad \textbf{\textit{Transformada}} \tag{4.63}$$

$$\tilde{G}_i^{\,*}(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{N} E_k(\xi) \hat{\tilde{G}}_{ik}^{\,*}(\tau) \quad ; \qquad \textbf{\textit{Fórmula de Inversão}} \tag{4.64}$$

Utilizando a definição da TTIG, (COTTA, 1993), substituindo a Eq. (4.63) na Eq. (4.42) obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias.

$$\frac{d\hat{\tilde{G}}_{ik}^{\,*}(\tau)}{d\tau}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}P_{ijkm}\hat{\tilde{G}}_{ik}^{\,*}(\tau)=\hat{\tilde{\Theta}}_{ik}\quad ;\quad \begin{matrix} i=1,2,3,... \\ k=1,2,3,... \end{matrix} \tag{4.65}$$

onde,

$$\begin{aligned} P_{ijkm} &= \delta_{ij}\delta_{km}\mu_k{}^2+\int_0^l\left[A_{ij}E_k(\xi)E_m(\xi)-B_{ij}E_k(\xi)\frac{\partial E_m(\xi)}{\partial\xi}\right]d\xi+ \\ &\delta_{ij}\int_0^l\lambda_i{}^2(\xi,\tau)E_k(\xi)E_m(\xi)d\xi+C_{ij}(l,\tau)E_k(l)E_m(l)-C_{ij}(0,\tau)E_k(0)E_m(0) \end{aligned} \tag{4.66}$$

O termo fonte da Eq. (4.65) é definido como,

$$\hat{\tilde{\Theta}}_{ik}=E_k(l)f_i(l,\tau)Q_2(\tau)\quad ;\quad i,k=1,2,3,\ ... \tag{4.67}$$

A equação de balanço da energia na fronteira na forma transformada, é do tipo,

$$\begin{aligned} &\nu\left(l-\frac{Q_2}{Q_1}\frac{l}{2}\right)\frac{d\xi}{d\tau}-\nu\xi\left(\frac{Q_1\dot{Q}_2-Q_2\dot{Q}_1}{Q_1{}^2}\right)\frac{l}{2}=Q_1l+ \\ &\left[1+\left(\frac{\xi}{l}\frac{Q_2}{Q_1}\right)^2\right]\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(2i-1)\Psi\pi\frac{1}{\sqrt{l}}(-1)^{i+2}\hat{\tilde{\theta}}_{ik}^{\,*}(\tau)\int_0^l\frac{1}{\eta_b{}^{3/2}}\cos\left[\frac{(k-1)\pi}{l}y\right]d\xi \end{aligned} \tag{4.68}$$

o termo Ψ é representado pela seguinte expressão,

$$\Psi=\frac{6\eta_b(\tau)Q_1(\tau)Q_2(\tau)l}{15\eta_b^2(\tau)Q_2^2(\tau)+4Q_1^2(\tau)(k-1)^2\pi^2} \tag{4.69}$$

onde, ν é o inverso do número de Stefan.

O sistema representado pelas equações, Eq. (4.65) e Eq. (4.68), pode ser resolvido numericamente, após o truncamento do sistema para uma ordem finita suficientemente grande N.

Com a solução das Eqs. (4.65) e (4.68) é possível obter os valores das incógnitas, profundidade de material da proteção térmica não ablatado, $\eta_b(\tau)$, bem como da velocidade de ablação do material, $v(\tau)=\dfrac{d\eta_b(\tau)}{d\tau}$. A solução numérica está acoplada à reentrada do veículo espacial na atmosfera terrestre, cujos valores são associados aos cálculos de $\eta_b(\tau)$ e $v(\tau)=\dfrac{d\eta_b(\tau)}{d\tau}$ ao longo da trajetória de reentrada.

4.2 Simplificação do Modelo Matemático para o Caso do Corpo de Revolução Unidimensional

O problema de transferência de calor unidimensional agora é abordado de forma simplificada. Da mesma forma que foi apresentada no item 4.1, para o caso bidimensional, o corpo de revolução (*corpo rombudo*) está sujeito a um fluxo de calo transiente, representados pelas teorias de Tauber e Van Driest, na superfície externa.

O fluxo de calor tem a direção da coordenada adimensional η, perpendicular à superfície do corpo. A parte interna do corpo, "*Subestrutura*", está isolado do processo de aquecimento aerodinâmico provocado pelo atrito do ar atmosférico com a superfície do veículo espacial, nesse caso representado pela geometria da Fig. 4.1.

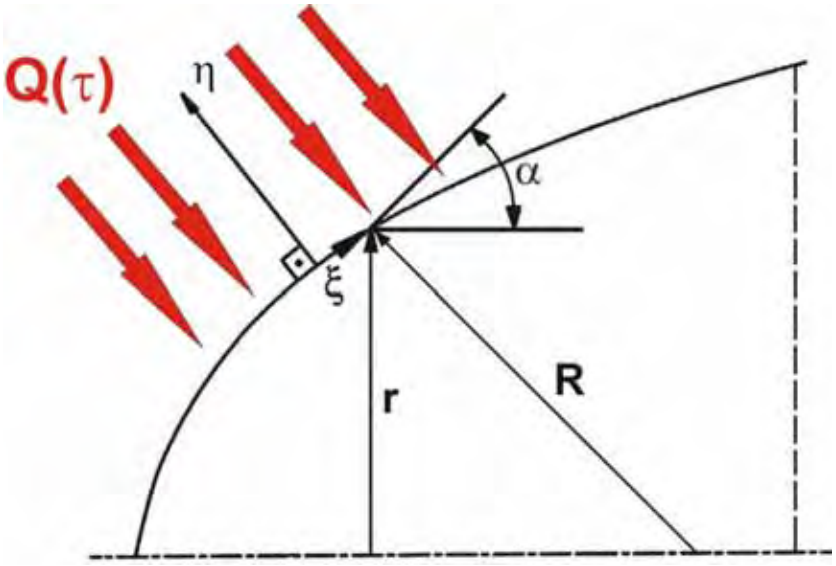


Figura 4.1 – Aquecimento aerodinâmicosobre veículo espacial,
com forma geométrica de revolução – corpo rombudo.

No presente trabalho considerou-se constante as propriedades físicas do material de proteção térmica, onde a temperatura inicial da superfície externa do veículo é conhecida (T_0), r é o raio da região rombuda, R é o raio de curvatura da geratriz de revolução e α representa o ângulo da tangente à superfície com o eixo do corpo.

A seguir será apresentada a formulação matemática abrangendo a aplicação da TTIG no caso unidimensional mostrado na Fig. 4.1.

✓ **<u>Período Pré-Ablativo</u>**

O problema de condução de calor devido ao aquecimento aerodinâmico é governado pela seguinte equação,

$$\frac{\partial \Phi(\eta,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Phi(\eta,\tau)}{\partial \eta^2} + \left(\frac{R}{1+R\eta} \frac{\cos\alpha}{R+\eta\cos\alpha} \right) \frac{\partial \Phi(\eta,\tau)}{\partial \eta} \tag{4.70}$$

Sujeito à seguinte condição inicial,

$$\Phi(\eta,\tau) = 0 \;\; ; \;\; \tau = 0 \;\; ; \;\; 0 < \eta < 1 \tag{4.71}$$

com as seguintes condições de contorno,

$$\left.\frac{\partial\Phi(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = 0 \quad ; \quad \tau > 0 \tag{4.72}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right|_{\eta=1} = Q(\tau) \quad ; \quad \tau > 0 \tag{4.73}$$

Considerando que $\Phi(\eta,\tau)$ seja o potencial de temperatura adimensional, define-se uma homogeneização das condições de contorno da seguinte forma,

$$\bar{\Phi}(\zeta,\tau) = \bar{\Phi}(\eta,\tau) - \frac{\eta^2}{2}Q(\tau) \tag{4.74}$$

A equação governante, bem como suas condições de contorno e inicial, para o Período Pré-Ablativo nas variáveis adimensionais, são mostradas abaixo.

$$\frac{\partial\bar{\Phi}(\eta,\tau)}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\bar{\Phi}(\eta,\tau)}{\partial\eta^2} + I(\eta)\frac{\partial\bar{\Phi}(\eta,\tau)}{\partial\eta} + II(\eta,\tau) \tag{4.75}$$

onde,

$$II(\eta,\tau) = \left[1+\eta I(\eta)\right]Q(\tau) - \frac{\eta^2}{2}\dot{Q}(\tau) \tag{4.76}$$

$$I(\eta) = \left[\frac{R}{1+R\eta} + \frac{\cos\alpha}{r+\eta\cos\alpha}\right] \tag{4.77}$$

O problema tem a seguinte condição inicial,

$$\bar{\Phi}(\eta,\tau) = -\frac{\eta^2}{2}Q(\eta) \quad ; \quad \tau = 0 \quad ; \quad 0 \le \eta \le 1 \tag{4.78}$$

Com as respectivas condições do contorno,

$$\left.\frac{\partial\bar{\Phi}(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=0 \quad ; \quad \tau>0 \tag{4.79}$$

$$\left.\frac{\partial\bar{\Phi}(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right|_{\eta=1}=0 \quad ; \quad \tau>0 \tag{4.80}$$

Através da definição imposta pela TTIG, (COTTA, 1993), define-se o seguinte problema auxiliar de autovalor,

$$L\bar{\psi}_i(\eta)=\bar{\mu}_i^2\bar{\psi}_i(\eta) \quad ; \quad i=1,2,3\ldots \tag{4.81}$$

com as seguintes condições de contorno,

$$\left.\frac{\partial\bar{\psi}(\eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=0 \tag{4.82}$$

$$\left.\frac{\partial\bar{\psi}(\eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=1}=0 \tag{4.83}$$

onde, $\bar{\psi}(\eta)$ são as autofunções e $\bar{\mu}$ são os autovalores.

A solução da Eq. (4.81) com as condições de contorno Eqs. (4.82) e (4.83) é apresentada abaixo,

$$\bar{\psi}_i=\cos(\bar{\mu}_i\eta) \quad ; \quad i=1,2,3\ldots \tag{4.84}$$

$$\bar{\mu}_i=i\pi \quad ; \quad i=1,2,3\ldots \tag{4.85}$$

Com a seguinte norma das autofunções,

$$\bar{N}_i=\int_0^1\bar{\psi}_i^2(\eta)\,d\eta \quad ; \quad i=1,2,3\ldots \tag{4.86}$$

onde, $L = -\partial^2(\ )/\partial\eta^2$.

Defini-se o par Transformada Integral e Inversa,

$$\tilde{\bar{\Phi}}(\tau) = \int_0^1 \bar{\psi}_i(\eta)\bar{\Phi}(\eta,\tau)d\eta \quad ; \qquad \textbf{\textit{Transformada}} \tag{4.87}$$

$$\bar{\Phi}(\eta,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{\psi}_i(\zeta)}{\bar{N}_i}\tilde{\bar{\Phi}}_i(\tau) \quad ; \qquad \textbf{\textit{Fórmula de Inversão}} \tag{4.88}$$

Substituindo a Eq. (4.87) na Eq. (4.75) obtém-se o sistema de equações diferenciais ordinárias. Esse sistema representa a condição que deverá ser resolvido para se obter o perfil de temperatura do Período Pré-Ablativo.

$$\frac{\partial\tilde{\bar{\Phi}}_i(\tau)}{\partial\tau} + \mu_i^2\tilde{\bar{\Phi}}_i(\tau) + \bar{g}_i(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty}\tilde{\bar{\Phi}}_j(\tau)A_{ij}(\tau) + \int_0^1 \bar{\psi}_i(\eta)\,II(\eta,\tau)\,d\eta \quad ; \; i=1,2,3\ldots \tag{4.89}$$

onde,

$$\bar{g}_i(\tau) = \int_0^1 \left[\bar{\Phi}(\eta,\tau)L\bar{\psi}_i(\eta) - \bar{\psi}_i(\eta)L\bar{\Phi}(\eta,\tau)\right]d\eta \tag{4.90}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{\bar{N}_j}\int_0^1 I(\eta)\bar{\psi}_i(\eta)\frac{d\bar{\psi}_j(\eta)}{d(\eta)}d\eta \tag{4.91}$$

Substituindo a Eq. (4.87) na Eq. (4.78), resulta em,

$$\tilde{\bar{\Phi}}_i(0) = -\frac{Q(0)}{2}\int_0^1 \eta^2\bar{\psi}_i(\eta)d\eta \tag{4.92}$$

Conforme mencionado anteriormente, resolvendo a Eq. (4.89) obtém-se o perfil de temperatura do Período Pré-Ablativo, como segue,

$$\Phi(\eta,\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\bar{\psi}_i(\eta)}{\bar{N}_i}\tilde{\bar{\Phi}}_i+\frac{\zeta^2}{2}Q(\tau)+\Phi_{av}(\tau) \tag{4.93}$$

O termo Φ_{av} mostrado na Eq. (4.93) é o potencial de temperatura médio, definido por Mikhailov e Özisik, (1984).

Com o perfil de temperatura do Período Pré-Ablativo determinado, inicia-se a solução do Período Ablativo. A partir dessa fase o material já atingiu a temperatura de ablação, tornando possível a determinação da posição do contorno em movimento *δ(τ)*, do material não ablatado, bem como a velocidade de ablação *V(τ)* do material da proteção térmica durante o processo de reentrada. A determinação da velocidade de ablação depende da equação que é obtida diretamente do balanço de energia na fronteira do corpo, conforme apresentado no Apêndice A.

O perfil de temperatura inicial do período ablativo é igual ao perfil de temperatura do período pré-ablativo, quando for atingido o tempo de início da ablação do material da proteção térmica, ou seja, $\Phi_{PA}(\eta,\tau)=\Phi_{PPA}(\eta,\tau)$, $\tau=\tau_f$.

- ✓ **<u>Período Ablativo</u>**

Define-se a seguinte homogeneização das condições de contorno,

$$\hat{\Phi}(\eta,\tau)=\Phi(\eta,\tau)-1 \tag{4.94}$$

Associando a variável de homogeneização à posição da fronteira, em relação à porção não ablatada de material da proteção térmica, tem-se,

$$\delta(\tau)=1-\bar{\eta}_f \quad ; \quad \tau>\tau_f \tag{4.95}$$

onde, $\overline{\eta}_f(\tau)$ representa a posição da fronteira sob o processo ablativo.

Substituindo a Eq. (4.95) na Eq. (4.70), tem-se

$$\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\tau}(\eta,\tau)=\frac{\partial^2\hat{\Phi}}{\partial\eta^2}(\eta,\tau)+\left[\frac{R}{1+R\eta}+\frac{\cos\alpha}{r+\eta\cos\alpha}\right]\frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\tau}(\eta,\tau)\ \ ;\ \ \tau>\tau_f\ \ ;\ \ 0<\eta<\overline{\eta}_f(\tau) \tag{4.96}$$

O problema tem a seguinte condição inicial,

$$\hat{\Phi}(\eta,\tau)=\Phi(\eta,\tau)-1\ \ ;\ \ \tau=\tau_f \tag{4.97}$$

Com as respectivas condições de contorno,

$$\frac{\partial\hat{\Phi}(\eta,\tau)}{\partial\eta}=0\ \ ;\ \ \eta=0 \tag{4.98}$$

$$\hat{\Phi}(\eta,\tau)=0\ \ ;\ \ \eta=\delta(\tau) \tag{4.99}$$

A equação de balanço da energia na fronteira passa a assumir a condição para o cálculo da velocidade ablativa ao longo da trajetória de reentrada, como apresentado no Apêndice A, a equação é do tipo,

$$\frac{\partial\hat{\Phi}(\eta,\tau)}{\partial\eta}-\nu\frac{d\delta(\tau)}{d\tau}=Q(\tau) \tag{4.100}$$

onde ν é o inverso do número de Stefan.

Através da definição imposta pela TTIG, (COTTA, 1993), define-se o seguinte problema auxiliar de autovalor,

$$L\bar{\omega}_i(\eta,\tau) = \bar{\varepsilon}_i\bar{\omega}_i(\eta,\tau) \tag{4.101}$$

com as seguintes condições de contorno,

$$\left.\frac{\partial\bar{\omega}(\eta,\tau)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = 0 \tag{4.102}$$

$$\bar{\omega}(\eta,\tau)\big|_{\eta=\delta(\tau)} = 0 \tag{4.103}$$

onde $\bar{\omega}$ são as autofunções e $\bar{\varepsilon}$ são os autovalores.

A solução da Eq. (4.101) com as condições de contorno Eqs. (4.102) e (4.103) é apresentada abaixo,

$$\bar{\omega}(\eta,\tau) = \cos\left(\bar{\varepsilon}_i(\tau)\eta\right) \;\; ; \;\; i=1,2,3,\ldots \tag{4.104}$$

$$\bar{\varepsilon}_i(\tau) = \frac{(2i-1)\pi}{2\delta(\tau)} \;\; ; \;\; i=1,2,3,\ldots \tag{4.105}$$

Com a seguinte norma das autofunções,

$$\bar{M}_i(\tau) = \int_0^{\delta(\tau)} \cos^2\left[\bar{\varepsilon}_i(\tau)\eta\right] d\eta \;\; ; \;\; i=1,2,3,\ldots \tag{4.106}$$

Define-se uma autofunção normalizada do tipo,

$$\bar{K}_i(\eta,\tau)=\frac{\bar{\omega}_i(\eta,\tau)}{\left[\bar{M}_i(\tau)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad ;\ i=1,2,3,\ldots \tag{4.107}$$

Defini-se o par Transformada Integral e Inversa,

$$\tilde{\bar{\Phi}}(\tau)=\int_0^{\delta(\tau)}\bar{K}_i(\eta,\tau)\hat{\Phi}(\eta,\tau)\,d\eta \quad ; \qquad \textbf{\textit{Transformada}} \tag{4.108}$$

$$\hat{\Phi}(\eta,\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\bar{K}_i(\eta,\tau)\tilde{\bar{\Phi}}(\tau) \quad ; \qquad \textbf{\textit{Fórmula de Inversão}} \tag{4.109}$$

Utilizando a definição da TTIG, (COTTA, 1993), substituindo a Eq. (4.108) na Eq. (4.96) obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias.

$$\frac{d\tilde{\bar{\Phi}}_i(\tau)}{d\tau}+\bar{\varepsilon}_i^2\tilde{\bar{\Phi}}_i(\tau)\sum_{j=1}^{\infty}A_{ij}(\tau)\tilde{\bar{\Phi}}_j(\tau)=0 \quad ;\ i=1,2,3,\ldots \tag{4.110}$$

onde,

$$A_{ij}(\tau)=\int_0^{\delta(\tau)}\bar{K}_i(\eta,\tau)\left[\frac{d\bar{K}_j(\eta,\tau)}{d\tau}-I(\eta)\frac{d\bar{K}_j(\eta,\tau)}{d\eta}\right]d\eta \quad ;\ i,j=1,2,3,\ldots \tag{4.112}$$

A Eq. (4.112) é desenvolvida da seguinte forma;

- Para $i\neq j$, tem-se,

$$A_{ij}(\tau)=\hat{B}_{ij}(\tau)+\frac{2\Omega_i}{\delta(\tau)}\int_0^{\delta(\tau)}I(\eta)sen\left(\Omega_j\eta\right)\cos\left(\Omega_i\eta\right)d\eta \quad ;\ i,j=1,2,3,\ldots \tag{4.113}$$

onde, os termos Ω_i e Ω_j para $i \neq j$ são representados pelos seguintes termos,

$$\Omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{\delta(\tau)} \tag{4.114}$$

$$\Omega_j = \frac{(2j-1)\pi}{\delta(\tau)} \tag{4.115}$$

a matriz $\hat{B}_{ij}(\tau)$ para $i \neq j$ é representada por,

$$\hat{B}_{ij}(\tau) = \frac{1}{2\delta(\tau)} \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} \frac{(2j-1)(2i-1)(-1)^{i+1}}{\left(i^2-i\right)-\left(j^2-j\right)} \tag{4.116}$$

onde, *i,j=1,2,3, ...* .

- Para ***i=j***, tem-se,

$$A_{ii}(\tau) = \hat{B}_{ii}(\tau) + \frac{2(2i-1)}{\delta^2(\tau)} \int_0^{\delta(\tau)} I(\eta) sen(\Omega_j \eta) \cos(\Omega_i \eta)\, d\eta \tag{4.117}$$

a matriz $\hat{B}_{ij}(\tau)$ para $i=j$ é representada por,

$$\hat{B}_{ii}(\tau) = -\frac{1}{\delta(\tau)} \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} \tag{4.118}$$

onde, os termos Ω_i e Ω_j para $i=j$ são representados pelos seguintes termos,

$$\Omega_j = \Omega_i \tag{4.119}$$

onde, *i,j=1,2,3, ...* .

Substituindo a Eq. (4.108) na Eq.(4.96) e na Eqs.(4.97), obtém-se a condição inicial na forma transformada para a Eq. (4.110), da forma,

$$\tilde{\hat{\Phi}}_i\left(\tau_f\right) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left\{\frac{(-1)^{i+1}}{(2j-1)}\left[(\theta_{av}(\tau_f)-1)+\frac{Q(\tau_f)}{2}\left(1-\frac{8}{(2i-1)^2}\right)\right]\right\}+ \frac{(2i-1)(-1)^{i+1}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\hat{\Phi}}_k\left(\tau\right)\frac{(-1)^k}{(2i-1)^2-4k^2} \quad ; \tag{4.120}$$

com, *i,j=1,2,3, ...* .

Conforme mencionado anteriormente a equação de balanço da energia na fronteira, Eq. (4.100), representa a velocidade ablativa na fronteira. Substituindo a Eq. (4.109) nas condições de contorno, Eq. (4.72) e Eq. (4.73), tem-se a equação para a velocidade ablativa na forma transformada, como segue,

$$\frac{d\delta(\tau)}{d\tau} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2\upsilon}\left[\frac{1}{\delta(\tau)}\right]^{3/2}\sum_{i=1}^{\infty}(2i-1)\tilde{\hat{\Phi}}_i(\tau)(-1)^i - \frac{Q(\tau)}{\upsilon} \tag{4.121}$$

O sistema representado pelas equações, Eq. (4.110), Eq. (4.120) e Eq. (4.121), pode ser resolvido numericamente, após o truncamento do sistema para uma ordem finita suficientemente grande N.

Com isso é possível obter os valores das incógnitas, profundidade de material da proteção térmica não ablatado, $\delta(\tau)$, bem como da velocidade de ablação do material, $v(\tau) = {d\delta(\tau)}/{d\tau}$. A solução numérica está acoplada à reentrada do veículo espacial na

atmosfera terrestre, cujos valores são associados aos cálculos de $\delta(\tau)$ e $v(\tau) = {d\delta(\tau)}/{d\tau}$ ao longo da trajetória de reentrada.

5 Resultados

Nesse capítulo serão apresentados os resultados, nas variáveis adimensionais, para o Período Pré-Ablativo e Ablativo, considerando a abordagem simplificada no corpo de revolução unidimensional, mediante o intenso aquecimento cinético, simulado pelos fluxos de calor prescritos, considerando a metodologia simplificada de Tauber e o método de Van Driest, (1956).

5.1 Parâmetros Computacionais do Modelo de Solução Numérica

Para realizar os cálculos envolvendo o caso de reentrada na atmosfera, considerando como geometria do veículo espacial um corpo de revolução, foram adotadas as seguintes características geométricas e físicas para o problema,

$r \rightarrow 0.276m$ (Raio do nariz da parte rombuda do corpo de revolução);

$y_b \rightarrow 0.15m$ (Espessura da proteção térmica do corpo de revolução);

$\alpha \rightarrow 87°$ (Ângulo de inclinação da parte adjacente ao nariz da região rombuda);

$V_0 \rightarrow 7860m/s$ (Velocidade inicial do corpo – Início da trajetória).

Os valores para as propriedades físicas dos materiais de proteção térmica, utilizados na simulação do presente trabalho, são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Propriedades físicas para os materiais de proteção térmica.

Material de Proteção Térmica	k ($W/m^2.K$)	Cp (J/kg.K)	Densidade (kg/m^2)	Calor de Ablação (J/kg)	Temperatura de Ablação (°C)
Cortiça	0.084	1971.8	480.0	3×10^6	260.0
Fibra de Vidro	0.6	1680.0	2080.0	5.8×10^6	1000.0
Resina Quartzo-Fenólica	0.485	1256.0	1730.0	0.78×10^6	538.0

A solução numérica completa do caso de reentrada na atmosfera, envolvendo o cálculo da trajetória de reentrada acoplada ao cálculo do fluxo de calor, temperaturas, posição do contorno e velocidade ablativa, uma solução envolvendo 50 termos na série de expansão e

uma tolerância relativa da ordem de 10^{-6}, utilizado no critério de convergência pela TTIG. Nessas condições o cálculo numérico é realizado num tempo médio de dez minutos, considerando que existe uma margem de diferença entre um caso e outro. O sistema operacional utilizado para realizar os cálculos é o Windows XP©, em um computador AMD Athlon© 64 X2, 2,0 GHz, 1GB RAM.

5.2 Trajetória de Reentrada

Ao se efetuar os cálculos da trajetória de reentrada acoplados aos cálculos do aquecimento aerodinâmico, considerando o ***Modelo de Reentrada Vertical sem Sustentação***, a seguinte trajetória foi considerada para os cálculos das propriedades do ar atmosférico (escoamento livre), como função da altitude e do tempo de queda do corpo pela atmosfera a partir da altitude de 300 km, onde é considerada uma região de ar rarefeito, até atingir a região mais densa da atmosfera, onde será evidenciada a região de maior aquecimento cinético na superfície do veículo espacial.

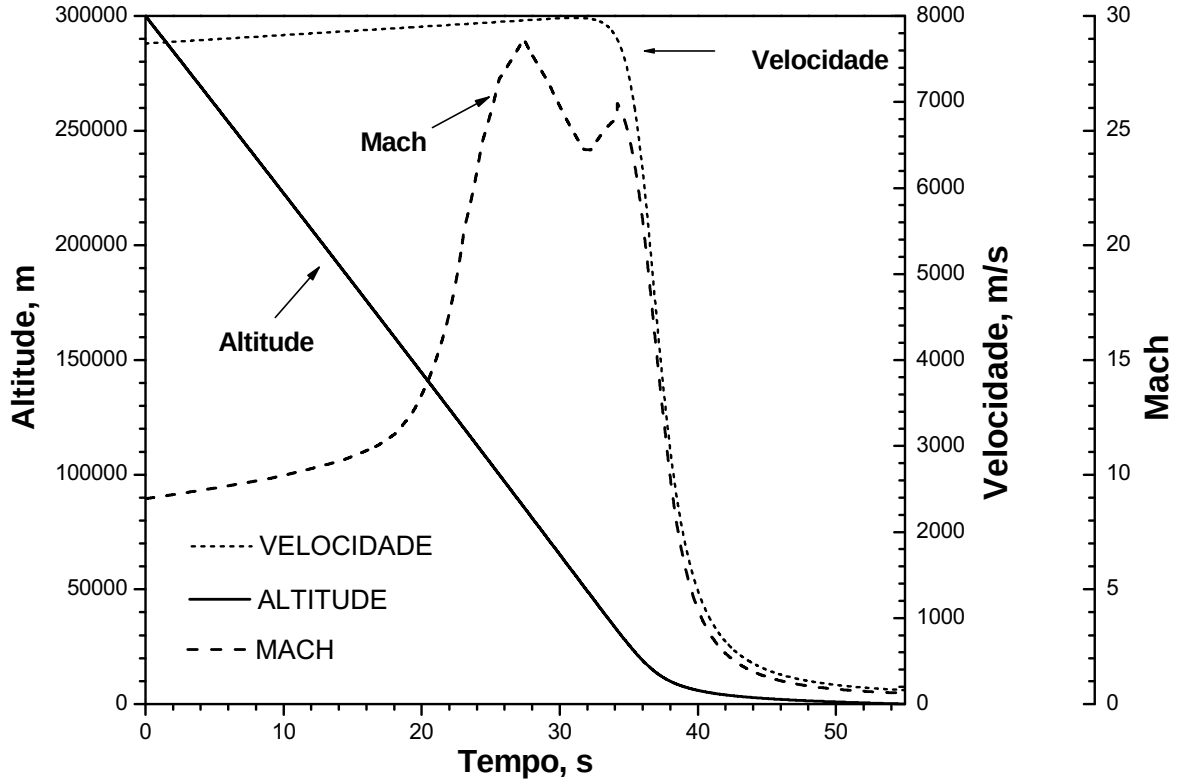


Figura 5.1 – Trajetória de Reentrada considerando o *Modelo de Reentrada Vertical sem Sustentação.*

O aquecimento aerodinâmico provocado pelo atrito do ar atmosférico com a superfície do veículo, foi simulado conjuntamente com o cálculo da trajetória.

Conforme mencionado nos capítulos anteriores, duas metodologias de cálculo para o fluxo de calor incidente na superfície do corpo de revolução foram abordadas, o Método Simplificado de Tauber e o Método de Van Driest, ambos no ponto de estagnação do corpo de revolução.

Foram calculados os fluxos de calor para os três materiais de proteção térmica, Cortiça, Fibra de Vidro e Resina Quartzo-Fenólica, considerando que o ar atmosférico esteja na condição de gás caloricamente perfeito, cujos resultados podem ser vistos a seguir.

A Fig. 5.2 mostra os resultados para o fluxo de calor no ponto de estagnação, para o Material Ablativo Cortiça, onde é possível observar uma comparação entre as metodologias de cálculo para o fluxo de calor, abordadas no presente trabalho.

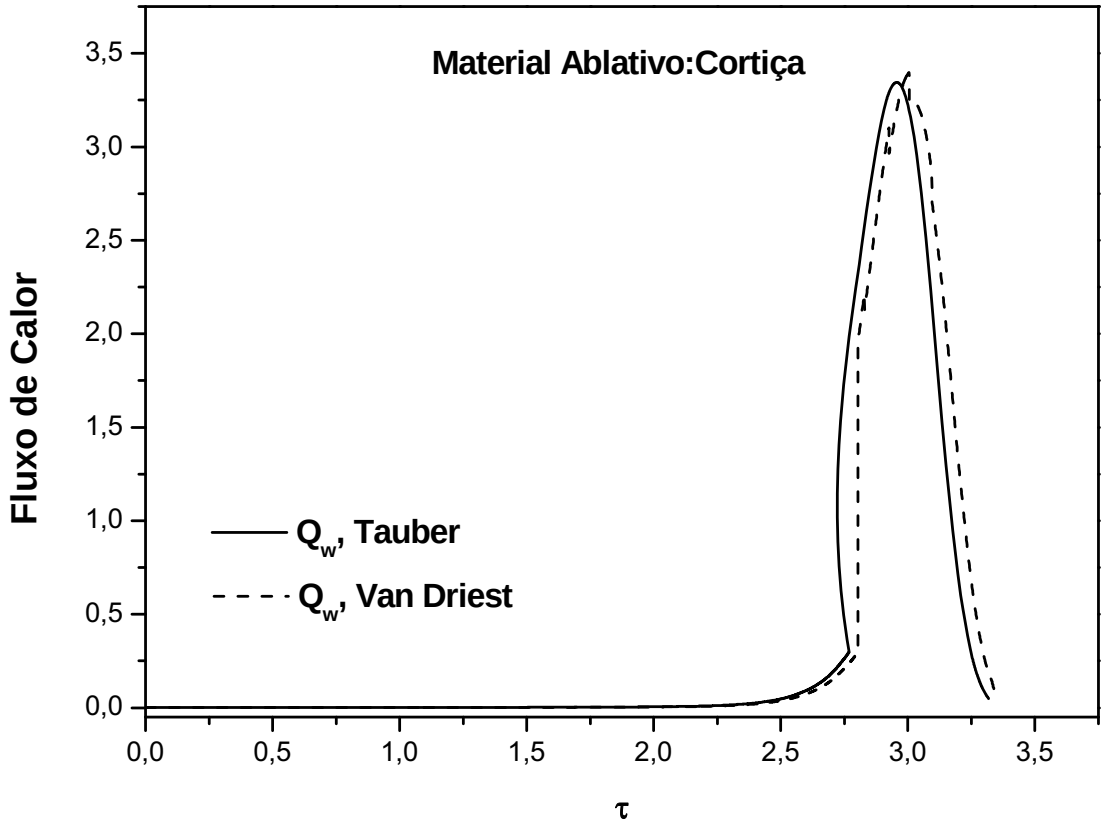


Figura 5.2 – Análise comparativa do fluxo de calor no ponto de estagnação, entre a metodologia simplificada de Tauber e o Método de Van Driest.

A Fig. 5.3 mostra os resultados para o fluxo de calor no ponto de estagnação, para o Material Ablativo Fibra de Vidro.

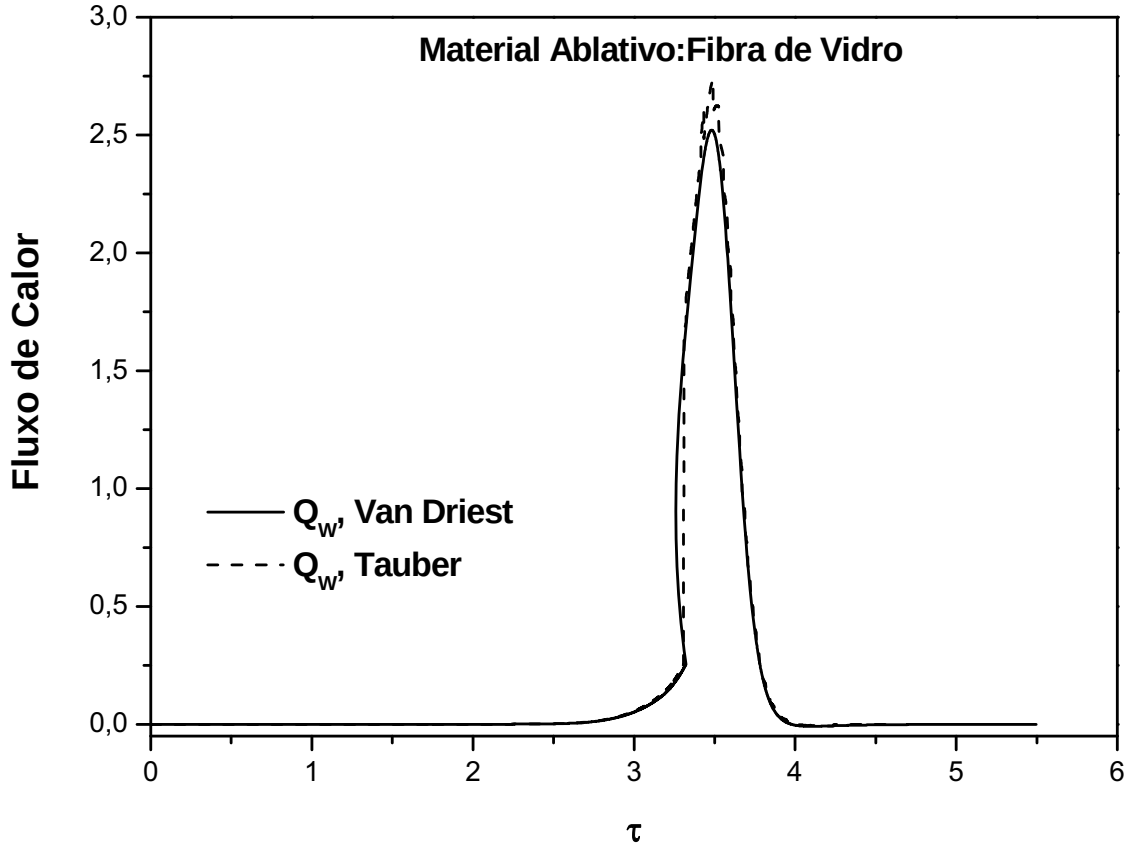


Figura 5.3 – Análise comparativa do fluxo de calor no ponto de estagnação, entre a metodologia simplificada de Tauber e o Método de Van Driest.

A Fig. 5.4 mostra os resultados para o fluxo de calor no ponto de estagnação, para o Material Ablativo Resina Quartzo-Fenólica.

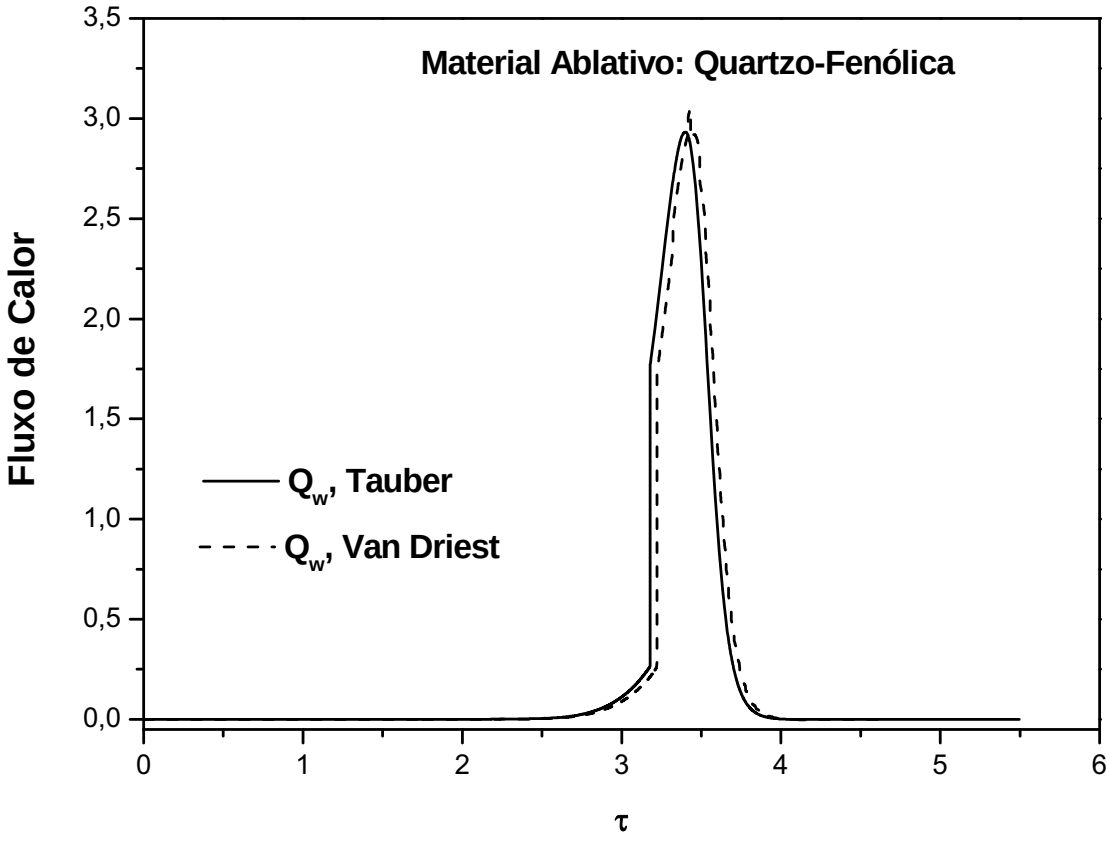


Figura 5.4 – Análise comparativa do fluxo de calor no ponto de estagnação, entre a metodologia simplificada de Tauber e o Método de Van Driest.

As Figuras (5.2), (5.3) e (5.4) mostram o comportamento do fluxo de calor no ponto de estagnação do corpo de revolução. Para o cálculo do fluxo de calor considerou-se o modelo de gás caloricamente perfeito para o ar atmosférico.

É possível observar no cálculo do fluxo de calor, para os materiais de proteção térmica Cortiça e Resina Quartzo-Fenólica, que para o método simplificado de Tauber, os materiais atingem o valor máximo para o fluxo de calor, num tempo menor que o obtido com o método de Van Driest. Tais resultados conferem com as literaturas, (MAYALL; COTTA, 2004) e (TORO, 1997).

Na Fig 5.3 é possível observar que o cálculo do fluxo de calor pelo Método Simplificado de Tauber, apresenta um valor próximo a 2,74; enquanto que valor obtido pelo Método de Van Driest está próximo de 2,5. Tais valores comprovam que o método simplificado de Tauber, não considera a mudança de velocidade através da onda de choque normal. Pelo método de Van Driest, a variação da velocidade através da onda de choque

normal pode evidenciada pelo termo du_e/ds. Por essa característica teórica o Método Simplificado de Tauber é considerado um método mais conservativo, do ponto de vista de cálculo por métodos de engenharia.

Em relação à variação de velocidade através da onda de choque normal, o Método de Van Driest considera o número de Prandtl (*Pr*), o qual representada uma fundamental relação entre as velocidades antes e após a onde de choque normal, (GRANGER, 1995). Tal relação não é considerada no Método Simplificado de Tauber, justificando, Figuras 5.2, 5,3 e 5.4, a presença de uma defasagem entre os valores de fluxo de calor. O valor do fluxo de calor é superior para o mesmo material de proteção térmica, no cálculo pelo Método Simplificado de Tauber, devido à ausência dos termos du_e/ds e *Pr* nas relações para o cálculo do fluxo de calor. Tais condições estão em concordância com outros resultados de cálculos de fluxo de calor por métodos de engenharia como os apresentados por Mayall e Cotta (2004) e Toro (1997).

5.3 Resultados para a Convergência do Perfil de Temperatura do Período Pré-Ablativo

Devido à metodologia numérica adotada para solução do presente trabalho, a temperatura foi adimensionlizada de tal forma que ao atingir o valor unitário, inicia-se a fase ablativa. Na qual o material de proteção térmica estará sujeito ao intenso aquecimento aerodinâmico, provocado pelo atrito entre o ar atmosférico e a superfície do veículo, iniciando a ablação do material da proteção térmica. Para efetuar os cálculos são necessários os valores apresentados no início desse capítulo, bem como dos valores apresentados na Tabela 3.

A Fig. 5.5 apresenta os valores comparativos para o perfil de temperatura, em função do tempo de reentrada na atmosfera, entre os três materiais de proteção térmica considerando o Método Simplificado de Tauber.

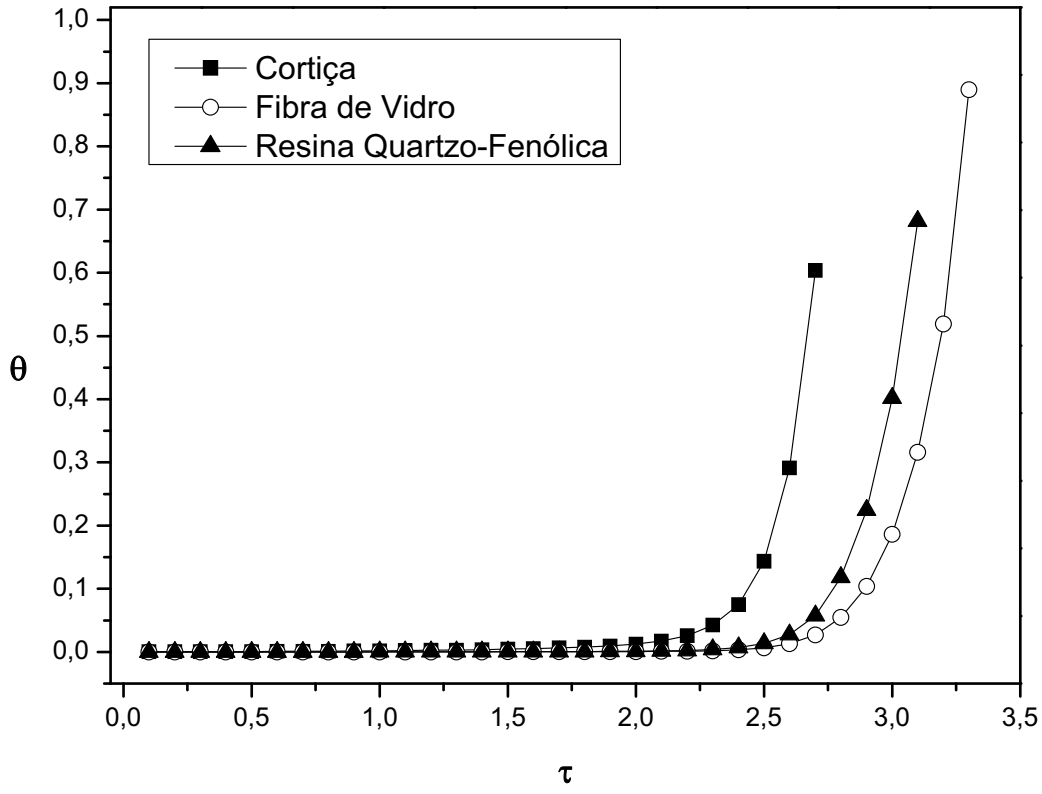


Figura 5.5 – Perfil de Temperatura comparativa entre os materiais de proteção térmica, para o Período Pré-Ablativo. Método de Tauber.

A Fig. 5.6 apresenta os valores comparativos para o perfil de temperatura, em função do tempo de reentrada na atmosfera, entre os três materiais de proteção térmica considerando o Método de Van Driest.

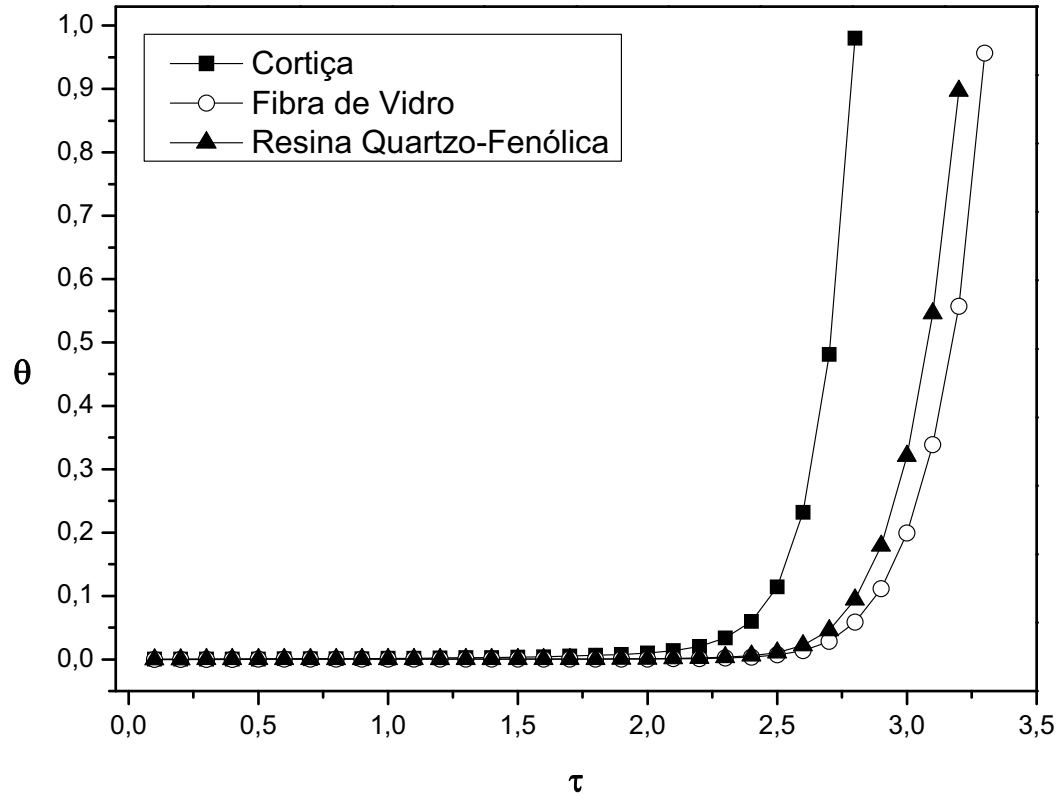


Figura 5.6 – Perfil de Temperatura comparativa entre os materiais ablativos para o Período Pré-Ablativo. Método de Van Driest.

Como pode ser visto nas Figuras 5.5 e 5.6 é possível identificar o tempo de início da ablação do material de proteção térmica, ao longo do tempo de reentrada na atmosfera do veículo espacial.

Os tempos de início do fenômeno ablativo para cada material da proteção térmica, considerando o Método Simplificado de Tauber são: $\tau_f = 2,7695$ para a Cortiça, $\tau_f = 3,1783$ para a Resina Quartzo-Fenólica e $\tau_f = 3,3215$ para a Fibra de Vidro.

Considerando o Método de Van Driest, os tempos de início do fenômeno ablativo para cada material da proteção térmica são: $\tau_f = 2,8031$ para a Cortiça, $\tau_f = 3,2212$ para a Resina Quartzo-Fenólica e $\tau_f = 3,3081$ para a Fibra de Vidro.

Os resultados para tempo correspondente ao início do processo ablativo, observados nas Figuras 5.5 e 5.6, são justificados pela temperatura de ablação e pelo calor específico a pressão constante de cada material, ou seja, é possível destacar que a convergência da distribuição de temperatura, para o Período Pré-Ablativo, segue a seguinte relação entre os

tempos de início do processo ablativo: $\tau_{f_{Cortiça}} < \tau_{f_{Quartzo-Fenólica}} < \tau_{f_{Fibra\,de\,Vidro}}$. O mesmo processo de convergência é observado nos cálculos do fluxo de calor através do Método de Van Driest.

5.4 Resultados para o Perfil de Temperatura para Diferentes Tempos

A seguir serão apresentados os resultados para a distribuição de temperatura do Período Ablativo, onde é possível observar a convergência do método numérico ao se utilizar N=50 termos, na expansão da série que representa a temperatura do Período Ablativo.

5.4.1 Resultados para o Perfil de Temperatura para Método Simplificado de Tauber

As Figuras 5.7, 5.8 e 5.9 mostram a distribuição de temperatura ***(θ)*** do **Período Ablativo**, ao longo da espessura da proteção térmica ***(η)***, para os materiais de proteção térmica: Cortiça, Fibra de Vidro e Resina Quartzo-Fenólica. Considera-se o **Método Simplificado de Tauber** na solução dos resultados apresentados.

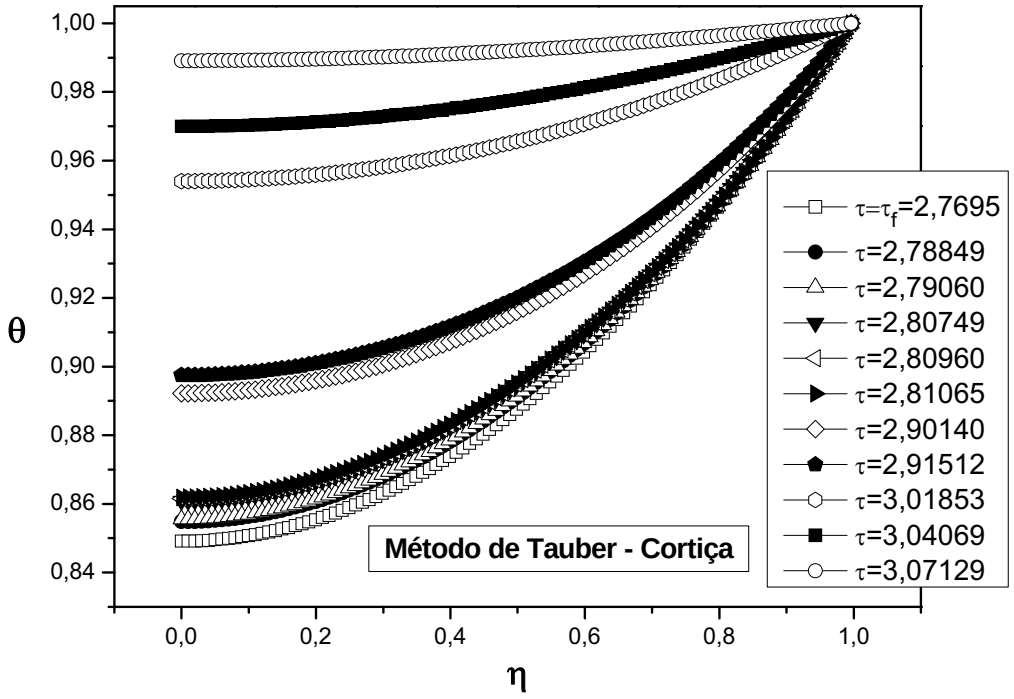


Figura 5.7 – Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o.
Período Ablativo, N=50 termos.

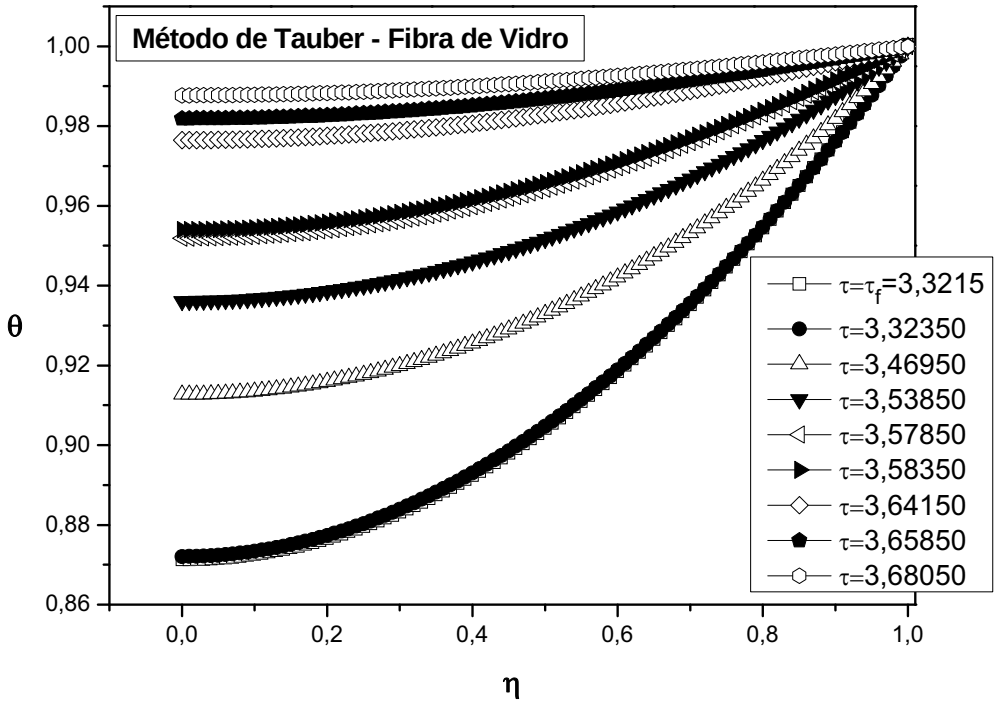


Figura 5.8 – Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o. Período Ablativo, N=50 termos.

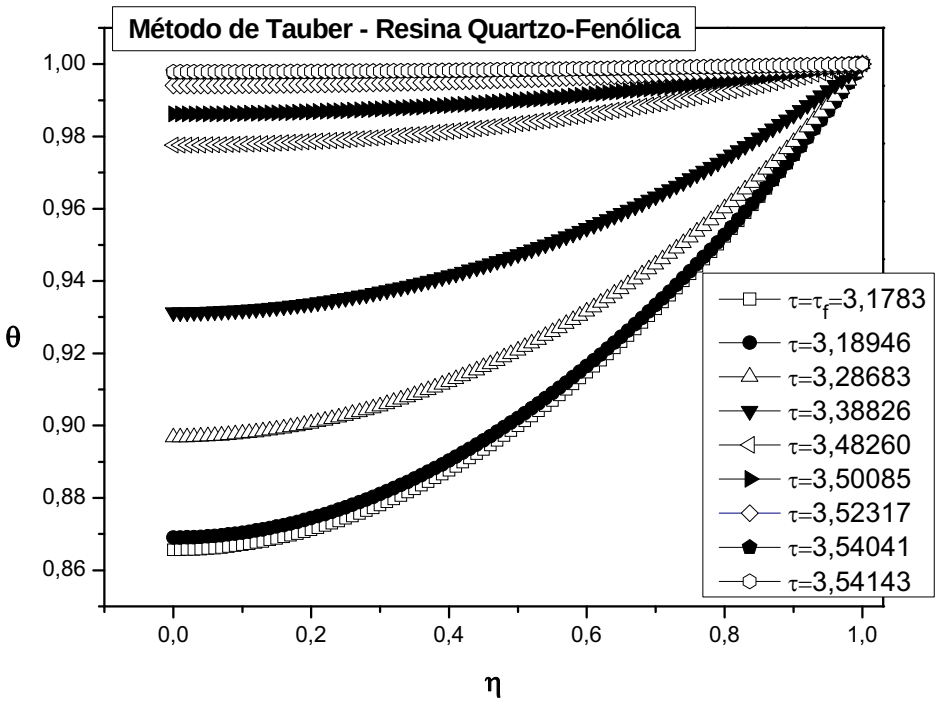


Figura 5.9 – Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o. Período Ablativo, N=50 termos.

5.4.2 Resultados para o Perfil de Temperatura para Método de Van Driest

As Figuras 5.10, 5.11 e 5.12 mostram a distribuição de temperatura ***(θ)*** do **Período Ablativo,** ao longo da espessura da proteção térmica ***(η)***, para os materiais de proteção térmica: Cortiça, Fibra de Vidro e Resina Quartzo-Fenólica. Considera-se o **Método de Van Driest** na solução dos resultados apresentados.

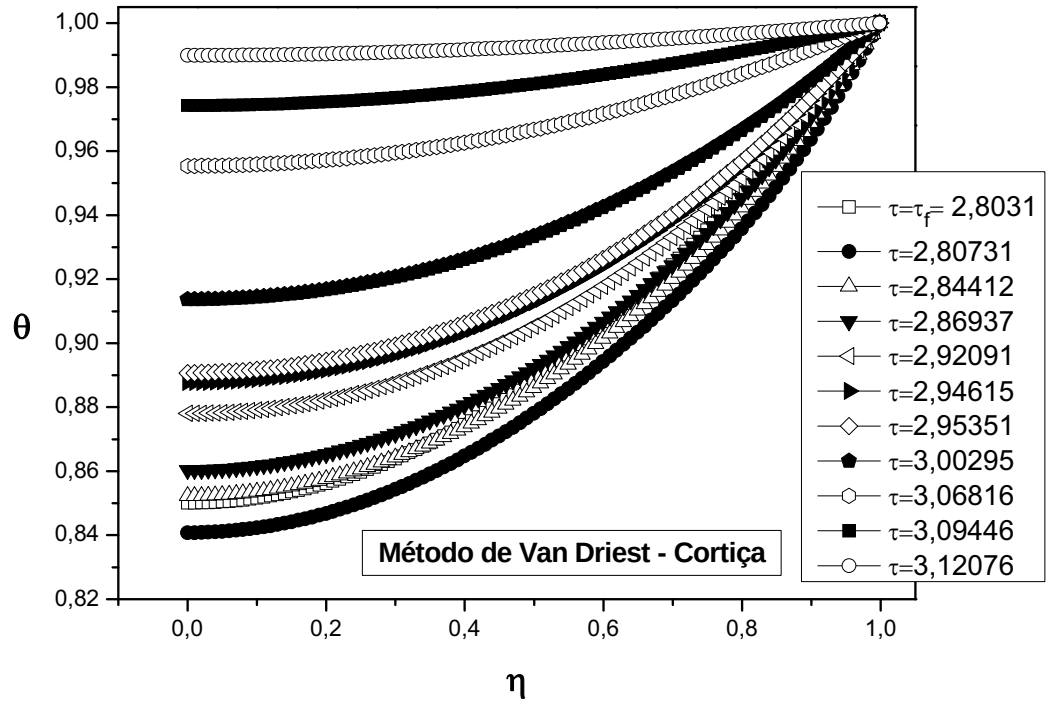


Figura 5.10 – Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o.
Período Ablativo, N=50 termos.

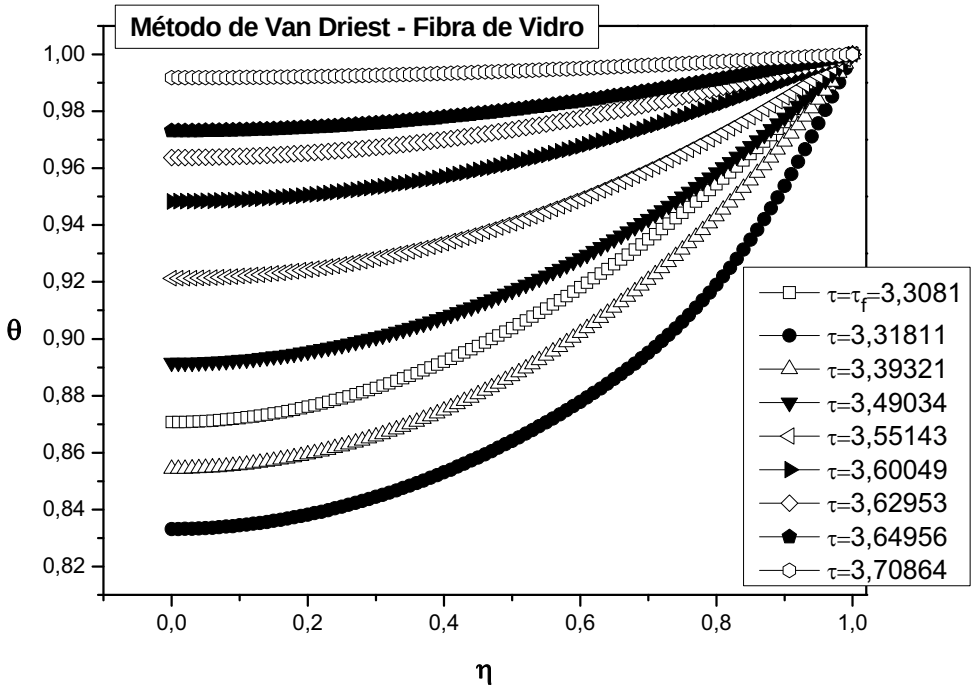


Figura 5.11 – Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o. Período Ablativo, N=50 termos.

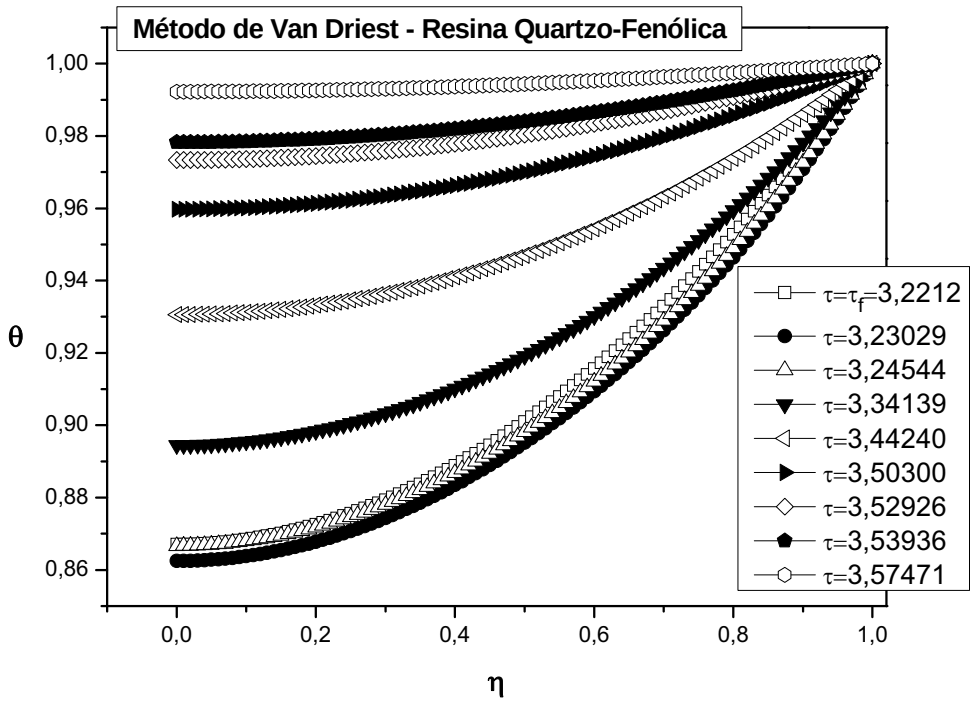


Figura 5.12 – Perfil de temperatura para diferentes tempos, para o. Período Ablativo, N=50 termos.

Pode-se observar nas Figuras 5.7 a 5.12 que o comportamento da distribuição de temperatura, ao longo da espessura da proteção térmica, convergiu corretamente para a condição de adimensionalização, se aproximando do valor unitário ao se aproximar do término da espessura da proteção térmica.

Logo, os N=50 termos e uma tolerância relativa da ordem de 10^{-6}, considerados na expansão da série que representa a temperatura do Período Ablativo, resultaram na concordância do esquema numérico proposto no presente trabalho, conforme apresentado nas Figuras 5.7 a 5.12.

5.5 Resultados para Posição na Fronteira e Velocidade Ablativa

A seguir serão apresentados os resultados numéricos para a espessura restante de material de proteção térmica, bem como a velocidade ablativa. A porção não ablatada de material da proteção térmica, é dado por $\delta(\tau) = 1 - \bar{\eta}_f(\tau)$, onde, $0 \le \delta(\tau) \le 1$. A velocidade ablativa pode ser calculada através da relação $V(\tau) = \dfrac{\partial \delta(\tau)}{\partial \tau}$, conforme apresentado no Capítulo 4. A velocidade é calculada no processo de solução a partir da equação de acoplamento.

5.5.1 Resultados para Posição na Fronteira e Velocidade Ablativa – Método Simplificado de Tauber

As Figuras 5.13 a 5.18 mostram os resultados numérico para a posição da fronteira e a velocidade ablativa, considerando o **Método Simplificado de Tauber**, para os materiais de proteção térmica: Cortiça, Fibra de Vidro e Resina Quartzo-Fenólica.

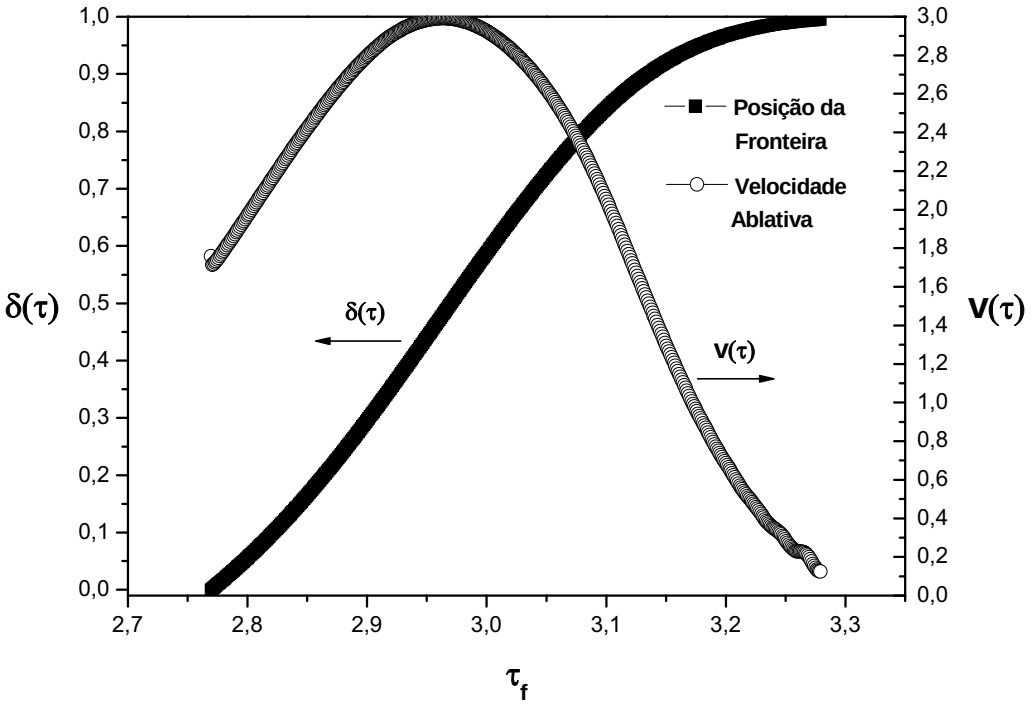


Figura 5.13 - Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Cortiça.

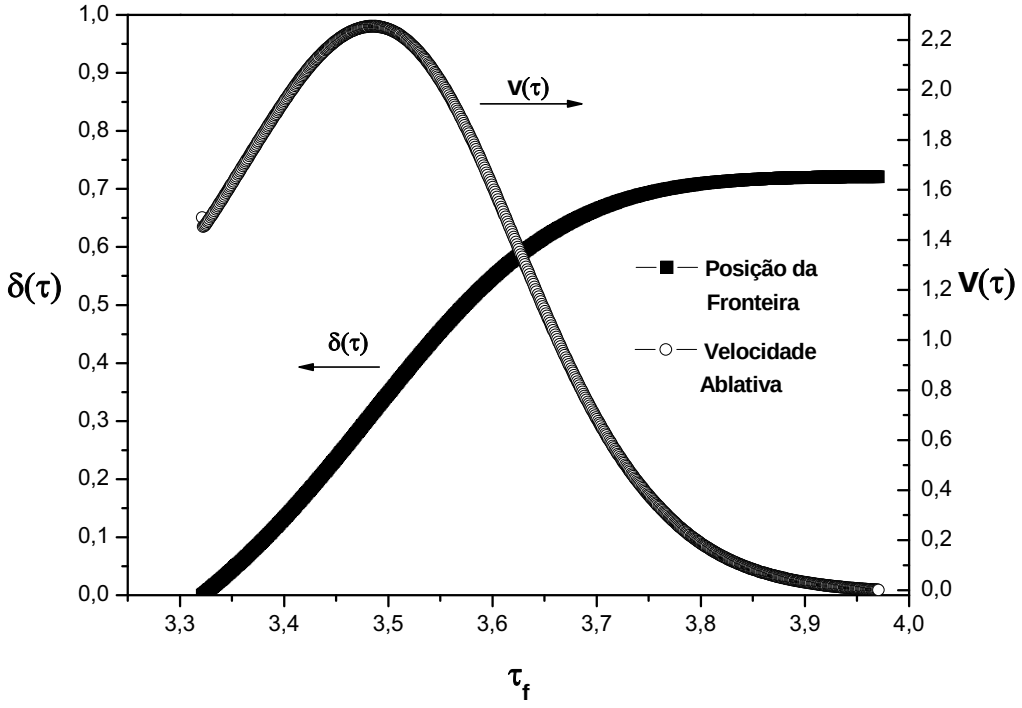


Figura 5.14 – Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Fibra de Vidro.

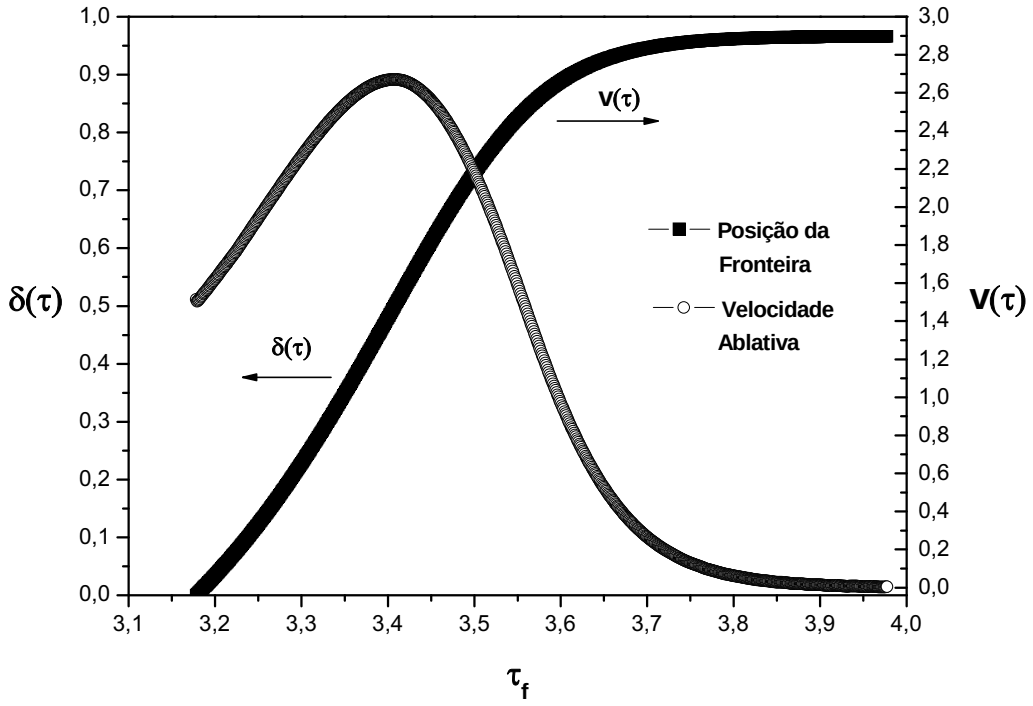


Figura 5.15 – Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Resina Quartzo - Fenólica.

5.5.2 Resultados para Posição na Fronteira e Velocidade Ablativa – Método de Van Driest

As Figuras 5.13 a 5.18 mostram os resultados numérico para a posição da fronteira e a velocidade ablativa, considerando o **Método Van Driest**, para os materiais de proteção térmica: Cortiça, Fibra de Vidro e Resina Quartzo-Fenólica.

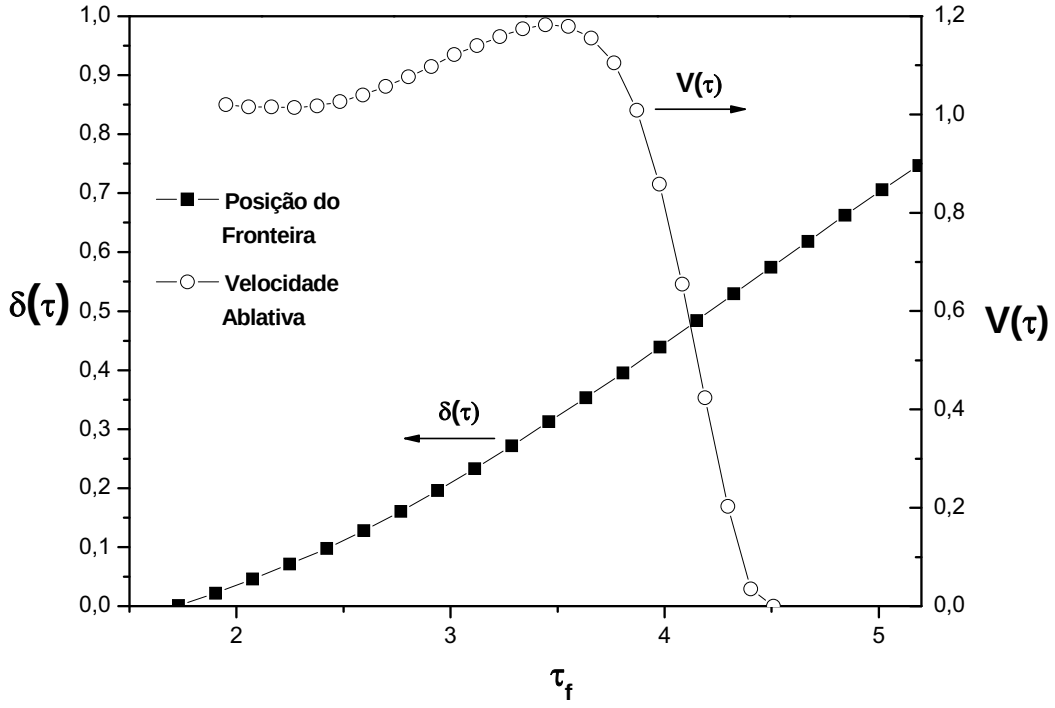


Figura 5.16 – Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Cortiça.

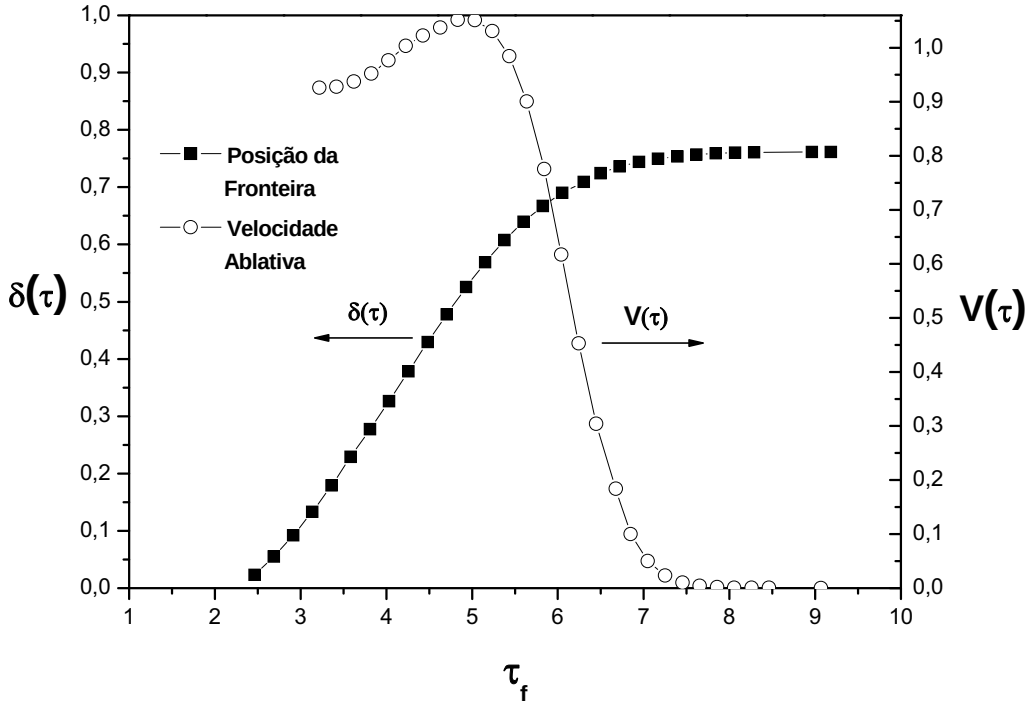


Figura 5.17 – Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Fibra de Vidro.

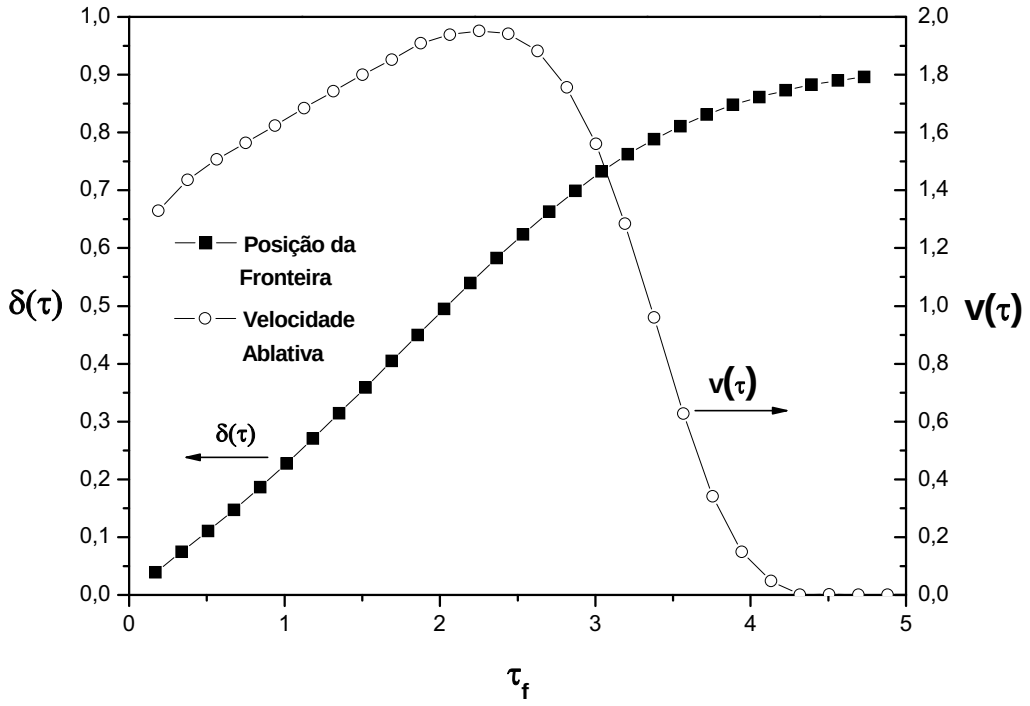


Figura 5.18 – Comparação entre a posição da fronteira e a Velocidade ablativa. Material simulado: Resina Quartzo - Fenólica.

As Figuras 5.13, 5.14 e 5.15 mostram o desenvolvimento do perfil correspondente à posição da fronteira, a qual representa a porção de material da proteção térmica não ablatada, e o perfil correspondente à velocidade ablativa da fronteira. Tais curvas foram obtidas a partir do cálculo do fluxo de calor, considerando o Método Simplificado de Tauber.

O que se observa nas Figuras 5.13 e 5.15, em relação às curvas para posição da fronteira, que os valores convergem para a condição de adimensionalização proposta no presente trabalho, o que indica que os materiais de proteção térmica seriam ablatados num curto, ao longo da trajetória de reentrada. Diferentemente, na Fig. 5.14, observa-se que o material Fibra de Vidro resiste ao processo ablativo durante o tempo considerado de reentrada. Essa condição é justificada devido a Fibra de Vidro possuir maior valor de temperatura de ablação e maior calor específico a pressão constante *(c_p),* Tabela 3.

O cálculo da velocidade ablativa mostrada nas Figuras 5.13, 5.14 e 5.15, apresentam um comportamento de queda na velocidade ablativa após algum tempo de reentrada. Isso devido a se atingir um equilíbrio na velocidade de reentrada e posterior desaceleração, como pode ser visto na Fig. 5.1.

Para a velocidade ablativa observa-se que o tempo onde à velocidade ablativa atinge o máximo valor corresponde a aproximadamente 2,96 para a cortiça 3,41 para a Resina

Quartzo-Fenólica e 3,49 para a Fibra de Vidro, ou seja, a Fibra de Vidro tem certo atraso na subida da velocidade ablativa, em relação à Cortiça e à Resina Quartzo-Fenólica. Essa configuração possui a mesma justificativa que a mencionada para o caso da posição da fronteira, conforme Tabela 3.3.

Logo, para aquecer suficientemente a Fibra de vidro de modo a garantir o mesmo comportamento observado na Cortiça e na Resina Quartzo-Fenólica, necessitaria de um tempo de reentrada maior, ou então de uma intensidade calorífica superior à considerada, Tabela 3.

O cálculo da posição na fronteira pelo método de Van Driest tem um comportamento similar ao apresentado pelo Método Simplifica de Tauber. Entretanto, para o cálculo da velocidade ablativa da fronteira, observa-se que o atraso para se atingir a condição de velocidade máxima de ablação, tem a seguinte característica em relação ao tempo de resposta, 6,30 para a Cortiça, 2,30 para a Resina Quartzo-Fenólica e 5,00 para a Fibra de Vidro.

O comportamento da velocidade ablativa da fibra de Vidro concordou com as características obtidas pelo Método Simplificado de Tauber. Contudo, o tempo de resposta para a velocidade ablativa máxima, foi superior ao obtido pelo Método Simplificado de Tauber. Essa condição já era esperada, devido o Método Simplificado de Tauber não considerar em seu modelo de cálculo do fluxo de calor os termos de desaceleração do escoamento através da onda de choque normal, du_e/ds e Pr. Mas o comportamento das curvas de velocidade ablativa para a Cortiça e para a Resina Quartzo-Fenólica, está contrário àquelas observados pelo Método Simplificado de Tauber. O que mostra que o método de solução numérica divergiu para tais condições.

No Apêndice D são apresentados os valores correspondentes à simulação numérica, para a distribuição de temperatura do Período Pré-Ablativo e da trajetória de reentrada, Tabelas D.1 e D.2, respectivamente.

6 Conclusão

Neste trabalho foi investigado o problema de ablação, no ponto de estagnação de um corpo de revolução submetido a determinados fluxos de calor, cujas correlações encontram-se na literatura: as correlações de Tauber e de Van Driest. A ferramenta utilizada para investigar o problema foi à Técnica de Transformada Integral Generalizada (TTIG). O presente trabalho representa uma continuação ao trabalho de Diniz (1996), considerando de forma aproximada a influência do escoamento externo e a presença de uma onda de choque normal que se forma diante do corpo, quando o corpo entra na atmosfera terrestre em escoamento hipersônico. Estas influências estão embutidas nas correlações dos fluxos de calor, obtidas atrás de métodos de engenharia pelo Método Simplificado de Tauber e pelo Método de Van Driest.

Os resultados foram obtidos sob hipótese de escoamento hipersônico, onde a velocidade antes da onda de choque normal que se forma na frente do corpo na reentrada foi calculada admitindo uma trajetória de entrada vertical sem sustentação. O tempo para cálculo da posição e da velocidade, é controlado pelo programa quando chama a rotina para solução do sistema de equações, resultante da aplicação da Técnica de Transformada Integral Generaliza ao problema de ablação no sólido.

O comportamento qualitativo dos resultados está dentro do esperado, entretanto, a velocidade de ablação a partir de um dado tempo cai bruscamente; comportamento este que não foi observado no trabalho de Diniz (1996). Principalmente quando se observa os cálculos da velocidade ablativa através do Método de Van Driest, sobretudo considerando os materiais de proteção térmica, Cortiça e Resina Quartzo-Fenólica. Entretanto, uma solução envolvendo a camada limite hipersônica, poderia mostrar uma análise mais precisa sobre tais resultados.

Os resultados do presente trabalho estão coerentes com o comportamento do fluxo de calor que aumenta, depois diminui com o passar do tempo, o que pode ser evidenciado em outras literaturas, conforme mencionado na apresentação dos resultados.

Uma dificuldade encontrada foi com relação à falta de valores disponíveis na literatura para as propriedades dos materiais de proteção térmica. Estes dados encontram-se de forma muita esparsa na literatura. Por esse motivo, as simulações foram feitas com base nos poucos dados disponíveis a que se teve acesso.

Para se chegar a uma conclusão mais segura, o mais correto, seria resolver a ablação no sólido, juntamente com as equações de camada limite do escoamento externo considerando os fenômenos de não equilíbrio após a onda de choque normal, tudo acoplado ao cálculo da

trajetória do veículo na sua entrada na atmosfera. Esta seria uma das primeiras sugestões para trabalhos futuros.

De qualquer forma houve um avanço em relação ao de trabalho de Diniz (1996) no que se refere à influência do campo de escoamento externo, ainda que de forma simplificada sobre a solução do fenômeno ablativo no sólido. Naquele trabalho foram considerados fluxos arbitrários na forma de polinômios e exponencial, onde não aparecia de foram explícita a influência do escoamento. Este trabalho foi, portanto, mais um passo antes de partir para uma solução mais detalhada do problema do fenômeno ablativo em sólidos, pela Técnica de Transformada Integral Generalizada, considerando os diversos fatores envolvidos no fenômeno.

Na seqüência e como sugestão para outros trabalhos, a realização da solução da camada limite sobre o corpo, considerando a presença dos gases que se forma a partir da ablação do material de proteção térmica, resolvendo de forma acoplada o problema do escoamento de várias espécies que podem reagir, efeito de gás em não equilíbrio; considerando uma trajetória mais realística de reentrada na atmosfera. Uma outra proposta, também possível de se realizar, resolver o problema da ablação ponto a ponto na superfície do sólido; pela especificação de um coeficiente de transferência de calor em função da posição ao longo do sólido, considerando nesse caso os efeitos de gás real para melhorar a eficiência do cálculo do fluxo de calor na superfície do corpo.

Referências

ADAMS, M. C. Recent advances in ablation. **ARS Journal**, New York, v.29, n.9, p. 625-632, 1959.

ANDERSON Jr., J. D. **Hypersonic and hight temperature gas dynamics.** London: McGraw-Hill, 1989.

ANDERSON Jr., J. D. **Modern compressible flow:** with historical perspective. London: McGraw-Hill, 2003. 776 p.

CAMPOS SILVA, J. B. **Técnica de transformada integral generalizada no desenvolvimento simultâneo dos perfis de velocidade e temperatura em escoamento laminar em dutos de geometria simples.** 1990. 155 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 1990.

BRÜCK, S.; RADESPIEL, R.; LONGO, J. M. A. Comparision of nonequilibrium flows past a simplified space-shuttle configuration. In: AEROSPACE SCIENCES MEETING & EXHIBIT, AIAA 97-0275, 35, 1997, Reno. **Meeting...** Reno: S.n., 1997.

COX, R. N. ;CRABTREE, L.F. **Elements of hypersonic aerodynamics.** New York: Academic Press, 1965. 243 p.

COTTA, R. M. Benchmark results in computational heat and fluid flow: the integral transform method. **International Journal Heat Transfer**, New York, v.37, p. 381-393, 1994.

COTTA, R. M. **Integral transforms in computational heat and fluid flow.** Boca Raton: CRC Press, 1993.

COTTA, R. M.; MIKHAILOV, M. D. **Heat conduction:** lumped analysis, integral transforms, symbolic computation. New York: John Wiley & Sons, 1997.

MAYALL, M. C. M.; COTTA, R. M. **Análise de aquecimento aerodinâmico em satélites durante reentrada na atmosfera.** 2004. Dissertação (Mestrado) – Instituto Aberto Coimbra de Pós Graduação em Pesquisa de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

DINIZ, A. J.; APARECIDO J. B.; COTTA, R. M. Heat conduction with ablation in a finite-slab. **Heat and Technology**, Bologna, v. 8, n. 3-4, p. 30-43, 1990.

DINIZ, A.J.; MAIA, C. R. M.; ZAPAROLI, E. L. **Solução analítica para problemas de transferência de calor com mudança de fase em geometria axi-simétrica.** Florianópolis/SC: ENCIT/LATCYM, 1996.

DINIZ, A.J. **Proteção térmica por ablação em corpos de várias geometrias aquecidos cineticamente.** 1996. Tese (Doutorado) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 1996.

FAY, J.A.; RIDDELL, F.R. Theory of the stagnation point heat transfer in dissociated air. **Journal of the Aeronautical Sciences**, Easton, v.25, n.2, p.73-85, 1958.

GOODMAN, T. R. The heat balance integral and its application to problems involving a change of phase. **Transactions of the ASME**, New York, v.80, p. 335-342, 1958.

GOMES, F.A.A.; CAMPOS SILVA, J. B.; DINIZ,A. J. Formulation of the ablation thermal problem in a unified form. **Journal of Spacecraft and Rockets,** New York, v.43, n.1, p. 236-238, 2005.

GOMES, F.A.A.; CAMPOS SILVA, J. B.; DINIZ, A. J. Radiation heat transfer with ablation in a finite plate. **Engenharia Térmica – RETERM**, Curitiba/Pr, v.4, n.2, p.191-196, 2005.

GRANGER, A. G. **Fluid mechanics.** New York: Dover Publications, 1995. 912p.

GRUMET, A.; ANDERSON JR., J. D. ; LEWIS, M. J. Numerical study of the effects wall catalysis on shock wave/boundary-layer interactions. **Journal and Thermophysics and Heat Transfer**, New York, v.8, n.1, p. 40-47, 1994.

HASIAO, J. S.; CHUNG, B. T. F. **A heat balance integral approach for two-dimensional heat transfer in solid with ablation**. Reno: AIAA-ASM, 1984. p. 9-12.

HASIAO, J. S.; CHUNG, B. T. F. Heat transfer with a ablation in a finite slab subjected to time-variant heat flux. **AIAA Journal**, New York, v.23, n.1, p. 45-150, 1985.

HANKEY, W. L. **Re-Entry Aerodynamics.** New York: AIAA Education Series, 1988.

HIDALGO, H. Ablation of glass material around blunt bodies of revolution. **ARS Journal**, New York, v.30, n.9, p.805-814, 1960.

JAIN, A. C.; ADMURTHY, V. Hypersonic merged stagnation shock layers. Part I and II. **AIAA Journal**, New York, v.2, n.3, p.342-354, 1974.

JOSYULA, E.; SHANGE, J. S. Numerical study of hypersonic dissociated air past blunt bodies., **AIAA Journal,** v.29, n.5, p.704-711, 1991

KREITH, F. **Príncípios da transmissão de calor.** São Paulo: Edgard Blucher, 1973.

KRASNOV, N. F. **Aerodynamics of bodies of revolution.** New York: American Elsevier Publishing Company, 1970.

KREITH, F. Transmissão de calor em escoamentos a alta velocidade. In: ___.**Princípios da transmissão de calor.** São Paulo: Edgard Blucher, 1973. Cap. 12, p.545-578.

LACAZE, H. La protection thermique par ablation. **Doc-Air-Espace,** n.105, juillet, p. 23-32, 1967.

LANDAU, H. G. Heat conduction in a melting solid. **Quarterly of Applied Mathematics**, Providence, v.8, n.1, p.81-95, 1950.

LEES, L. Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds. **Jet Propulsion**, New York, v.26, n.4, p. 259 – 268, 1956.

LVINSKY, F. S.; YOSHIHARA, H. Rarefied hypersonic flow over sphere. In: RIDELL, F.R. (Ed.). **Hypersonic flow research.** New York: Academic Press, 1962. p. 81-106.

MASON, W. H. Configuration aerodynamics, aerospace ocean engineering course. Virginia Tech, Blacksburg, VA, Virginia, 1997. Disponível em: <http://www.aoe.vt.edu/~mason/Mason_f/ConfigAero.html>. Acesso em: 12 dez. 2007.

MASSON, D. J.; CARL GAZLEY, JR. Surface protection and cooling systems for high-speed flight. **Aeronautical Engineering Review**, Ottawa, v.15, p. 46-55, 1956.

MIKHAILOV. M. D.; ÖZISIK, M. N. **Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion.** New York: John Willey & Sons, 1984

MOSS, J. N.; BIRD, G. A. **Directed simulation of transitional flow for hypersonic reentry conditions**. AIAA Paper n° 84-0223, January, 1984.

OSTRACH, S. **Melting decelarating bodies, nonlinear problems of engineering.** London: Academic Press, 1964. p.138-162.

OSTRACH, S.; GOLDSTEIN, W. ; HAMMAN, J. The effect of a deceleration force on a melting boundary layer. **Journal of the Aerospace Sciences**, Easton, v.27, n.8, p. 626-627, 1960.

ÖZISIK, M. N.; MURRAY, R. L. On the solution of linear diffusion problems with varuable boundary condition parameters. **Journal of Heat Transfer**, New York, v.96, p. 48-51,1974.

PARK, C. **Nonequilibrium hypersonic aerothermodynamics**. New York: John Wiley & Sons, 1989.

PESSOA FILHO, J. B.; FILGUEIRAS, I. Fluxo de calor convectivo sobre veículos espaciais movendo-se a velocidades hipersônicas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 2001, Uberlândia. **Anais...** Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 2001. CD-ROM. Trabalho TRB2295.

PROBSTEIN, R. F. Shock wave and flow field development in hypersonic re-entry. **ARS Semi-Annual Meeting**, pp. 185-194, los Angeles, Calif. 1960.

REGAN, F. J.; ANANDAKRISHNAN, S. M. **Dynamics of atmospheric Re-Entry**. AIAA Education Series, 1993. 604 p.

RUPERT JR. N. J.; COTTA, R. M. Heat conduction with ablation in multilayered media. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 11, 1991, São Paulo. **Anais...** São Paulo: ABCM, 1991, v. 1, p. 413-416.

SANDERS, R. W. Transient heat conduction in a melting finite slab, an exact solution. **ARS Journal**, New York, v.30, n.11, p. 1030-1031, 1960.

SHIMIDT, D. L. Ablation. In: BEAR, E. (Ed.). **Engineering design for plastic.** New York: Reinhold, 1964. Chap. 13, p. 815-868.

SLEZKIN, N. A. **Dynamics of viscous incompressible fluids.** Moscow: Gostekhizdat Press, 1955.

STEG, L.; LEW, H. Hypersonic Ablation. in: **Agard Meeting on High-Temperature Aspects of Hypersonic Fluid Dynamics**, S.l, v.68, part. 6, p. 629-680, 1962.

STORTI, M. Numerical modeling of ablation phenomena as two-phase stefan problems. **International Journal Heat Mass Transfer**, Oxford, v.38, n.15, p. 2843-2854, 1995.

SUTTON, G. W. The initial development of ablation heat protection, an historical perspective. **Journal of Spacecraft and Rockets**, New York, v.19, n.1, p. 3-11, 1982. AIAA-824038

SUNDERLAND, J. E. ;GROSH, R. J. Transient Temperature in a melting solid, transaction of the ASME. **Journal of Heat Transfer**, New York, v. 83, p. 409-414, 1961.

TANNEHILL, J. C.; MUGGE, F. R. **Improved curve fits for the thermodynamics properties of equilibrium air suitable for numerical computation using time-dependent or shock-capturing methods.** New Yor: NASA, 1974. NASA CR-2470.

TAUBER, M. E.; MENEZES, G. P. Aerodynamics of transatmospheric vehicles. **AIAA Paper**, New York, n.86-1257, 1986.

TELLEP, D. M. The effect of vehicle deceleration on a melting surface. **Journal of the Aero/Space Sciences**, v.26, n.8, p. 537-538, 1959.

TCHUEN, G.; BURTSCHELL, Y.; ZEITOUN, D. E. Numerical predictionof nonequilibrium hypersonic flow around brazilian satellite SARA. **Brazilian Journal of Physics**, São Paulo, v.35, n.1, p. 148-156, 2005.

THOMAS, P. D.; NEIER, K. L. Navier-stokes simulation of three-dimensional hypersonic equilibrium flows with ablation. **Journal of Spacecraft and Rockets**, New York, v.27, n.2, p. 143-149, 1990.

TIRSKII, G. A.,Continuum Models in Problems of the Hypersonic Flow of a Rarefied Gas Around Blunt Bodies, Elsevier Science Ltd, Vol. 61, n°6, pp. 875-900, 1997.

TSIEN, H. S. Similarity laws of hypersonic flows. **Journal of Mathematics and Physics**, Cambridge, v.25, p. 247-251, 1946.

TORO, P. G. P. **Hypersonic laminar boundary layer with adiabatic wall condition.** New York: IAE/CTA, 1997.

US STANDARD ATMOSPHERE. Washington: NASA and USAF, 1976.

VALLERANI, E. Integral technique solutions to a class of simple ablation problems. **Meccanica**, Torino, v.9, p.94-101, 1974.

VAN DRIEST, E. R. The problem of aerodynamic heating. **Aeronautical Engineering Review**, New York, v.15, n.10, p.26-41, 1956.

VOJVODICH, N. S. Hypersonic heat protection: a review of laboratory experiments. In: DALELEIO, G.F.; PARKER, J.A. (Ed.). **Ablative plastics**. New York: M.Dekker, 1971. p. 41-68.

WING, L. D. Method for calculation aerodynamic heating on sounding rocket tangent ogive noses. **AIAA-Journal of Spacecraft**, New York, v.11, n.6, p. 357-362, 1974.

ZOBY, E. V.; MOSS, J. N. ;SUTTON, K. Approximate convective-heating equations for hypersonic flow. **AIAA-Journal of Spacecraft**, New York, v.18, n.1, p. 64-70, 1981.

ZIEN, T. F. Approximate calculation of transient heat conduction. **AIAA- Jurnal**, New York, v.14, n.3, p. 404-406, 1976.

Apêndice A – Análise do Fenômeno Ablativo sobre o Corpo de Revolução

A.1 - Análise do processo ablativo na superfície do corpo

A Fig. A 1 ilustra o fenômeno ablativo no contorno.

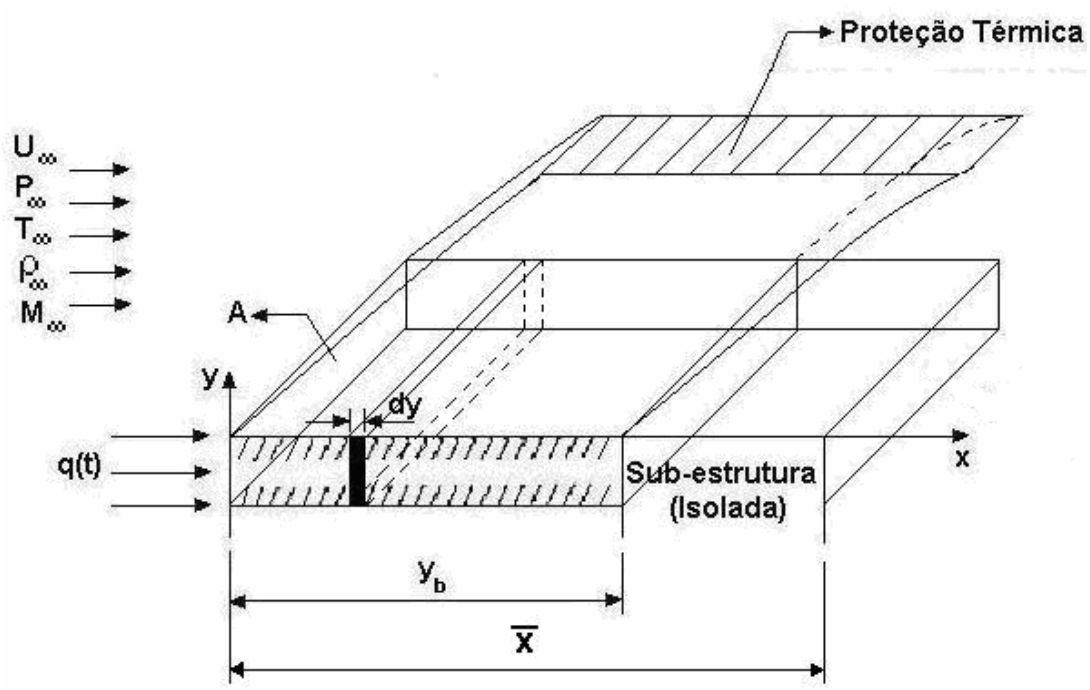


Figura A 1 - Porção do corpo de revolução com o detalhe da superfície sob efeito do fluxo de calor [q(t)], responsável pela ablação no sólido.

Diante da representação esquemática apresentada na Fig. A 1, a equação do balanço de energia na fronteira, nas suas variáveis dimensionais, pode ser mostrada como,

$$\dot{q}''(t) + k\left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = h_{abla}\,\frac{\dot{m}}{A} \tag{A.1}$$

A Eq. (A.1) representa a taxa de material ablatado ao longo da trajetória de reentrada, devido o aquecimento aerodinâmico, onde, k é a condutividade térmica do material da proteção térmica, $\dot{m}$ é a taxa de remoção do material da proteção térmica ablatado ao longo da trajetória de reentrada e h_{abla} é o calor de ablação.

Definem-se as variáveis para adimensionalizar a Eq. (A.1),

$$\Phi = \frac{T - T_W}{T_f - T_0} \qquad X = \frac{x}{\overline{x}}$$

$$Y = \frac{y}{\overline{x}} \qquad (A.2)$$

$$Q(\tau) = \dot{q}''(t)\frac{\overline{x}}{k\left(T_f - T_0\right)} \qquad \tau = \frac{\overline{x}^2}{\alpha_T}$$

onde, $\overline{x}$ é a espessura da parede do corpo de revolução, Fig. A 1, $T_f - T_0$ é a diferença de temperatura de referência (variação de temperatura até se atingir a ablação do material da proteção térmica), T_W é a temperatura imposta na parede do corpo de revolução e α_T é a difusividade térmica do material da proteção térmica.

Sabendo que,

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \qquad (A.3)$$

e ainda,

$$dm = \rho dV \qquad (A.4)$$

$$dV = Ady \qquad (A.5)$$

Substituindo as Eqs. (A.3), (A.4) e (A.5) na Eq. (A.1), tem-se

$$\dot{q}''(t) + k\left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = h_{abla}\rho\frac{dx}{dt} \qquad (A.6)$$

Para adimensionalizar a Eq. (A.6), substituem-se as Eqs. (A.2) na Eq. (A.6), o que resulta em,

$$Q(\tau) = \frac{\partial \Phi(X,Y)}{\partial X} + \nu \frac{dX}{d\tau} \tag{A.7}$$

onde, ν é o inverso do número de Stefan,

$$\nu = \frac{h_{abla}}{c_p} \frac{1}{\left(T_f - T_0\right)} \tag{A.8}$$

Considerando a variação do material ao longo da trajetória devido ao processo ablativo,

$$X \rightarrow X(\tau) \rightarrow \delta(\tau) \tag{A.9}$$

onde, $\delta(\tau)$ indica a posição ao longo da espessura do material de proteção térmica, variável com o tempo.

Como $\delta(\tau)$ representa a porção não ablatada durante o processo ablativo ao longo da trajetória de reentrada, inverte-se o sinal do segundo membro da Eq. (A.7) para tornar tal fenômeno representativo, o que resulta em,

$$\frac{d\delta(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \Phi(X,Y)}{\partial X} - \frac{Q(\tau)}{\nu} \tag{A.7}$$

onde, ν é o inverso do número de Stefan.

A Eq. (A.7) expressa a velocidade ablativa do material da proteção térmica, acoplada ao cálculo da trajetória de reentrada do veiculo espacial.

Apêndice B – Abordagem Matemática para o Problema de Stefan

B.1 - Potencial de Temperatura em Coordenadas Ortogonais Curvilíneas

A análise do Laplaciano, Eq. (3.1), para se obter a forma da Eq.(3.11) é apresentada a seguir até a formulação para a abordagem Clássica do Problema de Stefan na forma dimensional.

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)\right] \tag{B.1}$$

Como o problema é tratado na forma bidimensional e lembrando que $u_3=w=0$, o último termo da Eq. (3.4) é nulo, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)=0 \tag{B.2}$$

Logo, a Eq.(B.1) assume a forma

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right]\right] \tag{B.3}$$

Resolvendo separadamente cada termo da Eq.(B.3), tem-se

$$\overline{I} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\right] \tag{B.4}$$

$$\overline{II} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_2 h_3}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\right] \tag{B.5}$$

Substituindo os termos de transformação, Eqs. (3.9), tem-se:

$$\overline{I} = \frac{1}{\left[1+R(\xi)\eta\right]\left[r(\varepsilon)+\eta\cos\alpha(\xi)\right]}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{r(\xi)+\eta\cos\alpha(\xi)}{1+R(\xi)\eta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)\right] \tag{B.6}$$

$$\overline{I} = \frac{1}{\eta(\xi)+\eta\cos\alpha(\xi)+r(\xi)R(\xi)\eta+\eta\cos\alpha(\xi)R(\xi)\eta} \tag{B.7}$$

Fazendo,

$$a=1+R(\xi)\eta \tag{B.8}$$

$$b = r(\xi)+\eta\cos\alpha(\xi) \tag{B.9}$$

Desenvolvendo a partir das Eqs. (B.8) e (B.9), tem-se

$$\overline{I} = \frac{1}{a.b}\left[\frac{a\left[\frac{\partial r(\xi)}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial\cos\alpha(\xi)}{\partial\xi}\right]-b\left[\eta\frac{\partial R(\xi)}{\partial\xi}\right]}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{a}{b}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right] \tag{B.10}$$

$$\overline{I} = \left[\frac{\frac{\partial r(\xi)}{\partial\xi}+\frac{\eta\partial\cos\alpha(\xi)}{\partial\xi}}{a^2b}-\frac{\frac{\eta\partial R(\xi)}{\partial\xi}}{a^3}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} \tag{B.11}$$

$$\overline{I} = \frac{1}{ab}\left\{\frac{a\left[\frac{\partial r(\xi)}{\partial\xi}+\frac{\eta\partial\cos\alpha(\xi)}{\partial\xi}\right]-b\left[\frac{\eta\partial R(\xi)}{\partial\xi}\right]}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{b}{a}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right\} \tag{B.12}$$

$$\overline{I} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\left\{\frac{1}{a^2b}\left[\frac{\partial r(\xi)}{\partial\xi}+\frac{\eta\partial\cos\alpha(\xi)}{\partial\xi}\right]-\frac{1}{a^3}\left[\frac{\eta\partial R(\xi)}{\partial\xi}\right]\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \tag{B.13}$$

Resolvendo a Eq. (B.5),

$$\overline{II} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)\right] \tag{B.14}$$

$$\overline{II} = \frac{1}{\left[1+R(\xi)\eta\right]\left[r(\xi)+\eta\cos\alpha(\xi)\right]}\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\left[1+R(\xi)\eta\right]\left[r(\xi)+\eta\cos(\alpha)\xi\right]\right\}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \tag{B.15}$$

$$\overline{II} = \frac{1}{a\,b}\,\overline{\Omega} \tag{B.16}$$

$$\overline{\Omega} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\left[1+R(\xi)\eta\right]\left[r(\xi)+\eta\cos(\alpha)\xi\right]\right\}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \tag{B.17}$$

$$\overline{\Omega} = \left\{\left[r(\xi)+\eta\cos\alpha(\xi)\right]\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial\left[1+R(\xi)\eta\right]}{\partial \eta}\right\} + \left\{\left[1+R(\xi)\eta\right]\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial\left[r(\xi)+\eta\cos\alpha(\xi)\right]}{\partial \eta}\right\} + \left\{\left[1+R(\xi)\eta\right]\left[r(\xi)+\eta\cos\alpha(\xi)\right]\right\}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \tag{B.18}$$

Desenvolvendo a Eq. (B.18), tem-se,

$$\overline{\Omega} = \frac{1}{ab}\left\{ab\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \left[R(\xi)b + a\cos\alpha(\xi)\right]\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right\} \tag{B.19}$$

$$\overline{\Omega} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \left[\frac{R(\xi)}{a} + \frac{\cos\alpha(\xi)}{b}\right]\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \tag{B.20}$$

Substituindo o desenvolvimento das Eqs. (B.4) e (B.5) na Eq. (B.3), resulta na seguinte expressão nas variáveis adimensionais,

$$\nabla^2\theta = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi^2} + \left[\dfrac{1}{a^2 b}\left(\dfrac{\partial r(\xi)}{\partial\xi} + \dfrac{\eta\partial\cos\alpha(\xi)}{\partial\xi}\right) - \dfrac{1}{a^3}\left(\dfrac{\eta\partial R(\xi)}{\partial\xi}\right)\right]\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \\ \left[\dfrac{R(\xi)}{a} + \dfrac{\cos\alpha(\xi)}{b}\right]\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} \end{Bmatrix} \tag{B.21}$$

A Eq. (B.1) representa a difusão de calor através da superfície do corpo de revolução, logo o potencial de temperatura será dado por,

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \alpha_T \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \left[\dfrac{1}{a^2 b}\left(\dfrac{dr(\xi)}{d\xi} + \eta\dfrac{\partial\cos\alpha(\xi)}{\partial\xi}\right) - \dfrac{1}{a^3}\left(\eta\dfrac{dR(\xi)}{d\xi}\right)\right]\dfrac{\partial\theta}{\partial\xi} + \dfrac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} + \\ \left[\dfrac{R(\xi)}{a} + \dfrac{\cos\alpha(\xi)}{b}\right]\dfrac{\partial\theta}{\partial\eta} \end{Bmatrix} \tag{B.22}$$

No presente trabalho todas as propriedades térmicas foram consideradas constantes, conforme Hasiao e Shung (1984). Nessas condições considera-se a difusividade térmica, α_T, igual a1. Logo,

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2} + \left\{\frac{1}{a^2 b}\left[\frac{dr(\xi)}{d\xi} + \eta\frac{\partial\cos\alpha(\xi)}{\partial\xi}\right] - \frac{1}{a^3}\left[\eta\frac{dR(\xi)}{d\xi}\right]\right\}\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \left[\frac{R(\xi)}{a} + \frac{\cos\alpha(\xi)}{b}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\eta} \tag{B.23}$$

A Eq.(B.23) é válido no seguinte domínio, $\tau > 0$, $\begin{cases} 0 \le \xi \le l \\ 0 \le \eta \le l \end{cases}$.

A Eq. (B.23) é a expressão que representa a difusão de calor através da superfície do corpo de revolução, nas variáveis adimensionais.

A seguir serão apresentados os períodos no qual se divide o processo físico ablativo, com as respectivas, condição inicial e condições de contorno.

Para o **Período Pré-Ablativo**, tem-se,

Com a seguinte condição inicial,

$$\theta(\eta,\xi,\tau)=0 \quad \tau=0 \quad , \quad \begin{cases} 0\le\xi\le l \\ 0\le\eta\le 1 \end{cases} \tag{B.24}$$

Com as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial\theta(\eta,\theta,\tau)}{\partial\xi}=0\,, \quad \xi=0\,, \quad 0\le\eta\le 1 \tag{B.25a}$$

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta}=0\,, \quad \eta=0\,, \quad 0\le\xi\le l \tag{B.25b}$$

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta}=Q_1(\tau)\,, \quad \eta=1\,, \quad 0\le\xi\le l \tag{B.25c}$$

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi}=-Q_2(\tau)\,, \quad \xi=l\,, \quad 0\le\eta\le 1 \tag{B.25d}$$

Para o **Período Ablativo**, tem-se,

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}+\left\{\frac{1}{a^2 b}\left[\frac{dr(\xi)}{d\xi}+\eta\frac{\partial\cos\alpha(\xi)}{\partial\xi}\right]-\frac{1}{a^3}\left[\eta\frac{dR(\xi)}{d\xi}\right]\right\}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+\left[\frac{R(\xi)}{a}+\frac{\cos\alpha(\xi)}{b}\right]\frac{\partial\theta}{\partial\eta} \tag{B.26}$$

A Eq.(B.26) é válido no seguinte domínio, $\tau>\tau_f$, $\begin{cases} \delta(\xi,\tau)\le\xi\le l \\ 0\le\eta\le 1 \end{cases}$.

Com a seguinte condição inicial,

$$\theta(\eta,\xi,\tau)=\theta_f(\eta,\xi,\tau)\ ,\ \ \tau=\tau_f,\ \begin{cases}\delta(\xi,\tau)\le\xi\le l\\ 0\le\eta\le 1\end{cases} \tag{B.27}$$

Com as seguintes condições de contorno,

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\eta}=0\ ,\quad \eta=0\ ,\quad 0\le\xi\le l \tag{B.28a}$$

$$\theta(\eta,\xi,\tau)=1,\quad \eta=\delta(\xi,\tau),\quad 0\le\xi\le l \tag{B.28b}$$

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,t)}{\partial\xi}=0\ ,\quad \xi=0\ ,\quad \delta(\xi,\tau)\le\eta\le 1 \tag{B.28c}$$

$$\frac{\partial\theta(\eta,\xi,\tau)}{\partial\xi}=-Q_2(\tau),\quad \xi=l,\quad \delta(\xi,\tau)\le\eta\le 1 \tag{B.28d}$$

Apêndice C – Análise do Problema de Aquecimento no Ponto de Estagnação do Corpo de Revolução

Considere uma onda de choque normal estacionária, como mostrado na Fig. C1, onde um corpo de revolução está sob condição de escoamento hipersônico.

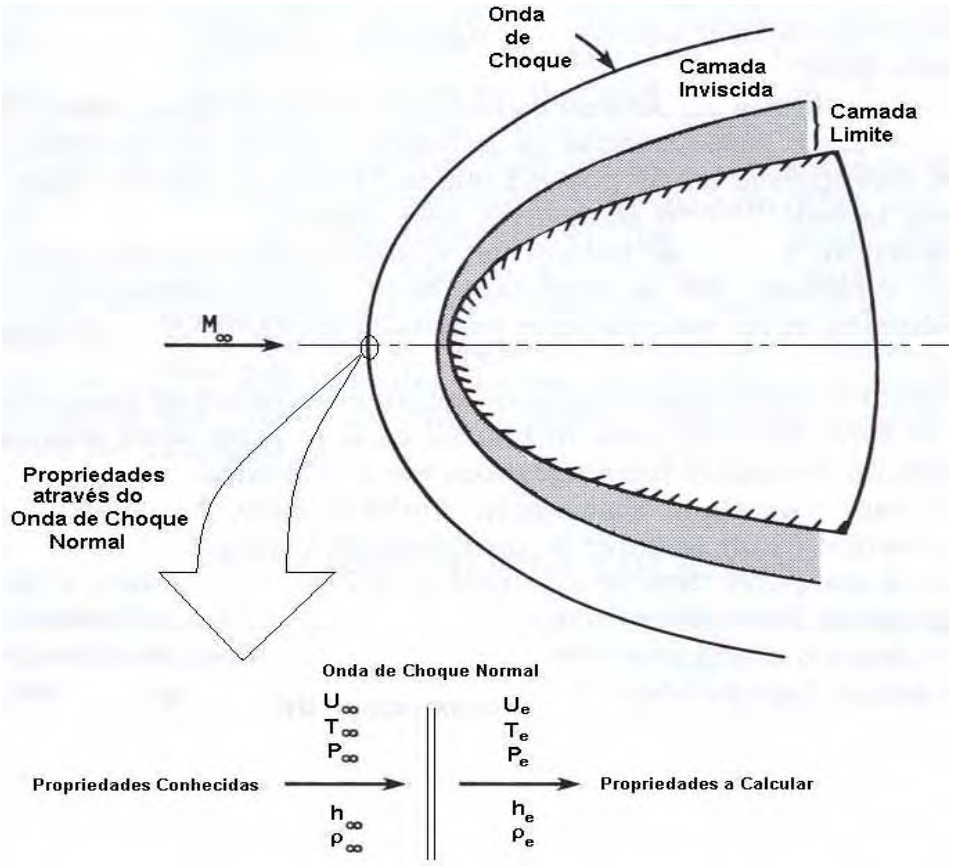


Figura C 1 – Geometria do choque normal em um corpo de revolução.

C.1 - Cálculo das propriedades do ar através da onda de choque normal - Considerando gás caloricamente perfeito

Por definição, um gás caloricamente perfeito é aquele onde os calores específicos c_p e c_v são constantes**,** logo a taxa de calores específicos $\gamma = c_p/ c_v$ também será constante Anderson Jr. (1989).

As relações para o cálculo das propriedades após a onda de choque normal no ponto de estagnação são as seguintes

$$\frac{p_e}{p_\infty} = \frac{2\gamma M_\infty^2}{\gamma+1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \tag{C.1}$$

$$\frac{\rho_e}{\rho_\infty} = \frac{(\gamma+1)M_\infty^2}{\left[2+(\gamma-1)M_\infty^2\right]} \tag{C.2}$$

$$\frac{T_e}{T_\infty} = \frac{h_e}{h_\infty} = \frac{p_e}{p_\infty}\frac{\rho_\infty}{\rho_e} \tag{C.3}$$

$$M_\infty = \frac{v_\infty}{a_\infty} \tag{C.4}$$

$$a_\infty = \sqrt{\gamma R T_\infty} \tag{C.5}$$

Logo, conhecendo a velocidade, a trajetória de reentrada e as propriedades do ar atmosférico (P_∞, ρ_∞, T_∞ *e* a_∞), obtidas através do cálculo da atmosfera padrão (US STANDARD ATMOSPHERE, 1976), é possível obter os valores das propriedades após a onda de choque (P_e, ρ_e, T_e *e* h_e) utilizando as equações (C.1) a (C.3). Considerando que o ar atmosférico esteja nas condições de gás cloricamente perfeito, γ=1,4.

A trajetória de reentrada juntamente com as propriedades do ar, em cada altitude, foram obtidas a parti de um programa computacional acoplado à variação do tempo na solução ablativa do sólido. O programa foi desenvolvido em linguagem Fortran.

Apêndice D – Resultados da Simulação Numérica

D.1 – Resultado numérico para a distribuição de temperatura do Período Pré-Ablativo

A Tabela D.1 apresenta a distribuição de temperatura para o Período Pré-Ablativo, considerando os Métodos de Tauber e Van Driest, para os três materiais de proteção térmica utilizados na simulação numérica do presente trabalho.

Tabela D.1 - Distribuição de temperatura para o Período Pré-Ablativo

Tempo	**Método Simplificado de Tauber**			**Método de Van Driest**		
	Cortiça	**Fibra de Vidro**	**Resina Quartzo-Fenólica**	**Cortiça**	**Fibra de Vidro**	**Resina Quartzo-Fenólica**
0,1	2,28842E-4	1,00657E-5	2,17765E-5	1,73226E-4	1,02047E-5	1,64874E-5
0,2	3,51026E-4	1,544E-5	3,34036E-5	2,66474E-4	1,56979E-5	2,53626E-5
0,3	4,69834E-4	2,06658E-5	4,47093E-5	3,57725E-4	2,10735E-5	3,40479E-5
0,4	5,98886E-4	2,63423E-5	5,699E-5	4,57371E-4	2,69436E-5	4,3532E-5
0,5	7,44862E-4	3,27631E-5	7,08812E-5	5,70588E-4	3,36132E-5	5,4308E-5
0,6	9,12352E-4	4,01303E-5	8,68197E-5	7,01014E-4	4,12966E-5	6,67218E-5
0,7	0,00111	4,86284E-5	1,05205E-4	8,52018E-4	5,01923E-5	8,10944E-5
0,8	0,00133	5,84553E-5	1,26465E-4	0,00103	6,05151E-5	9,77727E-5
0,9	0,00159	6,98379E-5	1,5109E-4	0,00123	7,25122E-5	1,17156E-4
1	0,00189	8,32568E-5	1,80121E-4	0,00147	8,6681E-5	1,40048E-4
1,1	0,00225	9,89653E-5	2,14106E-4	0,00175	1,03312E-4	1,66919E-4
1,2	0,00267	1,17388E-4	2,53963E-4	0,00209	1,22869E-4	1,98516E-4
1,3	0,00316	1,39058E-4	3,00845E-4	0,00248	1,45932E-4	2,35778E-4
1,4	0,00374	1,64629E-4	3,56164E-4	0,00294	1,73212E-4	2,79855E-4
1,5	0,00445	1,95912E-4	4,23844E-4	0,00351	2,06657E-4	3,3389E-4
1,6	0,00532	2,33926E-4	5,06085E-4	0,0042	2,4738E-4	3,99684E-4
1,7	0,00639	2,80886E-4	6,0768E-4	0,00505	2,97577E-4	4,80787E-4
1,8	0,00777	3,41899E-4	7,39678E-4	0,00615	3,6213E-4	5,85082E-4
1,9	0,00975	4,28801E-4	9,27684E-4	0,00771	4,54119E-4	7,33706E-4
2	0,01271	5,59155E-4	0,00121	0,01005	5,92226E-4	9,56841E-4
2,1	0,01743	7,6678E-4	0,00166	0,01379	8,1221E-4	0,00131
2,2	0,02562	0,00113	0,00244	0,02026	0,00119	0,00193
2,3	0,04245	0,00187	0,00404	0,03357	0,00198	0,0032
2,4	0,07496	0,0033	0,00714	0,05946	0,0035	0,00566
2,5	0,14355	0,00632	0,01368	0,11418	0,00673	0,01088
2,6	0,29128	0,01285	0,02779	0,23213	0,0137	0,02214
2,7	0,6036	0,0267	0,05775	0,48147	0,02849	0,04602
2,8	2,28842E-4	0,05458	0,11803	0,98024	0,05828	0,09412

2,9	3,51026E-4	0,1039	0,22458	1,73226E-4	0,11102	0,17925
3,0	4,69834E-4	0,18614	0,40209	2,66474E-4	0,19913	0,32134

D.2 – Resultado numérico para a trajetória de reentrada

A Tabela D.2 apresenta a trajetória de reentrada calculada no presente trabalho, considerando o ***Modelo de Reentrada Vertical sem Sustentação***.

Tabela D.2 – Trajetória de reentrada. Modelo de Reentrada Vertical sem Sustentação.

Tempo	Altitude	Velocidade	Número de Mach
0	300000	7680	8,95471
1E-3	299992,32	7680,00981	8,9548
0,002	299984,64	7680,01962	8,95489
0,003	299976,96	7680,02943	8,95497
0,004	299969,28	7680,03924	8,95506
0,005	299961,6	7680,04905	8,95515
0,006	299953,92	7680,05886	8,95523
0,007	299946,24	7680,06867	8,95532
0,008	299938,56	7680,07848	8,9554
0,009	299930,88	7680,08829	8,95549
0,01	299923,2	7680,0981	8,95558
0,011	299915,519	7680,10791	8,95566
0,012	299907,839	7680,11772	8,95575
0,013	299900,159	7680,12753	8,95584
0,014	299892,479	7680,13734	8,95592
0,015	299884,799	7680,14715	8,95601
0,016	299877,119	7680,15696	8,9561
0,017	299869,439	7680,16677	8,95618
0,018	299861,758	7680,17658	8,95627
0,019	299854,078	7680,18639	8,95636
0,02	299846,398	7680,1962	8,95644
0,021	299838,718	7680,20601	8,95653
0,022	299831,038	7680,21582	8,95662
0,023	299823,357	7680,22563	8,9567
0,024	299815,677	7680,23544	8,95679
0,025	299807,997	7680,24525	8,95688
0,026	299800,317	7680,25506	8,95696
0,027	299792,636	7680,26487	8,95705
0,028	299784,956	7680,27468	8,95714
0,029	299777,276	7680,28449	8,95722
0,03	299769,596	7680,2943	8,95731
0,031	299761,915	7680,30411	8,9574
0,032	299754,235	7680,31392	8,95748
0,033	299746,555	7680,32373	8,95757
0,034	299738,874	7680,33354	8,95766
0,035	299731,194	7680,34335	8,95774
0,036	299723,514	7680,35316	8,95783
0,037	299715,833	7680,36297	8,95792

0,038	299708,153	7680,37278	8,958
0,039	299700,473	7680,38259	8,95809
0,04	299692,792	7680,3924	8,95818
0,041	299685,112	7680,40221	8,95826
0,042	299677,431	7680,41202	8,95835
0,043	299669,751	7680,42183	8,95844
0,044	299662,071	7680,43164	8,95852
0,045	299654,39	7680,44145	8,95861
0,046	299646,71	7680,45126	8,9587
0,047	299639,029	7680,46107	8,95878
0,048	299631,349	7680,47088	8,95887
2,759	278773,543	7707,06579	9,2022
2,76	278765,836	7707,0756	9,2023
2,761	278758,129	7707,08541	9,20239
2,762	278750,422	7707,09522	9,20248
2,763	278742,715	7707,10503	9,20258
2,764	278735,008	7707,11484	9,20267
2,765	278727,3	7707,12465	9,20276
2,766	278719,593	7707,13446	9,20285
2,767	278711,886	7707,14427	9,20295
2,768	278704,179	7707,15408	9,20304
2,769	278696,472	7707,16389	9,20313
2,77	278688,765	7707,1737	9,20323
2,771	278681,057	7707,18351	9,20332
2,772	278673,35	7707,19332	9,20341
2,773	278665,643	7707,20313	9,20351
2,774	278657,936	7707,21294	9,2036
2,775	278650,229	7707,22275	9,20369
2,776	278642,521	7707,23256	9,20378
2,777	278634,814	7707,24237	9,20388
2,778	278627,107	7707,25218	9,20397
2,779	278619,4	7707,26199	9,20406
2,78	278611,692	7707,2718	9,20416
2,781	278603,985	7707,28161	9,20425
2,782	278596,278	7707,29142	9,20434
2,783	278588,571	7707,30123	9,20444
2,784	278580,863	7707,31104	9,20453
2,785	278573,156	7707,32085	9,20462
2,786	278565,449	7707,33066	9,20471
2,787	278557,741	7707,34047	9,20481
2,788	278550,034	7707,35028	9,2049
2,789	278542,327	7707,36009	9,20499
2,79	278534,619	7707,3699	9,20509
2,791	278526,912	7707,37971	9,20518
2,792	278519,204	7707,38952	9,20527
2,793	278511,497	7707,39933	9,20537
2,794	278503,79	7707,40914	9,20546
2,795	278496,082	7707,41895	9,20555
2,796	278488,375	7707,42876	9,20564
2,797	278480,667	7707,43857	9,20574

2,798	278472,96	7707,44838	9,20583
2,799	278465,252	7707,45819	9,20592
2,8	278457,545	7707,468	9,20602
2,801	278449,838	7707,47781	9,20611
2,802	278442,13	7707,48762	9,2062
2,803	278434,423	7707,49743	9,2063
2,804	278426,715	7707,50724	9,20639
2,805	278419,008	7707,51705	9,20648
2,806	278411,3	7707,52686	9,20658
2,807	278403,593	7707,53667	9,20667
2,808	278395,885	7707,54648	9,20676
2,809	278388,177	7707,55629	9,20685
2,81	278380,47	7707,5661	9,20695
2,811	278372,762	7707,57591	9,20704
2,812	278365,055	7707,58572	9,20713
2,813	278357,347	7707,59553	9,20723
2,814	278349,64	7707,60534	9,20732
2,815	278341,932	7707,61515	9,20741
10,21	221075,883	7780,1601	10,00149
10,211	221068,103	7780,16991	10,00164
10,212	221060,323	7780,17972	10,00178
10,213	221052,543	7780,18953	10,00192
10,214	221044,763	7780,19934	10,00206
10,215	221036,983	7780,20915	10,0022
10,216	221029,202	7780,21896	10,00234
10,217	221021,422	7780,22877	10,00249
10,218	221013,642	7780,23858	10,00263
10,219	221005,862	7780,24839	10,00277
10,22	220998,081	7780,2582	10,00291
10,221	220990,301	7780,26801	10,00305
10,222	220982,521	7780,27782	10,0032
10,223	220974,741	7780,28763	10,00334
10,224	220966,96	7780,29744	10,00348
10,225	220959,18	7780,30725	10,00362
10,226	220951,4	7780,31706	10,00376
10,227	220943,619	7780,32687	10,0039
10,228	220935,839	7780,33668	10,00405
10,229	220928,059	7780,34649	10,00419
10,23	220920,278	7780,3563	10,00433
10,231	220912,498	7780,36611	10,00447
10,232	220904,718	7780,37592	10,00461
10,233	220896,937	7780,38573	10,00476
10,234	220889,157	7780,39554	10,0049
10,235	220881,376	7780,40535	10,00504
10,236	220873,596	7780,41516	10,00518
10,237	220865,816	7780,42497	10,00532
10,238	220858,035	7780,43478	10,00547
10,239	220850,255	7780,44459	10,00561
10,24	220842,474	7780,4544	10,00575
10,241	220834,694	7780,46421	10,00589

10,242	220826,913	7780,47402	10,00603
10,243	220819,133	7780,48383	10,00618
10,244	220811,352	7780,49364	10,00632
10,245	220803,572	7780,50345	10,00646
10,246	220795,791	7780,51326	10,0066
10,247	220788,011	7780,52307	10,00674
10,248	220780,23	7780,53288	10,00689
10,249	220772,45	7780,54269	10,00703
10,25	220764,669	7780,5525	10,00717
10,251	220756,889	7780,56231	10,00731
10,252	220749,108	7780,57212	10,00745
10,253	220741,328	7780,58193	10,0076
10,254	220733,547	7780,59174	10,00774
10,255	220725,766	7780,60155	10,00788
10,256	220717,986	7780,61136	10,00802
10,257	220710,205	7780,62117	10,00816
10,258	220702,425	7780,63098	10,00831
10,259	220694,644	7780,64079	10,00845
10,26	220686,863	7780,6506	10,00859
10,261	220679,083	7780,66041	10,00873
10,262	220671,302	7780,67022	10,00887
10,263	220663,521	7780,68003	10,00902
10,264	220655,741	7780,68984	10,00916
10,265	220647,96	7780,69965	10,0093
10,266	220640,179	7780,70946	10,00944
10,267	220632,398	7780,71927	10,00958
10,268	220624,618	7780,72908	10,00973
10,269	220616,837	7780,73889	10,00987
10,27	220609,056	7780,7487	10,01001
10,271	220601,275	7780,75851	10,01015
10,272	220593,495	7780,76832	10,01029
10,273	220585,714	7780,77813	10,01044
10,274	220577,933	7780,78794	10,01058
10,275	220570,152	7780,79775	10,01072
10,276	220562,372	7780,80756	10,01086
10,277	220554,591	7780,81737	10,01101
10,278	220546,81	7780,82718	10,01115
10,279	220539,029	7780,83699	10,01129
10,28	220531,248	7780,8468	10,01143
10,281	220523,467	7780,85661	10,01157
10,282	220515,687	7780,86642	10,01172
10,283	220507,906	7780,87623	10,01186
10,284	220500,125	7780,88604	10,012
10,285	220492,344	7780,89585	10,01214
10,286	220484,563	7780,90566	10,01229
10,287	220476,782	7780,91547	10,01243
10,288	220469,001	7780,92528	10,01257
10,289	220461,22	7780,93509	10,01271
10,29	220453,439	7780,9449	10,01285
10,291	220445,658	7780,95471	10,013

10,292	220437,877	7780,96452	10,01314
10,293	220430,096	7780,97433	10,01328
10,294	220422,315	7780,98414	10,01342
10,295	220414,534	7780,99395	10,01357
10,296	220406,753	7781,00376	10,01371
10,297	220398,972	7781,01357	10,01385
10,298	220391,191	7781,02338	10,01399
10,299	220383,41	7781,03319	10,01413
10,3	220375,629	7781,043	10,01428
10,301	220367,848	7781,05281	10,01442
10,302	220360,067	7781,06262	10,01456
10,303	220352,286	7781,07243	10,0147
10,304	220344,505	7781,08224	10,01485
10,305	220336,724	7781,09205	10,01499
10,306	220328,943	7781,10186	10,01513
10,307	220321,162	7781,11167	10,01527
10,308	220313,381	7781,12148	10,01541
10,309	220305,6	7781,13129	10,01556
10,31	220297,818	7781,1411	10,0157
10,311	220290,037	7781,15091	10,01584
10,312	220282,256	7781,16072	10,01598
10,313	220274,475	7781,17053	10,01613
10,314	220266,694	7781,18034	10,01627
10,315	220258,913	7781,19015	10,01641
10,316	220251,131	7781,19996	10,01655
10,317	220243,35	7781,20977	10,0167
10,318	220235,569	7781,21958	10,01684
10,319	220227,788	7781,22939	10,01698
10,32	220220,007	7781,2392	10,01712
10,321	220212,225	7781,24901	10,01727
15,436	180282,806	7831,42716	10,90896
15,437	180274,975	7831,43697	10,90921
15,438	180267,144	7831,44678	10,90945
15,439	180259,312	7831,45659	10,9097
15,44	180251,481	7831,4664	10,90995
15,441	180243,649	7831,47621	10,91019
15,442	180235,818	7831,48602	10,91044
15,443	180227,986	7831,49583	10,91069
15,444	180220,155	7831,50564	10,91093
15,445	180212,323	7831,51545	10,91118
15,446	180204,492	7831,52526	10,91143
15,447	180196,66	7831,53507	10,91168
15,448	180188,829	7831,54488	10,91192
15,449	180180,997	7831,55469	10,91217
15,45	180173,165	7831,5645	10,91242
15,451	180165,334	7831,57431	10,91266
15,452	180157,502	7831,58412	10,91291
15,453	180149,671	7831,59393	10,91316
15,454	180141,839	7831,60374	10,9134
15,455	180134,008	7831,61355	10,91365

15,456	180126,176	7831,62336	10,9139
15,457	180118,344	7831,63317	10,91415
15,458	180110,513	7831,64298	10,91439
15,459	180102,681	7831,65279	10,91464
15,46	180094,849	7831,6626	10,91489
15,461	180087,018	7831,67241	10,91513
15,462	180079,186	7831,68222	10,91538
15,463	180071,354	7831,69203	10,91563
15,464	180063,523	7831,70184	10,91588
15,465	180055,691	7831,71165	10,91612
15,466	180047,859	7831,72146	10,91637
15,467	180040,027	7831,73127	10,91662
15,468	180032,196	7831,74108	10,91687
15,469	180024,364	7831,75089	10,91711
15,47	180016,532	7831,7607	10,91736
15,471	180008,7	7831,77051	10,91761
15,472	180000,869	7831,78032	10,91785
15,473	179993,037	7831,79013	10,9181
15,474	179985,205	7831,79994	10,91835
15,475	179977,373	7831,80975	10,9186
15,476	179969,541	7831,81956	10,91884
15,477	179961,71	7831,82937	10,91909
15,478	179953,878	7831,83918	10,91934
15,479	179946,046	7831,84899	10,91959
15,48	179938,214	7831,8588	10,91983
15,481	179930,382	7831,86861	10,92008
15,482	179922,55	7831,87842	10,92033
15,483	179914,718	7831,88823	10,92058
15,484	179906,887	7831,89804	10,92082
15,485	179899,055	7831,90785	10,92107
15,486	179891,223	7831,91766	10,92132
15,487	179883,391	7831,92747	10,92157
15,488	179875,559	7831,93728	10,92181
15,489	179867,727	7831,94709	10,92206
15,49	179859,895	7831,9569	10,92231
15,491	179852,063	7831,96671	10,92256
15,492	179844,231	7831,97652	10,92281
15,493	179836,399	7831,98633	10,92305
15,494	179828,567	7831,99614	10,9233
15,495	179820,735	7832,00595	10,92355
15,496	179812,903	7832,01576	10,9238
15,497	179805,071	7832,02557	10,92404
15,498	179797,239	7832,03538	10,92429
15,499	179789,407	7832,04519	10,92454
15,5	179781,575	7832,055	10,92479
15,501	179773,743	7832,06481	10,92503
15,502	179765,911	7832,07462	10,92528
15,503	179758,079	7832,08443	10,92553
15,504	179750,247	7832,09424	10,92578
15,505	179742,415	7832,10405	10,92603

15,506	179734,582	7832,11386	10,92627
15,507	179726,75	7832,12367	10,92652
15,508	179718,918	7832,13348	10,92677
15,509	179711,086	7832,14329	10,92702
15,51	179703,254	7832,1531	10,92727
15,511	179695,422	7832,16291	10,92751
15,512	179687,59	7832,17272	10,92776
15,513	179679,757	7832,18253	10,92801
15,514	179671,925	7832,19234	10,92826
15,515	179664,093	7832,20215	10,92851
15,516	179656,261	7832,21196	10,92875
15,517	179648,429	7832,22177	10,929
15,518	179640,596	7832,23158	10,92925
15,519	179632,764	7832,24139	10,9295
15,52	179624,932	7832,2512	10,92975
15,521	179617,1	7832,26101	10,92999
24,025	112656,834	7915,6835	23,30105
24,026	112648,919	7915,69331	23,30429
24,027	112641,003	7915,70312	23,30753
24,028	112633,087	7915,71293	23,31077
24,029	112625,172	7915,72273	23,31401
24,03	112617,256	7915,73254	23,31726
24,031	112609,34	7915,74235	23,32051
24,032	112601,424	7915,75216	23,32376
24,033	112593,509	7915,76197	23,32701
24,034	112585,593	7915,77177	23,33026
24,035	112577,677	7915,78158	23,33351
24,036	112569,761	7915,79139	23,33676
24,037	112561,845	7915,8012	23,34002
24,038	112553,93	7915,81101	23,34328
24,039	112546,014	7915,82081	23,34653
24,04	112538,098	7915,83062	23,34979
24,041	112530,182	7915,84043	23,35305
24,042	112522,266	7915,85024	23,35632
24,043	112514,35	7915,86004	23,35958
24,044	112506,435	7915,86985	23,36284
24,045	112498,519	7915,87966	23,36611
24,046	112490,603	7915,88947	23,36938
24,047	112482,687	7915,89928	23,37265
24,048	112474,771	7915,90908	23,37592
24,049	112466,855	7915,91889	23,37919
24,05	112458,939	7915,9287	23,38246
24,051	112451,023	7915,93851	23,38573
24,052	112443,107	7915,94832	23,38901
24,053	112435,191	7915,95812	23,39229
24,054	112427,275	7915,96793	23,39556
24,055	112419,359	7915,97774	23,39884
24,056	112411,443	7915,98755	23,40213
24,057	112403,527	7915,99735	23,40541
24,058	112395,611	7916,00716	23,40869

24,059	112387,695	7916,01697	23,41198
24,06	112379,779	7916,02678	23,41526
24,061	112371,863	7916,03659	23,41855
24,062	112363,947	7916,04639	23,42184
24,063	112356,031	7916,0562	23,42513
24,064	112348,115	7916,06601	23,42842
24,065	112340,199	7916,07582	23,43172
24,066	112332,283	7916,08563	23,43501
24,067	112324,367	7916,09543	23,43831
24,068	112316,451	7916,10524	23,4416
24,069	112308,535	7916,11505	23,4449
24,07	112300,619	7916,12486	23,4482
24,071	112292,702	7916,13466	23,45151
24,072	112284,786	7916,14447	23,45481
24,073	112276,87	7916,15428	23,45811
24,074	112268,954	7916,16409	23,46142
24,075	112261,038	7916,1739	23,46473
24,076	112253,122	7916,1837	23,46803
24,077	112245,206	7916,19351	23,47134
24,078	112237,289	7916,20332	23,47466
24,079	112229,373	7916,21313	23,47797
24,08	112221,457	7916,22293	23,48128
24,081	112213,541	7916,23274	23,4846
24,082	112205,624	7916,24255	23,48791
24,083	112197,708	7916,25236	23,49123
24,084	112189,792	7916,26217	23,49455
24,085	112181,876	7916,27197	23,49787
24,086	112173,959	7916,28178	23,5012
24,087	112166,043	7916,29159	23,50452
24,088	112158,127	7916,3014	23,50785
24,089	112150,21	7916,3112	23,51117
24,09	112142,294	7916,32101	23,5145
24,091	112134,378	7916,33082	23,51783
24,092	112126,462	7916,34063	23,52116
24,093	112118,545	7916,35044	23,52449
24,094	112110,629	7916,36024	23,52783
24,095	112102,712	7916,37005	23,53116
24,096	112094,796	7916,37986	23,5345
24,097	112086,88	7916,38967	23,53784
24,098	112078,963	7916,39947	23,54118
24,099	112071,047	7916,40928	23,54452
24,1	112063,13	7916,41909	23,54786
24,101	112055,214	7916,4289	23,5512
24,102	112047,298	7916,43871	23,55455
24,103	112039,381	7916,44851	23,55789
24,104	112031,465	7916,45832	23,56124
24,105	112023,548	7916,46813	23,56459
24,106	112015,632	7916,47794	23,56794
24,107	112007,715	7916,48774	23,57129
24,108	111999,799	7916,49755	23,57465

24,109	111991,882	7916,50736	23,578
24,11	111983,966	7916,51717	23,58136
24,111	111976,049	7916,52698	23,58472
24,112	111968,133	7916,53678	23,58807
24,113	111960,216	7916,54659	23,59143
24,114	111952,3	7916,5564	23,5948
24,115	111944,383	7916,56621	23,59816
24,116	111936,467	7916,57601	23,60153
24,117	111928,55	7916,58582	23,60489
24,118	111920,633	7916,59563	23,60826
24,119	111912,717	7916,60544	23,61163
24,12	111904,8	7916,61524	23,615
24,121	111896,884	7916,62505	23,61837
32,001	49228,3979	7971,17871	24,17195
32,002	49220,4268	7971,16144	24,17189
32,003	49212,4556	7971,14415	24,17184
32,004	49204,4845	7971,12682	24,17179
32,005	49196,5134	7971,10946	24,17174
32,006	49188,5423	7971,09207	24,17168
32,007	49180,5712	7971,07464	24,17163
32,008	49172,6001	7971,05719	24,17158
32,009	49164,6291	7971,0397	24,17152
32,01	49156,658	7971,02218	24,17147
32,011	49148,687	7971,00463	24,17142
32,012	49140,716	7970,98704	24,17136
32,013	49132,745	7970,96942	24,17131
32,014	49124,7741	7970,95177	24,17126
32,015	49116,8031	7970,93409	24,1712
32,016	49108,8322	7970,91637	24,17115
32,017	49100,8613	7970,89862	24,1711
32,018	49092,8904	7970,88084	24,17104
32,019	49084,9195	7970,86303	24,17099
32,02	49076,9487	7970,84518	24,17093
32,021	49068,9779	7970,8273	24,17088
32,022	49061,007	7970,80939	24,17083
32,023	49053,0362	7970,79144	24,17077
32,024	49045,0654	7970,77346	24,17072
32,025	49037,0947	7970,75545	24,17066
32,026	49029,1239	7970,73741	24,17061
32,027	49021,1532	7970,71933	24,17055
32,028	49013,1825	7970,70122	24,1705
32,029	49005,2118	7970,68308	24,17044
32,03	48997,2411	7970,6649	24,17039
32,031	48989,2705	7970,64669	24,17033
32,032	48981,2998	7970,62845	24,17028
32,033	48973,3292	7970,61017	24,17022
32,034	48965,3586	7970,59186	24,17017
32,035	48957,388	7970,57352	24,17011
32,036	48949,4175	7970,55514	24,17005
32,037	48941,4469	7970,53673	24,17

32,038	48933,4764	7970,51829	24,16994
32,039	48925,5059	7970,49981	24,16989
32,04	48917,5354	7970,4813	24,16983
32,041	48909,5649	7970,46276	24,16977
32,042	48901,5945	7970,44418	24,16972
32,043	48893,624	7970,42557	24,16966
32,044	48885,6536	7970,40693	24,1696
32,045	48877,6832	7970,38825	24,16955
32,046	48869,7128	7970,36954	24,16949
32,047	48861,7425	7970,35079	24,16943
32,048	48853,7721	7970,33201	24,16938
32,049	48845,8018	7970,3132	24,16932
32,05	48837,8315	7970,29435	24,16926
32,051	48829,8612	7970,27547	24,16921
32,052	48821,891	7970,25655	24,16915
32,053	48813,9207	7970,2376	24,16909
32,054	48805,9505	7970,21862	24,16903
32,055	48797,9803	7970,1996	24,16898
32,056	48790,0101	7970,18055	24,16892
32,057	48782,0399	7970,16146	24,16886
32,058	48774,0698	7970,14234	24,1688
32,059	48766,0996	7970,12318	24,16874
32,06	48758,1295	7970,104	24,16869
32,061	48750,1594	7970,08477	24,16863
32,062	48742,1894	7970,06551	24,16857
32,063	48734,2193	7970,04622	24,16851
32,064	48726,2493	7970,02689	24,16845
32,065	48718,2792	7970,00753	24,16839
32,066	48710,3093	7969,98814	24,16833
32,067	48702,3393	7969,96871	24,16828
32,068	48694,3693	7969,94924	24,16822
32,069	48686,3994	7969,92974	24,16816
32,07	48678,4295	7969,9102	24,1681
32,071	48670,4596	7969,89063	24,16804
32,072	48662,4897	7969,87103	24,16798
32,073	48654,5198	7969,85139	24,16792
32,074	48646,55	7969,83172	24,16786
32,075	48638,5801	7969,81201	24,1678
32,076	48630,6103	7969,79226	24,16774
32,077	48622,6406	7969,77248	24,16768
32,078	48614,6708	7969,75267	24,16762
32,079	48606,7011	7969,73282	24,16756
32,08	48598,7313	7969,71294	24,1675
32,081	48590,7616	7969,69302	24,16744
32,082	48582,792	7969,67306	24,16738
32,083	48574,8223	7969,65307	24,16732
32,084	48566,8526	7969,63304	24,16726
32,085	48558,883	7969,61298	24,1672
32,086	48550,9134	7969,59289	24,16714
32,087	48542,9438	7969,57276	24,16708

32,088	48534,9743	7969,55259	24,16701
32,089	48527,0047	7969,53239	24,16695
32,09	48519,0352	7969,51215	24,16689
32,091	48511,0657	7969,49187	24,16683
32,092	48503,0962	7969,47156	24,16677
32,093	48495,1268	7969,45122	24,16671
32,094	48487,1573	7969,43084	24,16664
32,095	48479,1879	7969,41042	24,16658
32,096	48471,2185	7969,38997	24,16652
32,097	48463,2491	7969,36948	24,16646
32,098	48455,2798	7969,34895	24,1664
32,099	48447,3104	7969,32839	24,16633
32,1	48439,3411	7969,3078	24,16627
32,101	48431,3718	7969,28716	24,16621
32,102	48423,4025	7969,2665	24,16615
32,103	48415,4333	7969,24579	24,16608
32,104	48407,464	7969,22505	24,16602
32,105	48399,4948	7969,20427	24,16596
32,106	48391,5256	7969,18346	24,16589
32,107	48383,5565	7969,16261	24,16583
32,108	48375,5873	7969,14173	24,16577
32,109	48367,6182	7969,1208	24,1657
32,11	48359,6491	7969,09984	24,16564
32,111	48351,68	7969,07885	24,16558
35,185	24495,1657	7158,39099	24,29135
35,195	24423,6252	7149,70152	24,26214
35,205	24352,1719	7140,93943	24,23269
35,215	24280,8067	7132,10444	24,20299
35,225	24209,5301	7123,19628	24,17305
35,235	24138,343	7114,2147	24,14286
35,245	24067,2461	7105,15942	24,11241
35,255	23996,24	7096,03021	24,08172
35,265	23925,3257	7086,82682	24,05078
35,275	23854,5038	7077,549	24,01959
35,285	23783,775	7068,19652	23,98814
35,295	23713,1401	7058,76915	23,95644
35,305	23642,5998	7049,26669	23,92449
35,315	23572,155	7039,6889	23,89228
35,325	23501,8063	7030,03559	23,85982
35,335	23431,5545	7020,30656	23,8271
35,345	23361,4004	7010,50161	23,79413
35,355	23291,3448	7000,62055	23,7609
35,365	23221,3883	6990,66322	23,72741
35,375	23151,5318	6980,62944	23,69366
35,385	23081,776	6970,51904	23,65965
35,395	23012,1216	6960,33188	23,62538
35,405	22942,5696	6950,06781	23,59085
35,415	22873,1205	6939,72668	23,55607
35,425	22803,7753	6929,30836	23,52102
35,435	22734,5346	6918,81275	23,48571

35,445	22665,3993	6908,23971	23,45013
35,455	22596,3701	6897,58915	23,4143
35,465	22527,4478	6886,86097	23,3782
35,475	22458,6331	6876,05508	23,34184
35,485	22389,9269	6865,17141	23,30521
35,495	22321,33	6854,20988	23,26832
35,505	22252,843	6843,17044	23,23117
35,515	22184,4668	6832,05303	23,19376
35,525	22116,2022	6820,85762	23,15608
35,535	22048,0499	6809,58417	23,11813
35,545	21980,0108	6798,23265	23,07992
35,555	21912,0855	6786,80307	23,04145
35,565	21844,275	6775,29542	23,00271
35,575	21776,5799	6763,7097	22,9637
35,585	21709,001	6752,04593	22,92444
35,595	21641,5392	6740,30414	22,8849
35,605	21574,1952	6728,48438	22,84511
35,615	21506,9698	6716,58669	22,80505
35,625	21439,8638	6704,61113	22,76472
35,635	21372,8778	6692,55777	22,72413
35,645	21306,0129	6680,4267	22,68328
35,655	21239,2696	6668,218	22,64216
35,665	21172,6488	6655,93179	22,60078
35,675	21106,1512	6643,56817	22,55914
35,685	21039,7777	6631,12727	22,51724
35,695	20973,5289	6618,60923	22,47507
35,705	20907,4057	6606,0142	22,43264
35,715	20841,4089	6593,34234	22,38996
35,725	20775,5391	6580,59381	22,34701
35,735	20709,7973	6567,76881	22,3038
35,745	20644,184	6554,86752	22,26033
35,755	20578,7002	6541,89016	22,2166
35,765	20513,3465	6528,83694	22,17262
35,775	20448,1237	6515,70808	22,12838
35,785	20383,0326	6502,50384	22,08388
35,795	20318,0739	6489,22446	22,03912
35,805	20253,2483	6475,87022	21,99412
35,815	20188,5567	6462,44138	21,94885
35,825	20123,9997	6448,93824	21,90334
35,835	20059,5782	6435,3611	21,85757
35,845	19995,2928	6421,71027	21,81156
35,855	19931,1442	6407,98608	21,76529
35,865	19867,1333	6394,18886	21,71877
35,875	19803,2607	6380,31896	21,67201
35,885	19739,5272	6366,37676	21,625
35,895	19675,9334	6352,36261	21,57775
35,905	19612,4801	6338,27691	21,53025
35,915	19549,1681	6324,12005	21,48251
35,925	19485,998	6309,89244	21,43452
35,935	19422,9705	6295,59452	21,3863

35,945	19360,0863	6281,2267	21,33784
35,955	19297,3462	6266,78944	21,28914
37,005	13613,7853	4504,99034	15,3282
37,015	13568,8228	4487,51185	15,26889
37,025	13524,035	4470,05248	15,20965
37,035	13479,4217	4452,61302	15,15048
37,045	13434,9826	4435,19431	15,09137
37,055	13390,7177	4417,79712	15,03233
37,065	13346,6266	4400,42228	14,97337
37,075	13302,7092	4383,07054	14,91448
37,085	13258,9651	4365,7427	14,85567
37,095	13215,3942	4348,43953	14,79694
37,105	13171,9963	4331,16179	14,73829
37,115	13128,7709	4313,91022	14,67973
37,125	13085,718	4296,68559	14,62126
37,135	13042,8371	4279,48862	14,56288
37,145	13000,1281	4262,32004	14,50459
37,155	12957,5906	4245,18057	14,4464
37,165	12915,2244	4228,07093	14,38831
37,175	12873,0291	4210,99181	14,33032
40,185	5710,82735	1235,79815	3,861
40,195	5698,49037	1231,60222	3,84717
40,205	5686,19524	1227,42754	3,83341
40,215	5673,94175	1223,27396	3,81972
40,225	5661,72969	1219,14137	3,80611
40,235	5649,55885	1215,02964	3,79257
40,245	5637,42902	1210,93865	3,7791
40,255	5625,34001	1206,86826	3,76571
40,265	5613,29159	1202,81836	3,75238
40,275	5601,28357	1198,78883	3,73913
40,285	5589,31575	1194,77955	3,72595
40,295	5577,38791	1190,79038	3,71283
40,305	5565,49987	1186,82122	3,69979
40,315	5553,65142	1182,87194	3,68681
40,325	5541,84237	1178,94243	3,67391
40,335	5530,07251	1175,03256	3,66107
40,345	5518,34165	1171,14222	3,6483
40,355	5506,6496	1167,27129	3,63559
40,365	5494,99616	1163,41966	3,62296
40,375	5483,38114	1159,58722	3,61039
40,385	5471,80436	1155,77383	3,59788
40,395	5460,26561	1151,97941	3,58544
40,405	5448,7647	1148,20382	3,57307
40,415	5437,30147	1144,44696	3,56076
40,425	5425,8757	1140,70872	3,54851
40,435	5414,48723	1136,98898	3,53633
40,445	5403,13586	1133,28764	3,52422
40,455	5391,82142	1129,60458	3,51216
40,465	5380,54371	1125,93971	3,50017
40,475	5369,30256	1122,2929	3,48824

40,485	5358,09779	1118,66405	3,47637
40,495	5346,92922	1115,05305	3,46456
40,505	5335,79667	1111,45981	3,45282
40,515	5324,69997	1107,88421	3,44113
40,525	5313,63893	1104,32614	3,42951
40,535	5302,61339	1100,78551	3,41795
40,545	5291,62316	1097,26221	3,40644
40,555	5280,66809	1093,75614	3,39499
40,565	5269,74798	1090,2672	3,38361
40,575	5258,86269	1086,79527	3,37228
40,585	5248,01202	1083,34027	3,36101
40,595	5237,19582	1079,9021	3,34979
40,605	5226,41392	1076,48065	3,33864
40,615	5215,66616	1073,07582	3,32754
40,625	5204,95235	1069,68751	3,3165
40,635	5194,27235	1066,31564	3,30551
40,645	5183,62599	1062,96009	3,29458
40,655	5173,0131	1059,62079	3,28371
40,665	5162,43352	1056,29761	3,27289
40,675	5151,88709	1052,99049	3,26212
40,685	5141,37365	1049,69931	3,25141
40,695	5130,89305	1046,42398	3,24076
40,705	5120,44512	1043,16442	3,23015
40,715	5110,02971	1039,92053	3,2196
40,725	5099,64666	1036,69221	3,20911
40,735	5089,29581	1033,47938	3,19867
40,745	5078,97702	1030,28193	3,18828
40,755	5068,69013	1027,0998	3,17794
40,765	5058,43497	1023,93287	3,16765
40,775	5048,21142	1020,78107	3,15742
40,785	5038,0193	1017,6443	3,14723
40,795	5027,85848	1014,52248	3,1371
40,805	5017,7288	1011,41552	3,12702
40,815	5007,63012	1008,32333	3,11698
40,825	4997,56229	1005,24583	3,107
40,835	4987,52516	1002,18293	3,09707
40,845	4977,51858	999,13454	3,08719
40,855	4967,54242	996,10057	3,07735
40,865	4957,59652	993,08096	3,06757
40,875	4947,68075	990,0756	3,05783
40,885	4937,79496	987,08443	3,04814
40,895	4927,93902	984,10734	3,0385
40,905	4918,11277	981,14427	3,0289
40,915	4908,31609	978,19514	3,01936
40,925	4898,54882	975,25985	3,00986
40,935	4888,81084	972,33833	3,0004
40,945	4879,10201	969,43051	2,991
40,955	4869,42219	966,53629	2,98163
40,965	4859,77124	963,6556	2,97232
40,975	4850,14903	960,78837	2,96305

40,985	4840,55543	957,93451	2,95383
40,995	4830,9903	955,09395	2,94465
45,555	2183,1136	365,43157	1,08441
45,565	2179,46198	364,89316	1,08276
45,575	2175,81573	364,35629	1,08111
45,585	2172,17485	363,82093	1,07947
45,595	2168,53931	363,28708	1,07783
45,605	2164,9091	362,75475	1,0762
45,615	2161,28421	362,22392	1,07457
45,625	2157,66462	361,69459	1,07295
45,635	2154,05031	361,16676	1,07133
45,645	2150,44128	360,64041	1,06971
45,655	2146,8375	360,11555	1,0681
45,665	2143,23896	359,59216	1,06649
45,675	2139,64565	359,07024	1,06489
45,685	2136,05755	358,54979	1,0633
45,695	2132,47465	358,0308	1,0617
45,705	2128,89693	357,51326	1,06012
45,715	2125,32438	356,99718	1,05853
45,725	2121,75699	356,48253	1,05696
45,735	2118,19473	355,96933	1,05538
45,745	2114,63759	355,45756	1,05381
45,755	2111,08557	354,94722	1,05225
45,765	2107,53865	354,4383	1,05069
45,775	2103,9968	353,9308	1,04913
45,785	2100,46002	353,42472	1,04758
45,795	2096,9283	352,92004	1,04603
45,805	2093,40162	352,41676	1,04449
45,815	2089,87996	351,91488	1,04295
45,825	2086,36332	351,41439	1,04142
45,835	2082,85167	350,91529	1,03989
45,845	2079,34501	350,41757	1,03836
45,855	2075,84331	349,92123	1,03684
45,865	2072,34658	349,42626	1,03532
45,875	2068,85478	348,93266	1,03381
45,885	2065,36792	348,44042	1,0323
45,895	2061,88597	347,94954	1,0308
45,905	2058,40892	347,46001	1,0293
45,915	2054,93677	346,97182	1,0278
45,925	2051,46948	346,48498	1,02631
45,935	2048,00706	345,99948	1,02483
45,945	2044,54949	345,5153	1,02334
45,955	2041,09675	345,03246	1,02186
45,965	2037,64884	344,55094	1,02039
45,975	2034,20573	344,07074	1,01892
45,985	2030,76742	343,59185	1,01745
45,995	2027,33389	343,11427	1,01599
46,005	2023,90513	342,63799	1,01453
46,015	2020,48112	342,16302	1,01308
46,025	2017,06186	341,68933	1,01163

46,035	2013,64733	341,21694	1,01018
46,045	2010,23752	340,74584	1,00874
46,055	2006,83241	340,27601	1,0073
46,065	2003,432	339,80746	1,00586
46,075	2000,03626	339,34019	1,00443
46,085	1996,64519	338,87418	1,00301
46,095	1993,25877	338,40943	1,00158
46,105	1989,877	337,94594	1,00017
46,115	1986,49985	337,4837	0,99875
46,125	1983,12732	337,02272	0,99734
46,135	1979,75939	336,56298	0,99593
46,145	1976,39605	336,10448	0,99453
46,155	1973,0373	335,64721	0,99313
46,165	1969,68311	335,19118	0,99174
46,175	1966,33347	334,73637	0,99034
50,665	789,2179	210,62174	0,61326
50,675	787,1125	210,45935	0,61277
50,685	785,00872	210,29727	0,61228
50,695	782,90655	210,13551	0,6118
50,705	780,806	209,97407	0,61131
50,715	778,70707	209,81294	0,61082
50,725	776,60975	209,65213	0,61034
50,735	774,51403	209,49164	0,60985
50,745	772,41991	209,33146	0,60937
50,755	770,3274	209,1716	0,60889
50,765	768,23648	209,01205	0,60841
50,775	766,14716	208,85281	0,60793
50,785	764,05942	208,69388	0,60745
50,795	761,97328	208,53526	0,60697
50,805	759,88872	208,37696	0,60649
50,815	757,80574	208,21896	0,60601
50,825	755,72434	208,06127	0,60554
50,835	753,64451	207,90389	0,60506
50,845	751,56626	207,74682	0,60459
50,855	749,48957	207,59005	0,60412
50,865	747,41445	207,43359	0,60365
50,875	745,3409	207,27743	0,60317
50,885	743,2689	207,12158	0,6027
50,895	741,19847	206,96603	0,60223
50,905	739,12958	206,81078	0,60177
50,915	737,06225	206,65583	0,6013
50,925	734,99647	206,50119	0,60083
50,935	732,93223	206,34684	0,60037
50,945	730,86953	206,1928	0,5999
50,955	728,80837	206,03905	0,59944
50,965	726,74875	205,8856	0,59898
50,975	724,69066	205,73245	0,59851
50,985	722,6341	205,57959	0,59805
50,995	720,57906	205,42703	0,59759
51,005	718,52555	205,27477	0,59713

51,015	716,47357	205,1228	0,59668
51,025	714,4231	204,97112	0,59622
51,035	712,37414	204,81973	0,59576
51,045	710,3267	204,66864	0,59531
51,055	708,28077	204,51784	0,59485
51,065	706,23634	204,36733	0,5944
51,075	704,19342	204,2171	0,59394
51,085	702,152	204,06717	0,59349
51,095	700,11208	203,91753	0,59304
51,105	698,07365	203,76817	0,59259
51,115	696,03671	203,6191	0,59214
51,125	694,00127	203,47032	0,59169
51,135	691,96731	203,32182	0,59124
51,145	689,93483	203,17361	0,5908
51,155	687,90383	203,02568	0,59035
51,165	685,87431	202,87804	0,58991
51,175	683,84627	202,73067	0,58946
51,185	681,8197	202,5836	0,58902
51,195	679,7946	202,4368	0,58858
51,205	677,77096	202,29028	0,58813
51,215	675,74879	202,14404	0,58769
51,225	673,72808	201,99808	0,58725
51,235	671,70883	201,8524	0,58681
51,245	669,69103	201,707	0,58638
51,255	667,67469	201,56187	0,58594
51,265	665,65979	201,41703	0,5855
51,275	663,64635	201,27245	0,58506
51,285	661,63434	201,12816	0,58463
51,295	659,62378	200,98413	0,5842
51,305	657,61466	200,84039	0,58376
51,315	655,60698	200,69691	0,58333
51,325	653,60072	200,55371	0,5829
51,335	651,5959	200,41078	0,58247
51,345	649,59251	200,26812	0,58204
51,355	647,59054	200,12573	0,58161
51,365	645,58999	199,98361	0,58118
51,375	643,59086	199,84176	0,58075
51,385	641,59315	199,70018	0,58033
51,395	639,59686	199,55886	0,5799
51,405	637,60198	199,41782	0,57947
51,415	635,6085	199,27704	0,57905
51,425	633,61644	199,13652	0,57863
51,435	631,62577	198,99628	0,5782
51,445	629,63651	198,85629	0,57778
51,455	627,64864	198,71657	0,57736
51,465	625,66218	198,57712	0,57694
51,475	623,6771	198,43792	0,57652
51,485	621,69342	198,29899	0,5761
51,495	619,71112	198,16032	0,57568
51,505	617,73021	198,02191	0,57527

51,515	615,75068	197,88376	0,57485
51,525	613,77253	197,74588	0,57443
51,535	611,79576	197,60825	0,57402
51,545	609,82037	197,47087	0,57361
51,555	607,84634	197,33376	0,57319
51,565	605,87369	197,19691	0,57278
51,575	603,90241	197,06031	0,57237
51,585	601,93248	196,92396	0,57196
51,595	599,96393	196,78787	0,57155
51,605	597,99673	196,65204	0,57114
51,615	596,03088	196,51646	0,57073
51,625	594,0664	196,38113	0,57032
51,635	592,10326	196,24606	0,56991
51,645	590,14148	196,11124	0,56951
51,655	588,18103	195,97667	0,5691