

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Engenharia de Bauru

DANILO BARROS DE ARAÚJO SILVA

Análise de atenuação de vibração de estrutura
periódica feita de material compósito laminado

Bauru - SP

2021

Danilo Barros de Araújo Silva

Análise de atenuação de vibração de estrutura
periódica feita de material compósito laminado

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Bauru, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica na área de Projetos Mecânicos, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na Universidade Estadual Paulista.

Orientador: Prof. Dr. Paulo José Paupitz Gonçalves.

Bauru - SP

2021

S586a	Silva, Danilo Barros de Araujo Análise de atenuação de vibração de estrutura periódica feita de material compósito laminado / Danilo Barros de Araujo Silva. -- Bauru, 2021 83 p. : il., tabs., fotos Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia, Bauru Orientador: Paulo José Paupitz Gonçalves 1. Estrutura periódica. 2. material compósito. 3. atenuação de vibração. 4. acoplamento flexão-cisalhamento-torção. I. Título.
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Engenharia, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE DANILO BARROS DE ARAUJO SILVA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 03 dias do mês de março do ano de 2021, às 14:30 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de DANILO BARROS DE ARAUJO SILVA, intitulada **ANÁLISE DE ATENUAÇÃO DE VIBRAÇÃO DE ESTRUTURA PERIÓDICA FEITA DE MATERIAL COMPÓSITO LAMINADO**. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. EDSON ANTONIO CAPELLO SOUSA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP. Após a exposição pelo mestrando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: Aprovado _____. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

Prof. Dr. PAULO JOSÉ PAUPITZ GONÇALVES



Dedicatória

*Para minha família que amo muito,
minha mãe e meu pai, meus irmãos e minha esposa.
A todos os meus queridos amigos.*

Agradecimento

Primeiramente, gostaria de expressar meu sincero agradecimento a Deus, por toda ajuda dada em todos os momentos da minha vida.

Agradeço a meus pais por terem se dedicado na minha criação para que eu pudesse participar desse momento.

Agradeço a minha querida esposa pelo apoio, paciência e pelo incentivo para que eu pudesse me dedicar a finalização deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador, Paulo, que durante muitos momentos na faculdade demonstrou, através das nossas conversas, palavras de sabedoria e de incentivo e por não desistido de me recordar sobre a importância dessa etapa, que apesar de desafiadora, faz parte do nosso desenvolvimento profissional e pessoal. Grato pelas palavras.

Agradeço a todos que fizeram parte do grupo de estudo NDE (Júlio, Fernando, Daniel, Diego, Gabriela, Luiza, Sadao e tantos outros) pela amizade durante o tempo em que pude ter a honra de estudar no laboratório da faculdade.

Agradeço o professor Marcos, uma pessoa pela qual tenho muito respeito, que também foi um grande incentivador por meio de suas palavras, muitas vezes duras palavras, mas que puderam fazer com que eu buscasse tentar melhorar.

Agradeço aos meus amigos (bruxos ou os guri) pela paciência e entendimento de não poder, em alguns momentos, participar das confraternizações ou jantas (como preferem chamar), devido à necessidade de estudar, seja para o mestrado ou para o trabalho.

Por fim, gostaria de agradecer a CAPES por financiar o desenvolvimento nos anos iniciais dessa pesquisa (Process number: 1775949).

Vibration attenuation analysis of periodic structure made of laminated composite material

Danilo Silva

Keywords: Periodic structure, composite material, vibration attenuation, bending-shear-torsion coupling

Abstract - There has been a constant search for materials that present better mechanical characteristics, low-cost, and good behaviour to mechanical vibrations. Thus, composite materials and periodic structures have been widely studied. A composite material consists of the combination of two or more materials which together produces desirable mechanical properties, whereas the periodic structure consists of substructures (or unity cell) positioned periodically in a principal structure. These cells produce a variation of the stiffness and in the range of frequency, consequently, in the dynamic behaviour of the mechanical structure. The objective of this work is to present a study of the structural behaviour of a beam made of the composite laminated material, subdivided in small structures and assembled periodically. In this work it was analysed the frequency response of elements with different fiber orientations. The periodic structure was built coupling these elements. Through the results, it was possible to notice that the periodic structure presented band gap for different frequency range. The effects of periodicity were more expressive when beam metamaterial presents more periodic cells. With increase of the number of periodic structures, the band gaps' effect will be more expressive. Although, it is important to note that was possible to obtain band gaps only with the influence of the fiber orientation. In this context, this work presented the possibility of obtaining the vibration attenuation only using the benefits of join periodic structure and laminate composite material.

Análise de atenuação de vibração de estrutura periódica feita de material compósito laminado

Danilo Silva

Keywords: Estrutura periódica, material compósito, atenuação de vibração, acoplamento flexão-cisalhamento-torção

Resumo - Há uma busca constante por materiais que apresentam melhores características mecânicas, baixo custo e bom comportamento à vibração mecânica. Desta forma, materiais compósitos e estruturas periódicas tem sido amplamente estudadas. Um material compósito consiste da combinação de dois ou mais materiais, no qual, juntos fornecem propriedades mecânicas desejadas, enquanto que uma estrutura periódica consiste de subestruturas (ou células unitárias) posicionadas periodicamente em uma estrutura principal. Essas células produzem uma variação da rigidez e na faixa de frequência, consequentemente, no comportamento dinâmico da estrutura mecânica. O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo do comportamento estrutural de uma viga feita de material compósito laminado, subdividida em estruturas menores e montadas periodicamente. Neste trabalho, analisou-se a resposta em frequência para elementos com diferentes orientações da fibra. A estrutura periódica foi construída acoplando esses elementos. Através dos resultados, foi possível observar que a estrutura periódica apresentou bandas de parada para diferentes faixas de frequência. Os efeitos da periodicidade foram mais expressivos quando a viga de metamaterial apresentou mais células periódicas. Com o aumento do número de estruturas periódicas, o efeito das bandas de parada foram mais significantes. Contudo, é importante notar que foi possível obter bandas de parada apenas com a influência da orientação da fibra. Nesse contexto, este trabalho apresentou a possibilidade de obter atenuação de vibração apenas utilizando dos efeitos benéficos da união entre estrutura periódica e material compósito laminado.

Conteúdo

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xv
Lista de Símbolos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Revisão Bibliográfica	4
1.1.1 Estrutura Periódica e Materiais Compósitos	6
1.2 Proposta de Estudo - Estrutura Periódica	10
1.3 Justificativa	11
1.4 Objetivos	12
1.5 Estrutura da Dissertação	12
2 Fundamentação Teórica	13
2.1 Teoria do Deslocamento de Primeira Ordem - Materiais Compósitos . . .	13
2.2 Modelagem Matemática	19
2.2.1 Camada Unidirecional	21
2.3 Estruturas Periódicas	24
2.3.1 Método do elemento espectral	25
2.3.2 Matriz de transferência	27
2.3.3 Número de onda e Dispersão em sistemas periódicos	30

3	Metodologia e Modelagem Numérica	39
3.1	Estrutura com única camada	39
3.1.1	Relação de Dispersão	40
3.1.2	Exemplo Numérico	42
3.1.3	Resultados e Discussões	45
4	Conclusões e Sugestão para trabalhos futuros	55
4.1	Conclusões	55
4.2	Recomendações de trabalhos futuros	57
	Bibliografia	59

Lista de Figuras

1.1	Aplicação de compósito na indústria. (a) Aeroespacial, (b) automotiva, (c) ferroviária. Fonte: SC Fibras e Resinas compósitos, disponível em https://bityli.com/Qyn17 . (d) Aeronáutica. Fonte: aviação.org, disponível em https://bityli.com/HGfZW	2
1.2	(a) Falha estrutural na Ponte de Tacoma devido a problemas de vibração mecânica. Fonte: The Seattle Times, disponível em https://bityli.com/8FN0L . (b) Falha de ponte de Calcutá pode ter sido causada por problemas de vibração. Fonte: Scroll.i, disponível em https://bityli.com/nXSxm . (c) Exposição do corpo humano à vibração excessiva. Fonte: Jobsite , disponível em https://bityli.com/uMWY5 .	3
1.3	Estruturas periódicas com controle passivo: (a) periodicidade geométrica e (b) material organizado periodicamente. Estrutura de controle ativo: (c) piezoelétricos dispostos periodicamente e (d) material de memória de forma. Fonte: Baz (2019)	6
1.4	Estrutura periódica de material compósito laminado utilizado na análise numérica. b_{beam} : largura da viga, h_{beam} : espessura da viga, L_{beam} : comprimento da viga e PS: estrutura periódica. Fonte: Próprio Autor . .	9
2.1	Coordenadas global e do material de uma lâmina. Sendo h , b , e L são a espessura, largura e comprimento, respectivamente. Fonte: Próprio Autor	14

2.2	Coordenadas global e do material de uma camada simples. Sendo θ indica o ângulo da fibra usada para transformar a relação entre tensão e deformação de um sistema de coordenada para outro. Fonte: Próprio Autor	16
2.3	Diagrama de corpo livre para elemento de viga de compósito laminado. Fonte: Próprio autor	19
2.4	Geometria de uma estrutura com N camadas de lâminas. Fonte: Próprio Autor	21
2.5	(a)Fibra de carbono unidirecional. Fonte: Compósitos Avançados Barra-cuda (b) Camada de Fibra unidirecional utilizada como referência para a modelagem numérica. Fonte: Próprio Autor	22
2.6	Relação entre orientação da fibra e rigidez estrutural normalizada. (a) Rigidez axial (EA) (b) rigidez a flexão (EI) (c) rigidez a torção (GJ) (d) rigidez ao cisalhamento (κGA) (e) rigidez ao acoplamento de flexão-torção (KT). Fonte: Próprio Autor	23
2.7	Tipos de estruturas periódicas. (a) Estrutura com apoios equidistantes. Fonte: Mead (1969); (b) e (c) arranjo de furos e "dentes", respectivamente. Fonte: Oliner e Rotman (1959).	24
2.8	Estrutura periódica com n células. b_{beam} = largura, h_{beam} = espessura/altura, L_{beam} = comprimento e PS = Estrutura periódica. Fonte: Próprio Autor.	27
2.9	Estrutura periódica mono-acoplada com n células unitárias. S = sistema que representa a célula unitária da estrutura periódica. Fonte: Próprio Autor.	27
2.10	Esquema geral de uma estrutura mono-acoplada com a utilização da matriz de transferência	29
2.11	(a)Solução errada da Equação 2.50 utilizando a equação proposta por Lee (2009) e (b) Solução correta da Equação 2.50 desenvolvida no trabalho de Lee (2009) apresentada neste trabalho.	35

2.12	Número de onda para diferentes ângulos de fibra $[0^\circ, 20^\circ \text{ e } 45^\circ]$ e baixa frequência. Fonte: Próprio Autor	36
2.13	Dispersão do número de onda para fibra orientada em diferentes direções $[0^\circ \text{ a } 90^\circ]$ e frequências. Fonte: Próprio Autor	37
3.1	Viga de compósito epóxi-fibra de vidro com condição livre-livre. b_{beam} = largura, h_{beam} = espessura/altura, L_{beam} = comprimento e PS = Estrutura periódica. Fonte: Próprio Autor	40
3.2	Célula unitária com duas subestruturas composta de fibras com orientações diferentes. Fonte: Próprio Autor.	40
3.3	Relação de dispersão para diferentes combinações de ângulo da fibra para a segunda célula unitária. Vista superior. Fonte: Próprio Autor.	41
3.4	Estrutura geométrica com periodicidade. b_{beam} = largura, h_{beam} = espessura/altura, L_{beam} = comprimento e PS = Estrutura periódica. Fonte: Próprio Autor.	42
3.5	Célula unitária composta de duas subestruturas proposta neste trabalho. Fonte: Próprio Autor.	43
3.6	Constante de propagação da viga de metamaterial proposta com fibras combinadas e orientadas em 0° and 45° . A região cinza indica a presença dos <i>bandgaps</i> . Fonte: Próprio Autor.	44
3.7	Impulso de força aplicado no primeiro elemento da estrutura periódica. A resposta em frequência foi avaliada no último elemento. Fonte: Elaborado pelo autor.	45
3.8	Função de resposta em frequência dos efeitos de acoplamento flexão-cisalhamento-torção com carga axial $P = 0\text{N}$. A resposta ao deslocamento ao cisalhamento de uma viga livre-livre excitada através de uma força de impulso W_1 . (a) apresenta resposta em baixa frequência. (b) resposta em alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.	46

3.9	Resposta em frequência dos efeitos de acoplamento de flexão-cisalhamento-torção. (a) baixa frequência. (b) Alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.	47
3.10	Função de resposta em frequência dos efeitos de acoplamento flexão-cisalhamento-torção com carga axial $P = 0N$. A resposta ao deslocamento ao cisalhamento de uma viga livre-livre excitada através de uma força de impulso W_1 . (a) apresenta resposta em baixa frequência. (b) resposta em alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.	48
3.11	Função de resposta em frequência dos efeitos de acoplamento flexão-cisalhamento-torção com carga axial $P = 0N$. A resposta ao deslocamento ao cisalhamento de uma viga livre-livre excitada através de uma força de impulso W_1 . (a) apresenta resposta em baixa frequência. (b) resposta em alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.	49
3.12	Função de resposta em frequência dos efeitos de acoplamento flexão-cisalhamento-torção com carga axial $P = 0N$. A resposta ao deslocamento ao cisalhamento de uma viga livre-livre excitada através de uma força de impulso W_1 . (a) apresenta resposta em baixa frequência. (b) resposta em alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.	50
3.13	Função de resposta em frequência dos efeitos de acoplamento flexão-cisalhamento-torção com carga axial $P = 0N$. A resposta ao deslocamento ao cisalhamento de uma viga livre-livre excitada através de uma força de impulso W_1 . (a) apresenta resposta em baixa frequência. (b) resposta em alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.	51
3.14	Resposta em frequência da viga com mesmo comprimento e número de estruturas periódicas sob ação de carga de cisalhamento. Fonte: Elaborado pelo autor.	52
3.15	Resposta em frequência para uma viga sob ação de carga de flexão. Fonte: Elaborado pelo autor.	53

3.16 Resposta em frequência para uma viga sob ação de carga de torção. Fonte:

Elaborado pelo autor. 54

Lista de Tabelas

3.1	Propriedades mecânicas do material compósito epóxi-fibra de vidro. . . .	42
3.2	Orientação de camada espessa única.	43

Nomenclatura

Símbolo	Descrição
Matrizes e Vetores	
A	matriz de rigidez axial $[N/m]$
B	matriz de rigidez ao acoplamento flexão-axial $[N/m]$
C	matriz de rigidez elástica, matriz constitutiva $[Pa]$
D	matriz de rigidez a flexão $[N/m]$
$\tilde{D}$	matriz de rigidez a flexão $[N/m]$
f	vetor de carga externa $[N]$
Q	matriz de rigidez reduzida no plano de tensão $[Pa]$
$\bar{Q}$	matriz de rigidez reduzida de tensão transformada $[Pa]$
S	matriz de conformidade do material $[Pa]$
S_e	matriz de elemento espectral e matriz de rigidez dinâmica $[N/m]$
T	matriz de transferência
T_a	matriz de transformação de transferência
x	vetor de deslocamento nodal
ϵ	vetor de deformação $[m/m]$
σ	vetor de tensão $[Pa]$
Letras latinas	
a	coeficiente da equação do número de onda
A	área $[m^2]$

b_{beam}	largura da viga [m]
c	relacionado ao cosseno
c_i	amortecimento viscoso [Ns/m]
c_{ph}	velocidade de fase
E	Módulo de Elasticidade ou módulo de Young do material [Pa]
E_k	Energia cinética [J]
EI	Rigidez a flexão [Nm^2]
G	Módulo de cisalhamento [N]
GJ	Rigidez torcional [Nm^2]
h_{beam}	espessura da viga [m]
I	Momento de inércia de área [m^4]
j	número imaginário ($\sqrt{-1}$)
J	Momento polar de área [m^4]
k	número de onda [$1/m$]
k_l	número de lâminas do compósito laminado
K_T	rigidez de acoplamento flexo-torção [N/m]
L	comprimento da viga [m]
L_{beam}	comprimento da viga [m]
M	momento fletor [Nm]
N	número de células
P	força de tração axial [N]
Q	força de cisalhamento [Nm]
r_g	relação entre momento polar de área e área da seção transversal [m^2]
s	relacionado ao seno
S	célula do sistema de estrutura periódica
t	tempo [s]

T	momento torçor $[Nm]$
U	Energia potencial elástica $[J]$
w	deslocamento transversal
W	deslocamento transversal na forma de análise espectral
x	coordenada espacial do eixo x
y	coordenada espacial do eixo y
y_{CA}	distância do eixo elástico e o centro da área da seção transversal $[m]$
y_{CG}	distância entre o eixo elástico e o centro de massa $[m]$
z	coordenada espacial do eixo z
z_l	espessura do laminado $[m]$
Letras Gregas	
α	coeficiente do número de onda
β	coeficiente do número de onda
δ	variação
θ	ângulo de orientação da fibra ($^\circ$)
κ	fator de correção de cisalhamento
κGA	Rigidez ao cisalhamento $[Nm^2]$
λ	autovalor da matriz de transmissibilidade
λ_l	comprimento de onda
ν	coeficiente de Poisson
ρ	densidade do material $[kg/m^3]$
ϕ	deslocamento torcional
Φ	deslocamento torcional na forma de análise espectral
ω	frequência angular $[rad/s]$
ω_n	frequência natural $[Hz]$
Θ	deslocamento devido a flexão na forma de análise espectral

Sobrescrito

T sobrescrito relacionado a transposta de uma matriz

Subscrito

i subscrito relacionado linha da matriz

j subscrito relacionado a coluna da matriz

m subscrito relacionado ao sistema de coordenada do material

p subscrito relacionado ao sistema de coordenadas do problema

Abreviações

cell célula

DOF grau de liberdade

eq subscrito relacionado a equivalente

FRF Função resposta em frequência

PS estrutura periódica

SEM Método de elemento espectral

Notações Especiais

[] matriz

{ } vetor

Capítulo 1

Introdução

A sociedade tem vivido um avanço tecnológico significativo, especialmente pelo surgimento de diferentes materiais, novos equipamentos, teorias, entre outras coisas. Todo avanço foi possível através da constante busca por conhecimento para gerar benefícios para a sociedade. Novas tecnologias requerem produtos com melhor qualidade, conforto, e baixo custo. Além disso, novos tipos de equipamentos podem ser complexos, especialmente se envolve novos materiais e maior graus de precisão em seus processos de fabricação.

Em geral, devido à alta competitividade do mercado, desenvolver novos produtos não necessariamente implica em garantia de aceitação dos clientes. O produto deve também ser ergonômico, confortável e seguro. Como consequência desse desenvolvimento industrial, o uso de materiais compósitos tem crescido significativamente nas indústrias, por exemplo, como na Figura 1.1, está presente em muitos componentes de aeronaves, helicópteros, satélites, veículos espaciais, veículos automotivos, entre outras aplicações da indústria mecânica, aeronáutica e civil (Park e Lee, 2015). Isso se deve a elevada resistência e menor peso em relação aos materiais convencionais, como o aço. Eles oferecem vantagens, como baixo peso da estrutura e elevada rigidez, além de elevada resistência estática e à fadiga, resistência à corrosão, erosão e química (Lu et al., 1993; Gay et al. 2003).



(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1.1: Aplicação de compósito na indústria. (a) Aeroespacial, (b) automotiva, (c) ferroviária. Fonte: SC Fibras e Resinas compósitos, disponível em <<https://bityli.com/Qyn17>>. (d) Aeronáutica. Fonte: aviação.org, disponível em <<https://bityli.com/HGfZW>>.

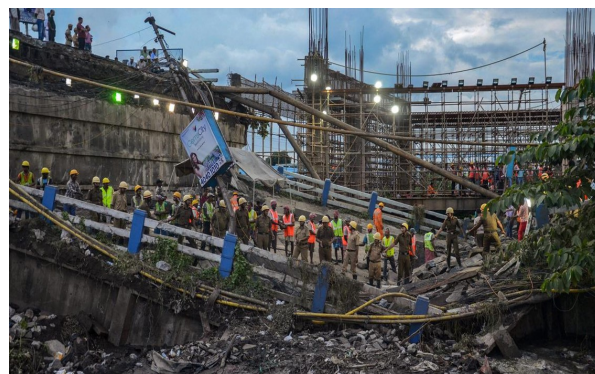
Os compósitos são geralmente usados devido a possibilidade de obter propriedades desejáveis que não podem ser facilmente obtidas por seus materiais constituintes empregados separadamente (Gibson, 2011). Às vezes, as propriedades de um compósito podem ser notavelmente diferentes das propriedades dos materiais constituintes (Milton, 2002). As grandes possibilidades fornecidas através de materiais compósitos anisotrópicos avançados podem ser usadas para alterar ou mudar favoravelmente as características de resposta da estrutura (Jun e Xianding, 2003).

Em aplicações onde a estrutura de material compósito sofre ação de carregamentos dinâmicos, é necessário entender e avaliar o comportamento dinâmico a fim de verificar o efeito causado pela vibração (ruído, por exemplo), uma vez que, as vibrações são indesejáveis para as estruturas, devido à necessidade de estabilidade estrutural, controle de posição, durabilidade (especialmente durabilidade contra fadiga), desempenho e redução de ruído. A Figura 1.2a, mostra um exemplo clássico de uma falha estrutural na Ponte de Tacoma, gerado por problemas relacionados à vibração, o mesmo problema é

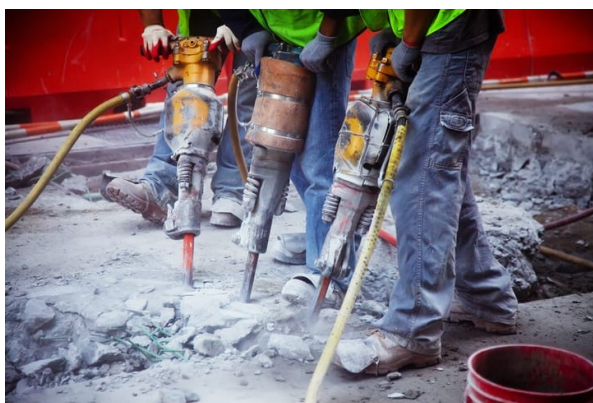
verificado na Figura 1.2b. Além disso, a Figura 1.2c está relacionada à exposição do corpo humano a fontes de vibração excessiva. Porém, há também efeitos benéficos que possibilitam utilizar equipamentos como peneiras, máquinas de lava, entre outros, que podem auxiliar no desenvolvimento do trabalho.



(a)



(b)



(c)

Figura 1.2: (a) Falha estrutural na Ponte de Tacoma devido a problemas de vibração mecânica. Fonte: The Seattle Times, disponível em <<https://bityli.com/8FN0L>>. (b) Falha de ponte de Calcutá pode ter sido causada por problemas de vibração. Fonte: Scroll.i, disponível em <<https://bityli.com/nXSxm>>. (c) Exposição do corpo humano à vibração excessiva. Fonte: Jobsite, disponível em <<https://bityli.com/uMWY5>>

A redução da vibração pode ser alcançada aumentando a capacidade de amortecimento (Chung, 2003). O amortecimento é um parâmetro importante relacionado ao estudo do comportamento dinâmico de compósitos reforçados com fibras (Chandra et al., 1999). Geralmente, em estruturas de compósitos com fibras contínuas, a orientação

da fibra pode ser utilizada para aumentar o amortecimento (Chung, 2003).

O comportamento vibratório de uma estrutura pode ser conhecido a partir dos resultados da propagação de onda elástica (Ren et al., 2020). O mecanismo de amortecimento em materiais compósitos são diferentes daqueles em metais convencionais ou ligas. Em materiais compósitos, as fontes de dissipação de energia podem ser devido a natureza viscoelástica do material da matriz e/ou do material da fibra, amortecimento devido a interfase, que é a região adjacente a superfície da fibra por estar associado a propriedades mecânicas diferentes entre fibra e matriz, amortecimento devido ao dano gerado no escorregamento entre as regiões de diferentes materiais, por causa da energia de dissipação na área de trincas ou quebra da fibra, amortecimento viscoplástico e termoelástico (Chandra et al., 1999). Nesse sentido, a fim de obter as características vibro-acústicas de uma estrutura feita de material compósito laminado, será apresentado uma forma de atenuação da vibração, sem a adição de material viscoelástico para aumento de amortecimento do sistema, apenas utilizando reprojeto da estrutura de modo a utilizar o efeito da rigidez para reduzir a vibração mecânica.

Esse capítulo tem como objetivo apresentar uma breve descrição da ideia geral deste trabalho, bem como a diferentes estudos baseados na atenuação de vibração estrutural usando estrutura periódica. Além do mais, apresentará os objetivos e a organização dessa dissertação.

1.1 Revisão Bibliográfica

O tema vibrações mecânicas tem sido um tópico essencial na engenharia. Na engenharia mecânica e aeroespacial, problemas de vibração de equipamentos de engenharia, podem gerar cargas extremas ou deformações de componentes estruturais, levando a falhas catastróficas que diretamente podem afetar a segurança do ser humano. Além disso, em determinadas máquinas-ferramentas, podem diminuir a qualidade e funcionalidade de produtos e reduzir o conforto (Reithmeier e Leitmann, 2003). Em projetos de engenharia

civil, as estruturas devem ser analisadas e projetadas, além dos carregamentos estático, também, através da consideração de excitação dinâmica, tais como vento, terremotos ou ondas, uma vez que, devido a vibração gerada podem ocasionar dano ou até mesmo o colapso de estruturas (Xu et al., 2016), como por exemplo, pontes, prédios, estruturas metálicas, entre outros, no qual, as falhas são normalmente causadas através da variação de baixa frequência no comportamento global do sistema (Lakshmanan e Pines, 1997). Porém não fica restrito apenas a engenharia.

Muitas pesquisas na área da saúde tem sido desenvolvida para estudar os efeitos causados pela vibração, através do uso de equipamentos/ferramentas, sobre o corpo humano. Geralmente, esses estudos estão associados a ergonomia, no qual, segundo o *Journal of Ergonomics Research*, é a ciência que estuda e ajuda a compreender a interação humana com os produtos, equipamentos, ambiente e sistemas. De acordo com Vihlborg et al. (2017), o trabalho com ferramentas vibratórias é bastante comum na indústria e, conseqüentemente, a exposição de parte do corpo está associada a um risco de lesão, tais como distúrbios vasculares, mau funcionamento dos nervos e efeitos no sistema muscular. O autor investigou a prevalência dos sintomas da vibração na mão e braço de funcionários de uma empresa de mecânica na Suécia e concluiu que mesmo em situações de baixa exposição foi observado os sintomas acima. Desta forma, é necessário promover estudos a fim de reduzi-la.

Vibração é o estudo do movimento oscilatório de um sistema dinâmico que consiste em uma combinação de matéria que possui massa e, cujas partes, são capazes de ter movimento relativo. Sendo assim, todos os corpos que possuem massa e elasticidade são capazes de vibrar (Tse et al., 1978). Então, uma estrutura sobre efeito de carregamento dinâmico está sujeita à ação de vibração mecânica. Nesse sentido, pesquisadores e engenheiros têm estudado diferentes materiais, estruturas geométricas e formas de atenuar a vibração mecânica. Uma possibilidade de atenuar a vibração é empregando elementos de controle ativo montados em locais apropriados em uma estrutura contínua (por exemplo, vigas, placas, entre outras), a fim de auxiliar na dissipação da energia cinética

e potencial (Reithmeier e Leitmann, 2003). Segundo os autores, é possível obter uma melhora significativa na redução da vibração por meio de controle ativo. Outra maneira é a utilização de técnicas passivas como a configuração de parâmetros, tais como massa, rigidez e amortecimento ou o emprego de controles semiativos, baseado na alteração das propriedades de um material como forma de atenuar a vibração de uma estrutura (Leitmann, 1994).

1.1.1 Estrutura Periódica e Materiais Compósitos

Com o advento de novos materiais e novas técnicas para obtenção de características desejadas de um material, o estudo de estruturas periódicas como uma maneira de redução de vibração estrutural tem crescido consideravelmente no campo de vibro-acústica. Esse tipo de estrutura tem sido amplamente investigada como um método diferente para obter características mecânicas desejáveis e, com isso, melhorar o comportamento estrutural dinâmico de um componente, podendo funcionar como uma forma de controle, seja ele passivo (alteração de propriedades mecânicas ou geométricas, por exemplo) ou ativo (adição de estruturas com piezoelétrico ou material com memória de forma, por exemplo).

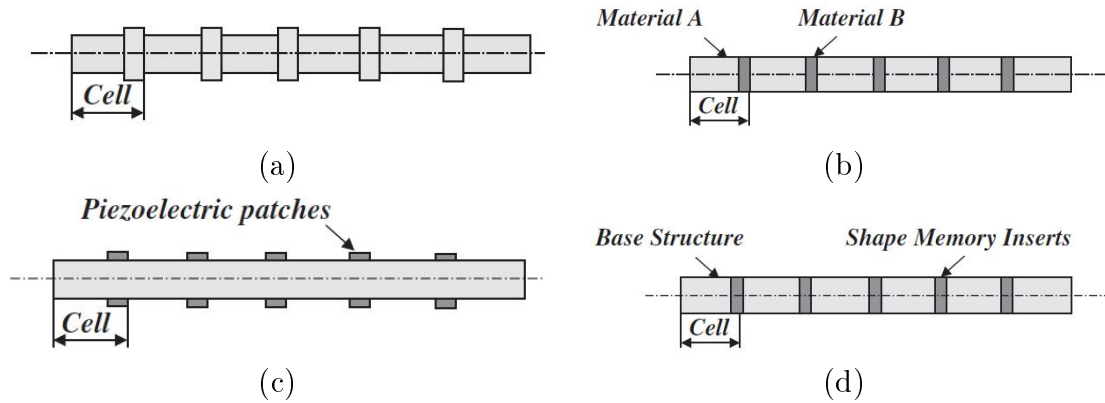


Figura 1.3: Estruturas periódicas com controle passivo: (a) periodicidade geométrica e (b) material organizado periodicamente. Estrutura de controle ativo: (c) piezoelétricos dispostos periodicamente e (d) material de memória de forma. Fonte: Baz (2019)

Uma estrutura periódica consiste de subestruturas idênticas ou elementos, também

chamados de células unitárias (Fig. 1.3). Essas células unitárias são partes repetidas usadas para descrever a subestrutura (Jensen, 2003). A estrutura periódica age como um filtro de onda, sejam elas eletromagnéticas, acústicas, de flexão, ou outra qualquer (Roy e Plunkett, 1986). Desta maneira, podendo ser usada em diversas áreas de engenharia aeroespacial, mecânica e civil.

Ruzzene e Baz (2000), estudaram a inserção de liga com memória de forma colocadas periodicamente ao longo de uma barra de modo a controlar a propagação de onda longitudinal em hastes. A liga é ativada com a temperatura, possibilitando criar uma fonte de incompatibilidade de impedância com características ajustáveis, ou seja, a variação da temperatura promove a alteração do módulo de Young ou de Elasticidade e, conseqüentemente, altera a rigidez da estrutura atuando como filtro no controle da propagação de onda. Através do estudo, foi possível obter faixas de frequência onde não há propagação de vibração.

Segundo Rao e Narayanan (2007), a estrutura periódica exibe características dinâmicas únicas fazendo com que tenha o comportamento de um filtro. As ondas podem se propagar ao longo da estrutura apenas dentro das faixas de frequência específicas conhecidas como "banda de passagem", sendo bloqueadas nas faixas de frequências chamadas de "bandas de parada". Os autores estudaram a utilização de atuadores piezoelétrico e sensores distribuídos periodicamente em uma viga como fonte de controle ativo a fim de atenuar a propagação de vibração na estrutura.

Huang et al. (2017), investigaram uma estrutura periódica em camadas com dois diferentes materiais e propuseram a construção de uma barreira de onda periódica, a fim de criar zonas de atenuação para bloquear a propagação da onda. No trabalho, avaliaram a propagação da vibração entre as camadas periódicas da estrutura e sobre o efeito de um carregamento em ferrovia, concluindo que houve uma redução significativa da vibração nas faixas em determinadas faixas de frequência.

Raghavan e Srikantha (2013), avaliaram as bandas de parada geradas pela interação de espalhamento ressonante entre a propagação de onda e ressonadores organizados

periodicamente. Puderam investigar a influência de massas dispostas periodicamente e comparar com a resposta dinâmica gerada quando há ressonadores (rigidez) organizados periodicamente. Foi avaliado o efeito causado sobre uma frequência alvo, concluindo que para uma frequência alvo fixa (ressonância local) da banda de parada, a largura da banda pode ser aumentada, aumentando-se proporcionalmente a massa (e a rigidez) do ressonador. Além disso, a presença apenas de ressonador local, ou seja, adição de rigidez local, causa estreitamento da largura das bandas de alta frequência.

Sheng et al. (2018) estudaram, analiticamente e experimentalmente, as características de vibração de uma placa sanduíche com núcleos periódicos viscoelásticos. Através de uma análise paramétrica, puderam mostrar que a faixa de *bandgap* pode desaparecer quando a razão de comprimento, largura do elemento ou a espessura do núcleo exceder um valor de corte. OS autores concluem que devido ao mecanismo de espalhamento de Bragg no *bandgap* e a dissipação de energia fora dele, a placa de sanduíche com núcleos periódicos viscoelásticos fornece melhor desempenho de atenuação do que com um núcleo viscoelástico uniforme.

A maioria dos estudos de estruturas periódicas tem sido realizado na caracterização dos efeitos devido a inclusão de descontinuidades geométricas que se repetem ao longo da estrutura. Algumas publicações apresentam adição de massa e rigidez em regiões periódicas. Neste trabalho, a proposta é gerar uma estrutura com comportamento dinâmico para atenuar a propagação de onda (vibração) dentro de certas faixas de frequência. A estrutura periódica será apresentada através do uso de diferentes orientações de fibra para cada estrutura (ou célula unitária) (Fig. 1.4), permitindo diferentes combinações de rigidez.

A variação do ângulo da fibra, permitirá alterar a rigidez na região de acoplamento e criar regiões com diferentes impedâncias mecânicas, consequentemente, gerando zonas de bloqueio ou atenuação. Devido as características de filtragem, a habilidade de estruturas periódicas para transmitir ondas, de um local para o outro, dentro das bandas de passagem podem ser bastante reduzidas quando a periodicidade é interrompida ou

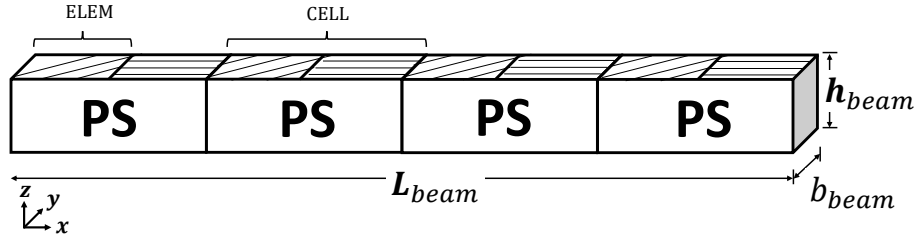


Figura 1.4: Estrutura periódica de material compósito laminado utilizado na análise numérica. b_{beam} : largura da viga, h_{beam} : espessura da viga, L_{beam} : comprimento da viga e PS: estrutura periódica. Fonte: Próprio Autor

desordenada (Rao e Narayanan, 2007). Desta forma, através da diferença de rigidez em cada célula, será possível obter regiões de descontinuidades (zonas de incompatibilidade de impedância) que, segundo Ruzzene e Baz (2001), quando zonas de incompatibilidade de impedância são introduzidas periodicamente em uma estruturas, podem ser obtidos características dinâmicas de onda interessantes. Além disso, será apresentado os efeitos da orientação da fibra na resposta ao número de onda.

No desenvolvimento de projeto, há uma busca por materiais que forneçam resistência e rigidez. O esquema de laminação e as propriedades do material de uma lâmina individual oferece um ganho de flexibilidade para adaptar essas propriedades do laminado para atender aos requisitos estruturais (Reddy, 2003). Por essa razão, o uso de materiais compósitos se tornou bastante comum.

O material compósito laminado consiste da combinação de dois ou mais materiais, no qual, juntos produzem propriedades desejadas e melhores características mecânicas que os materiais convencionais. Eles são comumente agrupados em três diferentes tipos: compósitos fibrosos, compósitos particulados e compósitos laminados. Cada um consiste de uma combinação essencial de um material matriz com um material de fibra. O material matriz é responsável por manter as fibras unidas. Ele age como um meio de transferência de carga e para proteger as fibras. Em contrapartida, as fibras são os principais membros de transporte de carga e é usado para melhorar as propriedades através da variação da direção da fibra (Reddy, 2003).

Muitos estudos relacionados a vibração mecânica em vigas feitas de materiais compósitos, analisam os efeitos causados pelas diferentes orientações de fibra na resposta a frequência e formas modais. Teh and Huang (1980), investigaram a influência da orientação da fibra no acoplamento de flexão e torção em vigas. Nesse estudo, foi possível identificar que há faixas de orientações de fibra que os modos de vibração da estrutura e suas frequências são mais afetados que em outros. Abarcar e Cunniff (1972), comparou os resultados experimentais e numéricos dos efeitos da orientação da fibra nos modos de vibrar de uma viga em balanço, feita de material compósito reforçada em fibra unidirecional, e analisaram a interação entre flexão e torção para algumas orientações de fibra.

A estrutura considerada é uma viga, que é modelada usando o Método de Elemento Espectral (SEM - *Spectral Element Method* - sigla em inglês), amplamente usado para resolver problemas de propagação de ondas em estruturas (Doyle, 1997), devido ao baixo custo computacional e acuracidade dos resultados, sendo utilizado para resolver problemas simples devido à dificuldade de obter soluções de ondas exatas para problemas multi-dimensional (Lee, 2009). O SEM é um método semianalítico que utiliza matrizes de rigidez dinâmicas exatas. A montagem das matrizes é feita usando o mesmo princípio do Método de Elementos Finitos. Contudo, o SEM é calculado no domínio da frequência (Doyle, 1997). A formulação utiliza a superposição dos modos de ondas via Teoria de transformada Discreta de Fourier e algoritmo de Transformada rápida de Fourier (Lee, 2009).

1.2 Proposta de Estudo - Estrutura Periódica

A proposta desse trabalho é estudar o comportamento de uma viga feita de um material compósito laminado subdividido em estruturas menores, montadas periodicamente. Cada estrutura periódica deve apresentar diferentes orientações de fibra por camada. O material compósito foi escolhido por apresentar muitas vantagens (razão de densidade

por alta resistência, redução de peso, resistência a fadiga e corrosão) e aplicações industriais, por exemplo, indústria Aeronáutica e Automotiva, Construção Civil, Pás de turbinas eólicas, são algumas das aplicações (Gibson, 2011). Nesse caso, permite obter um melhor comportamento em diferentes combinações de material para matriz e fibra. Além disso, a variação da rigidez pode ser feita apenas variando o ângulo da fibra ou a disposição do sequenciamento da camada.

O trabalho visa compreender e estudar o comportamento de estruturas periódicas e analisar os efeitos dinâmicos de uma viga feita de material compósito disposta periodicamente. Essa dissertação considera a uma viga de compósito com acoplamento flexo-torção-cisalhamento carregada axialmente, baseada na teoria de deformação ao cisalhamento de primeira ordem (FSDT - *first shear deformation theory* - em inglês), apresentado por Lee (2009), que é equivalente a teoria de viga de Timoshenko para vigas em compósitos. A escolha da teoria de primeira ordem é justificada pelo trabalho apresentado por Nanda e Kapuria (2015), no qual analisaram a propagação de onda por meio de elemento espectral em vigas de compósito laminado usando a teoria clássica de laminados em comparação com a teoria de deformação de deformação por cisalhamento de primeira ordem, concluindo que a teoria clássica apresenta resultados divergentes, não sendo recomendado na avaliação de propagação de onda, uma vez que, em alta frequência, não contabiliza o efeito de deformação por cisalhamento que são relevantes para a aplicação para a detecção de danos. Desta forma, esse trabalho discute e ilustra os efeitos de dinâmica estrutural obtida pela adição de estruturas periódicas de materiais compósitos laminados com diferentes orientações de fibra, em uma viga de Timoshenko.

1.3 Justificativa

A partir do que foi apresentado anteriormente, este trabalho visa apresentar uma maneira de obter redução de vibração em uma estrutura usando arranjos periódicos feitos de materiais compósito laminados. Nota-se que existem estudos relacionados a estruturas

periódicas, contudo, no geral, a periodicidade ocorre através da modificação geométrica ou pela adição de massa na estrutura. Devido as características do material compósito laminado, é possível obter diferentes comportamentos apenas modificando a orientação da fibra, laminação e empilhamento das camadas. Desta forma, através deste trabalho, pretende-se contribuir no contexto de controle de vibração passiva.

1.4 Objetivos

O objetivo central desta dissertação é desenvolver uma metodologia para obter estruturas periódicas sem alterar a geometria da estrutura ou adicionar massa. Além disso, os objetivos secundários são listados a seguir:

- Modelar uma viga de compósito considerando acoplamento de flexão-torção-cisalhamento;
- Avaliar o comportamento dinâmico de uma viga de estrutura periódica através de diferentes orientações da fibra para cada célula unitária;
- Analisar os efeitos causados pela orientação da fibra no número de onda.

1.5 Estrutura da Dissertação

O contexto desse trabalho, a motivação, os objetivos e contribuições são apresentados no capítulo 1. Os conceitos e fundamentação teórica básica de materiais compósitos, estruturas periódicas e a influência da orientação da fibra são abordados no capítulo 2. A metodologia e a modelagem numérica sobre o trabalho proposto são desenvolvidas no capítulo 3, enquanto que, no capítulo 4, apresenta-se as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica necessária para a modelagem de estruturas periódicas utilizando material compósito laminado. Desta forma, julga-se necessário explorar, primeiramente, o conceito de materiais compósitos laminados e, em seguida, estruturas periódicas como fonte de obtenção de filtro de frequência. Será explorado a influência da orientação da fibra na rigidez estrutural e o método utilizado para obtenção da resposta dinâmica. Por fim, é apresentada a fundamentação matemática relacionada a propagação de onda em um modelo de viga com acoplamento de flexão-torção-cisalhamento.

2.1 Teoria do Deslocamento de Primeira Ordem - Materiais Compósitos

Considere uma viga feita de material compósito laminado com múltiplas camadas, conforme Figura 2.1, observa-se as coordenadas globais (x, y, z) e as coordenadas principais do materiais $(1, 2, 3)$, no qual a primeira coordenada é usada na solução do problema, enquanto que a segunda é obtida através da rotação do plano xy no sentido horário sobre o eixo z através do ângulo θ .

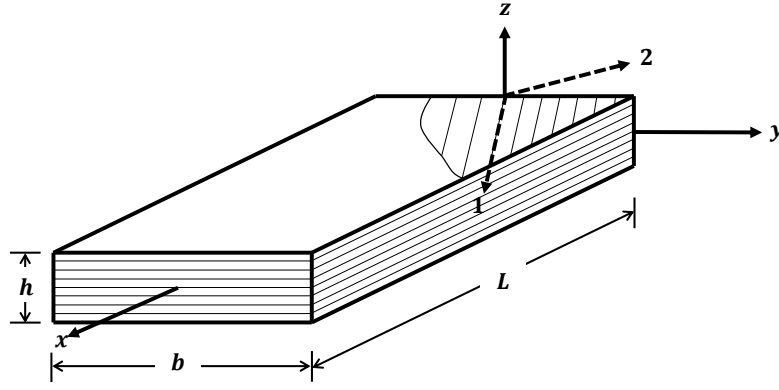


Figura 2.1: Coordenadas global e do material de uma lâmina. Sendo h , b , e L são a espessura, largura e comprimento, respectivamente. Fonte: Próprio Autor

Para material monoclinico e, assumindo que a lâmina é contínua, com comportando-se como um material elástico, a relação tensão-deformação fornece a equação constitutiva (eq. 2.1). A matriz correspondente a um material ortotrópico alinhado com sua coordenada principal do material pode ser apresentada a seguir (Ashton e Whitney, 1970; Reddy, 2003).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

A Equação 2.1 é escrita no sistema de coordenada coincidindo com o sistema de coordenada principal do material. A forma reduzida pode ser representada como

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad (2.2)$$

A Equação 2.2 representa a relação tensão-deformação, no qual, σ está relacionado com o vetor de tensão, $\mathbf{C}$ é a matriz de rigidez do material e ϵ é o vetor de deformação. Equação 2.2 também pode ser expressada em termos de relação deformação-tensão.

$$\epsilon = \mathbf{S}\sigma \quad (2.3)$$

$\mathbf{S}$ é a matriz de conformidade dada como a inversa da matriz de rigidez ($\mathbf{C} = \mathbf{S}^{-1}$).

Em termos de $\mathbf{S}$, a eq. 2.3 pode ser rescrita como segue,

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

sendo

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ S_{21} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3} \\ S_{31} &= -\frac{\nu_{31}}{E_1}, & S_{32} &= -\frac{\nu_{23}}{E_3}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sendo, E_{11} , E_{22} , E_{33} , são os módulos de elasticidade, G_{12} , G_{13} , G_{23} , são os módulos de cisalhamento e ν_{12} , ν_{13} , ν_{23} são coeficientes de *Poisson*. Os subscritos são usados para indicar a medida das quantidades em relação às coordenadas principais do material (1, 2, 3). Na forma reduzida, pode ser rescrita em E_1 , E_2 , E_3 . Por fim, devido a matriz simétrica, tem-se

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (2.6)$$

Um laminado é uma coleção de lâminas empilhadas de acordo com a rigidez desejada.

A Figura 2.2 indica uma única camada de um laminado (camada simples).

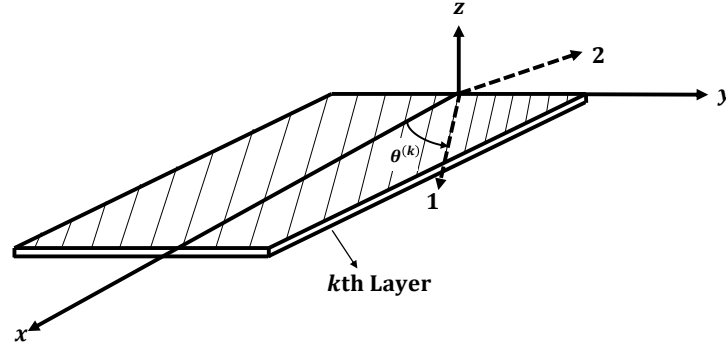


Figura 2.2: Coordenadas global e do material de uma camada simples. Sendo θ indica o ângulo da fibra usada para transformar a relação entre tensão e deformação de um sistema de coordenada para outro. Fonte: Próprio Autor

Essa relação é necessária devido ao sistema de coordenada usado na solução de um problema, geralmente, não coincidir com o sistema de coordenada do material. No caso de materiais compósitos, as propriedades dependem da orientação da fibra. Desta forma, torna-se necessário realizar esta transformação no sistema de coordenadas.

A transformação do sistema de coordenadas do material (m) da equação constitutiva para o sistema de coordenadas do problema (p) é realizada através de uma matriz de transformação, dada a seguir

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ cs & -cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Sendo

$$c = \cos \theta \quad e \quad s = \sin \theta \quad (2.8)$$

e θ é o ângulo da fibra.

Na forma reduzida, a eq. 2.7 pode ser reescrita como

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{T}_a \boldsymbol{\sigma}_m \quad (2.9)$$

$\mathbf{T}_a$ é a matriz de transformação. A relação entre $\boldsymbol{\sigma}_p$ e $\boldsymbol{\sigma}_m$ é dada através da Equação 2.10.

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{T}_a \boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{T}_a \mathbf{C}_m \boldsymbol{\epsilon}_m = \mathbf{T}_a \mathbf{C}_m \mathbf{T}_a^T \boldsymbol{\epsilon}_p = \mathbf{C}_p \boldsymbol{\epsilon}_p \quad (2.10)$$

o sobrescrito T corresponde à transposta da matriz.

A matriz que corresponde a relação constitutiva no plano de tensão para um material ortotrópico pode ser avaliada através da forma reduzida

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

sendo

$$\begin{aligned} Q_{11}^{k_l} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^{k_l} \nu_{21}^{k_l}}, & Q_{12} &= -\frac{E_2^{k_l} \nu_{21}^{k_l}}{1 - \nu_{12}^{k_l} \nu_{21}^{k_l}}, & Q_{22} &= \frac{E_2 \nu_{21}^{k_l}}{1 - \nu_{12}^{k_l} \nu_{21}^{k_l}} \\ Q_{44}^{k_l} &= G_{23}^{k_l}, & Q_{55}^{k_l} &= G_{13}^{k_l}, & Q_{66}^{k_l} &= G_{12}^{k_l} \end{aligned} \quad (2.13)$$

k_l representa a lâmina que compõe a estrutura do laminado.

Aplicando a matriz de transformação de coordenada, a relação tensão-deformação são dadas por Reddy (2003).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

sendo

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{44}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (2.16)$$

O $\bar{\mathbf{Q}}$ é chamado de matriz de rigidez reduzida transformada, no qual depende da direção da fibra. Esse parâmetro é responsável pela variação de rigidez estrutural. As equações apresentadas nessa seção são utilizadas para o desenvolvimento da modelagem da estrutura periódica de material compósito, como na seção 2.2 e 2.3 . A partir delas, é possível avaliar a rigidez da estrutura para outros materiais ou laminado com diferentes orientações das fibras, sendo necessário os parâmetros como módulo de elasticidade, cisalhamento, coeficiente de Poisson e o ângulo, conforme descrito anteriormente.

2.2 Modelagem Matemática

Assume-se uma viga de compósito (Fig. 2.2) sujeita à uma carga e momentos externos, como mostra a Figura 2.3, e considera-se uma lâmina de espessura total h composta de k_l camadas perfeitamente unidas, com uma espessura uniforme, e propriedades elástica linear do material. O princípio de Hamilton (Eq. 2.17) é utilizado para obter as equações diferenciais ordinárias (Eq. 2.18) que governam o movimento e as condições de contorno associadas a viga de compósito baseada na teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem (Reddy, 2003).

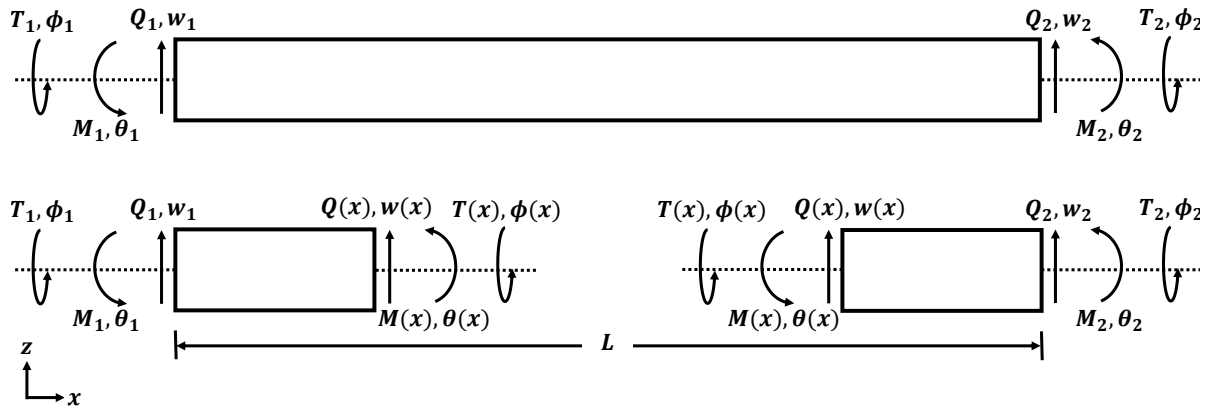


Figura 2.3: Diagrama de corpo livre para elemento de viga de compósito laminado. Fonte: Próprio autor

De modo que L é largura da viga, M é o momento gerado por flexão, Q é a carga de cisalhamento e T é o momento devido a torção. Além disso, w_0 , ϕ e θ representam o deslocamento da viga de compósito laminado (cisalhamento, torção e flexão, respectivamente).

A teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem é o equivalente a teoria de viga de Timoshenko para vigas de materiais compósitos laminados, que é responsável pelo estado constante de deformações de cisalhamento transversais através da espessura, dado pelo princípio de Hamilton:

$$\int_0^h (\delta E_k - \delta U + \overline{W}) dh_{beam} = 0 \quad (2.17)$$

Sendo E_k , U e $\overline{W}$ são as energias cinéticas e de deformação e o trabalho virtual realizado pelas forças externas. A espessura é dada por h . De acordo com Lee (2009), a equação do movimento para uma viga de compósito laminado é dada por

$$\begin{aligned} \kappa GA(w_0'' - \theta') + P(w_0'' - y_{CA}\phi'') - \rho A(\ddot{w}_0 + y_{CM}\phi'') - c_1\dot{w}_0 + f_w(x, t) &= 0 \\ GJ\phi'' + K_T\theta'' + P(y_{CA}w_0'' + r_g^2\phi'') - \rho J\phi'' - \rho A y_{CM}\ddot{w}_0 - c_3\phi' + f_\phi(x, t) &= 0 \\ EI\theta'' + K_T\phi'' + \kappa GA(w_0' - \theta') - \rho I\ddot{\theta} - c_2\dot{\theta} + f_\theta(x, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Sendo ρ é a densidade do material, A , I , e J são propriedades geométricas (área da seção transversal, momento de inércia de área e momento de inércia polar, nessa ordem), c_i é o amortecimento viscoso, y_{CM} e y_{CA} são a distância entre eixo elástico e o eixo de massa, e o eixo elástico e o centro da área da seção transversal, respectivamente. Essa equação representa o acoplamento entre flexão-cisalhamento-torção. Na literatura (Weisshaar et al., 1970), (Lee, 2009), a rigidez ao cisalhamento (κGA), a rigidez a flexão (EI), a rigidez de acoplamento flexão-torção (KT) e a rigidez torcional (GJ) são definidas através da Equação 2.19.

$$\begin{aligned} \kappa GA &= \kappa b A_{55} \\ EI &= b(D_{11} - D_{12}^2 D_{22}^{-1}) \\ K_T &= 2b(D_{16} - D_{12} D_{26} D_{22}^{-1}) \\ GJ &= 4b(D_{66} - D_{26}^2 D_{22}^{-1}) \end{aligned} \quad (2.19)$$

No qual, $\mathbf{A}_{ij}$ é a matriz de rigidez axial e $\mathbf{D}_{ij}$ é a matriz de rigidez de flexão-torção, são funções que dependem da orientação da fibra do laminado (Eq. 2.19), da sequência de empilhamento (Eq. 2.20) e das propriedades do material compósito (Eq. 2.5) (Ashton et al., 1970). O fator de correção ao cisalhamento é dado por κ , e depende da seção

transversal da viga e b_{beam} é a largura. É importante estar atento ao sistema de coordenada para desenvolver a Eq. 2.4, uma vez que, a alteração do eixo do sistema de coordenada, implicaria em diferentes relações em D_{ij} .

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_i^N \bar{\mathbf{Q}}_{ij} (z_{i+1} - z_i) \\ \mathbf{B} &= \sum_i^N \bar{\mathbf{Q}}_{ij} (z_{i+1}^2 - z_i^2) \\ \mathbf{D} &= \sum_i^N \bar{\mathbf{Q}}_{ij} (z_{i+1}^3 - z_i^3) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Equação 2.20 é obtida através da integração da Eq. 2.11. A integral fornece as forças e momentos resultantes. Sendo $z_l = z_{k+1} - z_1$ a espessura da lâmina (Fig. 2.4) dada no eixo z e $\bar{\mathbf{Q}}$ é dependente dos coeficientes de rigidez do material e da orientação da fibra (Eq. 2.16).

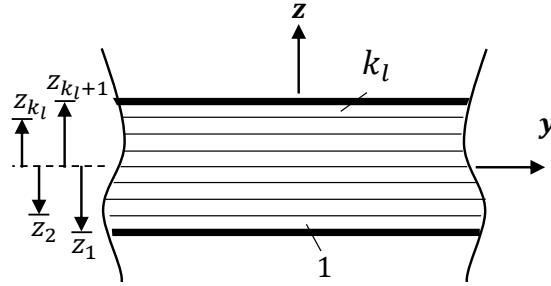


Figura 2.4: Geometria de uma estrutura com N camadas de lâminas. Fonte: Próprio Autor

2.2.1 Camada Unidirecional

Uma lâmina ou camada é uma chapa típica de material compósito. Ela representa um bloco construído de lâminas de compósito. Uma lâmina ou camada unidirecional (Fig. 2.5) é o elemento mais simples de um material compósito que exibe elevada resistência e módulos na direção da fibra, contudo, possui uma menor resistência e módulo na direção transversal da fibra.

Um laminado é a combinação de fibras unidirecionais unidas através de uma mesma

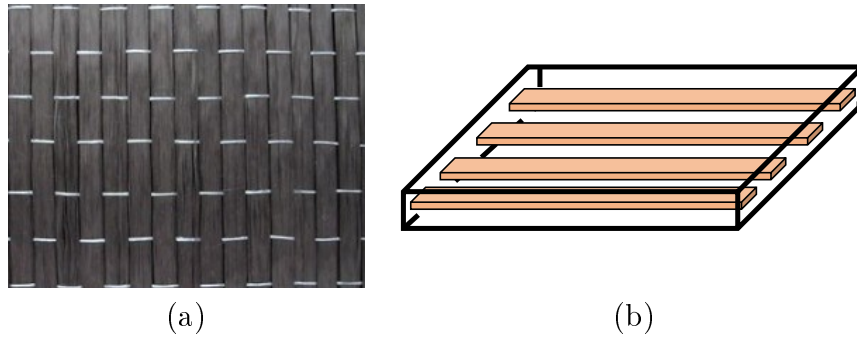


Figura 2.5: (a)Fibra de carbono unidirecional. Fonte: Compósitos Avançados Barra-cuda (b) Camada de Fibra unidirecional utilizada como referência para a modelagem numérica. Fonte: Próprio Autor

matriz de material. Pode ser empilhada para encontrar a rigidez desejada. A matriz é responsável para a proteção da fibra de danos externos e ataques devido ao ambiente, além de manter as fibras unidas (Gibson, 2011).

A camada unidirecional apresenta máximo valor de rigidez para uma direção específica. Da Equação 2.19 e 2.20 e considerando valores unitários para as propriedades do material, a rigidez estrutural é analisada.

A Figura 2.6 representa a relação entre diferentes orientações de fibra e rigidez estrutural normalizada. Note que para uma orientação a 0° , a rigidez axial, flexão e de cisalhamento possuem valores máximos. Contudo, o mesmo não ocorre para a rigidez a torção e de acoplamento flexão-torção. No entanto, adotando uma fibra alinhada a 45° , o comportamento é o oposto a 0° . Nessa situação, os valores máximos encontrados ocorrem para rigidez a torção e para o acoplamento flexão-torção. Esses resultados auxiliam na escolha da combinação entre diferente rigidez (flexão, torção e cisalhamento) para criar a estrutura periódica.

Com base nos valores mais significativos de rigidez torcional, flexão e cisalhamento, a subestrutura foi escolhida, sendo, portanto, orientada a 0° e 45° , que formam juntas uma estrutura periódica.

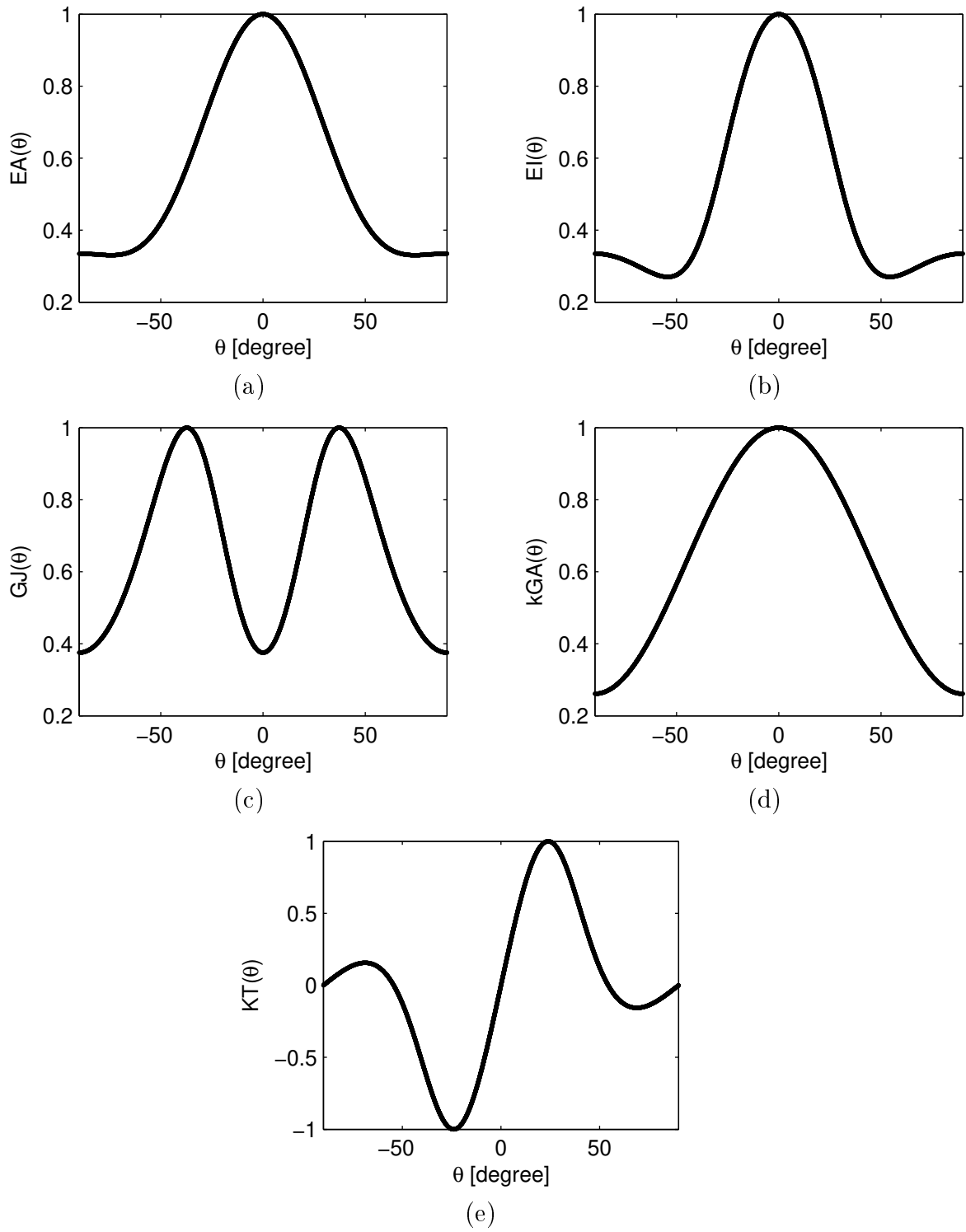


Figura 2.6: Relação entre orientação da fibra e rigidez estrutural normalizada. (a) Rigidez axial (EA) (b) rigidez a flexão (EI) (c) rigidez a torção (GJ) (d) rigidez ao cisalhamento (κGA) (e) rigidez ao acoplamento de flexão-torção (KT). Fonte: Próprio Autor

2.3 Estruturas Periódicas

Uma estrutura periódica consiste fundamentalmente em um número de componentes estruturais idênticos ("elementos periódicos") que são unidos de ponta a ponta e/ou lado a lado para formar a estrutura completa. As redes atômicas de cristais puros constituem estruturas periódicas perfeitas, mas são sistemas de parâmetros concentrados com massas discretas "os átomos" interconectados pelas forças elásticas interatômicas. Na engenharia estrutural, a massa e a elasticidade dos membros estruturais são contínuas e constituem estruturas periódicas quando dispostas em arranjos regulares (Mead, 1996). A estrutura periódica pode ser considerada feita de um número finito de unidade celulares idênticas (Fig. 2.7). Essas células unitárias são unidades repetidas que são utilizadas para descrever a microestrutura ou o material (Jensen, 2003). Por causa de sua natureza periódica, essas estruturas apresentam características dinâmicas únicas que as fazem atuar como filtros mecânicos para a propagação das ondas (Baz, 2001).

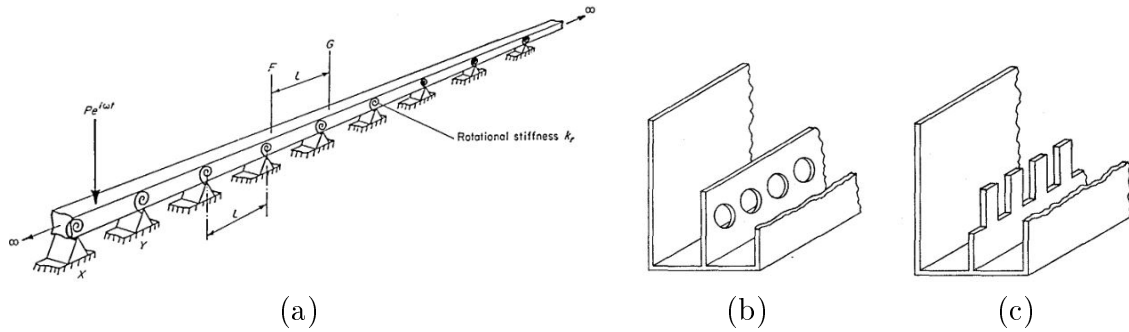


Figura 2.7: Tipos de estruturas periódicas. (a) Estrutura com apoios equidistantes. Fonte: Mead (1969); (b) e (c) arranjo de furos e "dentes", respectivamente. Fonte: Oliner e Rotman (1959).

Há muitos métodos de análises que podem ser utilizados para encontrar a resposta dinâmica dessas estruturas, tais como Método dos Elementos Finitos (MEFs), análises de matriz de transferência, análises de propagação de onda e modelagem contínua (Mester e Benaroya, 1995). Para a proposta de trabalho, a resposta é encontrada usando o método de elemento espectral utilizado por Lee(2009) e utilizando o método proposto por Rubin (1966) para encontrar a matriz de transferência a fim de obter a resposta da

atenuação da vibração na estrutura periódica.

2.3.1 Método do elemento espectral

Segundo Doyle (1997) e Lee (2009 - 2010), esse método consiste de uma matriz de rigidez exata, conhecida como matriz de elemento espectral, formulada no domínio da frequência utilizando soluções de ondas exatas para as equação diferenciais. Pode ser considerado como a combinação de três ferramentas chaves dos Métodos de Elementos Finitos, rigidez dinâmica e análise espectral. A metodologia para a utilização do método apresentada a seguir é descrita no trabalho de Lee (2009), a equação do elemento espectral é dada pela Equação 2.21, como sendo

$$\mathbf{S}_e(\omega)\mathbf{d} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_d \quad (2.21)$$

Sendo $\mathbf{S}(\omega)$ é a matriz de elemento espectral também conhecida como matriz de rigidez dinâmica, $\mathbf{f}_c$ consiste no vetor de forças nodais devido as forças concentradas agindo nos nós e $\mathbf{f}_d$ é o vetor de forças nodais devido às forças distribuídas.

A matriz de elemento espectral pode ser obtida da Equação 2.28, expressa na forma

$$\mathbf{S}_e(\omega) = \mathbf{G}^{-T}(\omega)\mathbf{D}(\omega)\mathbf{G}^{-1}(\omega) \quad (2.22)$$

O vetor $\mathbf{D}$ é descrito na Equação 2.23, como

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\omega) = & \kappa G A_{eq} [-\mathbf{KEK} + \mathbf{AEA} + i(\mathbf{KEA} + \mathbf{AEK})] - EI_{eq} \mathbf{AKEKA} + ... \\ & -(GJ_{eq} + Pr_g^2) \mathbf{BKEKB} - K_{Teq} (\mathbf{AKEKB} + \mathbf{BKEKA}) + ... \\ & -Py_{CA} (\mathbf{KEKB} + \mathbf{BKEK}) - P\mathbf{KEK} + (i\omega_n c_1 - \omega_n^2 \rho A_{eq}) \mathbf{E} + ... \\ & + ((i\omega_n c_2 - \omega_n^2 \rho I_{eq}) \mathbf{AEA} + (i\omega_n c_3 - \omega_n^2 \rho J_{eq}) \mathbf{BEB} - \omega_n^2 \rho A_{eq} y_{CM} (\mathbf{EB} + \mathbf{BE})) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Sendo a definição de $\mathbf{E}$ dada na Equação 2.24, dada por

$$\mathbf{E}(\omega) = [E_{rs}] = \begin{cases} \frac{i}{k_r + k_s} [e^{-i(k_r + k_s)L} - 1] & \text{se } k_r + k_s \neq 0 \\ L & \text{se } k_r + k_s = 0 \\ (r, s = 1, 2, \dots, 6) \end{cases} \quad (2.24)$$

e $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{K}$ são definidos na Equação 2.29, dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\omega) &= \text{diag}[\alpha_p(\omega)] \\ (p &= 1, 2, \dots, 6) \\ \mathbf{B}(\omega) &= \text{diag}[\beta_p(\omega)] \\ \mathbf{K} &= \text{diag}[k_p(\omega)] \end{aligned} \quad (2.25)$$

sendo

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \frac{-(\omega^2 \rho A - k_p^2 P - k_p^2 \kappa G A_{eq} - i_{c1} \omega) k_p^2 K_{Teq} + i k \kappa G A_{eq} (\omega^2 \rho A_{eq} y_{CM} - k_p^2 P y_{CA})}{-i k_p^3 \kappa G A_{eq} K_{Teq} - (\omega^2 \rho A_{eq} y_{CM} - k_p^2 P y_{CA}) (\omega^2 \rho I_{eq} - \kappa G A_{eq} - k_p^2 E I_{eq} - i_{c2} \omega)} \\ \beta_p(\omega) &= \frac{(\omega^2 \rho A - k_p^2 P - k_p^2 \kappa G A_{eq} - i_{c1} \omega) (\omega^2 \rho I_{eq} - \kappa G A_{eq} - k_p^2 E I_{eq} - i_{c2} \omega) - k_p^2 \kappa G A_{eq}^2}{-i k_p^3 \kappa G A_{eq} K_{Teq} - (\omega^2 \rho A_{eq} y_{CM} - k_p^2 P y_{CA}) (\omega^2 \rho I_{eq} - \kappa G A_{eq} - k_p^2 E I_{eq} - i_{c2} \omega)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

k_p, k_r, k_s são o número de onda. A matriz $\mathbf{G}$ pode ser calculada através da Equação 2.31

$$\mathbf{G}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ e^{-ik_1 L} & e^{-ik_2 L} & e^{-ik_3 L} & e^{-ik_4 L} & e^{-ik_5 L} & e^{-ik_6 L} \\ \alpha_1 e^{-ik_1 L} & \alpha_2 e^{-ik_2 L} & \alpha_3 e^{-ik_3 L} & \alpha_4 e^{-ik_4 L} & \alpha_5 e^{-ik_5 L} & \alpha_6 e^{-ik_6 L} \\ \beta_1 e^{-ik_1 L} & \beta_2 e^{-ik_2 L} & \beta_3 e^{-ik_3 L} & \beta_4 e^{-ik_4 L} & \beta_5 e^{-ik_5 L} & \beta_6 e^{-ik_6 L} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Desta forma, substituindo as Equações 2.23 e 2.31 na Equação 2.28, obtêm-se a matriz do elemento espectral.

2.3.2 Matriz de transferência

Para avaliar a atenuação de vibração na estrutura periódica com n células, é preciso verificar a transferência do sistema. Nesse caso, a fim de verificar a resposta obtida para a atenuação da vibração na última célula a partir de um sinal de entrada na primeira célula, considere uma estrutura periódica conforme a Figura 2.8.

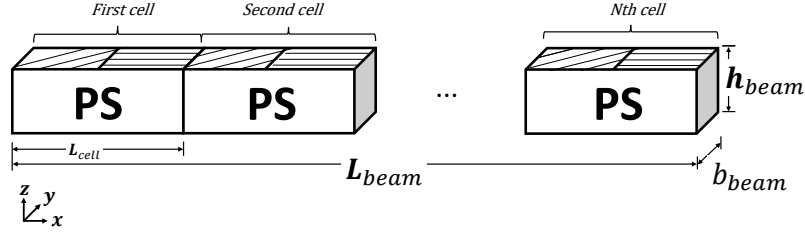


Figura 2.8: Estrutura periódica com n células. b_{beam} = largura, h_{beam} = espessura/altura, L_{beam} = comprimento e PS = Estrutura periódica. Fonte: Próprio Autor.

A viga representada na Figura 2.8, pode ser representada por um sistema mono-acoplado com n células unitárias conectados umas as outras como na Figura 2.9).

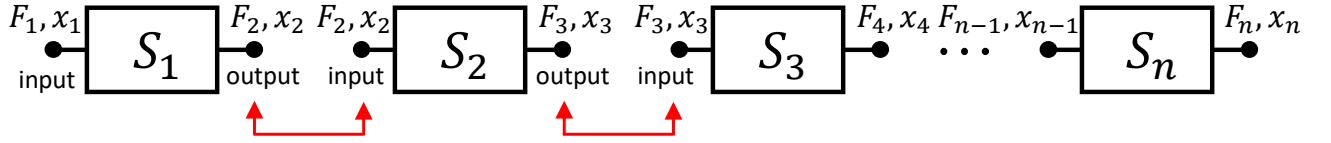


Figura 2.9: Estrutura periódica mono-acoplada com n células unitárias. S = sistema que representa a célula unitária da estrutura periódica. Fonte: Próprio Autor.

Segundo Mace et al. (2005), cada estrutura (S_i) desse sistema possui rigidez dinâmica $\tilde{\mathbf{D}}$. Considerando uma força F e um deslocamento x aplicados na primeira célula, a equação que descreve o movimento de uma única estrutura desse sistema, que no caso, seria uma célula unitária da viga representada na Figura 2.8, é dado na Equação 2.28.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{11} & \tilde{\mathbf{D}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{21} & \tilde{\mathbf{D}}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

Devido a simetria do sistema, temos $\tilde{\mathbf{D}}_{21} = \tilde{\mathbf{D}}_{21}^T$. A matriz $\tilde{\mathbf{D}}$ é conhecida como

matriz de impedância mecânica ou matriz de rigidez dinâmica. Além disso, $\tilde{\mathbf{D}}$ é a própria matriz de elemento espectral $\mathbf{S}_e$, logo

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{S}_e \quad (2.29)$$

A matriz de transferência relaciona as forças e deslocamento de entrada aos terminais de saída. Sendo utilizada para descrever sistemas que possui uma série de estruturas mono-acopladas ou conectadas em tandem (Mead, 1975; Faulkner e Hong, 1985), isto é, a saída da primeira estrutura é igual a entrada da segunda estrutura e assim por diante (Fig. 2.9). A característica de transferência de tal série é encontrada pela multiplicação da matriz de transferência das estruturas individuais (Rubin, 1966).

Para uma única célula, a matriz de transferência $\mathbf{T}$ pode ser dada na forma reduzida.

$$\mathbf{Y}_2(\omega) = \mathbf{T}_1 \mathbf{Y}_1(\omega) \quad (2.30)$$

A Equação 2.24 está escrita na forma de matriz de impedância mecânica, Assim, para obter a matriz de transferência dada na Equação 2.30, é necessário considerar o equilíbrio de forças e a continuidade do deslocamento na estrutura como descrito anteriormente, isto é, a saída da primeira célula é igual a entrada da segundo e assim por diante. Diante disso, temos

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_{n-1} \quad \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} \quad (2.31)$$

A Equação 2.24 pode ser reescrita na forma de matriz de transferência como

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{e22} \mathbf{S}_{e12}^{-1} & \mathbf{S}_{e22} \mathbf{S}_{e12}^{-1} \mathbf{S}_{e11}^{-1} - \mathbf{S}_{e21} \\ \mathbf{S}_{e12}^{-1} & -\mathbf{S}_{e12}^{-1} \mathbf{S}_{e11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{F}_1 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Portanto, a matriz de transferência $\mathbf{T}$ depende da rigidez dinâmica $\mathbf{D}$.

Segundo Rubin (1966), a matriz de transferência geral é dada pelo produto das n matrizes de transferência individuais procedentes da saída $n + 1$. Sendo assim, a matriz

de transferência pode ser reescrita na forma geral dada pela Equação 2.33.

$$\mathbf{Y}_{i+1}(\omega) = (\mathbf{T}_i \mathbf{T}_{i-1} \cdots \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1) \mathbf{Y}_i \quad (2.33)$$

Desta forma, reescrevendo-a para a forma geral reduzida

$$\mathbf{Y}_{i+1}(\omega) = \mathbf{T} \mathbf{Y}_i \quad (2.34)$$

A matriz $\mathbf{T}$ é uma matriz quadrada de ordem $2n$. Desta forma, a estrutura apresentada na Figura 2.9) pode ser redefinida como mostra a Figura 2.10. No qual, a partir de um sinal de entrada e da matriz de transferência é possível obter o resultado na última célula.

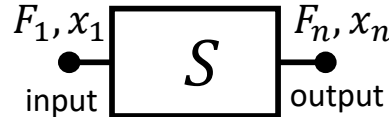


Figura 2.10: Esquema geral de uma estrutura mono-acoplada com a utilização da matriz de transferência

Para o sistema proposto na Figura 2.8, a matriz de transferência é definida na Equação 2.35.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S}_{e22} \mathbf{S}_{e12}^{-1} & \mathbf{S}_{e22} \mathbf{S}_{e12}^{-1} \mathbf{S}_{e11}^{-1} - \mathbf{S}_{e21} \\ \mathbf{S}_{e12}^{-1} & -\mathbf{S}_{e12}^{-1} \mathbf{S}_{e11} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

A propagação de onda livre pode ser descrita através da solução da Equação 2.36 que é um problema de autovalor e autovetor polinomial. Os autovalores fornecem a relação de dispersão, enquanto, que os autovetores descrevem a forma da onda correspondente ao longo da seção transversal (Mace et al., 2005).

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x}_L \\ \mathbf{F}_L \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

A solução da Equação 2.36 fornecerá λ , que está associado ao número de onda ($k_j = k'_j - i\mu_j$), também conhecido como constante de propagação. Sendo λ

$$\lambda = e^{-ik_j} = e^{-ik_j x} e^{-ik'_j x} \quad (2.37)$$

O número de onda para uma estrutura periódica de material compósito laminado, será descrito na seção 2.3.3. A partir dos autovalores obtidos na solução da Equação 2.36, será possível avaliar a atenuação e a fase para a estrutura selecionada. A parte real da solução da constante de propagação k_j , fornece a resposta da atenuação do sistema, ela representa o decaimento logarítmico da amplitude. Enquanto que, a parte imaginária, representa a diferença de fase do movimento dos sistemas adjacentes (Faulkner e Hong, 1985). Segundo Baz (2019), os significados matemático do autovalor λ de $\mathbf{T}$ são:

1. Se $|\lambda| = 1$, então, a condição é definida como região de banda de passagem (*"pass band"*);
2. Se $|\lambda| < 1$, então, a condição é definida como região de banda de parada (*"stop band"*).

2.3.3 Número de onda e Dispersão em sistemas periódicos

Uma maneira de analisar como uma onda elástica se propaga na estrutura é avaliar o número de onda. O número de onda representa uma medida análoga frequência temporal. Contudo, é a medida de uma frequência espacial de uma propagação de onda. O número de onda está associado a quantidade que representa a variação de fase por unidade de distância, isto é, a magnitude de um vetor de quantidade que indica a direção de propagação bem como a variação da fase espacial (Fahy and Gardonio, 2006). É dada através da eq. 2.38

$$k = \omega/c_{ph} = 2\pi/\lambda_l \quad (2.38)$$

Sendo k o número de onda, ω a frequência, c_{ph} a velocidade de propagação da onda e λ o comprimento de onda.

A relação que determina a frequência (ω) de dependência do número de onda (k) é definida como a *relação de dispersão*. Sendo que, a relação de dispersão é dada pela propriedade do tipo de onda e do meio no qual a onda se propaga, que indica se houve ou não uma dispersão gerada durante a propagação através de um meio inalterado em sua forma espacial básica. Nesse caso, indica se a onda é dispersiva ou não dispersiva (Fahy and Gardonio, 2006).

As ondas dispersivas são caracterizadas por apresentar uma função não linear, enquanto que, as ondas não dispersivas, uma função linear. Esse comportamento pode ser identificado através da derivação da função que fornece a relação de dispersão. Em outras palavras, curvas não dispersivas indicam que todas as ondas harmônicas viajam na mesma velocidade, isto é, se a estrutura é excitada na direção que seu número de onda representa curvas não dispersivas, a onda irá viajar para frente e para trás com a mesma velocidade. As curvas dispersivas indicam que há diferentes velocidades de propagação de onda, ou seja, em uma mesma direção, há ondas que se propagam mais rápidas que outras. (Fahy and Gardonio, 2006).

O número de onda é dependente da orientação da fibra. A relação entre orientação da camada e o número de onda é dada através da resolução da equação que governa o movimento (Eq. 2.17) no domínio da frequência. Nesse caso, o deslocamento, as forças e momentos são representados na forma de análise por elemento espectral (Doyle, 1997 and Lee, 2009).

$$\begin{aligned} \{w(x, t), \theta(x, t), \phi(x, t)\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \{W_n(x, \omega_n), \Theta_n(x, \omega_n), \Phi_n(x, \omega_n)\} e^{j\omega_n t} \\ \{Q(x, t), M(x, t), T(x, t)\} &= \sum_{n=0}^{N-1} \{Q(x, \omega_n), M(x, \omega_n), T(x, \omega_n)\} e^{j\omega_n t} \end{aligned} \quad (2.39)$$

sendo,

$$Q(x, t) = \kappa GA(W' - \Theta), \quad M(x, t) = EI\Theta' + K_T\Phi', \quad T(x, t) = GJ\Phi' + K_T\Theta' \quad (2.40)$$

A equação no domínio da frequência para um sistema homogêneo é obtida substituindo a Eq. 2.39 na Eq. 2.17. Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \kappa GA(W'' - \Theta') + P(W'' + y_{CA}\Phi'') + \omega^2 \rho A(W + y_{CM}\Phi) - jc_1 W &= 0 \\ EI\Theta'' + K_T\Phi'' + \kappa GA(W' - \Theta) + \omega^2 \rho I\Theta - j\omega c_2 \Theta &= 0 \\ GJ\Phi'' + K_T\Theta'' + P(y_{CA}W'' + r_g^2\Phi'') + \omega^2 \rho J\Phi + \omega^2 \rho A y_{CM}W - j\omega c_3 \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

A Equação 2.41 representa a função de forma dinâmica. A solução geral pode ser assumida como

$$W(x) = ae^{-jkx}, \quad \Theta(x) = a\alpha e^{-jkx}, \quad \Phi(x) = a\beta e^{-jkx} \quad (2.42)$$

Desta forma, o número de onda (k) pode ser representado através da substituição da Eq. 2.42 na Eq. 2.41.

$$\begin{aligned} [\rho A\omega^2 - jc_1\omega - (\kappa GA + P)k^2 + j\kappa GAk\alpha + (\rho A\omega^2 y_{CM} - Pk^2 y_{CA})\beta]ae^{-jkx} &= 0 \\ [-j\kappa GAk + \alpha(\rho I\omega^2 - EI k^2 - \kappa GA - jc_2\omega) - K_T k^2 \beta]ae^{-jkx} &= 0 \\ [\rho A y_{CM}\omega^2 - Pk^2 y_{CA} - K_T k^2 \alpha + (\rho J\omega^2 - jc_3\omega - Pk^2 r_g^2 - GJk^2)\beta]ae^{-jkx} &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

A Equação 2.43 fornece um problema de autovalor, podendo ser escrita na forma matricial. Através da Equação 2.43, foi possível encontrar um erro tipográfico em uma das equações escritas por Lee (2009). Podemos reescrever a eq. 2.43 conforme

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

O primeiro erro encontrado ocorre na definição de H_{22} . No artigo, Lee (2009),

descreve esse termo como

$$H_{22} = \rho I \omega^2 - i c_2 \omega - \kappa G A k - E I k^2 \quad (2.45)$$

Contudo, a forma correta pode ser reescrita como

$$H_{22} = \rho I \omega^2 - i c_2 \omega - \kappa G A - E I k^2 \quad (2.46)$$

Portanto, o termo $i \kappa G A$ não é acompanhado do número de onda k . Sendo assim, devido ao erro tipográfico encontrado, cria-se uma dificuldade para obtenção dos resultados apresentados. Nesse caso, foi necessário integrar as equações anteriores, a fim de obter a sua forma correta para a continuidade do trabalho. A solução correta pode ser encontrada resolvendo a Equação 2.47.

$$\begin{aligned} & (\rho A \omega^2 y_{CM} - P k^2 y_{CA}) (j K_T k^3 \kappa G A - (\rho I \omega^2 - j c_2 \omega - \kappa G A - E I k^2) (\rho A \omega^2 y_{CM} - P k^2 y_{CA})) - \dots \\ & - j k \kappa G A (K_T k^2 (\rho A \omega^2 y_{CM} - P k^2 y_{CA}) - j k \kappa G A (\rho J \omega^2 - j c_3 \omega - P k^2 r_g^2 - G J k^2)) + \dots \\ & + (\rho A \omega^2 - j c_1 \omega - k^2 \kappa G A - P k^2) ((\rho I \omega^2 - j c_2 \omega - \kappa G A - E I k^2) \\ & (\rho J \omega^2 - j c_3 \omega - P k^2 r_g^2 - G J k^2) - K_T^2 k^4) = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Podemos reorganizar a Equação 2.47 e reescreve-la na forma reduzida em termos de número de onda

$$a_6 k^6 + a_5 k^5 + a_4 k^4 + a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_0 = 0 \quad (2.48)$$

Sendo a os coeficientes obtidos através da reorganização algébrica, da Equação 2.47. Os coeficientes são dados a seguir

$$\begin{aligned}
a_0 &= (-\rho A^2 \rho I \omega^6 + j c_2 \rho A^2 \omega^5 + \kappa G A^2 \omega^4) y_{CM} + \rho A \rho I \rho J \omega^6 + \dots \\
&+ (-(c_1 \rho I - c_2 \rho A) \rho J - c_3 \rho A \rho I) j \omega^5 + (-(\kappa G A \rho A - c_1 c_2) \rho J - c_1 c_3 \rho I - c_2 c_3 \rho A) \omega^4 + \dots \\
&+ (c_1 \kappa G A \rho J + c_3 \kappa G A \rho A + c_1 c_2 c_3) j \omega^3 + c_1 c_3 \kappa G A \omega^2 \\
a_1 &= 0 \\
a_2 &= E I \rho A^2 y_{CM}^2 \omega^4 + (\rho I \omega^4 - j c_2 \omega^3 - \kappa G A \omega^2) 2 P \rho A y_{CA} y_{CM} + \dots \\
&(((-\kappa G A - P) \rho I - E I \rho A) \rho J - (P r_g^2 + G J) \rho A \rho I) \omega^4 + \dots \\
&+ ((c_2 \kappa G A + P c_2 + E I c_1) j \rho J + (P c_1 r_g^2 + (c_2 \kappa G A + \dots \\
&+ P c_3 + G J c_1) j \rho I + (P c_2 r_g^2 + E I c_3 + G J c_2) j \rho A) \omega^3 + (P \kappa G A \rho J + \dots \\
&+ (P \kappa G A r_g^2 + G J \kappa G A) \rho A + P c_1 c_2 r_g^2 + c_2 c_3 \kappa G A + (P c_2 + E I c_1) c_3 + \dots \\
&+ G J c_1 c_2) \omega^2 - (P(c_3 + c_1 r_g^2) + G J c_1) j \omega \\
a_3 &= 0 \\
a_4 &= 2 P E I \rho A y_{CA} y_{CM} \omega^2 - (\rho I \omega^2 - c_2 \omega - \kappa G A) P^2 y_{CA}^2 + ((\kappa G A + P) E I \rho J + \dots \\
&+ ((\kappa G A + 1) P r_g^2 + G J (\kappa G A + P)) \rho I + (P^2 r_g^2 - K_T^2 + G J) E I \rho A) \omega^2 + \dots \\
&(-(c_2 \kappa G A + P c_2 + E I c_1) P r_g^2 - (E I c_3 + G J c_2) \kappa G A - E I P c_3 - G J P c_2 + \dots \\
&+ (K_T^2 - E I G J) c_1) j \omega - P^2 \kappa G A r_g^2 - G J P \kappa G A \\
a_5 &= 0 \\
a_6 &= E I P^2 y_{CA} - (E I P \kappa G A + E I P^2) r_g^2 + (K_T^2 - E I G J) (\kappa G A + P)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Desta forma, os termos a_1 , a_3 , a_5 somem na equação principal, fornecendo uma equação polinomial bicúbica. Na sua forma reduzida

$$a_6 k^6 + a_4 k^4 + a_2 k^2 + a_0 = 0 \tag{2.50}$$

Devido ao erro da Equação 2.44, no trabalho de Lee (2009), os termos a_1 , a_3 , a_5 da Equação 2.50 não eram iguais a zero, portanto, não desapareciam e, conseqüentemente, a resposta obtida estava errada. O resultado obtido através da solução proposta por Lee (2009) é ilustrado na Figura 2.11(a), evidenciando o erro na obtenção do número de

onda, enquanto que, na Figura 2.11(b) foi realizado a correção do erro, podendo obter a resposta correta para o trabalho desenvolvido por Lee (2009).

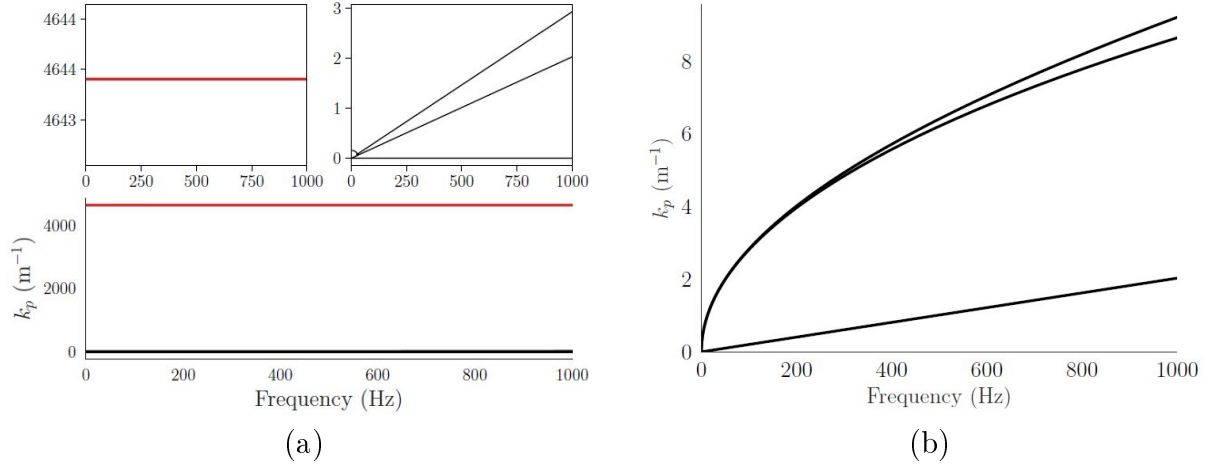


Figura 2.11: (a) Solução errada da Equação 2.50 utilizando a equação proposta por Lee (2009) e (b) Solução correta da Equação 2.50 desenvolvida no trabalho de Lee (2009) apresentada neste trabalho.

Dadas as observações anteriores, para a proposta deste trabalho, de uma viga com estrutura periódica de material compósito laminado, a partir das características geométricas da estrutura em análise, temos que $y_{CM} = y_{CA} = 0$ e, considerando que não há amortecimento viscoso ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$) e sem aplicação de carga axial ($P = 0$). Os coeficientes da Equação 2.50, para avaliação da relação de dispersão é reescrito como

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \rho A \rho I \rho J \omega^6 - \rho A \rho J \kappa G A \omega^4 \\
 a_2 &= -((\kappa G A \rho I + E I \rho A) \rho J + G J \rho A \rho I) \omega^4 + G J \kappa G A \rho A \omega^2 \\
 a_4 &= (\kappa G A E I \rho J + \kappa G A G J \rho I + (E I G J - K_T^2) \rho A) \omega^2 \\
 a_6 &= \kappa G A (K_T^2 - E I G J)
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Os termos da Equação 2.51 foram introduzidos na seção 2.2. Segundo Lee (2009), ρA é a massa aparente por unidade de comprimento, ρI é o momento de inércia de massa por unidade de comprimento sobre o eixo y e ρJ é o momento de massa polar aparente por unidade de comprimento sobre o eixo x .

A seguir, são apresentados os resultados a partir das equações corrigidas propostas nesse trabalho. Analisando os coeficientes da Equação 2.47 e 2.51, nota-se que a solução é dependente da rigidez estrutura e propriedades inerciais da viga. Então, sendo essas propriedades inerentes a orientação da fibra e ao número de onda, é possível notar sua relação para um variação de frequência(ω). Na Figura 2.12, a relação de dispersão foi representada para três valores de ângulo de fibra (0° , 20° e 45°).

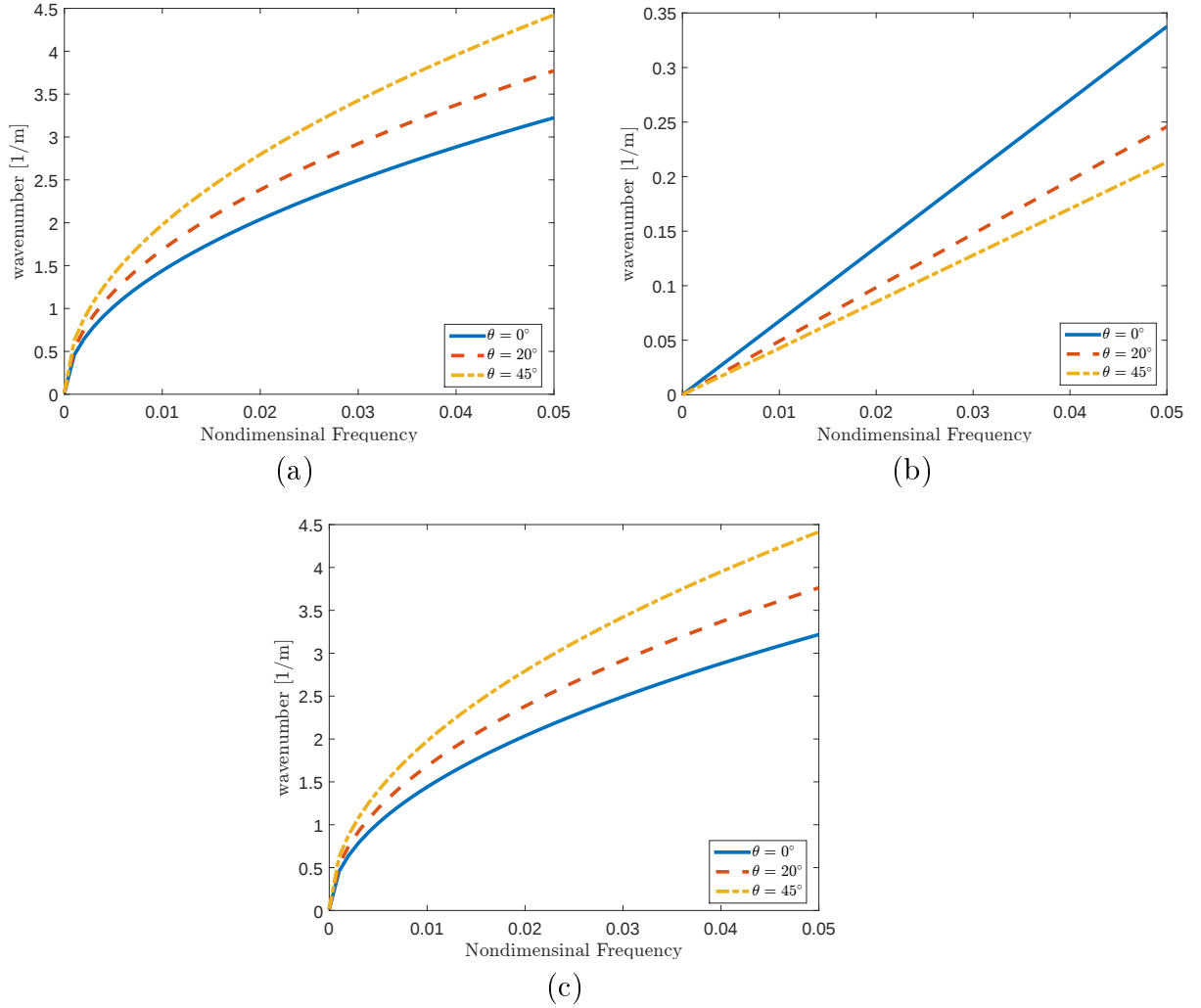


Figura 2.12: Número de onda para diferentes ângulos de fibra [0° , 20° e 45°] e baixa frequência. Fonte: Próprio Autor

Na Fig. 2.12a e Fig. 2.12c, as curvas, inicialmente, possuem o mesmo comportamento, contudo, há uma pequena diferença entre elas. Essa diferença é mais expressiva em al-

tas frequências como mostra a Figura 2.13. Avaliar a dispersão das ondas é importante para entender o comportamento da estrutura sujeita a alguma excitação. Isso permite projetar ferramentas que possibilitem a atenuação das formas de vibrar da estrutura.

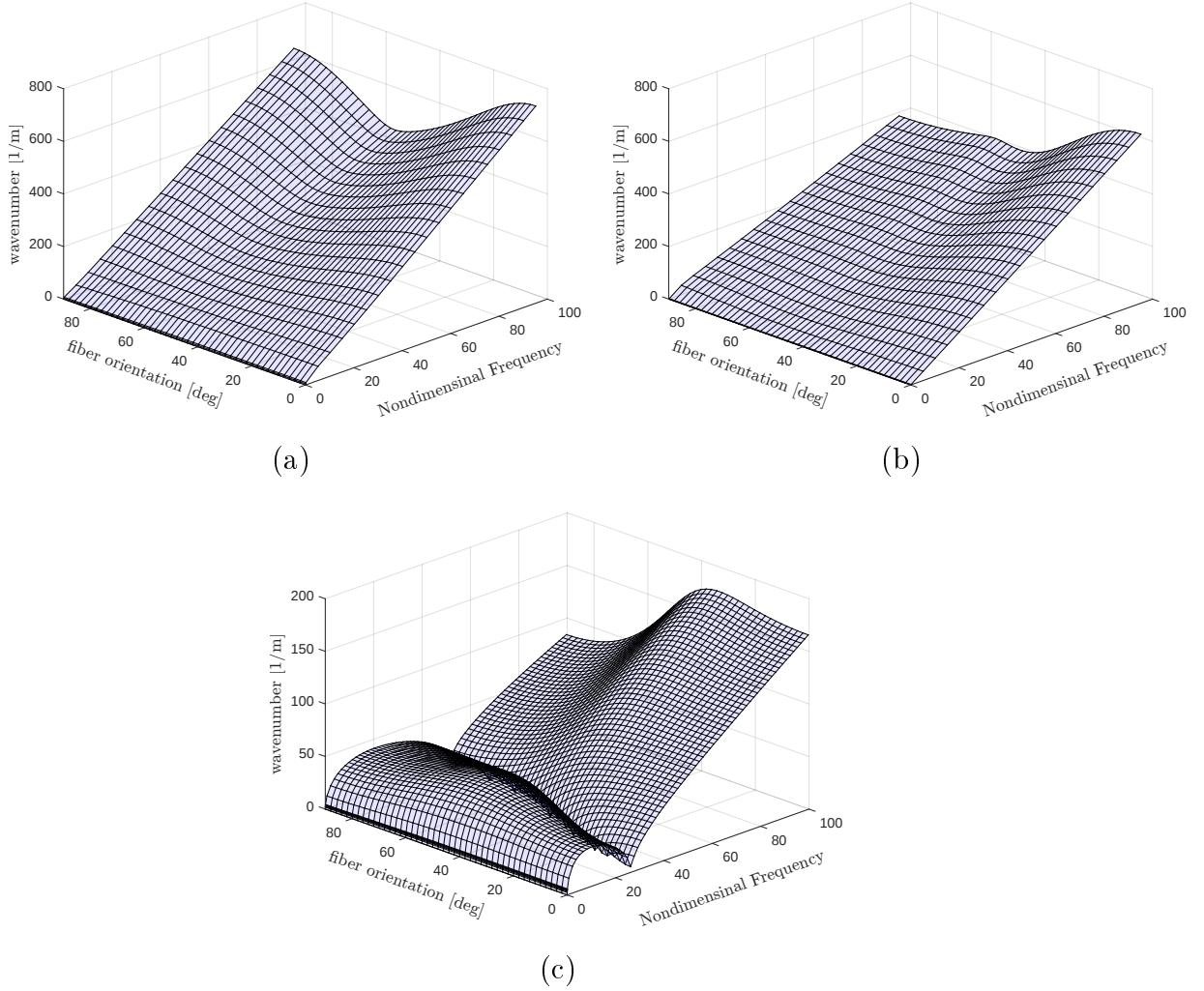


Figura 2.13: Dispersão do número de onda para fibra orientada em diferentes direções $[0^\circ \text{ a } 90^\circ]$ e frequências. Fonte: Próprio Autor

A Figura 2.13 apresenta a relação entre frequência e número de onda para diferentes orientações de fibra. A partir disso, é possível notar que para as Fig. 2.13a e Fig. 2.13c as características das curvas são as mesmas para um comportamento de ondas dispersivas, enquanto que para a Fig. 2.13b, nota-se características de ondas não-dispersivas.

Desta forma, como a relação de dispersão é dependente da orientação da fibra, e sabendo que a rigidez também sofre influência dessa orientação, analisando a Equação 2.19, conclui-se que o número de onda tem forte dependência da rigidez a flexão, torção e cisalhamento e, também, da geometria da viga.

Além disso, avaliando analiticamente a Equação 2.51 para baixa frequência, o coeficiente $a_6 = \kappa GA(K_T^2 - EIGJ)$ é o único que se mantém na Equação 2.50, ou seja, indicando que em baixas frequências, as propriedades mecânicas são predominantes e exercem influência no número de onda. Enquanto que, para altas frequências, o primeiro termo do coeficiente $a_0 = \rho A \rho I \rho J \omega^6 - \rho A \rho J \kappa GA \omega^4$ será predominante na influência no número de onda, devido a ordem de grandeza, ou seja, indicando que para altas frequências as propriedades geométricas exercem maior influência.

Capítulo 3

Metodologia e Modelagem Numérica

Neste capítulo, é desenvolvida uma proposta de modelo e estrutura periódica utilizando material compósito laminado. O modelo matemático utiliza o Método de Elementos Espectrais descrito na seção 2.3.1. Esse método tem sido amplamente empregado no estudo de estruturas periódicas devido à versatilidade e bons resultados. A relação de dispersão é obtida através da resolução de problemas de autovalores utilizando o método de matriz de transferência proposto por Rubin (1966) e descrito na seção 2.3.2. Por fim, para investigar a presença das bandas de paradas (*bandgaps*, em inglês) para um número finito de estruturas periódicas, utilizou-se funções de resposta em frequência (FRF).

3.1 Estrutura com única camada

Inicialmente, uma estrutura de camada simples foi estudada para investigar o comportamento de estruturas periódicas feitas de materiais compósitos laminados. Essas estruturas podem ser observadas na Figura 3.1. Elas consistem de um número de células unitárias que se repetem periodicamente em uma estrutura de viga.

A célula unitária é composta de dois elementos montados linearmente com diferente orientação de fibra (Fig. 3.2). Devido a característica particular apresentada pelo compósito, obtenção de diferente rigidez estrutural apenas variando a orientação da

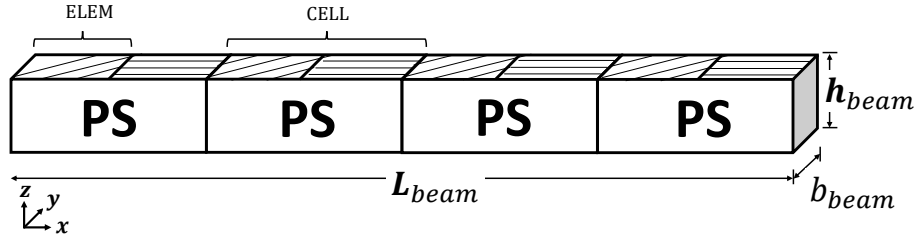
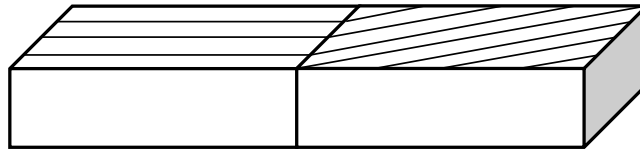


Figura 3.1: Viga de compósito epóxi-fibra de vidro com condição livre-livre. b_{beam} = largura, h_{beam} = espessura/altura, L_{beam} = comprimento e PS = Estrutura periódica. Fonte: Próprio Autor

fibra, é possível avaliar a melhor combinação que fornece bons resultados para atenuação de vibração.



(a)

Figura 3.2: Célula unitária com duas subestruturas composta de fibras com orientações diferentes. Fonte: Próprio Autor.

3.1.1 Relação de Dispersão

Com o propósito de avaliar a influência da orientação da fibra na relação de dispersão, uma célula unitária é assumida, como mostra a Figure 3.2. Inicialmente, a primeira subestrutura foi escolhida com base na máxima rigidez à torção e mantida sem alterar. Nesse caso, adotou-se a fibra orientada a 45° . Enquanto que, na segunda subestrutura, alterou-se de 0° até 90° . A definição do orientação da fibra é descrita na seção 2.2.1 com base nas equações apresentadas na seção 2.1.

A Figura 3.3 mostra a influência da orientação da fibra na atenuação da vibração no domínio da frequência. Com base nos resultados obtidos, para algumas combinações

de ângulos, os efeitos na atenuação tem menos influência, enquanto que, em outros é possível notar que há presença de bandas de para em algumas faixas de frequência.

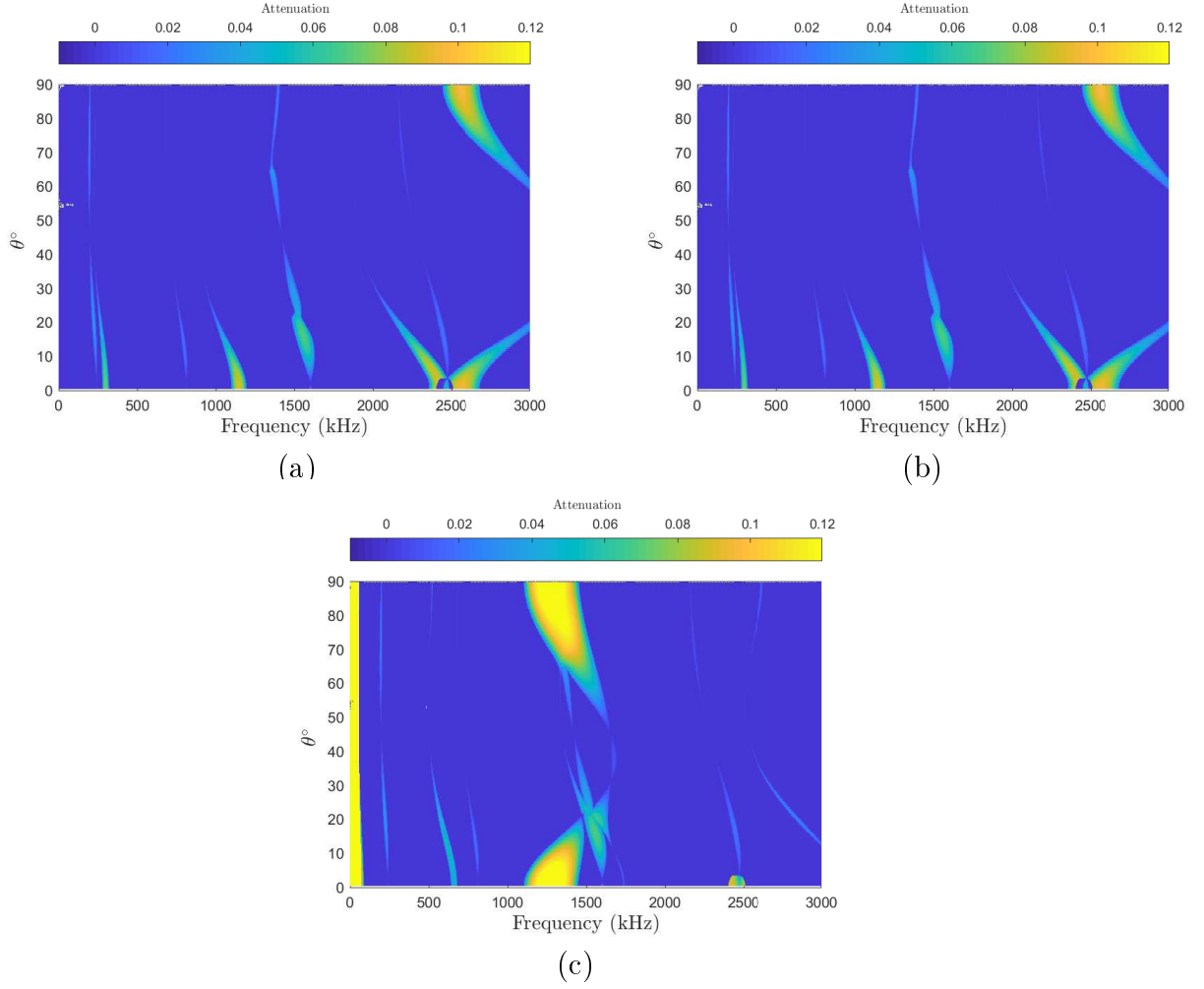


Figura 3.3: Relação de dispersão para diferentes combinações de ângulo da fibra para a segunda célula unitária. Vista superior. Fonte: Próprio Autor.

A partir da Figura 3.3, nota-se que em determinadas faixas de frequência, pode-se obter bandas de parada que agem simultaneamente no comportamento de flexão-torção-cisalhamento. Devido a dependência do número de onda com a rigidez, apresentado na Equação 2.50, e sendo a relação de dispersão dependente do número de onda, para cada combinação de célula unitária, será possível obter diferentes comportamentos para a relação de dispersão.

3.1.2 Exemplo Numérico

Considere um modelo de viga, como ilustrado na Figura 3.4. A estrutura apresenta periodicidade e é utilizada para auxiliar na compreensão do comportamento dinâmico desse tipo de estrutura. A viga possui condição de contorno livre-livre. O estudo considerou a mesma propriedade de viga apresentada por Teh and Huang (1980), Bannerjee and Foist (1996), and Lee and Jang (2010).

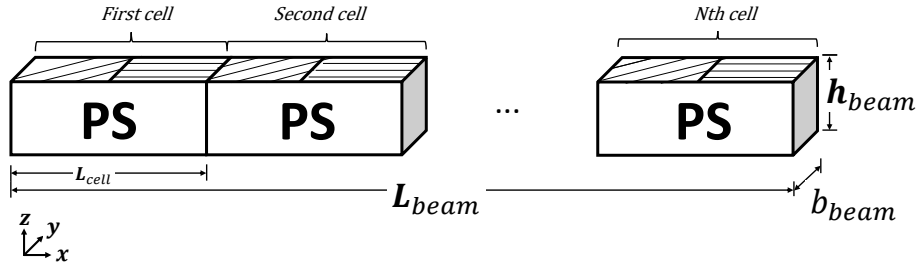


Figura 3.4: Estrutura geométrica com periodicidade. b_{beam} = largura, h_{beam} = espessura/altura, L_{beam} = comprimento e PS = Estrutura periódica. Fonte: Próprio Autor.

A Tabela 3.1 descreve as propriedades do material.

Tabela 3.1: Propriedades mecânicas do material compósito epóxi-fibra de vidro.

Propriedades do Compósito	valor	Geometria	Valor
E_{11} (GPa)	3.25	L (m)	0.1905
E_{33} (GPa)	9.71	b (m)	0.0127
G_{12}, G_{13} (GPa)	0.9025	h (m)	0.00318
G_{23} (GPa)	0.2356		
ν_{31}	0.29		
ρ (kg/m ³)	1347		

A viga de compósito é feita de fibra unidirecional, contendo camada única, espessa e de seção transversal retangular (Fig. 3.4). A influência do número de células N é avaliada no domínio da frequência. As bandas de parada são avaliadas para diferentes números de células. Na Tab. 3.2, é apresentada algumas configurações de estruturas periódicas utilizadas.

Inicialmente, foi analisado uma estrutura de viga com comprimento constante, dividida em estruturas menores (periódicas) que podem ter comprimento variável conforme a quantidade de células periódicas são adicionadas a viga principal, vide Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Orientação de camada espessa única.

Configuração da Viga	Estruturas Periódicas	Orientação da camada(°)
Elem ₁	-	0
Elem ₂	-	45
Cell ₁	-	(45 – 0)
Cell ₅	5	(45 – 0)
Cell ₁₀	10	(45 – 0)

Em outras palavras, apenas o comprimento das células periódicas se altera na ordem de $\frac{L_{beam}}{N}$. O segundo caso a ser investigado, consiste em adicionar células periódicas com o mesmo comprimento que a viga, nesse caso, há o aumento de comprimento e, conseqüentemente, de massa na estrutura. A Figura 3.5 apresenta uma célula unitária composta de duas estruturas menores ou subestruturas, a 45° e 0°. Esses ângulos foram escolhidos com base no desenvolvimento apresentado no capítulo 2, podendo ser encontrados na figura 2.6.

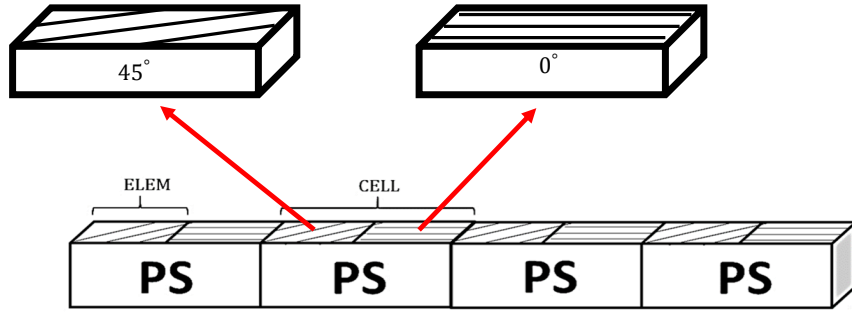


Figura 3.5: Célula unitária composta de duas subestruturas proposta neste trabalho. Fonte: Próprio Autor.

As possíveis faixas de *bandgaps* foram identificadas através da relação de dispersão apresentada na Figura 3.6 obtida através da solução do problema de autovalor e autovetor (Eq. 2.36). Se os valores obtidos para o número de onda ou constante de propagação (k ou k_j) forem reais diferentes de zero, então haverá zonas de atenuação, no entanto, se k ou k_j for puramente imaginário, haverá regiões de propagação livre (Gupta, 1970). As regiões cinzas identificam os *bandgaps* encontrados utilizando a combinação de estru-

tura periódica proposta. Para a análise da resposta em frequência, as mesmas regiões devem aparecer. Além disso, para algumas faixas de frequência, os *bandgaps* não são significativos. Nesse caso, é necessário aumentar o número de estruturas periódicas a fim de provocar o aparecimento dos *stopbands*. Assim, sendo possível comparar com a resposta em frequência.(Fig. 3.8 - 3.16)

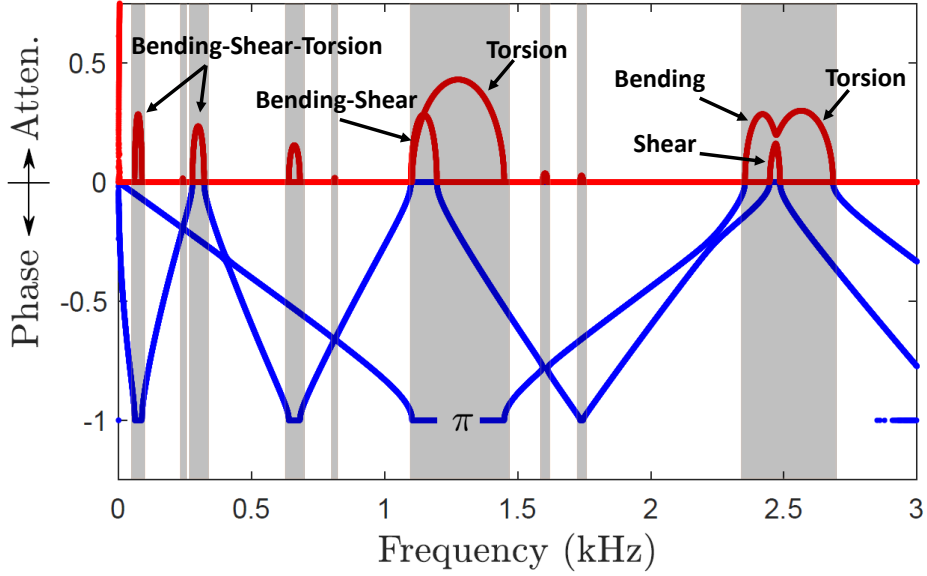


Figura 3.6: Constante de propagação da viga de metamaterial proposta com fibras combinadas e orientadas em 0° and 45° . A região cinza indica a presença dos *bandgaps*. Fonte: Próprio Autor.

Note que na Figura 3.6, há algumas curvas sobrepostas. Esse comportamento ocorre por causa da obtenção de uma equação bi-quadrática dependente da rigidez. A rigidez ao cisalhamento, flexão, torção e de acoplamento flexo-torção estão presentes no mesmo coeficiente da equação. Além disso, é responsável por fornecer as raízes do número de onda (Eq. 2.50). Desta forma, para algumas faixas de frequência, os *bandgaps* podem ser obtidos simultaneamente.

Uma força senoidal (F), com diferentes faixas de frequência, é considerada. Essa força é aplicada no elemento a esquerda na primeira célula unitária, como mostra a

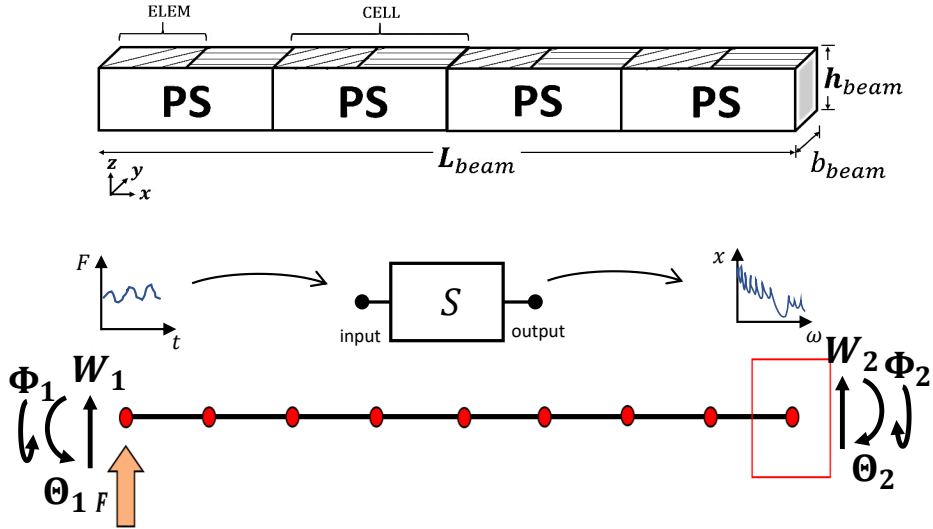


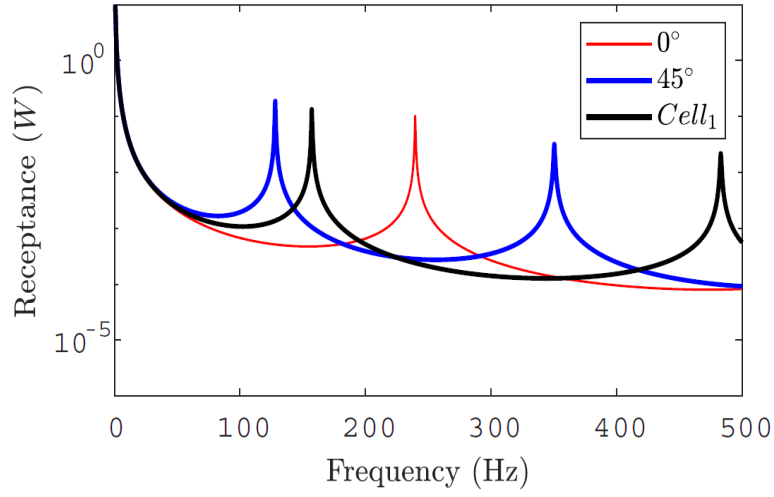
Figura 3.7: Impulso de força aplicado no primeiro elemento da estrutura periódica. A resposta em frequência foi avaliada no último elemento. Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 3.7. A resposta em frequência foi obtida no segundo elemento da última célula através de uma matriz de transferência proposta por Rubin (1996) que fornece a solução para um problema de autovalor.

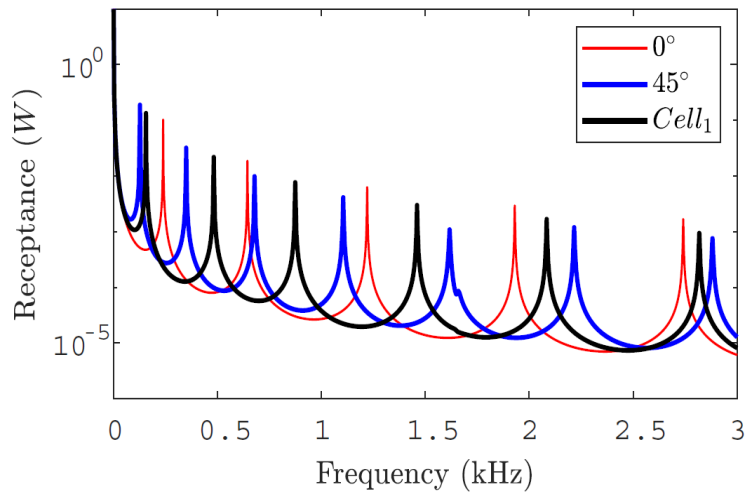
3.1.3 Resultados e Discussões

Em seguida, é apresentado os resultados da *FRF* para uma viga com condição de contorno livre-livre para as cinco configurações diferentes de acoplamento da estrutura periódica propostas na Tabela 3.2. Foi utilizando um amortecimento $c_1 = c_2 = c_3 = 0.0001 Nm/s$ a fim de reduzir os picos de resposta.

Figuras 3.8a e 3.8b mostram a comparação da resposta em frequência entre três estruturas diferentes de células unitárias: uma formada apenas por fibra alinhada a 0° , a outra a apenas alinhada a 45° e, por fim, uma célula que é formada por ambas camadas alinhadas a 45° e 0° , a fim de compara-las quanto ao comportamento causado por uma carga de impulso. Nota-se que há um deslocamento dos modos, como podemos observar nas regiões de picos. É possível avaliar que, para a célula unitária que contém a com-



(a)

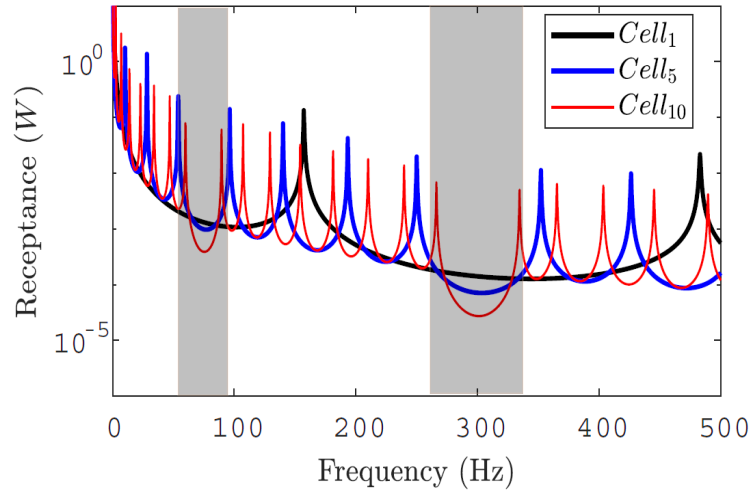


(b)

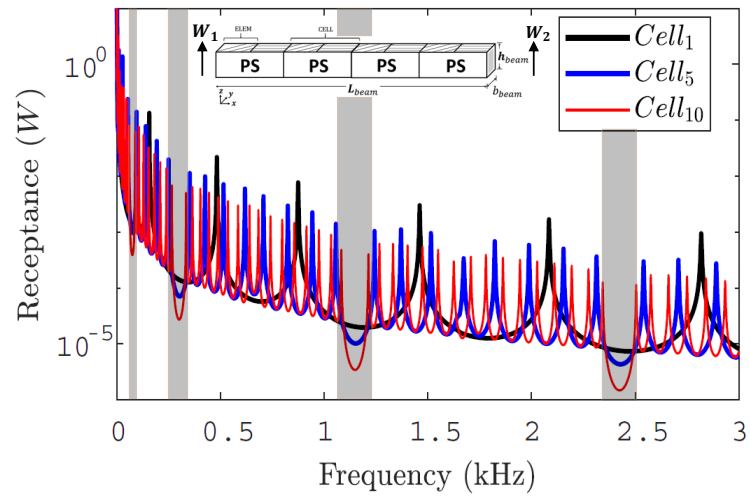
Figura 3.8: Função de resposta em frequência dos efeitos de acoplamento flexão-cisalhamento-torção com carga axial $P = 0\text{N}$. A resposta ao deslocamento ao cisalhamento de uma viga livre-livre excitada através de uma força de impulso W_1 . (a) apresenta resposta em baixa frequência. (b) resposta em alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.

binação entre os ângulos adotados, o primeiro modo ocupa uma posição intermediária entre o primeiro modo de vibrar das células de 45° e 0° . Isso também pode ser verificado para os modos seguintes. Contudo, não foi possível observar a formação dos *bandgaps*, visto que, não verificou-se a presença de *stopbands*.

Aumentando o número de células periódicas, os resultados apresentados na Fig. 3.9a e 3.9b mostram a resposta em frequência para o deslocamento ao cisalhamento para a



(a)



(b)

Figura 3.9: Resposta em frequência dos efeitos de acoplamento de flexão-cisalhamento-torção. (a) baixa frequência. (b) Alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.

viga livre-livre. Na Figura 3.9b, o acoplamento da camada de elementos orientados a 45° e 0° produzem uma variação na resposta em frequência e a formação de *bandgaps*. As regiões em destaque são caracterizadas pela presença de *stopbands*, isto é, faixa de frequência que não há propagação de vibração. Nessas regiões, a propagação de onda é interrompida. As regiões de *bandgaps* aumentam com o número de células periódicas.

O mesmo comportamento discutido na fig. 3.8 são observados nas Figuras 3.10 e 3.12. Para deslocamento em flexão, os modos da estrutura com acoplamento 0° e 45° são deslocado para uma posição intermediária entre as células que contém orientação

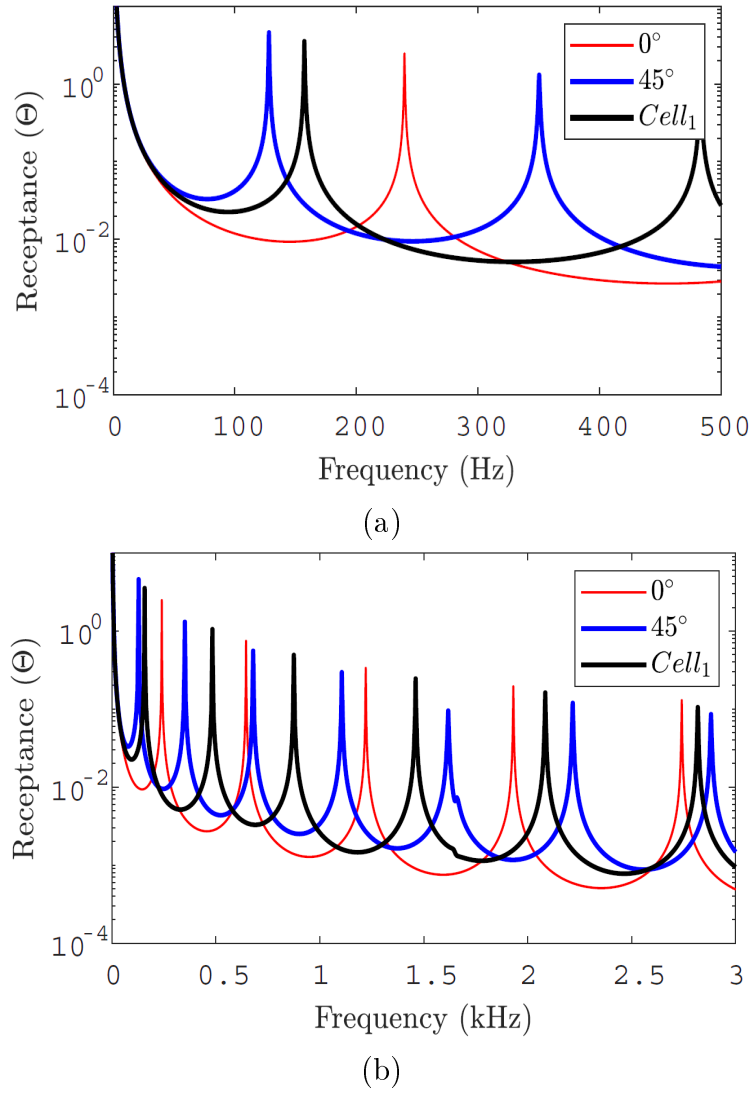


Figura 3.10: Função de resposta em frequência dos efeitos de acoplamento flexão-cisalhamento-torção com carga axial $P = 0N$. A resposta ao deslocamento ao cisalhamento de uma viga livre-livre excitada através de uma força de impulso W_1 . (a) apresenta resposta em baixa frequência. (b) resposta em alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.

única. Para esse comportamento, não foi possível verificar a presença de *stopbands*.

Analisando as Figuras 3.11a e 3.11b, o deslocamento para flexão também é influenciado pelo acoplamento dos elementos, além disso, observa-se o mesmo comportamento sofrido no cisalhamento. No acoplamento torcional, obteve-se *bandgap* usando apenas uma célula. Isso ocorre devido ao acoplamento dos elementos, uma vez que, ambos elementos (0° e 45°) possuem características únicas em termos de rigidez estrutural. Isto é,

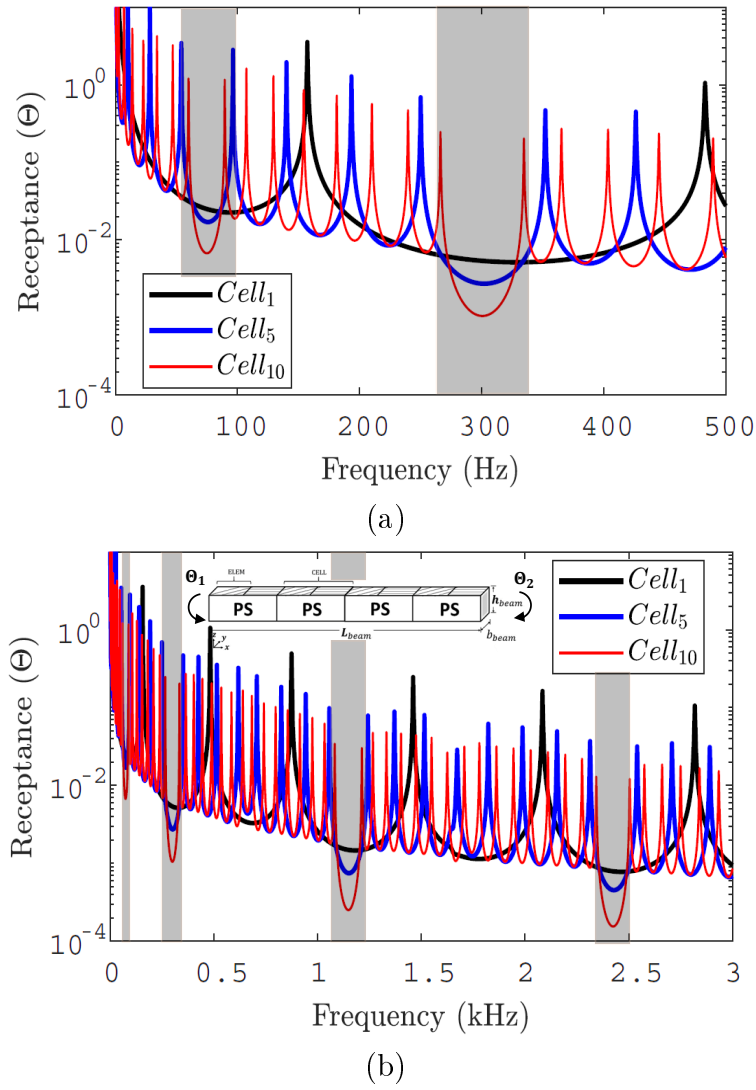


Figura 3.11: Função de resposta em frequência dos efeitos de acoplamento flexão-cisalhamento-torção com carga axial $P = 0N$. A resposta ao deslocamento ao cisalhamento de uma viga livre-livre excitada através de uma força de impulso W_1 . (a) apresenta resposta em baixa frequência. (b) resposta em alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.

para rigidez a flexão, o elemento orientado a 0° possui valor máximo de rigidez a flexão e valor mínimo para rigidez a torção, por outro lado, o elemento orientado a 45° possui valor máximo de rigidez a torção e valor mínimo de rigidez a flexão.

Para o deslocamento de torção, a estrutura de compósito laminado orientado a 0° não possui rigidez a torção conforme analisado na seção 2 através da Equação 2.19 que fornece a relação entre a orientação da fibra e rigidez estrutural (Fig. 2.6). Os

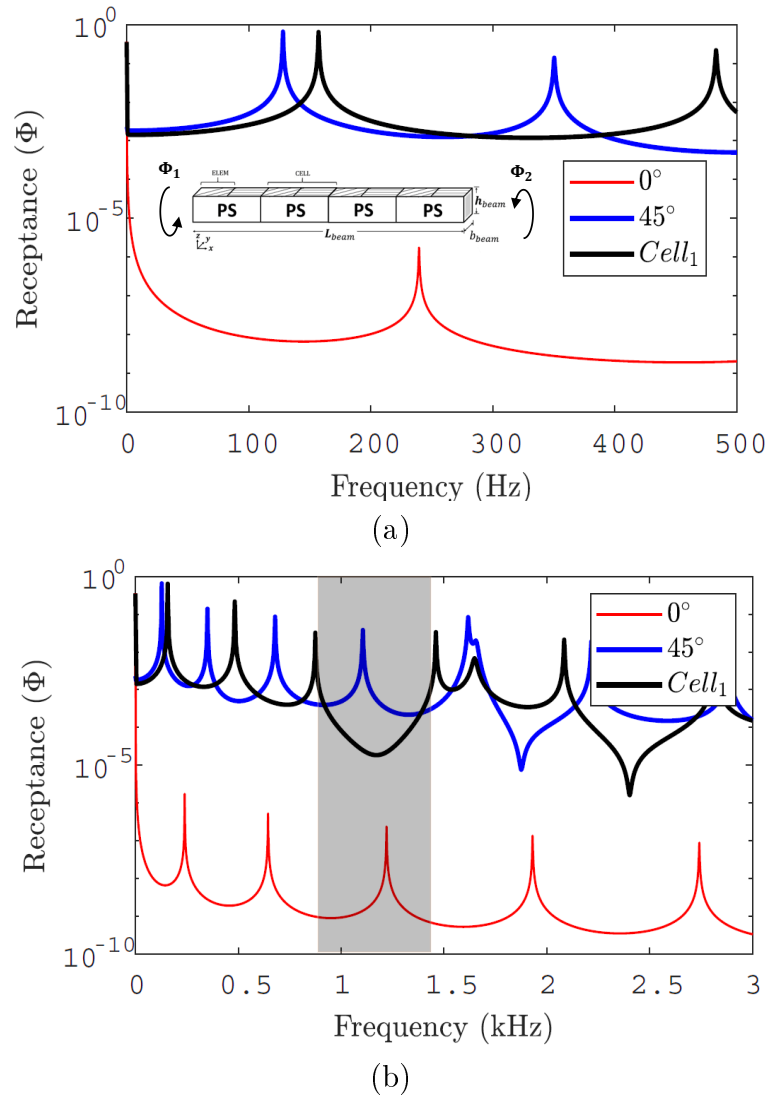


Figura 3.12: Função de resposta em frequência dos efeitos de acoplamento flexão-cisalhamento-torção com carga axial $P = 0N$. A resposta ao deslocamento ao cisalhamento de uma viga livre-livre excitada através de uma força de impulso W_1 . (a) apresenta resposta em baixa frequência. (b) resposta em alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.

modos de ambos, 0° and 45° , são deslocados para uma posição intermediária entre eles (Fig. 3.12a and 3.12b). Da mesma forma que nos casos anteriores, há a formação de *bandgap*. Isso ocorre devido a um desacoplamento entre os elementos com orientação diferente. Note que a estrutura com fibra alinhada a 0° não fornece rigidez a torção, desta forma, na estrutura que há o acoplamento das duas fibras de diferente orientação, temos comportamentos distintos gerados em cada elemento e, conseqüentemente, há a

formação de *bandgap*.

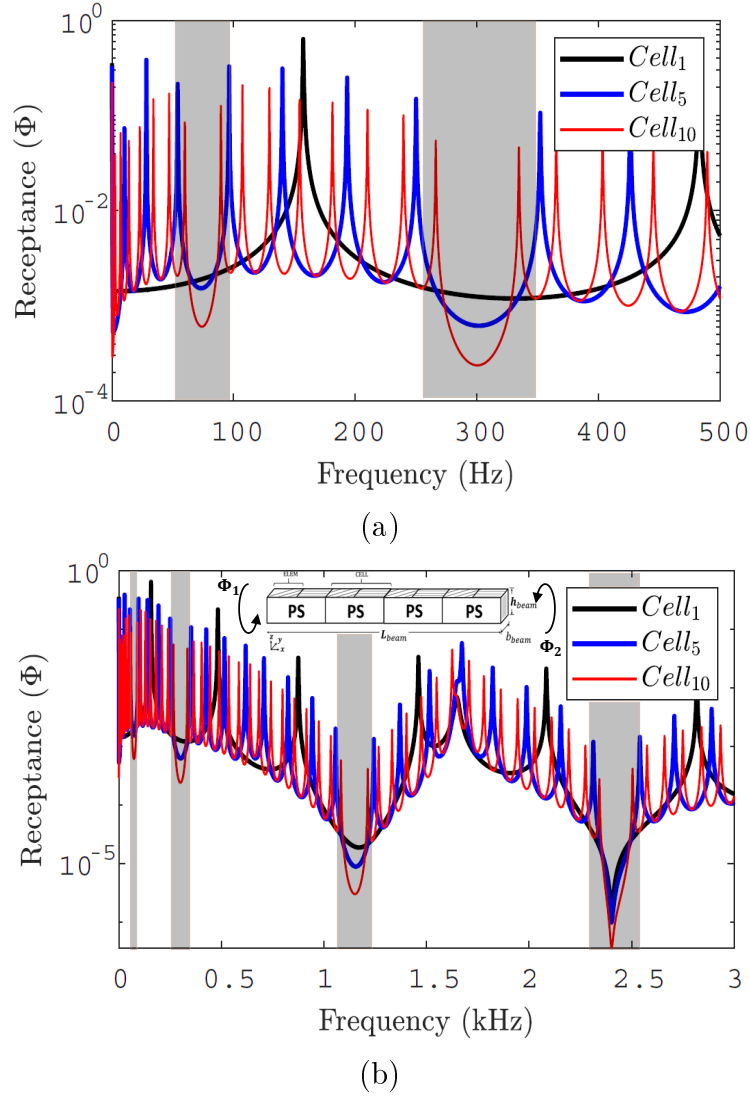


Figura 3.13: Função de resposta em frequência dos efeitos de acoplamento flexão-cisalhamento-torção com carga axial $P = 0N$. A resposta ao deslocamento ao cisalhamento de uma viga livre-livre excitada através de uma força de impulso W_1 . (a) apresenta resposta em baixa frequência. (b) resposta em alta frequência. Fonte: Elaborado pelo autor.

O acoplamento produz uma variação da frequência e dos modos, como mostram as figuras 3.13a e 3.13b, sendo possível observar regiões com *bandgaps*.

As faixas de *bandgaps* são responsáveis por atenuar ou bloquear a propagação de onda. Com o aumento do número de estruturas periódicas, a presença dos *bandgaps* são mais expressivas. Neste caso, é importante salientar que, no desenvolvimento de

projetos, no qual esteja sujeito a vibrações mecânicas, o uso de estruturas periódicas podem ser uma maneira de obter a redução de vibração, uma vez que, conhecendo a faixa de frequência na qual a estrutura estará trabalhando, pode-se obter faixas de *bandgaps* ou de *stopbands* apenas adicionando estruturas periódicas com diferentes rigidez.

Finalmente, foi analisado a resposta em frequência para uma estrutura adicionando células periódicas com o mesmo comprimento da viga. Nessa situação, a viga não é seccionada em estruturas menores que se repem periodicamente, e sim, adicionado ao final da célula unitário, uma nova célula, aumentando, portanto, o comprimento e a massa da viga.

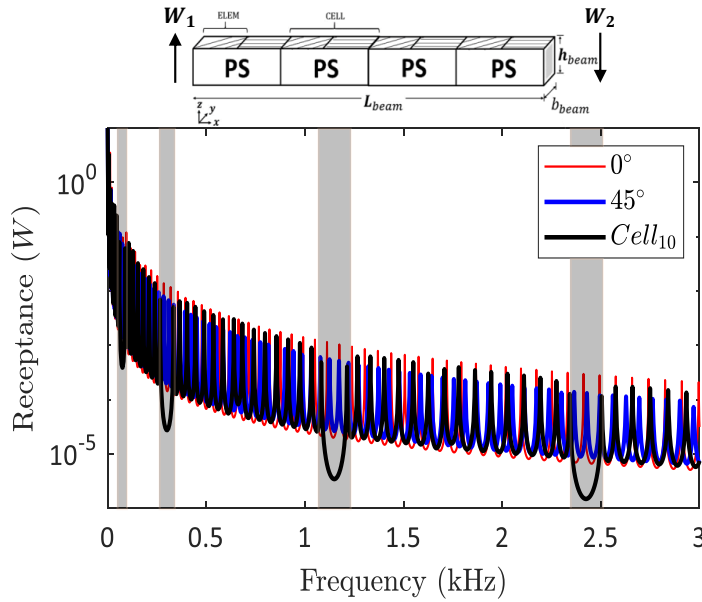


Figura 3.14: Resposta em frequência da viga com mesmo comprimento e número de estruturas periódicas sob ação de carga de cisalhamento. Fonte: Elaborado pelo autor.

Avaliando as Figuras 3.14, 3.15 e 3.16, o mesmo comportamento foi encontrado quando se adicionou estruturas periódicas com comprimento igual ao comprimento original da viga. Com o aumento do comprimento da viga, há um aumento esperado da quantidade de modos de vibrar, contudo, a formação dos *bandgaps* ocorrem nas mesmas regiões previamente explicadas.

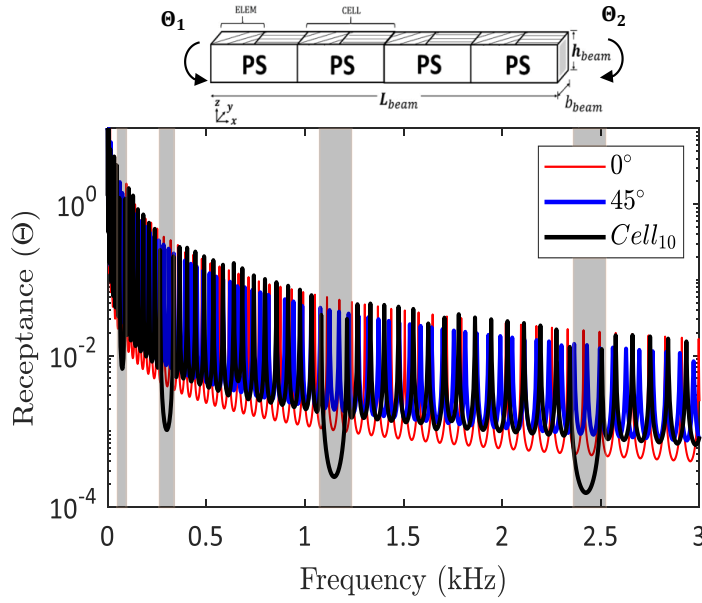


Figura 3.15: Resposta em frequência para uma viga sob ação de carga de flexão. Fonte: Elaborado pelo autor.

Para uma estrutura periódica, verifica-se que o número de células que se repetem periodicamente é responsável pelo aumento na magnitude da atenuação de vibração e no número de formas modais. Uma vez que, as faixas de *bandgaps* não varia, por causa da sua dependência em relação as características mecânicas do material, ou seja, da rigidez.

Comparando os resultados obtidos através da constante de propagação do metamaterial proposto (Fig. 3.5) e a resposta em frequência (Fig. 3.8 - 3.16) para alguns números de células periódicas, a mesma faixa de *bandgap* foi encontrada. Desta forma, é possível identificar que a constante de propagação fornece previamente as possíveis faixas de *bandgaps*.

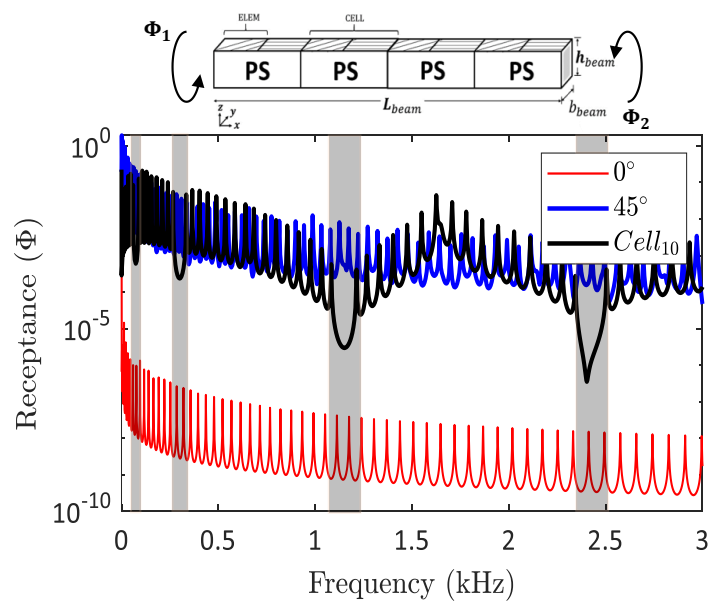


Figura 3.16: Resposta em frequência para uma viga sob ação de carga de torção. Fonte: Elaborado pelo autor.

Capítulo 4

Conclusões e Sugestão para trabalhos futuros

4.1 Conclusões

Neste trabalho foi abordado a utilização de estruturas periódicas utilizando material compósito laminado, de modo que a periodicidade foi obtida pela variação do ângulo da fibra, sem a adição de material. Desta forma, foi utilizado a variação da impedância mecânica pela alteração do ângulo da fibra de uma estrutura para outra.

Devido às características dinâmicas que exibe uma estrutura periódica, que a fazem atuar como filtros, e com a introdução de diferença de rigidez na estrutura, criando-se regiões de descontinuidades ou de desordem permitindo auxiliar na redução de propagação de vibração mecânica em uma viga, foi possível criar faixas de frequência específicas ao longo da estrutura periódica onde as ondas pudessem se propagar apenas dentro dessas frequências e serem bloqueadas ou atenuadas em outras. Portanto, foram criados regiões de bandas de parada (ou "*bandgaps*", termo em inglês) e bandas de passagem (ou "*pass band*"). Segundo Baz (2019), essas bandas são fixas para estruturas periódicas passivas, podendo ser alteradas para estruturas periódicas ativas como no caso da utilização de materiais de memória de forma ou piezoelétrico. No caso da proposta

apresentada, manteve-se as características de uma estrutura periódica passiva.

A fim de avaliar a atenuação de uma viga de estrutura periódica com material compósito laminado proposto neste trabalho, as características dinâmicas foram obtidas através do método de matriz de transferência. Então, partiu-se do princípio que ao excitar com uma carga de perturbação a parte inicial da viga (lado esquerdo), a resposta no final dela (lado direito) seria obtida devido a propagação do sinal em cada uma das células, isto é, haveria uma transferência do sinal de saída de uma célula unitária para a entrada na célula unitária seguinte, sendo, então, necessário encontrar a matriz de transferência, que é dependente da rigidez dinâmica da célula unitária. A rigidez dinâmica foi obtida através do Método de Elemento Espectral. Por fim, a resposta foi alcançada através de um problema de autovalor.

Nota-se que há ainda uma necessidade de aprofundamento no estudo de materiais compósitos laminados como fonte de atenuação de vibração. Há alguns estudos baseados em compósitos laminados dispostos em estruturas periódicas que avaliam apenas o benefício gerado pelo aumento das camadas. De modo a possibilitar uma outra abordagem, este trabalho, buscou utilizar tanto os efeitos benéficos da variação da orientação da fibra como da utilização das estruturas periódicas na tentativa de obter atenuação em determinadas faixas de frequências.

De acordo com a proposta deste trabalho com base na análise teórica e numérica, pode-se concluir que:

- Foi possível obter um modelo de estrutura periódica utilizando material compósito laminado com diferentes orientações de fibra, uma vez que, cada combinação permite obter diferentes respostas para as faixas com *bandgaps*;
- Pode-se obter analiticamente uma equação do número de onda para a estrutura proposta utilizando algumas hipóteses simplificadoras, podendo utilizá-la como ferramenta para auxiliar na escolha da composição das células de compósitos;
- Nota-se uma dependência do número de onda com a rigidez da estrutura e, por-

tanto, do ângulo de orientação da fibra do compósito;

- A atenuação é tão maior quanto for a quantidade de estruturas periódicas;
- Os *bandgaps* podem ser obtidos para baixa frequência através da variação da rigidez da estrutura (EI , GJ , κGA e K_T , provocando regiões de descontinuidades, uma vez que, em baixa frequência há dependência predominante da rigidez. Enquanto que, para altas frequências, as propriedades geométricas ρA , ρI e ρJ , são dominantes, logo alterando o tamanho da estrutura ou a densidade do material em cada célula será possível gerar regiões de atenuação de vibração, sem adicionar amortecimento ao sistema.
- Foi possível obter os *bandgaps* apenas com a influência da orientação da fibra, não sendo necessário alterar a massa ou a geometria da estrutura.

O estudo foi importante para entender os efeitos no comportamento dinâmico quando se considera uma viga com acoplamento flexo-torção-cisalhamento e, portanto, sua continuidade pode fornecer subsídios necessários para o desenvolvimento de mecanismos para atenuação de vibração.

4.2 Recomendações de trabalhos futuros

Esse trabalho foi desenvolvido com base em uma viga de espessura única com o propósito de estudar a influência da orientação da fibra no número de onda, relação de dispersão e formação de bandas de parada, utilizando uma combinação de estruturas pré-determinadas. Há oportunidades complementares para uma futura investigação, no qual poderá ser útil no desenvolvimento de estruturas periódicas para a atenuação de vibração. Desta forma, algumas recomendações estão listadas abaixo:

- Avaliar a influência e múltiplas camadas na atenuação de vibração;
- Investigar estruturas periódicas com mais combinações;

- Verificar o comportamento estrutural nas regiões de variação da orientação da fibra devido as descontinuidades.

Bibliografia

Park, I., Lee, U., "Spectral element modeling and analysis of the transverse vibration of a laminated composite plate", *Composite Structure*, 134 (2015), pp. 905-917.

Lu, Y. P., Neilson, H. C., Roscoe, A. J., "On the vibration properties of composite materials and structures", *J Compos Mater* 1993; 27 1598–605.

Gay, D., Hoa, S. V., Tsai, S. W., *Composite Material: Design and Applications*, 2003. CRC Press, New York.

Gibson, Ronald F, *Principles of Composite Material Mechanics*, CRC Press, Vol.3, No. 2 (1985), pp. 1-2, pp. 15-28, 2011, ISBN 9781498720694.

Milton, G.. Contents. "In the Theory of Composites" (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, pp. Ix-Xviii). Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

Jun, L., and Xianding, J., "Coupled bending-torsional dynamic response of axially loaded slender composite thin-walled beam with closed cross-section", *J. Compos. Mater.*, 38 (2004), pp. 515-534.

Chung, D.D.L., "Structural composite materials tailored for damping", *J Alloy*

Compd, 355 (1–2) (2003), pp. 216–223.

Chandra, R, Singh, SP, Gupta, K. "Damping studies in fiber-reinforced composites – a review". Compos Struct 1999; 46: 41–51.

Ren, T., Liu, C., Li, F., Zhang, C., "Active tuning of the vibration band gap characteristics of periodic laminated composite metamaterial beams", Journal of Intelligent Material Material Systems Structures, 31 (2020), pp. 843–859.

Reithmeier, E., Leitmann, G., "Robust vibration control of dynamical systems based on the derivative of the state". Archive of Applied Mechanics 72, 856–864 (2003). <https://doi.org/10.1007/s00419-002-0267-0>.

Xu, Z.D., Guo, Y.Q., Zhu, J.T., Xu, F.H., "Intelligent Vibration Control in Civil Engineering Structures", Academic Press, New York (2016)

Lakshmanan, K. A., Pines, D. J., "Detecting crack size and location in composite rotorcraft flexbeams", Proc. SPIE 3041, Smart Structures and Materials 1997: Smart Structures and Integrated Systems, 1997; doi: 10.1117/12.275665.

Vihlborg, P., Bryngelsson, I., Lindgren, B., Gunnarsson, L.G., Graff, P., "Association between vibration exposure and hand-arm vibration symptoms in a Swedish mechanical industry". Int.J.Ind.Ergonom 2017.62,77–81.S. Carra, et al.Safety Science 120 (2019) 706–727727

Tse, F. S., Hinkle, R. Theodore., Morse, I. E. (1978). Mechanical vibrations: theory and applications. 2d ed. Boston: Allyn and Bacon.

Leitmann G., "Semiactive Control for Vibration Attenuation. Journal of Intelligent Material Systems and Structures", 1994;5(6):841-846. doi:10.1177/1045389X9400500616.

Jensen, J.S., "Phononic band gaps and vibrations in one-and two-dimensional mass-spring structures", J. Sound Vib., 266 (2003), pp. 1053-1078.

Roy, A., and Plunkett, R., "Wave Attenuation in Periodic Structures", J. Sound Vib., 1986, 114, pp. 395-411

Baz, A. M., Active and Passive Vibration Damping, Wiley, 2019, pp. 523-588, ISBN: 1118481925, 9781118481929. <https://doi.org/10.1002/9781118537619.ch10>.

Ruzzene, M. and Baz, A., "Attenuation and localization of wave propagation in periodic rods using shape memory inserts", Smart Material Structure 9 805-16. February 2000; <https://doi.org/10.1088/0964-1726/9/6/310>.

Rao, M. S., Narayanan, S., "Active control of wave propagation in multi-span beams using distributed piezoelectric actuators and sensors", Smart Mater. Struct., 16 (2007), pp. 2577-2594.

Huang, J., Liu, W., Shi, Z., "Surface-wave attenuation zone of layered periodic structures and feasible application in ground vibration reduction", Constr. Build. Mater., 141 (2017), pp. 1-11. <https://doi.org/10.1080/23307706.2016.1256793>.

Raghavan, L., Phani, A., "Local resonance bandgaps in periodic media: theory and experiment", Journal of the Acoustical Society of America, 134 (2013), pp. 1950-1959. <http://dx.doi.org/10.1121/1.4817894>.

Sheng, M., Guo, Z., Qin, Q., He, Y., "Vibration characteristics of a sandwich plate

with viscoelastic periodic cores", *Compos Struct* (2018), 10.1016/j.compstruct.2018.07.110

Ruzzene, M., Baz, A., "Active control of wave propagation in periodic fluid-loaded shells", *Smart Material Structure* 10, 893 (2001).

Reddy, J. N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC Press, Vol.2, pp. 1-2, pp 81-85, 2003, ISBN 9780849315923.

Ashton, J. E, Whitney, J. M., *Theory of laminated plates*, Technomic, Stanford, Conn, pp. 1-30, 1970.

Teh, K.K., Huang, C.C., "The effects of fibre orientation on free vibrations of composite beams", *Journal of Sound and Vibration*, Volume 69, Issue 2, Pages 327-337, 1980, ISSN 0022-460X, [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(80\)90616-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(80)90616-1).

Abarcar, R.B., Cunniff, P.F., "The vibration of cantilever beams of fiber reinforced material", *J Compos Mater*, 6 (1972), pp. 504-517, <https://doi.org/10.1177/002199837200600306>.

Doyle, J. F., "Wave Propagation in Structures", Springer, New York, , pp. 1-35, pp 150-190, 1997. ISBN 9781461273042 . <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1832-6>.

Lee, U., "Dynamics of Composite Laminated Structures. In Spectral Element Method in Structural Dynamics", U. Lee (Ed.) , 2009, doi:10.1002/9780470823767.ch11

Lee, U., "Spectral element method in structural dynamics", *Shock and Vibration Digest*, 2009, ISBN:9780470823767, doi:10.1002/9780470823767

Weisshaar, J.R., Williams, F.W., "Vibration tailoring of advanced composite lifting

surfaces", Journal of Aircraft, Vol. 22, No. 2, pp. 141-147, 1985.

Nanda, N., Kapuria, S., "Spectral Finite Element for Wave Propagation in Curved Beams". Journal of Vibration and Acoustics, 2015. 137. 10.1115/1.4029900.

Baz, A. . "Active Control of Periodic Structures", ASME. J. Vib. Acoust. October 2001; 123(4): 472–479. <https://doi.org/10.1115/1.1399052>.

Mester, S. S., Benaroya, H., "Periodic and Near-Periodic Structures", Shock and Vibration, vol. 2, Article ID 392839, 27 pages, 1995.

Mead, D.J., "Free wave propagation in periodically supported infinite beams", Journal of Sound and Vibration, 11 (1970), pp. 181-197. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(70\)80062-1](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(70)80062-1).

Rotman, W., Oliner, A. A., "Periodic Structures in Trough Waveguide,"in IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 7, no. 1, pp. 134-142, January 1959, doi: 10.1109/TMTT.1959.1124637.

Rubin, S., "Review of Mechanical Immittance and Transmission Matrix Concepts". Journal of The Acoustical Society of America - J ACOUST SOC AMER. 39, 1966 10.1121/1.1942782.

Mace, B. R., Duhamel, D., Brennan, M. J., and Hinke, L., 2005, "Finite Element Prediction of Wave Motion in Structural Waveguides", J. Acoust. Soc. Am., 117, pp. 2835–2843.10.1121/1.1887126.

Mead, D.J, "Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964-1995", J. Sound Vib. 190 (1996) 495–524 - pag 496. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0076>.

Faulkner, M.G., D.P. Hong, "Free vibrations of a mono-coupled periodic systems", J. Sound Vib. 99 (1985) 29–42, [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(85\)90443-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(85)90443-2).

Fahy, F., Gardonio, P., Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response, Academic Press, 2006 2nd edn, Elsevier, ISBN: 9780123736338.

Bannerjee, T. A., Foist, B. L., "Exact dynamic stiffness matrix for composite Timoshenko beams with applications", Journal of Sound and Vibration, Vol.194, Issue 4, 1996, <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0378>, pp. 573-585.

Lee, U., Jang, I., "Spectral element model for axially loaded bending-shear-torsion coupled composite Timoshenko beams". Composite Structure. 92, 2860–2870 (2010), <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.04.012>

Gupta, G. S., "Natural flexural waves and the normal modes of periodically-supported beams and plates", Journal of Sound and Vibration 1970;13:89–101.