UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

JADILENE RODRIGUES XAVIER

ANÁLISE DO MAPA DE FREQUÊNCIAS APLICADA AO ESTUDO DE DETRITOS ESPACIAIS NA RESSONÂNCIA 14:1 :

Guaratinguetá

2018

JADILENE RODRIGUES XAVIER

ANÁLISE DO MAPA DE FREQUÊNCIAS APLICADA AO ESTUDO DE DETRITOS ESPACIAIS NA RESSONÂNCIA 14:1

Trabalho de Pós-Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estatual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Física .

Orientador: Prof Dr. Silvia Maria Giuliatti Winter.

Guaratinguetá

2018

Xavier, Jadilene Rodrigues
X3a Análise do mapa de freqüências aplicada ao estudo de detritos espaciais na ressonância 14:1 / Jadilene Rodrigues Xavier – Guaratinguetá, 2018.
56 f : il.
Bibliografia: f. 50-54

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018.
Orientador: Profª. Drª. Silvia Maria Giuliatti Winter

1.Detritos espaciais. 2. Ressonância. I. Título

CDU 521.3(043)

Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

JADILENE RODRIGUES XAVIER

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"MESTRE EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Konstatin Georgiev Kostov
Coordenador

B A N C A E X A M I N A D O R A:

Profª. Drª. SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER
Orientadora / UNESP/FEG

Prof. Dr. ANTONIO FERNANDO BERTACHINI DE ALMEIDA PRADO
INPE/SJC

Prof. Dr. JARBAS CORDEIRO SAMPAIO
IFBA

Março de 2018

DADOS CURRICULARES

JADILENE RODRIGUES XAVIER

NASCIMENTO 24.07.1988 - Januária / MG

FILIAÇÃO Silvia Rodrigues Xavier

2008 / 2013 Graduação em Física - Licenciatura em Física
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais-Campus Januária

2016 / 2018 Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP
São Paulo-Brasil.

Esta dissertação é dedicada a minha mãe Silvia e aos meus irmãos que sempre acreditaram e torceram por mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade que me foi dada, por ter permanecido sempre ao meu lado ao longo desses dois anos e por colocar em meu caminho pessoas incríveis que me ajudaram na conclusão deste trabalho e que agora tenho a oportunidade de agradecer.

Agradeço a minha amada e doce mãe Silvia pelo amor, por sonhar esse sonho comigo, por não me deixar desistir e por ser a melhor mãe do mundo. Amo você "mamusca".

Aos meus irmãos Aurilene, Giane, Lico, Marcilene, Cida e Misael por me amarem e cuidarem tão bem de mim. Agradeço ainda pelo apoio durante essa caminhada, por terem me ouvido quando precisei desabafar e pelo colo nos dias que precisei chorar, eu amo vocês.

A minha orientadora professora Silvia Giuliatti Winter por me conduzir tão bem durante esse projeto, por acreditar em mim e em meu trabalho, pela paciência e pelo imensurável aprendizado.

Agradeço em especial ao meu querido namorado André pela imensa ajuda com os programas, pelo apoio emocional, pelo ombro amigo nos incontáveis dias de choro, pelo amor e paciência.

Não poderia deixar de agradecer ao meu braço direito durante esses dois anos, minha querida amiga Rosana. Obrigada pela amizade sólida, pelo apoio, por acreditar em mim até o último momento e pelos inúmeros bolos de cenoura que fez para me alegrar nos dias difíceis.

A amiga de curso Taís pela amizade criada ao longo desses dois anos. Obrigada pelas sessões de desabafo, choro e risadas. Aos amigos Nilton e Daniel pela ajuda com os programas e pela paciência. Agradeço ainda ao Marco Muñoz pela imensa ajuda com o mapa de análise de frequência.

As amigas de longa data Izabel e Diândra pelo carinho e por estarem sempre torcendo e orando por mim.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico- **CNPq**.

"A Terra é o berço da humanidade, mas ninguém pode viver no berço para sempre."

Konstantin Tsiolkovsky

RESUMO

XAVIER, J.R. Análise do Mapa de Frequências Aplicada ao Estudo de Detritos Espaciais na Ressonância 14:1. 2018, 49f. Dissertação (Mestrado em Física)-Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

Neste trabalho apresentamos uma análise da dinâmica de detritos espaciais na ressonância 14:1. O sistema analisado foi o sistema Terra-detrito considerando a não esfericidade da Terra. Para esta análise foram utilizados dois programas, o Mercury e o Algorítimo de Transformada de Fourier Modificado por Frequência. O desenvolvimento do potencial terrestre foi feito considerando os coeficientes de achatamento J_2, J_3 e C_{22}, e as equações do movimento foram encontradas. Afim de analisar a evolução temporal dos elementos orbitais as equações do movimento foram inseridas no pacote Mercury e um conjunto de integrações para 1 e 20 dias foi realizado. As integrações mostram que os coeficientes afetam significativamente as trajetórias dos detritos. As regiões de estabilidade, instabilidade e o tempo de difusão para 5000 partículas foram analisadas através do mapa de difusão obtido pelo algorítimo de análise de frequência. Os resultados indicam regiões de estabilidade próximas à ressonância 14:1.

Palavras-Chave: Detritos espaciais. Ressonância. Mapa de frequência.

ABSTRACT

XAVIER, J.R. Frequency Map Analysis Applied to the Study of Spatial Debris in Resonance 14: 1. 2018, 49f. Dissertation (Master in Physics) -Faculty of Engineering of the Guaratinguetá Campus, State University of São Paulo.

In this work we present an analysis of the dynamics of spatial debris in the 14: 1 resonance. The system analyzed was the Earth-debris system considering the non-sphericity of the Earth. For this analysis, two programs, Mercury and Frequency Modified Fourier Transform Algorithm, were used. The development of the earth potential was made considering the gravity coefficients J_2, J_3 and C_{22}, and the equations of motion were found. In order to analyze the time evolution of the orbital elements, the equations of motion were inserted in the Mercury package and a set of integrations for 1 and 20 days was performed. The integrations show that the coefficients significantly affect the trajectories of the debris . The regions of stability, instability and diffusion time for 5000 particles were analyzed by the diffusion map obtained by the frequency analysis algorithm. The results indicate stable regions of close to 14: 1.

Keywords: Space debris. Resonance. Frequency map .

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 Lottie Williams segurando o detrito que a atingiu em 1997 15
Figura 2 Resíduos do foguete Delta II. a) Tanque de propulsão, a) Tanque de pressão . . 16
Figura 3 Suposto detrito que caiu em Myanmar na Ásia. 17
Figura 4 Possível detrito que caiu em Anapurus em 2012 17
Figura 5 a) Astronautas fazendo reparos no Hubble. b) Furo na (ATA) da ISS. 19
Figura 6 Distância entre dois pontos P e P' em coordenadas esféricas 24
Figura 7 Variação temporal da excentricidade para a) 1 dia e b) 20 dias. 32
Figura 8 Variação temporal da inclinação para a) 1 dia e b) 20 dias. 33
Figura 9 Variação temporal do semieixo maior para a) 1 dia e b) 20 dias. 33
Figura 10 Variação temporal da excentricidade para a) 1 dia e b) 20 dias. 34
Figura 11 Variação temporal da inclinação para a) 1 dia e b) 20 dias. 34
Figura 12 Variação temporal do semieixo maior para a) 1 dia e b) 20 dias. 35
Figura 13 Variação temporal da excentricidade para a) 1 dia e b) 20 dias. 35
Figura 14 Variação temporal da inclinação para a) 1 dia e b) 20 dias. 36
Figura 15 Variação temporal do semieixo maior para a) 1 dia e b) 20 dias. 36
Figura 16 Exemplo de arquivo de entrada do programa de análise de frequência. 40
Figura 17 Exemplo de arquivo de saída do programa de análise de frequência. 40
Figura 18 Mapa de difusão para 5000 partículas 43
Figura 19 Ampliação do mapa de difusão para 5000 partículas 43
Figura 20 Segunda ampliação do mapa de difusão para 5000 partículas 44

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Descrição do tamanho, quantidade e informações sobre rastreamentos e impacto dos detritos. 13
Tabela 2 – Valores de alguns parâmetros relacionados à Terra. 32
Tabela 3 – Condições iniciais para construção do mapa de difusão para 5000 partículas . . . 42
Tabela 4 – Tabela para comparação de valores de parâmentros das partículas na região de estabilidade 45
Tabela 5 – Tabela para comparação de valores de parâmentros das partículas na região de instabilidade 46

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a	Semieixo maior
ATA	Montagem do Tanque de Amônia
C_{22}	Coeficiente de achatamento setorial de segunda ordem
e	Excentricidade
D	Difusão
FMA	Ánalise do Mapa de Frequência
FMFT	Algorítimo de Transformada de Fourier Modificado por Frequência
G	Constante Gravitacional
GEO	Órbita Geoestacionária
GPS	Sistema de Posicionamento Global
I	Inclinação
ISS	Estação Espacial Internacional
J_2	Coeficiente de achatamento zonal de segunda ordem
J_3	Coeficiente de achatamento zonal de terceira ordem
LEO	Órbita Baixa da Terra
LogD	Escala logarítimica de cores
MEO	Órbita Média da Terra
NASA	Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço
PAM-D	Módulo de Assistência de Carga Útil
P_n	Polinômios de Legendre
P_m^n	Polinômios Associados de Legendre
t_{Diff}	Tempo de Difusão

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12

1.1 O QUE SÃO DETRITOS ESPACIAIS? 12

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 15

2.1 CASOS DE REENTRADA E DE ACIDENTES ENVOLVENDO DETRITOS ESPACIAIS 15

2.1.1 Perturbações consideradas 19

2.1.1.1 O problema de dois corpos 19

2.1.1.2 O Problema circular restrito de três corpos 21

2.2 O POTENCIAL TERRESTRE 23

2.2.1 Os Coeficientes zonais J_2 e J_3 26

2.2.1.1 O Coeficiente setorial C_{22} 26

2.3 RESSONÂNCIA 26

2.3.1 A Ressonância tesseral 28

3 MODELAGEM MATEMÁTICA 29

3.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS 30

3.1.0.1 Simulações com J_2 32

3.1.0.2 Simulações com $J_2 + J_3$ 34

3.1.0.3 Simulações com adição de C_{22} ao sistema 35

4 ANÁLISE DO MAPA DE FREQUÊNCIA (FMA) 37

4.1 DESCRIÇÃO ANALÍTICA 38

4.1.1 O parâmetro de difusão 41

4.1.1.1 O mapa de difusão 41

5 CONCLUSÃO 47

5.1 TRABALHOS FUTUROS 47

REFERÊNCIAS 48

1 INTRODUÇÃO

O risco de colisões entre detritos e sondas espaciais fizeram com que os detritos ocupassem um lugar importante no âmbito das pesquisas espacias nos últimos anos. O principal objetivo é informações que visam diminuir o risco de acidentes entre estes artefatos e sondas espaciais, sua reentrada na atmosfera terrestre bem como a diminuição de sua população em órbitas altamente habitadas. Diante disto, torna-se indispensável conhecer a dinâmica, bem como o contexto histórico de estudos já realizados sobre estes objetos.

1.1 O QUE SÃO DETRITOS ESPACIAIS?

Detritos espaciais são divididos em duas categorias, artificiais e naturais. De acordo com Batista (2011) "os detritos naturais podem ser entendidos como fragmentações, aglomerações, desprendimentos e capturas de corpos naturais como Meteoroides e Asteroides por exemplo".

Segundo a NASA (2010) detritos orbitais artificiais "são objetos produzidos pelo homem que estão em órbita ao redor da Terra mas que não desenvolvem mais nenhuma atividade para as quais foram enviados ao espaço". Estes objetos podem ser derivados de explosões de satélites espaciais, resultados de destruição de satélites que não são mais úteis para a missão a qual foi designado, colisões entre naves operantes com naves inoperantes ou simplesmente objetos deixados em órbita por astronautas.

A região do espaço próxima à Terra, onde estes objetos podem ser encontrados, é dividida em três categorias, LEO, MEO e GEO, que são as regiões de órbitas baixas, médias e geoestacionárias, respectivamente. Estas órbitas são classificadas de acordo com a altitude das mesmas em relação à superfície da Terra, que segundo Rossi (2005):

i) LEO: Órbitas que estão entre 90 à 2000 km de altitude da superfície terrestre. Nesta órbita é possível encontrar detritos espaciais de tamanhos diversos e que possuem uma velocidade de impacto maior que 9 km/s. A maior parte dos detritos espaciais estão nesta região, mais precisamente entre 900 e 1400 km de altitude.

ii) MEO: Órbitas que possuem uma altitude de 2000 à 36000 km. Nesta região encontram-se os Satélites de Posicionamento Global (GPS).

iii) GEO: Situadas a uma altitude acima de 36000 km da superfície terrestre. Satélites nesta órbita estão em ressonância 1:1 com a Terra.

Em Santos (2007) podemos encontrar a classificação destes objetos da seguinte maneira:

- **Objetos grandes**- Fragmentos com tamanho maiores que 10 cm de diâmetro;
- **Objetos de risco**- Fragmentos com tamanho entre 1,0 e 10,0 cm de diâmetro;
- **Restos menores ou micro restos**- Fragmentos menores que 1,0 cm de diâmetro.

Uma melhor descrição destes objetos é apresentada na Tabela 1, que fornece a quantidade de objetos, os que podem ser rastreados e o tipo de dano que uma colisão pode causar para cada tamanho de detrito correspondente.

Tabela 1 – Descrição do tamanho, quantidade e informações sobre rastreamentos e impacto dos detritos.

Tamanho	**Quantidade**	**Rastreamento e Impacto**
1 mm à 3 mm	Milhões	Não podem ser rastreados. Pequenos danos.
3 mm à 1 cm	Milhões	Não podem ser rastreados. Pequenos danos.
1 cm à 5 cm	Milhares	A maior parte não podem ser rastreados. Grandes danos.
5 cm à 10 cm	Milhares	Limite inferior de rastreamento. Danos catastróficos.
10 cm ou maiores	Centenas	Catalogado e rastreado pela rede de vigilância espacial. Danos catastróficos.

Fonte: Aerospace (2017)

O rastreamento desses objetos é feito principalmente por telescópios militares. Os dois principais países que assumem essa tarefa são os Estados Unidos e a Rússia. De acordo com Gomes (2011) a US Strategic Command, dos Estados Unidos, fornece um mapa de rota diária dos detritos com acesso "online" livre, diferentemente dos russos que mantém em sigilo suas informações. A Europa também atua no rastreamento destes fragmentos por meio de um radar francês chamado Graves. Este radar monitora 2000 fragmentos na órbita baixa da Terra, com exceção dos objetos com mais de 1 metro.

Neste trabalho usaremos uma poderosa ferramenta desenvolvida por Laskar em 1990 conhecida como Análise do Mapa de Frequência (FMA) para analisar regiões de estabilidade e instabilidade nas órbitas dos detritos na região LEO. A escolha da órbita LEO se deu pelo fato de ser a região com

maior número de detritos. O objetivo principal desse trabalho é aprender a utilizar o FMA e aplicá-lo ao sistema Terra-detrito.

No capítulo 2 será apresentada uma breve revisão bibliográfica contendo estudos já realizados sobre casos de acidentes e reentrada de detritos espaciais. Neste capítulo o suporte literário também será usado para apresentar uma descrição analítica das perturbações consideradas no trabalho.

No capítulo 3 apresentamos o desenvolvimento do potencial terrestre até a ordem 3 e as equações do movimento. Apresentaremos uma análise da evolução com o tempo de alguns elementos orbitais dos detritos integradas pelo Bülirsch-Stöer do pacote Mercury, Chambers (1999). Na última seção do capítulo 3 estudaremos os efeitos dos coeficientes de achatamento zonais J_2, J_3 e do coeficiente setorial C_{22} nas órbitas de detritos sob influência da ressonância tesseral 14:1. Os detritos em órbita baixa estão muito distantes da Lua, assim, o efeito gravitacional devido à Lua é bem pequeno e por esse motivo o mesmo não será considerado neste trabalho.

No capítulo 4 é feita uma descrição teórica do algorítimo de análise de frequência, do parâmetro de difusão e do tempo de difusão. Posteriormente é apresentado o mapa de difusão para diferentes condições iniciais obtido através do Algorítimo de Análise de Frequências e uma análise do mesmo é feita.

Para o capítulo 5 tem-se a discussão dos resultados obtidos e as pretensões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O número de detritos que consegue voltar para Terra é surpreendentemente grande. Segundo a NASA (2010) pelo menos um detrito cai na Terra por dia. A maioria desses objetos queimam ao passarem pela atmosfera, e os que sobrevivem a esse estágio, e conseguem aterrissar, acabam nos oceanos; já que a Terra é constituída em sua maior parte por água. A principal preocupação da comunidade científica é com as possíveis colisões que podem acontecer envolvendo detritos espaciais e sondas ainda em operação, já que esses são os casos mais recorrentes e possíveis.

Neste capítulo uma breve revisão bibliográfica será apresentada visando fornecer informação envolvendo os principais casos de acidentes e de reentrada envolvendo detritos espaciais.

2.1 CASOS DE REENTRADA E DE ACIDENTES ENVOLVENDO DETRITOS ESPACIAIS

Mesmo com um número grande de detritos reentrando à Terra o único acidente causado por um resíduo espacial a um humano Hall (2014), aconteceu em 1997 no estado de Oklahoma quando Lottie Williams foi atingida no ombro por um resíduo de 15 cm de comprimento enquanto caminhava em um parque da cidade de Tulsa. O resíduo foi identificado como sendo parte do tanque de combustível do foguete Delta II, foguete de lançamento de um satélite da Força Aérea Americana em 1996. Na Figura 1, Lottie aparece segurando o detrito que a atingiu.

Figura 1 – Lottie Williams segurando o detrito que a atingiu em 1997



Fonte: Batista (2011)

Partes maiores do foguete Delta II foram encontradas em lugares diferentes de onde Lottie foi atingida. O tanque de pressão de 30 kg foi encontrado perto de Seguin, e o principal tanque de

propulsão de cerca de 250 kg aterrissou em Georgetown, ambos no estado do Texas.

Figura 2 – Resíduos do foguete Delta II. a) Tanque de propulsão, a) Tanque de pressão



(a) (b)

Fonte: Batista (2011)

A última peça pertencente ao foguete Delta II foi encontrada em janeiro de 2001 quando o resíduo caiu na Arábia Saudita. A peça era o Módulo de Assistência de Carga Útil - Delta (PAM-D) que pesava cerca de 70 kg e fazia parte do terceiro estágio do foguete.

Resíduos de outro foguete também conseguiram sobreviver à reentrada na atmosfera terrestre, segundo a Aerospace Corporation (2017) o tanque de propelente do segundo estágio do foguete Delta e dois objetos de formato esférico aterrissaram na África do Sul entre os meses de abril e maio de 2000. Em abril de 2000 o tanque de propelente do foguete foi encontrado em uma fazenda próxima à cidade do Cabo, e no mês de maio os outros dois objetos com cerca de 30 kg e 55 kg foram encontrados na província de Cabo Ocidental também na África do Sul.

Um dos casos mais recentes de um suposto detrito que caiu na Terra aconteceu em novembro de 2016 em Myanmar na Ásia. Segundo o jornal Myanmar Times (2016) o objeto com cerca de 3,7 metros de comprimento caiu perto de uma mina de jade abandonada no município de Hpakant. Não foi confirmado pelos órgãos responsáveis se tal objeto tenha caído do céu, mas as suspeitas é de que o mesmo fosse um impulsionador de foguete usado no lançamento de satélites chineses. A Figura 2 mostra o objeto no local exato da sua queda.

Figura 3 – Suposto detrito que caiu em Myanmar na Ásia.



Fonte: Jornal The Myanmar Times (2016)

No Brasil alguns casos de reentrada de detritos já foram registrados mas nenhum confirmado oficialmente pela NASA. De acordo com o jornal O Tempo (2012) um desses eventos aconteceu no dia 22 de fevereiro de 2012 no povoado de Anapurus que fica a 280 km de São Luís do Maranhão. O resíduo era uma esfera de metal supostamente do tanque de combustível do foguete Ariane 4 lançado pela Agência Espacial Europeia.

Figura 4 – Possível detrito que caiu em Anapurus em 2012



Fonte: Jornal O tempo (2012)

Um outro caso de um possível detrito que caiu em terras brasileiras aconteceu em março de 2008 na cidade de Montividiu interior de Goiás. Mesmo não tendo a confirmação de que o objeto veio do espaço, as informações que se tem é de que o fragmento seria parte de um tanque de combustível

possivelmente de um foguete ou um satélite.

O primeiro acidente entre um detrito e uma nave em operação aconteceu em 1996, segundo Gomes (2011) a colisão foi entre um satélite militar francês, o Cerise, e um fragmento oriundo da explosão do foguete Ariane ocorrida 10 anos antes. A partir de então outros acidentes foram sendo divulgados e a contabilização do número de fragmentos em órbitas terrestres aumentado, alguns eventos fizeram com que esse número saltasse nos últimos anos. Nesse contexto podemos destacar:

- **A destruição do satélite chinês Fengyun-1C**

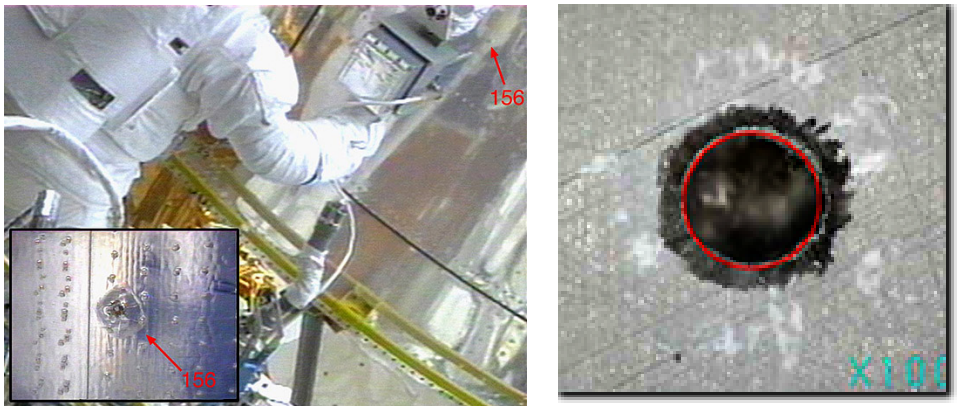
Em 11 de janeiro de 2007 a China lançou um míssil anti-satélite e destruiu o satélite meteorológico Fengyun-1C. De acordo com Rossetto (2013) este evento foi o que mais gerou detritos espaciais até então, o evento gerou cerca de 2300 objetos maiores que 10 cm de diâmetro, mais de 35000 entre 1 e 10 cm e mais de 1 milhão de detritos menores que 1 cm.

- **A colisão entre os satélites Iridium 33 e Cosmos 2251**

A colisão ocorreu em 10 de fevereiro de 2009 e foi a primeira colisão entre dois satélites. O satélite Cosmos era um satélite russo e estava fora de operação, enquanto o satélite Iridium era um satélite americano que fazia parte de uma constelação de 66 satélites e ainda em atividade. Rossetto (2013) afirma que a colisão entre os dois satélites gerou cerca de 1500 fragmentos no espaço.

Fragmentos como os gerados pelos dois acidentes mencionados atingiram por diversas vezes o telescópio espacial Hubble e a Estação Espacial Internacional (ISS). Não foi uma única vez que o Hubble passou por reparos no espaço devido à estragos causados por colisões com lixo espacial, e por diversas vezes a ISS teve que mudar sua rota original para desviar de possíveis colisões com detritos. A Figura 3 (a) mostra um desses momentos em que o telescópio Hubble passou por reparos no espaço e a Figura 3 (b) mostra um pequeno furo na Montagem do Tanque de Amônia (ATA) da ISS.

Figura 5 – a) Astronautas fazendo reparos no Hubble. b) Furo na (ATA) da ISS.



(a) (b)

Fonte: NASA (2010)

Assim como a ISS e o telescópio Hubble várias sondas de importante cunho científico e social estão em órbita e podem ser lesionadas se colidirem com objetos em movimento. Diante do contexto histórico apresentado torna-se claro a importância do estudo da dinâmica destes objetos.

2.1.1 Perturbações consideradas

É esperado que diante do grande número de detritos em órbita e dos casos de reentrada e de acidentes envolvendo os mesmos, a quantidade de autores afim de estudar sua dinâmica aumente. Através de estudos já realizados acerca da dinâmica destes objetos faremos uma breve descrição sobre o problema de dois e três corpos e posteriormente apresentaremos o potencial estudado além de descrever de forma sucinta cada perturbação considerada.

2.1.1.1 O problema de dois corpos

De acordo com Murray e Dermott (1999) quando dois corpos com massas m_1 e m_2 interagem em um campo gravitacional, o movimento dos mesmos é descrito pelo problema de dois corpos. O problema de dois corpos é integrável e pode ser solucionado analiticamente, sendo Isaac Newton em 1687 o primeiro a apresentar tal solução.

Considerando que estes dois corpos de massas m_1 e m_2 são pontos de massa e que possuem coordenadas (ξ_1, η_1, ζ_1) e (ξ_2, η_2, ζ_2) em um sistema inercial, a equação do movimento relativo de m_1 ao redor de m_2 é:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \mu\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0} \tag{2.1}$$

Fazendo o produto vetorial de $\vec{r}$ com a equação acima e integrando posteriormente temos:

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h} \tag{2.2}$$

Que é a integral do momento angular, que será útil para obter a solução analítica do sistema.

Usando as equações de posição, velocidade e aceleração em coordenadas esféricas na equação do momento angular obtemos a seguinte expressão:

$$\vec{h} = r^2\dot{\theta}\hat{z} \tag{2.3}$$

Sendo $\hat{z}$ um vetor unitário perpendicular ao plano da órbita.

Substituindo o vetor aceleração $\ddot{\vec{r}}$ em coordenadas esféricas na equação $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \mu\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0}$ e considerando a componente radial temos:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \tag{2.4}$$

Fazendo $r = \frac{1}{\mu}$ e resolvendo a equação diferencial temos como solução:

$$\ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{2.5}$$

Que tem como solução geral:

$$u(\theta) = \frac{\mu}{h^2} + K\cos(\theta - \varpi) \tag{2.6}$$

onde K (amplitude) e ϖ (fase) são as constantes de integração.

Fazendo novamente $u = \frac{1}{r}$ tem-se:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varpi)} \tag{2.7}$$

que é a equação geral das cônicas; onde $p = h^2/\mu$, $e = (h^2K)/\mu$, e é a excentricidade e p é o semilatus rectum. Portanto, dado posições e velocidades iniciais conseguimos obter o movimento de m_1, ou descrever a órbita do objeto através dos seis elementos orbitais:

- a = Semieixo maior : Descreve o tamanho da órbita;
- e = Excentricidade : Dá o formato da órbita;
- I = Inclinação: Fornece o ângulo entre o plano da órbita e o plano equatorial;
- ω, Ω e M = Forma o desenho da órbita no espaço. Sendo ω o argumento do pericentro, Ω longitude do nodo ascendente, M anomalia média.

2.1.1.2 O Problema circular restrito de três corpos

Segundo Murray e Dermott (1999), diferentemente do problema de dois corpos, o problema de três corpos não tem solução analítica, apenas cinco soluções especiais definidas como os pontos de equilíbrio Lagrangianos. O problema circular restrito de três corpos descreve o movimento de um corpo de massa m_1 orbitando um corpo principal de massa M e perturbado por um corpo de massa m_2, como a massa de m_1 é muito pequena em comparação com os outros dois corpos seu efeito sob os corpos M e m_2 pode ser desconsiderado. A denominação de *restrito* é dada porque o corpo de massa m_1 não perturba os outros dois corpos do sistema e *circular* porque o corpo de massa m_2 descreve uma órbita circular ao redor do corpo de massa M.

Para descrever as equações do movimento no problema restrito de três corpos Murray e Dermott (1999) consideram um sistema de referência inercial de coordenadas (ξ, η, ζ), centrado no centro de massa do sistema. Dessa forma as equações do movimento que descrevem o movimento de m_1 são:

$$\ddot{\xi} = \mu_M \frac{\xi_M - \xi}{r_M^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}, \tag{2.8}$$

$$\ddot{\eta} = \mu_M \frac{\eta_M - \eta}{r_M^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}, \tag{2.9}$$

$$\ddot{\zeta} = \mu_M \frac{\zeta_M - \zeta}{r_M^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3}, \tag{2.10}$$

onde

$$r_M^2 = (\xi_M - \xi)^2 + (\eta_M - \eta)^2 + (\zeta_M - \zeta)^2,$$
$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2,$$

$$\mu_M = 1 - \frac{m_2}{M + m_2} \text{ e } \mu_2 = \frac{m_2}{M + m_2}.$$

Por meio de uma matriz de rotação podemos relacionar as coordenadas do referencial inercial (ξ, η, ζ) com as coordenadas do sistema girante (x, y, z) com movimento n. As equações do movimento ficam:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = -\left[\mu_M \frac{x + \mu_2}{r_M^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_M}{r_2^3}\right], \tag{2.11}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = -\left[\frac{\mu_M}{r_M^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] y, \tag{2.12}$$

$$\ddot{z} = -\left[\frac{\mu_M}{r_M^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] z. \tag{2.13}$$

Estas equações podem ser escritas como:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial V}{\partial x}, \tag{2.14}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \tag{2.15}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{2.16}$$

onde n pode ser tomado como a taxa de rotação do corpo central e V é o potencial do sistema. Desprezando os efeitos gravitacionais de m_2, as equações 2.14, 2.15 e 2.16 são as equações do movimento de m_1 ao redor de M relativo à rotação do corpo principal.

2.2 O POTENCIAL TERRESTRE

A não esfericidade da Terra faz com que os elementos orbitais dos corpos que a orbitam passem por variações ao longo do tempo. A lei da gravitação universal postulada por Newton (1687) diz que se dois corpos de massas diferentes m e M estão separados por uma distância r, esses corpos irão se atrair com uma força chamada de força de atração gravitacional, dada por:

$$\mathbf{F}(r) = \frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{2.17}$$

Sendo m a massa de um corpo pontual que é atraído por um corpo de massa maior M. $G = 6,67 \times 10^{-11} Kg^{-1}s^{-2}$ é a constante de gravitação universal e $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário que aponta na direção da força. Essa força pode ser escrita em termos do gradiente do potencial, da forma:

$$\mathbf{F}(r) = m\frac{\partial V}{\partial r} = m\nabla V, \tag{2.18}$$

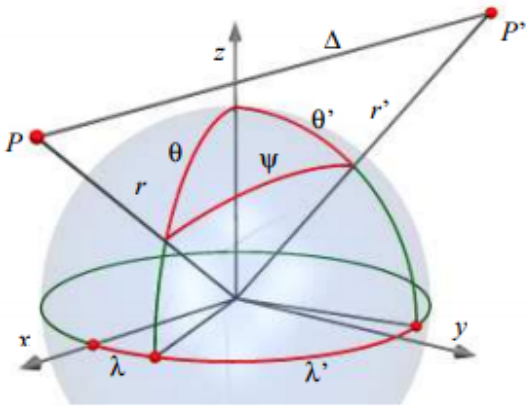
onde $V = \frac{GM}{r}$.

De acordo com Santos (2007), para o caso de uma partícula que é atraída por corpo com distribuição de massa não uniforme, cada elemento de massa (dM) irá exercer uma força de atração sob essa partícula. Portanto o potencial para um corpo atraído por um outro corpo com distribuição de massa não homogênea pode ser escrito da seguinte maneira:

$$V = G\frac{dM}{r}, \tag{2.19}$$

Considerando o caso de dois corpos representados pelos pontos P e P' de coordenadas esféricas (r, θ, λ) e (r', θ', λ'), respectivamente, e separados por uma distância Δ, como mostra a Figura 4; o potencial gravitacional para estes corpos pode ser escrito como:

Figura 6 – Distância entre dois pontos P e P' em coordenadas esféricas



Fonte: Kuga et al (2011)

$$V = G\frac{dM}{\Delta}, \tag{2.20}$$

onde $\cos\Psi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda' - \lambda)$.

Usando a lei dos cossenos podemos definir Δ com a seguinte relação, onde $r' < r$:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\Psi + \frac{r'^2}{r^2}}}, \tag{2.21}$$

Fazendo uma expansão em série de potências da equação 2.21, os termos que acompanham r^n são os chamados polinômios de Legendre $P_n(x)$. A equação 2.21 pode ser escrita da forma:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\Psi), \tag{2.22}$$

Substituindo a equação 2.22 na expressão 2.20, usando o teorema da adição de Legendre e fazendo algumas simplificações, encontramos a equação final do potencial gravitacional escrita de acordo com Kaula (1966) considerando a Terra como o corpo central do sistema:

$$V(r,\phi,\lambda) = G\frac{M_E}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\sin\phi)(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda). \tag{2.23}$$

onde C_{nm} e S_{nm} são os coeficientes dos harmônicos esféricos, G a constante gravitacional, M_E a massa da Terra, R_E o raio equatorial da Terra, r a distância entre o corpo central e a partícula, ϕ a latitude geocêntrica, λ a longitude geocêntrica e P_n^m os polinômios de Legendre dados como:

$$\begin{aligned} P_n^m(x) =& (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x), \\ P_n(x) =& \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n. \end{aligned}$$

Expandindo a expressão do potencial mostrada na equação 2.23 até $n = 3$ temos:

$$\begin{aligned} V_3(r,\phi,\lambda) =& \frac{GM_E}{r} + \frac{GM_E}{r}\left(\frac{R_E}{r}\right)^2\left[\frac{1}{2}(3\sin^2\phi - 1)C_2\right] \\ &+ \frac{GM_E}{r}\left(\frac{R_E}{r}\right)^2\left[3\cos^2\phi(C_{22}\cos 2\lambda + S_{22}\sin 2\lambda)\right] \\ &+ \frac{GM_E}{r}\left(\frac{R_E}{r}\right)^3\left[\frac{1}{2}\sin\phi(5\sin^2\phi - 3)C_3\right]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Segundo Rao (1986), se a origem do sistema de coordenadas coincide com o centro de massa do corpo central os coeficientes $C_{10} = C_{11} = S_{11} = S_{00} = 0$, por esse motivo tais coeficientes não aparecem na expansão acima.

O coeficiente zonal C_{20} representa o achatamento nos polos do planeta e é atribuído a ele um valor positivo Kuga et al (2011), desta forma convencionou-se que o valor numérico deste achatamento é negativo no Equador, ou seja, $C_2 = -J_2$. Neste trabalho estamos interessados no potencial em função dos coeficientes zonais J_2, J_3 e do coeficiente setorial C_{22}. Vamos considerar as conversões de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas e então podemos escrever o potencial em função de (x, y, z) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} V_3(x,y,z) =& \frac{GM_E}{r} + \frac{GM_E}{r}\left(\frac{R_E}{r}\right)^2\left[J_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3z^2}{2r^2}\right)\right] \\ &+ \frac{GM_E}{r}\left(\frac{R_E}{r}\right)^2\left[3C_{22}\frac{(x^2-y^2)}{r^2}\right] \\ &+ \frac{GM_E}{r}\left(\frac{R_E}{r}\right)^3\left[J_3\frac{z}{2r}\left(3 - \frac{5z^2}{r^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Cada coeficiente do potencial provoca uma perturbação no sistema estudado. Neste trabalho os coeficientes de achatamento terrestre considerados são J_2, J_3 e C_{22} presentes na expansão do

potencial. A escolha de trabalhar com estes coeficientes se dá pelo fato de não encontrarmos trabalhos sobre detritos espaciais que analise os efeitos da combinação deste três coeficientes nas órbitas dos detritos. Nas próximas subseções uma abordagem mostrará a contribuição de cada coeficiente nessas perturbações.

2.2.1 Os Coeficientes zonais J_2 e J_3

Celletti et al (2016) afirmam que de todas as perturbações sofridas pelos detritos espaciais, a perturbação causada pelo termo J_2 é uma das mais importantes. A influência deste efeito possibilita a análise dos efeitos seculares nas trajetórias dos objetos, além de ser fundamental para o estudo de sobreposição de ressonâncias tesserais. Para o caso do coeficiente zonal J_3 segundo estudos realizados por Kuga et al (2011) o seu principal efeito é a oscilação da distância do pericentro.

2.2.1.1 O Coeficiente setorial C_{22}

O coeficiente setorial C_{22} representa o achatamento no equador do planeta. Segundo Kuga (2011) o seu efeito é observado principalmente nos satélites geoestacionários. Em Scheeres (1999) o coeficiente C_{22} é usado para analisar mudanças no momento angular e na energia da órbita de uma partícula orbitando um asteroide. As variações de momento e de energia podem fazer com que a partícula colida com a superfície do asteroide ou seja ejetada de sua órbita.

No trabalho de Carvalho (2017) são considerados os termos zonais do potencial gravitacional e o termo setorial C_{22} para estudar a dinâmica de um satélite artificial que orbita o planeta Mercúrio. O sistema é analisado de duas maneiras, com e sem média das equações do movimento; sendo observado que o resultado obtido é o mesmo para as duas situações. Uma das principais conclusões do trabalho é que o coeficiente setorial C_{22}, em conjunto com os coeficientes zonais, diminuem o valor da excentricidade orbital.

2.3 RESSONÂNCIA

Os efeitos ressonantes tem uma contribuição significativa na análise da dinâmica de detritos em órbita ao redor da Terra. Celletti et al (2016) afirmam que isso acontece devido à grandes variações que algumas ressonâncias causam nos elementos orbitais dos detritos. O fenômeno ressonante ocorre através da relação entre duas partes de um sistema que tem os seus comportamentos envolvidos por vibrações ou frequências periódicas; se houver uma fração entre as

frequências, descrita pela relação de dois inteiros pequenos, esta relação é entendida como *ressonância*.

Alguns trabalhos vêm analisando os efeitos ressonantes na dinâmica de fragmentos em órbitas terrestres. Sampaio (2013) desenvolveu um estudo das regiões que estão sob os efeitos das ressonâncias 2:1 e 14:1; essas ressonâncias tem seus efeitos diretamente ligados aos objetos em órbitas média e baixa, respectivamente. No estudo o autor investiga a influência destas ressonâncias nos elementos orbitais de satélites e detritos artificiais. Através de uma análise do período ressonante dos detritos o autor conclui que os ângulos ressonantes oscilam entre curta e profunda ressonância, também é observado que os ângulos ressonantes provocam irregularidades nas órbitas dos detritos.

As ressonâncias 2:1 e 14:1 são novamente investigadas em conjunto com a ressonância 1:1 no trabalho de Sampaio et al (2014). Uma abordagem sobre o ângulo ressonante, período ressonante e frequência de detritos espaciais é apresentada mostrando, ao final do trabalho, que os movimentos orbitais dos fragmentos estudados serão influenciados por ângulos ressonantes durante um longo período de tempo. Possíveis movimentos irregulares podem ser confinados em uma região delimitada por ângulos ressonantes com maiores períodos de ressonância, ou seja, alguns objetos em torno das ressonâncias exatas 1:1, 2:1 e 14:1 permanecem em ressonância por um longo período de tempo.

Usando o formalismo Hamiltoniano e considerando os efeitos do geopotencial, Celletti e Gales (2014) analisam analiticamente e numericamente as regiões caóticas e regulares sob os efeitos das ressonâncias 1:1 e 2:1. Os autores incluíram as perturbações causadas pelo Sol, Lua e a pressão de radiação solar, e assim foi obtida a localização dos pontos de equilíbrio, as amplitudes das ilhas de libração e as peculiaridades fundamentais para o entendimento da influência destas ressonâncias na dinâmica de detritos e de satélites artificiais, tendo em vista que na região destas ressonâncias estão localizados os satélites geossíncronos e os GPS.

Detritos em órbitas geossícronas são também investigados por Celletti e Gales (2015) e novas ressonâncias são consideradas, são elas: 3:1, 3:2, 4:1, 4:3, 5:1, 5:2, 5:3, 5:4. Concluindo que as perturbações decorrentes da atração do Sol, da Lua e da pressão de radiação solar, não modificam significativamente as principais características do sistema dinâmico estudado, como a localização dos pontos de equilíbrio, a amplitude das ilhas ressonantes e o comportamento regular ou caótico das órbitas.

2.3.1 A Ressonância tesseral

.

A ressonância estudada neste trabalho será a ressonância tesseral 14:1, ou seja, quando a Terra der uma volta completa em torno do seu próprio eixo o detrito executará 14 voltas completas ao redor da Terra. Celletti e Gales (2015) afirmam que se houver uma comensurabilidade entre o período rotacional da Terra e o período orbital do detrito uma **ressonância tesseral** ocorre quando:

$$\ell\dot{M} - j\dot{\theta} = 0 \qquad\qquad j, \ell \in \mathbb{Z}. \tag{2.26}$$

A ressonância tesseral de ordem j:ℓ irá existir sempre que tal relação for satisfeita. $\dot{\theta}$ corresponde à velocidade angular de rotação da Terra e $\dot{M}$ é o movimento médio do detrito. Os principais efeitos desta ressonância são observados na variação do semieixo maior com uma escala da ordem de centenas de dias Celletti e Gales (2014).

No próximo capítulo será analisado o movimento de um detrito em órbita ao redor da Terra sob os efeitos dos coeficientes J_2, J_3 e C_{22}. Para tanto será necessário estudar e modificar o integrador numérico mercury (Chambers 1999).

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo serão fornecidas informações acerca do desenvolvimento do trabalho, o sistema estudado, as equações do movimento, o integrador numérico e os resultados obtidos.
O sistema a ser analisado será o sistema Terra-detrito, considerando a não esfericidade da Terra e os detritos localizados em órbita baixa, mais precisamente, na região onde se encontram detritos na ressonância 14:1. A velocidade de rotação da Terra também é considerada e será denominada como n.
O sistema de referência adotado é o sistema girante que tem suas equações do movimento descritas de acordo com Scheeres e Paskowitz (2006):

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2n\dot{y} - n^2 x &= -\frac{GM_E R_E^2 x}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \ddot{y} - 2n\dot{x} - n^2 y &= -\frac{GM_E R_E^2 y}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -\frac{GM_E R_E^2 z}{r^3} + \frac{\partial V}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde V é o potencial dado por:

$$\begin{aligned} V_3(x,y,z) =& \frac{GM_E}{r} + \frac{GM_E}{r}\left(\frac{R_E}{r}\right)^2 \left[J_2\left(\frac{1}{2} - \frac{3z^2}{2r^2}\right)\right] \\ &+ \frac{GM_E}{r}\left(\frac{R_E}{r}\right)^2 \left[3C_{22}\frac{(x^2-y^2)}{r^2}\right] \\ &+ \frac{GM_E}{r}\left(\frac{R_E}{r}\right)^3 \left[J_3\frac{z}{2r}\left(3 - \frac{5z^2}{r^2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Para simplificações matemáticas adotaremos $GM_E = \mu$. Fazendo as derivadas do potencial com relação as coordenadas (x, y, z) temos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} =& -2n\dot{y} + n^2 x - \frac{\mu R_E^2 x}{r^3} - \frac{\mu R_E^2 x J_2}{2r^5}\left[3 - 15\left(\frac{z}{r}\right)^2\right] \\ &+ \frac{3\mu R_E^2 C_{22} x}{r^5}\left[2 - \frac{5(x^2-y^2)}{r^2}\right] \\ &- \frac{\mu R_E^2 J_3 xz}{2r^7}\left[15 - 35\left(\frac{z}{r}\right)^2\right], \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y} =& 2n\dot{x} + n^2 y - \frac{\mu R_E^2 y}{r^3} - \frac{\mu R_E^2 y J_2}{2r^5}\left[3 - 15\left(\frac{z}{r}\right)^2\right] \\ & - \frac{3\mu R_E^2 C_{22} y}{r^5}\left[2 + \frac{5(x^2 - y^2)}{r^2}\right] \\ & - \frac{\mu R_E^2 J_3 yz}{2r^7}\left[15 - 35\left(\frac{z}{r}\right)^2\right],\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\ddot{z} =& - \frac{\mu R_E^2 z}{r^3} - \frac{\mu R_E^2 z J_2}{2r^5}\left[9 - 15\left(\frac{z}{r}\right)^2\right] \\ & - \frac{15\mu R_E^2 C_{22} z}{r^7}(x^2 - y^2) \\ & - \frac{\mu R_E^2 J_3}{2r^5}\left[-3 + 30\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 35\left(\frac{z}{r}\right)^4\right].\end{aligned} \tag{3.5}$$

As integrações apresentadas nesse trabalho foram feitas utilizando o integrador Bülirsch-Stöer do pacote Mercury Chambers (1999). Dentro do pacote contém uma subrotina onde estão inseridas as acelerações devida aos termos J_2, J_4 e J_6. Um dos objetivos desse trabalho é analisar os efeitos dos coeficientes J_3 e C_{22} nas órbitas dos detritos, dessa forma foi necessário substituir as equações existentes na subrotina pelas equações 3.3, 3.4 e 3.5.

As implementações foram realizadas na subrotina MFO_OBL, rotina responsável pelo cálculo da perturbação devida ao achatamento do corpo central. Também foram incluídas mais duas subrotinas externas ao programa: MCO_H2AST e MCO_AST2H. A primeira subrotina é responsável por converter os vetores de estado do referencial inercial para o referencial sinódico. Após a integração ser feita no referencial sinódico, a segunda subrotina faz o processo inverso da primeira para que tenhamos os arquivos de saída do programa no referencial inercial. Para a construção dessas duas subrotinas usamos as equações 3.10 e 3.11 do livro Murray e Dermott (1999). As modificações não alteram o programa principal do pacote Mercury.

3.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção serão apresentados os resultados de um conjunto de simulações numéricas. Os resultados dessas simulações serão usados para analisar os efeitos dos coeficientes de achatamento terrestre J_2, J_3 e C_{22} na órbita dos detritos espaciais. Os detritos foram posicionados na região exata da ressonância 14:1 e as integrações foram feitas para os períodos de 1 e 20 dias, o período orbital dos detritos na região de interesse está entre 1,5 à 2,0 horas, assim, integrações por um período de 1 e 20 dias já são

suficientes para analisar o sistema. Os valores de alguns parâmetros relacionados à Terra adotados nas simulações são fornecidos pela Tabela 2.

Tabela 2 – Valores de alguns parâmetros relacionados à Terra.

Simbolo	**Valor**	**Unidade**	**Nome**
J_2	$1,0826 \times 10^{-3}$	Adimensional	Coeficiente de achatamento zonal de ordem 2.
J_3	$2,53241 \times 10^{-6}$	Adimensional	Coeficiente de achatamento zonal de ordem 3.
C_{22}	$1,57462 \times 10^{-6}$	Adimensional	Coeficiente de achatamento setorial de ordem 2.
n	6,28	rad/dias	Velocidade de rotação da Terra.

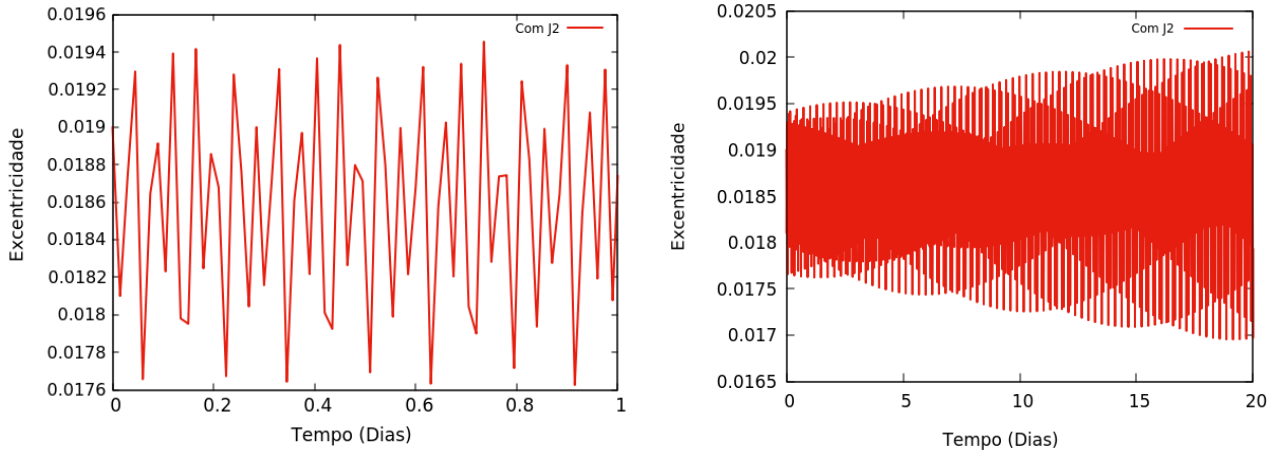
Fonte: Celletti et al (2016)

Afim de entender os efeitos dos coeficientes de achatamento terrestre nas órbitas dos detritos, as próximas seções apresentarão os resultados de algumas simulações numéricas onde esses efeitos foram analisados.

3.1.0.1 Simulações com J_2

Para a primeira simulação em que apenas o coeficiente J_2 é considerado, as condições iniciais usadas foram semieixo maior no valor de 7258,69 Km, excentricidade igual a 0,019, inclinação igual a 87 °, os ângulos $\omega = \Omega = M = 0\,^\circ$ e $J_2 = 1.0826 \times 10^{-3}$. Os resultados desta análise são apresentadas nas Figuras 7, 8 e 9 a seguir:

Figura 7 – Variação temporal da excentricidade para a) 1 dia e b) 20 dias.



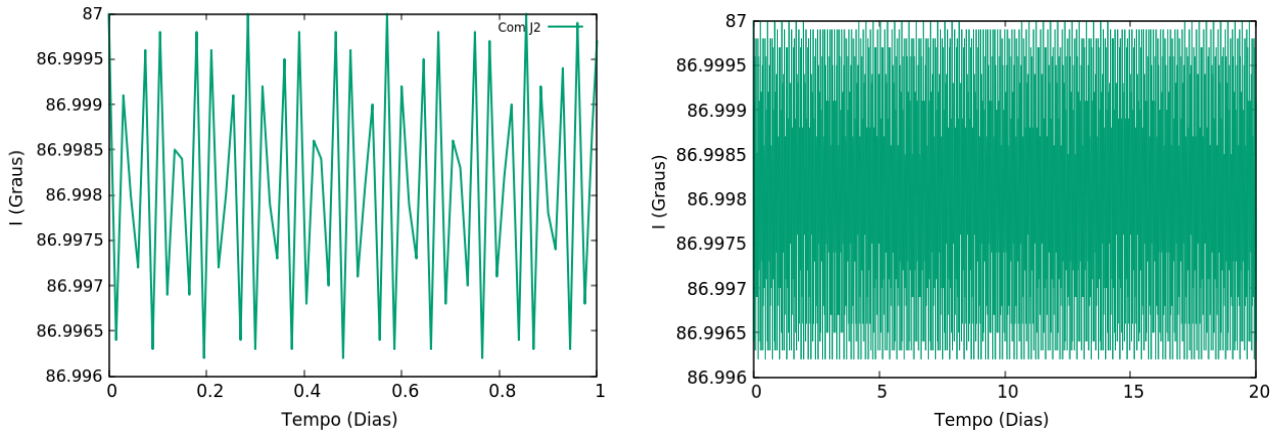
(a) (b)

Fonte: Produção da própria autora

Analisando a Figura 7 podemos perceber que em (a) variação de curto período da excentricidade

durante todo período de integração. É obsesrvado também em (b) que essa variação de longo período devido ao coeficiente J_2 aumenta gradativamente ao longo do tempo, um resultado esperado já que tal coeficiente se apresenta como uma das perturbações que mais afetam a órbita de satélites e detritos artificiais.

Figura 8 – Variação temporal da inclinação para a) 1 dia e b) 20 dias.

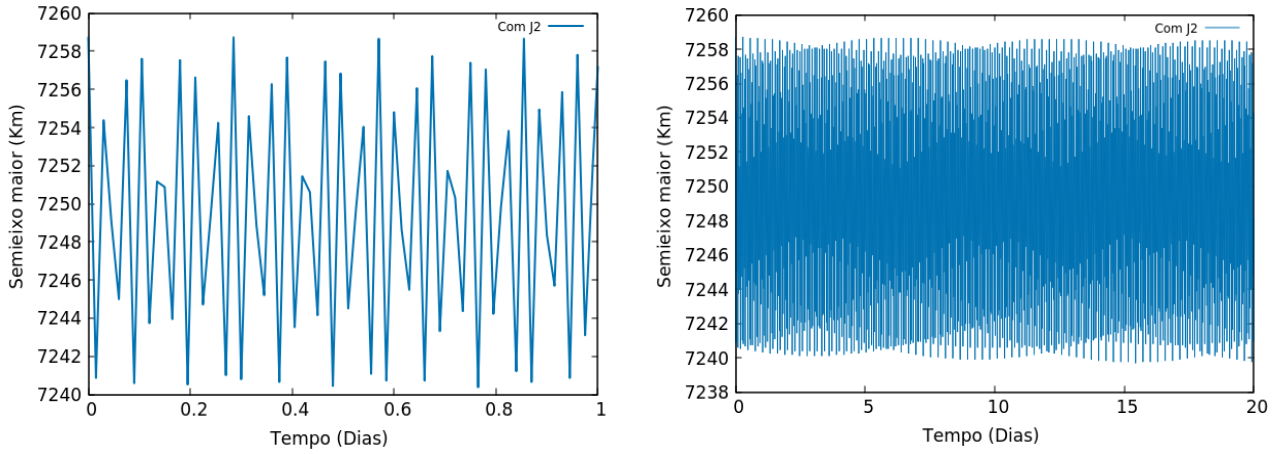


(a) (b)

Fonte: Produção da própria autora

Observando a Figura 8 (a) e (b) notamos que a variação da inclinação é mínima e acontece de maneira irregular, isso é verificado tanto na integração de 1 dia como na integração de 20 dias. Segundo Celletti et al (2016), os efeitos do coeficiente J_2 é observado principalmente na excentricidade e no semieixo maior, portanto, essa variação mínima da inclinação está de acordo com os resultados encontrados na literatura. Segundo Roy (2004) a variação de curto período depende de $\cos I$, sendo $I = 87°$.

Figura 9 – Variação temporal do semieixo maior para a) 1 dia e b) 20 dias.



(a) (b)

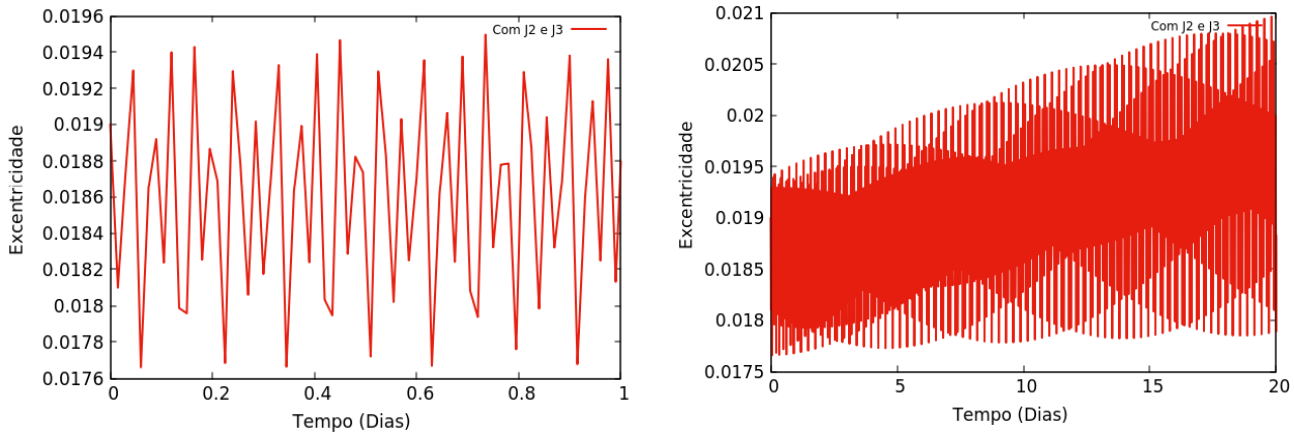
Fonte: Produção da própria autora

Para a variação do semieixo maior mostrada na Figura 9 (a) e (b), verificamos uma variação de 18 Km aproximadamente na integração de 1 e 20 dias. Em (a) temos uma variação de curto período do semieixo que aparece de forma mais tênue na integração de 20 dias (ROY, 2004).

3.1.0.2 Simulações com $J_2 + J_3$

Nesta simulação serão considerados os coeficientes J_2 e J_3. As condições iniciais usadas foram um semieixo maior no valor de 7258,69 Km, excentricidade igual a 0,019, inclinação igual a 87 °, os ângulos $\omega = \Omega = M = 0\,°$, $J_2 = 1.0826 \times 10^{-3}$ e $J_3 = 2.53241 \times 10^{-6}$. Os resultados desta análise são mostradas nas Figuras a seguir:

Figura 10 – Variação temporal da excentricidade para a) 1 dia e b) 20 dias.

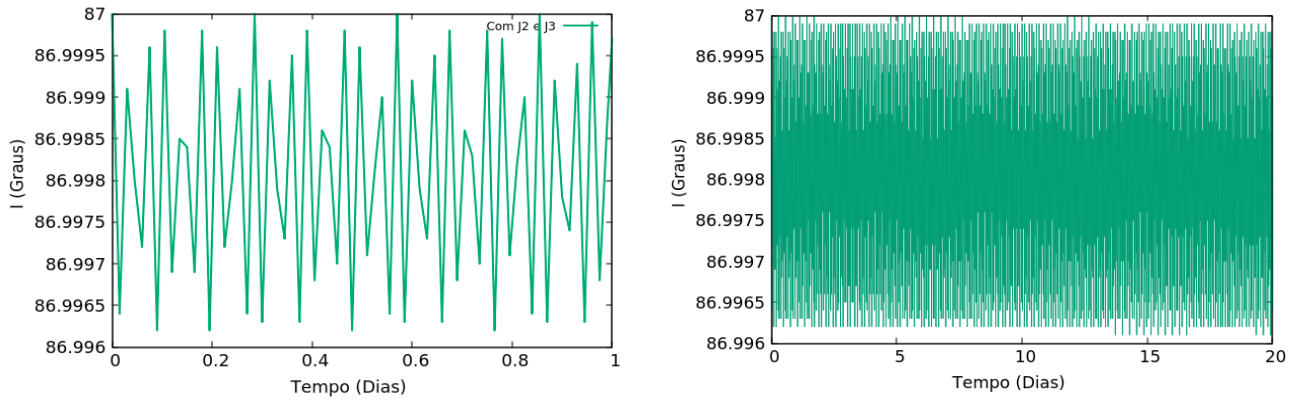


(a) (b)

Fonte: Produção da própria autora

Quando incluímos o coeficiente zonal J_3 nas integrações, observamos um salto na excentricidade. Esse salto acontece bem mais rápido do que no gráfico da Figura 7 (b). Isso nos permite dizer que para uma análise a curto período o coeficiente J_3 tem grande influência na excentridade das órbitas dos detritos. Perturbações de longo período são observadas na Figura 10 (b) (ROY, 2004).

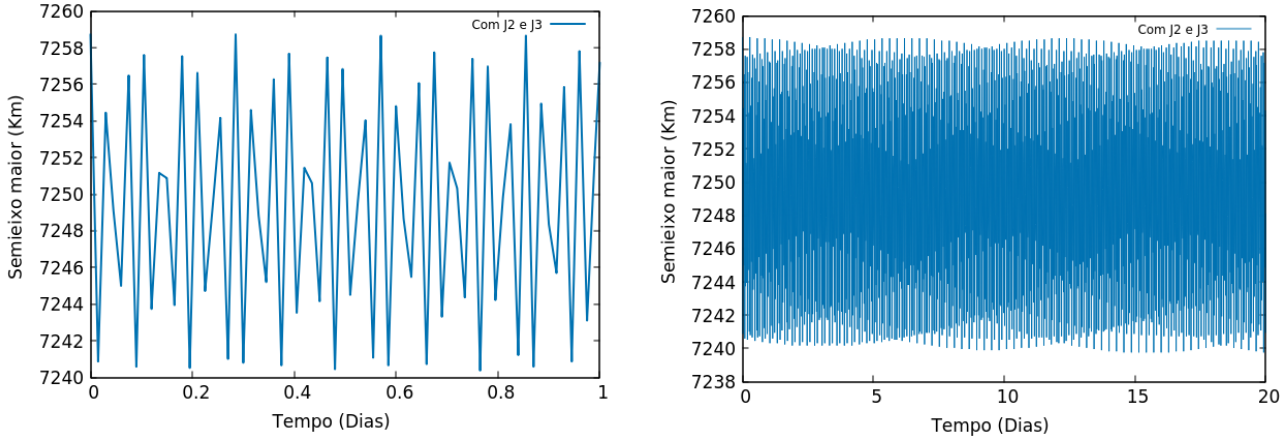
Figura 11 – Variação temporal da inclinação para a) 1 dia e b) 20 dias.



(a) (b)

Fonte: Produção da própria autora

Figura 12 – Variação temporal do semieixo maior para a) 1 dia e b) 20 dias.



(a) (b)

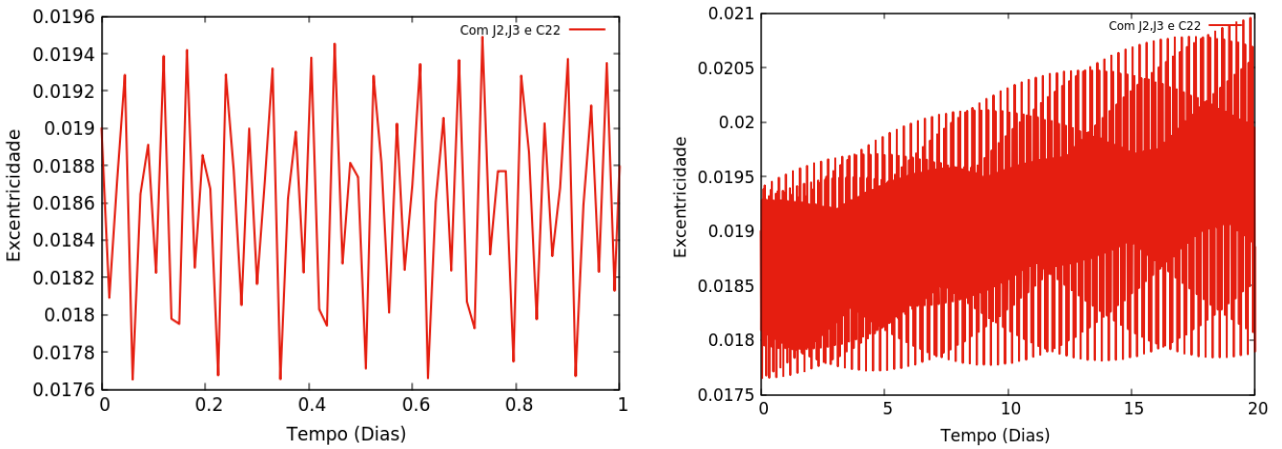
Fonte: Produção da própria autora

Através de uma análise das Figuras 11 e 12 é possível verificar que os coeficientes J_2 e J_3 tem o mesmo efeito na inclinação e no semieixo maior das partículas. Embora a variação periódica em I é função do $\cos I$, sendo $I = 87\,^\circ$ (ROY, 2004).

3.1.0.3 Simulações com adição de C_{22} ao sistema

O último caso a ser analisado considera os três coeficientes de achatamento J_2, J_3 e C_{22}. As condições iniciais usadas foram semieixo maior no valor de 7258,69 Km, excentricidade igual a 0,019, inclinação igual a 87 °, os ângulos $\omega = \Omega = M = 0\,^\circ$, $J_2 = 1.0826 \times 10^{-3}$, $J_3 = 2.53241 \times 10^{-6}$ e $C_{22} = 1,57462 \times 10^{-6}$.

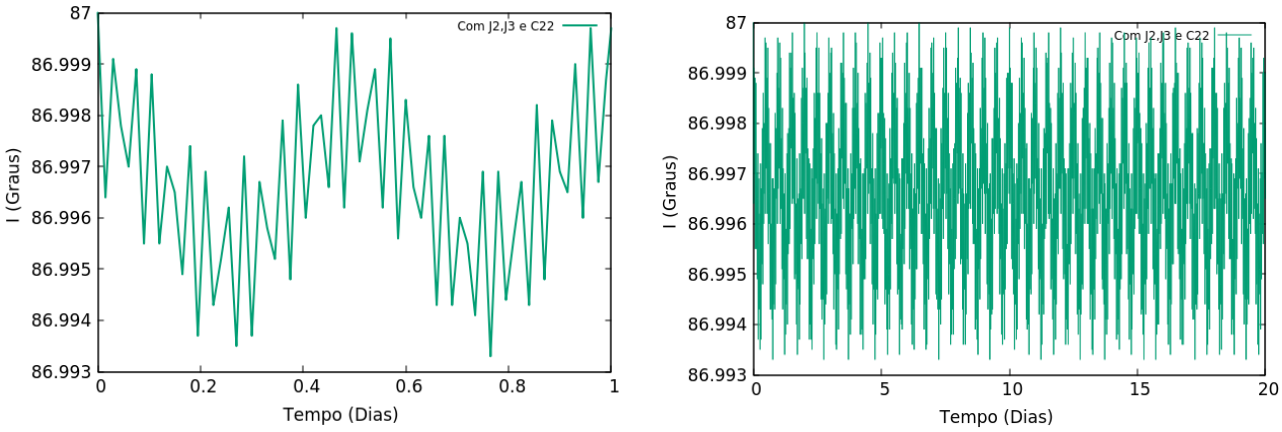
Figura 13 – Variação temporal da excentricidade para a) 1 dia e b) 20 dias.



(a) (b)

Fonte: Produção da própria autora

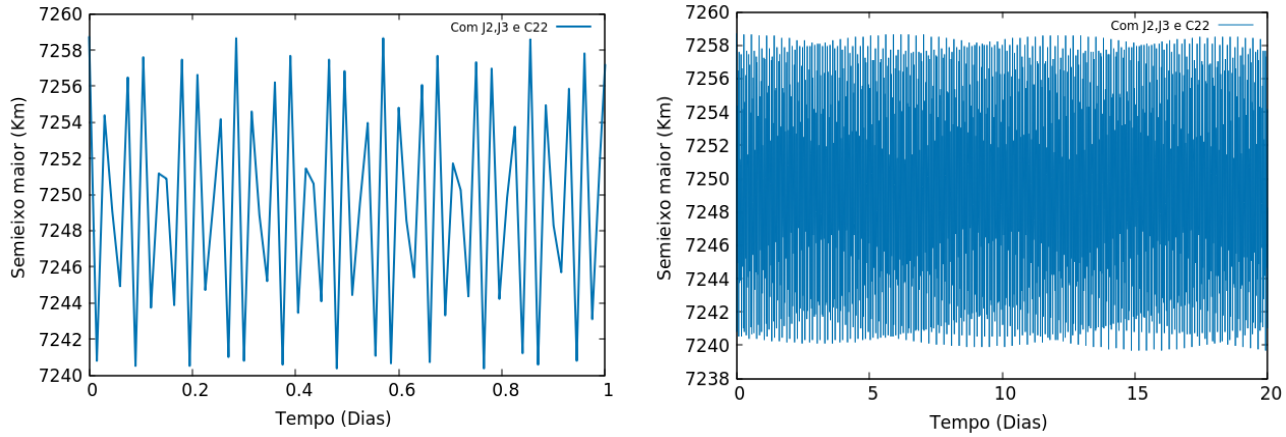
Figura 14 – Variação temporal da inclinação para a) 1 dia e b) 20 dias.



(a) (b)

Fonte: Produção da própria autora

Figura 15 – Variação temporal do semieixo maior para a) 1 dia e b) 20 dias.



(a) (b)

Fonte: Produção da própria autora

As Figuras 13, 14 e 15 apresentam os resultados das simulações onde o coeficiente setorial C_{22} é incluído, temos um sistema integrado considerando J_2, J_3 e C_{22}. Podemos concluir que o coeficiente C_{22} tem um efeito mínimo na variação dos elementos orbitais dos detritos. Uma análise mais detalhada desse efeito pode ser feita com uma integração para uma maior período de tempo.

Os resultados apresentados nesta seção mostram que os coeficientes J_2 e J_3 são as perturbações de maior efeito na trajetória das partículas, isso pode ser facilmente verificado nos gráficos mostrados nas Figuras 7, 8, 9 e 10. Esses resultados apresentam coerência com resultados de trabalhos como os de Celletti et al (2016), Carvalho (2011) e King-Hele (1958). Diante dos resultados mostrados nessa seção conclui-se que as simulações numéricas descreveram com precisão o comportamento dos objetos localizados na região ressonante em órbita baixa da Terra.

4 ANÁLISE DO MAPA DE FREQUÊNCIA (FMA)

Neste capítulo fornecemos uma descrição do método *Análise do Mapa de Frequência* (FMA), além de fornecer informações de como ter acesso a essa ferramenta e como obter os parâmetros de difusão e tempo de difusão através das frequências fundamentais obtidas usando tal método.

O mapa de frequência filtra as frequências fundamentais de um sistema obtidas através de uma integração numérica para um curto intervalo de tempo. Desenvolvido por Laskar (1990), este método tem se apresentado como uma ferramenta muito eficaz no estudo da dinâmica de sistemas planetários. Dentre estes trabalhos podemos destacar os de Laskar, Froeschlé e Celletti (1992), Nesvorný e Morbidelli (1998), Laskar e Robutel (2001) e Gutiérrez e Winter (2017).

Em seu trabalho de 1992, Laskar, Froeschlé e Celletti, através de um mapeamento padrão fazem uma comparação do algorítimo de análise de frequência com o método de cálculo do expoente de Lyapunov, método que determina a velocidade de fase com que dois pontos próximos no espaço de fase se aproximam ou se afastam. Os autores usam tal comparação para exibir o comportamento não regular de uma órbita, e concluiu-se que as vantagens desta ferramenta é que o tempo de integração numérica para qualquer sistema é muito curto. O método de análise de frequências pode ser aplicado para sistemas com até 15 graus de liberdade além de utilizar apenas uma órbita para o cálculo das frequências fundamentais. Nesvorný e Morbidelli (1998) utilizam a mesma ferramenta para estudar um sistema composto por três corpos e concluíram que as órbitas nas ressonâncias de movimento médio se espalhavam de forma lenta e caótica em excentricidade.

Estas ressonâncias de movimento médio também são analisadas no trabalho de Laskar e Robutel (2001), onde estudam a dinâmica de partículas localizadas no Sistema Solar as quais foram integradas numericamente sob o efeito gravitacional dos planetas. A evolução das partículas foram observadas em três diferentes regiões, a primeira região delimitada de Mercúrio até Júpiter foi chamada de sistema interno, a segunda região considerada foi a região de Júpiter até Netuno chamada de sistema externo e a terceira região do sistema analisada foi para objetos situados além de Netuno, mais precisamente, objetos no Cinturão de Kuiper. A difusão das trajetórias destes objetos e o comportamento caótico dos mesmos foram analisados considerando os elementos orbitais $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$ dos objetos sem massa e dos planetas do Sistema Solar. Através dessa análise foi possível verificar as regiões caóticas e as regiões estáveis.

Já em Gutiérrez e Winter (2017) o mapa de análise de frequência é utilizado para determinar a estabilidade de quatro pequenos satélites do planeta Saturno. Para isso um mapa de difusão das regiões onde se encontram estes satélites foi construído, e assim foi possível fazer uma caracterização do comportamento dinâmico dos mesmos. Usando a relação n/n_M e traçando um gráfico de n/n_M vs a eles determinam as regiões onde se encontram as ressonâncias de movimento médio a que estes satélites estão envolvidos, considerando n e n_M o movimento médio de uma partícula e o movimento médio de Saturno respectivamente. Uma das principais conclusões que os autores chegaram é que a longo prazo estes quatro pequenos satélites tem comportamento dinâmico estável.

4.1 DESCRIÇÃO ANALÍTICA

Quando se tem um sistema integrável, ou seja, um sistema que pode ter as suas equações do movimento solucionadas explicitamente, sob o domínio da frequência é possível determinar se seu comportamento é caótico ou regular obtendo primeiramente as frequências fundamentais do sistema através do algorítimo de análise de frequência. Analiticamente o mapa de frequências pode ser descrito da seguinte maneira:

Seja a Hamiltoniana de um sistema integrável com n graus de liberdade, dada por:

$$H(J,\theta) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J,\theta) \tag{4.1}$$

onde ε é um pequeno parâmetro adimensional que pode assumir valores variando de forma contínua de 0 (sem perturbação) para 1 (perturbação completa), e J representa as variáveis de ação e θ as variáveis de ângulo.

Após algumas transformações canônicas a Hamiltoniana é reduzida, passando a depender somente das variáveis de ação $H(J,\theta) = H_0(J_i)$ com $j = 1, 2, \ldots, n$. Desta forma, as equações do movimento são dadas por:

$$\dot{J}_i = 0; \qquad \dot{\theta_j} = \frac{\partial H_0(J_i)}{\partial(J_i)} = \nu_j(J) \tag{4.2}$$

onde $\nu_j(J)$ são as frequências fundamentais do movimento.

Assim, as ações são constantes de movimento e $\nu_j(J)$ são as frequências fundamentais do movi-

mento que fornece a quantidade $z_j(t) = z_{j0}e^{i\nu_j t}$ nas variáveis complexas $z_j = J_j e^{i\theta_j}$, onde $z_{j0} = z_j(0)$.

Neste trabalho a relação $z'_j = a(t)\exp(i\lambda(t))$ foi usada para encontrar as frequências fundamentais do movimento que foram calculadas através do algorítimo de transformada de Fourier modificado por frequência (FMFT). O programa, assim como os comandos para compilação e execução podem ser encontrados na página pessoal de um de seus autores, David Nesvorný, cujo endereço é https://www.boulder.swri.edu/ davidn/. Os termos $a(t)$ e $\lambda(t)$ representam a evolução temporal do semieixo maior e da longitude média respectivamente.

Em resumo, Robutel e Laskar (2001) afirmam que é possível encontrar uma aproximação quase periódica de um sistema através da seguinte relação:

$$z'(t) = \alpha_0 \exp(i\nu_0 t) + \sum_j^N \alpha_j \exp(i\nu_j t). \tag{4.3}$$

As partículas com movimento regular terão os valores de semieixo maior e movimento médio próximos dos valores da amplitude e da frequência respectivamente.

Para o obter as frequências em uma simulação numérica feita no algorítimo de análise de frequências, é fornecido para cada partícula do sistema estudado um arquivo de dados com três colunas, T, X e Y, onde os valores de X e Y são encontrados através das relações:

$$\begin{aligned} X &= a\cos\lambda \\ Y &= a\sin\lambda \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde a é o semieixo maior das partículas, λ a longitude média e T o tempo de integração.

Um exemplo de arquivo de entrada é mostrado na Figura 16:

Figura 16 – Exemplo de arquivo de entrada do programa de análise de frequência.

T	X	Y
0	0.0469531032814454	0.0120336408826954
1000	0.0479672216336422	0.0142998220620331
2000	0.0487397462953382	0.0167340949207889
3000	0.0492522880654264	0.0193024273623325
4000	0.0494914285302897	0.021969513024969
5000	0.0494486056416431	0.0246994785860254
6000	0.0491199070834509	0.0274565076090154
7000	0.0485057989065986	0.0302053718828407
8000	0.0476108167152237	0.0329118687610618
9000	0.0464432445690074	0.0355431700589467
10000	0.0450148029404938	0.0380680941374072
11000	0.0433403618653499	0.0404573175011684
12000	0.0414376892641141	0.0426835452679566
13000	0.0393272377737894	0.0447216610485628
14000	0.0370319668117889	0.0465488760657974
15000	0.0345771905023913	0.0481448948167462
16000	0.0319904369869743	0.0494921104561207
17000	0.029301300903951	0.0505758376691135
18000	0.0265412687567214	0.051384584520234
19000	0.0237434966665487	0.051910358082972
20000	0.0209425216826129	0.0521489920778318
21000	0.0181738913122764	0.0521004787749027
22000	0.015473701032374	0.051769282517413
23000	0.0128780359245372	0.0511646087931917
24000	0.010422319827991	0.0503006011260644
25000	0.00814058303879458	0.049196438368175
26000	0.00606466708623282	0.0478763073075576
27000	0.00422339196401793	0.0463692297893395
28000	0.00264171689698154	0.0447087295792795
29000	0.00133992985793968	0.0429323316513731
30000	0.000332903281531526	0.0410808950338291

Fonte: Nesvorný (2017)

Após as simulações numéricas é obtido um arquivo de saída com três colunas contendo os valores da frequência (ν), amplitude (A) e fase (ϕ) de cada partícula. Na Figura 17 tem-se um exemplo de arquivo de saída do programa.

Figura 17 – Exemplo de arquivo de saída do programa de análise de frequência.

ν	A	Φ
4.24881629723259	0.0441189999999735	30.6760031483306
28.2206942980347	0.0157500000193111	308.111888087293
3.08951479888228	0.00179999999954783	121.362001280497
52.1925731984448	0.00051600000000224	45.551001768378
27.061375629898	0.000182999824259119	218.721668303444
29.3799920134321	0.000177999659626492	217.420536626282
28.8679402611949	0.000106999156303198	32.6163550779154
27.5734601796556	9.49994479111183e-05	43.7305773955405
5.4070444100214	6.19999984043343e-05	116.983987555663
0.667122798922669	5.80000000130542e-05	74.1160012508621

Fonte: Nesvorný (2017)

4.1.1 O parâmetro de difusão

As frequências fundamentais do sistema são calculadas para dois períodos diferentes, a frequência calculada de 0 a T é denominada ν_1 e a frequência calculada de T a 2T é denominada ν_2. Se as frequências apresentarem uma variação muito pequena de um intervalo de tempo para outro o movimento pode ser considerado periódico, o que caracteriza um comportamento regular das órbitas. Para as frequências com uma grande variação de um intervalo para outro temos um movimento irregular dos corpos, descrevendo um comportamento irregular e para alguns casos até caótico. Essa irregularidade pode ser caracterizada pela difusão (D) das órbitas.

Segundo Gutiérrez e Winter (2017) o parâmetro *D* mensura a estabilidade das órbitas das partículas de um determinado sistema após um tempo [T] de integração relativamente curto. O valor da difusão é calculado através da relação dada por Robutel e Laskar (2001):

$$D = \frac{|\nu_1 - \nu_2|}{T}. \tag{4.5}$$

Considerando os valores obtidos para *D*, é possível encontrar o tempo de difusão t_{Diff} das órbitas estudadas, esse parâmetro permite calcular o tempo aproximado para que alguma variação no movimento médio das partículas seja notado. Tal parâmetro pode ser calculado como:

$$t_{Diff} = (DP)^{-1}. \tag{4.6}$$

onde P é o período da órbita.

4.1.1.1 O mapa de difusão

Após ser obtido o parâmetro *D* é possível construir o mapa de difusão. Esse mapa é construído em um plano tridimensional a versus e com o terceiro eixo sendo uma escala de cores com os valores da difusão. É usual adotar uma escala de cores logarítimica para os valores da difusão pois estamos trabalhando com números muito pequenos. Essa escala de cores irá caracterizar o comportamento das órbitas das partículas. Nesse trabalho a função de cada cor será adotada da seguinte maneira:

- Linhas com cores do preto para o vermelho: Serão usados para partículas com um valor de difusão muito baixo logD ≤ -12. Dessa forma, cada ponto vermelho irá representar partículas com órbitas quase periódicas.

- Linhas com cores do vermelho para o amarelo: Para partículas com um valor de -10 $\leq$ logD $\leq$ -6. Essas cores serão usadas para partículas com comportamento fracamente irregular.

- Pontos com cores do amarelo para o verde: Para objetos com altos valores de logD ≥ -4. Para partículas com esse valor de difusão dizemos que seu comportamento é fortemente irregular.

Um conjunto de 5000 partículas foi integrado para construção do mapa de difusão, as perturbações causadas pelos coeficientes J_2, J_3 e C_{22} foram consideradas. As condições iniciais dos elementos orbitais usadas para construção do mapa são mostradas na Tabela 3.

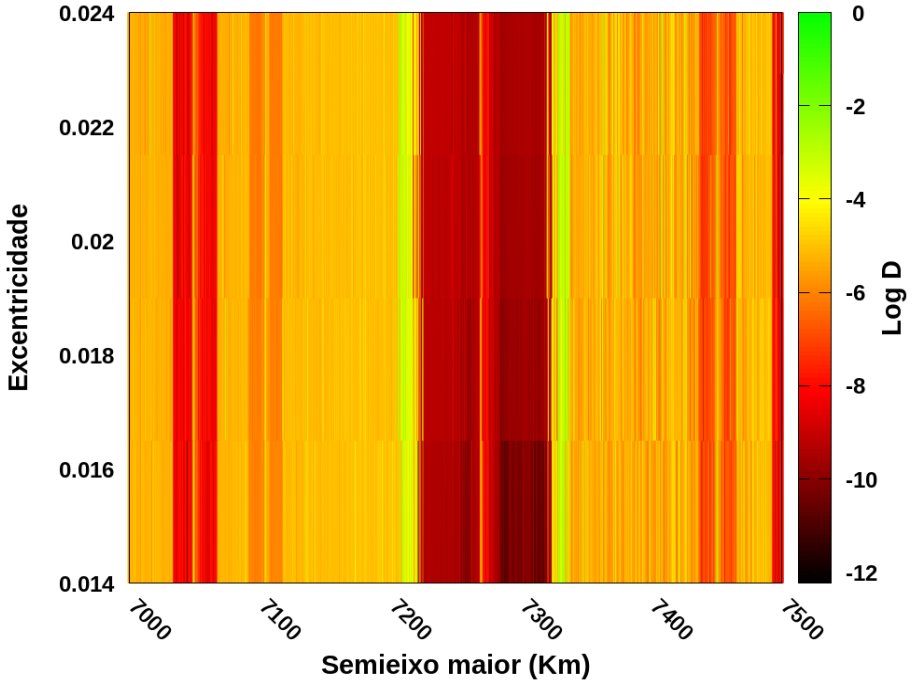
Tabela 3 – Condições iniciais para construção do mapa de difusão para 5000 partículas

Simbolo	**Valor**	**Unidade**	**Nome**
a_i	7000	Km	Semieixo maior inicial
a_f	7500	Km	Semieixo maior final
Δ_a	$1,5 \times 10^{-4}$	Km	Passo
e_i	0,014	Adimensional	Excentricidade inicial
e_f	0,024	Adimensional	Excentricidade final
Δ_e	$2,5 \times 10^{-3}$	Adimensional	Passo
I	87	Graus	Inclinação
ω	0	Graus	Argumento do pericentro
Ω	0	Graus	Argumento do nodo ascendente
M	0	Graus	Anomalia média

Fonte: Produção da própria autora.

Das 5000 partículas integradas, 132 colidiram com a Terra em 5 anos de integração. Para as partículas restantes construímos o mapa de difusão mostrado na Figura 18.

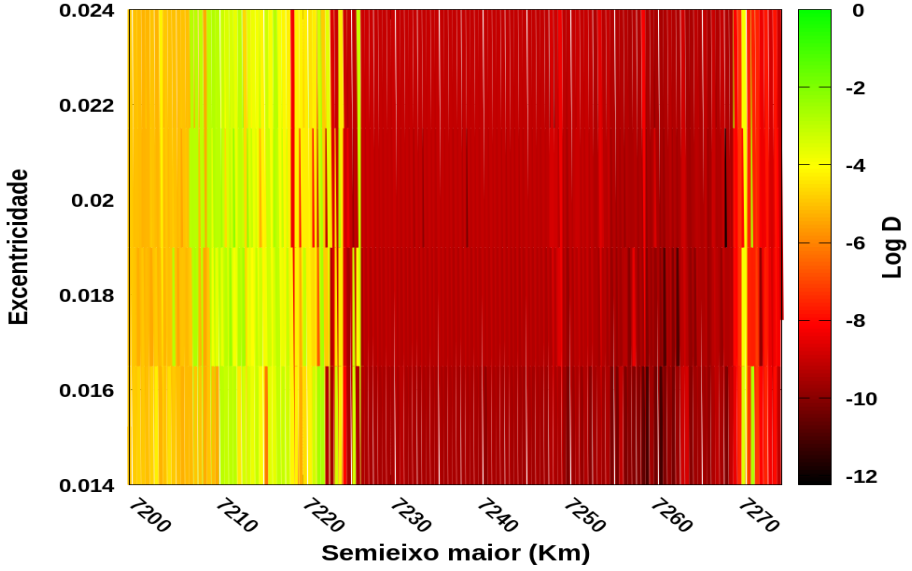
Figura 18 – Mapa de difusão para 5000 partículas



Fonte: Produção da própria autora

Analisando a Figura 18 verificamos que maior parte das partículas tem um comportamento fracamente irregular e que pequenos conjuntos de partículas possuem órbitas fortemente instáveis. Uma análise mais detalhada do mapa nos permite observar que objetos posicionados muito próximas à ressonância 14:1, localizada em $a = 7258,69$ Km, tem um comportamento regular e que independente dos valores da excentricidade a região de estabilidade se mantém entre 7225 a 7320 Km. Essa informação pode ser confirmada através de uma ampliação do gráfico da Figura 18:

Figura 19 – Ampliação do mapa de difusão para 5000 partículas



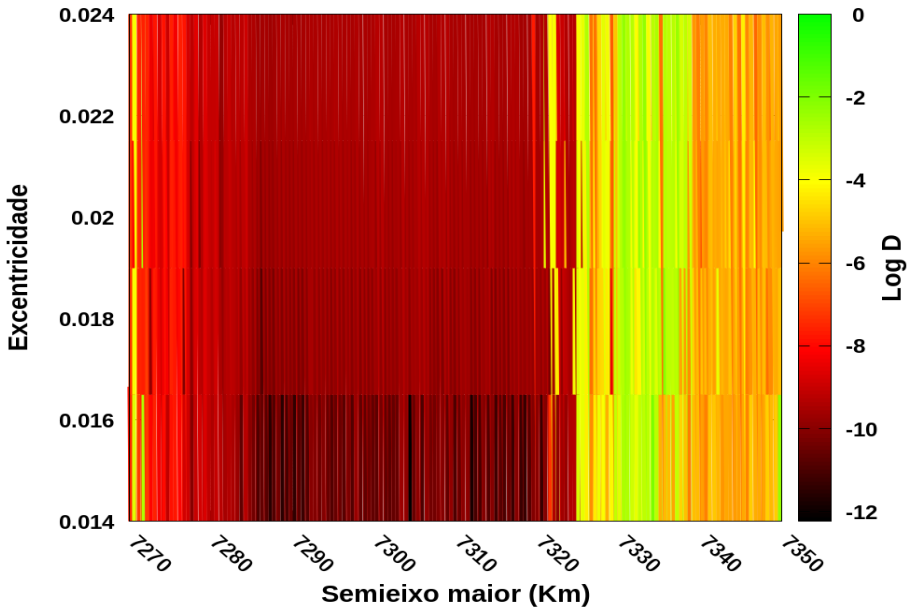
Fonte: Produção da própria autora

Uma ampliação do mapa da Figura 18 é apresentada na Figura 19, a região ampliada compreeende o semieixo maior de 7200 a 7270 Km, através dessa ampliação várias informações sobre o sistema podem ser obtidas. A primeira delas é a confirmação de que os objetos posicionados próximos e exatamente na ressonância possuem órbitas estáveis, estas partículas possuem um tempo de difusão (t_{Diff}) de aproximadamente $1,4 \times 10^6$ anos, considerando um período orbital de 1,8 horas. Nessa região existe a possibilidade de serem encontradas outras ressonâncias, essa hipótese é levantada pelo fato de existirem linhas pretas muito densas em vários pontos do gráfico.

Da Figura 19 ainda podemos concluir que um conjunto de partículas entre o semieixo maior de 7209 a 7220 Km possuem órbitas com comportamento altamente irregular, essas órbitas possuem um valor de difusão muito alto e consequentemente um tempo de difusão muito baixo, esse tempo é de aproximadamente 6 anos.

Outras regiões de estabilidade e instabilidade podem ser analisadas a partir da Figura 18. Uma segunda ampliação dessa Figura nos permite analisar com mais precisão essas regiões.

Figura 20 – Segunda ampliação do mapa de difusão para 5000 partículas



Fonte: Produção da própria autora

A Figura 20 apresenta uma segunda ampliação do gráfico da Figura 18. Analisamos a região compreendida entre o semieixo maior de 7270 a 7350 Km. O gráfico mostra a existência de uma região de maior estabilidade que a região mostrada na Figura 19. Essa informação pode ser confirmada pela maior quantidade de linhas pretas no gráfico e pelo cálculo do tempo de difusão que para essa região é de aproximadamente $1,5 \times 10^8$ anos. Nessa região também existe a possibilidade de serem

encontradas outras ressonâncias.

O segundo conjunto de partículas com órbitas instáveis também é mostrado na Figura 20. Esses objetos estão localizados entre o semeiexo maior no valor de aproximadamente 7328 a 7331 Km. O tempo de permanência deles nessa região é bem curto por volta de 0,2 anos.

Segundo Robutel e Laskar (2001) para partículas com órbitas regulares o valor da frequência fundamental deve ser próximo do valor do movimento médio das mesmas, assim como o valor da amplitude deve ser próximo do valor do semieixo maior inicial, lembrando que como as unidades de medidas desses parâmetros são diferentes, estamos considerando nesse caso apenas os números para efeito de comparação. Construímos duas tabelas,cada uma com dados de 4 partículas para que essa informação fosse verificada. A primeira tabela foi construída para partículas na região de estabilidade e os valores de frequência, movimento médio, semieixo maior inicial e amplitude são apresentados e comparados entre si.

Tabela 4 – Tabela para comparação de valores de parâmentros das partículas na região de estabilidade

Partícula	a_i **(UD)**	A **(°)**	n_{calc} **(rad/Anos)**	ν **(rad/Anos)**
2851	1.04104	1.03971	0.24015	0.20247
2881	1.04147	1.04014	0.24000	0.24573
2893	1.04162	1.04027	0.23995	0.25943
2856	1.04111	1.03978	0.24012	0.20952

Fonte: Produção da própria autora.

onde ν é a frequência fundamental calculada através do algorítimo de análise de frequências, n_{calc} é o movimento médio calculado, A é a amplitude obtida através do algorítimo de análise de frequências e a_i é o semieixo maior inicial das partículas e UD é uma unidade de distância.

A Tabela 4 nos permite confirmar as informaçãos encontradas em Robutel e Laskar (2001), que afirmam que na região de estabilidade os valores de ν e n_{calc} são próximos, assim como os valores de a_i e A.

Assim, se na região de estabilidade os valores de ν e n_{calc} e de a_i e A devem ser próximos, isso implica que na região de instabilidade tais valores devem ser diferentes para cada partícula. Essa informação pode ser verificada através da Tabela 5.

Tabela 5 – Tabela para comparação de valores de parâmentros das partículas na região de instabilidade

Partícula	a_i **(UD)**	A **(°)**	n_{calc} **(rad/Anos)**	ν **(rad/Anos)**
3268	1.04702	102.71649	0.23809	0.75422
3288	1.04730	25.16217	0.23800	0.69492
4143	1.05962	1.19153×10^{-5}	0.23386	0.04199
3317	1.04774	0.00542	0.23785	0.63450

Fonte: Produção da própria autora.

Analisando a Tabela 5 observamos que as partículas que se encontram na região de instabilidade apresentam valores de ν e n_{calc} e de a_i e A bem diferentes para cada partícula.

5 CONCLUSÃO

O objetivo do presente trabalho foi aplicar o mapa de análise de frequência no estudo da dinâmica de detritos espaciais na ressonância 14:1. Para que o mapa de frequência seja utilizado é preciso que o sistema seja integrado e assim obitido a evolução temporal dos elementos orbitais. Essas integrações foram feitas usando o pacote Mercury e alguns resultados puderam ser obtidos. As principais conclusões para esse primeiro conjunto de simulações foi que dos coeficientes considerados, os de maiores efeitos são os coeficientes zonais J_2 e J_3 e que o coeficiente setorial C_{22} tem uma contribuição miníma de perturbação nas órbitas dos detritos espaciais. Os resultados encontrados nessas integrações se adequam aos disponíveis na literatura.

Usando o Algorítimo de Transformada de Fourier Modificado por Frequência nós construímos um mapa de difusão para 5000 partículas e as conclusões que chegamos é que os objetos posicionados exatamente na ressonância 14:1 possuem órbitas estáveis e que esta estabilidade pode ser explicada pelo confinamento dos objetos pela ressonância 14:1 e por outras ressonâncias que ainda são desconhecidas, uma análise mais detalahada é necessária para tal afirmação. Outra conclusão de grande relevância é que a região de estabilidade independe dos valores de excentricidade, pois de $e = 0,014$ a $e = 0,024$ a região se mantém estável mostrando assim que as órbitas estáveis dependem apenas do semieixo maior das partículas.

A região de órbitas caóticas se encontram a aproximadamente 48 Km antes e 48 Km depois da ressonância. Podemos concluir ainda que a irregularidade nas órbitas desses objetos não é causada pela ressonância 14:1, pois segundo Celletti e Gales (2018) a largura dessa ressonância é de 1,6 Km, considerando uma análise feita de $0\,^\circ$ a $120\,^\circ$

5.1 TRABALHOS FUTUROS

Para uma análise mais realista do sistema pretende-se adicionar outras perturbações, estas perturbações seriam o arrasto atmosférico, a pressão de radiação solar e mais coeficientes derivados do potencial terrestre.

Aplicar o mapa de frequência para um número maior de objetos, para uma maior região, para outros sistemas com diferentes ressonâncias. Tentar encontrar as possíveis ressonâncias apontadas neste trabalho.

REFERÊNCIAS

AEROSPACE CORPORATION. **Space debris basics:** What is Orbital Debris?. Disponível em:<https://www.boulder.swri.edu/ davidn/>. Acesso em: 23 de Setembro de 2017.

BATISTA, A. **Estudo de modelos e condições iniciais da geração a priori de detritos espaciais e sua propagação orbital**.2011. 354 f. Dissertação de Mestrado (Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais / Mecânica Espacial e Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

CARVALHO, J. P. S.; SANTOS, J. CARDOSO DOS ; PRADO, A. F. B. A. ; DE MORAES, R. VILHENA . **Some characteristics of orbits for a spacecraft around Mercury**. COMPUTATIONAL E APPLIED MATHEMATICS, v. 1, p. 1-1, 2017.

CARVALHO, J. P. S. **Analysis of the long and short-period terms due the nonsphericity of the central body**: applications for Mercury. JOURNAL OF PHYSICS. CONFERENCE SERIES (PRINT), v. 911, p. 012011-6, 2017.

CARVALHO, J. P. S. **Pertubação orbital devida a um terceiro corpo com distribuição não uniforme de massa e em órbita elíptica**. 2011. Tese (Doutorado em Física). 248 f. Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita filho.

CELLETTI, A.; GALES, C. **Dynamics of resonances and equilibria of Low Earth Objects**. SIAM J. Appl. Dyn. Syst., vol. 17, 203-235 (2018).

CELLETTI, A. **Stability and Chaos in Celestial Mechanics**. Springer, Berlin, 2010.

CELLETTI, A.; GALES, C. **On the dynamics of space debris**: 1:1 and 2:1 resonances. J. Nonlinear Sci., 24 (2014).

CELLETTI, A.; GALES, C. **Dynamical investigation of minor resonances for space debris**. Celestial Mech. Dynam. Astronom., 123. 2015.

CELLETTI, A.; GALES, C.; PUCACCO, G.; ROSENGREN, A. **Analytical Development of the Lunisolar Disturbing Function and the Critical Inclination Secular Resonance**. arXiv:1511.03567v2, 2015.

CELLETTI, A.; EFTHYNIOPOULOS, C.; GACHET, F.; GALES, C.; PUCACCO, G. **Dynamical models and the onset of chaos in space debris**. arXiv:1612.08849v1, 2016.

CELLETTI, A.; GALES, C.; PUCACCO, G.; STELLA, D. **Lissajous and Halo Orbits in the Restricted Three-Body Problem**. J. Nonlinear Sci., 25. 2015.

CHAMBERS, J. E. **A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies**. Mon. Not. R. Astron. Soc. 304, 793-799. 1999.

D.G. KING-HELE. **The effect of the Earth's oblateness on the orbit of a near satellite**. Proc. R. Soc. Lond. A 247, 49–72 (1958).

GOMES, M. **Modelagem e simulação de detritos espaciais**. 2011. 215 f. Trabalho de graduação (Relatório de iniciação científica). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

GUTIÉRREZ, M. A.; WINTER, S. **Long-Term Evolution and Stability of Saturnian Small Satellites**: Aegaeon, Methone, Anthe and Pallene. MNRAS 000,1-14(2017).

JORNAL O TEMPO. **Misteriosa esfera de metal cai do céu e se torna atração no interior maranhense**. Disponível em:<http://www.otempo.com.br//capa/brasil/misteriosa-esfera-de-metal-cai-do-céu-e-se-torna-atração-no-interior maranhense-1.415480>. Acesso em: 18 de Dezembro de 2017.

HALL, L. **The history of space debris**. Space Traffic Management Conference. 2014.

KAULA, W. **Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite**. Astron. 67, 300–303 (1962).

KAULA, W. **Theory of satellite Geodesy**. Blaisdell, Waltham (1966).

KESLLER, D. **Collisional Cascading**: The Limits of Population Growth in Low-Earth Orbits. Adv. Space Rea. Vol. 11, No. 12, pp. (12)63-(12)66, 1991.

KUGA, H. K; CARRARA, V; RAO, K. R. **Satélites artificiais**: Movimento Orbital. sid.inpe.br/mtc-m19/2011/11.22.18.25-PUD.

LASKAR, J. **The Chaotic Motion of the Solar System**: A Numerical the Size of the Chaotic Zones. Icarus.; 88, 266-291. 1990.

LASKAR, J. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**. 56, 191, 1993.

LASKAR, J.; FROESCHLÉ, C.; CELLETTI, A. **The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies**. Application to the standard mapping. Physica D Nonlinear Phenomena, 56, 253, 1992.

MURRAY, C. D; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. Cambridge University Press. 1999.

NASA. **What Is Orbital Debris?**. 2010. Disponível em:<https://www.nasa.gov/audience/forstudents/5-8/features/nasa-knows/what-is-orbital-debris-58.html>. Acesso em: 15 de Julho de 2017.

NADOLSKI, L.; LASKAR, J. **Physical Review Special Topics Accelerators and Beams**. 6, 114801, 2003.

NESVORNÝ, D. **Frequency Modified Fourier Transform**. Disponível em:<https://www.boulder.swri.edu/ davidn/>. Acesso em: 14 de Julho. 2017.

NESVORNÝ, D.; MORBIDELLI, A. **Three-body mean motion resonances and the chaotic structure of the asteroid belt**. Astron. J. 116, 3029–3037. 1998.

PASKOWITZ, M, E.; SCHEERES D, J. **Design of Science Orbits About Planetary Satellites**: Application to Europa. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2006.

RAO, K. R. **Um estudo dos métodos de perturbação na determinação de órbitas de satélites artificiais de baixa altitude**. INPE —3781 —RPI/151. 1986.

ROBUTEL, P.; LASKAR, J. **Frequency Map and Global Dynamics in the Solar System**: Short Period Dynamics of Massless Particles. Icarus,152, 4–28. 2001.

ROSSI, A.; LEWIS, H.; WHITE, A.; ANSELMO, L.; PARDINI, C.; KRAG, H.; BASTIDA VIRGILI, B. **Analysis of the consequences of fragmentations in low and geostationary orbits**. COSPAR Scientific Assembly. 2015.

ROSSETTO, E. **Lixo espacial e seu monitoramento. Contribuição pela modelagem correta de imagens traço, com certificação via astrometria de satélites geoestacionários**. 2013, 177 f. Dissertação de mestrado (Pós-Graduação em Astronomia). Universidade Federal do Rio de Janeiro.

ROSSI, A. **Population models of space debris**. Proceedings IAU Colloquium No. 197, 2005.

ROY, A. E. **Orbital motion**. 4ed. Taylor e Francis. 2004.

SAMPAIO, J. C.; WNUK, E.; VILHENA DE MORAES, R.; FERNANDES, S. S. **The Orbital Motion in the LEO Region**: Objects in Deep Resonance. COSPAR Scientific Assembly. 2012a, 1-2.

SAMPAIO, J. C.; WNUK, E.; VILHENA DE MORAES, R.; FERNANDES, S. S. **Space Debris in Low Earth Orbits**: Orbital Dynamics and Resonance Effects. American Astronomical Society's Division for Planetary Sciences. (2012b) 1-33.

SAMPAIO, J. C.; WNUK, E.; VILHENA DE MORAES, R.; FERNANDES, S. S. **Resonant Orbital Dynamics in LEO Region**: Space Debris in Focus. Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering Article ID 929810, 12 pages. 2014.

SAMPAIO, J. C. **Orbital Motion of Artificial Satellites**: Resonant Effects. 2013. Tese (Doutorado

em Física). 151 f. Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita filho.

SANTOS, C. **Estudo da dinâmica de pequenos detritos espaciais e meteoroides**. 2007. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle). 267 f. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais.

SCHEERES, D. J. **The effect of C_{22} on orbit energy and angular momentum**. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 73, 339-348. 1999.

STUART, J.; HOWELL, K.; WILSON, R. **Application of multi-agent coordination methods to the design of space debris mitigation tours**. Advances in Space Research 57. 2016, 1680–1697.

The Myanmar Times. **Unidentified falling object in Hpakant**. Disponível em:<https://www.mmtimes.com/national-news/mandalay-upper-myanmar/23626-unidentified-falling-object-in-hpakant.html>. Acesso em: 12 Dezembro de 2017.

TRESACO, EVA ; CARVALHO, JEAN PAULO S. ; PRADO, ANTONIO F. B. A. ; ELIPE, ANTONIO ; MORAES, RODOLPHO VILHENA DE. **Averaged model to study long-term dynamics of a probe about Mercury**. CELESTIAL MECHANICS E DYNAMICAL ASTRONOMY, v. 130, p. 1, 2018.