UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Monotonicidade de Zeros de Polinômios Ortogonais Clássicos

Cristiane Bender
Orientador: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli

Presidente Prudente, Junho de 2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Monotonicidade de Zeros de Polinômios Ortogonais Clássicos

Cristiane Bender
Orientador: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Junho de 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Bender, Cristiane.
B396m Monotonicidade de zeros de polinômios ortogonais clássicos / Cristiane Bender. - Presidente Prudente : [s.n], 2013
81 f.

Orientador: Fernando Rodrigo Rafaeli
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Polinômios ortogonais. 2. Monotonicidade. 3. Limitantes. I. Rafaeli, Fernando Rodrigo. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente

BANCA EXAMINADORA

Fernando R. Rafaeli

PROF. DR. FERNANDO RODRIGO RAFAELI
ORIENTADOR

PROFA. DRA. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI
UNESP/FCT

Vanessagpaschoaf

PROFA. DRA. VANESSA GONÇALVES PASCHOA FERRAZ
UNIFESP

Cristiane Bender

CRISTIANE BENDER

Presidente Prudente (SP), 20 de junho 2013.

RESULTADO: APROVADO

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Seção Técnica de Pós-Graduação
Rua Roberto Simonsen, 305 CEP 19060-900 Presidente Prudente SP
Tel 18 3229-5318 fax 18 3223-4519 posgrad@fct.unesp.br

Aos meus pais,
Darci e Ana Maria, dedico!

Agradecimentos

Agradeço, antes de tudo, a Deus por guiar cada um dos meus passos, tendo-me permitido viver este período de grande aprendizagem e pelo convívio com pessoas maravilhosas ao longo desta jornada.

Aos meus pais, pelo exemplo de vida e porque toda conquista tem maior significado quando percebo que para eles essa e outras conquistas são e sempre serão motivos de orgulho. À minha irmã pelo apoio e amizade. Ao meu namorado pelo amor e pela paciência diante de minha ausência.

Ao Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli, orientador deste trabalho, que desde o início, foi um grande incentivador. Agradeço-lhe a paciência, a disponibilidade e todos os ensinamentos.

Aos demais professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, por todos os conhecimentos adquiridos e construídos ao longo das disciplinas e demais atividades.

À amiga-irmã Tatiane Tambarussi. Não consigo imaginar como teria sido este período sem você por perto. É "Miguinha", juntas chegamos até aqui.

Aos demais colegas da segunda turma do curso de mestrado do Pós-Mac: Camila, Clóvis, Juliano, Larissa, Lívia, Pedro e Reginaldo, pela companhia e descontração, juntando-se a esses, a amiga Patrícia, da terceira turma, que também fez parte do nosso grupo. Também à primeira turma, que durante o período das disciplinas tantas vezes nos auxiliaram, em especial à Vanderléa e ao Diego, sobretudo pela amizade.

Não me esqueceria da amiga Chaenne, pela bondade de nos receber em sua casa sem ao menos nos conhecer e por nos propiciar momentos agradáveis.

Ao pessoal de São José do Rio Preto, principalmente, a todos do Grupo de Polinômios Ortogonais, pelo acolhimento durante o período da pesquisa.

Aos membros das bancas de qualificação e defesa: Eliana Xavier Linhares de Andrade e Regina Litz Lamblém, Vanessa Avansini Botta Pirani e Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz, pelas tantas contribuições. A última, em especial, pelos tantos esclarecimentos e pela atenção com que sempre me respondeu.

As professoras da graduação Adriana e Maristela que dispertaram em mim o interesse em continuar os estudos. À colega de graduação, Glauce, que foi um exemplo para nós, mostrando que era possível. Ao orientador da especialização, Adilandri, que dividiu seus conhecimentos, dando-me condições de chegar até aqui.

Aos colegas do IFMT que adequaram meus horários, possibilitando a conclusão do mestrado. Em especial ao Epaminondas, pela correção deste trabalho.

Aos funcionários da Seção de Pós-graduação, pelo auxílio durante o curso. Finalmente, à Capes, pelo auxílio financeiro.

"Tudo é do Pai, toda honra e toda glória,
é Dele a vitória alcançada em minha vida."
Frederico Cruz

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre a monotonicidade de zeros de polinômios ortogonais clássicos de variável contínua e de variável discreta em relação aos seus parâmetros. São também apresentados limitantes para os zeros de alguns destes polinômios.
Palavras-chave: Polinômios Ortogonais, Zeros, Monotonicidade, Limitantes.

Abstract

This work presents a study about the monotonicity of zeros of classical orthogonal polynomials of continuous and discrete variable with respect to its parameters. It is also given bounds for the zeros of some of these polynomials.
Keywords: Orthogonal polynomials, Zeros, Monotonicity, Bounds.

Sumário

Capítulo

1

Introdução

A pesquisa apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Computacional, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus Presidente Prudente surgiu da "curiosidade" de estudar o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais, tendo em vista a importância do tema em aplicações na Matemática e em outras Ciências Aplicadas. Neste trabalho, estudaremos o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos de variável contínua: Jacobi, Laguerre e Hermite, e de variável discreta: Charlier, Meixner, Kravchuck e Hahn; apoiados, principalmente, nos trabalhos de RAFAELI [21], no que diz respeito aos polinômios de variável contínua, e FERRAZ [8], que trata dos polinômios de variável discreta, até seus estudos preliminares pouco explorados.

Apresentaremos, no segundo capítulo, definições e resultados conhecidos sobre polinômios ortogonais que serão indispensáveis para a compreensão dos demais capítulos. Além disso, veremos sua importância no tema de integração numérica, já que os zeros dos polinômios ortogonais são os nós das fórmulas de quadratura de Gauss, uma das aplicações mais conhecidas desses polinômios. Estudaremos, ainda, sequências encadeadas, assunto que será utilizado no último capítulo, para demonstrar que uma matriz é positiva definida.

No terceiro capítulo, apresentaremos teoremas sobre o comportamento dos zeros dos polinônios ortogonais: o Teorema de Markov para variável contínua e sua versão para variável discreta, que tratam da monotonicidade dos zeros como funções de seus parâmetros, e o Teorema de Krasikov e Zarkh, sobre a distância entre quaisquer dois zeros consecutivos dos polinômios ortogonais discretos. Além disso, aplicaremos esses teoremas aos zeros dos polinômios ortogonais clássicos e, para melhor compreensão, ilustraremos graficamente o comportamento desses zeros, com os gráficos obtidos através do programa Mathematica.

No quarto capítulo, apresentaremos limitantes para os zeros de polinômios ortogonais clássicos, obtidos através dos teoremas de Perron-Frobenius e de Hellmann-Feynman, utilizando relações de limites entre zeros de polinômios ortogonais já conhecidas. Nosso objetivo é alterar essas relações, encontrando funções simples envolvendo os zeros dos polinômios, de forma que a convergência passe a ser monótona, ora crescente e ora decrescente, para, então, determinarmos limitantes inferiores e superiores para os zeros dos polinômios ortogonais. Novamente, ilustraremos os resultados.

Capítulo 2

Polinômios Ortogonais na Reta Real

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados da teoria básica sobre polinômios ortogonais na reta real, que podem ser encontrados nos textos clássicos de Chihara [6] e Szegő [23].

2.1 Polinômios Algébricos

Chama-se função polinomial ou polinômio algébrico na variável x a função

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

definida para todo x real, onde $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ e são chamados coeficientes do polinômio.

Denotaremos o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo n por Π_n, isto é,

$$\Pi_n := \left\{ a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 : a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se um polinômio algébrico é de grau exatamente n, então devemos ter $a_n \neq 0$.

O espaço vetorial de todos os polinômios será denotado por Π, ou seja,

$$\Pi := \bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k.$$

Se $p(\zeta) = 0$, dizemos que ζ é uma raiz ou um zero do polinômio $p(x)$.

Enunciaremos a seguir um teorema muito importante sobre os zeros de um polinômio algébrico.

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental da Álgebra) *Qualquer polinômio $p(x)$ de grau n, $n \geq 1$, com coeficientes complexos tem exatamente n zeros complexos $x_1, x_2, \cdots, x_n$.*

Além disso, $p(x)$ pode ser unicamente representado por

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),$$

onde a_n é o coeficiente do termo x^n.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [9].

Observação 2.1 Outra forma de representar um polinômio de grau exatamente n é a que segue:

$$p_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n,1}x^1 + a_{n,0},$$

onde o primeiro índice de cada coeficiente representa o grau do polinômio e o segundo índice corresponde ao termo cujo coeficiente está acompanhando.

2.2 Sequência de Polinômios Ortogonais

Seja $\phi(x)$ uma função não-decrescente, não-constante e limitada em um intervalo (a, b), finito ou infinito, que define uma medida $d\phi$ em (a, b). Definimos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Pi \times \Pi \to \mathbb{R}$, através da integral de Stieltjes

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)d\phi(x), \tag{2.1}$$

que será utilizado a partir daqui nos nossos estudos sobre polinômios ortogonais.

Definição 2.1 *Dado um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em Π, dizemos que a sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais (SPO) com relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se*

(i) $P_n(x)$ *é de grau exatamente* n, $n \geq 0$;

(ii) $\langle P_n, P_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n > 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$

Definição 2.2 *Uma sequência de polinômios ortogonais, onde $\rho_n = 1$, é uma sequência de polinômios ortonormais e será denotada por $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.*

2.3 Propriedades Básicas

Teorema 2.2 *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais. Toda subsequência finita $\{P_k(x)\}_{k=0}^{m}$ é linearmente independente.*

Demonstração. Tomemos escalares c_k, $1 \leq k \leq m$, tais que $\sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x) = 0$. Por um lado, para cada polinômio $P_j(x)$, $1 \leq j \leq m$, temos

$$\left\langle \sum_{k=0}^{m} c_k P_k, P_j \right\rangle = \langle 0, P_j \rangle = 0. \tag{2.2}$$

Por outro lado, a definição de ortogonalidade implica que

$$\sum_{k=0}^{m} c_k \langle P_k, P_j \rangle = c_j \langle P_j, P_j \rangle. \tag{2.3}$$

Como $\langle P_j, P_j \rangle > 0$, de (2.2) e (2.3) segue que $c_j = 0$ para cada j, o que demonstra o teorema. ∎

Corolário 2.1 *Seja $p(x)$ um polinômio de grau menor ou igual a n. Então, $p(x)$ pode ser unicamente representado por*

$$p(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots + c_n P_n(x),$$

com coeficiente reais $c_0, c_1, \cdots, c_n$.

Demonstração. Devemos provar que $\mathcal{P} = \{P_0, P_1, \cdots, P_n\}$ forma uma base para Π_n. Mas isso é uma consequência do teorema anterior, já que Π_n é um espaço linear de dimensão $n+1$ e $P_0, P_1, \cdots, P_n$ são $n+1$ elementos linearmente independentes de Π_n. Portanto, cada elemento de Π_n pode ser unicamente representado como combinação linear de elementos de $\mathcal{P}$. ∎

Teorema 2.3 *Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em Π e $p(x)$ um polinômio qualquer. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\{P_n(x)\}$ é uma sequência de polinômios ortogonais em relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

(b) $\langle p, P_n \rangle = \begin{cases} 0, \textit{se } p(x) \textit{ tem grau menor que } n, \\ K_n \neq 0, \textit{se } p(x) \textit{ tem grau exatamente } n; \end{cases}$

(c) $\langle x^m, P_n \rangle = 0$ para $m < n$ e $\langle x^n, P_n \rangle \neq 0$.

Demonstração. (a)⇒(b) Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $p(x)$ um polinômio de grau m. Então, pelo Corolário 2.1, existem escalares c_k tais que

$$p(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x), \quad c_m \neq 0.$$

Logo,

$$\langle p, P_n \rangle = \sum_{k=0}^{m} c_k \langle P_k, P_n \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ c_n \langle P_n, P_n \rangle \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Portanto, (a)⇒(b). É imediato que (b)⇒(c).

Consideremos $P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} x^k$, $a_{m,m} \neq 0$ e provemos agora que (c)⇒(a).

(i) Seja $m < n$. Então,

$$\langle P_m, P_n \rangle = \sum_{k=0}^{m} a_{m,k} \left\langle x^k, P_n \right\rangle \overset{(c)}{=} 0.$$

(ii) Seja $m = n$. Logo

$$\langle P_n, P_n \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \left\langle x^k, P_n \right\rangle = a_{n,n} \langle x^n, P_n \rangle \overset{(c)}{\neq} 0.$$

Então, (c)⇒(a) e isso demonstra o teorema. ■

Teorema 2.4 *Sejam $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ duas sequências de polinômios ortogonais com respeito ao mesmo produto interno. Então, para cada $j \geq 0$, existe uma constante c_j tal que $Q_j(x) = c_j P_j(x)$.*

Demonstração. Seja $Q_j(x) \in \{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Pelo Corolário 2.1, existem escalares $c_0, \cdots, c_j$, $c_j \neq 0$, tais que

$$Q_j(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots + c_j P_j(x).$$

Mas, pelo Teorema 2.3 item (b) temos

$$\langle Q_j, P_0 \rangle = \langle Q_j, P_1 \rangle = \cdots = \langle Q_j, P_{j-1} \rangle = 0.$$

Assim, para cada $k = 0, \cdots, j-1$, temos

$$0 = \langle Q_j, P_k \rangle = \sum_{i=0}^{j} c_i \langle P_i, P_k \rangle = c_k \langle P_k, P_k \rangle .$$

Como $\langle P_k, P_k \rangle > 0$, então $c_k = 0,\ 1 \leq k \leq j-1$. Portanto,

$$Q_j(x) = c_j P_j(x),$$

e, ainda, $c_j = \langle Q_j, P_j \rangle / \langle P_j, P_j \rangle$. ■

Veremos, a seguir, uma importante propriedade dos polinômios ortogonais, que nos permite obter o polinômio P_{n+1} a partir dos polinômios P_n e P_{n-1}.

Teorema 2.5 (Relação de recorrência de três termos) *Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então,*

$$P_{n+1}(x) = (A_{n+1}x - B_{n+1})P_n(x) - C_{n+1}P_{n-1}(x),\ n \geq 0, \tag{2.4}$$

com $P_0(x) = 1,\ P_{-1}(x) = 0,\ \ A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} \in \mathbb{R}$ e

$$A_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0,\ B_{n+1} = A_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle},\ C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{A_n}\frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} \neq 0. \tag{2.5}$$

Demonstração. Seja $P_n(x) = a_{n,n}x^n + \cdots + a_{n,1}x + a_{n,0}$.

Como xP_n é um polinômio de grau $n+1$, pelo Corolário 2.1 podemos escrever

$$xP_n(x) = c_0P_0(x) + \cdots + c_nP_n(x) + c_{n+1}P_{n+1}(x). \tag{2.6}$$

Multiplicando $P_n(x)$ por x e igualando o coeficiente de seu termo de maior grau ao coeficiente do termo de maior grau de (2.6), obtemos $a_{n,n} = c_{n+1}a_{n+1,n+1}$. Logo,

$$c_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}. \tag{2.7}$$

Pela ortogonalidade, para cada $k = 0, \cdots, n+1$, temos

$$\langle xP_n, P_k\rangle = c_k \langle P_k, P_k\rangle\,. \tag{2.8}$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.3 (item b),

$$\langle xP_n, P_k\rangle = \langle P_n, xP_k\rangle = 0, \tag{2.9}$$

para $k = 0, \cdots, n-2$.

De (2.8) e (2.9), segue que $c_k = 0$ para $0 \leq k \leq n-2$. Então, podemos reescrever (2.6) da seguinte forma:

$$xP_n(x) = c_{n-1}P_{n-1}(x) + c_nP_n(x) + c_{n+1}P_{n+1}(x)$$

ou, ainda,

$$P_{n+1}(x) = (A_{n+1}x - B_{n+1})\,P_n(x) - C_{n+1}P_{n-1}(x) \tag{2.10}$$

com $A_{n+1} = \dfrac{1}{c_{n+1}}$, $B_{n+1} = \dfrac{c_n}{c_{n+1}}$ e $C_{n+1} = \dfrac{c_{n-1}}{c_{n+1}}$.

De (2.7), resulta que

$$A_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}.$$

Por (2.10), temos

$$0 = \langle P_{n+1}, P_n \rangle = A_{n+1} \langle xP_n, P_n \rangle - B_{n+1} \langle P_n, P_n \rangle - C_{n+1} \underbrace{\langle P_{n-1}, P_n \rangle}_{=0}.$$

Logo,

$$B_{n+1} = A_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

Analogamente,

$$0 = \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle = A_{n+1} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle - B_{n+1} \langle P_n, P_{n-1} \rangle - C_{n+1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle .$$

Logo, como $\langle P_n, P_{n-1} \rangle = 0$,

$$C_{n+1} = A_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

Para melhorar este resultado, observe que

$$P_n(x) = (A_n x - B_n) P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x),$$

ou seja,

$$xP_{n-1}(x) = \frac{1}{A_n} P_n(x) + \frac{B_n}{A_n} P_{n-1}(x) + \frac{C_n}{A_n} P_{n-2}(x).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \langle xP_n, P_{n-1} \rangle \quad &= \langle P_n, xP_{n-1} \rangle = \frac{1}{A_n} \langle P_n, P_n \rangle + \frac{B_n}{A_n} \underbrace{\langle P_n, P_{n-1}(x) \rangle}_{=0} + \frac{C_n}{A_n} \underbrace{\langle P_n, P_{n-2}(x) \rangle}_{=0} \\ &= \frac{1}{A_n} \langle P_n, P_n \rangle . \end{aligned}$$

Portanto,

$$C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{A_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}.$$

■

Destacaremos dois casos particulares de polinômios ortogonais, os polinômios mônicos e os ortonormais.

Um polinômio é mônico se o coeficiente de seu termo de maior grau é igual a um. Podemos construir uma sequência de polinômios ortogonais mônicos $\left\{ \widehat{P}_n(x) \right\}_{n=0}^{\infty}$ a partir de uma sequência de polinômios ortogonais, dividindo cada polinômio $P_n(x)$ pelo correspondente coeficiente do termo de maior grau, isto é,

$$\widehat{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_{n,n}}, \ n \geq 1.$$

A relação de recorrência de três termos para esses polinômios é, então, dada por

$$\widehat{P}_{n+1}(x) = \left(x - \widehat{B}_{n+1}\right) \widehat{P}_n(x) - \widehat{C}_{n+1}\widehat{P}_{n-1}(x), \tag{2.11}$$

com

$$\widehat{B}_{n+1} = \frac{\left\langle x\widehat{P}_n, \widehat{P}_n \right\rangle}{\left\langle \widehat{P}_n, \widehat{P}_n \right\rangle} \quad \text{e} \quad \widehat{C}_{n+1} = \frac{\left\langle \widehat{P}_n, \widehat{P}_n \right\rangle}{\left\langle \widehat{P}_{n-1}, \widehat{P}_{n-1} \right\rangle},$$

pois $a_{n,n} = 1, n \geq 0$.

Podemos obter uma sequência de polinômios ortonormais $\{p_n(x)\}$ através de uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}$, dividindo cada polinômio P_n por sua norma. Logo,

$$p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}, \ n \geq 1,$$

com $\|P_n\| = \sqrt{\langle P_n, P_n \rangle}$.

Como todo polinômio ortonormal é um polinômio ortogonal, da relação de recorrência (2.4) temos

$$p_{n+1}(x) = (A_{n+1}x - B_{n+1})\, p_n(x) - C_{n+1}p_{n-1}(x), \ n \geq 0, \tag{2.12}$$

com

$$\begin{gathered} A_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}}, \qquad B_{n+1} = A_{n+1}\frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle} = A_{n+1} \langle xp_n, p_n \rangle\,, \\ C_{n+1} = \frac{A_{n+1}}{A_n}\frac{\langle p_n, p_n \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle} = \frac{A_{n+1}}{A_n}. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Teorema 2.6 (Identidade de Christoffel-Darboux) *Seja $\{p_n(x)\}$ uma sequência de polinômios ortonormais. Então,*

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y) = \frac{1}{A_{n+1}}\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}. \tag{2.14}$$

Demonstração. Da relação de recorrência de três termos (2.12), podemos escrever

$$\begin{aligned} & p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y) \\ & = \left[(A_{n+1}x - B_{n+1})\, p_n(x) - C_{n+1}p_{n-1}(x)\right] p_n(y) - p_n(x) \left[(A_{n+1}y - B_{n+1})\, p_n(y)\right. \\ & \quad \left. - C_{n+1}p_{n-1}(y)\right] \\ & = A_{n+1}\,(x-y)\, p_n(x)p_n(y) + C_{n+1} \left[p_n(x)p_{n-1}(y) - p_n(y)p_{n-1}(x)\right]. \end{aligned}$$

Mas de (2.13) temos $C_{n+1} = A_{n+1}/A_n$. Logo,

$$\begin{aligned} & p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y) \\ & = A_{n+1}\left\{(x-y)\,p_n(x)p_n(y) + \frac{1}{A_n}\left[p_n(x)p_{n-1}(y) - p_n(y)p_{n-1}(x)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} & p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y) \\ & = A_n\left\{(x-y)\,p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + \frac{1}{A_{n-1}}\left[p_{n-1}(x)p_{n-2}(y) - p_{n-1}(y)p_{n-2}(x)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Substituindo (2.16) em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y) &= A_{n+1}\left\{(x-y)\left[p_n(x)p_n(y) + p_{n-1}(x)p_{n-1}(y)\right]\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{A_{n-1}}\left[p_{n-1}(x)p_{n-2}(y) - p_{n-1}(y)p_{n-2}(x)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Usando este raciocínio n vezes temos

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y) &= A_{n+1}\left\{(x-y)\sum_{k=1}^{n} p_k(x)p_k(y)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{A_1}\left[p_1(x)p_0(y) - p_1(y)p_0(x)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Mas, $p_1(x) = a_{1,1}x + a_{1,0}$ e $p_0(x) = a_{0,0}$. Então,

$$p_1(x)p_0(y) - p_1(y)p_0(x) = (x-y)\,a_{0,0}a_{1,1}.$$

Daí,

$$p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y) = A_{n+1}\,(x-y)\left[\sum_{k=1}^{n} p_k(x)p_k(y) + \frac{1}{A_1}a_{0,0}a_{1,1}\right].$$

Como $A_1 = a_{1,1}/a_{0,0}$ e $p_0(x) = p_0(y) = a_{0,0}$, temos

$$p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y) = A_{n+1}\,(x-y)\left[\sum_{k=1}^{n} p_k(x)p_k(y) + p_0(x)p_0(y)\right].$$

Portanto,

$$\frac{1}{A_{n+1}}\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y} = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(y).$$

■

Fazendo $y \to x$ em (2.14), obtemos a forma confluente da identidade de Christoffel-Darboux:

$$\sum_{k=0}^{n} [p_k(x)]^2 = \frac{1}{A_{n+1}} \left[p_n(x) \left(p_{n+1}(x)\right)' - p_{n+1}(x) \left(p_n(x)\right)'\right] > 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}. \qquad (2.19)$$

2.4 Zeros

Teorema 2.7 *Seja* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, *uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida* $d\phi(x)$ *no intervalo* (a,b). *Então, os zeros de* $P_n(x)$ *são reais, distintos e estão localizados em* (a,b).

Demonstração. Vamos supor que $P_n(x)$ não muda de sinal em (a,b). Dessa forma, $P_n(x) \geq 0$ ou $P_n(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$, porém, $P_n(x)$ não é identicamente nulo. Logo,

$$\int_a^b P_n(x) d\phi(x) > 0 \text{ ou } \int_a^b P_n(x) d\phi(x) < 0. \qquad (2.20)$$

Mas, pela ortogonalidade,

$$\int_a^b P_n(x) d\phi(x) = \int_a^b 1 \cdot P_n(x) d\phi(x) = 0. \qquad (2.21)$$

De (2.20) e (2.21) temos um absurdo. Isto significa que $P_n(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez em (a,b), isto é, existe pelo menos um zero real de multiplicidade ímpar de $P_n(x)$ em (a,b).

Suponhamos que existam $r < n$ raízes reais, distintas, de multiplicidade ímpar de $P_n(x) = 0$ em (a,b), a saber, $x_{n,1}, \cdots, x_{n,r}$. Assim, pelo Teorema 2.1,

$$P_n(x) = a_{n,n}(x - x_{n,1}) \cdots (x - x_{n,r}) Q_{n-r}(x), \qquad (2.22)$$

em que $Q_{n-r}(x)$ é um polinômio de grau $n - r$, que tem somente raízes complexas (que não interceptam o eixo x), ou raízes reais fora de (a,b), ou raízes de multiplicidade par em (a,b). Logo, $Q_{n-r}(x)$ não muda de sinal em (a,b).

Pela relação de ortogonalidade,

$$\int_a^b (x - x_{n,1}) \cdots (x - x_{n,r}) P_n(x) d\phi(x) = 0. \qquad (2.23)$$

Mas, substituindo (2.22) em (2.23), temos

$$\int_a^b (x - x_{n,1})^2 \cdots (x - x_{n,r})^2 Q_{n-r}(x) d\phi(x) \neq 0, \qquad (2.24)$$

pois $Q_{n-r}(x)$ não muda de sinal e os demais fatores são positivos.

Comparando (2.23) e (2.24) temos um absudo. Logo, $r \geq n$. Como, $P_n(x)$ é um polinômio de grau n, obtemos pelo Teorema 2.1, $r = n$. Portanto, $P_n(x)$ tem n zeros reais e distintos no intervalo (a, b). ■

Teorema 2.8 *Seja* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *uma sequência de polinômios ortogonais. Consideremos* $x_{n,n} < x_{n,n-1} < \cdots < x_{n,1}$ *os zeros de* $P_n(x)$ *e* $x_{n+1,n+1} < x_{n+1,n} < \cdots < x_{n+1,1}$ *os zeros de* $P_{n+1}(x)$*, arranjados em ordem decrescente. Então, esses zeros se entrelaçam, ou seja,*

$$x_{n+1,n+1} < x_{n,n} < x_{n+1,n} < x_{n,n-1} < \cdots < x_{n+1,2} < x_{n,1} < x_{n+1,1}.$$

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que os polinômios $P_n(x)$, $n \geq 0$, sejam ortonormais, com o coeficiente do termo de maior grau positivo. Desta forma, calculando (2.19) em cada um dos zeros $x_{n+1,k}$ de $P_{n+1}(x)$, $k = 1, \cdots, n+1$, obtemos

$$P_n(x_{n+1,k})P'_{n+1}(x_{n+1,k}) > 0. \tag{2.25}$$

Pelo Teorema 2.7, os zeros de $P_{n+1}(x)$ são reais e distintos. Logo, pelo Teorema de Rolle, que pode ser encontrado em [18], como $P_{n+1}(x_{n+1,k}) = P_{n+1}(x_{n+1,k+1})$, $k = 1, \cdots, n$, existe $c \in (x_{n+1,k}, x_{n+1,k+1})$ tal que $P'_{n+1}(c) = 0$. Assim, $P'_{n+1}(x_{n+1,k})$ e $P'_{n+1}(x_{n+1,k+1})$ têm sinais opostos.

Por (2.25), segue que $P_n(x_{n+1,k})$ e $P'_{n+1}(x_{n+1,k})$ têm sinais iguais para todo $k = 1, \cdots, n+1$. Logo, $P_n(x_{n+1,k})$ e $P_n(x_{n+1,k+1})$ têm sinais contrários. Isto significa que $P_n(x)$ tem um zero em $(x_{n+1,k}, x_{n+1,k+1})$. ■

2.5 Polinômios Ortogonais Clássicos

Veremos, nesta seção, famílias de polinômios ortogonais de variável contínua e de variável discreta. Além das referências citadas no início do capítulo, foram consultados Ferraz [8] e Koekoek e Swarttouw [14].

Estamos considerando o produto interno definido por (2.1), porém, se $\phi(x)$ é absolutamente contínua, esse produto interno reduz-se a

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)\omega(x)dx, \tag{2.26}$$

em que $\omega(x) \geq 0$, mas não identicamente nula em (a, b), e é denominada função peso.

Uma sequência de polinômios ortogonais com respeito ao produto interno (2.26) é chamada sequência de polinômios ortogonais de variável contínua.

Definição 2.3 *Seja ϕ uma função real, não-decrescente e definida em um intervalo (a, b). Dizemos que x é um ponto de aumento de ϕ se, para todo $\epsilon > 0$, tivermos*

$$\phi(x + \epsilon) - \phi(x - \epsilon) > 0.$$

Se $\phi(x)$ tem uma quantidade finita ou enumerável de pontos de aumento, $\{x_k\}_{k=0}^{N}$, ou seja, $\phi(x)$ é uma função escada, considerando $\omega(x_k) = \phi(x_k + \epsilon) - \phi(x_k - \epsilon)$, $\epsilon \to 0$, o produto interno (2.1) reduz-se ao somatório

$$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{N} p(x_k)q(x_k)\omega(x_k),$$

onde N é um número inteiro ou $N = \infty$ e $\omega(x_k) > 0$.

Podemos considerar que a função $\omega(x)$ é definida apenas para os pontos de aumento x_k e a chamaremos função salto. Através de uma mudança de variáveis, $\{x_0, x_1, x_2, \cdots\} = \{0, 1, 2, \cdots\} := \mathcal{N}$, temos

$$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{N} p(k)q(k)\omega(k), \;\; \omega(k) > 0. \tag{2.27}$$

As sequências de polinômios ortogonais obtidas do produto interno (2.27) são denominadas sequências de polinômios ortogonais de variável discreta.

Apresentaremos a seguir as famílias de polinômios ortogonais clássicos de variável contínua: Jacobi, Laguerre e Hermite, e de variável discreta: Charlier, Meixner, Kravchuck e Hahn, que diferem pelas suas funções peso ou salto.

Definiremos esses polinômios através das funções hipergeométricas, ${}_nF_m$, que são definidas por

$${}_nF_m\left(\begin{array}{c} a_1, \cdots, a_n \\ b_1, \cdots, b_m \end{array}\middle|\, x\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{k!\,(b_1)_k \cdots (b_m)_k} x^k,$$

onde $(\alpha)_k = \alpha\,(\alpha + 1)\cdots(\alpha + k - 1)$ é o símbolo de Pochhammer.

2.5.1 Polinômios de Variável Contínua

Polinômios de Jacobi - Os polinômios de Jacobi, denotados por $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ em relação à função peso $\omega(x; \alpha, \beta) = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta}$, onde α e β são números reais e $\alpha, \beta > -1$.

Podemos definir os polinômios de Jacobi por

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(\alpha + 1)_n}{n!}\, {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, \alpha + \beta + n + 1 \\ \alpha + 1 \end{array}\middle|\, \frac{1 - x}{2}\right), \;\; n \geq 0,$$

ou, ainda, pela fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right], \; n \geq 0.$$

Esses polinômios podem ser obtidos pela seguinte relação de recorrência de três termos:

$$xP_k^{(\alpha,\beta)}(x) = P_{k+1}^{(\alpha,\beta)}(x) + B_{k+1}(\alpha,\beta)P_k^{(\alpha,\beta)}(x) + C_{k+1}(\alpha,\beta)P_{k-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad k \geq 0, \tag{2.28}$$

com as condições iniciais $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$ e $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$, e cujos coeficientes são dados por

$$B_{k+1}(\alpha,\beta) = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2k+\alpha+\beta+2)(2k+\alpha+\beta)}$$

e

$$C_{k+1}(\alpha,\beta) = \frac{4k(k+\alpha)(k+\beta)(k+\alpha+\beta)}{(2k+\alpha+\beta-1)(2k+\alpha+\beta)^2(2k+\alpha+\beta+1)}.$$

A relação de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi é dada por:

$$\langle P_n, P_m\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2n+1)}\dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, & \text{se } m = n. \end{cases} \tag{2.29}$$

Denotaremos os zeros desses polinômios por $x_{n,j}(\alpha,\beta)$, $1 \leq j \leq n$.

De acordo com as características dos parâmetros α e β, nessa família destacam-se:

(i) Polinômios de Legendre, $P_n(x)$, com $\alpha = \beta = 0$ e, portanto, $\omega(x) = 1$;

(ii) Polinômios de Chebyshev de primeira espécie, $T_n(x)$, onde $\alpha = \beta = -1/2$, logo, $\omega(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}$;

(iii) Polinômios de Chebyshev de segunda espécie, $U_n(x)$, com $\alpha = \beta = 1/2$, portanto, $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$;

(iv) Polinômios de Gegenbauer ou Ultraesféricos, $C_n^{(\lambda)}(x)$, cujos zeros, funções do parâmetro λ, são denotados por $x_{n,j}(\lambda)$, já que $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$. Assim, $\omega(x;\lambda) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$, $\lambda > -1/2$;

Polinômios de Laguerre - Os polinômios de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}(x)$, são ortogonais no intervalo $(0,\infty)$ com respeito à função peso $\omega(x;\alpha) = e^{-x}x^{\alpha}$, $\alpha > -1$. Eles são definidos por

$$L_n^{(\alpha)}(x) := \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1\left(\begin{array}{c} -n \\ \alpha+1 \end{array}\middle|\, x\right), \; n \geq 0,$$

ou, ainda, pela fórmula de Rodrigues

$$L_n^{(\alpha)}(x) := (-1)^n \, x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} \left[x^{\alpha+n} e^{-x} \right], n \geq 0.$$

A relação de recorrência para esses polinômios é a seguinte:

$$xL_k^{(\alpha)}(x) = L_{k+1}^{(\alpha)}(x) + B_{k+1}(\alpha) L_k^{(\alpha)}(x) + C_{k+1}(\alpha) L_{k-1}^{(\alpha)}(x), \;\; k \geq 0, \tag{2.30}$$

com condições iniciais $L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$ e $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$. Seus coeficientes são dados por

$$B_{k+1}(\alpha) = 2k + \alpha + 1 \;\; \text{e} \;\; C_{k+1}(\alpha) = k(k+\alpha).$$

A relação de ortogonalidade dos polinômios de Laguerre é dada por

$$\langle L_n, L_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ n!\Gamma(\alpha + n + 1), & \text{se } m = n. \end{cases} \tag{2.31}$$

Indicaremos os zeros do polinômio $L_n^{(\alpha)}(x)$ por $\ell_{n,j}(\alpha)$, $1 \leq j \leq n$.

Polinômios de Hermite - Os polinômios de Hermite, $H_n(x)$, são ortogonais com relação à função peso $\omega(x) = e^{-x^2}$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Podemos definí-los por

$$H_n(x) := (2x)^n \, {}_2F_0 \left(\begin{array}{c} -n/2, -(n-1)/2 \\ - \end{array} \middle| -\frac{1}{x^2} \right), n \geq 0,$$

e, também, por

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-x^2} \right], n \geq 0.$$

A relação de recorrência para esses polinômios é

$$xH_k(x) = \frac{1}{2} H_{k+1}(x) + kH_{k-1}(x), \;\; k \geq 0, \tag{2.32}$$

com $H_{-1}(x) = 0$ e $H_0(x) = 1$.

A relação de ortogonalidade é a que segue:

$$\langle H_n, H_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{se } m = n. \end{cases} \tag{2.33}$$

Além disso, os zeros desses polinômios serão representados por $h_{n,j}$, $1 \leq j \leq n$.

2.5.2 Polinômios de Variável Discreta

Polinômios de Charlier - Os polinômios de Charlier, $C_n(x;a)$, ortogonais em $\mathcal{N} = \{0, 1, \cdots\}$, são relacionados à função salto $\omega(k;a) = \dfrac{a^k}{k!}$, $a > 0$.

Podem ser definidos, através de função hipergeométrica, por

$$C_n(x;a) := {}_2F_0 \left(\begin{array}{c} -n, -x \\ - \end{array} \middle| -\frac{1}{a} \right),$$

ou, ainda, por

$$C_n(x;a) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{x}{k} k! \, (-a)^{n-k}.$$

Esses polinômios satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos:

$$xC_k(x;a) = -aC_{k+1}(x;a) + (k+a)\, C_k(x;a) - kC_{k-1}(x;a) \tag{2.34}$$

e à relação de diferenças,

$$C_n(x+1;a) = \frac{x+a-n}{a} C_n(x;a) - \frac{x}{a} C_n(x-1;a), \ \ a > 0. \tag{2.35}$$

A relação de ortogonalidade satisfeita por esses polinômios é

$$\langle C_n, C_m \rangle = a^{-n} e^a n! \delta_{mn}, \ \ a > 0,$$

o símbolo δ_{mn} denota o delta de Kronecker, definido da seguinte maneira:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, \ \text{se } m \neq n \\ 1, \ \text{se } m = n. \end{cases}$$

Além disso, os zeros do polinômio $C_n(x;a)$ serão denotados por $c_{n,j}(a)$, $1 \leq j \leq n$.

Polinômios de Meixner - Os polinômios de Meixner, $M_n(x;\beta,c)$, são ortogonais em $\mathcal{N} = \{0, 1, \cdots\}$, com respeito à função $\omega(k;\beta,c) = \dfrac{c^k\,(\beta)_k}{k!}$, $\beta > 0$ e $0 < c < 1$, onde $(\beta)_k = \beta\,(\beta+1) \cdots (\beta+k-1)$.

Podemos definir esses polinômios por

$$M_n(x;\beta,c) := {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} -n, -x \\ \beta \end{array} \middle| 1 - \frac{1}{c} \right), \ n \geq 0,$$

e obtê-los pela relação de recorrência

$$xM_k(x;\beta,c) = \frac{c\,(k+\beta)}{c-1}M_{k+1}(x;\beta,c) - \frac{k+(k+\beta)\,c}{c-1}M_k(x;\beta,c) + \frac{k}{c-1}M_{k-1}(x;\beta,c). \tag{2.36}$$

Os polinômios de Meixner satisfazem à relação de diferenças,

$$M_n(x+1;\beta,c) = \frac{x+c(x+\beta)+n(c-1)}{c(x+\beta)}M_n(x;\beta,c) - \frac{x}{c(x+\beta)}M_n(x-1;\beta,c). \tag{2.37}$$

Além disso, a relação de ortogonalidade para esses polinômios é a seguinte:

$$\langle M_n, M_m \rangle = \frac{n!\,(\beta)_n}{c^n\,(1-c)^{\beta}}\delta_{nm}.$$

Os zeros de $M_n(x;\beta,c)$ serão denotados por $m_{n,j}(\beta,c)$, $1 \le j \le n$.

Polinômios de Kravchuck - Os polinômios de Kravchuck, $K_n(x;p,N)$, $n \le N$, são ortogonais em $\mathcal{N} = \{0,1\cdots,N\}$, com relação à função salto $\omega(k;p,N) = \binom{N}{k} p^k\,(1-p)^{N-k}$, $0 < p < 1$.

Podem ser definidos por

$$K_n(x;p,N) := {}_2F_1\left(\begin{array}{c|c} -n,-x & \frac{1}{p} \\ -N & \end{array}\right)$$

e obtidos pela relação de recorrência

$$\begin{aligned} xK_k(x;p,N) \;=\; & -p(N-k)K_{k+1}(x;p,N) + \left[p\,(N-k)+k\,(1-p)\right]K_k(x;p,N) \\ & -k\,(1-p)\,K_{k-1}(x;p,N). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Esses polinômios satisfazem à seguinte relação de diferenças:

$$K_n(x+1;p,N) = \frac{p(N-x)+x(1-p)-n}{p(N-x)}K_n(x;p,N) - \frac{x(1-p)}{p(N-x)}K_n(x-1;p,N), \tag{2.39}$$

e à relação de ortogonalidade

$$\langle K_n, K_m \rangle = \frac{(-1)^n\,n!}{(-N)_n}\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \delta_{nm}, \tag{2.40}$$

para $n, m \le N$.

Os zeros de $K_n(x;p,N)$ serão indicados por $\kappa_{n,j}(p,N)$, $1 \le j \le n$.

Polinômios de Hahn - Os polinômios de Hahn, $Q_n(x;\alpha,\beta,N)$, $n \leq N$, são ortogonais em $\mathcal{N} = \{0,1,\cdots,N\}$ com respeito à função $\omega(k;\alpha,\beta,N) = \binom{\alpha+k}{k}\binom{\beta+N-k}{N-k}$, $\alpha,\beta > -1$ ou $\alpha,\beta < -N$.

São definidos por

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N) := {}_3F_2\left(\begin{array}{c} -n,-x,n+\alpha+\beta+1 \\ -N,\alpha+1 \end{array}\middle| 1\right), \; n \geq 0$$

e satisfazem à relação de recorrência

$$xQ_k(x;\alpha,\beta,N) = -A_kQ_{k+1}(x;\alpha,\beta,N) + (A_k+C_k)\,Q_k(x;\alpha,\beta,N) - C_kQ_{k-1}(x;\alpha,\beta,N), \tag{2.41}$$

com

$$A_k = \frac{(k+\alpha+\beta+1)\,(k+\alpha+1)\,(N-k)}{(2k+\alpha+\beta+1)\,(2k+\alpha+\beta+2)}, \quad C_k = \frac{k\,(k+\alpha+\beta+N+1)\,(k+\beta)}{(2k+\alpha+\beta)\,(2k+\alpha+\beta+1)}.$$

Satisfazem também à relação de diferenças

$$\begin{aligned} Q_n(x+1;\alpha,\beta,N) = & \frac{n\,(n+\alpha+\beta+1)+(x+\alpha+1)\,(x-N)+x\,(x-\beta-N-1)}{(x+\alpha+1)\,(x-N)} \\ & \times Q_n(x;\alpha,\beta,N) - \frac{x\,(N-x+\beta+1)}{(x+\alpha+1)\,(N-x)}Q_n(x-1;\alpha,\beta,N), \end{aligned} \tag{2.42}$$

onde $n \geq 0$.

Além disso, obedecem à seguinte relação de ortogonalidade:

$$\langle Q_n, Q_m\rangle = \frac{(-1)^n\,(n+\alpha+\beta+1)_{N+1}\,(\beta+1)_n\,n!}{(2n+\alpha+\beta+1)\,(\alpha+1)_n\,(-N)_n\,N!}\delta_{mn}, \;\; n,m \leq N.$$

Os zeros de $Q_n(x;\alpha,\beta,N)$ serão denotados por $q_{n,j}(\alpha,\beta,N)$, $1 \leq j \leq n$.

Um caso particular dos polinômios de Hahn são os Polinômios de Gram ou de Chebyshev Discretos, cujos parâmetros α e β são iguais a zero. Logo, $\omega(k) = 1$.

2.6 Fórmulas de Quadratura

Uma importante aplicação dos polinômios ortogonais, dentre outras, revela-se quando precisamos calcular aproximadamente uma integral, é o que chamamos de quadratura numérica. Mais detalhes podem ser encontrados em [7] e [16].

Podemos aproximar a integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)d\phi(x),$$

por uma combinação linear de n valores de f da seguinte forma:

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} f(x_{n,k})$$

com $x_{n,k} \in [a,b]$, $1 \leq k \leq n$, distintos e chamados nós da fórmula de quadratura. Os números $\lambda_{n,k}$, $1 \leq k \leq n$, são denominados pesos.

Assim,

$$I(f) = Q_n(f) + R(f),$$

em que $R(f)$ é o erro da aproximação. Quando temos $R(f) = 0$, dizemos que a fórmula de quadratura é exata.

O grau de precisão algébrica de uma fórmula de quadratura é o número k tal que

$$\begin{aligned} I(f) &= Q(f), \quad \forall f \in \Pi_k \\ I(f) &\neq Q(f), \quad \text{para algum } f \in \Pi_{k+1}. \end{aligned}$$

As fórmulas de quadratura que têm máximo grau de precisão algébrica $2n-1$, são conhecidas como Fórmulas de Quadratura de Gauss ou gaussianas.

Teorema 2.9 (Fórmula de quadratura de Gauss) *Seja*

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, d\phi(x).$$

O máximo grau de precisão algébrica de uma fórmula de quadratura para $I(f)$ de n nós é $2n-1$. A fórmula de quadratura que atinge esse grau de precisão algébrica é única e dada por

$$Q_G(f) := \lambda_{n,1}\, f(z_{n,1}) + \lambda_{n,2}\, f(z_{n,2}) + \ldots + \lambda_{n,n}\, f(z_{n,n}), \tag{2.43}$$

onde $z_{n,1}, z_{n,2}, \ldots, z_{n,n}$ são os zeros do n-ésimo polinômio da sequência de polinômios ortogonais $\{P_j(x)\}_{j=0}^{n}$ associada a $d\phi(x)$. Os pesos $\lambda_{n,j}$ (números de Christoffel) são positivos e dados por

$$\lambda_{n,j} = \int_a^b \frac{P_n(x)}{P_n'(z_{n,j})(x - z_{n,j})} d\phi(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

2.7 Sequências Encadeadas

Nesta seção, estudaremos as sequências encadeadas positivas, as quais chamaremos simplesmente de sequências encadeadas. Apareceram, primeiramente, no estudo de certas frações contínuas e possuem muitas aplicações no estudo de polinômios ortogonais. Todos os resultados apresentados aqui podem ser encontrados em [6].

Definição 2.4 *Uma sequência* $\{c_n\}_{n=1}^{N}$, $N \leq \infty$, *é denominada sequência encadeada se existe outra sequência* $\{g_n\}_{n=1}^{N}$ *tal que*

$$c_n \;=\; (1-g_{n-1})\,g_n, \quad n \geq 1, \tag{2.44}$$

com $0 \leq g_0 < 1$, $0 < g_n < 1$, $n \geq 1$.

Disto, segue que $0 < c_n < 1$, para todo $n \geq 1$.

A sequência $\{g_n\}$ é uma sequência de parâmetros para $\{c_n\}$ e g_0 é o parâmetro inicial.

Vale ressaltar que não é difícil construir exemplos de sequências encadeadas, porém não é simples verificar se uma dada sequência é encadeada.

Exemplo 2.1 Consideremos a sequência constante $\{1/4\}$.

Neste caso, para calcularmos uma sequência de parâmetros podemos tomar $g_0 = 0$ e calcular $g_i, i = 1, 2, \cdots$, através de (2.44):

$$\begin{array}{lclcl}
c_1 = (1-g_0)\,g_1 & \Rightarrow & 1/4 = (1-0)\,g_1 & \Rightarrow & g_1 = 1/4. \\
c_2 = (1-g_1)\,g_2 & \Rightarrow & 1/4 = (1-1/4)\,g_2 & \Rightarrow & g_2 = 1/4 \cdot 4/3 = 1/3. \\
c_3 = (1-g_2)\,g_3 & \Rightarrow & 1/4 = (1-1/3)\,g_3 & \Rightarrow & g_3 = 1/4 \cdot 3/2 = 3/8. \\
c_4 = (1-g_3)\,g_4 & \Rightarrow & 1/4 = (1-3/8)\,g_4 & \Rightarrow & g_4 = 1/4 \cdot 8/5 = 2/5.
\end{array}$$

Por indução, mostra-se que $\{g_n\} = \left\{\dfrac{n}{2(n+1)}\right\}$.

Podemos ainda verificar que a sequência constante $\{1/2\}$ é outra sequência de parâmetros para $\{1/4\}$. De fato, seja $g_0 = 1/2$, logo

$$c_1 = (1-g_0)\,g_1 \;\;\Rightarrow\;\; 1/4 = (1-1/2)\,g_1 \;\;\Rightarrow\;\; g_1 = (1/4)\cdot 2 = 1/2.$$

Da mesma forma, mostramos que $g_i = 1/2$ para $i = 2, 3, \cdots$.

Através desse exemplo podemos concluir que uma sequência encadeada pode admitir mais do que uma sequência de parâmetros.

Teorema 2.10 *Sejam* $\{c_n\}$ *uma sequência encadeada e* $\{g_k\}$ *e* $\{h_k\}$ *duas sequências de parâmetros para* $\{c_n\}$. *Então,* $g_k < h_k$ *para* $k \geq 1$ *se, e somente se,* $g_0 < h_0$.

Demonstração. Como $\{g_k\}$ e $\{h_k\}$ são sequências de parâmetros para $\{c_n\}$, temos

$$(1-g_{k-1})\,g_k = c_k = (1-h_{k-1})\,h_k, \quad k \geq 1.$$

Logo,

$$\frac{g_k}{h_k} = \frac{1-h_{k-1}}{1-g_{k-1}}, \quad k \geq 1.$$

Observando esta relação, podemos concluir que $0 < g_k < h_k < 1$ se, e somente se, $0 \leq g_{k-1} < h_{k-1} < 1$. Em particular, para $k = 1$, temos $g_0 < h_0$. ∎

Teorema 2.11 *Seja $\{c_n\}$ uma sequência encadeada. Se $\{c_n\}$ tem uma sequência de parâmetros $\{g_k\}$ tal que $g_0 > 0$, então, para cada h_0 tal que $0 \leq h_0 < g_0$, existe uma sequência de parâmetros $\{h_k\}$ correspondente.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução sobre h_k.

Se $0 \leq h_0 < g_0$, então $0 < 1 - g_0 < 1 - h_0$. Como $c_1 > 0$, obtemos

$$0 < \frac{c_1}{1 - h_0} < \frac{c_1}{1 - g_0}.$$

Note que $c_1/(1 - g_0) = g_1$, já que $(1 - g_0)g_1 = c_1$.

Fazendo $h_1 = c_1/(1 - h_0)$, obtemos $c_1 = (1 - h_0)h_1$ e $0 < h_1 < g_1 < 1$.

Suponhamos que exista h_k tal que $c_k = (1 - h_{k-1})h_k$, com $0 < h_k < g_k < 1$. Então, $0 < 1 - g_k < 1 - h_k$. Como $c_{k+1} > 0$,

$$0 < \frac{c_{k+1}}{1 - h_k} < \frac{c_{k+1}}{1 - g_k} = g_{k+1} < 1.$$

Logo, existe $h_{k+1} = c_{k+1}/(1 - h_k)$, ou seja, $c_{k+1} = (1 - h_k)h_{k+1}$, com $0 < h_{k+1} < g_{k+1} < 1$.

Portanto, $\{h_k\}$ é outra sequência de parâmetros para $\{c_n\}$. ∎

Observação 2.2 A partir da definição de sequências encadeadas, o teorema anterior nos diz que toda sequência encadeada tem uma sequência de parâmetros $\{m_k\}$ tal que $m_0 = 0$ e, pelo Teorema 2.10, temos que $m_k < g_k$ para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_k\}$. Isto nos leva a definir sequência minimal de parâmetros.

Definição 2.5 *Seja $\{c_n\}$ uma sequência encadeada. Uma sequência de parâmetros $\{m_k\}$ é chamada sequência minimal de parâmetro se $m_0 = 0$.*

Pela Observação 2.2, segue que toda sequência encadeada possui pelo menos a sequência minimal de parâmetros. Se esta for a única sequência de parâmetros para $\{c_n\}$, dizemos que $\{c_n\}$ determina seus parâmetros unicamente.

Definição 2.6 *Seja $\{c_n\}$ uma sequência encadeada. Uma sequência de parâmetros $\{M_k\}$ é chamada sequência maximal de parâmetros se $M_k > g_k$, $k \geq 0$, para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_k\}$.*

Teorema 2.12 *Toda sequência encadeada $\{c_n\}$ possui uma sequência maximal de parâmetros.*

Demonstração. Se $\{c_n\}$ determina seus parâmetros unicamente, então sua sequência minimal de parâmetros é também sua sequência maximal de parâmetros.

Suponhamos que $\{c_n\}$ não determine seus parâmetros unicamente. Então, qualquer outro parâmetro inicial é maior que zero. Seja M_0 o menor limite superior para o conjunto de todos os parâmetros iniciais. Como $g_0 \leq 1$, $\forall g_0$, logo, $0 < M_0 \leq 1$.

Pelo Teorema 2.11, para cada x tal que $0 \leq x < M_0$, existe uma sequência de parâmetros $\{g_k(x)\}$ tal que $g_0(x) = x$.

Para cada valor fixo de n, g_n é uma função crescente, pois se $x_1 < x_2$, temos

$$g_0(x_1) = x_1 < x_2 = g_0(x_2).$$

Logo, pelo Teorema 2.10, $g_n(x_1) < g_n(x_2)$, para $n \geq 1$.

Além disso, como g_n é uma função limitada ($0 < g_n < 1$, para $n \geq 1$), podemos definir

$$M_n = \lim_{x \to M_0^-} g_n(x), \quad n \geq 1. \tag{2.45}$$

Disto segue que $0 < g_n(x) < M_n \leq 1$, $n \geq 1$ e como $\{g_k\}$ é uma sequência de parâmetros para $\{c_n\}$, então $c_{n+1} = (1 - g_n(x))g_{n+1}(x)$. Fazendo $x \to M_0^-$, obtemos $c_{n+1} = (1 - M_n)M_{n+1}$, com $0 < M_n < 1$ para todo n, pois, se M_n fosse igual a 1, teríamos $c_{n+1} = 0$ e $\{c_n\}$ não seria uma sequência encadeada. Portanto, $\{M_k\}$ é a sequência maximal de parâmetros para $\{c_n\}$. ■

Observação 2.3 As sequências $\{m_k\}$ e $\{M_k\}$ denotarão, respectivamente, as sequências minimal e maximal de parâmetros de $\{c_n\}$.

Teorema 2.13 *Seja $\{c_n\}$ uma sequência encadeada. Se $0 < d_n < c_n$, para $n \geq 1$, então $\{d_n\}$ também é uma sequência encadeada.*

Demonstração. Definindo $h_0 = 0$ e $h_1 = d_1$, temos $d_1 = (1 - h_0)h_1$, com $0 < h_1 < c_1 = m_1 < 1$, pois $c_1 = (1 - m_0)m_1 = (1 - 0)m_1$.

Suponhamos que $d_k = (1 - h_{k-1})h_k$, com $0 < h_k \leq m_k < 1$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

Por hipótese, temos $d_{k+1} < c_{k+1}$, então

$$d_{k+1} < c_{k+1} = (1 - m_k)m_{k+1} \leq (1 - h_k)m_{k+1}.$$

Deste modo, existe h_{k+1} tal que $0 < h_{k+1} \leq m_{k+1} < 1$, com $d_{k+1} = (1 - h_k)h_{k+1}$.

Portanto, provamos por indução que $\{d_n\}$ é uma sequência encadeada. ■

Este teorema afirma que, conhecendo-se uma sequência encadeada, podemos dizer se outra sequência é ou não encadeada através da comparação de seus termos.

Capítulo

3

Teoremas de Markov e de Krasikov e Zarkh

Neste capítulo veremos dois teoremas importantes sobre o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais. Esses resultados são conhecidos e podem ser encontrados em Ferraz [8], Ismail [11], Krasikov e Zarkh [15] e Rafaeli [21].

3.1 Teorema de Markov

Vimos que existem famílias de polinômios ortogonais que dependem de parâmetros. Dessa forma, surge a curiosidade de saber como se comportam os zeros desses polinômios como funções de seus parâmetros. Vamos então estudar um teorema estabelecido por Andrei Markov em 1886, que fornece condições suficientes para que os zeros de um polinômio ortogonal sejam funções crescentes ou decrescentes dos seus parâmetros.

Consideremos, primeiramente, $\{P_n(x;\tau)\}_{n\geq 0}$ uma sequência paramétrica de polinômios ortogonais de variável contínua no intervalo (a,b), relacionada à função peso $\omega(x;\tau)$, $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$.

Teorema 3.1 (Teorema de Markov para variável contínua) *Seja $P_n(x;\tau)$ o n-ésimo polinômio ortogonal com relação à função peso $\omega(x;\tau)$, que é positiva e tem a primeira derivada contínua com relação a τ para $a < x < b$ e $\tau_1 < \tau < \tau_2$. Suponha que as integrais*

$$\int_a^b x^k \frac{\partial \omega(x;\tau)}{\partial \tau} dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1, \tag{3.1}$$

convergem uniformemente em todo subintervalo compacto de (τ_1, τ_2). Se

$$\frac{\partial \ln \omega(x;\tau)}{\partial \tau}$$

é uma função crescente (decrescente) de x em (a,b), então todo zero $x_{n,k}(\tau)$ de $P_n(x;\tau)$ é uma função crescente (decrescente) de τ.

Demonstração. Como $P_n(x;\tau)$ é ortogonal em (a,b) com relação à função peso $\omega(x;\tau)$, então, dada $f(x)$ um polinômio de grau $2n-1$, pelo Teorema 2.9 temos

$$\int_a^b f(x)\omega(x;\tau)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k(\tau)f(x_{n,k}(\tau)), \tag{3.2}$$

com $x_{n,k}(\tau)$ denotando os zeros de $P_n(x;\tau)$ e com os pesos $A_k(\tau)$ todos positivos. Daí, derivando (3.2) com relação ao parâmetro τ e mudando a ordem entre diferenciação e integração, o que é possível graças à convergência uniforme de (3.1), temos

$$\int_a^b f(x)\frac{\partial\omega(x;\tau)}{\partial\tau}dx = \sum_{i=1}^{n}\left\{A_i'(\tau)f(x_{n,i}(\tau)) + A_i(\tau)f'(x_{n,i}(\tau))x_{n,i}'(\tau)\right\}. \tag{3.3}$$

Definamos o polinômio $f(x)$ de grau $2n-1$ por

$$f(x) := \frac{P_n^2(x;\tau)}{x - x_{n,k}(\tau)}. \tag{3.4}$$

Como podemos escrever $P_n(x;\tau) = (x-x_{n,1})(x-x_{n,2})\cdots(x-x_{n,k})\cdots(x-x_{n,n})$, temos

$$f(x) = \frac{P_n^2(x;\tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} = (x-x_{n,1})^2(x-x_{n,2})^2\cdots(x-x_{n,k})\cdots(x-x_{n,n})^2. \tag{3.5}$$

Logo,

$$f(x_{n,i}(\tau)) = 0,\ i = 1,2,\dots,n. \tag{3.6}$$

Além disso, derivando (3.5) com relação a x, obtemos

$$f'(x_{n,i}(\tau)) = 0,\ i = 1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n, \tag{3.7}$$

pois, $P_n(x_{n,i}(\tau;x)) = 0, i = 1,\cdots,n$.

Seja $p_k(x)$ um polinômio tal que

$$p_k^2(x) = \frac{f(x)}{x - x_{n,k}(\tau)}.$$

Logo, $f(x) = (x - x_{n,k}(\tau))p_k^2(x)$. Derivando $f(x)$ em relação a x, obtemos

$$f'(x) = p_k^2(x) + 2(x - x_{n,k}(\tau))p_k'(x)p_k(x).$$

Portanto, $f'(x_{n,k}(\tau)) = p_k^2(x_{n,k}(\tau))$. Por outro lado, de (3.4) temos

$$\begin{aligned} P_n^2(x;\tau) &= (x - x_{n,k}(\tau))\, f(x) \\ &= (x - x_{n,k}(\tau))\,(x - x_{n,k}(\tau))\, p_k^2(x) \\ &= (x - x_{n,k}(\tau))^2\, p_k^2(x). \end{aligned}$$

Logo, $P_n(x;\tau) = (x - x_{n,k}(\tau))p_k(x)$. Assim,

$$P_n'(x;\tau) = p_k(x) + (x - x_{n,k}(\tau))p_k'(x).$$

Então, $P_n'(x_{n,k}(\tau);\tau) = p_k(x_{n,k}(\tau))$ e, portanto,

$$f'(x_{n,k}(\tau)) = \left[P_n'(x_{n,k}(\tau);\tau)\right]^2. \tag{3.8}$$

Desta forma, (3.7) e (3.8) implicam que $f'(x_{n,i}(\tau)) = \left[P_n'(x_{n,k}(\tau);\tau)\right]^2 \delta_{ik}$, $i = 1, \ldots, n$, e assim, (3.3) reduz-se a

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x;\tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} \frac{\partial \omega(x;\tau)}{\partial \tau} dx = A_k(\tau)\left[P_n'(x_{n,k}(\tau);\tau)\right]^2 x_{n,k}'(\tau). \tag{3.9}$$

Seja $g(x;\tau)$ uma função auxiliar definida por

$$g(x;\tau) := \frac{1}{\omega(x;\tau)} \frac{\partial \omega(x;\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \ln \omega(x;\tau)}{\partial \tau}.$$

Observe que

$$g\left(x_{n,k}(\tau);\tau\right) = \frac{1}{\omega(x_{n,k}(\tau);\tau)} \frac{\partial \omega(x_{n,k}(\tau);\tau)}{\partial \tau}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Podemos, então, reescrever (3.9) da seguinte forma:

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x;\tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} g\left(x;\tau\right) \omega(x;\tau) dx = A_k(\tau)\left[P_n'(x_{n,k}(\tau);\tau)\right]^2 x_{n,k}'(\tau). \tag{3.10}$$

Por outro lado, da propriedade de ortogonalidade de P_n, segue que

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x;\tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} \omega(x;\tau) dx = \int_a^b \frac{P_n(x;\tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} P_n(x;\tau)\omega(x;\tau) dx = 0. \tag{3.11}$$

Agora, multiplicando (3.11) pela constante $g\left(x_{n,k}(\tau);\tau\right)$ obtemos

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x;\tau)}{(x - x_{n,k}(\tau))} g\left(x_{n,k}(\tau);\tau\right) \omega(x;\tau) dx = 0.$$

Subtraindo da igualdade (3.10), temos

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x;\tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} \left[g\left(x;\tau\right) - g\left(x_{n,k}(\tau);\tau\right)\right] \omega(x;\tau)dx = A_k(\tau)\left[P_n'(x_{n,k}(\tau);\tau)\right]^2 x_{n,k}'(\tau) \tag{3.12}$$

ou, equivalentemente,

$$\int_a^b P_n^2(x;\tau) \frac{g\left(x;\tau\right) - g\left(x_{n,k}(\tau);\tau\right)}{x - x_{n,k}(\tau)} \omega(x;\tau)dx = A_k(\tau)\left[P_n'(x_{n,k}(\tau);\tau)\right]^2 x_{n,k}'(\tau). \tag{3.13}$$

Uma vez que $g\left(x;\tau\right)$ tem derivada contínua com relação a x, pelo Teorema do Valor Médio, que pode ser obtido em [18],

$$g'\left(\xi;\tau\right) = \frac{g\left(x;\tau\right) - g\left(x_{n,k}(\tau);\tau\right)}{x - x_{n,k}(\tau)},$$

para algum ponto ξ entre x e $x_{n,k}(\tau)$. Assim, se $g'\left(\xi;\tau\right) > 0$ para todo ξ em (a,b) (ou seja, a função $g\left(x;\tau\right)$ é crescente), a função integrante em (3.13) é não negativa e, daí, $x_{n,k}'(\tau) > 0$. Analogamente, se $g'\left(\xi;\tau\right) < 0$ para todo ξ pertencente ao intervalo (a,b) (ou seja, a função $g\left(x;\tau\right)$ é decrescente), então $x_{n,k}'(\tau) < 0$. ■

Esse teorema pode ainda ser reformulado para sequências de polinômios ortogonais de variável discreta. Seja $\{P_n(x;\tau)\}_{n\geq 0}$ uma sequência de polinômios ortogonais de variável discreta, relacionada à função salto $\omega(k;\tau)$, com $k \in \mathcal{N}$, onde $\mathcal{N}$ é um conjunto finito ou infinito da forma $\{0, 1, 2, \cdots\}$, e $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$.

Teorema 3.2 (Teorema de Markov para variável discreta) *Seja $P_n(x;\tau)$ o n-ésimo polinômio ortogonal com relação à função salto $\omega(k;\tau)$ que é positiva e tem a primeira derivada contínua em relação a τ, para $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ e $k \in \mathcal{N}$. Suponhamos que as séries*

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} k^j \frac{\partial\omega(k;\tau)}{\partial\tau}, \quad j = 0, 1, \cdots, 2n-1, \tag{3.14}$$

convirjam uniformemente para τ em qualquer subconjunto compacto de (τ_1, τ_2). Então, os zeros de $P_n(x;\tau)$ são funções crescentes (decrescentes) de $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ se

$$\frac{\partial[\ln\omega(x;\tau)]}{\partial\tau}$$

é uma função crescente (decrescente) de x em um intervalo que contém $\mathcal{N}$.

Demonstração. Sejam $x_1(\tau), x_2(\tau), \cdots, x_n(\tau)$ os zeros de $P_n(x,\tau)$. O Teorema 2.9 garante que, para qualquer polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a $2n-1$, temos

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} p(k)\omega(k;\tau) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\tau) p(x_j(\tau)), \tag{3.15}$$

com $\lambda_j(\tau) > 0$, $1 \leq j \leq n$. Queremos derivar essa equação em relação a τ.

Vejamos primeiramente que, ao derivarmos o lado esquerdo, obtemos

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} p(k)\frac{\partial\omega(k;\tau)}{\partial\tau}.$$

Note que essa é uma combinação linear das séries (3.14) que, por hipótese, convergem uniformemente em compactos de (τ_1, τ_2). Logo, essa série também converge uniformemente e, portanto, o lado esquerdo de (3.15) é derivável.

Analisaremos, agora, as condições para que o lado direito de (3.15) seja derivável. Como os zeros de $P_n(x;\tau)$ são simples, então $P_n(x_j(\tau);\tau) = 0$ e $\partial P_n(x_j(\tau);\tau)/\partial x \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, que pode ser encontrado em [19], os zeros $x_j(\tau)$, $j = 1, \cdots, n$, são deriváveis em relação a τ.

Além disso, os coeficientes λ_j, $j = 1, 2, \cdots, n$, são determinados pelo sistema linear obtido ao considerarmos que a fórmula de quadratura (3.15) é exata para os n polinômios que formam a base de Π_{n-1}. Ao tomarmos, por exemplo, a base $\{k^i\}_{i=0}^{n-1}$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1(\tau) & x_2(\tau) & \dots & x_n(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}(\tau) & x_2^{n-1}(\tau) & \dots & x_n^{n-1}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(\tau) \\ \lambda_2(\tau) \\ \vdots \\ \lambda_n(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k\in\mathcal{N}} \omega(k;\tau) \\ \sum_{k\in\mathcal{N}} k\,\omega(k;\tau) \\ \vdots \\ \sum_{k\in\mathcal{N}} k^{n-1}\omega(k;\tau) \end{pmatrix},$$

os elementos da matriz desse sistema, $x_j(\tau)^i$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$, $j = 1, 2, \cdots, n$, bem como os termos independentes $\sum_{k\in\mathcal{N}} x^i\omega(k;\tau)$, são deriváveis em relação a τ (pois (3.14) converge uniformemente), então o vetor solução desse sistema linear $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)^T$ também é derivável em relação a τ. Isso significa que o lado direito de (3.15) também é derivável.

Portanto, derivando a equação (3.15) em relação a τ, obtemos

$$\sum_{k\in\mathcal{N}} p(k)\frac{\partial\omega(k;\tau)}{\partial\tau} = \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d\lambda_j(\tau)}{d\tau}p(x_j(\tau)) + \lambda_j(\tau)p'(x_j(\tau))\frac{dx_j(\tau)}{d\tau}\right]. \tag{3.16}$$

Como (3.15) vale para todo polinômio $p(x)$ de grau $2n-1$, consideremos

$$p(x) = \frac{P_n^2(x;\tau)}{x - x_i(\tau)}.$$

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_n^2(x;\tau)}{x - x_i(\tau)}\right)\Bigg|_{x=x_j(\tau)} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad j \neq i, \\ (P_n'(x_i(\tau);\tau))^2 & \text{se} \quad j = i. \end{cases}$$

Daí, podemos reescrever (3.16) da seguinte forma:

$$\sum_{k\in\mathcal{N}}\left(\frac{P_n^2(k;\tau)}{k-x_i(\tau)}\right)\frac{\partial\omega(k;\tau)}{\partial\tau}=\lambda_i(\tau)\left(P_n'(x_i(\tau);\tau)\right)^2\frac{dx_i(\tau)}{d\tau}.$$

Adicionando ao lado esquerdo o termo

$$-\frac{1}{\omega(x_i(\tau);\tau)}\frac{\partial\omega(x_i(\tau);\tau)}{\partial\tau}\sum_{k\in\mathcal{N}}\left(\frac{P_n^2(k;\tau)}{k-x_i(\tau)}\right)\omega(k;\tau),$$

que é zero devido à ortogonalidade, obtemos

$$\sum_{k\in\mathcal{N}}\frac{P_n^2(k;\tau)}{k-x_i(\tau)}\left[\frac{1}{\omega(k;\tau)}\frac{\partial\omega(k;\tau)}{\partial\tau}-\frac{1}{\omega(x_i(\tau);\tau)}\frac{\partial\omega(x_i(\tau);\tau)}{\partial\tau}\right]\omega(k;\tau)$$
$$=\lambda_i(\tau)\left(P_n'(x_i(\tau);\tau)\right)^2\frac{dx_i(\tau)}{d\tau}.$$

Sabemos que $\lambda_i(\tau)>0$ e também $\omega(k;\tau)>0$. Logo, o sinal de $dx_i(\tau)/d\tau$ será positivo (negativo) se o sinal de

$$\frac{1}{k-x_i(\tau)}\left[\frac{1}{\omega(k;\tau)}\frac{\partial\omega(k;\tau)}{\partial\tau}-\frac{1}{\omega(x_i(\tau);\tau)}\frac{\partial\omega(x_i(\tau);\tau)}{\partial\tau}\right] \tag{3.17}$$

for positivo (negativo). Como

$$\frac{\partial\left[\ln\omega(x;\tau)\right]}{\partial\tau}=\frac{1}{\omega(x;\tau)}\frac{\partial\omega(x;\tau)}{\partial\tau},$$

se $\partial[\ln\omega(x;\tau)]/\partial\tau$ for uma função crescente (decrescente) em um intervalo que contém $\mathcal{N}$ (esse intervalo também contém os zeros de $P_n(x)$ pelo Teorema 2.7), então a equação (3.17) será sempre positiva (negativa). Logo, o sinal de $dx_i(\tau)/d\tau$ será positivo (negativo), ou seja, $x_i(\tau)$ será uma função crescente (decrescente) de τ. ■

Observação 3.1 $\omega(x;\tau)$ é a extensão contínua da função salto $\omega(k;\tau)$.

3.2 Teorema de Krasikov e Zarkh

Veremos, agora, outro resultado sobre os zeros dos polinômios ortogonais discretos. Para isso, seja $\mathcal{M}(p)$ o mínimo da distância entre os zeros de p, isto é, para um polinômio p de grau n com zeros $x_1,x_2,\ldots,x_n$,

$$\mathcal{M}(p)=\min\{|x_i-x_j| : i\neq j,\ i,j=1,2,\ldots,n\}.$$

Vimos que os polinômios ortogonais de variável discreta clássicos satisfazem uma equação de diferenças. De acordo com [15], vamos assumir que P_n é um polinômio ortogonal de variável discreta que satisfaz uma equação de diferenças da forma

$$P_n(x+1) = 2A_n(x)\, P_n(x) - B_n(x)\, P_n(x-1), \tag{3.18}$$

com $A(x)$ e $B(x)$ contínuas num intervalo L_n que contenha todos os seus zeros. Para tais polinômios, além do fato de que os zeros de $P_n(x)$ e de $P_{n+1}(x)$ se entrelaçam, temos também que, sob certas condições, os zeros de $P_n(x)$ se entrelaçam com os zeros de $P_n(x+1)$. Esse fato segue de um resultado de Krasikov e Zarkh [15], apresentado a seguir com outra demonstração devida a Ferraz [8].

Teorema 3.3 (Teorema de Krasikov e Zarkh) *Seja $P_n(x)$ um polinômio ortogonal discreto com relação ao produto interno (2.27). Suponha que $P_n(x)$ satisfaça (3.18) e que exista $I \subset L_n$ tal que*

(i) todos os zeros de P_n estão em I,

(ii) $B_n(x) > 0$ para $x \in I$.

Então, $\mathcal{M}(p) > 1$. Se, além disso, $A_n(x) > 0$ em I, então $\mathcal{M}(p) > 2$.

Demonstração. Vamos provar primeiramente que existe um ponto do suporte da medida $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ entre quaisquer dois zeros consecutivos de $P_n(x)$.

De fato, sejam z_1 e z_2 zeros consecutivos quaisquer de $P_n(x)$. Se não houver $x \in \mathcal{N}$ tal que $z_1 < x < z_2$, então teremos

$$\sum_{x \in \mathcal{N}} \frac{P_n(x)P_n(x)}{(x-z_1)(x-z_2)}\omega(x) > 0.$$

Mas, $P_n(x)/\left[(x-z_1)\,(x-z_2)\right]$ tem grau $n-2$. Logo, pela propriedade de ortogonalidade,

$$\sum_{x \in \mathcal{N}} \frac{P_n(x)P_n(x)}{(x-z_1)(x-z_2)}\omega(x) = 0.$$

Esta contradição prova que entre zeros consecutivos de $P_n(x)$ existe um número inteiro.

Isso implica que em um intervalo $[m, m+1]$, $m \in \mathcal{N}$, pode existir no máximo um zero de $P_n(x)$, pois, se existissem dois zeros entre dois números inteiros consecutivos, não haveria um número inteiro entre esses zeros.

Como $P_n(x)$ satisfaz à equação de diferenças (3.18), então, para todo zero z_k de P_n, temos $P_n(z_k+1) = -B_n(z_k)P_n(z_k-1)$. Como, por hipótese, $z_k \in I$, por (ii) $B_n(z_k) > 0$. Logo,

$$\text{sinal } P_n(z_k+1) = -\text{sinal } P_n(z_k-1).$$

Portanto, como os zeros de $P_n(x)$ são simples, em cada intervalo $[z_k - 1, z_k + 1]$ existe uma quantidade ímpar desses zeros.

Seja z_1 o menor zero de $P_n(x)$. Nesse caso, existe uma quantidade ímpar de zeros em $[z_1, z_1 + 1]$. Seja m o menor inteiro maior ou igual a z_1. Logo,

$$z_1 \leq m < z_1 + 1 \leq m + 1.$$

Como pode existir apenas um zero de $P_n(x)$ em $[m - 1, m]$, segue que z_1 é o único zero desse intervalo. No intervalo $[m, m + 1]$ existe no máximo um zero e, como a quantidade de zeros em $[z_1, z_1 + 1]$ deve ser ímpar, não é possível que este zero esteja entre m e $z_1 + 1$, pois existiriam dois zeros em $[z_1, z_1 + 1]$. Logo, a única possibilidade é que exista apenas o zero z_1 neste intervalo.

Seja z_2 o segundo menor zero de $P_n(x)$, então $z_2 > z_1 + 1$ e só podem existir zeros no sub-intervalo $[z_2, z_2 + 1]$ de $[z_2 - 1, z_2 + 1]$. Consideremos dois casos:

- Se $z_2 \leq m + 1$, então z_2 é o único zero do intervalo $[m, m + 1]$ e temos

  $$m < z_2 \leq m + 1 < z_2 + 1 \leq m + 2.$$

  Em $[m + 1, m + 2]$ existe no máximo um zero de P_n e em $[z_2, z_2 + 1]$ existe uma quantidade ímpar de zeros. Sabemos que no intervalo $[z_2, m + 1]$ há um zero, logo não pode haver um único zero em $[m + 1, z_2 + 1]$, pois teríamos um número par de zeros em $[z_2, z_2 + 1]$. Assim, z_2 é o único zero do intervalo $[z_2 - 1, z_2 + 1]$.

- Se $z_2 > m + 1$, considere $m + i$ $(i \geq 2)$ o menor inteiro maior ou igual do que z_2. Então,

  $$m + 1 < z_2 \leq m + i < z_2 + 1 \leq m + i + 1.$$

  Como no intervalo $[m + i, m + i + 1]$ existe no máximo um zero, este não pode estar em $[m + i, z_2 + 1]$, pois teríamos um número par de zeros em $[z_2, z_2 + 1]$. Logo, temos apenas o zero z_2 no intervalo $[z_2 - 1, z_2 + 1]$.

Prosseguindo com esse raciocínio para cada z_k, $k = 1, \cdots, n$, conclui-se que no intervalo $[z_k - 1, z_k + 1]$ existe apenas o zero z_k. Isto significa que a distância entre os zeros é maior que 1, ou seja, $\mathcal{M}(p) > 1$.

Agora, considerando $A_n(x) > 0$ em I, sejam z_1, z_2 dois zeros consecutivos e

$$\overline{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Se a distância de z_1 a z_2 for menor do que dois, então, $\overline{z} - 1$ e $\overline{z} + 1$ estão fora do intervalo $[z_1, z_2]$. Como $B_n(x) > 0$, então não existem zeros de $P_n(x)$ entre $z_1 - 1$ e z_1 e nem entre z_2 e $z_2 + 1$. Logo, o sinal de $P_n(\overline{z} - 1)$ é oposto ao sinal de $P_n(\overline{z})$ e o sinal de $P_n(\overline{z} + 1)$ também é oposto ao sinal de $P_n(\overline{z})$.

Porém, ao aplicarmos a equação (3.18) a $\overline{z}$, temos uma contradição, pois

$$P_n(\overline{z} + 1) + B_n(\overline{z})P_n(\overline{z} - 1) = 2A_n(\overline{z})P_n(\overline{z}) \tag{3.19}$$

implica que, se os sinais de $P_n(\overline{z}+1)$ e $P_n(\overline{z}-1)$ são iguais então $P_n(\overline{z})$ também deve ter o mesmo sinal.

Portanto, a distância de z_1 a z_2 é maior ou igual a 2, ou seja, $\mathcal{M}(p) \geq 2$. Porém, o caso $\mathcal{M}(p) = 2$ é impossível, pois teríamos $\overline{z} - 1 = z_1$ e $\overline{z} + 1 = z_2$. Daí, (3.19) implicaria $A(\overline{z})P_n(\overline{z}) = 0$, ou seja, $P_n(\overline{z}) = 0$, o que é um absurdo. Logo, $\mathcal{M}(p) > 2$. ∎

3.3 Aplicações

Nesta seção aplicaremos o Teorema de Markov para verificar a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos em relação aos seus parâmetros. Além disso, provaremos, através do Teorema de Krasikov e Zarkh, que a distância mínima entre os zeros dos polinômios ortogonais clássicos de variável discreta é maior que um.

Teorema 3.4 *Seja* $\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}$ *uma sequência de polinômios de Jacobi. Então, seus zeros* $x_{n,j}(\alpha, \beta)$, $1 \leq j \leq n$, *são funções decrescentes do parâmetro* $\alpha \in (-1, \infty)$ *e crescentes do parâmetro* $\beta \in (-1, \infty)$.

Demonstração. Sabemos que os polinômios de Jacobi são ortogonais em $(-1, 1)$ com relação à função peso $\omega(x; \alpha, \beta) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$. Então,

$$\ln \omega(x; \alpha, \beta) = \ln \left[(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta\right] = \ln(1 - x)^\alpha + \ln(1 + x)^\beta = \alpha \ln(1 - x) + \beta \ln(1 + x).$$

Fixando β e considerando $\omega(x; \alpha, \beta)$ uma função de α, temos

$$\frac{\partial \ln \omega(x; \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \ln(1 - x).$$

Como

$$\frac{d \ln(1 - x)}{dx} = -\frac{1}{1 - x}$$

e $-1/(1 - x) < 0$ em $-\infty < x < 1$, $\ln(1 - x)$ é uma função decrescente neste intervalo. Daí, pelo Teorema 3.1, concluímos que $x_{n,j}(\alpha, \beta)$ é uma função decrescente de α.

Mostraremos, agora, o comportamento dos zeros em relação a β. Fixando α e considerando $\omega(x; \alpha, \beta)$ como função de β, temos

$$\frac{\partial \ln \omega(x; \alpha, \beta)}{\partial \beta} = \ln(1 + x)$$

e, assim,

$$\frac{d\ln(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x}.$$

Logo, $\ln(1+x)$ é uma função crescente para $-1 < x < 1$, pois $1/(1+x) > 0$ neste intervalo. Pelo Teorema 3.1, obtemos que $x_{n,j}(\alpha,\beta)$ é uma função crescente de β. ■

Para uma melhor compreensão deste resultado, apresentamos, nas Figuras 3.1 e 3.2, os gráficos dos zeros do polinômio $P_5^{(\alpha,\beta)}(x)$. No primeiro deles, fixamos $\beta = 1$ e obtemos os zeros $x_{5,j}(\alpha,1)$, $j = 1,\cdots,5$, como funções decrescentes do parâmetro α. Já no segundo gráfico, tomamos $\alpha = 1$ e obtemos os zeros $x_{5,j}(1,\beta)$, $j = 1,\cdots,5$, como funções crescentes de β.

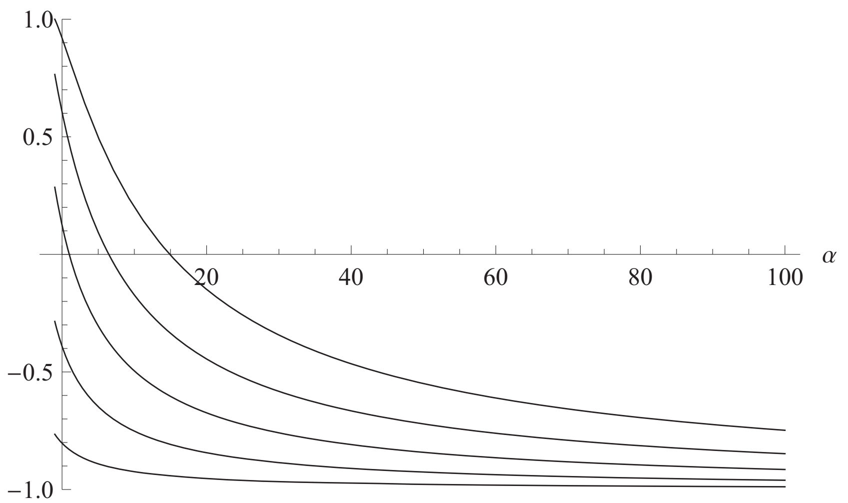

Figura 3.1: Gráfico dos zeros $x_{5,j}(\alpha,1)$, $1 \le j \le 5$, como funções do parâmetro α.

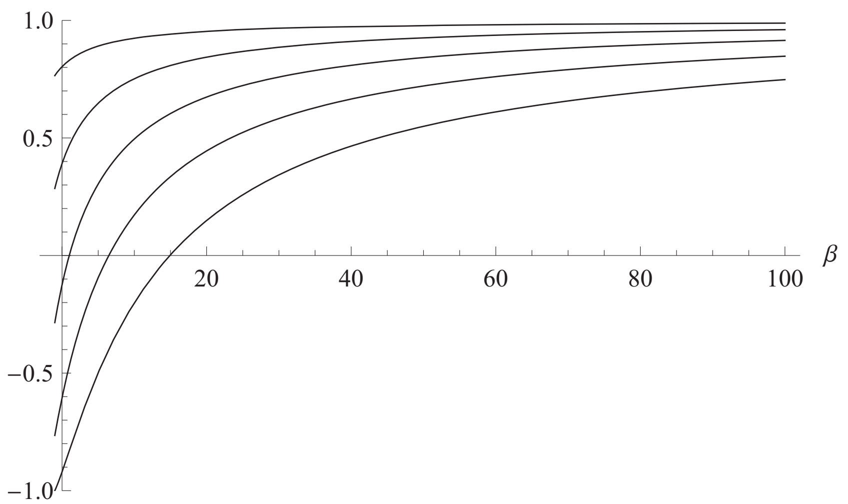

Figura 3.2: Gráfico dos zeros $x_{5,j}(1,\beta)$, $1 \le j \le 5$, como funções do parâmetro β.

É revelante destacarmos quando os polinômios de Jacobi assumem valores iguais para α e β. Considerando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2 > -1$, temos um caso particular dos polinômios de Jacobi, que são os polinômios de Gegenbauer, $C_n^{(\lambda)}(x)$.

Teorema 3.5 *Seja* $\left\{C_n^{(\lambda)}(x)\right\}$ *uma sequência de polinômios de Gegenbauer. Então seus zeros* $x_{n,j}(\lambda)$, $1 \le j \le \lfloor n/2 \rfloor$, *são funções decrescentes de* $\lambda > -1/2$.

Demonstração. Os polinômios de Gegenbauer são ortogonais no intervalo $(-1,1)$ em relação à função peso $\omega(x;\lambda) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$. Assim,

$$\ln \omega(x;\lambda) = \ln(1-x^2)^{\lambda-1/2} = (\lambda - 1/2)\ln(1-x^2).$$

Logo,

$$\frac{\partial \ln \omega(x;\lambda)}{\partial \lambda} = \ln(1-x^2).$$

Como esta não é uma função monótona em $(-1,1)$, não podemos aplicar diretamente o Teorema de Markov. Sabemos que os polinômios de Gegenbauer são simétricos em relação à origem e, por este motivo, basta considerarmos os zeros positivos usando uma transformada quadrática.

Sejam $g_n^{(\lambda)}(x)$ e $h_n^{(\lambda)}(x)$ os polinômios hipergeométricos de grau n

$$g_n^{(\lambda)}(x) = {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, n+\lambda \\ 1/2 \end{array}\middle|\, x\right)$$

e

$$h_n^{(\lambda)}(x) = {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n, n+\lambda+1 \\ 3/2 \end{array}\middle|\, x\right).$$

É bem conhecido que $\left\{g_n^{(\lambda)}(x)\right\}$ e $\left\{h_n^{(\lambda)}(x)\right\}$ são sequências de polinômios ortogonais em $(0,1)$ com respeito às funções peso $\omega_g(x;\lambda) = x^{-1/2}(1-x)^{\lambda-1/2}$ e $\omega_h(x;\lambda) = x^{1/2}(1-x)^{\lambda-1/2}$, respectivamente. Em outras palavras, $g_n^{(\lambda)}(x)$ é um múltiplo de $C_{2n}^{(\lambda)}(x^{1/2})$ e $h_n^{(\lambda)}(x)$ é um múltiplo de $x^{-1/2}C_{2n+1}^{(\lambda)}(x^{1/2})$. Portanto, os zeros de $g_n^{(\lambda)}(x)$ e $h_n^{(\lambda)}(x)$ são, respectivamente, $x_{2n,j}^2(\lambda)$ e $x_{2n+1,j}^2(\lambda)$, $j = 1, \cdots, n$.

Calculando, agora, as derivadas logarítmicas de ω_g e ω_h em relação a λ, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln\, \omega_g(x;\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln\, \omega_h(x;\lambda) = \ln(1-x).$$

Como

$$\frac{d}{dx} \ln(1-x) = -\frac{1}{1-x} < 0 \quad \text{para } x \in (0,1),$$

pelo Teorema 3.1, os zeros de $g_n^{(\lambda)}(x)$ e $h_n^{(\lambda)}(x)$ são funções decrescentes de λ, ou seja,

$$\frac{d}{d\lambda}x_{2n,j}^2(\lambda) = 2x_{2n,j}(\lambda)x'_{2n,j}(\lambda) < 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{d\lambda}x_{2n+1,j}^2(\lambda) = 2x_{2n+1,j}(\lambda)x'_{2n+1,j}(\lambda) < 0,$$

para $j = 1, \cdots, n$. Isto significa que os zeros positivos de $C_n^{(\lambda)}(x)$ são funções decrescentes de λ. $\blacksquare$

A Figura 3.3 ilustra o comportamento dos zeros de $C_5^{(\lambda)}(x)$. Observe que os zeros positivos decrescem enquanto que os zeros negativos crescem. Além disso, o zero $x_{5,3}$ está localizado exatamente sobre o eixo.

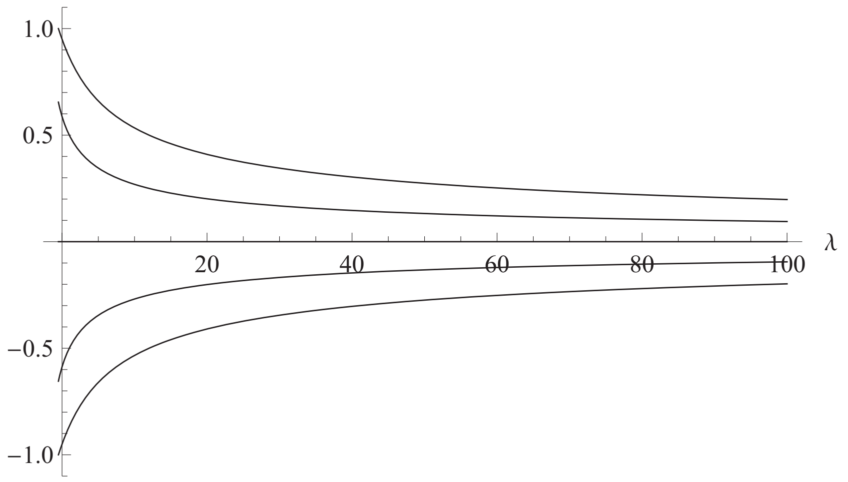

Figura 3.3: Gráfico dos zeros $x_{5,j}(\lambda)$, $1 \leq j \leq 5$, como funções do parâmetro λ.

Teorema 3.6 *Seja* $\left\{L_n^{(\alpha)}(x)\right\}$ *a sequência de polinômios de Laguerre. Então, seus zeros* $\ell_{n,j}(\alpha)$*,* $1 \leq j \leq n$*, são funções crescentes de* $\alpha \in (-1, \infty)$*.*

Demonstração. Os polinômios de Laguerre são ortogonais no intervalo $(0, \infty)$ com respeito à função peso $\omega(x; \alpha) = x^\alpha e^{-x}$. Assim,

$$\ln \omega(x; \alpha) = \ln(x^\alpha e^{-x}) = \ln x^\alpha + \ln e^{-x} = \alpha \ln x - x \ln e = \alpha \ln x - x.$$

Logo,

$$\frac{\partial \ln \omega(x; \alpha)}{\partial \alpha} = \ln x.$$

Como

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} > 0$$

para $0 < x < \infty$, então $\ln x$ é uma função crescente neste intervalo. Daí, pelo Teorema 3.1, conclui-se que os zeros dos polinômios de Laguerre são funções crescentes de α. $\blacksquare$

Analisemos graficamente o comportamento dos zeros do polinômio $L_5^{(\alpha)}(x)$ como funções crescentes do parâmetro α.

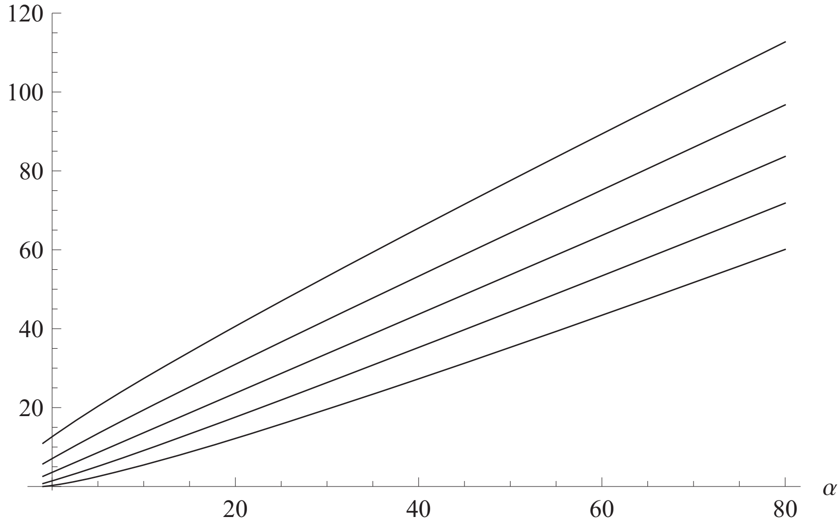

Figura 3.4: Gráfico de $\ell_{5,j}(\alpha)$, $1 \leq j \leq 5$, como funções do parâmetro α.

A partir daqui, aplicaremos o Teorema de Markov para polinômios de variável discreta.

Teorema 3.7 *Os zeros* $c_{n,j}(a)$, $1 \leq j \leq n$, *dos polinômios de Charlier,* $C_n(x;a)$, *são funções crescentes de* $a \in (0,\infty)$.

Demonstração. Sabemos que os polinômios de Charlier são ortogonais em relação à função salto $\omega(k;a) = a^k/k!$, $a > 0$, $k \in \mathcal{N} = \{0,1,2,\cdots\}$. Consideremos a extensão contínua em $(0,\infty)$, $\omega(x;a) = a^x/\Gamma(x+1)$. Daí,

$$\frac{\partial}{\partial a}[\ln\ \omega(x;a)] = \frac{\partial}{\partial a}\left[\ln\ \frac{a^x}{\Gamma(x+1)}\right] = \frac{\partial}{\partial a}[x\ln\ a - \ln\ \Gamma(x+1)] = \frac{x}{a}.$$

Como

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{a}\right] = \frac{1}{a} > 0,$$

temos que x/a é uma função crescente de $x \in (0,\infty)$. Logo, o Teorema 3.2 implica que os zeros de $C_n(x;a)$, são funções crescentes de $a > 0$. ■

O gráfico abaixo ilustra o comportamento dos zeros do polinômio $C_6(x;a)$ em relação ao parâmetro a. Observe que eles são funções crescentes.

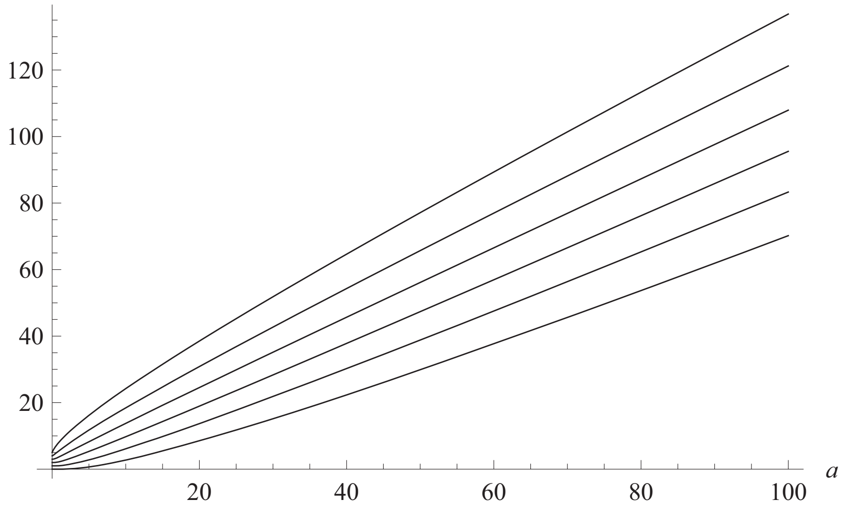

Figura 3.5: Gráfico de $c_{6,j}(a)$, $1 \leq j \leq 6$, como funções do parâmetro a.

Teorema 3.8 *Os zeros,* $m_{n,j}(\beta, c)$, $1 \leq j \leq n$, *dos polinômios de Meixner,* $M_n(x;\beta,c)$, *são funções crescentes de ambos os parâmetros,* $\beta \in (0,\infty)$ *e* $c \in (0,1)$.

Demonstração. Os polinômios $M_n(x;\beta,c)$ são ortogonais com respeito à função salto $\omega(k;\beta,c) = c^k(\beta)_k/k!$, $\beta > 0$, $0 < c < 1$, $k \in \mathcal{N} = \{0,1,2,\cdots\}$. A extensão contínua dessa função é

$$\omega(x;\beta,c) = \frac{c^x\Gamma(x+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(x+1)}, \quad x \in (0,\infty)\,.$$

Assim,

$$\ln\,\omega(x;\beta,c) = \ln\left[\frac{c^x\Gamma(x+\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(x+1)}\right] = x\ln\,c + \ln\,\Gamma(x+\beta) - \ln\,\Gamma(\beta) - \ln\,\Gamma(x+1). \quad (3.20)$$

Derivando (3.20) em relação a β temos

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\ln\,\omega(x;\beta,c)\right] = \frac{\Gamma'(x+\beta)}{\Gamma(x+\beta)} - \frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} = \Psi(x+\beta) - \Psi(\beta),$$

onde, segundo [1], $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ é a derivada logarítmica da função gama, conhecida como digama, que é uma função crescente para $x > 0$. Portanto, os zeros de $M_n(x;\beta,c)$ são funções crescentes de β.

Derivando (3.20) em relação a c, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial c}\left[\ln\,\omega(x;\beta,c)\right] = \frac{x}{c}.$$

Como $c > 0$, conclui-se que esta é uma função crescente para $x > 0$. Logo, pelo Teorema 3.2, os zeros $m_{n,j}(\beta,c)$ são funções crescentes de c. ∎

Observe o comportamento dos zeros do polinômio $M_6(x;\beta,c)$. Na Figura 3.6, fixamos $c = 0.6$ e obtemos os zeros $m_{6,j}(\beta, 0.6)$, $j = 1,\cdots,6$, como funções crescentes do parâmetro β. Na Figura 3.7, tomamos $\beta = 30$ e, assim, os zeros $m_{6,j}(30, c)$, $j = 1, \cdots, 6$ são funções crescentes do parâmetro c.

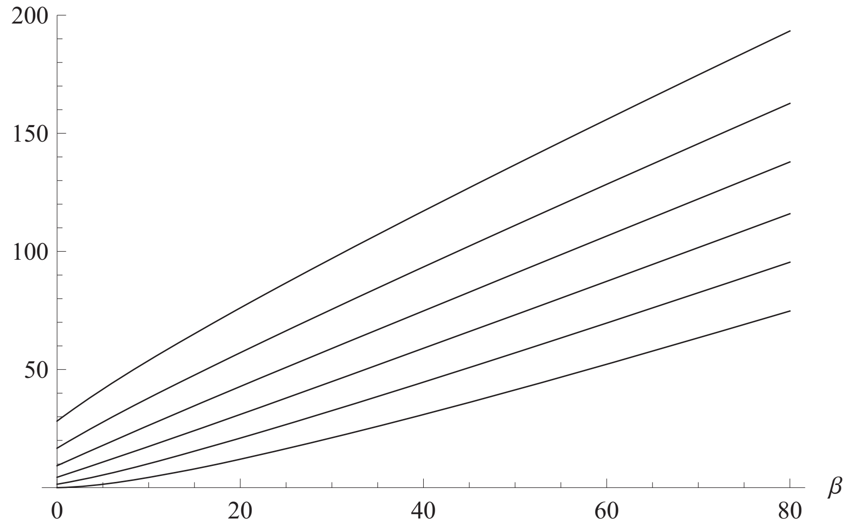

Figura 3.6: Gráfico de $m_{6,j}(\beta, 0.6)$, $1 \leq j \leq 6$, como funções do parâmetro β.

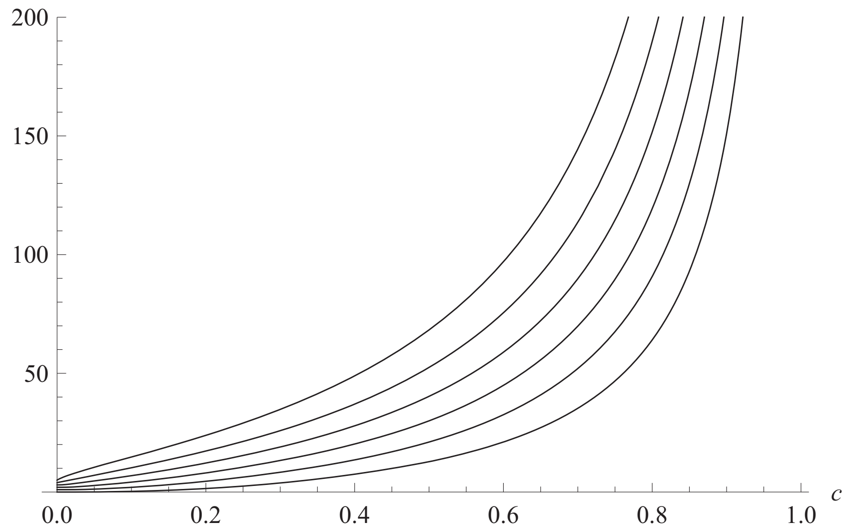

Figura 3.7: Gráfico de $m_{6,j}(30, c)$, $1 \leq j \leq 6$, como funções do parâmetro c.

Teorema 3.9 *Os zeros $\kappa_{n,j}(p, N)$, $1 \leq j \leq n$, do polinômio de Kravchuck, $K_n(x; p, N)$, são funções crescentes de ambos os parâmetros $p \in (0, 1)$ e N, para $N \geq n$.*

Demonstração. A função salto relacionada aos polinômios de Kravchuck é $\omega(k; p, N) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$, $k \in \mathcal{N} = \{0, 1 \cdots, N\}$, cuja extensão contínua é dada pela seguinte expressão:

$$\omega(x; p, N) = \frac{\Gamma(N+1) p^x (1-p)^{N-x}}{\Gamma(N+1-x)\Gamma(x+1)}, \ x \in (0, N).$$

Assim,

$$\ln\,\omega(x;p,N) = \ln\,\Gamma(N+1) + x\ln\,p + (N-x)\ln(1-p) - \ln\,\Gamma(N+1-x) - \ln\,\Gamma(x+1).$$

Logo,

$$\frac{\partial \ln\,\omega(x;p,N)}{\partial p} = \frac{x}{p} - \frac{N-x}{1-p} = \frac{x-Np}{p(1-p)}.$$

Como

$$\frac{d}{dx}\frac{x-Np}{p(1-p)} = \frac{1}{p(1-p)} > 0,$$

pois $0 < p < 1$, segue que $\partial\omega(x;p,N)/\partial p$ é uma função crescente de x. Logo, os zeros $\kappa_{n,j}(p,N)$ são funções crescentes de p.

A monotonicidade de $\kappa_{n,j}(p,N)$ com respeito a N, isto é, a desigualdade $\kappa_{n,j}(p,N) < \kappa_{n,j}(p,N+1)$, foi estabelecida por L. Chihara e D. Stanton em 1990 [5, Teorema 3.1]. Também há uma demonstração desse fato apresentada por Jordaan e Toókos em 2009 [13], que segue imediatamente do entrelaçamento entre os zeros dos polinômios $K_n(x;p,N)$ e $K_{n-1}(x;p,N)$ e da relação contígua

$$K_n(x;p,N+1) = \frac{N-n+1}{N+1}K_n(x;p,N) + \frac{n}{N+1}K_{n-1}(x;p,N). \qquad (3.21)$$

A relação anterior aparece com um erro na pag. 2020 de [13].

Vamos considerar os zeros de $K_{n-1}(x;p,N)$, $K_n(x;p,N)$ e $K_n(x;p,N+1)$ em ordem decrescente. Pelo Teorema 2.8, os zeros de $K_{n-1}(x;p,N)$ e $K_n(x;p,N)$ se entrelaçam, ou seja,

$$\kappa_{n,n}(p,N) < \kappa_{n-1,n-1}(p,N) < \cdots < \kappa_{n,2}(p,N) < \kappa_{n-1,1}(p,N) < \kappa_{n,1}(p,N). \qquad (3.22)$$

Calculando (3.21) para $x = \kappa_{n,j}(p,N)$, obtemos

$$K_n(\kappa_{n,j}(p,N);p,N+1) = \frac{n}{N+1}K_{n-1}(\kappa_{n,j}(p,N);p,N), \;\; j = 1,\cdots,n.$$

Como $n/(N+1) > 0$, temos

$$\text{sinal}\left[K_n(\kappa_{n,j}(p,N);p,N+1)\right] = \text{sinal}\left[K_{n-1}(\kappa_{n,j}(p,N);p,N)\right], \;\; j = 1,\cdots,n. \qquad (3.23)$$

Por outro lado, de [11, p.183], temos $K_n(x;p,N) = 1/\left[(-N)_n p^n\right]x^n + \cdots$. Como $p \in (0,1)$ e $(-N)_n = (-N)(-N+1)\cdots(-N+n-1)$ (n fatores negativos), segue que o coeficiente do termo de maior grau de $K_n(x;p,N)$ tem sinal $(-1)^n$ e, o de $K_{n-1}(x;p,N)$ tem sinal $(-1)^{n-1}$. Por (3.22), resulta que

$$\text{sinal}\left[K_{n-1}(\kappa_{n,j}(p,N);p,N)\right] = (-1)^{n-j}.$$

Assim, de (3.23),

$$\text{sinal}\,[K_n(\kappa_{n,j}(p,N);p,N+1)] = (-1)^{n-j},$$

ou seja, existe pelo menos um zero de $K_n(x;p,N+1)$ em cada um dos $n-1$ intervalos $(\kappa_{n,j+1}(p,N), \kappa_{n,j}(p,N))$, $j = 1, \cdots, n-1$. Além disso,

- Se n é par, então $\text{sinal}\,[K_n(\kappa_{n,1}(p,N);p,N+1)] = -1$ e $\lim_{x\to\infty} K_n(x;p,N+1) = +\infty$. Isso significa que existe um zero de $K_n(x;p,N+1)$ em $(\kappa_{n,1}(p,N), \infty)$.
- Se n é ímpar, então $\text{sinal}\,[K_n(\kappa_{n,1}(p,N);p,N+1)] = +1$ e $\lim_{x\to\infty} K_n(x;p,N+1) = -\infty$, ou seja, existe um zero de $K_n(x;p,N+1)$ em $(\kappa_{n,1}(p,N), \infty)$.

De qualquer forma, temos $\kappa_{n,1}(p,N+1) > \kappa_{n,1}(p,N)$. Portanto, $\kappa_{n,j}(p,N+1) > \kappa_{n,j}(p,N)$, para todo $j = 1, \cdots, n$. ■

Para melhor compreendermos o comportamento dos zeros do polinômio de Kravchuck, vejamos o gráfico dos zeros do polinômio $\kappa_6(x;p,N)$. No primeiro, Figura 3.8, fixamos $N = 50$ e obtemos os zeros $\kappa_{6,j}(p,50)$, $1 \leq j \leq 6$, como funções do parâmetro p. No segundo, Figura 3.9, fixamos $p = 0.6$ e obtemos os zeros $\kappa_{6,j}(0.6,N)$, $1 \leq j \leq 6$, como funções de N (considerando N contínuo).

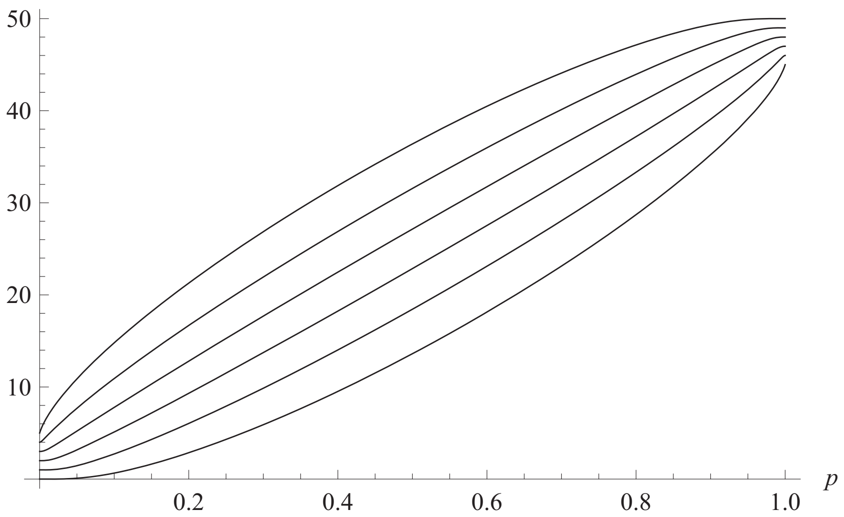

Figura 3.8: Gráfico de $\kappa_{6,j}(p,50)$, $1 \leq j \leq 6$, como funções do parâmetro p.

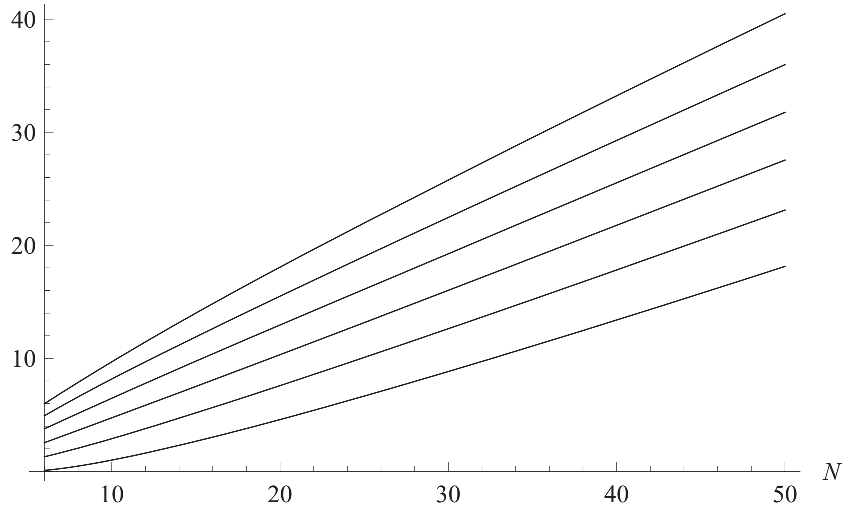

Figura 3.9: Gráfico de $\kappa_{6,j}(0.6, N)$, $1 \leq j \leq 6$, como funções do parâmetro N.

Teorema 3.10 *Os zeros, $q_{n,j}(\alpha, \beta, N)$, $1 \leq j \leq n$, do polinômio de Hahn, $Q_n(x; \alpha, \beta, N)$, são funções decrescentes do parâmetro $\beta \in (-1, \infty)$ e crescentes de $\alpha \in (-1, \infty)$ e N, para $N \geq n$.*

Demonstração. A função salto relacionada aos polinômios de Hahn é $\omega(k; \alpha, \beta, N) = \binom{\alpha + k}{k}\binom{\beta + N - k}{N - k}$, $\alpha, \beta > -1$ ou $\alpha, \beta < -N, k \in \{0, \cdots, N\}$. Sua extensão contínua é a seguinte

$$\omega(x; \alpha, \beta, N) = \frac{\Gamma(\alpha + x + 1)\Gamma(\beta + N - x + 1)}{\Gamma(x + 1)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)\Gamma(N - x + 1)}, \quad x \in (0, N)\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \ln\, \omega(x; \alpha, \beta, N) = \ln\, \Gamma(\alpha + x + 1) + \ln\, \Gamma(\beta + N - x + 1) - \ln\, \Gamma(x + 1) \\ - \ln\, \Gamma(\alpha + 1) - \ln\, \Gamma(\beta + 1) - \ln\, \Gamma(N - x + 1). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln\, \omega(x; \alpha, \beta, N) &= \frac{\Gamma'(\alpha + x + 1)}{\Gamma(\alpha + x + 1)} - \frac{\Gamma'(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &= \Psi(x + \alpha + 1) - \Psi(\alpha + 1). \end{aligned}$$

Como já mencionamos, Ψ é uma função crescente, logo $\partial \ln\, \omega(x; \alpha, \beta, N)/\partial\alpha$ é uma função crescente de x, $x \in (0, N)$. Portanto, $q_{n,j}(\alpha, \beta, N)$, $1 \leq j \leq n$, são funções crescentes do parâmetro α.

Agora, derivando (3.24) em relação a β, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\omega(x;\alpha,\beta,N) &= \frac{\Gamma'(\beta+N-x+1)}{\Gamma(\beta+N-x+1)}-\frac{\Gamma'(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)}\\ &= \Psi(\beta+N-x+1)-\Psi(\beta+1),\end{aligned}$$

e à medida que x aumenta em $(0,N)$, $\partial\omega(x;\alpha,\beta,N)/\partial\beta$ diminui, ou seja, esta é uma função decrescente de x. Logo, os zeros $q_{n,j}(\alpha,\beta,N)$ são funções decrescentes do parâmetro β.

A demonstração da monotonicidade dos zeros $q_{n,j}(\alpha,\beta,N)$, $1\le j\le n$, em relação à N, ou seja, a relação $q_{n,j}(\alpha,\beta,N)<q_{n,j}(\alpha,\beta,N+1)$, $n\le N$, foi demonstrada no artigo de Levit em 1967 [17]. A demonstração que apresentaremos aqui, segue de [3] e [8].

Vamos indicar por $t_n<t_{n-1}<\cdots<t_2<t_1$ os zeros de $Q_n(x;\alpha,\beta,N-1)$ e por $q_{n-1}<q_{n-2}<\cdots<q_2<q_1$ os zeros de $Q_{n-1}(x;\alpha,\beta+1,N-1)$. Assim, fixando n e N, $n\le N$, pelo Teorema 5.1 de [13] e considerando $t=1$, obtemos

$$t_n<q_{n-1}<t_{n-1}<\cdots<q_1<t_1. \tag{3.25}$$

Vamos usar a relação contígua para as séries ${}_3F_2$ dada em [2, p.155–157], ou seja,

$$b\;{}_3F_2\left(\begin{matrix}a,a_2,a_3\\ b,b_2\end{matrix}\,\middle|\,z\right)-a\;{}_3F_2\left(\begin{matrix}a+1,a_2,a_3\\ b+1,b_2\end{matrix}\,\middle|\,z\right)+(a-b)\;{}_3F_2\left(\begin{matrix}a,a_2,a_3\\ b+1,b_2\end{matrix}\,\middle|\,z\right)=0,$$

para $a=-n$, $a_2=-x$, $a_3=n+\alpha+\beta+1$, $b=-N$ e $b_2=\alpha+1$, pode ser escrita em termos dos polinômios de Hahn como

$$-N\,Q_n(x;\alpha,\beta,N)+n\,Q_{n-1}(x;\alpha,\beta+1,N-1)+(N-n)\,Q_n(x;\alpha,\beta,N-1)=0. \tag{3.26}$$

Aplicando os zeros t_j, $j=1,\cdots,n$, de $Q_n(x;\alpha,\beta,N-1)$ em (3.26), obtemos

$$Q_n(t_j;\alpha,\beta,N)=\frac{n}{N}Q_{n-1}(t_j;\alpha,\beta+1,N-1). \tag{3.27}$$

Por outro lado, de [11, p.179], temos

$$Q_n(x;\alpha,\beta,N)=(\alpha+\beta+n+1)_n/\left[(\alpha+1)_n(-N)_n\right]x^n+\cdots,$$

ou seja, o coeficiente do termo de maior grau de $Q_n(x;\alpha,\beta,N)$ tem sinal $(-1)^n$. Então, por (3.25), concluímos que

$$\text{sinal}\left[Q_{n-1}(t_j;\alpha,\beta+1,N-1)\right]=(-1)^{n-j}.$$

Isso e (3.27) implicam que

$$\text{sinal}\,[Q_n(t_j;\alpha,\beta,N)] = (-1)^{n-j}.$$

Logo, $Q_n(t_j;\alpha,\beta,N)$ troca de sinal em cada um dos intervalos (t_j, t_{j-1}), $j = 2,\ldots,n$. Portanto, tem pelo menos um zero de $Q_n(t_j;\alpha,\beta,N)$ em cada um desses $n-1$ intervalos. Falta localizar um zero. Como o coeficiente do termo de maior de $Q_n(x;\alpha,\beta,N)$ é $(-1)^n$ e seu sinal em t_1 é $(-1)^{n-1}$, logo, $Q_n(x;\alpha,\beta,N)$ tem um zero em (t_1,∞). Assim, se os zeros de $Q_n(x;\alpha,\beta,N)$ são $u_n < u_{n-1} < \cdots < u_1$, então

$$t_n < u_n < t_{n-1} < \cdots < t_2 < u_2 < t_1 < u_1.$$

Relembremos que $t_j = q_{n,j}(\alpha,\beta,N-1)$ e $u_j = q_{n,j}(\alpha,\beta,N)$. Portanto,

$$q_{n,j}(\alpha,\beta,N-1) < q_{n,j}(\alpha,\beta,N).$$

■

Observemos esses resultados através dos gráficos dos zeros do polinômio $Q_6(x;\alpha,\beta,N)$. No primeiro, Figura 3.10, tomamos $\beta = 20$, $N = 60$ e obtemos os zeros $q_{6,j}(\alpha,20,60)$, $1 \le j \le 6$, como funções crescentes de α. No segundo gráfico, Figura 3.11, fixamos $\alpha = 10$ e $N = 60$, então os zeros $q_{6,j}(10,\beta,60)$, $1 \le j \le 6$, são funções decrescentes do parâmetro β. No terceiro, Figura 3.12, temos $\alpha = 40$, $\beta = 30$ e os zeros $q_{6,j}(40,30,N)$, $1 \le j \le 6$, são funções crescentes de N.

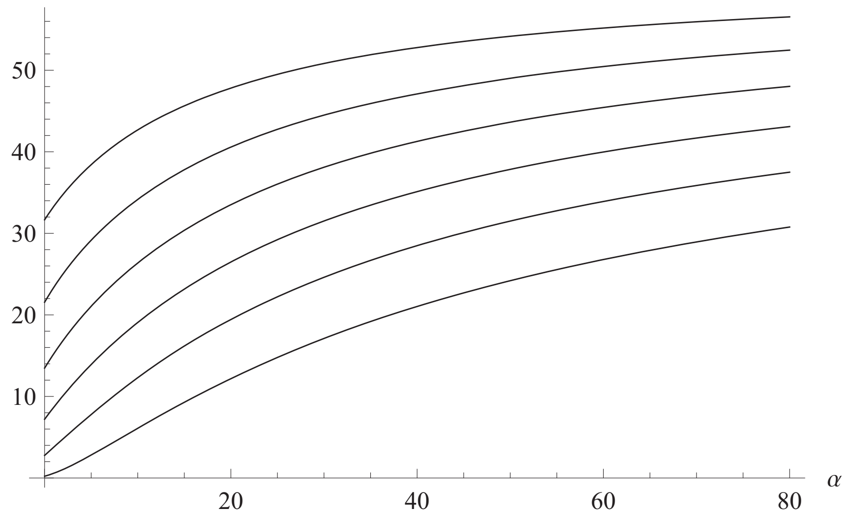

Figura 3.10: Gráfico de $q_{6,j}(\alpha,20,60)$, $1 \le j \le 6$, como funções do parâmetro α.

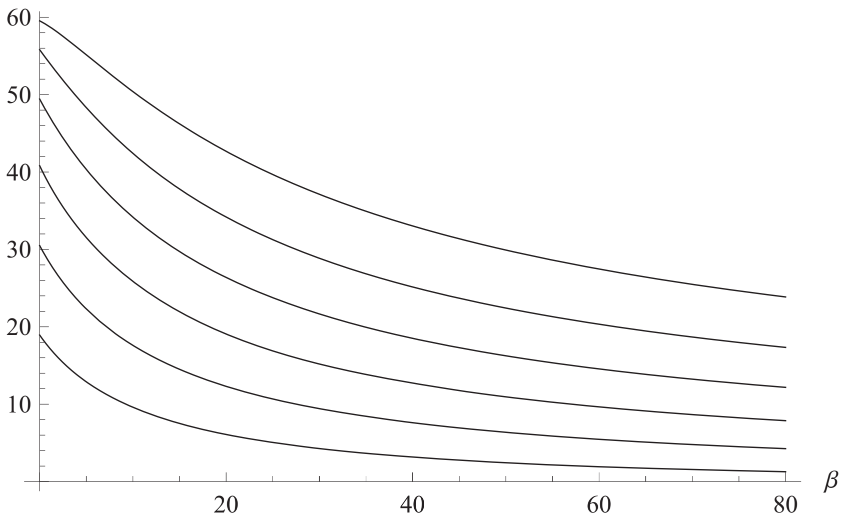

Figura 3.11: Gráfico de $q_{6,j}(10, \beta, 60)$, $1 \leq j \leq 6$, como funções do parâmetro β.

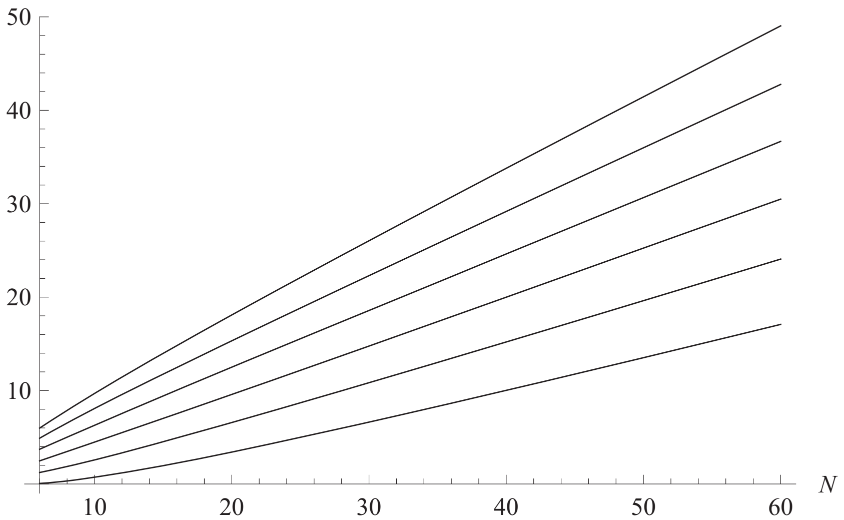

Figura 3.12: Gráfico de $q_{6,j}(40, 30, N)$, $1 \leq j \leq 6$, como funções do parâmetro N.

Observando que as medidas de Jacobi e Hahn são simétricas, isto é, $\omega(x; \alpha, \beta) = \omega(-x; \beta, \alpha)$ e $\omega(k; \alpha, \beta, N) = \omega(-k; \beta, \alpha, N)$, temos que os zeros satisfazem $x_{n,j}(\alpha, \beta) = -x_{n,j}(\beta, \alpha)$, como vemos nas figuras 3.1 e 3.2, e $q_{n,j}(\alpha, \beta, N) = -q_{n,j}(\beta, \alpha, N)$, conforme as figuras 3.10 e 3.11.

Os gráficos apresentados foram feitos no programa Mathematica, onde os zeros foram obtidos através do comando *Solve* e plotados através do comando *Plot*.

Agora, vamos aplicar o Teorema de Krasikov e Zarkh para determinarmos a distância entre os zeros dos polinômios ortogonais clássicos discretos.

Teorema 3.11 *Os zeros dos polinômios de Charlier, Meixner, Kravchuck e Hahn têm distância maior que um entre si.*

Demonstração.

- Da relação de diferenças (2.35) e de (3.18), temos

$$B_n(x) = \frac{x}{a}.$$

Como $a > 0$ e $x \in (0, \infty)$, $B_n(x) > 0$ e, portanto, $\mathcal{M}(C_n) > 1$.

- De (2.37) e (3.18), segue que

$$B_n(x) = \frac{x}{c(x+\beta)},$$

com $\beta > 0$, $0 < c < 1$ e $x \in (0, \infty)$, logo, $B_n(x) > 0$, donde resulta que $\mathcal{M}(M_n) > 1$.

- Da equação de diferenças (2.39) e de (3.18), obtemos

$$B_n(x) = \frac{x(1-p)}{p(N-x)},$$

onde $0 < p < 1$, N é um inteiro positivo e $x \in (0, N)$. Assim, $1 - p > 0$ e $N - x > 0$. Disto segue que $B_n(x) > 0$ e, portanto, $\mathcal{M}(K_n) > 1$.

- Da relação de diferença (2.42) e de (3.18), obtemos

$$B_n(x) = \frac{x\,(N-x+\beta+1)}{(x+\alpha+1)\,(N-x)},$$

com $\alpha, \beta > -1$. Assim, $\alpha + 1 > 0$ e $\beta + 1 > 0$. Além disso, $x \in (0, \infty)$ e, portanto, $N - x > 0$. Desta forma, $B_n(x) > 0$. Logo, $\mathcal{M}(Q_n) > 1$.

■

Observação 3.2 Quanto a função A_n, não temos $A_n(x) > 0$ para nenhum dos polinômios ortogonais clássicos de variável discreta.

Capítulo

4

Teoremas de Hellman-Feynman e Perron-Frobenius

Neste capítulo veremos outros resultados sobre a monotonicidade de zeros de polinômios ortogonais, utilizando os coeficientes da relação de recorrência de três termos dos polinômios ortonormais associados.

Seja $\{P_n(x;\tau)\}_{n\in\mathcal{N}}$ uma sequência paramétrica de polinômios ortogonais. Então, eles satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$xP_k(x;\tau) = \gamma_k(\tau)P_{k+1}(x;\tau) + \beta_k(\tau)P_k(x;\tau) + \delta_k(\tau)P_{k-1}(x;\tau), \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{4.1}$$

com condições iniciais $P_{-1}(x;\tau) = 0$, $P_0(x;\tau) = 1$ e $\gamma_k(\tau)\delta_{k+1}(\tau) > 0$.

Fazendo $k = 0, 1, \cdots, n-1$ em (4.1), obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{array}{rcl}
xP_0(x;\tau) & = & \gamma_0(\tau)P_1(x;\tau) + \beta_0(\tau)P_0(x;\tau) + \delta_0(\tau)P_{-1}(x;\tau) \\
xP_1(x;\tau) & = & \gamma_1(\tau)P_2(x;\tau) + \beta_1(\tau)P_1(x;\tau) + \delta_1(\tau)P_0(x;\tau) \\
xP_2(x;\tau) & = & \gamma_2(\tau)P_3(x;\tau) + \beta_2(\tau)P_2(x;\tau) + \delta_2(\tau)P_1(x;\tau) \\
 & \vdots & \\
xP_{n-1}(x;\tau) & = & \gamma_{n-1}(\tau)P_n(x;\tau) + \beta_{n-1}(\tau)P_{n-1}(x;\tau) + \delta_{n-1}(\tau)P_{n-2}(x;\tau)
\end{array},$$

que, na forma matricial, pode ser escrito como

$$
x\begin{pmatrix} P_0(x;\tau) \\ P_1(x;\tau) \\ P_2(x;\tau) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x;\tau) \\ P_{n-1}(x;\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0(\tau) & \gamma_0(\tau) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \delta_1(\tau) & \beta_1(\tau) & \gamma_1(\tau) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2(\tau) & \beta_2(\tau) & \gamma_2(\tau) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{n-2}(\tau) & \beta_{n-2}(\tau) & \gamma_{n-2}(\tau) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \delta_{n-1}(\tau) & \beta_{n-1}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0(x;\tau) \\ P_1(x;\tau) \\ P_2(x;\tau) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x;\tau) \\ P_{n-1}(x;\tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_{n-1}P_n(x;\tau) \end{pmatrix}. \tag{4.2}
$$

A matriz $n \times n$ do sistema anterior será denotada por $H_n(\tau)$.

Agora, seja $\{p_n(x;\tau)\}_{n\in\mathcal{N}}$ a sequência de polinômios ortonormais associada ao mesmo produto interno. Assim,

$$
p_0(x;\tau) = \left(\int_a^b d\phi(x)\right)^{-1/2}, \quad p_k(x;\tau) = \left(\frac{\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_{k-1}}{\delta_1\delta_2\cdots\delta_k}\right)^{1/2} P_k(x;\tau)
$$

e satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$
xp_k(x;\tau) = a_k(\tau)p_{k+1}(x;\tau) + b_k(\tau)p_k(x;\tau) + a_{k-1}(\tau)p_{k-1}(x;\tau), \tag{4.3}
$$

com $a_k(\tau) = \sqrt{\gamma_k(\tau)\delta_{k+1}(\tau)}, \quad b_k(\tau) = \beta_k(\tau), \quad k \geq 0.$

Analogamente, para $k = 0, 1, \cdots, n-1$, temos

$$
\begin{array}{rcl}
xp_0(x;\tau) & = & a_0(\tau)p_1(x;\tau) + b_0(\tau)p_0(x;\tau) + a_{-1}(\tau)p_{-1}(x;\tau) \\
xp_1(x;\tau) & = & a_1(\tau)p_2(x;\tau) + b_1(\tau)p_1(x;\tau) + a_0(\tau)p_0(x;\tau) \\
xp_2(x;\tau) & = & a_2(\tau)p_3(x;\tau) + b_2(\tau)p_2(x;\tau) + a_1(\tau)p_1(x;\tau) \\
 & \vdots & \\
xp_{n-1}(x;\tau) & = & a_{n-1}(\tau)p_n(x;\tau) + b_{n-1}(\tau)p_{n-1}(x;\tau) + a_{n-2}(\tau)p_{n-2}(x;\tau)
\end{array},
$$

ou, na forma matricial,

$$
x\begin{pmatrix} p_0(x;\tau) \\ p_1(x;\tau) \\ p_2(x;\tau) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x;\tau) \\ p_{n-1}(x;\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0(\tau) & a_0(\tau) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0(\tau) & b_1(\tau) & a_1(\tau) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1(\tau) & b_2(\tau) & a_2(\tau) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-3}(\tau) & b_{n-2}(\tau) & a_{n-2}(\tau) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-2}(\tau) & b_{n-1}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(x;\tau) \\ p_1(x;\tau) \\ p_2(x;\tau) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x;\tau) \\ p_{n-1}(x;\tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n-1}(\tau)p_n(x;\tau) \end{pmatrix}. \tag{4.4}
$$

A matriz $n \times n$ do sistema (4.4) será denotada por $J_n(\tau)$.

Teorema 4.1 *Se $\{P_k(x;\tau)\}_{k=0}^{n}$ e $\{p_k(x;\tau)\}_{k=0}^{n}$ são obtidas das relações de recorrência (4.1) e (4.3), respectivamente, então os zeros de $P_n(x;\tau)$ e $p_n(x;\tau)$ são autovalores das correspondentes matrizes $H_n(\tau)$ e $J_n(\tau)$.*

Demonstração. Seja $x_{n,j}(\tau)$ um zero de $P_n(x;\tau)$ e definimos o vetor

$$
\overline{P}_{n,j} := \left(P_0(x_{n,j}(\tau)), P_1(x_{n,j}(\tau)), \cdots, P_{n-1}(x_{n,j}(\tau))\right)^T.
$$

Substituindo $x = x_{n,j}(\tau)$ em (4.2), obtemos

$$
x_{n,j}(\tau)\begin{pmatrix} P_0(x_{n,j}(\tau);\tau) \\ P_1(x_{n,j}(\tau);\tau) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x_{n,j}(\tau);\tau) \end{pmatrix} = H_n(\tau)\begin{pmatrix} P_0(x_{n,j}(\tau);\tau) \\ P_1(x_{n,j}(\tau);\tau) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x_{n,j}(\tau);\tau) \end{pmatrix} + 0
$$

Logo, $x_{n,j}(\tau)\overline{P}_{n,j} = H_n(\tau)\overline{P}_{n,j}$. Portanto, $x_{n,j}(\tau)$ é autovalor de $H_n(\tau)$ associado a $\overline{P}_{n,j}$.

Como $p_k(x;\tau) = \sqrt{c_k}P_k(x;\tau)$, com $c_k = (\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_{k-1}) / (\delta_1\delta_2\cdots\delta_k)$, para $k \geq 1$, os zeros de $P_n(x;\tau)$ e $p_n(x;\tau)$ são os mesmos.

Definindo

$$
\overline{p}_{n,j} := \left(p_0(x_{n,j}(\tau)), p_1(x_{n,j}(\tau)), \cdots, p_{n-1}(x_{n,j}(\tau))\right)^T
$$

e substituindo $x = x_{n,j}(\tau)$ em (4.4), obtemos

$$x_{n,j}(\tau)\begin{pmatrix} p_0(x_{n,j}(\tau);\tau) \\ p_1(x_{n,j}(\tau);\tau) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x_{n,j}(\tau);\tau) \end{pmatrix} = J_n(\tau)\begin{pmatrix} p_0(x_{n,j}(\tau);\tau) \\ p_1(x_{n,j}(\tau);\tau) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x_{n,j}(\tau);\tau) \end{pmatrix} + 0$$

isto é, $x_{n,j}(\tau)\overline{p}_{n,j} = J_n(\tau)\overline{p}_{n,j}$. Logo, $x_{n,j}(\tau)$ é autovalor de $J_n(\tau)$ associado a $\overline{p}_{n,j}$. ■

Consideremos a matriz $J_n'(\tau)$, onde cada elemento é a derivada em relação a τ do respectivo elemento de $J_n(\tau)$. Então,

$$J_n'(\tau) = \begin{pmatrix} b_0'(\tau) & a_0'(\tau) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0'(\tau) & b_1'(\tau) & a_1'(\tau) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1'(\tau) & b_2'(\tau) & a_2'(\tau) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-3}'(\tau) & b_{n-2}'(\tau) & a_{n-2}'(\tau) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n-2}'(\tau) & b_{n-1}'(\tau) \end{pmatrix}.$$

Veremos, agora, alguns resultados sobre autovalores de matrizes hermitianas. Um deles é o corolário do teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

Teorema 4.2 (Perron-Frobenius) *Sejam A e B matrizes tridiagonais $n \times n$ com elementos positivos. Se os elementos de $B - A$ são não negativos, então o maior autovalor de B é maior que o maior autovalor de A.*

Corolário 4.1 *Seja $H_n(\tau)$ uma matriz tridiagonal $n \times n$ com elementos fora da diagonal positivos. Se os elementos de $H_n(\tau)$ são funções não-decrescentes (não-crescentes) de τ, então o maior autovalor de $H_n(\tau)$ é função não-decrescente (não-crescente) de τ.*

Os próximos resultados são mais abrangentes pois valem para todos os autovalores da matriz tridiagonal.

Teorema 4.3 (Teorema de Hellmann-Feynman) *Seja $z(\tau)$ autovalor de uma matriz simétrica $A(\tau)$ com autovetor $p(\tau)$. Suponha que os elementos de $A(\tau)$ e de $p(\tau)$ sejam diferenciáveis. Então, $z(\tau)$ é diferenciável e*

$$z'(\tau) = \frac{p(\tau)^T A'(\tau) p(\tau)}{p(\tau)^T p(\tau)}.$$

Demonstração. O autovalor $z(\tau)$ é dado por

$$z(\tau) = \frac{p(\tau)^T A(\tau) p(\tau)}{p(\tau)^T p(\tau)}.$$

Então, se $p(\tau)$ e $A(\tau)$ são diferenciáveis, $z(\tau)$ também é.

Daí, podemos derivar a equação $A(\tau)p(\tau) = z(\tau)p(\tau)$, o que resulta em

$$A'(\tau)p(\tau) + A(\tau)p'(\tau) = z'(\tau)p(\tau) + z(\tau)p'(\tau).$$

Multiplicando esta equação à esquerda por $p(\tau)^T$ e sabendo que $p(\tau)^T A(\tau) = [A(\tau)p(\tau)]^T = z(\tau)p(\tau)^T$, a equação anterior reduz-se a

$$p(\tau)^T A'(\tau)p(\tau) = z'(\tau)p(\tau)^T p(\tau).$$

Logo,

$$z'(\tau) = \frac{p(\tau)^T A'(\tau)p(\tau)}{p(\tau)^T p(\tau)}.$$

■

Corolário 4.2 *Nas mesmas condições do teorema anterior, se a matriz $A'(\tau)$ é positiva (negativa) definida, então o autovalor $z(\tau)$ de $p(\tau)$ é uma função crescente (decrescente) de τ.*

Isso decorre da seguinte definição:

Definição 4.1 *Uma matriz hermitiana A é positiva (negativa) definida se $x^T Ax > 0$ (< 0), $\forall\, x \neq 0$.*

A partir do que vimos, se $J_n'(\tau)$ é uma matriz positiva (negativa) definida, os zeros do n-ésimo polinômio ortogonal associado a $J_n(\tau)$ são funções crescentes (decrescentes) de τ. Portanto, devemos mostrar que $J_n'(\tau)$ é uma matriz positiva (negativa) definida e uma das maneiras é pelo teorema a seguir, cuja demonstração decorre de fatos mostrados em [12] e [24].

Teorema 4.4 (Wall-Wetzel) *Seja A_n uma matriz simétrica tridiagonal da forma*

$$A_n = \begin{pmatrix} d_0 & s_0 & 0 & \dots & 0 \\ s_0 & d_1 & s_1 & \dots & 0 \\ 0 & s_1 & d_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Se $d_k > 0$ $(d_k < 0)$, $0 \leq k \leq n-1$, a matriz A_n é positiva (negativa) definida se, e somente se,

$$\left\{ \frac{s_k^2}{d_k d_{k+1}} \right\}_{k=0}^{n-2}$$

forma uma sequência encadeada.

Desta forma, se os coeficientes $b_k(\tau)$, $0 \leq k \leq n-1$, são funções crescentes (decrescentes) de τ, para mostrarmos que a matriz $J_n'(\tau)$ é positiva (negativa) definida basta mostrarmos que

$$\left\{ \frac{a_k'(\tau)^2}{b_k'(\tau) b_{k+1}'(\tau)} \right\}_{k=0}^{n-2}$$

forma uma sequência encadeada.

4.1 Aplicações: limitantes para os zeros dos polinômios ortogonais clássicos

4.1.1 Polinômios de Laguerre

Sabemos que os zeros $\ell_{n,j}(\alpha)$, $1 \leq j \leq n$, do n-ésimo polinômio de Laguerre são funções crescentes de α, resultado este mostrado no Teorema 3.6.

Há uma fórmula assintótica envolvendo os zeros dos polinômios de Laguerre e Hermite provada por Calogero [4]:

$$\ell_{n,j}(\alpha) = \alpha + \sqrt{2\alpha} h_{n,j} + \frac{1}{3}\left(1 + 2n + 2h_{n,j}^2\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Em outras palavras, quando $\alpha \to \infty$, temos

$$\frac{\ell_{n,j}(\alpha) - \left[\alpha + 1/3\left(1 + 2n + 2h_{n,j}^2\right)\right]}{\sqrt{2\alpha}} \to h_{n,j}.$$

A Figura 4.1 mostra-nos esta convergência:

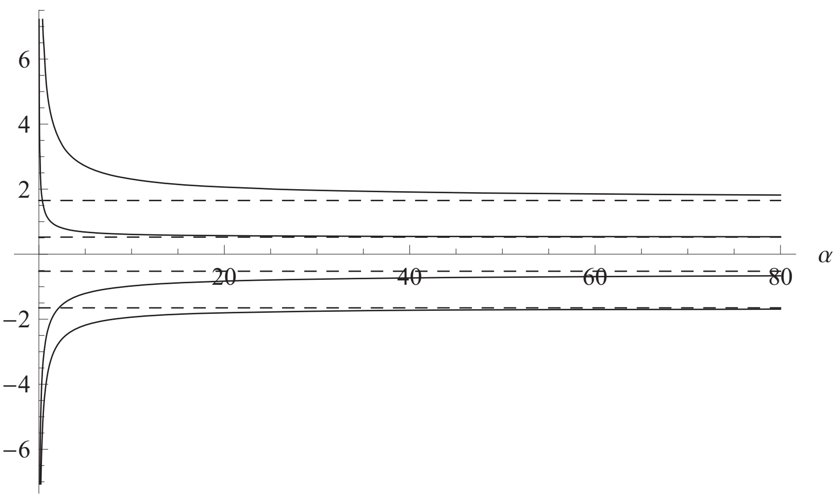

Figura 4.1: Gráfico de $\dfrac{\ell_{n,j}(\alpha) - \left[\alpha + 1/3\left(1 + 2n + 2h_{n,j}^2\right)\right]}{\sqrt{2\alpha}}$, $n = 4$ e $1 \leq j \leq 4$, em traço contínuo e, dos zeros do polinômio de Hermite, $h_{4,j}$, $1 \leq j \leq 4$ em traços pontilhados.

Para quaisquer constantes c_n e d_n, que podem depender de n mas não de α, podemos ainda escrever

$$\frac{\ell_{n,j}(\alpha)-(\alpha+c_n)}{\sqrt{\alpha+d_n}} \to \sqrt{2}h_{n,j}, \quad \alpha\to\infty.$$

Seja, então,

$$z_{n,j}(\alpha)=\frac{\ell_{n,j}(\alpha)-(\alpha+c_n)}{\sqrt{\alpha+d_n}}.$$

Se mostrarmos que esta quantidade é uma função monótona com relação ao parâmetro α, temos uma cota superior ou inferior para os zeros $\ell_{n,j}(\alpha)$ dos polinômios de Laguerre. Em particular, se $z_{n,j}(\alpha)$ for uma função não-decrescente de α, temos

$$\frac{\ell_{n,j}(\alpha)-(\alpha+c_n)}{\sqrt{\alpha+d_n}} \le \sqrt{2}h_{n,j}.$$

Queremos, então, determinar os melhores valores possíveis para as constantes c_n e d_n tais que tenhamos a menor cota superior para os zeros $\ell_{n,j}(\alpha)$, isto é,

$$\ell_{n,j}(\alpha)\le(\alpha+c_n)+\sqrt{2(\alpha+d_n)}h_{n,j}.$$

Para este fim, provaremos primeiramente que $z_{n,j}(\alpha)$ é zero de algum polinômio ortogonal.

De fato, seja $z=\left[x-(\alpha+c_n)\right]/\sqrt{\alpha+d_n}$. Então, $x=\sqrt{\alpha+d_n}z+\alpha+c_n$. Definindo

$$\widetilde{L}_n^{(\alpha)}(z):=L_n^{(\alpha)}\left(\sqrt{\alpha+d_n}z+\alpha+c_n\right),$$

temos que $z_{n,j}(\alpha)$, $1\le j\le n$ são os zeros de $\widetilde{L}_n^{(\alpha)}(z)$.

Fazendo $x=\sqrt{\alpha+d_n}z+\alpha+c_n$ em (2.30), obtemos

$$\left(\sqrt{\alpha+d_n}z+\alpha+c_n\right)\widetilde{L}_k^{(\alpha)}(z)=\widetilde{L}_{k+1}^{(\alpha)}(z)+(2k+\alpha+1)\,\widetilde{L}_k^{(\alpha)}(z)+k(k+\alpha)\widetilde{L}_{k-1}^{(\alpha)}(z)$$

ou, equivalentemente,

$$z\widetilde{L}_k^{(\alpha)}(z)=\frac{1}{\sqrt{\alpha+d_n}}\widetilde{L}_{k+1}^{(\alpha)}(z)+\frac{2k+1-c_n}{\sqrt{\alpha+d_n}}\widetilde{L}_k^{(\alpha)}(z)+\frac{k(k+\alpha)}{\sqrt{\alpha+d_n}}\widetilde{L}_{k-1}^{(\alpha)}(z).$$

Portanto, os polinômios ortonormais associados aos polinômios reescalados de Laguerre, que representaremos por $\left\{\widehat{L}_n^{(\alpha)}(z)\right\}$, satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$z\widehat{L}_k^{(\alpha)}(z)=\widehat{a}_k(\alpha)\widehat{L}_{k+1}^{(\alpha)}(z)+\widehat{b}_k(\alpha)\widehat{L}_k^{(\alpha)}(z)+\widehat{a}_{k-1}(\alpha)\widehat{L}_{k-1}^{(\alpha)}(z),$$

com

$$\widehat{a}_k(\alpha)=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\alpha+d_n}}\frac{(k+1)(\alpha+k+1)}{\sqrt{\alpha+d_n}}}=\sqrt{\frac{(k+1)(\alpha+k+1)}{\alpha+d_n}},\quad 0\le k\le n-2$$

e

$$\widehat{b}_k(\alpha)=\frac{2k+1-c_n}{\sqrt{\alpha+d_n}},\ \ 0\leq k\leq n-1.$$

Determinaremos valores para as constantes c_n e d_n de modo que $\widehat{a}_k(\alpha)$ e $\widehat{b}_k(\alpha)$ sejam funções não-decrescentes de α. Assim, aplicando o Teorema de Perron-Frobenius temos que o maior zero de $\widehat{L}_n^{(\alpha)}(z)$ é função não-decrescente de α.

Derivamos essas constantes em relação a α e obtemos

$$\widehat{a}'_k(\alpha) \ = \ \frac{(k+1)^{1/2}(d_n-k-1)}{2(\alpha+k+1)^{1/2}(\alpha+d_n)^{3/2}},\ \ 0\leq k\leq n-2$$

e

$$\widehat{b}'_k(\alpha) \ = \ \frac{c_n-2k-1}{2(\alpha+d_n)^{3/2}},\ \ 0\leq k\leq n-1.$$

Deste modo, $\widehat{a}'_k(\alpha)\geq 0$ se, e somente se, $d_n\geq k+1$, $0\leq k\leq n-2$. Logo, $d_n\geq n-1$. Como queremos a menor constante, tomamos $d_n=n-1$.

Além disso, $\widehat{b}'_k(\alpha)\geq 0$ se, e somente se, $c_n\geq 2k+1$, para $0\leq k\leq n-1$. Então, $c_n\geq 2n-1$ e, como queremos o menor valor para c_n, segue que $c_n=2n-1$.

Portanto, para $c_n=2n-1$ e $d_n=n-1$, pelo Corolário 4.1 concluímos que o maior zero de $\widetilde{L}_n^{(\alpha)}(z)$ é função não-decrescente de α. Logo, temos uma cota superior para o maior zero do polinômio de Laguerre.

Com essas mesmas constantes, vamos estender este resultado para os demais zeros de $\widetilde{L}_n^{(\alpha)}(z)$ aplicando o Teorema de Hellmann-Feynman. Como consequência do Teorema de Wall-Wetzel e do Teorema 2.13, e sabendo que a sequência constante $\{1/4\}$ é uma sequência encadeada, basta verificarmos que

$$\frac{[\widehat{a}'_k(\alpha)]^2}{\widehat{b}'_k(\alpha)\widehat{b}'_{k+1}(\alpha)}<\frac{1}{4},\ \ 0\leq k\leq n-2. \tag{4.5}$$

De fato,

$$\frac{[\widehat{a}'_k(\alpha)]^2}{\widehat{b}'_k(\alpha)\widehat{b}'_{k+1}(\alpha)}=\frac{\dfrac{(k+1)(n-k-2)^2}{4(\alpha+k+1)(\alpha+n-1)^3}}{\dfrac{(n-k-1)(n-k-2)}{(\alpha+n-1)^{3/2}(\alpha+n-1)^{3/2}}}=\frac{(k+1)(n-k-2)}{4(\alpha+k+1)(n-k-1)}. \tag{4.6}$$

Assim,

$$\frac{(k+1)(n-k-2)}{4(\alpha+k+1)(n-k-1)} \ < \ \frac{1}{4} \ \Leftrightarrow \ \frac{k+1}{k+1-n} \ < \ \alpha$$

para $0\leq k\leq n-2$. Logo, $\alpha>1/(1-n)$.

Portanto, tomando $c_n = 2n-1$, $d_n = n-1$ e $\alpha > 1/(1-n)$, segue que $\left\{[\widehat{a}'_k]^2 \,/\, \left[\widehat{b}'_k(\alpha)\widehat{b}'_{k+1}(\alpha)\right]\right\}_{k=0}^{n-2}$ é uma sequência encadeada. Então, pelo Teorema de Wall-Wetzel e o Teorema de Hellmann-Feynman, concluímos que os zeros de $\widetilde{L}_n^{(\alpha)}(z)$ são funções não-decrescentes de α. Assim, os zeros dos polinômios de Laguerre possuem uma cota superior.

Para que os zeros $\ell_{n,j}(\alpha)$ possuam uma cota inferior, devemos determinar os melhores valores para c_n e d_n de modo que $z_{n,j}(\alpha)$ seja uma função não-crescente de α, isto é, que tenhamos

$$\frac{\ell_{n,j}(\alpha) - (\alpha + c_n)}{\sqrt{\alpha + d_n}} \geq \sqrt{2} h_{n,j},$$

pois, assim,

$$\ell_{n,j}(\alpha) \geq (\alpha + c_n) + \sqrt{2(\alpha + d_n)} h_{n,j}.$$

Note que os melhores valores para c_n e d_n são os maiores possíveis, de forma que tenhamos a maior cota inferior para os zeros $\ell_{n,j}(\alpha)$ dos polinômios de Laguerre.

Verificaremos a monotonicidade de $z_{n,j}(\alpha)$ aplicando o Corolário 4.1. A partir do que vimos anteriormente, temos $\widetilde{a}'_k(\alpha) \leq 0$ se, e somente se, $d_n \leq k+1$, $0 \leq k \leq n-2$. Logo, devemos ter $d_n \leq 1$. Como queremos o maior valor, segue que $d_n = 1$.

Além disso, $b'_k(\alpha) \leq 0$ se, e somente se, $c_n \leq 2k+1$, $0 \leq j \leq n-1$. Logo, $c_n \leq 1$ e, portanto, $c_n = 1$.

Desta forma, se $c_n = d_n = 1$, pelo Corolário 4.1 o maior zero de $\widetilde{L}_n^{(\alpha)}(z)$ é uma função não-crescente de α. Temos, então, uma cota inferior para o maior zero do polinômio de Laguerre. Com estas constantes, para $0 \leq k \leq n-2$, temos

$$\frac{[\widehat{a}'_k(\alpha)]^2}{\widehat{b}'_k(\alpha)\widehat{b}'_{k+1}(\alpha)} = \frac{\dfrac{(-k)^2(k+1)}{4(\alpha+k+1)(\alpha+1)^3}}{\dfrac{(\alpha+1)^{3/2}(\alpha+1)^{3/2}}{(-k)[-(k+1)]}} = \frac{k}{4(\alpha+k+1)}. \tag{4.7}$$

Então,

$$\frac{k}{4(\alpha+k+1)} < \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad k < \alpha + k + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > -1.$$

Disto, podemos concluir que se $c_n = 1$, $d_n = 1$ e $\alpha > -1$, os zeros de $\widehat{L}_n^{(\alpha)}(z)$ são funções não-crescentes de α e, assim, os zeros do polinômio de Laguerre possuem uma cota inferior.

Diante do exposto, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.5 *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então, para $1 \leq j \leq n$, $[\ell_{n,j}(\alpha) - (\alpha + 2n - 1)] / \sqrt{\alpha + n - 1}$ é uma função não-decrescente de α para $\alpha > 1/(1-n)$ e $[\ell_{n,j}(\alpha) - (\alpha+1)] / \sqrt{\alpha+1}$ é uma função não-crescente de α para $\alpha > -1$. Além disso, temos*

$$(\alpha+1) + \sqrt{2(\alpha+1)} h_{n,j} \leq \ell_{n,j}(\alpha) \leq (\alpha + 2n - 1) + \sqrt{2(\alpha + n - 1)} h_{n,j}.$$

As figuras a seguir ilustram os resultados deste teorema. As Figuras 4.2 e 4.3 mostram, respectivamente, que as quantidades

$$\frac{\ell_{n,j}(\alpha)-(\alpha+2n-1)}{\sqrt{\alpha+n-1}} \quad \text{e} \quad \frac{\ell_{n,j}(\alpha)-(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha+1}}, \;\; n=4, \;\; 1\leq j\leq 4$$

são funções crescentes e decrescentes de α e, convergem para $\sqrt{2}h_{4,j}$, onde $h_{4,j}$ são os zeros do polinômio de Hermite de grau 4. A Figura 4.4 mostra o gráfico dos zeros do polinômio de Laguerre de grau 4 em relação ao parâmetro α, limitados inferiormente e superiormente por

$$(\alpha+1)+\sqrt{2(\alpha+1)}h_{n,j} \quad \text{e} \quad (\alpha+2n-1)+\sqrt{2(\alpha+n-1)}h_{n,j}, \;\; n=4, \;\; 1\leq j\leq 4,$$

respectivamente.

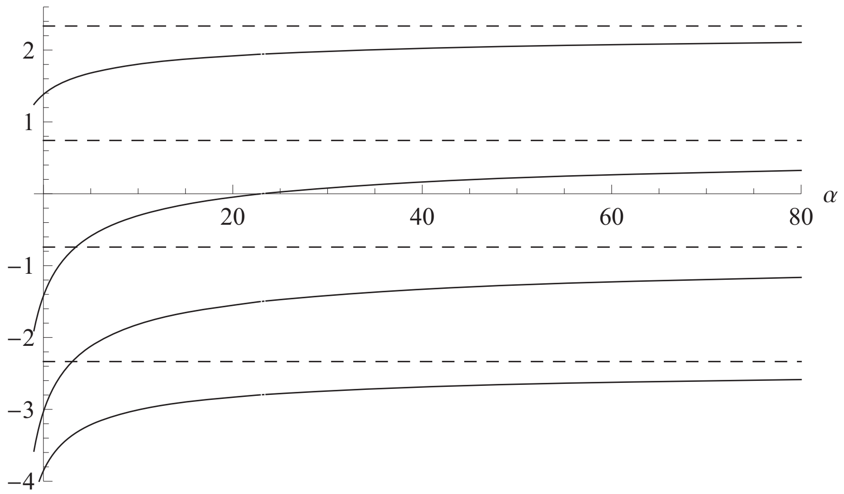

Figura 4.2: Gráfico de $\dfrac{\ell_{n,j}(\alpha)-(\alpha+2n-1)}{\sqrt{\alpha+n-1}}$, $n=4$ e $1\leq j\leq 4$, em traço contínuo e, de $\sqrt{2}h_{4,j}$, $1\leq j\leq 4$ em traços pontilhados.

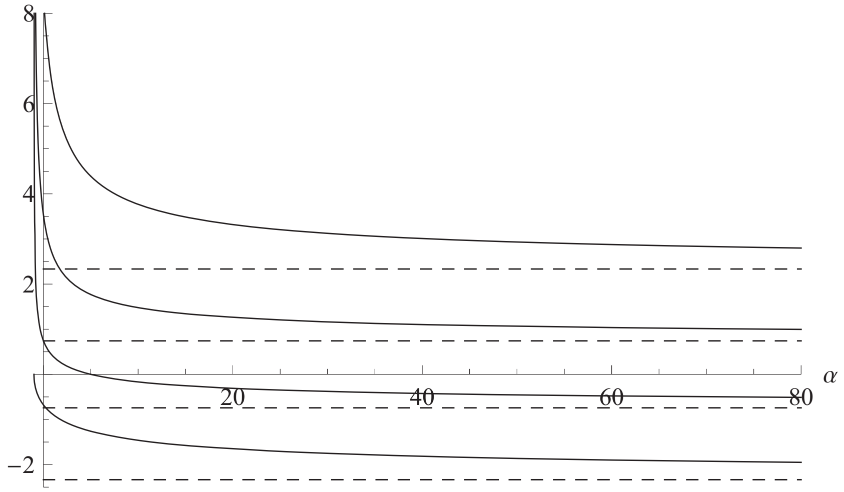

Figura 4.3: Gráfico de $\dfrac{\ell_{4,j}(\alpha)-(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha+1}}$, $1 \leq j \leq 4$, em traço contínuo e, de $\sqrt{2}h_{4,j}$, $1 \leq j \leq 4$ em traços pontilhados.

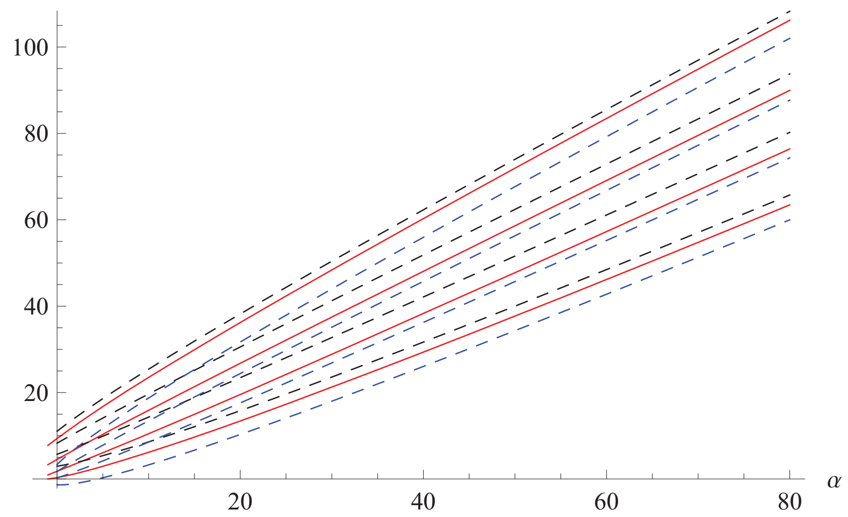

Figura 4.4: Gráfico dos zeros de $L_4^{(\alpha)}(x)$ em traço contínuo, dos limitantes superiores $\alpha+2n-1+\sqrt{2(\alpha+n-1)}h_{n,j}$, $n=4$ e $1 \leq j \leq 4$, em traços pontilhados pretos e dos limitantes inferiores $\alpha+1+\sqrt{2(\alpha+1)}h_{n,j}$, $n=4$ e $1 \leq j \leq 4$, em traços pontilhados azuis.

4.1.2 Polinômios de Charlier

Vimos que os zeros do n-ésimo polinômio de Charlier são funções crescentes do parâmetro a, Teorema 3.7.

Em [14] encontramos a seguinte fórmula assintótica envolvendo os polinômios de Charlier e Hermite:

$$\lim_{a\to\infty}(2a)^{2/n}C_n\left((2a)^{1/2}x+a;a\right)=(-1)^nH_n(x).$$

Como os zeros são funções contínuas dos coeficientes dos polinômios, temos

$$\frac{c_{n,j}(a) - a}{\sqrt{2a}} \to h_{n,j}, \quad a \to \infty,$$

É o que podemos ver na Figura 4.5:

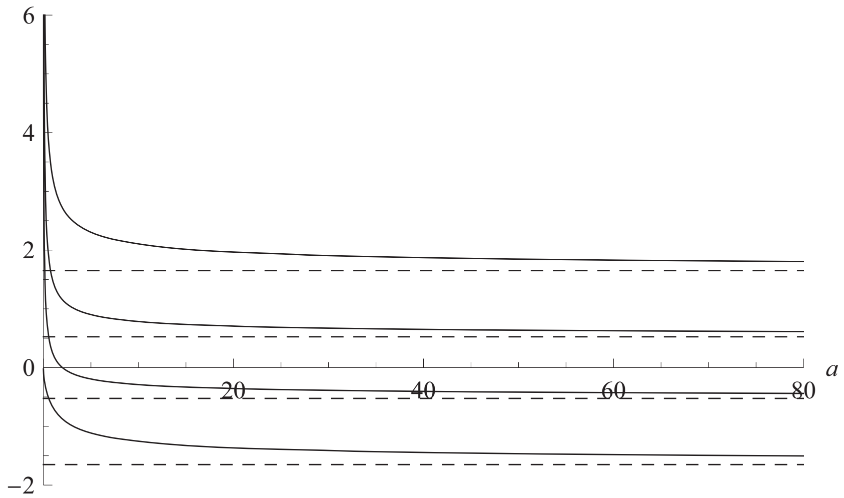

Figura 4.5: Gráfico de $\dfrac{c_{4,j}(a) - a}{\sqrt{2a}}$, $1 \leq j \leq 4$, em traço contínuo e, dos zeros $h_{4,j}$, $1 \leq j \leq 4$ em traços pontilhados.

Podemos ainda afirmar que

$$\frac{c_{n,j}(a) - (a + c_n)}{\sqrt{2(a + d_n)}} \to h_{n,j}, \quad a \to \infty,$$

vale para quaisquer constantes c_n e d_n que podem depender de n mas não do parâmetro a.

Se provarmos que $z_{n,j}(a) = [c_{n,j}(a) - (a + c_n)] / \sqrt{2(a + d_n)}$ é uma função monótona não-decrescente de a, temos uma cota superior para os zeros do polinômio de Charlier, ou seja,

$$c_{n,j}(a) \leq \sqrt{2(a + d_n)} h_{n,j} + a + c_n.$$

Precisamos determinar as melhores constantes c_n e d_n tais que isso acontece. Note que, para obtermos a menor cota superior para $c_{n,j}(a)$, as constantes devem ser as menores possíveis.

Definamos

$$\widehat{C}_k(x; a) := (2a)^{k/2} C_k(x; a).$$

Agora, multiplicando (2.34) por $(2a)^{k/2}$, temos

$$x(2a)^{k/2} C_k(x; a) = -a(2a)^{k/2} C_{k+1}(x; a) + (k + a)(2a)^{k/2} C_k(x; a) - k(2a)^{k/2} C_{k-1}(x; a),$$

ou seja, obtivemos a relação de recorrência de três termos para $\widehat{C}_k$,

$$x\widehat{C}_k(x;a) = -\frac{a}{(2a)^{1/2}}\widehat{C}_{k+1}(x;a) + (k+a)\widehat{C}_k(x;a) - k(2a)^{1/2}\widehat{C}_{k-1}(x;a). \tag{4.8}$$

Seja $z = [x-(a+c_n)]\,/\sqrt{2(a+d_n)}$. Logo, $x = \sqrt{2(a+d_n)}z + a + c_n$.
Definamos

$$\widetilde{C}_k(z;a) := \widehat{C}_k(\sqrt{2(a+d_n)}z + a + c_n; a) = (2a)^{k/2}C_k(\sqrt{2(a+d_n)}z + a + c_n; a).$$

Fazendo $x = \sqrt{2(a+d_n)}z + a + c_n$ em (4.8), obtemos

$$\left[\sqrt{2(a+d_n)}z + a + c_n\right]\widetilde{C}_k(z;a) = -\frac{a^{1/2}}{2^{1/2}}\widetilde{C}_{k+1}(z;a) + (k+a)\widetilde{C}_k(z;a) - k(2a)^{1/2}\widetilde{C}_{k-1}(z;a),$$

ou, equivalentemente,

$$z\widetilde{C}_k(z;a) = -\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a+d_n}}\widetilde{C}_{k+1}(z;a) + \frac{k-c_n}{\sqrt{2(a+d_n)}}\widetilde{C}_k(z;a) - \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{a+d_n}}\widetilde{C}_{k-1}(z;a).$$

Desta forma, os polinômios ortonormais de $\left\{\widetilde{C}_k(z;a)\right\}$ satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$z\mathcal{C}_k(z;a) = a_k(a)\mathcal{C}_{k+1}(z;a) + b_k(a)\mathcal{C}_k(z;a) + a_{k-1}(a)\mathcal{C}_{k-1}(z;a),$$

com

$$a_k(a) = \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a+d_n}}\frac{(k+1)\sqrt{a}}{\sqrt{a+d_n}}} = \sqrt{\frac{a(k+1)}{2(a+d_n)}}, \quad 0 \le k \le n-2$$

e

$$b_k(a) = \frac{k-c_n}{\sqrt{2(a+d_n)}}, \quad 0 \le k \le n-1.$$

Derivando essas constantes em relação a a, obtemos

$$a_k'(a) = \frac{1}{2}\left[\frac{a(k+1)}{2(a+d_n)}\right]^{-1/2}\left[\frac{(k+1)2(a+d_n) - a(k+1)2}{4(a+d_n)^2}\right] = \frac{d_n}{a\,[2(a+d_n)]^{3/2}},$$

$$b_k'(a) = \frac{-1/2\,[2(a+d_n)]^{-1/2}\,2(k-c_n)}{2(a+d_n)} = \frac{c_n-k}{[2(a+d_n)]^{3/2}}.$$

Assim, $a_k'(a) \ge 0 \Leftrightarrow d_n \ge 0$ e, como queremos o menor valor para essa constante, segue que $d_n = 0$.

Além disso, $b_k'(a) \ge 0 \Leftrightarrow c_n - k \ge 0$. Isto é, $c_n \ge k$, $0 \le k \le n-1$. Logo, $c_n \ge n-1$. Como queremos o menor valor para c_n, concluímos que $c_n = n-1$.

Portanto, assumindo $c_n = n - 1$ e $d_n = 0$, pelo Corolário 4.1, $z_{n,j}(a)$ é uma função não-decrescente e $z_{n,j}(a) \leq h_{n,j}$. Logo, $c_{n,j}(a) \leq \sqrt{2a}h_{n,j} + a + n - 1$, onde $c_{n,j}(a)$ é o maior zero de $C_n(x; a)$.

Agora, vamos estender este resultado para os demais zeros do n-ésimo polinômio de Charlier utilizando o Teorema de Hellmann-Feynman.

Considerando $c_n = n - 1$ e $d_n = 0$, temos $a'_{k-1}(a) = 0$, para todo k e $b'_k(a) = [n - (k + 1)] \,/\, \left[(2a)^{3/2}\right] \geq 0$ para $0 \leq k \leq n - 1$. Assim,

$$J'_n(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{n-1}{(2a)^{3/2}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{n-2}{(2a)^{3/2}} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{(2a)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz definida positiva, logo $z_{n,j}(a)$ é uma função não-decrescente e obtemos $c_{n,j}(a) \leq \sqrt{2a}h_{n,j} + a + n - 1$ para todo zero de $C_n(x; a)$.

Por outro lado, determinaremos os melhores valores para c_n e d_n de modo que $z_{n,j}(a)$ seja uma função não-crescente de a, pois teremos uma cota inferior para os zeros de Charlier. A maior cota inferior é determinada quando tomamos os maiores valores possíveis para essas constantes.

Temos $a'_k(a) \leq 0 \Leftrightarrow d_n \leq 0$, com $d_n \geq -a$, $a > 0$. Portanto, $d_n = 0$. Além disso, $b'_k(a) \leq 0 \Leftrightarrow c_n \leq k$, $0 \leq k \leq n-1$. Logo, $c_n \leq 0$ e, como queremos o maior valor, temos $c_n = 0$.

Portanto, tomando $c_n = 0$ e $d_n = 0$, pelo Corolário 4.1 $z_{n,j}(a)$ é uma função não-crescente e $z_{n,j}(a) \geq h_{n,j}$. Então, $\sqrt{2a}h_{n,j} + a \leq c_{n,j}(a)$, sendo $c_{n,j}(a)$ o maior zero de $C_n(x; a)$.

Estenderemos este resultado para os demais zeros do polinômio de Charlier através do Teorema de Hellmann-Feynman. Tomando $c_n = 0$ e $d_n = 0$ obtemos $a'_k(a) = 0$ e $b'_k(a) = -k/\left[(2a)^{3/2}\right] \leq 0$ para $0 \leq k \leq n - 1$. Assim,

$$J'_n(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{(2a)^{3/2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{n-1}{(2a)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

é uma matriz definida negativa e, portanto $z_{n,j}(a)$ é uma função não-crescente. Note que não alteramos a convergência apresentada na Figura 4.5, já que $c_n = d_n = 0$. Assim, obtemos

$$\sqrt{2a}h_{n,j} + a \le c_{n,j}(a), \text{ para } 1 \le j \le n.$$

As considerações acima apresentadas demonstram o seguinte teorema, encontrado em [8].

Teorema 4.6 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a > 0$. Então, para $1 \le j \le n$, as funções $(c_{n,j}(a) - a)/\sqrt{2a}$ decrescem e $[c_{n,j}(a) - (a+n-1)]/\sqrt{2a}$ crescem para $a \in (0, \infty)$. Além disso, as desigualdades*

$$a + \sqrt{2a}\, h_{n,j} \le c_{n,j}(a) \le a + n - 1 + \sqrt{2a}\, h_{n,j},$$

são satisfeitas para $j = 1, \ldots, n$.

As Figuras 4.5 e 4.6 mostram, respectivamente, que as quantidades

$$\frac{c_{n,j}(a) - a}{\sqrt{2a}} \quad \text{e} \quad \frac{c_{n,j}(a) - (a+n-1)}{\sqrt{2a}}, \quad n = 4, \ 1 \le j \le 4$$

são funções decrescentes e crescentes de a e convergem para os zeros do polinômio $H_4(x)$. A Figura 4.7 apresenta os zeros de $C_4(x; a)$ em relação ao parâmetro a e seus limitantes inferiores e superiores

$$a + \sqrt{2a}\, h_{n,j} \quad \text{e} \quad a + n - 1 + \sqrt{2a}\, h_{n,j}, \quad n = 4, \ 1 \le j \le 4.$$

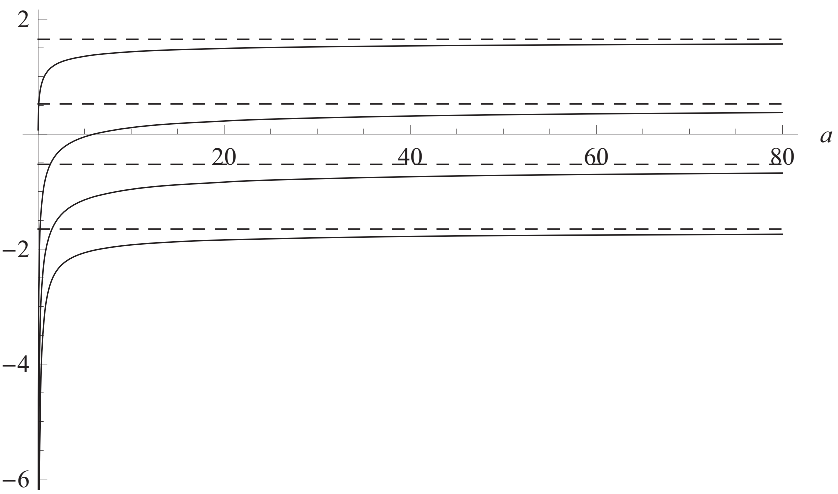

Figura 4.6: Gráfico de $\dfrac{c_{n,j}(a) - (a+n-1)}{\sqrt{2a}}$, $n = 4$ e $1 \le j \le 4$, em traço contínuo e, dos zeros $h_{4,j}$, $1 \le j \le 4$ em traços pontilhados.

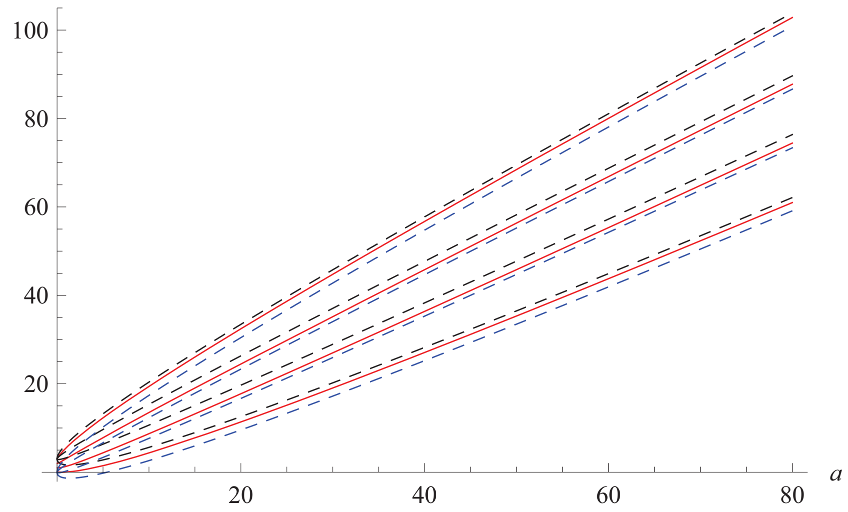

Figura 4.7: Gráfico dos zeros $c_{4,j}(a)$, $1 \leq j \leq 4$, em traço contínuo e, dos limitantes superiores $a+n-1+\sqrt{2a}h_{4,j}$, $n=4$ e $1 \leq j \leq 4$, em traços pontilhados pretos e dos limitantes inferiores $a+\sqrt{2a}h_{4,j}$, $1 \leq j \leq 4$ em traços pontilhados azuis.

4.1.3 Polinômios de Meixner

Temos a seguinte relação de limite entre os polinômios de Meixner e de Laguerre [14]:

$$\lim_{c\to 1} M_n\left(\frac{x}{1-c}; \alpha+1, c\right) = \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)}(0)}.$$

Então, podemos afirmar que quando $c \to 1$

$$(1-c)m_{n,j}(\alpha+1, c) \to l_{n,j}(\alpha).$$

A Figura 4.8 ilustra esta convergência

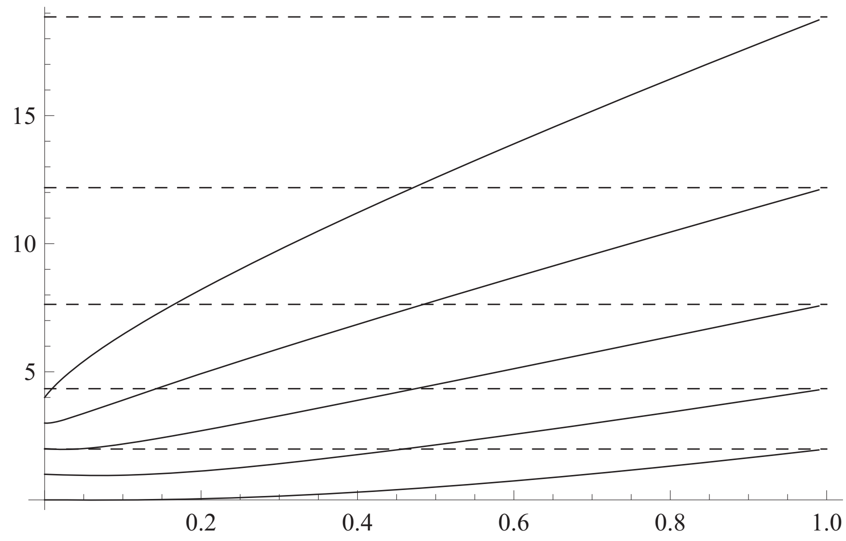

Figura 4.8: Gráfico de $(1-c)m_{5,j}(\alpha+1,c)$, $1 \leq j \leq 5$, em traço contínuo, convergindo para os zeros $\ell_{5,j}$, $1 \leq j \leq 5$, em traços pontilhados.

Podemos ainda escrever

$$F(c)(1-c)m_{n,j}(\alpha+1,c) + G(c) \to F(1)l_{n,j}(\alpha) + G(1).$$

Queremos provar que $z_{n,j}(c) = F(c)(1-c)m_{n,j}(\alpha+1,c)+G(c)$ é uma função monótona. Seja $z = F(c)(1-c)x + G(c)$, então $x = (z - G(c)) \,/\, [F(c)(1-c)]$. Definamos

$$\widetilde{M}_n(z,\alpha,c) := M_n\left(\frac{z-G(c)}{F(c)(1-c)};\alpha+1,c\right).$$

Observe que $z_{n,j}(c)$ é zero de $\widetilde{M}_n(z,\alpha,c)$.

Substituindo $x = (z-G(c)) \,/\, [F(c)(1-c)]$ na relação de recorrência de três termos para os polinômios de Meixner (2.36), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{z-G(c)}{F(c)(1-c)}(c-1)\widetilde{M}_k(z,\alpha,c) = c(k+\alpha+1)\widetilde{M}_{k+1}(z,\alpha,c) - [k+(k+\alpha+1)c]\,\widetilde{M}_k(z,\alpha,c) \\ +k\widetilde{M}_{k-1}(z,\alpha,c),\end{aligned}$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} z\widetilde{M}_k(z,\alpha,c) &= -cF(c)(k+\alpha+1)\widetilde{M}_{k+1}(z,\alpha,c) + [kF(c)+(k+\alpha+1)cF(c)+G(c)] \\ &\quad \times\widetilde{M}_k(z,\alpha,c) - kF(c)\widetilde{M}_{k-1}(z,\alpha,c).\end{aligned}$$

Logo, os polinômios ortonormais relacionados à $\widetilde{M}_n(z,\alpha,c)$, que representaremos por $\widehat{M}_n(z,\alpha,c)$, satisfazem a seguinte relação de recorrência de três termos:

$$z\widehat{M}_k(z,\alpha,c) = a_k(c)\widehat{M}_{k+1}(z,\alpha,c) + b_k(c)\widehat{M}_k(z,\alpha,c) + a_{k-1}(c)\widehat{M}_{k-1}(z,\alpha,c),$$

com

$$a_k(c) = \sqrt{cF(c)(k+\alpha+1)(k+1)F(c)} = \sqrt{cF^2(c)(k+1)(\alpha+k+1)},\ k=0,1,\cdots,n-2$$

e

$$b_k(c) = kF(c) + cF(c)(k+\alpha+1) + G(c),\ k = 0,1,\cdots,n-1.$$

Derivamos os coeficientes $a_k(c)$ e $b_k(c)$ e obtemos

$$\begin{aligned} a_k'(c) &= \frac{(k+1)(\alpha+k+1)\left(F^2(c)+2cF(c)F'(c)\right)}{2\sqrt{(k+1)(\alpha+k+1)cF^2(c)}} \\ &= \frac{\sqrt{(k+1)(\alpha+k+1)}\left(F^2(c)+2cF(c)F'(c)\right)}{2\sqrt{cF^2(c)}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$a_k'(c) \geq 0 \Leftrightarrow F^2(c) + 2cF(c)F'(c) \geq 0.$$

Se $F^2(c) + 2cF(c)F'(c) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{F'(c)}{F(c)} &= -\frac{1}{2c} \\ \ln F(c) &= \ln c^{-1/2} \\ F(c) &= \frac{1}{\sqrt{c}}. \end{aligned}$$

Derivando $b_k(c)$ e substituindo $F(c) = 1/\sqrt{c}$, obtemos

$$\begin{aligned} b_k'(c) &= kF'(c) + \left[\left(F(c) + cF'(c)\right)(k+\alpha+1)\right] + G'(c) \\ &= -\frac{k}{2c^{3/2}} + \frac{k+\alpha+1}{2\sqrt{c}} + G'(c) \\ &= \frac{-k(1-c)+c(\alpha+1)}{2c^{3/2}} + G'(c). \end{aligned}$$

Então,

$$b_k'(c) \leq 0 \Leftrightarrow G'(c) \leq \frac{k(1-c)-c(\alpha+1)}{2c^{3/2}}.$$

Note que

$$\frac{d}{dk}\left[\frac{k(1-c)-c(\alpha+1)}{2c^{3/2}}\right] = \frac{1-c}{2c^{3/2}} > 0.$$

Como esta é uma função crescente em relação a k, temos

$$b_k'(c) \leq 0 \Leftrightarrow G'(c) = -\frac{\alpha+1}{2\sqrt{c}},$$

logo,

$$G(c) = -(\alpha+1)\sqrt{c}.$$

Tomando $F(c) = \dfrac{1}{\sqrt{c}}$ e $G(c) = -(\alpha+1)\sqrt{c}$ segue que $J_n'(c)$ é uma matriz diagonal com elementos negativos, logo, é uma matriz definida negativa e, portanto,

$$\frac{(1-c)m_{n,j}(\alpha+1,c) - c(\alpha+1)}{\sqrt{c}}$$

é uma função monótona não-crescente e

$$\frac{(1-c)m_{n,j}(\alpha+1,c) - c(\alpha+1)}{\sqrt{c}} \geq \ell_{n,j}(\alpha) - (\alpha+1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} m_{n,j}(\alpha+1,c) &\geq \frac{\sqrt{c}\ell_{n,j}(\alpha) - \sqrt{c}(\alpha+1) + c(\alpha+1)}{1-c} \\ &= \frac{\sqrt{c}\left[\ell_{n,j}(\alpha) - (\alpha+1) + \sqrt{c}(\alpha+1)\right]}{1-c} \\ &= \frac{\sqrt{c}}{1-c}\left[\ell_{n,j}(\alpha) - (\alpha+1)(1-\sqrt{c})\right]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$b_k'(c) \geq 0 \Leftrightarrow G'(c) = \frac{(n-1)(1-c) - (\alpha+1)c}{2c^{3/2}} = \frac{(n-1) - c(n+\alpha)}{2c^{3/2}},$$

logo,

$$G(c) = \frac{1-n-(n+\alpha)c}{\sqrt{c}}.$$

Assim, tomando $F(c) = 1/\sqrt{c}$ e $G(c) = \left[1-n-c(n+\alpha)\right]/\sqrt{c}$ segue que $J_n'(c)$ é uma matriz diagonal com elementos positivos, assim $J_n'(c)$ é uma matriz definida positiva, logo,

$$\frac{(1-c)m_{n,j}(\alpha+1,c) + 1 - n - c(n+\alpha)}{\sqrt{c}}$$

é uma função não-decrescente, desta forma

$$\frac{(1-c)m_{n,j}(\alpha+1,c) + 1 - n - c(n+\alpha)}{\sqrt{c}} \leq \ell_{n,j}(\alpha) - 2n - \alpha + 1,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
m_{n,j}(\alpha+1,c) &\le \frac{\sqrt{c}}{1-c}\left[\ell_{n,j}(\alpha)-2n-\alpha+1+\sqrt{c}\,(n+\alpha)+\frac{n-1}{\sqrt{c}}\right]\\
&= \frac{\sqrt{c}}{1-c}\left[\ell_{n,j}(\alpha)-\alpha+\alpha\sqrt{c}-1+\sqrt{c}+\frac{2\sqrt{c}-c-2n\sqrt{c}+cn+n-1}{\sqrt{c}}\right]\\
&= \frac{\sqrt{c}}{1-c}\left[\ell_{n,j}(\alpha)-(\alpha+1)\left(1-\sqrt{c}\right)+(n-1)\frac{(1-\sqrt{c})^2}{\sqrt{c}}\right].
\end{aligned}$$

Desta forma podemos enunciar o seguinte teorema obtido por [8]:

Teorema 4.7 *Sejam* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > -1$ *e* $0 < c < 1$. *Então, as quantidades*

$$\frac{[(1-c)m_{n,j}(\alpha+1,c)-c(\alpha+1)]}{\sqrt{c}} \quad e \quad \frac{[(1-c)m_{n,j}(\alpha+1,c)-c(\alpha+n)-n+1]}{\sqrt{c}}$$

são, respectivamente, funções decrescentes e crescentes de c, *onde* $c \in (0,\infty)$. *Além disso, as desigualdades*

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{c}}{1-c}\left[\ell_{n,j}(\alpha)-(\alpha+1)(1-\sqrt{c})\right] &\le m_{n,j}(\alpha+1,c)\\
&\le \frac{\sqrt{c}}{1-c}\left[\ell_{n,j}(\alpha)-(\alpha+1)(1-\sqrt{c})+(n-1)\frac{(1-\sqrt{c})^2}{\sqrt{c}}\right]
\end{aligned}$$

são satisfeitas para $0 \le j \le n-1$.

Os resultados deste teorema são ilustrados a seguir. As Figuras 4.9 e 4.10 mostram, respectivamente, que

$$\frac{(1-c)m_{n,j}(\alpha+1,c)-c(\alpha+1)}{\sqrt{c}} \quad \text{e} \quad \frac{(1-c)m_{n,j}(\alpha+1,c)-c(\alpha+n)-n+1}{\sqrt{c}},$$

são funções decrescentes e crescentes de c, para $n=5$ e $1 \le j \le 5$; estas quantidades convergem, respectivamente, para $[\ell_{5,j}(\alpha)-(\alpha+1)]$ e $[\ell_{5,j}(\alpha)-(2n+\alpha+1)]$, $n=5$, onde $\ell_{5,j}$ representam os zeros dos polinômios de Laguerre de grau 5. A Figura 4.11 apresenta os zeros de $M_5(x;\alpha+1,c)$ em relação à c, limitados inferiormente e superiormente por

$$\frac{\sqrt{c}}{1-c}\left[\ell_{n,j}(\alpha)-(\alpha+1)(1-\sqrt{c})\right] \ \text{e} \ \frac{\sqrt{c}}{1-c}\left[\ell_{n,j}(\alpha)-(\alpha+1)(1-\sqrt{c})+(n-1)\frac{(1-\sqrt{c})^2}{\sqrt{c}}\right],$$

$n=5$, $1 \le j \le 5$, respectivamente.

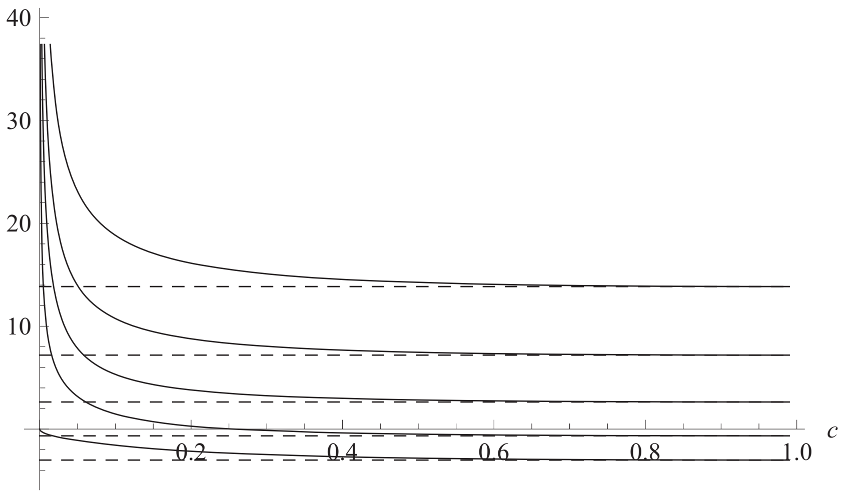

Figura 4.9: Gráfico de $\dfrac{(1-c)m_{5,j}(\alpha+1,c)-c(\alpha+1)}{\sqrt{c}}$, $1 \leq j \leq 5$, em traço contínuo e de $[\ell_{5,j}-(\alpha+1)]$, $1 \leq j \leq 5$, em traços pontilhados.

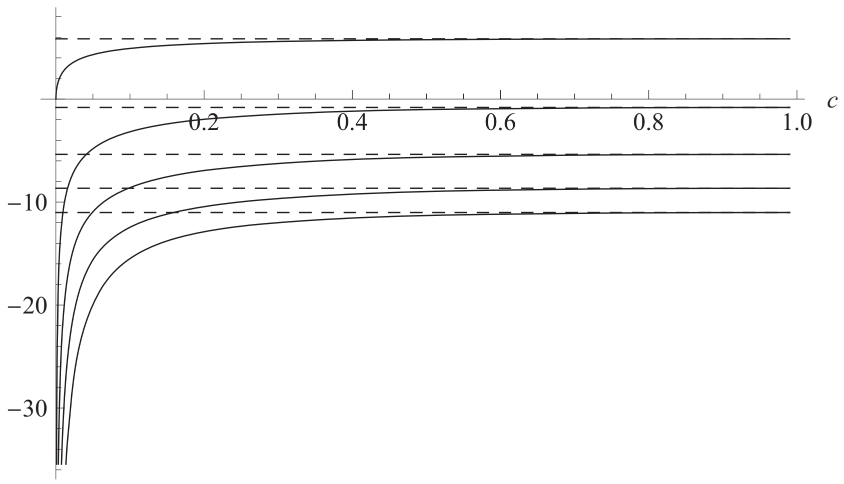

Figura 4.10: Gráfico de $\dfrac{(1-c)m_{n,j}(\alpha+1,c)-c(\alpha+n)-n+1}{\sqrt{c}}$, $n=5$ e $1 \leq j \leq 5$, em traço contínuo e de $[\ell_{n,j}-(2n+\alpha-1)]$, $n=5$ e $1 \leq j \leq 5$, em traços pontilhados.

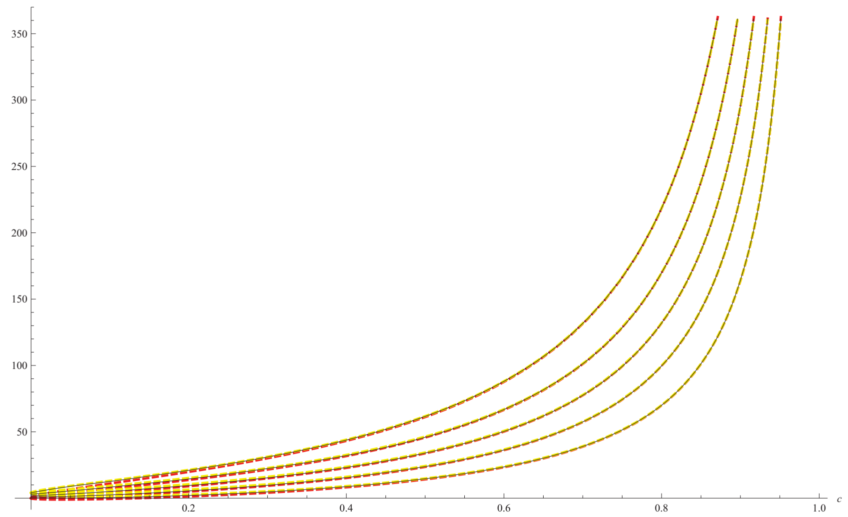

Figura 4.11: Gráfico dos zeros $m_{5,j}(c)$, $1 \leq j \leq 5$, em traço contínuo preto e, dos limitantes inferiores $\dfrac{\sqrt{c}}{1-c}\left[\ell_{n,j}(\alpha) - (\alpha+1)(1-\sqrt{c})\right]$, $n = 5$ e $1 \leq j \leq 5$, em traços pontilhados vermelhos e, dos limitantes superiores $\dfrac{\sqrt{c}}{1-c}\left[\ell_{n,j}(\alpha) - (\alpha+1)(1-\sqrt{c}) + (n-1)\dfrac{(1-\sqrt{c})^2}{\sqrt{c}}\right]$, $n = 5$ e $1 \leq j \leq 5$, em traços pontilhados amarelos.

4.1.4 Polinômios de Kravchuck

Tendo em vista a relação de limite entre os polinômios de Kravchuck e Hermite encontrada em [14]:

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{\binom{N}{n}}\, K_n(pN + x\sqrt{2p(1-p)N}; p, N) = \frac{(-1)^n H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \left(\dfrac{p}{1-p}\right)^n}}$$

podemos afirmar que quando $N \to \infty$

$$\frac{\kappa_{n,j}(p,N) - pN}{\sqrt{2p(1-p)N}} \to h_{n,j}$$

como visto na Figura 4.12:

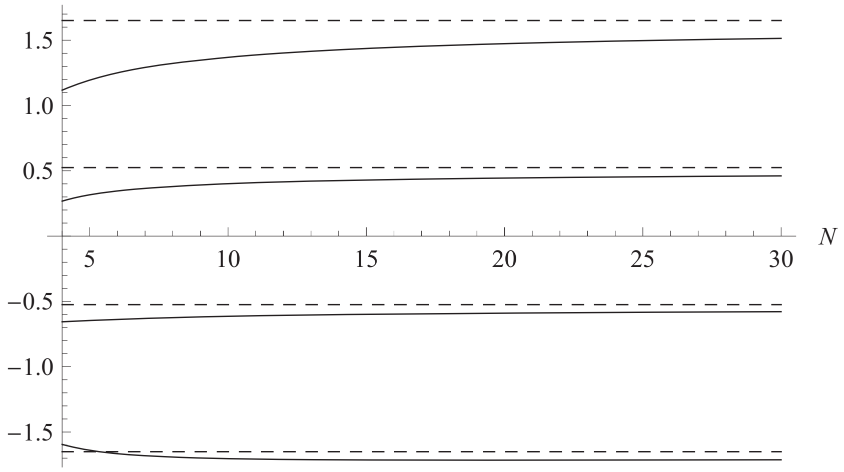

Figura 4.12: Gráfico de $\dfrac{\kappa_{4,j}(p,N)-pN}{\sqrt{2p(1-p)N}}$, $1 \leq j \leq 4$, em traço contínuo e dos zeros $h_{4,j}$, $1 \leq j \leq 4$, em traços pontilhados.

Podemos ainda afirmar que

$$\frac{\kappa_{n,j}(p,N)-pN-c_n}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}} \to h_{n,j}.$$

para quaisquer valores c_n e d_n que são constantes em relação a N.

Queremos provar que

$$z_{n,j} := \frac{\kappa_{n,j}(p,N)-pN-c_n}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}$$

é uma função monótona.

Seja $z = \dfrac{x-pN-c_n}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}$, então, $x = z\sqrt{2p(1-p)N+d_n}+pN+c_n$. Definimos

$$\widetilde{K}_k(z;p,N) := K_n(z\sqrt{2p(1-p)N+d_n}+pN+c_n;p,N),\ \ k=0,\cdots,n.$$

Note que $z_{n,j}$ é zero de $\widetilde{K}_k(z;p,N)$. Queremos encontrar uma relação de recorrência de três termos para estes polinômios.

Fazendo a mudança de variável $x = z\sqrt{2p(1-p)N+d_n}+pN+c_n$ em (2.38) obtemos

$$\begin{aligned} z\widetilde{K}_k(z;p,N) \quad = \quad & -\frac{p(N-k)}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}\widetilde{K}_{k+1}(z;p,N) + \frac{p(N-k)-pN+k(1-p)-c_n}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}} \\ & \times\widetilde{K}_k(z;p,N) - \frac{k(1-p)}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}\widetilde{K}_{k-1}(z;p,N). \end{aligned}$$

Assim, os polinômios ortonormais associados à $\widetilde{K}_k(z;p,N)$ satisfazem uma relação de recorrência de três termos com coeficientes:

$$\widetilde{a}_k(N) = \sqrt{\frac{p(N-k)}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}\frac{(k+1)(1-p)}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}} = \sqrt{\frac{p(1-p)(k+1)(N-k)}{2p(1-p)N+d_n}}$$

e

$$\widetilde{b}_k(N) = \frac{k(1-2p)-c_n}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}.$$

Derivando estes coeficientes em relação a N obtemos:

$$\widetilde{a}'_k(N) = \frac{[p(1-p)(k+1)]^{1/2}\,[d_n+k2p(1-p)]}{2(N-k)^{1/2}\,[2p(1-p)N+d_n]^{3/2}}$$

e

$$\widetilde{b}'_k(N) = \frac{p(1-p)\,[c_n-k(1-2p)]}{[2p(1-p)N+d_n]^{3/2}}.$$

Então,

$$\widetilde{a}'_k(N) \geq 0 \Leftrightarrow d_n \geq -k2p(1-p), \ \ 0 \leq k \leq n-2.$$

Como $-k2p(1-p)$ é uma função decrescente de k, $0 \leq k \leq n-2$, e queremos o menor valor para d_n, temos $d_n = 0$.

Da mesma forma,

$$\widetilde{b}'_k(N) \geq 0 \Leftrightarrow c_n \geq k(1-2p), \ \ 0 \leq k \leq n-1.$$

Assim, precisamos dividir em dois casos:

- se $0 < p \leq 1/2$, então, $1-2p > 0$ e $k(1-2p)$ é uma função crescente de k, $0 \leq k \leq n-1$. Desta forma, devemos tomar $c_n = (n-1)(1-2p)$;
- se $1/2 \leq p < 1$, então $1-2p < 0$ e $k(1-2p)$ é uma função decrescente de k, $0 \leq k \leq n-1$. Logo, $c_n = 0$.

Diante do exposto, se $0 < p \leq 1/2$, tomando $d_n = 0$ e $c_n = (n-1)(1-2p)$ segue que o maior zero de $\widetilde{K}_n(z;p,N)$ é uma função crescente de N, ou seja,

$$\frac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN - (n-1)(1-2p)}{\sqrt{2p(1-p)N}}$$

é uma função crescente de N, assim obtém-se uma cota superior para o maior zero de Kravchuck, isto é,

$$\kappa_{n,1}(p,N) \leq pN + (n-1)(1-2p) + \sqrt{2p(1-p)N}h_{n,1}.$$

Além disso, para $1/2 \leq p < 1$, considerando $d_n = c_n = 0$ resulta que

$$\frac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN}{\sqrt{2p(1-p)N}}$$

é uma função crescente de N, logo

$$\kappa_{n,1}(p,N) \leq pN + \sqrt{2p(1-p)N}h_{n,1}.$$

Por outro lado,

$$\widetilde{a}'_k(N) \leq 0 \Leftrightarrow d_n \leq -k2p(1-p), \;\; 0 \leq k \leq n-2,$$

como queremos o maior valor para d_n, segue que $d_n = -2(n-2)p(1-p)$.

Da mesma forma,

$$\widetilde{b}'_k(N) \leq 0 \Leftrightarrow c_n \leq k(1-2p), \;\; 0 \leq k \leq n-1.$$

Logo, como queremos o maior valor de c_n

- se $0 < p \leq 1/2$, então, $c_n = 0$;
- se $1/2 \leq p < 1$, então $c_n = (n-1)(1-2p)$.

Com efeito, se $0 < p \leq 1/2$, tomando $d_n = -2(n-2)p(1-p)$ e $c_n = 0$ segue que

$$\frac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$$

é uma função decrescente de N, assim obtém-se uma cota superior para o maior zero de Kravchuck, isto é,

$$\kappa_{n,1}(p,N) \geq pN + \sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}h_{n,1}.$$

Além disso, para $1/2 \leq p < 1$, considerando $d_n = -2(n-2)p(1-p)$ e $c_n = (n-1)(1-2p)$ resulta que

$$\frac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN - (n-1)(1-2p)}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$$

é uma função decrescente de N, logo

$$\kappa_{n,1}(p,N) \geq pN + (n-1)(1-2p)\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}h_{n,1}.$$

Com o objetivo de conseguir limitantes para o menor zero de Kravchuck, definimos

$$\widehat{K}_k(z;p,N) := \widetilde{K}_k(-z;p,N) = K_k(-z\sqrt{2p(1-p)N + d_n} + pN + c_n; p, N).$$

Note que $-\dfrac{\kappa_{n,j}(p,N)-pN-c_n}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}$ é zero de $\widehat{K}_n(z;p,N)$.

Seja $z=-\dfrac{x-pN-c_n}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}$, então $x=-z\sqrt{2p(1-p)N+d_n}+pN+c_n$. Fazendo uma mudança de variável em (2.38) obtemos:

$$\begin{aligned} z\widehat{K}_k(z;p,N) &= \frac{p(N-k)}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}\widehat{K}_{k+1}(z;p,N)-\frac{k(1-2p)-c_n}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}\widehat{K}_k(z;p,N) \\ &+\frac{k(1-p)}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}\widehat{K}_{k-1}(z;p,N). \end{aligned}$$

Disto podemos concluir que os polinômios ortonormais associados à $\widehat{K}_n(z;p,N)$ satisfazem uma relação de recorrência de três termos com coeficientes:

$$\widehat{a}_k(N)=\sqrt{\frac{k(N-k)p(1-p)}{2p(1-p)N+d_n}} \qquad \text{e} \qquad \widehat{b}_k(N)=\frac{c_n-k(1-2p)}{\sqrt{2p(1-p)N+d_n}}.$$

Derivando estes coeficientes em relação a N obtemos:

$$\widehat{a}'_k(N)=\frac{kp(1-p)\left[d_n+2p(1-p)k\right]}{2\left[k(N-k)p(1-p)\right]^{1/2}\left[2p(1-p)N+d_n\right]^{3/2}}$$

e

$$\widehat{b}'_k(N)=\frac{p(1-p)\left[k(1-2p)-c_n\right]}{\left[2p(1-p)N+d_n\right]^{3/2}}.$$

Desta forma,

$$\widehat{a}'_k(N)\geq 0 \Leftrightarrow d_n\geq -2p(1-p)k, \;\; 0\leq k\leq n-2.$$

Como $-2p(1-p)k$ é uma função decrescente de k, segue que $d_n\geq 0$. Pelo fato de querermos a menor cota superior, buscamos o menor valor de d_n, logo $d_n=0$.

Da mesma forma,

$$\widehat{b}'_k(N)\geq 0 \Leftrightarrow k(1-2p)\geq c_n,$$

então, precisamos dividir em dois casos:

- se $0<p\leq 1/2$, então $k(1-2p)$ é uma função crescente de k, assim o maior valor de c_n que satisfaz a inequação é $c_n=0$;

- se $1/2\leq p<1$, então $k(1-2p)$ é uma função decrescente de k, logo, o maior valor de c_n que satisfaz a inequação é $c_n=(n-1)(1-2p)$.

Diante disto, podemos concluir que para $0<p\leq 1/2$, considerando $d_n=c_n=0$, o maior zero de $\widehat{K}_k(z;p,N)$ é uma função crescente de N. Assim, sabendo que $-h_{n,n}=h_{n,1}$,

temos

$$\frac{-k_{n,n}(p,N)+pN}{\sqrt{2p(1-p)N}} \leq h_{n,1},$$

isso implica em

$$k_{n,n}(p,N) \geq pN - \sqrt{2p(1-p)N}h_{n,1}.$$

Da mesma forma, se $1/2 \leq p < 1$, tomando $d_n = 0$ e $c_n = (n-1)(1-2p)$, segue que

$$\frac{-k_{n,n}(p,N)+pN+(n-1)(1-2p)}{\sqrt{2p(1-p)N}}$$

é uma função crescente de N, logo

$$k_{n,n}(p,N) \geq pN + (n-1)(1-2p) - \sqrt{2p(1-p)N}h_{n,1}.$$

Por outro lado,

$$\widehat{a}'_k \leq 0 \Leftrightarrow d_n \leq -2p(1-p)k, \;\; 0 \leq k \leq n-2. \tag{4.9}$$

O maior valor de d_n que satisfaz (4.9) é $d_n = -2p(1-p)(n-2)$.

Além disso,

$$\widehat{b}'_k \leq 0 \Leftrightarrow c_n \geq k(1-2p), \;\; 0 \leq k \leq n-1,$$

assim, o menor valor de c_n possível

- se $0 < p \leq 1/2$, é $c_n = (n-1)(1-2p)$;
- se $1/2 \leq p < 1$, é $c_n = 0$.

Portanto, se $0 < p \leq 1/2$, tomando $d_n = -2p(1-p)(n-2)$ e $c_n = (n-1)(1-2p)$ segue que o maior zero de $\widehat{K}_n(z;p,N)$ é uma função decrescente de N, então

$$\frac{-\kappa_{n,n}(p,N)+pN+(n-1)(1-2p)}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}} \geq h_{n,1},$$

ou seja,

$$k_{n,n}(p,N) \leq pN + (n-1)(1-2p) - \sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}h_{n,1}.$$

Se $1/2 \leq p < 1$, considerando $d_n = -2p(1-p)(n-2)$ e $c_n = 0$ temos

$$\frac{-\kappa_{n,n}(p,N)+pN}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}} \geq h_{n,1},$$

ou seja,

$$k_{n,n}(p,N) \leq pN - \sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}h_{n,1}.$$

Isto demonstra o seguinte teorema obtido em [8]:

Teorema 4.8 *Sejam $n, N \in \mathbb{N}$, com $n \leq N$ e $0 < p < 1$.*

(i) Seja $0 < p \leq 1/2$. Em função do maior zero de $K_n(x; p, N)$, temos que

$$\frac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN - (1-2p)(n-1)}{\sqrt{2p(1-p)N}}$$

é função crescente de N, enquanto

$$\frac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$$

é função decrescente de N. Em função do menor zero de $K_n(x; p, N)$, temos que

$$\frac{-\kappa_{n,n}(p,N) + pN}{\sqrt{2p(1-p)N}}$$

é função crescente de N, enquanto

$$\frac{-\kappa_{n,n}(p,N) + pN + (1-2p)(n-1)}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$$

é função decrescente de N. Além disso, temos os limitantes:

$$\begin{aligned} pN - \sqrt{2p(1-p)N}\,h_{n,1} \leq\ & \kappa_{n,n}(p,N) \\ & \leq pN + (1-2p)(n-1) - \sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}\,h_{n,1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} pN + \sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}\,h_{n,1} \leq\ & \kappa_{n,1}(p,N) \\ & \leq pN + (1-2p)(n-1) + \sqrt{2p(1-p)N}\,h_{n,1}, \end{aligned}$$

sendo $h_{n,1}$ o maior zero de $H_n(x)$.

(ii) Seja $1/2 \leq p < 1$. Em função do maior zero de $K_n(x; p, N)$, temos que

$$\frac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN}{\sqrt{2p(1-p)N}}$$

é função crescente de N e

$$\frac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN - (n-1)(1-2p)}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$$

é função decrescente de N. Em função do menor zero de $K_n(x;p,N)$, temos que

$$\frac{-\kappa_{n,n}(p,N)+pN+(n-1)(1-2p)}{\sqrt{2p(1-p)N}}$$

é função crescente de N, enquanto

$$\frac{-\kappa_{n,n}(p,N)+pN}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$$

é função decrescente de N . Além disso, temos os limitantes:

$$\begin{aligned} pN+(n-1)(1-2p)-\sqrt{2p(1-p)N}h_{n,1} \leq \quad & \kappa_{n,n}(p,N) \\ & \leq pN-\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}h_{n,1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} pN+(n-1)(1-2p)+\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}h_{n,1} \leq \quad & \kappa_{n,1}(p,N) \\ & \leq pN+\sqrt{2p(1-p)N}h_{n,1} \end{aligned}$$

sendo $h_{n,1}$ o maior zero de $H_n(x)$.

Para ilustramos tais resultados apresentamos os seguintes gráficos, que serão divididos em dois casos:

i) $0 < p \leq 1/2$.

As figuras 4.13 e 4.14 mostram que as quantidades

$$\frac{\kappa_{n,1}(p,N)-pN-(1-2p)(n-1)}{\sqrt{2p(1-p)N}} \quad \text{e} \quad \frac{\kappa_{n,1}(p,N)-pN}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$$

são, respectivamente, funções crescente e decrescente de N para $n=4$ e $p=0.4$, onde $\kappa_{n,1}(p,N)$ é o maior zero de $K_4(x;p,N)$. Ambas convergem para o maior zero do polinômio de Hermite de grau 4.

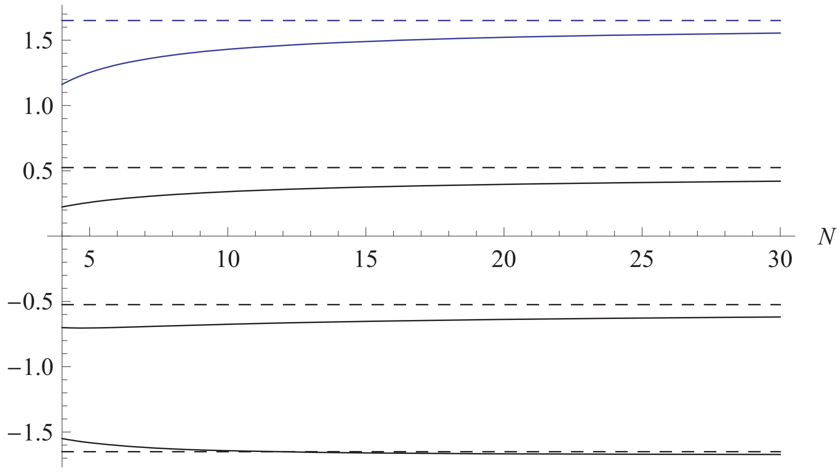

Figura 4.13: Gráfico de $\dfrac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN - (1-2p)(n-1)}{\sqrt{2p(1-p)N}}$, $n = 4$, $p = 0.4$, em traço contínuo azul e de $h_{4,1}$ em traços pontilhados azuis.

Observação 4.1 Note que as quantidades $\dfrac{\kappa_{n,j}(p,N) - pN - (1-2p)(n-1)}{\sqrt{2p(1-p)N}}$, não possuem comportamento monotônico em relacao a N para todo j, mas apenas garantimos a monotonicidade para $j = 1$. As quantidades que não temos garantia de monotonicidade são apresentadas na Figura 4.13, bem como nas figuras a seguir, em traço contínuo preto.

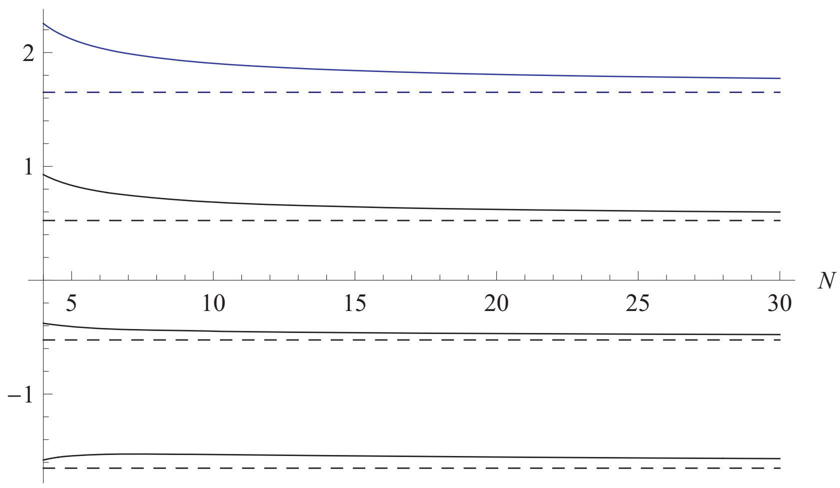

Figura 4.14: Gráfico de $\dfrac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$, $n = 4$, $p = 0.4$, em traço contínuo azul e de $h_{4,1}$ em traços pontilhados azuis.

As Figuras 4.15 e 4.16 mostram que

$$\frac{-\kappa_{n,n}(p,N) + pN}{\sqrt{2p(1-p)N}} \quad \text{e} \quad \frac{-\kappa_{n,n}(p,N) + pN + (1-2p)(n-1)}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$$

são, respectivamente, funções crescente e decrescente de N, para $n = 4$ e $p = 0.4$, onde $\kappa_{n,n}(p, N)$ indica o menor zero do polinômio de Kravchuck de grau 4. Estas convergem para $h_{4,1}$.

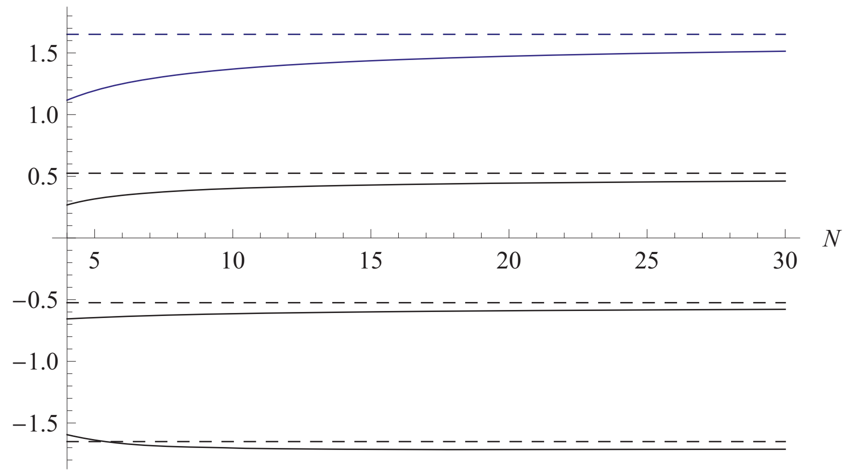

Figura 4.15: Gráfico de $\dfrac{-\kappa_{n,n}(p,N) + pN}{\sqrt{2p(1-p)N}}$, $n = 4$, $p = 0.4$, em traço contínuo azul e de $h_{4,1}$ em traços pontilhados azuis.

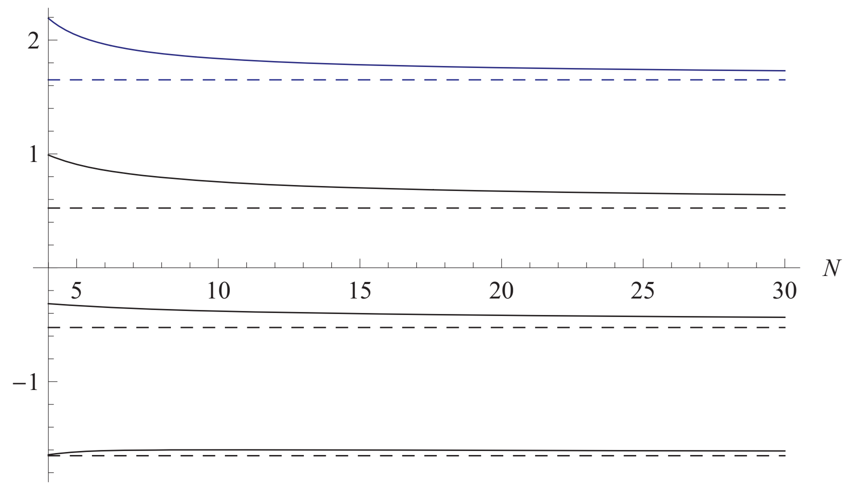

Figura 4.16: Gráfico de $\dfrac{-\kappa_{n,n}(p,N) + pN + (1-2p)(n-1)}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$, $n = 4$, $p = 0.4$, em traço contínuo azul e de $h_{4,1}$ em traços pontilhados azuis.

A Figura 4.17 mostra os zeros do polinômio de Kravchuck de grau 4, além dos limitantes superiores

$$pN + (1-2p)(n-1) + \sqrt{2p(1-p)N}\,h_{n,1} \text{ e } pN + (1-2p)(n-1) - \sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}\,h_{n,1}$$

e inferiores

$$pN + \sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}\,h_{n,1} \text{ e } pN - \sqrt{2p(1-p)N}\,h_{n,1}$$

para o maior e o menor zero de $K_4(x; 0.4, N)$, respectivamente.

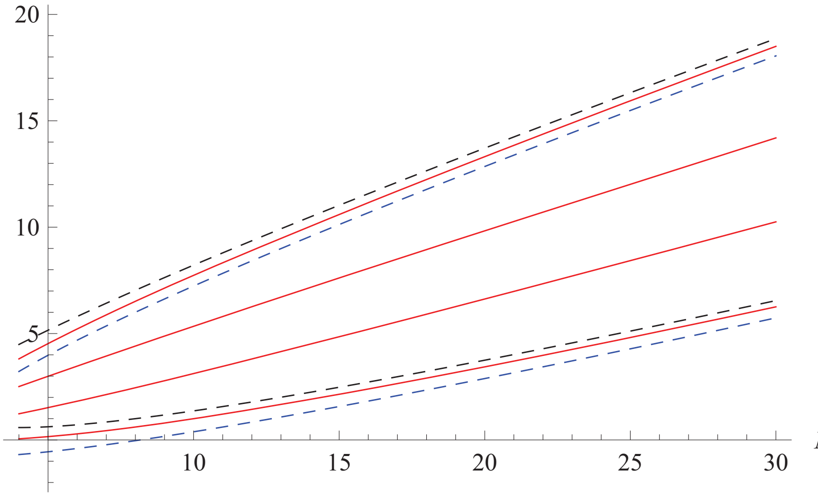

Figura 4.17: Gráfico dos zeros $k_{4,j}(0.4, N)$, $1 \le j \le 4$, em traço contínuo vermelho, dos limitantes superiores para o maior e o menor zero de Kravchuck em traços pontilhados pretos e dos limitantes inferiores para o maior e o menor zero de Kravchuck em traços pontilhados azuis.

ii) $1/2 \le p < 1$.

As Figuras 4.18 e 4.19 mostram que

$$\frac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN}{\sqrt{2p(1-p)N}} \quad \text{e} \quad \frac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN - (n-1)(1-2p)}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$$

são, respectivamente, funções crescente e decrescente de N para $n = 4$ e $p = 0.6$, onde $\kappa_{n,1}(p, N)$ é o maior zero de $K_4(x; p, N)$. Ambas convergem para o maior zero do polinômio de Hermite de grau 4.

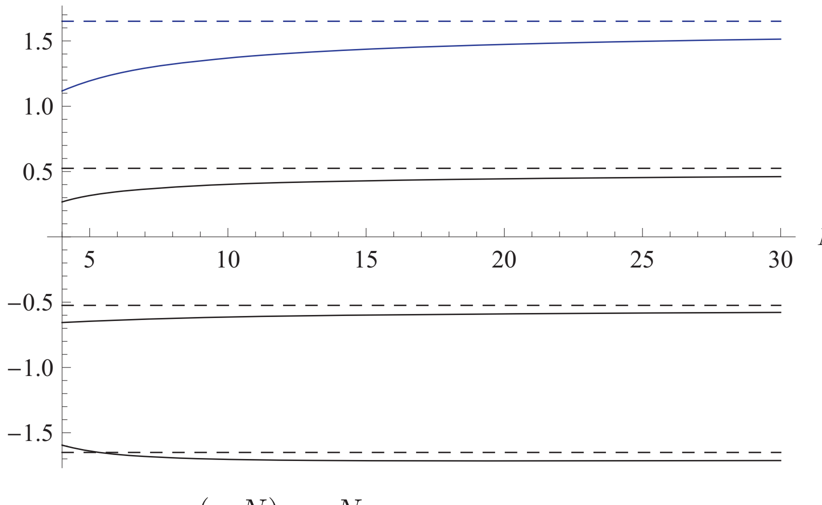

Figura 4.18: Gráfico de $\dfrac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN}{\sqrt{2p(1-p)N}}$, $n = 4$, $p = 0.4$, em traço contínuo azul e de $h_{4,1}$ em traços pontilhados azuis.

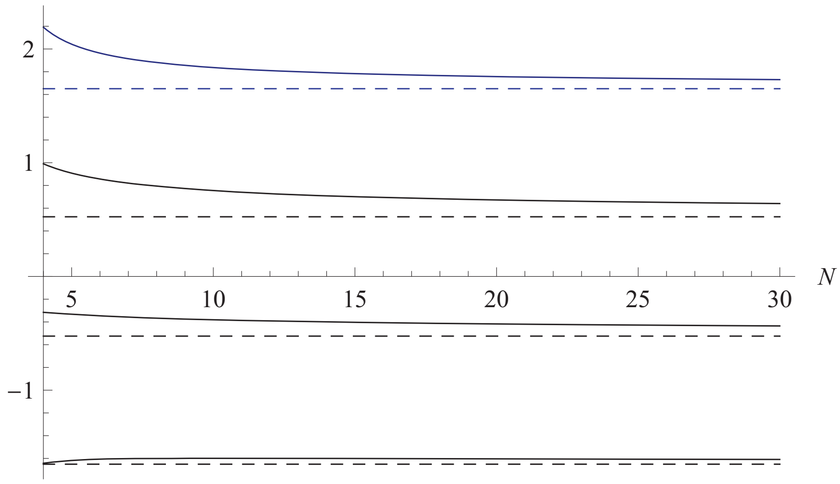

Figura 4.19: Gráfico de $\dfrac{\kappa_{n,1}(p,N) - pN - (n-1)(1-2p)}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$, $n = 4$, $p = 0.4$, em traço contínuo azul e de $h_{4,1}$ em traços pontilhados azuis.

As Figuras 4.20 e 4.21 mostram que as quantidades

$$\frac{-\kappa_{n,n}(p,N) + pN + (1-2p)(n-1)}{\sqrt{2p(1-p)N}} \quad \text{e} \quad \frac{-\kappa_{n,n}(p,N) + pN}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$$

são, respectivamente, funções crescente e decrescente de N, para $n = 4$ e $p = 0.6$, onde $\kappa_{n,n}(p,N)$ representa o menor zero do polinômio de Kravchuck de grau 4. Ambas convergem para $h_{4,1}$.

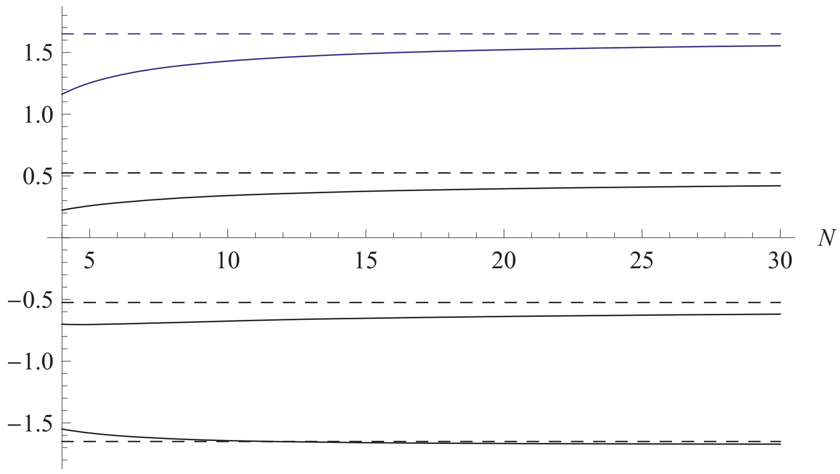

Figura 4.20: Gráfico de $\dfrac{-\kappa_{n,n}(p,N) + pN + (1-2p)(n-1)}{\sqrt{2p(1-p)N}}$, $n = 4$, $p = 0.4$, em traço contínuo azul e de $h_{4,1}$ em traços pontilhados azuis.

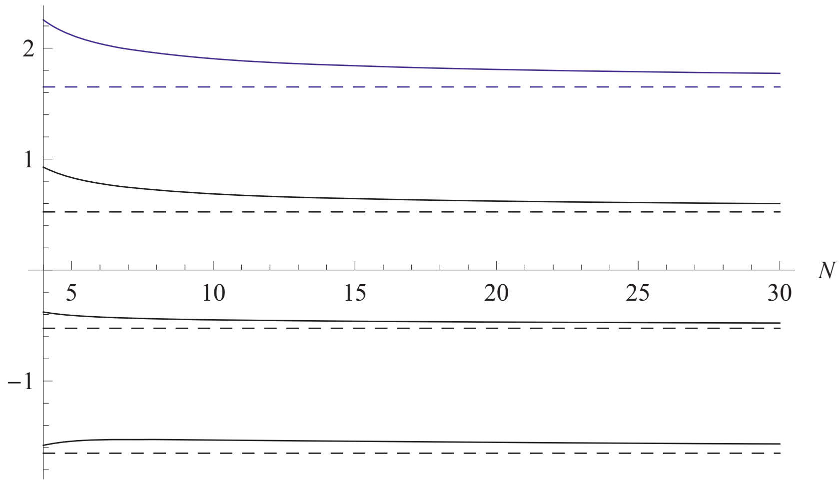

Figura 4.21: Gráfico de $\dfrac{-\kappa_{n,n}(p,N)+pN}{\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}}$, $n=4$, $p=0.4$, em traço contínuo azul e de $h_{4,1}$ em traços pontilhados azuis.

A Figura 4.22 mostra os zeros do polinômio de Kravchuck de grau 4, além dos limitantes superiores

$$pN+\sqrt{2p(1-p)N}h_{n,1} \text{ e } pN-\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}h_{n,1}$$

e inferiores

$$pN+(1–2p)(n–1)+\sqrt{2p(1-p)(N-n+2)}h_{n,1} \text{ e } pN+(1–2p)(n–1)-\sqrt{2p(1-p)N}h_{n,1}$$

para o maior e o menor zero de $K_4(x;0.6,N)$, respectivamente.

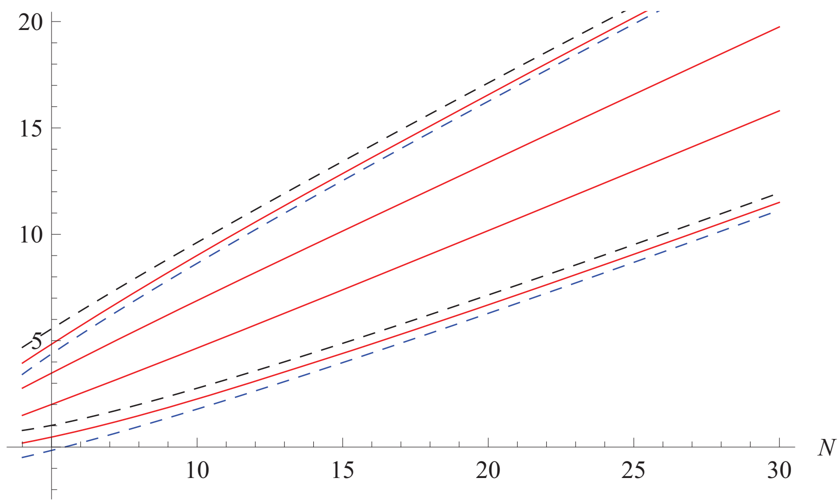

Figura 4.22: Gráfico dos zeros $k_{4,j}(0.6,N)$, $1\le j\le 4$, em traço contínuo vermelho, dos limitantes superiores para o maior e o menor zero de Kravchuck em traços pontilhados pretos e dos limitantes inferiores para o maior e o menor zero de Kravchuck em traços pontilhados azuis.

Capítulo

5

Considerações Finais

Reunimos, neste trabalho, resultados encontrados nas pesquisas realizadas, mais precisamente nas referências [8] e [21], sobre zeros de polinômios ortogonais clássicos de variável contínua e de variável discreta. Apresentamos um estudo sobre o comportamento dos zeros de polinômios ortogonais clássicos em relação aos seus parâmetros e tais resultados foram obtidos aplicando-se o Teorema de Markov, que obtém o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais através da derivada logarítmica da função peso ou salto desses polinômios. Com esse estudo foi possível perceber que os zeros dos polinômios ortogonais clássicos são funções monótonas dos seus parâmetros. Além disso, apresentamos limitantes para os zeros dos polinômios de Laguerre, Charlier, Meixner e Kravchuck, tais resultados foram obtidos como consequência dos teoremas de Perron-Frobenius e Hellmann-Feynman, através de uma análise envolvendo os coeficientes da relação de recorrência de três termos dos polinômios ortonormais e de relações limite encontradas na literatura. Tais resultados foram ilustrados através de gráficos feitos no programa Mathematica.

Nossa contribuição foi apresentar uma abordagem mais detalhada da determinação desses limitantes, adicionando constantes na relação de limite e determinando para quais constantes eram obtidos os melhores limitantes.

Esta pesquisa não se esgota com este estudo, pois pretendemos estender esta forma de obter os limitantes para os zeros dos demais polinômios ortogonais clássicos, investigando outras formas de alterar as relações limites de modo a obter funções monótonas que envolvem os zeros dos polinômios e que consequentemente forneçam excelentes limitantes para os zeros.

Referências Bibliográficas

[1] ABRAMOWITZ, M. ; STEGUN, I. A. , *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables.* Washington: U.S. Department os Comerce. XIV, 1046 p. (1964); Table Errata Math. Comput. 21, 747, 1964.

[2] ANDREWS, G. E. ; ASKEY, R. ; ROY, R. , *Special functions, vol.71 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[3] AREA, I. ; DIMITROV, D. K. ; GODOY, E. ; PASCHOA, V. G. , *Zeros of Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*, Journal of Mathematics of Computation 82 (2013), 1069-1095.

[4] CALOGERO, F. , *Asymptotic behaviour of the zeros of the (generalized) Laguerre polynomials $L_n^{(\alpha)}(x)$ as the index $\alpha \to \infty$ and limiting formula relating Laguerre polynomials of large index and large argument to Hermite polynomials*, Nuovo Cimento 23 (1978) 101-102.

[5] CHIHARA, L.; STANTON, D. , *Zeros of Generalized Krawtchouk Polynomials.* Journal of Approximation Theory 60, 1 (1990), 43-57.

[6] CHIHARA, T. S. , *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1978. Mathematics and its Applications, Vol. 13.

[7] DAVIS, P. J.; RABINOWITZ, P. , *Methods of Numerical Integrations.* 2nd ed. Academic Press, New York, 1984.

[8] FERRAZ, V. G. P. , *Zeros de Polinômios Ortogonais de Variável Discreta.* Tese de Doutorado, Departamento de Matemática Aplicada/Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica/UNICAMP, 2012.

[9] GARBI, G. G. , *O romance das equações algébricas.* 4th ed. Livraria da Física, São Paulo, 2010.

[10] HORN, R. A. ; JOHNSON, C. R. , *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[11] ISMAIL, M. E. H. , *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one Variable, Vol. 98 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 2005. With two chapters by Walter Van Assche, With a foreword by Richard A. Askey.

[12] ISMAIL, M. E. H. ; MULDOON, M. E. , *A Discrete Approach to Monotonicity of Zeros of Orthogonal Polynomials.* Transactions of the American Mathematical Society 323, 1 (1991), 65-78.

[13] JORDAAN, K.; TOÓKOS, F. , *Interlacing theorems for the zeros of some orthogonal polynomials from different sequences.* Applied Numerical Mathematics 59, 8 (2009), 2015-2022.

[14] KOEKOEK, R.; SWARTTOUW, R.F. , *The askey-scheme of hipergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*. Report 98-17 of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delf University of Technology, 1998.

[15] KRASIKOV, I.; ZARKH, A. , *On zeros of discrete orthogonal polynomials*. Journal of Approximation Theory 156, (2009), 121-141.

[16] KRILOV, V. I. , *Approximate Calculation of Integrals*. Macmillan, New York, 1962.

[17] LEVIT, R. J. , *The Zeros of the Hahn Polynomials*. SIAM Review 9 (1967), 191-203.

[18] LIMA, E. L. , *Análise real volume 1. Funções de uma variável*. 10 ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2008, (Coleção Matemática Universitária).

[19] LIMA, E. L. , *Análise real volume 2. Funções de n variáveis*. 4th ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2009, (Coleção Matemática Universitária).

[20] MATIOLI, L. C. , *Polinômios Ortogonais, Frações Contínuas e Sequências Encadeadas*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Ciências de Computação e Estatística/Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas/UNESP, 1993.

[21] RAFAELI, F. R. , *Zeros de Polinômios Ortogonais na Reta Real*. Tese de Doutorado, Departamento de Matemática Aplicada/Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica/UNICAMP, 2010.

[22] SILVA, A. P. , *Sequências Encadeadas e Polinômios Ortogonais*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Ciências de Computação e Estatística/Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas/UNESP, 2002.

[23] SZEGŐ, G. , *Orthogonal Polynomials*. 4th ed. Providence: American Mathematical Society, 1975, v. 23 (American Mathematical Society Colloquium Publications).

[24] WALL, H. S.; WETZEL, M. , *Quadratic forms and convergence regions for continued fractions*. Duke Mathematical Journal. 11 (1944), 89-102.