UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Karina Seviero Rampazzi

Equações de diferenças satisfeitas por coeficientes de Verblunsky

São José do Rio Preto
2024

Karina Seviero Rampazzi

Equações de diferenças satisfeitas por coeficientes de Verblunsky

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
Coorientadora: Profa. Dra. Luana de Lima Silva Ribeiro

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2024

R177e

Rampazzi, Karina Seviero

Equações de diferenças satisfeitas por coeficientes de Verblunsky / Karina Seviero Rampazzi. -- São José do Rio Preto, 2024

107 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Cleonice Fátima Bracciali

Coorientadora: Luana de Lima Silva Ribeiro

1. Polinômios ortogonais na circunferência unitária. 2. Equações de diferenças. 3. Função peso semiclássica. 4. Equação de Pearson. 5. Problema de Riemann-Hilbert. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Karina Seviero Rampazzi

Equações de diferenças satisfeitas por coeficientes de Verblunsky

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali
Orientadora

Prof. Dr. Daniel Oliveira Veronese
UFTM – Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani
UNESP – Câmpus de Presidente Prudente

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
28 de fevereiro de 2024

Aos meus pais, Carlos e Sueli,
à minha avó, Aurélia,
à minha irmã, Karla,
dedico.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de iniciar agradecendo a minha orientadora Cleonice F. Bracciali, que sempre esteve disponível em todos os momentos que precisei, não só profissionais, como também pessoais. Sua orientação foi de extrema importância para a conclusão deste trabalho. Sou grata por todos os conselhos e ensinamentos que recebi durante a pós-graduação.

À minha coorientadora Luana L. Silva Ribeiro, que foi essencial durante toda a minha pesquisa, aconselhando-me, não só no projeto, mas em várias decisões tomadas durante este período. Foi um privilégio ter sua motivação constante e encorajamento para seguir os estudos. Fico muito feliz de tê-la como minha coorientadora e, também, grande amiga.

Um agradecimento muito especial à minha supervisora Ana Pilar Foulquié Moreno da Universidade de Aveiro e ao professor Amílcar Branquinho da Universidade de Coimbra, que foram incríveis durante todo o tempo que estive em Portugal para a realização do estágio na Universidade de Aveiro e até os dias de hoje. Com a competência científica deles, aprendi novas abordagens e técnicas atuais que foram fundamentais para o enriquecimento deste trabalho e, também, para a minha formação. Agradeço por todo amparo, disponibilidade e paciência que sempre dedicaram-me. Em Portugal, fizeram com que eu me sentisse parte da família, apresentaram-me Aveiro, Coimbra e muita cultura, portuguesa e espanhola. Muito obrigada, Ana e Amílcar, vocês foram excepcionais desde o primeiro dia que os conheci, não tenho palavras para expressar tamanha gratidão.

Ao professor Alagacone Sri Ranga pelos ensinamentos. Seu incentivo, assistência e sabedoria tiveram um papel muito importante, tanto no mestrado, quanto no doutorado. Muito obrigada!

À todos os integrantes do grupo de pesquisa, por seminários enriquecedores e conselhos valiosos.

A minha mais profunda gratidão à minha família, meus pais, Carlos e Sueli, que deram-me a vida, o amor e o exemplo de serem seres humanos maravilhosos. À minha amada avó Aurélia que coloca-me em todas as suas orações. À minha irmã, Karla, que sempre está ao meu lado, minha melhor amiga, companheira e confidente. Estendo os agradecimentos ao meu cunhado, Fernando, agora, meu irmão e amigo. Este trabalho não teria sido possível sem receber todo o amor, apoio incondicional e suporte familiar. Eu amo muito cada um de vocês.

Aos meus amigos em São José do Rio Preto que viraram família. Ana Clara, Enrico, João, Maycon, Paulo, Rodrigo Barbosa e Rodrigo Ishizaka. Meu muito obrigada por todas as conversas, caronas e parceria. Torço muito e quero o bem de cada um de vocês. Obrigada por todo o companheirismo!

Aos amigos que conheci em Aveiro, aqueles que mostraram-me que eu não estava sozinha, mesmo estando tão longe do meu país. Ana Maria, Brenda, Bruno, Claudia, Dayane, Eduardo, Gabriel, Haroldo, João Miguel, Juan, Marietta, Lidiane, Matheus e Michelle. Fizeram-me entender o verdadeiro sentido de "O que Aveiro une, ninguém separa". Vocês estão nas minhas melhores lembranças. Muito obrigada!

À todos aqueles que permanecem presentes, estando longe ou perto. Meus sinceros agradecimentos ao Fabiano, Fabiola, Giovana, Gustavo, Jonathan, Livea, Lucas, Mariane, Marcela, Marcos, Plínio, Rafaela, Samanta, Tauana, Thiago, Vinicius e Yen. Vocês me ajudam mais do que podem imaginar. Obrigada pelo apoio de cada um.

À todos os professores do Departamento de Matemática do Ibilce/Unesp, da Universidade de Aveiro e da FCT/Unesp, agradeço pelos ensinamentos.

À todos os funcionários da Unesp e da Universidade de Aveiro que sempre me atenderam quando solicitei.

Aos que não citei, meus sinceros pedidos de desculpas, mas agradeço a todos.

À Deus, por sempre me guiar para o melhor caminho.

À Pró-Reitoria de Pós-Graduação (PROPG) da Unesp, pelo apoio financeiro durante o estágio na Universidade de Aveiro em Portugal.

Ao programa de bolsas da UNIVESP, pelo apoio financeiro no primeiro ano do curso de doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

"Educação não transforma o mundo.
Educação muda as pessoas.
Pessoas transformam o mundo."
Freire, 1979, p. 84

RESUMO

O principal objetivo desta tese foi investigar os polinômios ortogonais na circunferência unitária associados a certas funções peso semiclássicas. Determinamos todas as funções peso semiclássicas cujas equações diferenciais do tipo Pearson, satisfeitas por elas, envolvem polinômios de grau menor do que ou igual a 2 e, isso também incluiu, uma extensão da função peso de Jacobi na circunferência unitária. Foram estabelecidas relações de estrutura para os polinômios ortogonais e equações de diferenças não lineares para os coeficientes de Verblunsky complexos associados. Como aplicação, apresentamos diversas relações de estruturas e equações de diferenças associadas a algumas dessas funções peso semiclássicas. Além disso, a fim de obter outras propriedades diferenciais, utilizando uma abordagem conhecida como problema de Riemann-Hilbert, encontramos equações diferenciais de primeira e de segunda ordem para alguns polinômios ortogonais na circunferência unitária.

Palavras-chave: Polinômios ortogonais na circunferência unitária, Equações de diferenças, Função peso semiclássica, Equação de Pearson, Problema de Riemann-Hilbert.

ABSTRACT

The main objective in this thesis is to study the orthogonal polynomials on the unit circle associated with certain semiclassical weight functions. We determine all semiclassical weight functions such that the Pearson-type differential equations satisfied by them involve polynomials of degree at most 2, and this also includes an extension of the Jacobi weight function on the unit circle. General structure relations for the orthogonal polynomials and non-linear difference equations for the associated complex Verblunsky coefficients are established. As application, we present several new structure relations and difference equations associated with some of these semiclassical weight functions. Furthermore, in order to obtain other differential properties, using an approach known as Riemann-Hilbert problem, we found first and second order differential equations for some orthogonal polynomials on the unit circle.

Keywords: Orthogonal polynomials on the unit circle, Difference equations, Semiclassical weight function, Pearson equation, Riemann-Hilbert problem.

Sumário

Introdução

Sejam (a, b) um intervalo real e μ uma medida de Borel positiva. Considere $C(a, b) = \{f : (a, b) \to \mathbb{R};\ f \text{ contínua}\}$, isto é, o espaço das funções contínuas definidas no intervalo (a, b). Um produto interno entre $f_1, f_2 \in C(a, b)$ pode ser definido por uma integral de Riemann-Stieltjes como

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) \,\mathrm{d}\, \mu(x).$$

Se μ é absolutamente contínua, ou seja, $d\mu(x) = w(x)dx$, então a integral torna-se

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x) w(x) \,\mathrm{d}\, x,$$

onde w é uma função integrável definida em (a, b). Como $w(x) \geqslant 0$ e é não identicamente nula em (a, b), então w é chamada função peso.

Dizemos que duas funções são ortogonais entre si, se o produto interno entre elas for zero. Portanto, uma família de funções, $\{f_n\}$, forma um sistema ortogonal em um intervalo (a, b) com relação a uma função peso w se, para quaisquer duas funções distintas da família, tem-se $\langle f_n, f_m \rangle = 0$, $n \neq m \in \mathbb{N}$.

No caso de polinômios, considera-se $\{P_n\}_{n \geqslant 0}$ uma sequência de polinômios ortogonais com relação a uma função peso w em (a, b) quando $\langle P_n, P_m \rangle = 0$, $n \neq m$ e P_n é um polinômio de grau exatamente n. Dizemos que uma sequência de polinômios ortogonais, $\{p_n\}_{n \geqslant 0}$, é ortonormal, se $\langle p_n, p_n \rangle = 1$. Estes polinômios satisfazem uma relação de recorrência de três termos dada por

$$x p_n(x) = a_{n+1} p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n \geqslant 0,$$

com $p_{-1}(x) = 0$, $a_n = \langle x p_n, p_{n-1} \rangle$ e $b_n = \langle x p_n, p_n \rangle$ e chamamos a_n e b_n de coeficientes da relação de recorrência. Estudos bem detalhados sobre esses polinômios podem ser encontrados em Chihara [14], Ismail [32] e Szegő [49].

A teoria dos polinômios ortogonais chama a atenção de muitos pesquisadores devido às suas várias aplicações, tais como em Física Matemática, Análise Numérica, Análise Funcional, processamento de sinais, entre outras. Entre os polinômios ortogonais, alguns são classificados como clássicos ou semiclássicos. Os polinômios ortogonais clássicos são os polinômios de Jacobi, de Laguerre, de Hermite e de Bessel e são muito conhecidos na literatura, ver [14] e [34].

Uma das caracterizações mais conhecidas dos polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos é que a função peso associada, w, satisfaz uma equação de Pearson do tipo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}[\sigma(x) w(x)] = \rho(x) w(x),$$

onde σ e ρ são polinômios. Se σ é um polinômio de grau menor do que ou igual a 2 e ρ é um polinômio de grau 1, então a função peso é chamada de clássica e os polinômios ortogonais associados são polinômios ortogonais clássicos. Se σ é um polinômio de grau maior que 2 ou ρ é um polinômio de grau diferente de 1, a função peso é conhecida como função peso semiclássica. Se σw se anula nos pontos extremos do intervalo de ortogonalidade, os polinômios ortogonais associados à função peso clássica ou semiclássica, satisfazem relações de recorrência diferenciais, também conhecidas como relações de estrutura, no Capítulo 1 detalhamos este assunto. Ver, por exemplo, [5, 7, 40, 41] e [53].

Um exemplo de função peso semiclássica é a função peso de Freud [29], isto é,

$$w_s(x) = e^{-x^4+sx^2}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

onde $s \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real. Os polinômios ortonormais associados a esta função peso satisfazem a relação de estrutura

$$p_n'(x) = \frac{n}{a_n(s)} p_{n-1}(x) + 4a_n(s)a_{n-1}(s)a_{n-2}(s)p_{n-3}(x), \quad n \geqslant 2.$$

Os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios ortogonais associados a função peso de Freud dependem de s e satisfazem a seguinte equação de diferenças

$$a_{n+1}^2(s) + a_n^2(s) + a_{n-1}^2(s) = \frac{n}{4a_n^2(s)} + \frac{s}{2}, \quad n \geqslant 1,$$

com $a_0(s) = 0$ e

$$a_1^2(s) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 w_s(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int_{-\infty}^{\infty} w_s(x)\,\mathrm{d}\,x}.$$

Essa equação diz-se discreta de Painlevé, $\mathrm{dP_I}$, ver [29, 36] e [53]. Na Seção 1.4 descrevemos as equações de Painlevé.

Os polinômios ortogonais na circunferência unitária vêm despertando grande interesse dos pesquisadores nas últimas décadas devido a sua vasta aplicação em várias áreas da Matemática como, por exemplo, em Teoria da Aproximação, Teoria Espectral, Teoria de Probabilidades e, recentemente, em problemas de Riemann-Hilbert, ver, por exemplo, [42, 45] e [46]. Seguindo os trabalhos de Stieltjes, Hamburger, Toeplitz e outros, Szegő investigou a ortogonalidade na circunferência unitária em uma série de artigos por volta de 1920, ver [47] e [48], onde introduziu os polinômios ortogonais na circunferência unitária, conhecidos na literatura também como polinômios de Szegő. Essa classe de polinômios, quando associada a função peso semiclássica, é o elemento principal de estudo desta tese.

Considere w uma função peso definida na circunferência unitária $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z = e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, então o produto interno entre Ψ_n e Ψ_m é dado por

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle_{\mathbb{T}} = \int_0^{2\pi} \Psi_n(e^{i\theta})\overline{\Psi_m(e^{i\theta})} w(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta,$$

e $\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle_{\mathbb{T}} = 0$ para $n \neq m$, caracteriza a ortogonalidade na circunferência unitária da sequência $\{\Psi_n\}_{n\geqslant 0}$.

Esses polinômios não satisfazem uma relação de recorrência de três termos, porém na forma mônica, Φ_n, satisfazem uma relação muito interessante, conhecida como recorrência de Szegő, dada por,

$$\Phi_n(z) = z\Phi_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z), \quad n \geqslant 1,$$

onde $\Phi_0(z) = 1$, $\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi_n(1/\overline{z})}$ é o polinômio recíproco e

$$\alpha_{n-1} = -\overline{\Phi_n(0)}$$

são conhecidos como coeficientes de Verblunsky. Além disso, Φ_n é definido por

$$\Phi_n(z) = \frac{\Psi_n(z)}{\kappa_n},$$

onde κ_n é o coeficiente que acompanha o termo de maior grau de Ψ_n, ou seja,

$$\langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_{\mathbb{T}} = \int_0^{2\pi} \Phi_n(e^{i\theta})\overline{\Phi_n(e^{i\theta})}w(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{\kappa_n^2}.$$

Uma função peso na circunferência unitária, w, é chamada semiclássica se satisfaz a equação

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\theta}\Big[A(e^{i\theta})w(\theta)\Big] = B(e^{i\theta})w(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \tag{1}$$

onde as funções A e B são polinômios de Laurent e $A(e^{i\theta}) = 0$ nos pontos singulares de $1/w$. Essa definição é devido a Magnus [37]. A equação (1) será chamada equação diferencial do tipo Pearson. Neste trabalho analisamos relações de estrutura satisfeitas por polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária e os coeficientes de Verblunsky, α_n, associados a uma função peso semiclássica na circunferência unitária. Em [44] são tratadas as famílias Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária que incluem as semiclássicas como casos particulares.

Para a ortogonalidade na circunferência unitária, o problema de classificação dos polinômios ortogonais semiclássicos foi estudado em [11, 44, 51] e [52] considerando funcionais lineares que satisfazem uma equação do tipo Pearson, ou seja, dado um funcional linear, regular e hermitiano, u, diz-se que u é semiclássico se existem polinômios A e B, com $A(z) \neq 0$, que satisfaçam a equação

$$\mathrm{D}\Big(A(z)u\Big) = B(z)u,$$

onde o operador derivada é definido por

$$\mathrm{d}\,u(g(z)) = -iu(zg'(z)) = -i\int_0^{2\pi} zg'(z)w(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta, \quad e^{i\theta} = z, \;\; \theta \in [0, 2\pi].$$

Se $\deg A(z) = p$ e $\max\{p-1, \deg((p-1)A(z)+iB(z))\} = q$, diz-se que u pertence a classe (p, q). Nos artigos [11, 51] e [52], os funcionais lineares semiclássicos foram divididos em classes, essa abordagem pode ser adaptada à equação (1) considerando que, se

$$\deg A(z) = p \text{ e } \max\{p-1, \deg((p-1)A(z) + iB(z))\} = q,$$

então w pertence a classe (p, q) de funções peso semiclássicas. Uma função peso que pertence a classe (p, q) também pertence a classe $(p + 1, q + 1)$.

Um exemplo conhecido de função peso semiclássica na circunferência unitária é

$$w_t(\theta) = \frac{1}{2\pi}e^{t\cos(\theta)}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

com $t > 0$, ver [32]. A sequência associada de polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária satisfazem a relação de estrutura

$$\Phi_n'(z) = n\Phi_{n-1}(z) + \frac{t\kappa_{n-2}^2}{2\;\kappa_n^2}\Phi_{n-2}(z), \quad n \geqslant 2. \tag{2}$$

Os coeficientes de Verblunsky são reais e dependem do parâmetro t. Da relação de estrutura, é possível mostrar que os coeficientes de Verblunsky satisfazem a equação de diferenças não linear

$$\alpha_n(t) + \alpha_{n-2}(t) = -\frac{2n}{t}\frac{\alpha_{n-1}(t)}{1-\alpha_{n-1}^2(t)}, \quad n \geqslant 2. \tag{3}$$

Essa equação é bem conhecida e foi apresentada por Periwal e Shevitz [43]. Ela corresponde a uma equação discreta de Painlevé $\mathrm{dP_{II}}$, ver [53]. Estudos sobre funções peso semiclássicas na circunferência unitária também podem ser encontrados em [10] e [37]. Em [2] a equação (3) foi encontrada usando uma abordagem conhecida como Problema de Riemann-Hilbert, que é uma ferramenta que vem sendo muito utilizada quando se trata da análise do comportamento assintótico de funções.

O método de Riemann-Hilbert tem grande importância na teoria de problemas de contorno para funções holomorfas (analíticas). O principal objetivo é encontrar uma função que seja holomorfa em uma determinada região, levando em conta certas relações de salto entre os valores de seus limites sobre os pontos de um contorno dado. Essa abordagem para polinômios ortogonais foi formulada por Fokas, Its e Kitaev em [27] em 1992 e um método para calcular assintóticas com problemas de Riemann-Hilbert foi apresentado em [22] por Deift e Zhou em 1993, primeiro no contexto de sistemas integráveis. A aplicação mais abrangente a polinômios ortogonais ocorreu em 1999, graças aos trabalhos de Deift, Kriecherbauer, McLaughlin, Venakides e Zhou, ver [17, 20] e [21]. Essas descobertas foram fortemente influenciadas pela relação entre polinômios ortogonais e a teoria de matrizes aleatórias [15] e [19].

Essa técnica tem sido muito utilizada na teoria de polinômios ortogonais para obtenção de assintóticas e propriedades diferenciais. Mais detalhes sobre o Problema de Riemann-Hilbert podem ser encontrados em [1, 3] e [18]. Para resultados mais recentes sobre essa teoria ver [8, 9, 12] e [13].

Um objetivo deste trabalho foi investigar funções peso semiclássicas na circunferência unitária cujos polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária tenham coeficientes de Verblunsky complexos, para determinar que tipo de equações de diferenças esses coeficientes satisfazem. Desenvolvemos essa investigação para funções peso semiclássicas em que os polinômios A e B em (1) são polinômios de grau menor do que ou igual a 2. Como resultado determinamos todas as funções peso semiclássicas que satisfazem as condições estabelecidas e encontramos as relações de estrutura para os polinômios ortogonais na circunferência unitária e as equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblunsky associadas a tais funções peso na circunferência unitária. Esses resultados foram publicados em [6]. Outro objetivo foi encontrar equações diferenciais de primeira e de segunda ordem para polinômios ortogonais na circunferência unitária, utilizando o problema de Riemann-Hilbert.

Para alcançar os objetivos citados anteriormente, este texto está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 1 apresentamos definições e resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho. Este capítulo foi dividido em cinco seções, na primeira são definidos, brevemente, conceitos básicos referentes a polinômios ortogonais na reta real. Na segunda seção são apresentados conceitos importantes sobre a ortogonalidade na circunferência unitária. Na Seção 1.3 apresentamos a classificação dos polinômios ortogonais como clássicos e semiclássicos na reta real e uma equação do tipo Pearson para a classificação de polinômios ortogonais semiclássicos na circunferência unitária. Na quarta seção descrevemos as equações diferenciais e algumas equações discretas de Painlevé. E, por fim, na última seção, é apresentado, de forma breve, o problema de Riemann-Hilbert e, ainda, o problema de Riemann-Hilbert para os polinômios ortogonais na reta real e na circunferência unitária.

No Capítulo 2 determinamos todas as funções peso semiclássicas, w, na circunferência unitária, onde os polinômios A e B em (1) são polinômios de grau menor do que ou igual a 2. O método utilizado foi considerar todas as possibilidades de zeros do polinômio A, tal que w seja positiva. Muitas funções peso semiclássicas conhecidas foram encontradas. Além disso, determinamos a função peso semiclássica

$$w(\theta) = \tau(\lambda, \beta, \eta)\, e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta},$$

onde $\eta \in \mathbb{R}$, $\lambda > -1/2$, $\beta > -1/2$ e $\tau(\lambda, \beta, \eta)$ é uma constante. Casos particulares desta função peso, recuperam a maioria das funções peso semiclássicas conhecidas na literatura, ver Observação 2.6. No entanto, como mencionado na Observação 2.6, o caso geral, $\lambda\beta\eta \neq 0$, até onde sabemos, não foi considerado anteriormente.

No Capítulo 3 encontramos relações de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária, associados a uma função peso semiclássica, estes resultados estão no Teorema 3.4. Além disso, utilizando as relações de estrutura, determinamos equações de diferenças não lineares associadas aos coeficientes de Verblunsky complexos, que é um dos resultados principais deste trabalho. Como aplicação, ainda no Capítulo 3, apresentamos relações de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária e equações de diferenças para os coeficientes de Verblunsky para as funções peso descritas no Capítulo 2.

No Capítulo 4 são apresentadas equações diferenciais de primeira e de segunda ordem para os polinômios ortogonais na circunferência unitária associados a funções peso semiclássicas específicas. Também mostramos que algumas das equações diferenciais de primeira ordem são equivalentes a relações de estruturas encontradas no Capítulo 3. Gostaríamos de ressaltar que os resultados do Capítulo 4 foram desenvolvidos durante um estágio no exterior, realizado na Universidade de Aveiro, em Portugal, sob orientação da Profa. Dra. Ana Pilar Foulquié Moreno da Universidade de Aveiro e do Prof. Dr. Amílcar Branquinho da Universidade de Coimbra.

No Capítulo 5 uma síntese dos principais resultados encontrados durante o doutorado é apresentada. Também descrevemos os trabalhos futuros que poderão ser realizados, dando continuidade a investigação iniciada com esta tese.

Como mencionado anteriormente, os principais resultados contidos nos Capítulos 2 e 3 foram publicados em

[6] C. F. Bracciali, K. S. Rampazzi, L. L. Silva Ribeiro, On semi-classical weight functions on the unit circle. Journal of Approximation Theory, 295, art. 105957, 2023.

Os resultados do Capítulo 4 estão sendo organizados em forma de artigo científico para ser submetido para publicação.

1 Preliminares

Nesta seção fazemos uma breve introdução sobre os polinômios na reta real e na circunferência unitária. Além disso, apresentamos algumas funções peso clássicas e semiclássicas conhecidas na literatura. Os resultados deste capítulo podem ser encontrados em referências clássicas como Chihara [14], Ismail [32], Simon [45] e Szegő [49] e em referências que foram utilizadas na execução deste trabalho, tais como Branquinho [7], Clarkson, Jordaan e Kelil [16], Koekoek, Lesky e Swarttouw [35], Magnus [37], Marcellán e Sri Ranga [39], Sri Ranga [50] e Van Assche [53]. Para a última seção utilizamos Cassatella-Contra e Mañas [13], Deift [17], Fokas, Its e Kitaev [27] e Martínez [42].

1.1 Polinômios ortogonais na reta real

Para definir polinômios ortogonais na reta real consideramos uma função peso, w, definida em um intervalo (a, b), com $(a, b) \subset \mathbb{R}$, isto é, w é integrável e positiva (não identicamente nula) em (a, b).

Consideramos o produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

onde f, g são funções contínuas. Os valores associados a essa função peso dados por

$$\mu_k = \int_a^b x^k w(x)\,\mathrm{d}\,x, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

são chamados de momentos. Note que $\mu_0 > 0$.

Uma sequência de polinômios $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso w em (a, b), se P_n é de grau exatamente n e a sequência satisfaz

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n > 0, & \text{se } n = m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Podemos escrever (1.1) como

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x = \delta_{nm}\rho_n, \tag{1.2}$$

onde δ_{nm} é o delta de Kronecker, isto é,

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ 1, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ é chamada sequência de polinômios ortonormais $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ se $\rho_n = 1$ em (1.2). Denotamos o polinômio ortonormal de grau n, $n \geqslant 0$, p_n por

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j, \qquad c_j \in \mathbb{R}, \text{ e } c_n \neq 0.$$

Uma das características mais importantes de polinômios ortogonais é o fato de três polinômios de graus consecutivos estarem conectados por uma relação de recorrência. Por exemplo, a sequência de polinômios ortonormais $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ sempre satisfaz uma relação de recorrência de três termos da forma

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x), \quad n \geqslant 0, \tag{1.3}$$

com $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0}}$,

$$a_n = \langle xp_n, p_{n-1}\rangle = \int_a^b xp_n(x)p_{n-1}(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x$$

e

$$b_n = \langle xp_n, p_n\rangle = \int_a^b xp_n^2(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Comparando os coeficientes do termo de maior grau, temos

$$a_{n+1} = \frac{c_n}{c_{n+1}}.$$

Considere a sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{\hat{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ com relação a w. Podemos construir tal sequência a partir dos polinômios ortonormais $\{p_n\}_{n\geqslant 0}$ com relação a w, para isso, basta dividir cada p_n pelo coeficiente do termo de maior grau, isto é,

$$\hat{P}_n(x) = \frac{p_n(x)}{c_n}, \quad n \geqslant 1.$$

A relação de recorrência de três termos para esses polinômios pode ser obtida dividindo a relação de recorrência (1.3) por c_{n+1} e, após alguns cálculos, temos

$$\hat{P}_{n+1}(x) = (x - b_n)\hat{P}_n(x) - a_n^2\hat{P}_{n-1}(x), \quad n \geqslant 0,$$

onde $\hat{P}_{-1}(x) = 0$ e $\hat{P}_0(x) = 1$.

É bem conhecido que os zeros de uma sequência de polinômios ortogonais, $\{P_n\}_{n\geqslant 1}$, definida em um intervalo (a, b), com relação à uma função peso w são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b). Além disso, entre dois zeros consecutivos de um polinômio de grau $n + 1$, P_{n+1}, existe somente um zero de P_n, $n \geqslant 1$.

1.2 Polinômios ortogonais na circunferência unitária

Para definir polinômios ortogonais na circunferência unitária, consideramos μ uma medida definida na circunferência unitária $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z = e^{i\theta},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$, e o produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{T}} = \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}\,\mu(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\,\mathrm{d}\,\mu(e^{i\theta}).$$

Como a integral é definida na circunferência unitária, ou seja, em $|z| = 1$, temos $\overline{z} = z^{-1}$ e, então,

$$\langle f, z^n \rangle_{\mathbb{T}} = \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{z^n}\, \mathrm{d}\,\mu(z) = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n}\, \mathrm{d}\,\mu(z).$$

Agora, considerando μ uma medida absolutamente contínua, como $z = e^{i\theta}$ com $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ temos $\mathrm{d}\,\mu(e^{i\theta}) = \nu(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta$. Assim, podemos escrever

$$\langle f, z^n \rangle_{\mathbb{T}} = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \nu(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta = \int_{\mathbb{T}} f(z) z^{-n} \nu(z) \frac{\mathrm{d}\,z}{iz}.$$

Por simplicidade, denotamos $w(\theta) = \nu(e^{i\theta})$ e os momentos da função peso w são dados por

$$\mu_n = \langle 1, z^n \rangle_{\mathbb{T}} = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} w(\theta)\,\mathrm{d}\,\theta,$$

para $n \in \mathbb{Z}$.

Dizemos que $\{\Psi_n\}_{n\geqslant 0}$ é uma sequência de polinômios ortonormais na circunferência unitária se satisfaz

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle_{\mathbb{T}} = \int_{\mathbb{T}} \Psi_n(z)\overline{\Psi_m(z)}\,\mathrm{d}\,\mu(z) = \delta_{n,m}.$$

Denotamos o coeficiente do termo de maior grau de Ψ_n por κ_n, ou seja,

$$\Psi_n(z) = \kappa_n z^n + \cdots ,$$

com $\kappa_n > 0$.

Os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária são denotados por Φ_n, isto é,

$$\Phi_n(z) = \frac{\Psi_n(z)}{\kappa_n}.$$

Assim

$$||\Phi_n||^2 = \int_{\mathbb{T}} |\Phi_n(z)|^2\,\mathrm{d}\,\mu(z) = \kappa_n^{-2}.$$

Como mencionado na Introdução, esses polinômios satisfazem a seguinte relação, conhecida como recorrência de Szegő, ver [45],

$$\Phi_n(z) = z\Phi_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z), \quad n \geqslant 1, \tag{1.4}$$

onde $\Phi_0(z) = 1$, $\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi_n(1/\overline{z})}$ é o polinômio recíproco e

$$\alpha_{n-1} = -\overline{\Phi_n(0)}$$

são conhecidos como coeficientes de Verblunsky. Observe que, se os coeficientes de Verblunsky são conhecidos, então a relação (1.4) gera os polinômios Φ_n, $n \geqslant 1$.

A ortogonalidade da sequência de polinômios $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ é equivalente a

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-k}\Phi_n(z)\,\mathrm{d}\,\mu(z) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

e também

$$\int_{\mathbb{T}} z^{-k}\Phi_n^*(z)\,\mathrm{d}\,\mu(z) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Da recorrência de Szegő, temos as seguintes equações

$$\Phi^*_{n+1}(z) = \Phi^*_n(z) - \alpha_n z\Phi_n(z), \quad n \geqslant 0, \tag{1.5}$$

$$\Phi^*_{n+1}(z) = (1 - |\alpha_n|^2)\Phi^*_n(z) - \alpha_n \Phi_{n+1}(z), \quad n \geqslant 0.$$

Da relação (1.4) também obtém-se

$$\frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2} = 1 - |\alpha_n|^2,$$

ver [45].

Denotamos os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária como

$$\Phi_n(z) = z^n + \gamma_n z^{n-1} + \xi_n z^{n-2} + \cdots + \beta_n z - \overline{\alpha}_{n-1}, \quad n \geqslant 0, \tag{1.6}$$

com $\alpha_{-1} = -1$. Usando a relação (1.4) mostra-se que os coeficientes γ_n em (1.6) são dados em termos dos coeficientes de Verblunsky como

$$\gamma_n = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\alpha}_j \alpha_{j-1}, \; n \geqslant 1 \quad \text{e} \quad \gamma_0 = 0. \tag{1.7}$$

De fato, como $\Phi^*_{n-1}(z) = -\alpha_{n-2}z^{n-1} + \cdots$, então de (1.4), ou seja, de

$$\Phi_n(z) = z\Phi_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\Phi^*_{n-1}(z),$$

temos

$$[z^n + \gamma_n z^{n-1} + \cdots] = z[z^{n-1} + \gamma_{n-1}z^{n-2} + \cdots] - \overline{\alpha}_{n-1}[-\alpha_{n-2}z^{n-1} + \cdots].$$

Logo, $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-1}\alpha_{n-2}$ e recursivamente

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \overline{\alpha}_{n-1}\alpha_{n-2} + \gamma_{n-1} \\ &= \overline{\alpha}_{n-1}\alpha_{n-2} + \overline{\alpha}_{n-2}\alpha_{n-3} + \gamma_{n-2} \\ &= \overline{\alpha}_{n-1}\alpha_{n-2} + \overline{\alpha}_{n-2}\alpha_{n-3} + \cdots + \overline{\alpha}_1\alpha_0 - \overline{\alpha}_0. \end{aligned}$$

Assim, o termo do segundo coeficiente de Φ_n pode ser escrito como

$$\gamma_n = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\alpha}_j \alpha_{j-1}, \; n \geqslant 1 \quad \text{e} \quad \gamma_0 = 0.$$

Fazendo a derivada com relação a z de (1.4) e tomando $z = 0$, pode-se observar que os coeficientes $\beta_n = \Phi'_n(0)$ satisfazem

$$\beta_n = -(\overline{\alpha}_{n-2} + \overline{\alpha}_{n-1}\overline{\gamma}_{n-1}).$$

Como $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \overline{\alpha}_{n-1}\alpha_{n-2}$, obtemos

$$\beta_n = -[(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\overline{\alpha}_{n-2} + \overline{\alpha}_{n-1}\overline{\gamma}_n], \quad n \geqslant 1. \tag{1.8}$$

Como $\Phi_n(z) = z^n + \gamma_n z^{n-1} + O(z^{n-2})$, a igualdade $\langle \Phi_{n-1}, \Phi_n \rangle = 0$ produz

$$\langle \Phi_{n-1}, z^n \rangle_{\mathbb{T}} = -\overline{\gamma}_n \langle \Phi_{n-1}, \Phi_{n-1} \rangle_{\mathbb{T}}. \tag{1.9}$$

Finalmente, esses polinômios também satisfazem

$$\langle \Phi^*_n, z^0 \rangle_{\mathbb{T}} = \langle \Phi_n, \Phi_n \rangle_{\mathbb{T}}. \tag{1.10}$$

1.3 Polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos

Uma das caracterizações mais conhecidas dos polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos na reta real, é que a função peso, w, associada ao polinômio ortogonal satisfaz uma equação de Pearson do tipo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}[\sigma(x)w(x)] = \tau(x)w(x), \tag{1.11}$$

onde σ e τ são polinômios.

Segundo Chihara, em [14], os polinômios cuja função peso satisfaz a equação de Pearson (1.11), onde

- σ é um polinômio de grau $\leqslant 2$

e

- τ é um polinômio de grau $= 1$

são chamados de polinômios ortogonais clássicos. Isto acontece quando

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } x \in (-1, 1), \\ x, & \text{se } x \in (0, \infty), \\ 1, & \text{se } x \in (-\infty, \infty). \end{cases} \tag{1.12}$$

Segundo Hendriksen e Van Rossum, em [31], os polinômios cuja função peso satisfaz a equação de Pearson (1.11), onde

- σ é um polinômio de grau > 2

ou

- τ é um polinômio de grau $\neq 1$

são chamados de polinômios ortogonais semiclássicos.

Além disso, seja w uma função peso definida em $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Em [31], os autores mostram que uma sequência de polinômios ortogonais semiclássica com relação a w é completa em $\mathrm{L}^2((a, b), w)$.

Existe uma propriedade dos polinômios ortogonais clássicos e semiclássicos que é a relação de estrutura, uma relação onde a derivada desse polinômio multiplicada por σ, é escrita como uma combinação dos próprios polinômios, ver [53]. A relação de estrutura se deriva da equação de Pearson, ou seja, se a função peso w satisfaz a equação de Pearson (1.11) e σw se anula em $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, então

$$\sigma(x)p_n'(x) = \sum_{k=n-t}^{n+s-1} A_{n,k}p_k(x),$$

onde $s = \text{grau}(\sigma)$ e $t = \max\{\text{grau}(\tau), \text{grau}(\sigma) - 1\}$.

Observe que, para os polinômios ortogonais clássicos, a relação de estrutura tem a forma

$$\sigma(x)p_n'(x) = \sum_{k=n-1}^{n+s-1} A_{n,k}p_k(x), \tag{1.13}$$

onde $s = 0$ se $\sigma(x) = 1$, $s = 1$ se $\sigma(x) = x$ e $s = 2$ quando $\sigma(x) = 1 - x^2$.

1.3.1 Polinômios ortogonais clássicos na reta real

A teoria sobre os polinômios ortogonais clássicos é muito conhecida e a literatura sobre o assunto é enorme. Como dito anteriormente, uma das caracterizações dos polinômios ortogonais clássicos é que a função peso, w, associada a estes polinômios satisfaz uma equação de Pearson, ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}[\sigma(x)w(x)] = \tau(x)w(x),$$

onde σ é um polinômio de grau $\leqslant 2$ e τ é um polinômio de grau $= 1$, ver [14]. Existem outras caracterizações desses polinômios que podem ser vistas, por exemplo, em Chihara [14] e Branquinho, Marcellán e Petronilho [38], tais como

- satisfazem uma equação diferencial de segunda ordem

$$\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) + \lambda_n y(x) = 0,$$

onde $\lambda_n \neq 0$ e não depende de x;

- as suas derivadas formam uma sequência de polinômios ortogonais no mesmo intervalo de ortogonalidade;

- podem ser definidos por uma fórmula do tipo de Rodrigues, isto é,

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n w(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x^n}[\sigma^n(x)w(x)],$$

onde K_n depende apenas de n;

- satisfazem uma equação diferencial de diferenças do tipo

$$\pi(x)P_n'(x) = (\delta_n x + \chi_n)P_n(x) + \phi_n P_{n-1}(x),$$

onde $\pi(x)$ é um polinômio dado.

- podem ser definidos pela fórmula

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n w(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}[g_{n-1}(x)\sigma(x)w(x)],$$

onde g_{n-1} é um polinômio de grau $n-1$.

Qualquer sequência de polinômios ortogonais que satisfaça uma dessas propriedades, também satisfaz as demais e é chamada de sequência de polinômios ortogonais clássicos.

De (1.12) observa-se que os polinômios ortogonais de Jacobi, de Laguerre, de Hermite e de Bessel são polinômios ortogonais clássicos. Aqui apresentamos algumas de suas propriedades e, para isso, utilizamos duas das referências mais conhecidas, Chihara [14], Koekoek, Lesky e Swarttouw [35] e Szegő [49].

• Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi, denotados por $P_n^{(\alpha,\beta)}$, são ortogonais com relação a função peso $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ em $(-1,1)$ e são definidos pela fórmula

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-2)^{-n}(n!)^{-1}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}], \tag{1.14}$$

onde α e β são parâmetros, $\alpha > -1$ e $\beta > -1$.

Segundo Chihara em [14], a fórmula (1.14) para $\alpha = \beta = 0$ é usualmente chamada de Fórmula de Rodrigues, enquanto que o caso geral é chamado de Fórmula do tipo Rodrigues.

A função peso w satisfaz a equação de Pearson (1.11) com

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= 1-x^2,\\ \tau(x) &= \beta-\alpha-(2+\alpha+\beta)x,\end{aligned}$$

ou seja,

$$[(1-x^2)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta]' = [\beta-\alpha-(2+\alpha+\beta)x](1-x)^\alpha(1+x)^\beta.$$

A equação diferencial de segunda ordem satisfeita pelos polinômios de Jacobi é

$$(1-x^2)y'' + [\beta-\alpha-(2+\alpha+\beta)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0, \quad y = P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Em Chihara [14], encontramos a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Jacobi, isto é,

$$\begin{aligned} xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &\quad+\frac{(\beta^2-\alpha^2)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &\quad-\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

onde $P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$.

De (1.13), com $s = 2$, temos $(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ escrito em função de três polinômios: $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}$, $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$. Porém, substituindo $P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}$ usando a relação de recorrência de três termos (1.15) obtemos a relação de estrutura para os polinômios de Jacobi

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = n\Big[\frac{\alpha-\beta}{2n+\alpha+\beta} - x\Big]P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Esses polinômios satisfazem, também, a relação diferencial dada por

$$\frac{\mathrm{d}\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$

ou seja, a derivada do polinômio $P_n^{(\alpha,\beta)}$ é um polinômio ortogonal clássico.

- **Polinômios de Laguerre**

Os polinômios de Laguerre, denotados por $L_n^{(\alpha)}$, são ortogonais com relação a função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x},\ \alpha > -1$, em $(0, \infty)$ e também podem ser definidos pela fórmula do tipo Rodrigues

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}}{n!} e^x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n} [x^{n+\alpha} e^{-x}], \quad \alpha > -1.$$

A função peso w satisfaz a equação de Pearson com

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= x, \\ \tau(x) &= 1 + \alpha - x, \end{aligned}$$

ou seja,

$$[x(x^\alpha e^{-x})]' = (1 + \alpha - x)(x^\alpha e^{-x}).$$

A equação diferencial de segunda ordem para os polinômios de Laguerre é

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0, \quad y = L_n^{(\alpha)}(x).$$

Esses polinômios também satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$xL_n^{(\alpha)}(x) = -(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + (2n + \alpha + 1)L_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geqslant 0,$$

onde $L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$.

Para os polinômios de Laguerre, de (1.13) com $s = 1$, tem-se a relação de estrutura

$$x \frac{\mathrm{d}\, L_n^{(\alpha)}(x)}{\mathrm{d}\, x} = nL_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x),$$

e, além disso, satisfazem a seguinte relação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}\, L_n^{(\alpha)}(x)}{\mathrm{d}\, x} = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x).$$

- **Polinômios de Hermite**

Os polinômios de Hermite, H_n, são ortogonais com relação a função peso $w(x) = e^{-x^2}$ em $(-\infty, \infty)$ e são definidos pela fórmula do tipo Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n} e^{-x^2}.$$

A função peso w satisfaz a equação de Pearson com

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1, \\ \tau(x) &= -2x, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}.$$

Para os polinômios de Hermite tem-se a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad y = H_n(x).$$

A relação de recorrência para tais polinômios é dada por

$$xH_n(x) = \frac{H_{n+1}(x)}{2} + H_{n-1}(x), \quad n \geqslant 0,$$

onde $H_{-1}(x) = 0$.

Para esses polinômios temos a seguinte propriedade

$$\frac{\mathrm{d}\, H_n(x)}{\mathrm{d}\, x} = 2nH_{n-1}(x),$$

que também é a relação de estrutura, pois $s = 0$ em (1.13).

• **Polinômios de Bessel**

E, por fim, os polinômios de Bessel, $B_n^{(\alpha)}$, são ortogonais com relação a função peso $w(x) = x^\alpha e^{-2/x}$ em $(0, \infty)$, com $\alpha < -2N-1$, $N \in \{1, 2, 3 \ldots\}$. Então, em uma família de Polinômios de Bessel existe um número finito de polinômios ortogonais para cada escolha do parâmetro α. Estes polinômios são definidos pela fórmula do tipo Rodrigues

$$B_n^{(\alpha)}(x) = 2^{-n} x^{-\alpha} e^{2/x} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, x^n}[x^{2n+\alpha} e^{-2/x}].$$

A função peso w satisfaz a equação de Pearson com

$$\sigma(x) = x^2,$$
$$\tau(x) = (\alpha + 2)x + 2,$$

ou seja,

$$[x^2(x^\alpha e^{-2/x})]' = [(\alpha + 2)x + 2](x^\alpha e^{-2/x}).$$

A equação diferencial de segunda ordem para os polinômios de Bessel é dada por

$$x^2 y'' + [(\alpha + 2)x + 2]y' - n(n + \alpha + 1)y = 0, \quad y = B_n^{(\alpha)}(x).$$

Em [35], encontramos a relação de recorrência de três termos para os polinômios de Bessel, ou seja,

$$\begin{aligned} xB_n^{(\alpha)}(x) \quad = \quad & \frac{2(n + \alpha + 1)}{(2n + \alpha + 1)(2n + \alpha + 2)} B_{n+1}^{(\alpha)}(x) \\ & - \frac{2\alpha}{(2n + \alpha)(2n + \alpha + 2)} B_n^{(\alpha)}(x) \\ & - \frac{2n}{(2n + \alpha)(2n + \alpha + 1)} B_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geqslant 0, \end{aligned}$$

onde $B_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$.

Para esses polinômios temos a seguinte propriedade

$$\frac{\mathrm{d}\, B_n^{(\alpha)}(x)}{\mathrm{d}\, x} = \frac{n(n + \alpha + 1)}{2} B_{n-1}^{(\alpha+2)}(x).$$

1.3.2 Polinômios ortogonais semiclássicos na reta real

Nesta seção apresentamos alguns polinômios ortogonais semiclássicos na reta real. As informações aqui presentes podem ser encontradas em [4, 16, 26] e [53].

- **Polinômios de Freud**

Consideramos a função peso de Freud, dada por

$$w_t(x) = e^{-x^4+tx^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.

A função peso w_t satisfaz a equação de Pearson com

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1, \\ \tau(x) &= -4x^3 + 2tx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(e^{-x^4+tx^2})' = (-4x^3 + 2tx)e^{-x^4+tx^2}.$$

Os polinômios de Freud ortonormais com relação a função peso w_t satisfazem a relação de recorrência

$$xp_n(x;t) = a_{n+1}(t)p_{n+1}(x;t) + a_n(t)p_{n-1}(x;t), \qquad n \geqslant 0,$$

onde $p_{-1}(x;t) = 0$.

A relação de estrutura para esses polinômios é

$$p_n'(x;t) = \frac{n}{a_n(t)}p_{n-1}(x;t) + 4a_n(t)a_{n-1}(t)a_{n-2}(t)p_{n-3}(x;t), \quad n \geqslant 2.$$

Ver [53].

- **Polinômios de Laguerre semiclássicos**

Vamos considerar aqui os polinômios ortonormais em $(0, \infty)$ com relação a função peso chamada Laguerre semiclássica, isto é,

$$w_t(x) = x^\alpha e^{-x^2+tx}, \quad x \in (0, \infty),$$

com $\alpha > -1$ e $t \in \mathbb{R}$.

A função peso w_t satisfaz a equação de Pearson com

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= x, \\ \tau(x) &= 1 + \alpha + tx - 2x^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$[x(x^\alpha e^{-x^2+tx})]' = (1 + \alpha + tx - 2x^2)(x^\alpha e^{-x^2+tx}).$$

Os polinômios de Laguerre semiclássicos satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$xp_n(x;t) = a_{n+1}(t)p_{n+1}(x;t) + b_n(t)p_n(x;t) + a_n(t)p_{n-1}(x;t),$$

com $p_{-1}(x;t) = 0$.

A relação de estrutura para esses polinômios é dada por

$$xp_n'(x;t) = A_n(t)p_{n-1}(x;t) + B_n(t)p_{n-2}(x;t) + C_n(t)p_{n-3}(x;t),$$

onde A_n, B_n e C_n dependem do parâmetro t.

1.3.3 Polinômios ortogonais semiclássicos na circunferência unitária

Uma função peso, w, na circunferência unitária é chamada semiclássica se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\theta}\left[A(e^{i\theta})w(\theta)\right] = B(e^{i\theta})w(\theta). \tag{1.16}$$

onde as funções A e B são polinômios de Laurent, ou seja, são funções da forma

$$\sum_{k=m}^{n} c_k z^k \quad m \leqslant n, \;\; m, n \in \mathbb{Z},$$

e, além disso, $A(e^{i\theta}) = 0$ nos pontos singulares de $1/w$. Essa definição é devido a Magnus [37]. A equação (1.16) será chamada equação diferencial do tipo Pearson. Neste caso, os polinômios ortogonais associados são chamados de semiclássicos.

A relação (1.16) também pode ser escrita como

$$\frac{\mathrm{d}\,w(\theta)/\,\mathrm{d}\,\theta}{w(\theta)} = \frac{w'(\theta)}{w(\theta)} = \frac{B(e^{i\theta}) - ie^{i\theta}\frac{\mathrm{d}\,A(e^{i\theta})}{\mathrm{d}\;e^{i\theta}}}{A(e^{i\theta})}. \tag{1.17}$$

É importante ressaltar que, neste trabalho, consideramos os polinômios A e B em (1.16) de grau menor do que ou igual a 2. Para trabalhos futuros pretendemos investigar funções peso na circunferência unitária que satisfazem (1.16), com polinômios A e B de grau maior do que 2. Assim, considerando A e B como polinômios complexos de grau no máximo 2, podemos definí-los como

$$A(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0 \quad \text{e} \quad B(z) = b_2z^2 + b_1z + b_0.$$

Portanto, a equação do tipo Pearson (1.17) torna-se

$$\frac{\mathrm{d}\,w(\theta)/\,\mathrm{d}\,\theta}{w(\theta)} = \frac{(b_2 - 2ia_2)z^2 + (b_1 - ia_1)z + b_0}{a_2z^2 + a_1z + a_0}, \quad z = e^{i\theta}. \tag{1.18}$$

De maneira equivalente, escrevemos

$$i\frac{\mathrm{d}\,w(\theta)/\,\mathrm{d}\,z}{w(\theta)} = \frac{(b_2 - 2ia_2)z^2 + (b_1 - ia_1)z + b_0}{z(a_2z^2 + a_1z + a_0)}, \quad z = e^{i\theta}. \tag{1.19}$$

Algumas funções peso semiclássicas na circunferência unitária são conhecidas, como, por exemplo, a função peso de Lebesgue

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi},$$

ver Simon [45].

No livro Ismail [32] alguns outros exemplos são apresentados. Em [32] e [33] encontramos informações sobre os polinômios circulares de Jacobi que são ortogonais com relação a

$$w(\theta) = \tau(\lambda)|1 - e^{i\theta}|^{2\lambda} = \tilde{\tau}(\lambda)[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \tag{1.20}$$

onde $\lambda > -1/2$, $\tau(\lambda)$ e $\tilde{\tau}(\lambda)$ são constantes, tais que $\mu_0 = 1$. Como mencionado na Introdução, em Ismail [32], um outro exemplo conhecido de função peso semiclássica na circunferência unitária é a função peso de Bessel modificada

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(t)} e^{t\cos(\theta)}, \quad \text{com} \quad t > 0 \ \text{ e } \ \theta \in [0, 2\pi], \tag{1.21}$$

onde I_α é a função de Bessel modificada

$$I_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t/2)^{2j+\alpha}}{j!\Gamma(j+\alpha+1)}.$$

Por simplicidade, podemos escrever a função peso como

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{t\cos(\theta)}, \quad \text{com} \quad t > 0 \ \text{ e } \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Os polinômios ortogonais com relação a função peso semiclássica

$$w(\theta) = [\sin^2(\theta/2)]^\lambda \, [\cos^2(\theta/2)]^\beta, \quad \theta \in [0, 2\pi], \tag{1.22}$$

com $\lambda > -1/2$ e $\beta > -1/2$, são chamados de polinômios de Jacobi na circunferência unitária, ver Magnus [37].

Em [39], no estudo de funções peso na circunferência unitária que formam pares coerentes de segundo tipo, os autores estudaram as seguintes funções peso semiclássicas.

- Para $u \in \mathbb{C}$ e $\tau(u)$ uma constante tal que $\mu_0 = 1$,

$$w(\theta) = \tau(u) \, e^{2|u|\sin(\theta + \arg(u))}, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \tag{1.23}$$

- Para $u, r \in \mathbb{C}$, $|r| \neq 1$ e $\tau(u, r)$ uma constante tal que $\mu_0 = 1$,

$$w(\theta) = \tau(u, r) \, e^{2\,\mathrm{Re}(u/\bar{r})\arg(1 - re^{-i\theta})} |e^{i\theta} - r|^{-2\,\mathrm{Im}(u/\bar{r})}, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \tag{1.24}$$

- Para $\lambda > -1/2$, $\eta \in \mathbb{R}$, $b = \lambda + i\eta$ e $\tau(b)$ uma constante tal que $\mu_0 = 1$,

$$w(\theta) = \tau(b) \, e^{-\eta\theta} [\sin^2(\theta/2)]^\lambda, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \tag{1.25}$$

A função peso (1.25) foi primeiro estudada por Sri Ranga em [50].

No Capítulo 2 apresentamos a equação do tipo Pearson da forma (1.16) para cada uma dessas funções peso.

1.4 Equações de Painlevé

Segundo Van Assche [53], Painlevé descobriu tais equações no início do século XX enquanto analisava as singularidades de equações não lineares de segunda ordem no plano complexo do tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} z^2} = F\left(x, y, \frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}\right),$$

onde F é uma função racional em y e analítica em x e $\dfrac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}$.

As singularidades das soluções de equações diferenciais ordinárias são classificadas por duas propriedades: a sua dependência pelas condições iniciais, classificadas como móveis ou fixas, e o comportamento da solução ao redor da singularidade. Tal comportamento pode ser classificado como polo, singularidade essencial ou ponto de ramificação. Ver [23].

As singularidades fixas das soluções das equações diferenciais lineares são independentes das condições iniciais, ou seja, suas posições são independentes das constantes arbitrárias de integração, por exemplo, a equação

$$x\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}\,x} + y(x) = 0,$$

com solução geral

$$y(x) = \frac{c}{x},$$

onde c é uma constante. A solução tem um polo em $x = 0$, para todo $c \neq 0$.

As equações diferenciais ordinárias não lineares com soluções que têm singularidades móveis, isto é, cuja posição depende das constantes arbitrárias de integração, por exemplo, a equação

$$\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}\,x} + y^2(x) = 0,$$

tem solução geral

$$y(x) = \frac{1}{x-c},$$

onde c é uma constante. Esta solução tem um polo no ponto móvel $x = c$.

Um polo é diferente de todos os outros tipos de singularidades de uma equação diferencial ordinária. Um ponto crítico é uma singularidade, ou seja, um ponto em que a solução não é analítica e que não seja um polo. Assim, ponto crítico pode ser um ponto de ramificação ou uma singularidade essencial, temos como exemplo a equação

$$\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}\,x} - e^{-y(x)} = 0,$$

em que a solução geral é

$$y(x) = \ln(x-c),$$

onde c é uma constante. Esta solução tem, portanto, um ponto de ramificação no ponto $x = c$. O ponto de ramificação de uma função multivalorada é um ponto que determina a descontinuidade de uma função. Uma função possui singularidade essencial em c, se esta não possui polos, em qualquer ordem, que sejam eliminados pela multiplicação por $(x-c)^n$, para qualquer valor finito de n. Por exemplo, a função $y(x) = e^{1/(x-c)}$ possui uma singularidade essencial em $x = c$.

As equações diferenciais de Painlevé são equações diferenciais não lineares de segunda ordem cujas soluções não possuem pontos críticos móveis, isto é, se todas as suas singularidades móveis são polos. Essa propriedade ficou conhecida como Propriedade de Painlevé. O estudo dessas equações surgiu no fim do século XIX, quando Painlevé, Fuchs, Picard e Poincaré, ficaram interessados em encontrar equações diferenciais ordinárias que satisfizessem tal propriedade.

No início do século XX, Painlevé descobriu que existem 50 equações diferenciais na forma canônica que satisfaziam tal propriedade. Dessas 50, existem apenas 6 que não podiam ser reduzidas a equações lineares cujas soluções já são conhecidas. Essas equações ficaram conhecidas como equações de Painlevé. As seis equações diferenciais encontradas por Painlevé, são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathrm{P_I}: &\quad y'' = 6y^2 + x,\\
\mathrm{P_{II}}: &\quad y'' = 2y^3 + xy + \alpha,\\
\mathrm{P_{III}}: &\quad y'' = \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{x} + \gamma y^3 + xy + \frac{\delta}{y},\\
\mathrm{P_{IV}}: &\quad y'' = \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3y^3}{2} + 4xy^2 + 2y(x^2 - \alpha) + \frac{\beta}{y},\\
\mathrm{P_V}: &\quad y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y')^2 + \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{x}\\
&\qquad + \frac{\delta y(y+1)}{y-1},\\
\mathrm{P_{VI}}: &\quad y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)(y')^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y'\\
&\qquad + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left(\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right),
\end{aligned}$$

onde α, β, γ e δ são constantes arbitrárias e $y' = \mathrm{d}\, y/\, \mathrm{d}\, x$.

As equações discretas (equações de diferenças) de Painlevé apareceram mais recentemente. Elas são equações discretas não lineares (relações de recorrência) para qual o limite contínuo é uma das equações diferenciais de Painlevé. Geralmente as equações discretas de Painlevé são equações de diferenças não lineares de segunda ordem, ou seja, uma equação de diferenças não linear de segunda ordem é uma equação da forma

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, n),$$

onde f é uma função de três variáveis que depende de combinações não lineares e a sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é a incógnita. Um estudo mais aprofundado sobre equações de diferenças pode ser encontrado em [24] e [25].

Abaixo segue uma lista parcial das equações discretas de Painlevé.

$$\mathrm{dP_I}: \quad x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{z_n + (-1)^n a}{x_n} + b, \tag{1.26}$$

$$\mathrm{dP_{II}}: \quad x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{x_n z_n + a}{1 - x_n^2}, \tag{1.27}$$

$$\mathrm{dP_{IV}}: \quad (x_{n+1} + x_n)(x_n + x_{n-1}) = \frac{(x_n^2 - a^2)(x_n^2 - b^2)}{(x_n + z_n)^2 - c^2},$$

onde $z_n = \alpha\, n + \beta$ e a, b, c e d são constantes arbitrárias.

Existe uma relação entre as equações diferenciais e equações discretas de Painlevé com os coeficientes da relação de recorrência de três termos de polinômios ortogonais semiclássicos. A sequência de coeficientes da relação de recorrência de certos polinômios ortogonais semiclássicos são soluções de algumas equações discretas de Painlevé. O livro [53] traz exemplos conhecidos.

Por exemplo, considere a função peso de Freud, dada por

$$w_t(x) = e^{-x^4+tx^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.

Como mencionado anteriormente, os polinômios de Freud ortonormais com relação a função peso w_t satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$xp_n(x;t) = a_{n+1}(t)p_{n+1}(x;t) + a_n(t)p_{n-1}(x;t), \qquad n \geqslant 0,$$

onde $p_{-1}(x;t) = 0$.

Os coeficientes $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ da relação de recorrência dos polinômios ortonormais com relação a função peso w_t satisfazem

$$a_{n+1}^2(t) + a_n^2(t) + a_{n-1}^2(t) = \frac{n}{4a_n^2(t)} + \frac{t}{2}, \qquad n \geqslant 1. \tag{1.28}$$

Observe que (1.28) é a primeira equação discreta de Painlevé (1.26), ou seja,

$$\mathrm{dP_I}: \quad x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{\alpha n + \beta + (-1)^n a}{x_n} + b,$$

com $x_n = a_n^2(t)$ e parâmetros $a = 0$, $b = t/2$, $\alpha = 1/4$ e $\beta = 0$.

Na circunferência unitária, os coeficientes de Verblunsky associados aos polinômios ortogonais com relação a função peso

$$w_t(\theta) = \frac{1}{2\pi}e^{t\cos(\theta)}, \quad t > 0, \ \theta \in [0, 2\pi],$$

satisfazem uma equação discreta de Painlevé.

Os coeficientes de Verblunsky, $\{\alpha_n\}_{n\geqslant 0}$, satisfazem a equação não linear (3) apresentada por Periwal e Shevitz, em [43], isto é,

$$\alpha_n(t) + \alpha_{n-2}(t) = -\frac{2n}{t}\frac{\alpha_{n-1}(t)}{1-\alpha_{n-1}^2(t)}, \quad n \geqslant 2.$$

A relação de recorrência não linear (3) corresponde a segunda equação discreta de Painlevé (1.27), ou seja,

$$\mathrm{dP_{II}}: \quad x_{n+1} + x_{n-1} = \frac{x_n(\alpha n + \beta) + a}{1 - x_n^2},$$

com $\alpha_n = x_{n+1}$, $\alpha = \beta = -2/t$ e $a = 0$.

A busca da associação de sequências de coeficientes da relação de recorrência de polinômios ortogonais na reta real ou de sequências de coeficientes de Verblunsky com soluções de equações discretas de Painlevé tem sido, ao mesmo tempo, um desafio e fonte de novas descobertas para pesquisadores da área.

1.5 Problema de Riemann-Hilbert

Seja Σ um contorno orientado em $\mathbb{C}$, isto é, cada arco de Σ possui um lado positivo e um lado negativo. Além disso, suponha que Σ seja uma união finita de arcos suaves em $\mathbb{C}$ que se intersectam num número finito de pontos e que todas as intersecções sejam transversais. Seja

$$\Sigma^0 = \Sigma \backslash \{\text{pontos de auto interseção}\}.$$

Consideremos também uma função definida por

$$v : \Sigma^0 \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}),$$

onde $GL(n, \mathbb{C})$ é o grupo das matrizes complexas $n \times n$ invertíveis. Considerando o par (Σ, v), estabelecemos o seguinte problema de Riemann-Hilbert. Encontrar uma função F em $M(n, \mathbb{C})$, onde $M(n, \mathbb{C})$ é o espaço vetorial das matrizes complexas $n \times n$, que satisfaça

(F-RH1) F é analítica em $\mathbb{C} \backslash \Sigma$;

(F-RH2) Condição de salto: $F_+(z) = F_-(z)v(z)$, $z \in \Sigma^0$;

(F-RH3) Comportamento assintótico: $F(z) \to I_n$ quando $z \to \infty$,

onde $F_+(z)$ denota o limite de $F(\tilde{z})$ com $\tilde{z} \longrightarrow z$ pelo lado positivo de Σ, $F_-(z)$ denota o limite de $F(\tilde{z})$ com $\tilde{z} \longrightarrow z$ pelo lado negativo de Σ e I_n é a matriz identidade $n \times n$. A matriz v é chamada de matriz de salto para o problema de Riemann-Hilbert. Mais detalhes sobre o Problema de Riemann-Hilbert podem ser encontrados em [17] e [32].

1.5.1 Problema de Riemann-Hilbert para polinômios ortogonais na reta real

Fokas, Its e Kitaev [27] deram um impulso à teoria dos polinômios ortogonais ao mostrar que a solução de problemas de Riemann-Hilbert podiam ser expressas em termos dos polinômios ortogonais e funções de segundo tipo associadas a funções peso que verificam a condição de Hölder, isto é, seja f uma função definida em uma região $L \subset \mathbb{C}$, dizemos que f satisfaz uma condição de Hölder em L, se para todo $a, b \in L$, temos

$$|f(a) - f(b)| \leqslant \Lambda |a - b|^\lambda,$$

com $\Lambda > 0$ e $0 < \lambda \leqslant 1$. O Problema de Riemann-Hilbert para polinômios ortogonais na reta real associado a uma função peso w pode ser enunciado da seguinte forma: Encontrar uma função matricial Y tal que

$$Y : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{2\times 2}$$

e que satisfaça as três condições a seguir.

(Y-RH1) Y é holomorfa em $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

(Y-RH2) Y satisfaz a condição de salto

$$Y_+(x) = Y_-(x) \begin{pmatrix} 1 & w(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Y-RH3) Y tem o seguinte comportamento assintótico quando $z \to \infty$

$$Y(z) = \left(I_2 + O(z^{-1})\right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}.$$

A única solução para este problema é dada por

$$Y(z) = \begin{bmatrix} \hat{P}_n(z) & \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{P}_n(x)}{x-z} w(x)\,\mathrm{d}\,x \\ -2\pi i c_{n-1}^2 \hat{P}_{n-1}(z) & -c_{n-1}^2 \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{P}_{n-1}(x)}{x-z} w(x)\,\mathrm{d}\,x \end{bmatrix},$$

onde $\hat{P}_n$ é o polinômio mônico associado a uma função peso w definida na reta real, que satisfaz a condição de Hölder e c_{n-1} é o coeficiente que acompanha o termo de maior grau do polinômio ortonormal p_{n-1}, que pode ser escrito como $p_{n-1}(x) = c_{n-1}\hat{P}_{n-1}(x)$, com $n \geqslant 1$. Mostramos a seguir que Y é a solução do problema de Riemann-Hilbert.

Considere a matriz Y dada por

$$Y(z) = \begin{bmatrix} Y_{1,1}(z) & Y_{1,2}(z) \\ Y_{2,1}(z) & Y_{2,2}(z) \end{bmatrix}.$$

Observe que a condição de salto implica que a entrada $[1,1]$ de Y não tem salto e é uma função inteira, pois

$$Y_{1,1}^{+}(x) = Y_{1,1}^{-}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

A condição **(Y-RH3)** para $Y_{1,1}$ nos fornece

$$Y_{1,1}(z) = z^n + O(z^{n-1}), \quad z \to \infty.$$

Logo, $Y_{1,1}$ é um polinômio mônico de grau n, isto é,

$$Y_{1,1}(z) = \hat{P}_n(z).$$

Consideremos, agora, a entrada $[1,2]$ de Y, então da condição de salto, temos

$$\begin{aligned} Y_{1,2}^{+}(x) &= Y_{1,1}^{-}(x) w(x) + Y_{1,2}^{-}(x), \\ &= \hat{P}_n(x) w(x) + Y_{1,2}^{-}(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$Y_{1,2}^{+}(x) - Y_{1,2}^{-}(x) = \hat{P}_n(x) w(x).$$

E então, de **(Y-RH3)**,

$$Y_{1,2}(z) = O(z^{-n-1}).$$

Pela Fórmula de Sokhotsky-Plemelj, que diz que o problema de valor limite para uma função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ com valores limites $f_+(x) - f_-(x) = h(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, onde h é a função definida no contorno que satisfaz a condição de Hölder e o comportamento assintótico $f(z) = O(z^{-1})$ com $z \to \infty$, é dado pela transformada de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x)}{x-z}\,\mathrm{d}\,x.$$

Para mais detalhes recomendamos a referência [30]. Então, temos

$$\begin{aligned}
Y_{1,2}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{P}_n(x)w(x)}{x-z}\,\mathrm{d}\,x \\
&= -\frac{1}{2\pi i z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{P}_n(x)w(x)}{1-x/z}\,\mathrm{d}\,x \\
&= -\frac{1}{2\pi i z}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{P}_n(x)\left(1+\frac{x}{z}+\frac{x^2}{z^2}+\cdots\right)w(x)\,\mathrm{d}\,x \\
&= -\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{z^{j+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}x^j\hat{P}_n(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x.
\end{aligned}$$

Observe que quando $m = n-1$, temos da condição **(Y-RH3)**,

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^j\hat{P}_n(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x = 0, \quad 0 \leqslant j \leqslant n-1,$$

isso implica que $\hat{P}_n$ é um polinômio ortogonal mônico de grau n com relação a w. E, assim,

$$Y_{1,2}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hat{P}_n(x)w(x)}{x-z}\,\mathrm{d}\,x.$$

A demonstração para $Y_{2,1}$ e $Y_{2,2}$ segue de forma análoga.

Para mostrar a unicidade, consideremos a função $\det Y$. Observe que essa função satisfaz as seguintes propriedades

- $\det Y$ é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.
- $\det Y_+(x) = \det Y_-(x)$, $x \in \mathbb{R}$. O que implica que $\det Y$ não tem salto e é contínua em $\mathbb{C}$. Segue pelo Teorema de Morera, que diz que se f é uma função contínua em um domínio Ω e satisfaz $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$ para todo contorno fechado γ em Ω, então f é analítica em Ω, logo $\det Y$ é uma função inteira.
- $\det Y = 1 + O(z^{-1})$, $z \longrightarrow \infty$. E, então, $\det Y$ é uma função inteira e limitada. Portanto, $\det Y = 1$.

Supondo que existe uma outra solução do problema de Riemann-Hilbert, isto é, $\hat{Y}$, e sabendo que $\det Y = 1$, temos que a inversa de Y, ou seja, Y^{-1}, existe. Assim, considere a matriz

$$M(z) = \hat{Y}(z)Y^{-1}(z).$$

M satisfaz o seguinte problema de Riemann-Hilbert

(M-RH1) M é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$;

(M-RH2) $M_+(x) = M_-(x), \quad x \in \mathbb{R}$.

(M-RH3) $M(z) = I_2 + O(z^{-1})$ com $z \to \infty$.

Essas condições implicam que M não tem salto, ou seja, M é uma função matricial inteira. Pelo Teorema de Liouville, que mostra que se f é uma função inteira, então ela é constante, as entradas de M são funções constantes e, fazendo $z \to \infty$, $M = I_2$. Isto implica que $\hat{Y}(z) = Y(z)$. Portanto, a solução do problema de Riemann-Hilbert para os polinômios ortogonais é única.

1.5.2 Problema de Riemann-Hilbert para polinômios ortogonais na circunferência unitária

Em [17] e [42], foi apresentado o Problema de Riemann-Hilbert para os polinômios ortogonais na circunferência unitária e a solução Y_n que verifica este problema, ou seja, Y_n é a única solução do seguinte Problema de Riemann-Hilbert associado a uma função peso ν definida na circunferência unitária e que satisfaz a condição de Hölder.

($\mathbf{Y}_n$-RH1) Y_n é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$;

($\mathbf{Y}_n$-RH2) Y_n satisfaz a condição de salto:

$$(Y_n)_+(t) = (Y_n)_-(t)\begin{bmatrix}1 & \nu(t)/t^n\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad t\in\mathbb{T};$$

($\mathbf{Y}_n$-RH3) Y_n tem o seguinte comportamento assintótico quando $z\to\infty$

$$\lim_{z\to\infty} Y_n(z)\begin{bmatrix}z^{-n} & 0\\ 0 & z^n\end{bmatrix} = I_2$$

e a solução Y_n é dada por

$$Y_n(z) = \begin{bmatrix} \Phi_n(z) & \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}\frac{\Phi_n(t)}{t-z}\frac{\nu(t)}{t^n}\,\mathrm{d}\,t \\ -2\pi\kappa_{n-1}^2\Phi_{n-1}^*(z) & -\dfrac{\kappa_{n-1}^2}{i}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}\frac{\Phi_{n-1}^*(t)}{t-z}\frac{\nu(t)}{t^n}\,\mathrm{d}\,t \end{bmatrix},$$

onde Φ_n é um polinômio ortogonal mônico na circunferência unitária e

$$\int_{\mathbb{T}} |\Phi_n(z)|^2\nu(z)\frac{\mathrm{d}\,z}{iz} = \frac{1}{\kappa_n^2}.$$

Em [13] os autores mostram, de forma análoga ao caso da Subseção 1.5.1, que

$$\det Y_n = 1.$$

Logo, a inversa de Y_n existe e é dada por

$$(Y_n^{-1})(z) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\kappa_{n-1}^2}{i}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}\frac{\Phi_{n-1}^*(t)}{t-z}\frac{\nu(t)}{t^n}\,\mathrm{d}\,t & -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{T}}\frac{\Phi_n(t)}{t-z}\frac{\nu(t)}{t^n}\,\mathrm{d}\,t \\ 2\pi\kappa_{n-1}^2\Phi_{n-1}^*(z) & \Phi_n(z) \end{bmatrix}. \tag{1.29}$$

No Capítulo 4 usamos técnicas da teoria do Problema de Riemann-Hilbert para encontrar equações diferenciais de primeira e de segunda ordem para polinômios ortogonais com relação a certas funções peso definidas na circunferência unitária. Algumas dessas equações diferenciais são equivalentes as relações de estruturas encontradas no Capítulo 3. Além disso, utilizado essa abordagem, conseguimos recuperar algumas equações discretas de Painlevé.

2 Determinação das funções peso semiclássicas

O principal objetivo deste capítulo é determinar todas as funções peso semiclássicas, w, na circunferência unitária que satisfazem (1.17), onde A e B são polinômios complexos de grau menor do que ou igual a 2. Neste capítulo foram utilizadas como fontes de estudo as referências [11, 32, 37, 39] e [50]. Os resultados deste capítulo foram publicados em [6].

Antes de apresentarmos nossos resultados, precisamos de algumas propriedades dos polinômios ortogonais semiclássicos na circunferência unitária dadas por Magnus [37].

Lema 2.1. Seja w uma função peso definida na circunferência unitária. Se w satisfaz (1.17), ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\,\mathrm{d}\,\theta}{w(\theta)} = \frac{w'(\theta)}{w(\theta)} = \frac{B(e^{i\theta}) - ie^{i\theta}\frac{\mathrm{d}\, A(e^{i\theta})}{\mathrm{d}\ e^{i\theta}}}{A(e^{i\theta})}, \quad z = e^{i\theta},$$

com A e B sendo polinômios de grau menor do que ou igual a d, com $d \geqslant 1$ e $w(0) = w(2\pi)$, então

$$\langle A\Phi_n', z^k\rangle_{\mathbb{T}} = \langle \Phi_n[iB(z) + (k+1)A(z)], z^{k+1}\rangle_{\mathbb{T}}, \quad n \geqslant 2 \tag{2.1}$$

e

$$\langle A\Phi_n', z^k\rangle_{\mathbb{T}} = 0, \text{ com } k = d-1, d, \ldots, n-2. \tag{2.2}$$

Demonstração: Usando integração por partes e a relação (1.17), podemos observar que

$$\langle A\Phi_n', z^k\rangle_{\mathbb{T}} = \langle \Phi_n(z)[iB(z) + (k+1)A(z)], z^{k+1}\rangle_{\mathbb{T}} - i\Phi_n(1)A(1)[w(2\pi) - w(0)], \tag{2.3}$$

para $k = 0, 1, \ldots, n$. No entanto, para $k = d-1, d, \ldots, n-2$, o polinômio

$$[iB(z) + (k+1)A(z)]z^{-k-1} \in \mathrm{Span}\{z^{-(n-1)}, z^{-(n-2)}, \ldots, z^{-1}\},$$

assim,

$$\langle \Phi_n[iB(z) + (k+1)A(z)], z^{k+1}\rangle_{\mathbb{T}} = 0,$$

ou seja, temos

$$\langle A\Phi_n', z^k\rangle_{\mathbb{T}} = -i\Phi_n(1)A(1)[w(2\pi) - w(0)].$$

Logo, como $\Phi_n(1) \neq 0$, para que $\langle A\Phi_n', z^k\rangle_{\mathbb{T}} = 0$ é necessário que tenhamos

$$A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0.$$

Como, por hipótese, $w(0) = w(2\pi)$, as condições (2.1) e (2.2) valem. ∎

Neste capítulo vamos determinar as funções peso que satisfaçam a equação do tipo Pearson (1.17), com A e B polinômios de grau menor do que ou igual a 2 e com $A(1)[w(2\pi)-w(0)] = 0$.

Como aqui estamos considerando $d = 2$, então, do Lema 2.1,

$$\langle A\Phi_n', z^k\rangle_{\mathbb{T}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2. \tag{2.4}$$

Para o polinômio B usamos a notação $B(z) = b_2z^2 + b_1z + b_0$ e como os coeficientes b_k, $k = 0, 1, 2$, são números complexos, denotamos

$$b_k = \mathrm{Re}(b_k) + i\,\mathrm{Im}(b_k),$$

onde $\mathrm{Re}(b_k)$ é a parte real de b_k e $\mathrm{Im}(b_k)$ é a parte imaginária de b_k.

A análise para a determinação de funções peso semiclássicas é dividida em três casos, de acordo com o grau do polinômio A, isto é, quando A tem grau 0, 1 ou 2. Como o coeficiente de maior ordem de B está livre, podemos tomar A como um polinômio mônico, isto é, sem perda de generalidade, consideramos A um polinômio mônico. Para cada caso substituímos os polinômios A e B na equação do tipo Pearson da forma (1.18) e determinamos a função peso, w, que seja positiva e satisfaça $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$.

2.1 Com $A(z)$ polinômio de grau 0

Como consideramos A polinômio mônico de grau 0, ou seja, $A(z) = 1$. De (1.18) vemos que w satisfaz

$$\frac{\mathrm{d}\,w(\theta)/\,\mathrm{d}\,\theta}{w(\theta)} = b_2z^2 + b_1z + b_0, \quad z = e^{i\theta}. \tag{2.5}$$

Para que a função peso w seja positiva, em (2.5) é necessário que

$$\mathrm{Im}(b_2e^{2i\theta} + b_1e^{i\theta} + b_0) = 0,$$

ou seja,

$$\mathrm{Im}\left[b_2\Big(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\Big) + b_1\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big) + b_0\right] = 0,$$

que é equivalente a

$$\mathrm{Im}(b_2)\cos(2\theta) + \mathrm{Re}(b_2)\sin(2\theta) + \mathrm{Im}(b_1)\cos(\theta) + \mathrm{Re}(b_1)\sin(\theta) + \mathrm{Im}(b_0) = 0,$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$. Como o conjunto

$$\{\cos(2\theta), \sin(2\theta), \cos(\theta), \sin(\theta), 1\}, \qquad \text{com } \theta \in [0, 2\pi],$$

é linearmente independente, então $b_2 = 0$, $b_1 = 0$ e $\mathrm{Im}(b_0) = 0$. Portanto, usando a representação (1.19), obtemos

$$i\frac{\mathrm{d}\,w(\theta)/\,\mathrm{d}\,z}{w(\theta)} = \frac{\mathrm{Re}(b_0)}{z}, \tag{2.6}$$

onde $z = e^{i\theta}$. Integrando ambos os lados de (2.6), de z_0 a z, com $z_0 = e^{i\theta_0}$ e $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tal que $w(\theta_0) > 0$, temos

$$\begin{aligned} i\int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}\, w(\theta)}{w(\theta)} \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, u} &= \mathrm{Re}(b_0) \int_{z_0}^{z} \frac{1}{u} \mathrm{d}\, u \\ &= \mathrm{Re}(b_0)[\ln(z) - \ln(z_0)] \\ &= \mathrm{Re}(b_0)[\ln(e^{i\theta}) - \ln(e^{i\theta_0})] \\ &= i\, \mathrm{Re}(b_0)[\theta - \theta_0] \end{aligned}$$

e então, segue que

$$\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = \mathrm{Re}(b_0)[\theta - \theta_0],$$

Logo,

$$w(\theta) = w(\theta_0) e^{Re(b_0)[\theta - \theta_0]}.$$

A condição adicional para obter a função peso é $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$. Impomos que $w(0) = w(2\pi)$, assim $\mathrm{Re}(b_0) = 0$ e $w(\theta) = w(\theta_0)$. Como $w(\theta_0)$ é uma constante, podemos escolher essa constante, tal que, $\int_0^{2\pi} w(\theta)\, \mathrm{d}\, \theta = 1$. Concluímos que a única função peso semiclássica na circunferência unitária com $A(z) = 1$ é a função peso de Lebesgue, ou seja,

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi}.$$

Aqui o polinômio B na equação do tipo Pearson (1.16) é $B(z) = 0$. Observe que, segundo [52], a função peso de Lebesgue pertence a classe $(0, 0)$.

2.2 Com $A(z)$ polinômio de grau 1

Aqui consideramos A um polinômio mônico de grau 1, ou seja, $A(z) = z - r$ com $r \in \mathbb{C}$. De (1.18) obtemos

$$\frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\, \mathrm{d}\, \theta}{w(\theta)} = \frac{b_2 z^2 + (b_1 - i)z + b_0}{z - r}, \quad z = e^{i\theta}. \tag{2.7}$$

Para que w seja positiva, é necessário que o lado direito de (2.7) seja real. Observe de (2.7) que

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\, \mathrm{d}\, \theta}{w(\theta)} &= \frac{b_2 z^2 + (b_1 - i)z + b_0}{z - r} \frac{\overline{(z - r)}}{\overline{(z - r)}} \\ &= \frac{-\overline{r} b_2 z^2 + [b_2 - \overline{r}(b_1 - i)]z - \overline{r} b_0 + b_1 - i + b_0 z^{-1}}{|z - r|^2} \end{aligned}$$

é real se, e somente se, o numerador do lado direito é real. Portanto, assumimos que

$$\mathrm{Im}(-\overline{r} b_2 z^2 + [b_2 - \overline{r}(b_1 - i)]z - \overline{r} b_0 + b_1 - i + b_0 z^{-1}) = 0. \tag{2.8}$$

Calculando de forma similar ao caso da Seção 2.1, ou seja, sabendo que,

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin\theta$$

e que o conjunto

$$\{\cos(2\theta), \sin(2\theta), \cos(\theta), \sin(\theta), 1\}, \qquad \text{com } \theta \in [0, 2\pi],$$

é linearmente independente, para encontrar os valores de b_k, $k = 0, 1, 2$, que satisfazem a equação (2.8), obtemos cinco equações, isto é, denotando $r = \operatorname{Re}(r) + i \operatorname{Im}(r)$ temos

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{Re}(r)\operatorname{Re}(b_2) - \operatorname{Im}(r)\operatorname{Im}(b_2) = 0,\\
&\operatorname{Im}(r)\operatorname{Re}(b_2) - \operatorname{Re}(r)\operatorname{Im}(b_2) = 0,\\
&\operatorname{Im}(b_1) + \operatorname{Im}(r)\operatorname{Re}(b_0) - \operatorname{Re}(r)\operatorname{Im}(b_0) - 1 = 0,\\
&\operatorname{Re}(b_2) - \operatorname{Re}(r)\operatorname{Re}(b_1) - \operatorname{Im}(r)[\operatorname{Im}(b_1) - 1] - \operatorname{Re}(b_0) = 0\\
&\operatorname{Im}(b_2) - \operatorname{Re}(r)[\operatorname{Im}(b_1) - 1] + \operatorname{Im}(r)\operatorname{Re}(b_1) + \operatorname{Im}(b_0) = 0,
\end{aligned}$$

que podem ser escritas como um sistema de equações lineares de ordem 5×6,

$$\mathbf{F}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{g}_1. \tag{2.9}$$

A solução desse sistema linear é $\mathbf{x}_1 = (\operatorname{Re}(b_2), \operatorname{Im}(b_2), \operatorname{Re}(b_1), \operatorname{Im}(b_1), \operatorname{Re}(b_0), \operatorname{Im}(b_0))^T$. A matriz $\mathbf{F}_1$ e o vetor $\mathbf{g}_1$ são

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(r) & -\operatorname{Im}(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{Im}(r) & -\operatorname{Re}(r) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \operatorname{Im}(r) & -\operatorname{Re}(r) \\ 1 & 0 & -\operatorname{Re}(r) & -\operatorname{Im}(r) & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \operatorname{Im}(r) & -\operatorname{Re}(r) & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\operatorname{Im}(r) \\ -\operatorname{Re}(r) \end{pmatrix}.$$

Agora, consideremos separadamente dois casos, quando $r = 0$ e $r \neq 0$.

1) $A(z) = z$

Quando $r = 0$, a solução do sistema linear (2.9) nos fornece $b_2 = \overline{b}_0$ e $\operatorname{Im}(b_1) = 1$. Portanto, usando a representação (1.19) temos

$$i\frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\mathrm{d}\, z}{w(\theta)} = \frac{b_2 z^2 + \operatorname{Re}(b_1)z + \overline{b}_2}{z^2}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Analogamente, integrando de z_0 a z e considerando $z_0 = e^{i\theta_0}, \theta_0 \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}
i\int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}\, w(\theta)}{w(\theta)} \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, u} &= \int_{z_0}^{z} \frac{b_2 u^2 + \operatorname{Re}(b_1)u + \overline{b}_2}{u^2} \mathrm{d}\, u \\
&= b_2 \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}\, u + \operatorname{Re}(b_1) \int_{z_0}^{z} \frac{1}{u} \mathrm{d}\, u + \overline{b}_2 \int_{z_0}^{z} \frac{1}{u^2} \mathrm{d}\, u \\
&= b_2(z - z_0) + \operatorname{Re}(b_1)[\ln(z) - \ln(z_0)] - \overline{b}_2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right)
\end{aligned}$$

e então, segue que

$$i\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = b_2(z - z_0) - \overline{b}_2\overline{(z - z_0)} + i\operatorname{Re}(b_1)(\theta - \theta_0).$$

Note que

$$b_2(z-z_0)-\overline{b}_2\overline{(z-z_0)} = [e^{i(\theta-\theta_0)/2}-e^{-i(\theta-\theta_0)/2}][b_2e^{i(\theta+\theta_0)/2}+\overline{b}_2e^{-i(\theta+\theta_0)/2}]$$
$$= 2i|b_2|[\sin(\theta+\arg(b_2))-\sin(\theta_0+\arg(b_2))].$$

Assim

$$\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = 2|b_2|[\sin(\theta+\arg(b_2))-\sin(\theta_0+\arg(b_2))]+\mathrm{Re}(b_1)(\theta-\theta_0)$$

e, então

$$w(\theta) = w(\theta_0)e^{2|b_2|[\sin(\theta+\arg(b_2))-\sin(\theta_0+\arg(b_2))]}e^{\mathrm{Re}(b_1)(\theta-\theta_0)}.$$

Assumindo que $A(1)[w(2\pi)-w(0)]=0$, temos $\mathrm{Re}(b_1)=0$. Portanto, a função peso pode ser escrita como

$$w(\theta) = \tau(b_2)\,e^{2|b_2|\sin(\theta+\arg(b_2))} \tag{2.10}$$

onde $\tau(b_2)=w(\theta_0)\;e^{-2|b_2|[\sin(\theta_0+\arg(b_2))]}$.

Essa função peso satisfaz a equação do tipo Pearson (1.16) com

$$A(z)=z \quad \text{e} \quad B(z)=b_2z^2+iz+\overline{b}_2.$$

Considerando $b_2\neq 0$, podemos ver que a função peso semiclássica (2.10) pertence a classe $(1,2)$.

Observação 2.2. Se escolhemos

$$b_2 = i\frac{t}{2}, \;\text{ com }\; t>0 \quad \text{e} \quad \tau(b_2)=\frac{1}{2\pi I_0(t)},$$

onde I_0 é a função de Bessel modificada, em (2.10), então $\arg(b_2)=\pi/2$ e a função peso é dada por

$$w(\theta)=\frac{1}{2\pi I_0(t)}e^{t\cos(\theta)}.$$

Essa é a função peso relacionada aos polinômios de Bessel modificados descrita em (1.21), ver [32].

Observação 2.3. A função peso (2.10) foi estudada em [39]. Observe que usando $b_2 = u\in\mathbb{C}$, a função peso (2.10) coincide com a função peso (1.23), ou seja,

$$w(\theta)=\tau(u)\,e^{2|u|\sin(\theta+\arg(u))},$$

onde $\tau(u)$ é uma constante.

2) $A(z)=z-r$**, com** $r\neq 0$

A solução do sistema (2.9) com $r\neq 0$ mostra que $\mathrm{Re}(b_2)=\mathrm{Im}(b_2)=0$, ou seja, $b_2=0$.

Para este caso, vamos analisar a solução do sistema (2.9) quando $|r|=1$ e quando $|r|\neq 1$.

a) Se $|r|=1$, a solução do sistema (2.9) nos fornece $b_1=-r\overline{b}_0+i$, onde b_0 é um número complexo arbitrário. Então, a representação (1.19) para este caso torna-se

$$i\frac{\mathrm{d}\,w(\theta)/\,\mathrm{d}\,z}{w(\theta)} = \frac{-r\overline{b}_0z+b_0}{z(z-r)}, \quad z=e^{i\theta}.$$

Novamente, integrando de z_0 a z e considerando $z_0 = e^{i\theta_0}, \theta_0 \in [0, 2\pi]$, temos

$$\begin{aligned}
i\int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}\, w(\theta)}{w(\theta)} \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, u} &= \int_{z_0}^{z} \left(\frac{-r\bar{b}_0 u + b_0}{u(u-r)} \right) \mathrm{d}\, u \\
&= -r\bar{b}_0 \int_{z_0}^{z} \frac{1}{(u-r)} \mathrm{d}\, u + b_0 \int_{z_0}^{z} \frac{1}{u(u-r)} \mathrm{d}\, u \\
&= -r\bar{b}_0 \ln\left(\frac{z-r}{z_0-r} \right) + \frac{b_0}{r}\left[-\ln\left(\frac{z}{z_0} \right) + \ln\left(\frac{z-r}{z_0-r} \right) \right] \\
&= -b_0\bar{r}[\ln(z) - \ln(z_0)] + [b_0\bar{r} - r\bar{b}_0] \ln\left(\frac{z-r}{z_0-r} \right).
\end{aligned}$$

E então, segue que

$$i\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)} \right) = -ib_0\bar{r}(\theta - \theta_0) + 2i\,\mathrm{Im}(b_0\bar{r}) \ln\left(\frac{z-r}{z_0-r} \right).$$

Como $|r| = 1$, denotamos $r = e^{i\varphi}$ com $\varphi \in [0, 2\pi]$ e, então,

$$\begin{aligned}
\frac{z-r}{z_0-r} &= \frac{e^{i\theta} - e^{i\varphi}}{e^{i\theta_0} - e^{i\varphi}} \\
&= \frac{e^{i\theta/2}e^{i\varphi/2}}{e^{i\theta_0/2}e^{i\varphi/2}} \left(\frac{e^{i\theta/2}e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta_0/2}e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}e^{-i\theta_0/2}} \right) \\
&= \frac{e^{i\theta/2}}{e^{i\theta_0/2}} \left(\frac{e^{i(\theta-\varphi)/2} - e^{-i(\theta-\varphi)/2}}{e^{i(\theta_0-\varphi)/2} - e^{-i(\theta_0-\varphi)/2}} \right) \\
&= e^{i(\theta-\theta_0)/2} \frac{2i}{2i} \left(\frac{\sin(\theta/2 - \varphi/2)}{\sin(\theta_0/2 - \varphi/2)} \right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{z-r}{z_0-r} = e^{i(\theta-\theta_0)/2} \frac{\sin(\theta/2 - \varphi/2)}{\sin(\theta_0/2 - \varphi/2)}. \tag{2.11}$$

Observe que

$$\ln\left(e^{i(\theta-\theta_0)/2} \frac{\sin(\theta/2 - \varphi/2)}{\sin(\theta_0/2 - \varphi/2)} \right) = i\frac{(\theta - \theta_0)}{2} + \ln\left| \frac{\sin(\theta/2 - \varphi/2)}{\sin(\theta_0/2 - \varphi/2)} \right|.$$

Portanto,

$$\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)} \right) = -\mathrm{Re}(b_0\bar{r})(\theta - \theta_0) + \ln\left[\frac{\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)}{\sin^2(\theta_0/2 - \varphi/2)} \right]^{\mathrm{Im}(b_0\bar{r})}.$$

Assim, a função peso pode ser escrita como

$$w(\theta) = \tau(b_0)e^{-\mathrm{Re}(\bar{b}_0 r)\theta}[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)]^{\mathrm{Im}(b_0\bar{r})},$$

com

$$\tau(b_0) = w(\theta_0)e^{\mathrm{Re}(\bar{b}_0 r)\theta_0}[\sin^2(\theta_0/2 - \varphi/2)]^{-\mathrm{Im}(b_0\bar{r})}.$$

Impondo que $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$, obtemos duas possíveis funções peso

i) Se $\sin(\varphi/2) \neq 0$, isto é, $r \neq 1$, é necessário que $\mathrm{Re}(b_0\bar{r}) = 0$, logo

$$w(\theta) = \tau(b_0)\left[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{\mathrm{Im}(b_0\bar{r})}, \quad \mathrm{Im}(b_0\bar{r}) > -1/2. \tag{2.12}$$

Aqui

$$B(z) = (-r\bar{b}_0 + i)z + b_0,$$

onde $b_0 \in \mathbb{R}$ quando $\mathrm{Re}(r) = 0$ e $b_0 = ir\,\mathrm{Im}(b_0)/\,\mathrm{Re}(r)$ quando $\mathrm{Re}(r) \neq 0$. Observe que a função peso (2.12) é uma modificação de (1.20).

ii) Se $\sin(\varphi/2) = 0$, isto é, $r = 1$, a função peso torna-se

$$w(\theta) = \tau(b_0)e^{-\mathrm{Re}(b_0)\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\mathrm{Im}(b_0)}, \quad \mathrm{Im}(b_0) > -1/2. \tag{2.13}$$

Neste caso,

$$B(z) = (-\bar{b}_0 + i)z + b_0.$$

Observação 2.4. Considerando em (2.13) o parâmetro

$$b_0 = i\bar{b},$$

onde $b = \lambda + i\eta$, $\lambda > -1/2$ e $\eta \in \mathbb{R}$, a função peso (2.13) é a mesma que (1.25), ou seja,

$$w(\theta) = \tau(b)\,e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}.$$

Essa função peso satisfaz a equação do tipo Pearson com

$$A(z) = z - 1 \quad \text{e} \quad B(z) = i[(b+1)z + \bar{b}].$$

b) Se $|r| \neq 1$, da solução do sistema (2.9), os coeficientes b_1 e b_0 satisfazem

$$b_1 = \begin{cases} -\frac{\mathrm{Re}(b_0)}{\mathrm{Re}(r)} + i, & \text{se } \mathrm{Re}(r) \neq 0, \\ -\frac{\mathrm{Im}(b_0)}{\mathrm{Im}(r)} + i, & \text{se } \mathrm{Re}(r) = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad b_0 = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}(b_0)r}{\mathrm{Re}(r)}, & \text{se } \mathrm{Re}(r) \neq 0, \\ i\,\mathrm{Im}(b_0), & \text{se } \mathrm{Re}(r) = 0, \end{cases}$$

onde $\mathrm{Re}(b_0)$ (resp. $\mathrm{Im}(b_0)$) é um número real arbitrário se $\mathrm{Re}(r) \neq 0$ (resp. $\mathrm{Re}(r) = 0$).

Portanto, para $|r| \neq 1$, a representação (1.19) pode ser resumida como

$$i\frac{dw(\theta)/dz}{w(\theta)} = \frac{s(r)}{z}, \quad \text{onde} \quad s(r) = \begin{cases} -\frac{\mathrm{Im}(b_0)}{\mathrm{Im}(r)}, & \text{se } \mathrm{Re}(r) = 0, \\ -\frac{\mathrm{Re}(b_0)}{\mathrm{Re}(r)}, & \text{se } \mathrm{Re}(r) \neq 0. \end{cases}$$

De forma similar ao que foi feito na equação (2.6), a função peso aqui satisfaz

$$w(\theta) = w(\theta_0)e^{s(r)[\theta - \theta_0]}.$$

Impondo que $w(0) = w(2\pi)$, novamente obtemos a função peso de Lebesgue. Aqui os polinômios A e B são

$$A(z) = z - r, \; |r| \neq 1 \quad \text{e} \quad B(z) = iz.$$

Portanto, observe que a função peso de Lebesgue também pertence a classe $(1,1)$, como esperado.

2.3 Com $A(z)$ polinômio de grau 2

Aqui consideramos A um polinômio mônico de grau 2, ou seja, $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$ com $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$. De (1.18), temos

$$\frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\,\mathrm{d}\,\theta}{w(\theta)} = \frac{[(b_2 - 2i)z^2 + [b_1 + i(r_1 + r_2)]z + b_0][(\overline{z} - \overline{r}_1)(\overline{z} - \overline{r}_2)]}{|z - r_1|^2 |z - r_2|^2}.$$

Novamente, a função peso w é positiva se

$$\operatorname{Im}\{[(b_2 - 2i)z^2 + (b_1 + i(r_1 + r_2))z + b_0][(\overline{z} - \overline{r}_1)(\overline{z} - \overline{r}_2)]\} = 0, \tag{2.14}$$

com $z = e^{i\theta}$. De maneira similar ao que foi feito na Seção 2.2, para encontrar os valores de b_0, b_1 e b_2 que satisfazem (2.14) é equivalente resolver o sistema de equações lineares de ordem 5×6,

$$\mathbf{F}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{g}_2, \tag{2.15}$$

onde, neste caso, $\mathbf{x}_2 = (\operatorname{Im}(b_0), \operatorname{Re}(b_0), \operatorname{Im}(b_1), \operatorname{Re}(b_1), \operatorname{Im}(b_2), \operatorname{Re}(b_2))^T$,

$$\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{Re}(r_1 r_2) & -\operatorname{Im}(r_1 r_2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \operatorname{Im}(r_1 r_2) & \operatorname{Re}(r_1 r_2) \\ \operatorname{Re}(r_1 r_2) & -\operatorname{Im}(r_1 r_2) & -\operatorname{Re}(r_1 + r_2) & \operatorname{Im}(r_1 + r_2) & 1 & 0 \\ -\operatorname{Re}(r_1 + r_2) & \operatorname{Im}(r_1 + r_2) & \operatorname{Re}(r_1 r_2) + 1 & -\operatorname{Im}(r_1 r_2) & -\operatorname{Re}(r_1 + r_2) & \operatorname{Im}(r_1 + r_2) \\ \operatorname{Im}(r_1 + r_2) & \operatorname{Re}(r_1 + r_2) & \operatorname{Im}(r_1 r_2) & \operatorname{Re}(r_1 r_2) - 1 & -\operatorname{Im}(r_1 + r_2) & -\operatorname{Re}(r_1 + r_2) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re}(r_1 r_2) \\ 2\operatorname{Im}(r_1 r_2) \\ 2 + |r_1 + r_2|^2 \\ -3\operatorname{Re}(r_1 + r_2) - |r_1|^2 \operatorname{Re}(r_2) - |r_2|^2 \operatorname{Re}(r_1) \\ -3\operatorname{Im}(r_1 + r_2) - |r_1|^2 \operatorname{Im}(r_2) - |r_2|^2 \operatorname{Im}(r_1) \end{pmatrix}.$$

Vamos determinar a solução do sistema linear (2.15) considerando casos de acordo com os zeros r_1 e r_2, ou seja, analisaremos os seguintes casos

1) $|r_1| = 1$ e $|r_2| = 1$;

2) $|r_1| \neq 1$ e $|r_2| = 1$;

3) $|r_1| \neq 1$ e $|r_1 r_2| = 1$;

4) $|r_1| \neq 1$, $|r_2| \neq 1$ e $|r_1 r_2| \neq 1$.

1) $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$ **com** $|r_1| = 1$ **e** $|r_2| = 1$

Dividimos a análise em dois casos $r_1 = r_2 = r$ e $r_1 \neq r_2$.
a) Para $A(z) = (z - r)^2$, com $|r| = 1$, a solução do sistema linear (2.15) é

$$b_2 = r^2 \overline{b}_0 + 2i, \qquad b_1 = \begin{cases} \frac{2}{\operatorname{Im}(r)} + \operatorname{Im}(b_1)i, & \text{se } \operatorname{Re}(r) = 0, \\ \frac{\operatorname{Re}(b_1)r - 2i}{\operatorname{Re}(r)}, & \text{se } \operatorname{Re}(r) \neq 0, \end{cases}$$

onde b_0 é um número complexo arbitrário e $\mathrm{Re}(b_1)$ (resp. $\mathrm{Im}(b_1)$) é um número real arbitrário se $\mathrm{Re}(r) \neq 0$ (resp. $\mathrm{Re}(r) = 0$).

Portanto, e equação do tipo Pearson (1.19) torna-se

$$i\frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\,\mathrm{d}\, z}{w(\theta)} = \frac{r^2\overline{b}_0 z^2 + (b_1 + 2ir)z + b_0}{z(z-r)^2}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Integrando de z_0 a $z = e^{i\theta}$ e considerando $z_0 = e^{i\theta_0}$ com $\theta_0 \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned}
i\int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}\, w(\theta)}{w(\theta)}\frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, u} &= \int_{z_0}^{z} \frac{r^2\overline{b}_0 u^2 + (b_1 + 2ir)u + b_0}{u(u-r)^2}\,\mathrm{d}\, u \\
&= r^2\overline{b}_0 \int_{z_0}^{z} \frac{u}{(u-r)^2}\,\mathrm{d}\, u + (b_1 + 2ir)\int_{z_0}^{z} \frac{1}{(u-r)^2}\,\mathrm{d}\, u + b_0 \int_{z_0}^{z} \frac{1}{u(u-r)^2}\,\mathrm{d}\, u \\
&= r^2\overline{b}_0 \left[\frac{r(z-z_0)}{(z-r)(z_0-r)} + \ln\left(\frac{z-r}{z_0-r}\right)\right] + (b_1+2ir)\left[\frac{z-z_0}{(z-r)(z_0-r)}\right] \\
&\quad + \frac{b_0}{r}\left[\frac{i}{r}(\theta-\theta_0) - \frac{1}{r}\ln\left(\frac{z-r}{z_0-r}\right) + \frac{z-z_0}{(z-r)(z_0-r)}\right],
\end{aligned}$$

obtemos então

$$\begin{aligned}
i\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) &= [2\,\mathrm{Re}(r^2\overline{b}_0) + (b_1+2ir)\overline{r}]\frac{r(z-z_0)}{(z-r)(z_0-r)} \\
&\quad + ib_0\overline{r}^2(\theta-\theta_0) + 2i\,\mathrm{Im}(r^2\overline{b}_0)\ln\left(\frac{z-r}{z_0-r}\right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Observe que $(b_1 + 2ir)\overline{r} \in \mathbb{R}$ e

$$(b_1+2ir)\overline{r} = \begin{cases} \mathrm{Im}(b_1)\,\mathrm{Im}(r), & \text{se } \mathrm{Re}(r) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{Re}(b_1) - 2\,\mathrm{Im}(r)}{\mathrm{Re}(r)}, & \text{se } \mathrm{Re}(r) \neq 0. \end{cases}$$

Como $|r| = 1$ denotamos $r = e^{i\varphi}$, com $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Portanto, de

$$\begin{aligned}
\frac{r(z-z_0)}{(z-r)(z_0-r)} &= \frac{\sin(\theta/2-\theta_0/2)}{2i\sin(\theta/2-\varphi/2)\sin(\theta_0/2-\varphi/2)} \\
&= \frac{\cot(\theta_0/2-\varphi/2) - \cot(\theta/2-\varphi/2)}{2i}
\end{aligned}$$

e (2.11), a equação (2.16) torna-se

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) &= -\left[\mathrm{Re}(r^2\overline{b}_0) + \frac{(b_1+2ri)\overline{r}}{2}\right][\cot(\theta_0/2-\varphi/2) - \cot(\theta/2-\varphi/2)] \\
&\quad + \mathrm{Re}(\overline{b}_0 r^2)(\theta-\theta_0) + \ln\left(\frac{\sin^2(\theta/2-\varphi/2)}{\sin^2(\theta_0/2-\varphi/2)}\right)^{\mathrm{Im}(r^2\overline{b}_0)}.
\end{aligned}$$

A função peso correspondente é

$$w(\theta) = \tau(b_0; b_1)\left[\sin^2(\theta/2-\varphi/2)\right]^{2\,\mathrm{Im}(\overline{b}_0 r^2)} e^{\mathrm{Re}(\overline{b}_0 r^2)\theta} e^{[\mathrm{Re}(\overline{b}_0 r^2) + \frac{(b_1+2ri)\overline{r}}{2}][\cot(\theta/2-\varphi/2)]},$$

com

$$\tau(b_0; b_1) = w(\theta_0)\left[\sin^2(\theta_0/2 - \varphi/2)\right]^{-2\operatorname{Im}(\overline{b}_0 r^2)} e^{-\operatorname{Re}(\overline{b}_0 r^2)\theta_0} e^{-[\operatorname{Re}(\overline{b}_0 r^2) + \frac{(b_1+2ri)\overline{r}}{2}][\cot(\theta/2-\varphi/2)]}.$$

Assumindo que $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$, obtemos duas possíveis funções pesos

i) Se $\sin(\varphi/2) \neq 0$, é necessário que $\operatorname{Re}(\overline{b}_0 r^2) = 0$ e $(b_1 + 2ri)\overline{r} = 0$, então a função peso é

$$w(\theta) = \tau(b_0; b_1)\left[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{\operatorname{Im}(\overline{b}_0 r^2)}, \quad \operatorname{Im}(\overline{b}_0 r^2) > -1/2. \tag{2.17}$$

Neste caso,

$$B(z) = (r^2\overline{b}_0 + 2i)z^2 - (2ir)z + b_0,$$

onde $b_0 \in \mathbb{R}$ quando $\operatorname{Re}(r^2) = 0$ e $b_0 = ir^2\operatorname{Im}(b_0)/\operatorname{Re}(r^2)$ quando $\operatorname{Re}(r^2) \neq 0$. Novamente, observe que a função peso (2.17) é uma modificação de (1.20).

ii) Se $\sin(\varphi/2) = 0$, é necessário que $\operatorname{Re}(\overline{b}_0) + (b_1 + 2i)/2 = 0$, e

$$w(\theta) = \tau(b_0; b_1)e^{\operatorname{Re}(\overline{b}_0)\theta}\left[\sin^2(\theta/2)\right]^{\operatorname{Im}(\overline{b}_0)}, \quad \operatorname{Im}(\overline{b}_0) > -1/2, \quad \operatorname{Re}(\overline{b}_0) \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Aqui,

$$B(z) = (\overline{b}_0 + 2i)z^2 + [-(b_0 + \overline{b}_0) - 2i]z + b_0.$$

Observação 2.5. Como na Observação 2.4, concluímos que a função peso (2.18) é a função peso (1.25), isto é,

$$w(\theta) = \tau(b)\, e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda},$$

basta considerar o parâmetro

$$b_0 = -i\overline{b},$$

onde $b = \lambda + i\eta$, $\lambda > -1/2$ e $\eta \in \mathbb{R}$. Neste caso, os polinômios em (1.16) são

$$A(z) = (z-1)^2 \quad \text{e} \quad B(z) = i[(b+2)z^2 + (\overline{b} - b - 2)z - \overline{b}].$$

b) Para $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$, $|r_1| = |r_2| = 1$ e $r_1 \neq r_2$, para encontrar a solução do sistema linear (2.15), precisamos dividir as escolhas para os valores de r_1 e r_2 em dois casos, $\operatorname{Re}(r_1 + r_2) = 0$ e $\operatorname{Re}(r_1 + r_2) \neq 0$. Quando $\operatorname{Re}(r_1 + r_2) = 0$, obtemos mais duas possibilidades, isto é, $r_2 = -r_1$ ou $r_2 = -\overline{r}_1$. Para o caso $r_2 = -r_1$, também obtemos diferentes soluções do sistema se $\operatorname{Re}(r_1)^2 = 1$ ou $\operatorname{Re}(r_1)^2 \neq 1$. Em resumo, temos

$$b_2 = 2i + r_1 r_2 \overline{b}_0,$$

$$b_1 = \begin{cases} \operatorname{Im}(b_1)i, & \text{se } r_2 = -r_1 \text{ e } \operatorname{Re}(r_1)^2 = 1, \\ -\dfrac{r_1\operatorname{Re}(b_1)i}{\operatorname{Im}(r_1)}, & \text{se } r_2 = -r_1 \text{ e } \operatorname{Re}(r_1)^2 \neq 1, \\ 2\operatorname{Im}(r_1) + \operatorname{Im}(b_1)i, & \text{se } r_2 = -\overline{r}_1 \text{ e } \operatorname{Re}(r_1)\operatorname{Im}(r_1) \neq 0, \\ \dfrac{\operatorname{Re}(b_1)(r_1+r_2) - |r_1+r_2|^2 i}{\operatorname{Re}(r_1+r_2)}, & \text{se } \operatorname{Re}(r_1+r_2) \neq 0, \end{cases}$$

onde b_0 é um número complexo arbitrário. Além disso, $\mathrm{Re}(b_1)$ ou $\mathrm{Im}(b_1)$ são arbitrários dependendo de r_1 e r_2. Portanto, a representação (1.19) torna-se

$$i\frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\,\mathrm{d}\, z}{w(\theta)} = \frac{r_1 r_2 \overline{b}_0 z^2 + [b_1 + i(r_1 + r_2)]z + b_0}{z(z-r_1)(z-r_2)}.$$

Integrando com relação a $z = e^{i\theta}$ e considerando $z_0 = e^{i\theta_0}$ com $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, temos

$$\begin{aligned}
i\int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}\, w(\theta)}{w(\theta)} \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, u} &= \int_{z_0}^{z} \frac{r_1 r_2 \overline{b}_0 u^2 + [b_1 + i(r_1+r_2)]u + b_0}{u(u-r_1)(u-r_2)} \,\mathrm{d}\, u \\
&= r_1 r_2 \overline{b}_0 \int_{z_0}^{z} \frac{u}{(u-r_1)(u-r_2)} \,\mathrm{d}\, u + [b_1 + i(r_1+r_2)] \int_{z_0}^{z} \frac{1}{(u-r_1)(u-r_2)} \,\mathrm{d}\, u \\
&\quad + b_0 \int_{z_0}^{z} \frac{1}{u(u-r_1)(u-r_2)} \,\mathrm{d}\, u \\
&= \frac{r_1 r_2 \overline{b}_0}{r_2 - r_1} \left[r_2 \ln\left(\frac{z-r_2}{z_0-r_2}\right) - r_1 \ln\left(\frac{z-r_1}{z_0-r_1}\right) \right] \\
&\quad + \frac{[b_1 + i(r_1+r_2)]}{r_2 - r_1} \left[\ln\left(\frac{z-r_2}{z_0-r_2}\right) - \ln\left(\frac{z-r_1}{z_0-r_1}\right) \right] \\
&\quad + b_0 \left[\frac{1}{r_2(r_2-r_1)} \ln\left(\frac{z-r_2}{z_0-r_2}\right) - \frac{1}{r_1(r_2-r_1)} \ln\left(\frac{z-r_1}{z_0-r_1}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{r_1 r_2} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \right]
\end{aligned}$$

e então, isolando alguns termos, obtemos

$$i \ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = i b_0 \overline{r}_1 \overline{r}_2 (\theta - \theta_0) + H_1 \ln\left(\frac{z-r_1}{z_0-r_1}\right) + H_2 \ln\left(\frac{z-r_2}{z_0-r_2}\right), \tag{2.19}$$

onde

$$\begin{aligned}
H_1 &= -\frac{1}{r_2 - r_1}[r_1^2 r_2 \overline{b}_0 + b_1 + i(r_1+r_2) + \overline{r}_1 b_0], \\
H_2 &= \frac{1}{r_2 - r_1}[r_2^2 r_1 \overline{b}_0 + b_1 + i(r_1+r_2) + \overline{r}_2 b_0].
\end{aligned}$$

Note que $H_1 + H_2 = 2i\,\mathrm{Im}(\overline{b}_0 r_1 r_2)$ e assim podemos reescrever (2.19), ou seja,

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) &= b_0 \overline{r}_1 \overline{r}_2 (\theta - \theta_0) + 2\,\mathrm{Im}(\overline{b}_0 r_1 r_2) \ln\left(\frac{z-r_2}{z_0-r_2}\right) \\
&\quad + iH_1 \left[\ln\left(\frac{z-r_2}{z_0-r_2}\right) - \ln\left(\frac{z-r_1}{z_0-r_1}\right) \right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

H_1 também pode ser escrito como

$$H_1 = -\frac{1}{|r_2 - r_1|^2}[2i\,\mathrm{Im}[\overline{b}_0 r_1 (r_1 - r_2)] - 2\,\mathrm{Im}(r_1 \overline{r}_2) + b_1(\overline{r}_2 - \overline{r}_1)].$$

Agora, usando os valores correspondentes de b_1 para cada solução do sistema, resumimos os valores de H_1 como

$$\begin{cases} [\mathrm{Im}(b_0) + \frac{\mathrm{Im}(b_1) r_1}{2}] i, & \text{se } r_2 = -r_1 \text{ e } \mathrm{Re}(r_1)^2 = 1, \\ -\left[2\,\mathrm{Im}(\bar{b}_0 r_1^2) + \frac{\mathrm{Re}(b_1)}{\mathrm{Im}(r_1)}\right] \frac{i}{2}, & \text{se } r_2 = -r_1 \text{ e } \mathrm{Re}(r_1)^2 \neq 1, \\ \frac{[2\,\mathrm{Im}(\bar{r}_1 b_0) + \mathrm{Im}(b_1)] i}{2\,\mathrm{Re}(r_1)}, & \text{se } r_2 = -\bar{r}_1 \text{ e } \mathrm{Re}(r_1)\,\mathrm{Im}(r_1) \neq 0, \\ \{-\mathrm{Im}[\bar{b}_0 r_1 (r_1 - r_2)] + \frac{\mathrm{Im}(\bar{r}_1 r_2)]}{\mathrm{Re}(r_1 + r_2)} [\mathrm{Re}(b_1) - \mathrm{Im}(r_1 + r_2)]\} \frac{2i}{|r_2 - r_1|^2}, & \text{se } \mathrm{Re}(r_1 + r_2) \neq 0. \end{cases}$$

Como $|r_1| = |r_2| = 1$ e $r_1 \neq r_2$, dos valores acima para H_1 podemos ver que $\mathrm{Re}(H_1) = 0$. Logo, a equação (2.20) pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = {} & b_0 \bar{r}_1 \bar{r}_2 (\theta - \theta_0) + 2\,\mathrm{Im}(\bar{b}_0 r_1 r_2) \ln\left(\frac{z - r_2}{z_0 - r_2}\right) \\ & + \mathrm{Im}(H_1)\left[\ln\left(\frac{z - r_1}{z_0 - r_1}\right) - \ln\left(\frac{z - r_2}{z_0 - r_2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Denotando $r_1 = e^{i\varphi}$ e $r_2 = e^{i\phi}$ como em (2.11), temos

$$\frac{z - r_1}{z_0 - r_1} = e^{i(\theta - \theta_0)/2} \frac{\sin[(\theta - \varphi)/2]}{\sin[(\theta_0 - \varphi)/2]} \quad \text{e} \quad \frac{z - r_2}{z_0 - r_2} = e^{i(\theta - \theta_0)/2} \frac{\sin[(\theta - \phi)/2]}{\sin[(\theta_0 - \phi)/2]}.$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = {} & \mathrm{Re}(b_0 \bar{r}_1 \bar{r}_2)(\theta - \theta_0) + \ln\left|\frac{\sin[(\theta - \phi)/2]}{\sin[(\theta_0 - \phi)/2]}\right|^{-2\,\mathrm{Im}(b_0 \bar{r}_1 \bar{r}_2)} \\ & + \ln\left|\frac{\sin[(\theta - \varphi)/2]}{\sin[(\theta_0 - \varphi)/2]}\right|^{\mathrm{Im}(H_1)} + \ln\left|\frac{\sin[(\theta - \phi)/2]}{\sin[(\theta_0 - \phi)/2]}\right|^{-\mathrm{Im}(H_1)}, \end{aligned}$$

e a função peso torna-se

$$w(\theta) = \tau(b_0; b_1) e^{\mathrm{Re}(b_0 \bar{r}_1 \bar{r}_2)\theta} \left[\sin^2(\theta/2 - \phi/2)\right]^{-[\frac{1}{2}\mathrm{Im}(H_1) - \mathrm{Im}(\bar{b}_0 r_1 r_2)]} \left[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{\frac{1}{2}\mathrm{Im}(H_1)},$$

com

$$\tau(b_0; b_1) = e^{-\mathrm{Re}(\bar{b}_0 r_1 r_2)\theta_0} \left[\sin^2(\theta_0/2 - \phi/2)\right]^{[\frac{1}{2}\mathrm{Im}(H_1) - \mathrm{Im}(\bar{b}_0 r_1 r_2)]} \left[\sin^2(\theta_0/2 - \varphi/2)\right]^{-\frac{1}{2}\mathrm{Im}(H_1)}.$$

Assumindo que $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$, obtemos duas possíveis funções peso

i) Se $\sin(\varphi/2)\sin(\phi/2) \neq 0$, isto é, $r_1 \neq 1$, $r_2 \neq 1$, é necessário que $\mathrm{Re}(\bar{b}_0 r_1 r_2) = 0$ e a função peso torna-se

$$w(\theta) = \tau(b_0; b_1) \left[\sin^2(\theta/2 - \phi/2)\right]^{-[\frac{1}{2}\mathrm{Im}(H_1) - \mathrm{Im}(\bar{b}_0 r_1 r_2)]} \left[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{\frac{1}{2}\mathrm{Im}(H_1)}.$$

Aqui,

$$B(z) = (\bar{b}_0 r_1 r_2 + 2i) z^2 + b_1 z + b_0,$$

onde b_0 satisfaz $\mathrm{Re}(\bar{b}_0 r_1 r_2) = 0$.

ii) Considere $\sin(\varphi/2)\sin(\phi/2) = 0$, isto é, $(r_1 - 1)(r_2 - 1) = 0$. Primeiro, supomos que $r_2 = 1$ e assim $\phi = 0$, então

$$w(\theta) = \tau(b_0, b_1)e^{\mathrm{Re}(\overline{b}_0 r_1)\theta}\left[\sin^2(\theta/2)\right]^{-[\frac{1}{2}\mathrm{Im}(H_1) - \mathrm{Im}(\overline{b}_0 r_1)]}\left[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{\frac{1}{2}\mathrm{Im}(H_1)},$$

com $\mathrm{Im}(H_1)/2 - \mathrm{Im}(\overline{b}_0 r_1) < 1/2$ e $\mathrm{Im}(H_1)/2 > -1/2$.

Agora escolhendo $r_1 = -1$, a função peso torna-se

$$w(\theta) = \tau(b_1, b_0)e^{-\mathrm{Re}(b_0)\theta}\left[\sin^2(\theta/2)\right]^{\frac{1}{2}\mathrm{Im}(b_0) + \frac{1}{4}\mathrm{Im}(b_1)}\left[\cos^2(\theta/2)\right]^{\frac{1}{2}\mathrm{Im}(b_0) - \frac{1}{4}\mathrm{Im}(b_1)},$$

onde $\mathrm{Im}(b_0)/2 + \mathrm{Im}(b_1)/4 > -1/2$ e $\mathrm{Im}(b_0)/2 - \mathrm{Im}(b_1)/4 > -1/2$. Neste caso,

$$B(z) = (-\overline{b}_0 + 2i)z^2 + i\,\mathrm{Im}(b_1)z + b_0.$$

Observação 2.6. Denotando

$$\eta = \mathrm{Re}(b_0) \in \mathbb{R},\ \lambda = \mathrm{Im}(b_0)/2 + \mathrm{Im}(b_1)/4 \text{ e } \beta = \mathrm{Im}(b_0)/2 - \mathrm{Im}(b_1)/4,$$

temos $b_0 = \eta + i(\lambda + \beta)$ e $\mathrm{Im}(b_1) = 2(\lambda - \beta)$, então obtemos uma nova função peso semiclássica na circunferência unitária

$$w(\theta) = \tau(\lambda, \beta, \eta)\, e^{-\eta\theta}\, [\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \tag{2.21}$$

onde $\tau(\lambda, \beta, \eta)$ é uma constante, $\eta \in \mathbb{R}$, $\lambda > -1/2$, $\beta > -1/2$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Essa função peso satisfaz a equação do tipo Pearson (1.16) com

$$A(z) = z^2 - 1 \quad \text{e} \quad B(z) = i[(\lambda + \beta + i\eta + 2)z^2 + 2(\lambda - \beta)z + \lambda + \beta - i\eta].$$

Portanto, a função peso (2.21) pertence a classe $(2, 2)$.

Observe que a função peso semiclássica (2.21) é uma extensão de outras funções peso semiclássicas, veja que

• quando $\eta = 0$ é a função peso (1.22), ou seja,

$$w(\theta) = [\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}\,[\cos^2(\theta/2)]^{\beta},$$

conhecida como a função peso de Jacobi na circunferência unitária, ver [37].

• quando $\eta = 0$ e $\beta = 0$ é a função peso (1.20), ou seja,

$$w(\theta) = \tilde{\tau}(\lambda)[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda},$$

onde $\tilde{\tau}(\lambda)$ é uma constante. Os polinômios ortogonais associados a essa função peso são conhecidos como polinômios circulares de Jacobi, ver [32].

• quando $\beta = 0$ é a função peso (1.25), ou seja,

$$w(\theta) = \tau(b)\, e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda},$$

onde $\tau(b)$ é uma constante. Essa função peso foi estudada em [50].

Porém, acreditamos que quando o caso geral $\eta\lambda\beta \neq 0$ a função peso é nova, ou seja, não foi estudada anteriormente.

Considerando a função peso (2.21) como

$$\tilde{w}(t) = \tau(\beta,\eta)\, e^{-\eta t}[\sin^2(t/2)]^{\beta}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

chamando $\theta = t - \pi$ e a rotação $w(\theta) = \tilde{w}(\theta + \pi)$, obtemos

$$w(\theta) = \tau(\beta,\eta)\, e^{-\eta\theta}\, [\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi] \tag{2.22}$$

que se anula em $\theta = \pm\pi$. Portanto, o produto interno torna-se

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{T}} = \tau(\beta,\eta) \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\, e^{-\theta\,\eta}\, [\cos^2(\theta/2)]^{\beta}\, \mathrm{d}\,\theta.$$

Essa função peso satisfaz a equação do tipo Pearson (1.16) com $A(z) = z^2 - 1$.

2) $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$ **com** $|r_1| \neq 1$ **e** $|r_2| = 1$

Dividimos a análise em dois casos $r_1 \neq 0$ e $r_1 = 0$.

a) Para $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$ com $|r_1| \neq 1$, $r_1 \neq 0$ e $|r_2| = 1$, a solução do sistema linear (2.15) é

$$b_2 = \frac{\bar{b}_0 r_2}{\bar{r}_1} + 2i \quad \text{e} \quad b_1 = -\frac{1}{|r_1|^2}(r_1^2 r_2 \bar{b}_0 + \bar{r}_1 b_0) - (r_1 + r_2)i$$

com b_0 um número complexo arbitrário.

Substituindo essa solução em (1.19), obtemos

$$i\frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\,\mathrm{d}\, z}{w(\theta)} = \frac{\bar{b}_0 r_1 r_2 z - b_0 \bar{r}_1}{|r_1|^2 z(z - r_2)}.$$

De forma análoga ao que foi feito no caso **2a)** da Seção 2.2, considerando $r_2 = e^{i\phi}$ com $\phi \in [0, 2\pi]$, obtemos a função peso

$$w(\theta) = \tau(b_0) e^{\mathrm{Re}\left(\frac{\bar{b}_0 r_2}{\bar{r}_1}\right)\theta} \left[\sin^2(\theta/2 - \phi/2)\right]^{\mathrm{Im}\left(\frac{\bar{b}_0 r_2}{\bar{r}_1}\right)},$$

com

$$\tau(b_0) = w(\theta_0) e^{-\mathrm{Re}\left(\frac{\bar{b}_0 r_2}{\bar{r}_1}\right)\theta_0} \left[\sin^2(\theta_0/2 - \phi/2)\right]^{-\mathrm{Im}\left(\frac{\bar{b}_0 r_2}{\bar{r}_1}\right)}.$$

Impondo que $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$, obtemos duas possíveis funções peso.

i) Se $\sin(\phi/2) \neq 0$ (isto é $r_2 \neq 1$), é necessário que $\mathrm{Re}(\bar{b}_0 r_1 r_2) = 0$ e a função peso torna-se

$$w(\theta) = \tau(b_0) \left[\sin^2(\theta/2 - \phi/2)\right]^{\mathrm{Im}\left(\frac{\bar{b}_0 r_2}{\bar{r}_1}\right)}.$$

Neste caso,

$$B(z) = \left(\frac{\bar{b}_0 r_2}{\bar{r}_1} + 2i\right) z^2 - \left(\frac{\bar{b}_0 r_1 r_2}{\bar{r}_1} + \frac{b_0}{r_1} + (r_1 + r_2)i\right) z + b_0.$$

Observe que a condição $\mathrm{Re}(\bar{b}_0 r_1 r_2) = 0$ é equivalente a $b_0 \in \mathbb{R}$ se $\mathrm{Re}(r_1 r_2) = 0$ ou $b_0 = i\,\mathrm{Im}(b_0) r_1 r_2 / \mathrm{Re}(r_1 r_2)$ se $\mathrm{Re}(r_1 r_2) \neq 0$.

ii) Se $\sin(\phi/2) = 0$ (isto é $r_2 = 1$), então

$$w(\theta) = \tau(b_0)e^{\mathrm{Re}\left(\frac{b_0}{r_1}\right)\theta}\left[\sin^2(\theta/2)\right]^{-\mathrm{Im}\left(\frac{b_0}{r_1}\right)}, \tag{2.23}$$

com $\mathrm{Im}(b_0/r_1) < 1/2$.

Observação 2.7. Como nas Observações 2.4 e 2.5, vemos que a função peso (2.23) é a função peso (1.25), ou seja,

$$w(\theta) = \tau(b)\, e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}.$$

Basta considerar $r = r_1 \in \mathbb{C}$, $b_0 = -ir\bar{b}$, $b = \lambda + i\eta$, $\lambda = -\mathrm{Im}(b_0/r)$ e $\eta = -\mathrm{Re}(b_0/r)$. Essa função peso satisfaz a equação do tipo Pearson (1.16) com os polinômios

$$A(z) = (z-1)(z-r) \quad \text{e} \quad B(z) = i\{(b+2)z^2 + [\bar{b} - 1 - r(b+1)]z - r\bar{b}\}.$$

b) Se $r_1 = 0$ e $|r_2| = 1$, chamando $r = r_2$, podemos escrever $A(z) = z(z-r)$ com $|r| = 1$, e a solução do sistema linear (2.15) é $b_2 = -\bar{b}_1 r + 3i$ e $b_0 = 0$ com b_1 um número complexo arbitrário.

Usando essa solução, a representação (1.19) torna-se

$$i\frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\,\mathrm{d}\, z}{w(\theta)} = \frac{-r(\bar{b}_1 - i\,\bar{r})z + (b_1 + ir)}{z(z-r)}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Analogamente ao que foi feito no caso **2a)** da Seção 2.2, considerando $r = e^{i\varphi}$ com $\varphi \in [0, 2\pi]$, segue que

$$w(\theta) = \tau(b_1)e^{-\mathrm{Re}(\bar{b}_1 r - i)\theta}\left[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{-\mathrm{Im}(\bar{b}_1 r - i)},$$

com $\mathrm{Im}(\bar{b}_1 r - i) < 1/2$ e

$$\tau(b_1) = w(\theta_0)e^{\mathrm{Re}(\bar{b}_1 r - i)\theta_0}\left[\sin^2(\theta_0/2 - \varphi/2)\right]^{\mathrm{Im}(\bar{b}_1 r - i)}.$$

Assumindo que $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$, obtemos duas possíveis funções peso

i) Se $\sin(\varphi/2) \neq 0$, é necessário que $\mathrm{Re}(\bar{b}_1 r) = 0$ e obtemos

$$w(\theta) = \tau(b_1)\left[\sin^2(\theta/2 - \varphi/2)\right]^{-\mathrm{Im}(\bar{b}_1 r - i)}, \tag{2.24}$$

com $\mathrm{Im}(\bar{b}_1 r - i) < 1/2$. Aqui

$$A(z) = z(z-r) \quad \text{e} \quad B(z) = (3i - \bar{b}_1 r)z^2 + b_1 z.$$

Assim, $\mathrm{Re}(\bar{b}_1 r) = 0$ é equivalente a $b_1 \in \mathbb{R}$ se $\mathrm{Re}(r) = 0$ ou $b_1 = i\,\mathrm{Im}(b_1)r/\mathrm{Re}(r)$ se $\mathrm{Re}(r) \neq 0$. Observe que a função peso (2.24) também é uma modificação de (1.20).

ii) Se $\sin(\varphi/2) = 0$, então

$$w(\theta) = \tau(b_1)e^{-\mathrm{Re}(\bar{b}_1 - i)\,\theta}\left[\sin^2(\theta/2)\right]^{-\mathrm{Im}(\bar{b}_1 - i)},$$

com $\mathrm{Im}(\bar{b}_1 - i) < 1/2$.

Observação 2.8. Mais uma vez obtemos a função peso (1.25), isto é,

$$w(\theta) = \tau(b)\, e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda},$$

considerando $b_1 = i(\lambda - i\eta) - i$, $\lambda = -\mathrm{Im}(\bar{b}_1 - i)$ e $\eta = \mathrm{Re}(\bar{b}_1 - i)$. Essa função peso satisfaz a equação do tipo Pearson (1.16) com

$$A(z) = z(z-1) \quad \text{e} \quad B(z) = i[(b+2)z^2 + (\bar{b} - 1)z],$$

com $b = \lambda + i\eta$.

3) $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$ **com** $|r_1| \neq 1$ **e** $|r_1 r_2| = 1$

Como estamos considerando $|r_1| \neq 1$, $|r_2| \neq 1$ e $|r_2| = 1/|r_1|$, encontramos as soluções do sistema linear (2.15) para duas possibilidades, ou seja, $r_2 = 1/\overline{r}_1$ e $r_2 \neq 1/\overline{r}_1$.

a) Primeiro, consideramos $|r_1| \neq 1$ e $r_2 = 1/\overline{r}_1$. Denotando $r_1 = r$ e $r_2 = 1/\overline{r}$, obtemos $A(z) = (z - r)(z - 1/\overline{r})$. Neste caso, a solução de (2.15) é dada por

$$b_2 = \frac{\overline{b}_0 r}{\overline{r}} + 2i \quad \text{e} \quad b_1 = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}(b_1) r - (|r^2|+1)i}{\mathrm{Re}(r)}, & \text{se } \mathrm{Re}(r) \neq 0, \\ \frac{|r^2|+1}{\mathrm{Im}(r)} + \mathrm{Im}(b_1) i, & \text{se } \mathrm{Re}(r) = 0, \end{cases}$$

onde b_0 é um número complexo arbitrário e $\mathrm{Re}(b_1)$ ou $\mathrm{Im}(b_1)$ são números reais arbitrários dependendo se $\mathrm{Re}(r) = 0$ ou $\mathrm{Re}(r) \neq 0$.

A representação (1.19) torna-se

$$i \frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\, \mathrm{d}\, z}{w(\theta)} = \frac{\overline{b}_0 r z^2 + [b_1 \overline{r} + i(|r|^2 + 1)]z + b_0 \overline{r}}{\overline{r} z (z - r)(z - 1/\overline{r})}, \quad z = e^{i\theta}, \tag{2.25}$$

com

$$b_1 \overline{r} + i(|r|^2 + 1) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}(b_1)|r|^2 - \mathrm{Im}(r)(|r^2|+1)}{\mathrm{Re}(r)}, & \text{se } \mathrm{Re}(r) \neq 0, \\ \mathrm{Im}(r)\,\mathrm{Im}(b_1), & \text{se } \mathrm{Re}(r) = 0. \end{cases} \tag{2.26}$$

Observe que $b_1 \overline{r} + i(|r|^2 + 1)$ é real. Integrando (2.25) com relação a $z = e^{i\theta}$ e considerando $z_0 = e^{i\theta_0}, \theta_0 \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} i \int_{z_0}^{z} \frac{\mathrm{d}\, w(\theta)}{w(\theta)} \frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, u} &= \int_{z_0}^{z} \frac{\overline{b}_0 r u^2 + [b_1 \overline{r} + i(|r|^2 + 1)]u + b_0 \overline{r}}{\overline{r} u (u - r)(u - 1/\overline{r})} \,\mathrm{d}\, u \\ &= \frac{\overline{b}_0 r}{\overline{r}} \int_{z_0}^{z} \frac{u}{(u - r)(u - 1/\overline{r})} \,\mathrm{d}\, u + \frac{[b_1 \overline{r} + i(|r|^2 + 1)]}{\overline{r}} \int_{z_0}^{z} \frac{1}{(u - r)(u - 1/\overline{r})} \,\mathrm{d}\, u \\ &\quad + b_0 \int_{z_0}^{z} \frac{1}{u (u - r)(u - 1/\overline{r})} \,\mathrm{d}\, u \\ &= \frac{\overline{b}_0 r}{\overline{r}} \left[|r|^2 \ln\left(\frac{z - r}{z_0 - r} \right) - \ln\left(\frac{z - 1/\overline{r}}{z_0 - 1/\overline{r}} \right) \right] \\ &\quad - \frac{[b_1 \overline{r} + i(|r|^2 + 1)]}{|r|^2 - 1} \left[\ln\left(\frac{z - 1/\overline{r}}{z_0 - 1/\overline{r}} \right) - \ln\left(\frac{z - r}{z_0 - r} \right) \right] \\ &\quad + \frac{b_0}{|r|^2 - 1} \left[\frac{\overline{r}^2}{|r|^2} \ln\left(\frac{z - r}{z_0 - r} \right) - \overline{r}^2 \ln\left(\frac{z - 1/\overline{r}}{z_0 - 1/\overline{r}} \right) \right] + i b_0 \frac{\overline{r}}{r} (\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

obtemos então

$$i \ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)} \right) = i \frac{b_0 \overline{r}}{r} (\theta - \theta_0) + H \ln\left(\frac{z - r}{z_0 - r} \right) - \overline{H} \ln\left(\frac{z - 1/\overline{r}}{z_0 - 1/\overline{r}} \right)$$

com

$$H = \frac{\overline{b}_0 r^2 + b_1\overline{r} + i(|r|^2+1)}{|r|^2-1} + \frac{b_0\overline{r}^2}{|r^2|(|r|^2-1)}.$$

Como

$$\frac{z-r}{z_0-r} = \frac{z}{z_0}\left(\frac{1-r\overline{z}}{1-r\overline{z}_0}\right) \quad \text{e} \quad \frac{z-1/\overline{r}}{z_0-1/\overline{r}} = \frac{z}{z_0}\left(\frac{\overline{r}-\overline{z}}{\overline{r}-\overline{z}_0}\right),$$

segue que

$$\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = \left(\frac{b_0\overline{r}}{r} - \overline{H}\right)(\theta-\theta_0) + i(\overline{H}-H)\ln\left|\frac{z-r}{z_0-r}\right| + (H+\overline{H})\arg\left(\frac{z-r}{z_0-r}\right).$$

Realizando algumas manipulações, obtemos

$$G = \frac{b_0\overline{r}}{r} - \overline{H} = -\frac{2\operatorname{Re}(b_0\overline{r}/r) + b_1\overline{r} + i(|r|^2+1)}{|r|^2-1} \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$\operatorname{Im}(H) = \operatorname{Im}\left(\frac{\overline{b}_0 r}{\overline{r}}\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{Re}(H) = \frac{(|r|^2+1)\operatorname{Re}(\overline{b}_0 r/\overline{r}) + b_1\overline{r} + i(|r|^2+1)}{|r|^2-1}.$$

Além disso, a função peso pode ser escrita como

$$w(\theta) = \tau(G;H)\, e^{[G+2\operatorname{Re}(H)]\theta}\, e^{2\operatorname{Re}(H)\arg(1-\overline{z}r)}\,|z-r|^{2\operatorname{Im}(H)},$$

onde

$$\tau(G,H) = w(\theta_0)e^{-[G+2\operatorname{Re}(H)]\theta_0}e^{-2\operatorname{Re}(H)\arg(1-\overline{z}_0 r)}\,|z_0-r|^{-2\operatorname{Im}(H)}.$$

Para verificar a condição $A(1)[w(2\pi)-w(0)]=0$, é necessário que $G+2\operatorname{Re}(H)=0$, que é equivalente a $b_1\overline{r}+i(|r|^2+1) = -2\operatorname{Re}(\overline{b}_0 r^2)$. De (2.26) obtemos

$$b_1 = -\frac{2\operatorname{Re}(b_0\overline{r}^2) + i(|r|^2+1)}{\overline{r}} \quad \text{e} \quad H = -\frac{b_0\overline{r}}{r}.$$

Finalmente a função peso é dada por

$$w(\theta) = \tau(b_0,r)e^{-2\operatorname{Re}(b_0\overline{r}/r)\arg(1-\overline{z}r)}|z-r|^{-2\operatorname{Im}(b_0\overline{r}/r)}, \tag{2.27}$$

com $\tau(b_0,r)$ uma constante. Além disso, essa função peso satisfaz a equação do tipo Pearson (1.16) com

$$A(z) = (z-r)\left(z-\frac{1}{\overline{r}}\right) \quad \text{e} \quad B(z) = \left(2i+\frac{\overline{b}_0 r}{\overline{r}}\right)z^2 - \left[\frac{2\operatorname{Re}(b_0\overline{r}^2) + (|r|^2+1)i}{\overline{r}}\right]z + b_0.$$

Observação 2.9. Escolhendo

$$b_0 = -\frac{\overline{u}}{\overline{r}}$$

em (2.27), recuperamos a função peso semiclássica conhecida (1.24), ou seja,

$$w(\theta) = \tau(u,r)\, e^{2\operatorname{Re}(u/\overline{r})\arg(1-re^{-i\theta})}|e^{i\theta}-r|^{-2\operatorname{Im}(u/\overline{r})},$$

com os polinômios

$$A(z) = (z-r)\left(z-\frac{1}{\overline{r}}\right) \quad \text{e} \quad B(z) = \left(2i-\frac{u}{\overline{r}}\right)z^2 + \left[\frac{2\operatorname{Re}(ur) - (|r|^2+1)i}{\overline{r}}\right]z - \frac{\overline{u}}{\overline{r}}.$$

A equação do tipo Pearson para a função peso (2.27) com o parâmetro

$$b_0 = \frac{2r}{\overline{r}}i,$$

tem aparecido em [11] em termos de funcional de momento e

$$B(z) = i\left[\frac{-(|r|^2+1)z + 2r}{\overline{r}}\right].$$

Além disso, a função peso (2.27) pertence a classe $(2,2)$.

b) Considerando $|r_1| \neq 1$ e $r_2 \neq 1/\overline{r}_1$. Sejam $\mathfrak{u}$ e $\mathfrak{v}$ dados como

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u} &= (1+|r_1^2|)\operatorname{Im}(1/\overline{r}_1) - (1-|r_1|^2)\operatorname{Re}(1/\overline{r}_1)b_0,\\
\mathfrak{v} &= (\overline{r}_1+\overline{r}_2)(r_1r_2+1) - (|r_1|^2+1)\operatorname{Re}(r_2+1/\overline{r}_1) - (1-|r_1|^2)\operatorname{Im}[\overline{b}_0(r_2-1/\overline{r}_1)].
\end{aligned}$$

Note que, se $r_2 = -1/r_1$ e $\operatorname{Re}(r_1) = 0$, então $r_2 = 1/\overline{r}_1$, essa possibilidade foi considerada antes. Além disso, outras soluções do sistema linear (2.15) são dados por

$$b_2 = \overline{b}_0 r_1 r_2 + 2i,$$

$$b_1 = \begin{cases} \dfrac{(r_1+r_2)\mathfrak{v}}{\operatorname{Im}[(r_1+r_2)(\overline{r}_1\overline{r}_2+1)]}, & \text{se } r_2 \neq -1/r_1,\\[2ex] \dfrac{(\overline{r}_1 - |r_1|^2 r_1)\mathfrak{u} + |r_1^2-1|^2 i}{\operatorname{Re}(r_1)(1-|r_1|^2)}, & \text{se } \operatorname{Re}(r_1)\neq 0 \text{ e } r_2 = -1/r_1, \end{cases}$$

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Re}(b_0)(r_2-1/\overline{r}_1)^2}{\operatorname{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2]}, & \text{se } \operatorname{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2]\neq 0,\\[2ex] i\operatorname{Im}(b_0), & \text{se } \operatorname{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2] = 0. \end{cases}$$

Substituindo esses valores em (1.19), obtemos

$$i\frac{\mathrm{d}\,w(\theta)/\,\mathrm{d}\,z}{w(\theta)} = \frac{\overline{b}_0 r_1 r_2 z^2 + [b_1 + (r_1+r_2)i]z + b_0}{z(z-r_1)(z-r_2)}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Note que

$$\overline{b}_0 r_1 r_2 = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{Re}(b_0)|r_2-1/\overline{r}_1|^2}{\operatorname{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2]}, & \text{se } \operatorname{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2]\neq 0,\\[2ex] -(ir_1r_2)\operatorname{Im}(b_0), & \text{se } \operatorname{Re}[(r_2-1/\overline{r}_1)^2] = 0. \end{cases}$$

Além disso, $\overline{b}_0 r_1 r_2 \in \mathbb{R}$. Então, podemos escrever

$$b_1 + (r_1+r_2)i = \begin{cases} \dfrac{(r_1+r_2)\{\mathfrak{v} - \operatorname{Im}[(\overline{r}_1+\overline{r}_2)(r_1r_2+1)]i\}}{\operatorname{Im}[(r_1+r_2)(\overline{r}_1\overline{r}_2+1)]}, & \text{se } r_2\neq -1/r_1,\\[2ex] \dfrac{(r_1^2-1)b_0}{r_1}, & \text{se } r_2 = -1/r_1 \text{ e } \operatorname{Re}(r_1)\neq 0. \end{cases}$$

Integrando mais uma vez, com $z_0 = e^{i\theta_0}$, obtemos

$$\ln\left(\frac{w(\theta)}{w(\theta_0)}\right) = b_0\overline{r}_1\overline{r}_2(\theta-\theta_0) + iH\left[\ln\left(\frac{z-r_2}{z_0-r_2}\right) - \ln\left(\frac{z-r_1}{z_0-r_1}\right)\right],$$

onde $H = [\bar{b}_0 r_1 r_2(r_1 + r_2) + b_1 + (r_1 + r_2)i]/(r_1 - r_2) = 0$. Portanto, a função peso é

$$w(\theta) = w(\theta_0)e^{b_0 \overline{r}_1 \overline{r}_2(\theta - \theta_0)}.$$

Da condição $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$, segue que $b_0 = 0$. Portanto, obtemos a função peso de Lebesgue.

4) $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$ **com** $|r_1| \neq 1$**,** $|r_2| \neq 1$ **e** $|r_1 r_2| \neq 1$

Neste caso, a solução do sistema linear (2.15) é

$$b_2 = \mathrm{Re}(b_2) + 2i, \quad b_1 = -(r_1 + r_2)[\mathrm{Re}(b_2) + i] \quad \text{e} \quad b_0 = r_1 r_2 \,\mathrm{Re}(b_2),$$

com $\mathrm{Re}(b_2)$ um número real arbitrário.

Essa solução inclui também os casos $r_1 = r_2 = 0$ ou $r_1 = 0$ e $r_2 \neq 0$ com $|r_2| \neq 1$, isto é, quando $A(z) = z^2$ ou $A(z) = z(z - r)$, com $|r| \neq 1$. A representação (1.19) torna-se

$$i\frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\,\mathrm{d}\, z}{w(\theta)} = \frac{\mathrm{Re}(b_2)}{z}.$$

Novamente, assumindo a condição $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$, obtemos a função peso de Lebesgue.

2.4 Funções peso semiclássicas encontradas

Nesta seção fazemos um resumo de todas as funções peso determinadas neste capítulo, com os respectivos polinômios A da equação do tipo Pearson, ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}\, w(\theta)/\,\mathrm{d}\,\theta}{w(\theta)} = \frac{B(e^{i\theta}) - ie^{i\theta}\frac{\mathrm{d}\, A(e^{i\theta})}{\mathrm{d}\; e^{i\theta}}}{A(e^{i\theta})}, \quad z = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Por simplicidade omitimos as constantes, τ, que aparecem nas funções peso, estas constantes foram escolhidas de forma que $\mu_0 = 1$.

1. Função peso de Lebesgue, ou seja,

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

com

- $A(z) = 1$,
- $A(z) = z - r$, $|r| \neq 1$,
- $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$, $|r_1| \neq 1$, $|r_1 r_2| = 1$ e $r_2 \neq 1/\overline{r_1}$,
- $A(z) = (z - r_1)(z - r_2)$, $|r_1| \neq 1$, $|r_2| \neq 1$ e $|r_1 r_2| \neq 1$.

2. Com $A(z) = z$, temos a função peso (1.23), ou seja,

$$w(\theta) = e^{2|u|\sin(\theta + \arg(u))}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad u \in \mathbb{C},$$

e seu caso especial, a função peso de Bessel modificada (1.21), ou seja,

$$w(\theta) = e^{t\cos(\theta)}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad t > 0.$$

3. A função peso (1.24), ou seja,

$$w(\theta) = e^{2\,\mathrm{Re}(u/\overline{r})\arg(1-re^{-i\theta})}|e^{i\theta} - r|^{-2\,\mathrm{Im}(u/\overline{r})}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

com $A(z) = (z-r)(z-1/\overline{r})$, $|r| \neq 1$.

4. Com $A(z) = z^2 - 1$, encontramos a nova função peso (2.21), dada por

$$w(\theta) = e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

e seus casos especiais:

• a função peso de Jacobi na circunferência unitária (1.22), ou seja,

$$w(\theta) = [\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

• a função peso associada aos polinômios circulares de Jacobi (1.20), ou seja,

$$w(\theta) = [\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

• a função peso (2.22), ou seja,

$$w(\theta) = e^{-\eta\theta}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

esta função peso também satisfaz a equação do tipo Pearson com

- $A(z) = z + 1$,
- $A(z) = (z+1)(z-r)$.

• a função peso (1.25), ou seja,

$$w(\theta) = e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

esta função peso também satisfaz a equação do tipo Pearson com

- $A(z) = z - 1$,
- $A(z) = (z-1)(z-r)$.

3 Relações de estrutura e equações de diferenças

Neste capítulo apresentamos as relações de recorrência diferenciais para os polinômios ortogonais na circunferência unitária, também conhecidas como relações de estrutura, e sua principal aplicação, as equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblusnky. As principais referências utilizadas para o desenvolvimento deste capítulo foram Ismail [32], Magnus [37], Sri Ranga [50] e Van Assche [53]. Ressaltamos que os resultados aqui contidos foram publicados no formato de artigo em [6].

3.1 Relações de estrutura para os polinômios ortogonais na circunferência unitária

Magnus em [37] mostrou que se A e B, na equação do tipo Pearson (1.17), são polinômios de grau $\leqslant d$, então $A\Phi_n'$ é uma combinação linear de $\Phi_{n+d-1}, \Phi_{n+d-2}, \ldots, \Phi_{n-1}$ e $\Phi^*_{n+d-1}, z\Phi^*_{n+d-2}, \ldots, z^{d-2}\Phi^*_{n+1}$.

O seguinte resultado apresenta as relações de estrutura dos polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária em termos dos polinômios Φ_{n+1}, Φ_n, Φ_{n-1}, e Φ^*_n (em vez de Φ^*_{n+1}) quando a função peso associada satisfaz (1.17) com A e B polinômios de grau menor do que ou igual a 2 e $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$. Além disso, todos os coeficientes da relação de estrutura são dados explicitamente.

Teorema 3.1. Seja $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ a sequência de polinômios ortogonais na circunferência unitária relativamente a w satisfazendo (1.17) com A e B polinômios de grau inferior ou igual a 2. Se $A(1)[w(2\pi) - w(0)] = 0$, onde $A(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ e $B(z) = b_2z^2 + b_1z + b_0$, então os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária satisfazem a relação de estrutura dada por

$$A(z)\Phi_n'(z) = na_2\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathfrak{t}_n\Phi^*_n(z), \ n \geqslant 2, \tag{3.1}$$

onde os coeficientes são dados por

$$\mathfrak{t}_n = (ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n, \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{s}_{n,n-1} = (ib_0 + na_0)(1 - |\alpha_{n-1}|^2), \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{s}_{n,n} = na_1 - a_2\gamma_n + [ib_2 - (n-1)a_2]\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}, \tag{3.4}$$

sendo α_n os coeficientes de Verblunsky e γ_n dado como em (1.7). Além disso, tem-se uma representação alternativa para $\mathfrak{s}_{n,n}$ dada por

$$\mathfrak{s}_{n,n} = ib_1 + (n+1)a_1 - a_0\overline{\gamma}_n - [ib_0 + (n+1)a_0]\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1}. \tag{3.5}$$

Demonstração: Observe que $A(z)\Phi_n'(z) - na_2\Phi_{n+1}(z) - \mathfrak{t}_n\Phi_n^*(z)$ é um polinômio de grau menor do que ou igual a n. Portanto, podemos escrever

$$A(z)\Phi_n'(z) - na_2\Phi_{n+1}(z) - \mathfrak{t}_n\Phi_n^*(z) = \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{s}_{n,j}\Phi_j(z). \tag{3.6}$$

Então, calculando o produto interno entre a equação (3.6) e z^0, temos

$$\langle A\Phi_n', z^0\rangle_{\mathbb{T}} - na_2\langle \Phi_{n+1}, z^0\rangle_{\mathbb{T}} - \mathfrak{t}_n\langle \Phi_n^*, z^0\rangle_{\mathbb{T}} = \sum_{j=0}^{n} \mathfrak{s}_{n,j}\langle \Phi_j, z^0\rangle_{\mathbb{T}},$$

usando as propriedades de ortogonalidade e (1.10), obtemos

$$\langle A\Phi_n', z^0\rangle_{\mathbb{T}} - \mathfrak{t}_n\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}} = \mathfrak{s}_{n,0}\langle \Phi_0, z^0\rangle_{\mathbb{T}}.$$

Tomando

$$\mathfrak{t}_n = \frac{\langle A\Phi_n', z^0\rangle_{\mathbb{T}}}{\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}}},$$

obtemos $\mathfrak{s}_{n,0} = 0$. De (2.3) com $k = 0$, temos

$$\begin{aligned}\langle A\Phi_n', z^0\rangle_{\mathbb{T}} &= \langle \Phi_n[iB(z) + A(z)], z\rangle_{\mathbb{T}} - i\Phi_n(1)A(1)[w(2\pi) - w(0)]\\ &= \langle \Phi_n[(ib_2 + a_2)z^2 + (ib_1 + a_1)z + (ib_0 + a_0)], z\rangle_{\mathbb{T}}\\ &= (ib_2 + a_2)\langle z\Phi_n, z^0\rangle_{\mathbb{T}}.\end{aligned}$$

De (1.4) segue que

$$\langle z\Phi_n, z^0\rangle_{\mathbb{T}} = \overline{\alpha}_n\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}}$$

e, assim, temos (3.2), ou seja,

$$\mathfrak{t}_n = (ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n.$$

Fazendo $k = 1, 2, \ldots, n-2$ sucessivamente no cálculo do produto interno entre a equação (3.6) e z^k, obtemos

$$\langle A\Phi_n', z^k\rangle_{\mathbb{T}} - na_2\langle \Phi_{n+1}, z^k\rangle_{\mathbb{T}} - \mathfrak{t}_n\langle \Phi_n^*, z^k\rangle_{\mathbb{T}} = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{s}_{n,j}\langle \Phi_j, z^k\rangle_{\mathbb{T}}.$$

Assim, das propriedades de ortogonalidade e de (2.4), temos $\mathfrak{s}_{n,k} = 0$, para $k = 1, 2, \ldots, n-2$. Portanto,

$$A(z)\Phi_n'(z) - na_2\Phi_{n+1}(z) - \mathfrak{t}_n\Phi_n^*(z) = \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z),$$

e chegamos em (3.1).

Para encontrar o valor explícito de $\mathfrak{s}_{n,n-1}$, basta calcular o produto interno em ambos os lados da equação (3.1) com z^{n-1}, e obtemos

$$\langle A\Phi_n', z^{n-1}\rangle_{\mathbb{T}} = \mathfrak{s}_{n,n-1}\langle \Phi_{n-1}, z^{n-1}\rangle_{\mathbb{T}}.$$

De (2.3) com $k = n-1$, sabemos que

$$\begin{aligned}\langle A\Phi_n', z^{n-1}\rangle_{\mathbb{T}} &= \langle \Phi_n[(ib_2 + na_2)z^2 + (ib_1 + na_1)z + (ib_0 + na_0)], z^n\rangle_{\mathbb{T}},\\ &= (ib_0 + na_0)\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}}.\end{aligned}$$

Portanto, provamos (3.3), isto é,

$$\mathfrak{s}_{n,n-1} = (ib_0 + na_0)\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2} = (ib_0 + na_0)[1 - |\alpha_{n-1}|^2].$$

Para o valor explícito de $\mathfrak{s}_{n,n}$, primeiro, fazemos o produto interno em ambos os lados da equação (3.1) com Φ_n, e encontramos

$$\langle A\Phi_n', \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}} = \mathfrak{s}_{n,n}\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}} + \mathfrak{t}_n\langle \Phi_n^*, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}}. \tag{3.7}$$

Por outro lado, das propriedades de ortogonalidade, sabemos que

$$\begin{aligned}\langle A\Phi_n', \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}} &= \langle (a_2z^2 + a_1z + a_0)(nz^{n-1} + \cdots + \beta_n), z^n + \gamma_n z^{n-1} + \cdots + \beta_n z - \overline{\alpha}_{n-1}\rangle_{\mathbb{T}} \\ &= na_2\langle z^{n+1}, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}} + [\gamma_n(n-1)a_2 + na_1]\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}},\end{aligned}$$

e de (1.9), temos

$$\langle A\Phi_n', \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}} = -\gamma_{n+1}na_2\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}} + [\gamma_n(n-1)a_2 + na_1]\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}}.$$

Substituindo essas relações em (3.7), obtemos

$$\mathfrak{s}_{n,n} = -\gamma_{n+1}na_2 + \gamma_n(n-1)a_2 + na_1 + \mathfrak{t}_n\alpha_{n-1},$$

usando (1.7) e (3.2), a equação (3.4) é válida, isto é,

$$\mathfrak{s}_{n,n} = na_1 - a_2\gamma_n + [ib_2 - (n-1)a_2]\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}.$$

Finalmente, calculando o produto interno entre (3.1) com relação a z^n, obtemos

$$\langle A\Phi_n', z^n\rangle_{\mathbb{T}} = \mathfrak{s}_{n,n-1}\langle \Phi_{n-1}, z^n\rangle_{\mathbb{T}} + \mathfrak{s}_{n,n}\langle \Phi_n, z^n\rangle_{\mathbb{T}}.$$

Além disso, como $\langle \Phi_n, z^n\rangle_{\mathbb{T}} = \langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}}$ e de (1.9), segue que

$$\langle A\Phi_n', z^n\rangle_{\mathbb{T}} = -\mathfrak{s}_{n,n-1}\overline{\gamma}_n\langle \Phi_{n-1}, \Phi_{n-1}\rangle_{\mathbb{T}} + \mathfrak{s}_{n,n}\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}}. \tag{3.8}$$

De (2.3) com $k = n$, temos

$$\begin{aligned}\langle A\Phi_n', z^n\rangle_{\mathbb{T}} &= \langle \Phi_n[(ib_2 + (n+1)a_2)z^2 + (ib_1 + (n+1)a_1)z + (ib_0 + (n+1)a_0)], z^{n+1}\rangle_{\mathbb{T}} \\ &= (ib_1 + (n+1)a_1)\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}} + (ib_0 + (n+1)a_0)\langle \Phi_n, z^{n+1}\rangle_{\mathbb{T}}\end{aligned}$$

e, usando (1.9),

$$\langle A\Phi_n', z^n\rangle_{\mathbb{T}} = (ib_1 + (n+1)a_1)\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}} - (ib_0 + (n+1)a_0)\overline{\gamma}_{n+1}\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}}.$$

Substituindo a última relação em (3.8), obtemos

$$\mathfrak{s}_{n,n} = \mathfrak{s}_{n,n-1}\overline{\gamma}_n\frac{\langle \Phi_{n-1}, \Phi_{n-1}\rangle_{\mathbb{T}}}{\langle \Phi_n, \Phi_n\rangle_{\mathbb{T}}} + (ib_1 + (n+1)a_1) - (ib_0 + (n+1)a_0)\overline{\gamma}_{n+1}.$$

Portanto, com $\mathfrak{s}_{n,n-1}$ dado em (3.3), o fato $\kappa_{n-1}^2/\kappa_n^2 = 1 - |\alpha_{n-1}|^2$ e a relação (1.7) para γ_{n+1}, encontramos

$$\mathfrak{s}_{n,n} = ib_1 + (n+1)a_1 - a_0\overline{\gamma}_n - [ib_0 + (n+1)a_0]\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1},$$

ou seja, (3.5) vale. ■

Podemos obter outras relações de estrutura para os polinômios Φ_n. Como os polinômios recíprocos satisfazem $\Phi^*_{n+1}(z) = \Phi^*_n(z) - \alpha_n z\Phi_n(z)$, então

$$\Phi^*_{n+1}(z) + \alpha_n \Phi_{n+1}(z) = (1 - |\alpha_n|^2)\Phi^*_n(z), \quad n \geqslant 0,$$

e obtemos uma relação de estrutura para a sequência associada de polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária, envolvendo os polinômios Φ_{n+1}, Φ_n, Φ_{n-1} e Φ^*_{n+1}. No corolário seguinte, recuperamos o resultado do Magnus [37] para $d = 2$ e fornecemos fórmulas explícitas para os coeficientes.

Corolário 3.2. Sob as hipóteses do Teorema 3.1, a sequência associada de polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária satisfazem

$$\begin{aligned} A(z)\Phi'_n(z) &= \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \frac{na_2 + [ib_2 - (n-1)a_2]|\alpha_n|^2}{1 - |\alpha_n|^2}\Phi_{n+1}(z) \\ &\quad + \frac{(ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n}{1 - |\alpha_n|^2}\Phi^*_{n+1}(z), \quad n \geqslant 2, \end{aligned}$$

com os coeficientes $\mathfrak{s}_{n,n}$ e $\mathfrak{s}_{n,n-1}$ dados no Teorema 3.1.

Demonstração: Considere a relação de estrutura (3.1),

$$A(z)\Phi'_n(z) = na_2\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathfrak{t}_n\Phi^*_n(z).$$

Substituindo $\mathfrak{t}_n$ dado por (3.2), obtemos

$$A(z)\Phi'_n(z) = na_2\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + (ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n\Phi^*_n(z).$$

Como sabemos que

$$\Phi^*_n(z) = \frac{\Phi^*_{n+1}(z) + \alpha_n\Phi_{n+1}(z)}{1 - |\alpha_n|^2},$$

então

$$A(z)\Phi'_n(z) = na_2\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + (ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n\left[\frac{\Phi^*_{n+1}(z) + \alpha_n\Phi_{n+1}(z)}{1 - |\alpha_n|^2}\right].$$

Isolando alguns termos, encontramos a equação desejada

$$\begin{aligned} A(z)\Phi'_n(z) &= \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \frac{na_2 + [ib_2 - (n-1)a_2]|\alpha_n|^2}{1 - |\alpha_n|^2}\Phi_{n+1}(z) \\ &\quad + \frac{(ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n}{1 - |\alpha_n|^2}\Phi^*_{n+1}(z). \end{aligned}$$

■

No próximo resultado, fornecemos a relação de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária, envolvendo o polinômio recíproco $\Phi^*_{n-1}(z)$.

Corolário 3.3. Sob as hipóteses do Teorema 3.1, a sequência de polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária satisfazem

$$\begin{aligned} A(z)\Phi'_n(z) &= na_2\Phi_{n+1}(z) + [na_1 - a_2\gamma_n - na_2\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}]\Phi_n(z) \\ &\quad + (ib_0 + na_0)(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\Phi_{n-1}(z) + (ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\Phi^*_{n-1}(z), \end{aligned}$$

com $n \geqslant 2$.

Demonstração: Substituindo $s_{n,n}$, $\mathfrak{s}_{n,n-1}$ e $\mathfrak{t}_n$ dados no Teorema 3.1 na relação de estrutura (3.1), temos

$$\begin{aligned} A(z)\Phi_n'(z) &= na_2\Phi_{n+1}(z) + [na_1 - a_2\gamma_n + [ib_2 - (n-1)a_2]\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}]\Phi_n(z) \\ &\quad + (ib_0 + na_0)(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\Phi_{n-1}(z) + (ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z) \\ &= na_2\Phi_{n+1}(z) + (na_1 - a_2\gamma_n - na_2\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1})\Phi_n(z) \\ &\quad + (ib_0 + na_0)(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\Phi_{n-1}(z) + (ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n[\Phi_n^*(z) + \alpha_{n-1}\Phi_n(z)]. \end{aligned}$$

Como da recorrência de Szegő (1.4), temos

$$\Phi_n^*(z) + \alpha_{n-1}\Phi_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2)\Phi_{n-1}^*(z),$$

então

$$\begin{aligned} A(z)\Phi_n'(z) &= na_2\Phi_{n+1}(z) + [na_1 - a_2\gamma_n - na_2\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}]\Phi_n(z) \\ &\quad + (ib_0 + na_0)(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\Phi_{n-1}(z) + (ib_2 + a_2)\overline{\alpha}_n(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\Phi_{n-1}^*(z). \end{aligned}$$

■

3.2 Equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblunsky

Usando os resultados do Teorema 3.1, mostramos no seguinte teorema que os coeficientes de Verblunsky satisfazem equações de diferenças não lineares.

Teorema 3.4. Se a função peso satisfaz (1.17) com A e B polinômios de grau menor do que ou igual a 2 como no Teorema 3.1, então os coeficientes de Verblunsky satisfazem as seguintes equações de diferenças não lineares

$$[(n-1)\overline{a}_2 + i\overline{b}_2]\alpha_n + [(n-1)\overline{a}_0 - i\overline{b}_0]\alpha_{n-2} = -(n\overline{a}_1 - \gamma_n\overline{a}_0 - \overline{\gamma}_n\overline{a}_2)\frac{\alpha_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2}, \ n \geqslant 2 \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} &[(n-1)\overline{a}_2 + i\overline{b}_2]\frac{\alpha_n}{1 - |\alpha_{n-1}|^2} + [(n-1)\overline{a}_0 - i\overline{b}_0]\alpha_{n-2} \qquad (3.10) \\ &\quad = -\Big\{[i\overline{b}_0 - (n+1)\overline{a}_0]\alpha_{n-1}\overline{\alpha}_n - i\overline{b}_1 + (n+1)\overline{a}_1 - 2\gamma_n\overline{a}_0\Big\}\frac{\alpha_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2}, \ n \geqslant 2, \end{aligned}$$

onde α_n são os coeficientes de Verblunsky e γ_n é dado em (1.7).

Demonstração: Substituindo $z = 0$ em (3.1), obtemos

$$a_0\Phi_n'(0) = -\mathfrak{s}_{n,n-1}\overline{\alpha}_{n-2} - \mathfrak{s}_{n,n}\overline{\alpha}_{n-1} + [ib_2 - (n-1)a_2]\overline{\alpha}_n. \quad (3.11)$$

De (1.8), sabemos que $\Phi_n'(0) = -(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\overline{\alpha}_{n-2} - \overline{\alpha}_{n-1}\overline{\gamma}_n$. Usando essa informação, (3.3) e (3.4) na equação (3.11), temos o seguinte

$$\begin{aligned} -a_0[(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\overline{\alpha}_{n-2} + \overline{\alpha}_{n-1}\overline{\gamma}_n] &= [ib_2 - (n-1)a_2]\overline{\alpha}_n - (ib_0 + na_0)(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\overline{\alpha}_{n-2} \\ &\quad - \{[ib_2 - (n-1)a_2]\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} - a_2\gamma_n + na_1\}\overline{\alpha}_{n-1}, \end{aligned}$$

e depois de algumas simplificações, obtemos (3.9).

Do mesmo modo, se usamos (3.5) ao invés de (3.4) na equação (3.11), obtemos a equação de diferenças não linear (3.10). ■

3.3 Aplicações

Nesta seção fornecemos relações de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária (usando o Teorema 3.1) e as equações de diferenças não lineares para os coeficientes de Verblunsky (usando o Teorema 3.4) associadas com os exemplos de funções peso semiclássicas na circunferência unitária apresentadas no Capítulo 2.

Exemplo 1

Consideramos a função peso semiclássica (1.25), estudada em [50],

$$w(\theta) = \tau(b)e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}, \tag{3.12}$$

onde $\eta \in \mathbb{R}$, $\lambda > -1/2$, $b = \lambda + i\eta$ e

$$\tau(b) = \frac{e^{\pi\eta}2^{b+\bar{b}}|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)}.$$

Os polinômios ortogonais mônicos, Φ_n, podem ser dados em termos de funções hipergeométricas como

$$\Phi_n(z) = \frac{(b+\bar{b}+1)_n}{(b+1)_n}\,{}_2F_1(-n, b+1, b+\bar{b}+1; 1-z), \quad n \geqslant 0,$$

ver [50]. Os coeficientes de Verblunsky são dados por

$$\alpha_n = -\frac{(b)_{n+1}}{(\bar{b}+1)_{n+1}}, \quad n \geqslant 0. \tag{3.13}$$

No Capítulo 2 determinamos os polinômios A e B, com $A(1) = 0$, da equação do tipo Pearson (1.16), ver Observações 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8. As possibilidades são

1. Quando A tem grau 1,

   $$A(z) = z - 1 \ \text{ e } \ B(z) = i[(b+1)z + \bar{b}].$$

   Portanto, a função peso (3.12) pertence a classe $(1, 1)$.

2. Quando A tem grau 2,

   $$A(z) = (z-1)(z-r),\ r \in \mathbb{C} \ \text{ e } \ B(z) = i[(b+2)z^2 + [\bar{b} - 1 - r(b+1)]z - r\bar{b}].$$

   Para valores especiais de r:

   i) Se $r = -1$, então $A(z) = z^2 - 1$ e $B(z) = i[(b+2)z^2 + (b+\bar{b})z + \bar{b}]$.

   ii) Se $r = 1$, então $A(z) = (z-1)^2$ e $B(z) = i[(b+2)z^2 + (\bar{b} - b - 2)z - \bar{b}]$.

   iii) Se $r = 0$, então $A(z) = z(z-1)$ e $B(z) = i[(b+2)z^2 + (\bar{b}-1)z]$.

   Aqui observamos que a função peso (3.12) também pertence a classe $(2, 2)$, como esperado.

Observamos que essa função peso semiclássica satisfaz várias equações do tipo Pearson. Apresentamos a seguir, as relações de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos Φ_n e as equações de diferenças não lineares para os coeficientes de Verblunsky, α_n, correspondendo às diferentes escolhas do polinômio A.

Relações de estrutura

Com $A(z) = z - 1$, as equações (3.4) e (3.5) para $\mathfrak{s}_{n,n}$ nos fornece

$$\gamma_n = \overline{b} - (b + n - 1)\overline{\alpha}_{n-1}\alpha_{n-2}. \tag{3.14}$$

De fato, como $A(z) = z - 1$ e $B(z) = i[(b+1)z + \overline{b}]$, os coeficientes da relação de estrutura dados pelo Teorema 3.1, são

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_n &= 0, \\ \mathfrak{s}_{n,n-1} &= 0, \\ \mathfrak{s}_{n,n} &\overset{(3.4)}{=} n, & (3.15) \\ \mathfrak{s}_{n,n} &\overset{(3.5)}{=} n - b + \overline{\gamma}_n + [\overline{b} + n + 1]\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1}. & (3.16) \end{aligned}$$

Igualando (3.15) e (3.16), temos

$$\gamma_n = \overline{b} - (b + n + 1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}. \tag{3.17}$$

Fazendo $n = n - 1$ e usando (1.7), obtemos a equação desejada, ou seja,

$$\gamma_n = \overline{b} - (b + n - 1)\overline{\alpha}_{n-1}\alpha_{n-2}.$$

Do Teorema 3.1 e usando a relação (3.14), apresentamos várias relações de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária, associados com a função peso (3.12).

Teorema 3.5. Os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária associados a função peso semiclássica (3.12) satisfazem as seguintes relações de estrutura, para $n \geqslant 2$.

i) Para $A(z) = z - 1$,

$$(z - 1)\Phi_n'(z) = -(\overline{b} + n)[1 - |\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) + n\Phi_n(z). \tag{3.18}$$

ii) Para $A(z) = (z - 1)(z - r)$, $r \in \mathbb{C}$,

$$(z-1)(z-r)\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) - [\overline{b} + n(r+1)]\Phi_n(z) + r(\overline{b}+n)[1 - |\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) - (b+1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z).$$

• $A(z) = z(z - 1)$,

$$z(z - 1)\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) - (\overline{b} + n)\Phi_n(z) - (b + 1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z). \tag{3.19}$$

• $A(z) = (z - 1)^2$,

$$(z - 1)^2\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) - (\overline{b} + 2n)\Phi_n(z) + (\overline{b} + n)[1 - |\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) - (b + 1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z). \tag{3.20}$$

• $A(z) = z^2 - 1$,

$$(z^2 - 1)\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) - \overline{b}\,\Phi_n(z) - (\overline{b} + n)[1 - |\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) - (b + 1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z). \tag{3.21}$$

Demonstração: i) Para $A(z) = z - 1$, temos $B(z) = i[(b+1)z + \overline{b}]$ e os coeficientes $\mathfrak{t}_n$, $s_{n,n-1}$ e $s_{n,n}$ são

$$\begin{aligned}
\mathfrak{t}_n &= 0,\\
s_{n,n-1} &= -(\overline{b}+n)(1-|\alpha_{n-1}|^2),\\
s_{n,n} &\overset{(3.4)}{=} n.
\end{aligned}$$

Substituindo na relação de estrutura, obtemos

$$(z-1)\Phi_n'(z) = -(\overline{b}+n)[1-|\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) + n\Phi_n(z).$$

ii) Para $A(z) = (z-1)(z-r)$, temos $B(z) = i[(b+2)z^2 + [\overline{b} - 1 - r(b+1)]z - r\overline{b}]$ e os coeficientes $\mathfrak{t}_n$, $s_{n,n-1}$ e $s_{n,n}$ são

$$\begin{aligned}
\mathfrak{t}_n &= -(b+1)\overline{\alpha}_n,\\
s_{n,n-1} &= r(\overline{b}+n)(1-|\alpha_{n-1}|^2),\\
s_{n,n} &\overset{(3.4)}{=} -n(r+1) - \gamma_n - (b+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}.
\end{aligned}$$

Substituindo na relação de estrutura, obtemos

$$\begin{aligned}
(z-1)(z-r)\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) &- [n(r+1) + \gamma_n + (b+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}]\Phi_n(z)\\
&+ r(\overline{b}+n)[1-|\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) - (b+1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z).
\end{aligned}$$

Usando (3.17), temos

$$\begin{aligned}
(z-1)(z-r)\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) &- [n(r+1) + \overline{b}]\Phi_n(z) + r(\overline{b}+n)[1-|\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z)\\
&- (b+1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z).
\end{aligned}$$

E assim, obtemos as relações de estrutura (3.19), (3.20) e (3.21) correspondentes a cada valor de r. ■

Agora, observe o valor explícito de γ_n em (3.14) para $n+1$, ou seja,

$$\gamma_{n+1} = \overline{b} - (b+n)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}.$$

Usando (1.7), temos

$$\overline{b} = \gamma_n + (b+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}.$$

Por outro lado, de (3.14), obtemos $\overline{b} = \gamma_n + (b+n-1)\overline{\alpha}_{n-1}\alpha_{n-2}$. Portanto,

$$\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1} = \frac{(\overline{b}+n-1)}{(\overline{b}+n+1)}\alpha_{n-1}\overline{\alpha}_{n-2}. \tag{3.22}$$

Além disso, mostramos os seguintes resultados.

Proposição 3.6. Os coeficientes α_n e γ_n satisfazem

$$\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1} = \frac{|b|^2}{(\overline{b}+n)(\overline{b}+n+1)} \quad \text{e} \quad \gamma_n = \frac{n\overline{b}}{b+n}. \tag{3.23}$$

Demonstração: Como $\alpha_{-1} = -1$ e, de (3.13), temos $\alpha_0 = -b/(\bar{b}+1)$, então, usando (3.22),

$$\begin{aligned}
\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1} &= \frac{(\bar{b}+n-1)}{(\bar{b}+n+1)}\alpha_{n-1}\overline{\alpha}_{n-2} \\
&= \frac{(\bar{b}+n-1)}{(\bar{b}+n+1)}\frac{(\bar{b}+n-2)}{(\bar{b}+n)}\alpha_{n-2}\overline{\alpha}_{n-3} \\
&\vdots \\
&= \frac{(\bar{b}+n-1)}{(\bar{b}+n+1)}\cdots\frac{b}{\bar{b}+1} \\
&= \frac{|b|^2}{(\bar{b}+n)(\bar{b}+n+1)}
\end{aligned}$$

que é a primeira relação em (3.23).

A segunda equação em (3.23) segue de $\gamma_n + (b+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} = \bar{b}$, pois

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \bar{b} - (b+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} \\
&= \bar{b} - (b+n+1)\frac{|b|^2}{(b+n)(b+n+1)} \\
&= \frac{(b+n+1)[\bar{b}(b+n) - |b|^2]}{(b+n)(b+n+1)} \\
&= \frac{n\bar{b}}{b+n}.
\end{aligned}$$

■

Equações de diferenças para coeficientes de Verblunsky complexos

Usando o Teorema 3.4 encontramos equações de diferenças não lineares para coeficientes de Verblunsky complexos associados a função peso (3.12).

Teorema 3.7. Os coeficientes de Verblunsky satisfazem as seguintes equações de diferenças não lineares

$$(b+n+1)\alpha_n = [n+2+\bar{b} - (b+n+1)\overline{\alpha}_{n+1}\alpha_n]\frac{\alpha_{n+1}}{1-|\alpha_{n+1}|^2}, \quad n \geqslant 0, \tag{3.24}$$

$$(\bar{b}+n+1)\alpha_n + (b+n-1)\alpha_{n-2} = \frac{2[\mathrm{Re}(\gamma_n)+n]\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geqslant 2, \tag{3.25}$$

$$(\bar{b}+n+1)\alpha_n - (b+n-1)\alpha_{n-2} = -\frac{2i\,\mathrm{Im}(\gamma_n)\,\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geqslant 2, \tag{3.26}$$

$$(\bar{b}+n+1)\alpha_n + (b+n-1)(1-|\alpha_{n-1}|^2)\alpha_{n-2} = \left(\frac{n\bar{b}}{b+n} + b + 2n\right)\alpha_{n-1}, \quad n \geqslant 2, \tag{3.27}$$

e

$$(\bar{b}+n+1)\alpha_n - (b+n-1)(1-|\alpha_{n-1}|^2)\alpha_{n-2} = -\left(\frac{n\bar{b}}{b+n} - b\right)\alpha_{n-1}, \quad n \geqslant 2. \tag{3.28}$$

Demonstração:

• Quando $A(z) = z - 1$ e $B(z) = i[(b+1)z + \bar{b}]$, a equação (3.9) torna-se

$$(b + n - 1)\alpha_{n-2} = (n + \gamma_n)\frac{\alpha_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geqslant 2, \tag{3.29}$$

e usando (3.14) obtemos (3.24).

Usando a relação (3.10) e a equação(3.14) também temos a equação desejada (3.24).

• Se $A(z) = (z-1)^2$ e $B(z) = i[(b+2)z^2 + (\bar{b} - b - 2)z - \bar{b}]$, a equação (3.9) nos fornece (3.25).

A relação (3.10) torna-se

$$(\bar{b} + n + 1)\alpha_n + (b + n - 1)(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\alpha_{n-2} = (\gamma_n + b + 2n)\ \alpha_{n-1}. \tag{3.30}$$

Usando a segunda equação de (3.23), a equação (3.30) pode ser escrita como (3.27).

• Quando $A(z) = z^2 - 1$ e $B(z) = i[(b+2)z^2 + (b + \bar{b})z + \bar{b}]$, (3.9) nos fornece (3.26).

Da relação (3.10), obtemos

$$(\bar{b} + n + 1)\alpha_n - (b + n - 1)(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\alpha_{n-2} = -[2\gamma_n - b - \bar{b} + (b + n + 1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}]\alpha_{n-1}.$$

Usando (1.7) e (3.14), a equação acima implica em

$$(\bar{b} + n + 1)\alpha_n - (b + n - 1)\alpha_{n-2}(1 - |\alpha_{n-1}|^2) = -(\gamma_n - b)\alpha_{n-1}, \tag{3.31}$$

assim, obtemos (3.28) de (3.23). ■

Note que, além dos coeficientes de Verblunsky satisfazerem equações de diferenças não lineares, eles também satisfazem uma equação de diferenças linear.

Teorema 3.8. Os coeficientes de Verblunsky satisfazem a seguinte equação de diferenças

$$(\bar{b} + n + 1)\alpha_n = (b + n)\alpha_{n-1}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.32}$$

Demonstração: Para $A(z) = z(z-1)$ e $B(z) = i[(b+2)z^2 + (\bar{b} - 1)z]$, a equação (3.9) torna-se

$$(\bar{b} + n + 1)\alpha_n = (n + \overline{\gamma}_n)\frac{\alpha_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2} \quad n \geqslant 1, \tag{3.33}$$

e a relação (3.10) nos fornece (3.32). ■

Observe que é possível obter (3.32) somando (3.30) e (3.31). Ademais, também obtemos (3.26) subtraindo (3.29) de (3.33).

Usando a equação de diferenças (3.32), podemos escrever

$$\alpha_n = \frac{b+n}{\bar{b}+n+1}\frac{b+n-1}{\bar{b}+n}\cdots\frac{b}{\bar{b}+1}\alpha_{-1}, \quad n \geqslant 0,$$

e como $\alpha_{-1} = -1$, recuperamos a fórmula explícita para os coeficientes de Verblunsky (3.13).

Considerando um outro método (ver [53]), encontramos mais uma equação de diferenças não linear para os coeficientes de Verblunsky complexos associados com a função peso (3.12).

Teorema 3.9. Os coeficientes de Verblunsky satisfazem a seguinte equação de diferenças não linear

$$\overline{\alpha}_n(\alpha_{n-1}+\alpha_n) = (\overline{b}+n)(|\alpha_{n-1}|^2 - |\alpha_n|^2), \quad n \geqslant 1. \tag{3.34}$$

Demonstração: Da relação (1.4) obtemos

$$\Phi'_{n+1}(z) = z\Phi'_n(z) + \Phi_n(z) - \overline{\alpha}_n\Phi_n^{*\prime}(z)$$

usando a relação de estrutura (3.18),

$$\frac{(n+1)\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n+1,n}\Phi_n(z)}{z-1} = \frac{z\,[n\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z)]}{z-1} + \frac{(z-1)\,[\Phi_n(z) - \overline{\alpha}_n\Phi_n^{*\prime}(z)]}{z-1},$$

onde $\mathfrak{s}_{n+1,n} = -(\overline{b}+n+1)[1-|\alpha_n|^2]$ e $\mathfrak{s}_{n,n-1} = -(\overline{b}+n)[1-|\alpha_{n-1}|^2]$.

Novamente, usando a relação (1.4), obtemos

$$\begin{aligned}(n+1)\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n+1,n}\Phi_n(z) =& (n+1)[\Phi_{n+1}(z) + \overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z)] + \mathfrak{s}_{n,n-1}[\Phi_n(z) + \overline{\alpha}_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z)] \\ &- \overline{\alpha}_n z\Phi_n^{*\prime}(z) - \Phi_n(z) + \overline{\alpha}_n\Phi_n^{*\prime}(z).\end{aligned}$$

Como $\Phi_n^*(z) = -\alpha_{n-1}z^n + \cdots$ e $z\Phi_n^{*\prime}(z) = -\alpha_{n-1}nz^n + \cdots$, segue que

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_{n+1,n}\Phi_n(z) =& (n+1)\overline{\alpha}_n\left[-\alpha_{n-1}z^n + \cdots\right] + \mathfrak{s}_{n,n-1}\left[\Phi_n(z) + \overline{\alpha}_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z)\right] \\ &+ \left[\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}nz^n + \cdots\right] - \Phi_n(z) + \overline{\alpha}_n\Phi_n^{*\prime}(z).\end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de z^n, obtemos $\mathfrak{s}_{n+1,n} = -(n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} + \mathfrak{s}_{n,n-1} + \overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}n - 1$ e $\mathfrak{s}_{n,n-1} - \mathfrak{s}_{n+1,n} = \overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} + 1$. Assim podemos escrever

$$\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} = (\overline{b}+n+1)(1-|\alpha_n|^2) - (\overline{b}+n)(1-|\alpha_{n-1}|^2) - 1$$

e, finalmente, (3.34) é obtida. ■

Consideramos aqui a função peso semiclássica (2.22), para $\eta \in \mathbb{R}$ e $\beta > -1/2$,

$$w(\theta) = \tau(\beta,\eta)\, e^{-\theta\,\eta}\, [\cos^2(\theta/2)]^\beta, \quad \theta \in [-\pi,\pi].$$

Essa função peso satisfaz a equação do tipo Pearson (1.16) com várias possibilidades de escolha para os polinômios A e B. Denotando $c = \beta + i\eta$, podemos calcular esses polinômios:

i) Quando A tem grau 1,

$$A(z) = z+1 \;\text{ e }\; B(z) = i[(c+1)z - \overline{c}].$$

ii) Quando A tem grau 2,

$$A(z) = (z+1)(z-r) \;\text{ e }\; B(z) = i[(c+2)z^2 - (\overline{c}-1+r(c+1))z + r\overline{c}].$$

De maneira análoga, usando os Teoremas 3.1 e 3.4, é possível gerar várias relações de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária e equações de diferenças para os coeficientes de Verblunsky. Também encontramos que os coeficientes de Verblunsky associados e os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária são

$$\alpha_n = (-1)^n\frac{(c)_{n+1}}{(\overline{c}+1)_{n+1}} \quad \text{e} \quad \Phi_n(z) = (-1)^n\frac{(c+\overline{c}+1)_n}{(c+1)_n}\,{}_2F_1(-n,c+1,c+\overline{c}+1;1+z).$$

Exemplo 2

Consideramos a função peso semiclássica (1.23), ou seja,

$$w(\theta) = \tau(u)e^{2|u|\sin(\theta+\arg u)},$$

onde $u \in \mathbb{C}$ e a constante $\tau(u)$ é tal que $\mu_0 = 1$. Observe que, se $u = 0$, então $w(\theta) = 1/(2\pi)$, é a medida de Lebesgue.

Considerando $u \neq 0$, como apresentado na Seção 2.2, ver Observação 2.3, essa função peso satisfaz a equação do tipo Pearson (1.16) com $A(z) = z$ e $B(z) = uz^2 + iz + \overline{u}$.

Do Teorema 3.1, a relação de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária é

$$z\Phi_n'(z) = i\overline{u}(1 - |\alpha_{n-1}|^2)\Phi_{n-1}(z) + (n + iu\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1})\Phi_n(z) + iu\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z).$$

Usando a definição (3.5) para $\mathfrak{s}_{n,n}$, também encontramos que $\mathfrak{s}_{n,n} = -i\overline{u}\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1} + n$. Além disso, os coeficientes de Verblunsky satisfazem

$$u\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} = -\overline{u}\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Isto significa que $\mathrm{Re}(u\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}) = 0$. Como $u \neq 0$, encontramos

$$\frac{\alpha_n}{\overline{\alpha}_n} = \frac{\alpha_1}{\overline{\alpha}_1}\left(-\frac{u}{\overline{u}}\right)^{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Além disso, de (3.9), os coeficientes de Verblunsky também satisfazem

$$\overline{iu}\alpha_n + iu\alpha_{n-2} = \frac{n\,\alpha_{n-1}}{1 - |\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geqslant 2. \tag{3.35}$$

Comparando com (3), a equação de diferenças não linear (3.35) pode ser vista como uma extensão da equação discreta de Painlevé $\mathrm{dP_{II}}$.

Finalmente, a equação de diferenças não linear (3.10) para os coeficientes de Verblunsky torna-se

$$\overline{iu}\,\alpha_n + iu\,\alpha_{n-2}(1 - |\alpha_{n-1}|^2) = (n + iu\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1})\alpha_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Exemplo 3

Consideramos a função peso semiclássica (1.24) para $u, r \in \mathbb{C}$, $|r| \neq 1$, $r \neq 0$ e a constante $\tau(u, r)$ é tal que $\mu_0 = 1$, ou seja,

$$w(\theta) = \tau(u, r)\, e^{2\,\mathrm{Re}(u/\overline{r})\arg(1-re^{-i\theta})}|e^{i\theta} - r|^{-2\,\mathrm{Im}(u/\overline{r})}.$$

Do primeiro resultado da Seção 2.3 e da Observação 2.9, sabemos que essa função peso satisfaz a equação do tipo Pearson com

$$A(z) = (z - r)\left(z - \frac{1}{\overline{r}}\right) \text{ e } B(z) = \left(2i - \frac{u}{\overline{r}}\right) z^2 + \left[2\,\mathrm{Re}(ur) - \frac{(|r|^2 + 1)i}{\overline{r}}\right] z - \frac{\overline{u}}{\overline{r}}.$$

Portanto, de (3.1) os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária satisfazem a relação de estrutura

$$(z - r)\left(z - \frac{1}{\overline{r}}\right)\Phi_n'(z) = n\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) - \left(1 + \frac{u}{\overline{r}}i\right)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z),$$

com

$$\mathfrak{s}_{n,n-1} = \frac{nr - \overline{u}i}{\overline{r}}(1 - |\alpha_{n-1}|^2) \text{ e } \mathfrak{s}_{n,n} = -\left[n\left(\frac{|r|^2+1}{\overline{r}}\right) + \gamma_n + \left(n+1+\frac{u}{\overline{r}}i\right)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}\right].$$

Também, de (3.5)

$$\mathfrak{s}_{n,n} = -\left[n\left(\frac{|r|^2+1}{\overline{r}}\right) + \frac{r}{\overline{r}}\overline{\gamma}_n + \left((n+1)\frac{r}{\overline{r}} - \frac{\overline{u}}{\overline{r}}i\right)\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1}\right] + \frac{2\,\mathrm{Re}(ur)}{\overline{r}}i.$$

Comparando as duas formas de representar o coeficiente $\mathfrak{s}_{n,n}$, concluímos que

$$\mathrm{Im}(\overline{r}\gamma_n + [(n+1)\overline{r} + iu]\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}) = -\,\mathrm{Re}(ur).$$

Do Teorema 3.4, a equação de diferenças (3.9) para os coeficientes de Verblunsky torna-se

$$[(n+1)r - \overline{u}i]\alpha_n + [(n-1)\overline{r} + ui]\alpha_{n-2} = \left[n(|r|^2+1) + 2\,\mathrm{Re}(r\overline{\gamma}_n)\right]\frac{\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2}, \quad n \geqslant 2.$$

E da equação de diferenças (3.10) tem-se a equação

$$\begin{aligned}[(n+1)r - \overline{u}i]\alpha_n &+ [(n-1)\overline{r} + ui]\alpha_{n-2}(1-|\alpha_{n-1}|^2)\\ &= \{n(|r|^2+1) + 2\,\mathrm{Re}(ur)i + [(n+1)\overline{r} + ui]\overline{\alpha_n}\alpha_{n-1} + 2\overline{r}\gamma_n\}\alpha_{n-1}, \quad n \geqslant 2.\end{aligned}$$

Exemplo 4

Consideramos a função peso semiclássica (2.21), isto é,

$$w(\theta) = \tau(\lambda,\beta,\eta)\, e^{-\theta\,\eta}\,[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

onde $\tau(\lambda,\beta,\eta)$ é uma constante, $\eta \in \mathbb{R}$, $\lambda > -1/2$ e $\beta > -1/2$, que satisfaz a equação do tipo Pearson (1.17) com

$$A(z) = z^2 - 1 \ \text{ e } \ B(z) = i[(\lambda+\beta+i\eta+2)\,z^2 + 2(\lambda-\beta)z + (\lambda+\beta-i\eta)],$$

ver Observação 2.6.

Usando o Teorema 3.1 obtemos a seguinte relação de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária

$$(z^2-1)\Phi_n'(z) = \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + n\Phi_{n+1}(z) - (d+1)\overline{\alpha}_n\Phi_n^*(z),$$

onde $d = \lambda + \beta + i\eta$,

$$\mathfrak{s}_{n,n-1} = -(\overline{d}+n)(1-|\alpha_{n-1}|^2) \quad \text{e} \quad \mathfrak{s}_{n,n} = -[(d+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} + \gamma_n].$$

De (3.5), o coeficiente $\mathfrak{s}_{n,n}$ também pode ser escrito como

$$\mathfrak{s}_{n,n} = \overline{\gamma}_n + (\overline{d}+n+1)\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1} - 2(\lambda-\beta).$$

Comparando as duas formas de representar o coeficiente $\mathfrak{s}_{n,n}$, vemos que

$$\mathrm{Re}(\gamma_n + (d+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}) = \lambda - \beta.$$

Usando o Teorema 3.4, encontramos equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblunsky complexos. De (3.9) e (3.10) obtemos, respectivamente, para $n \geqslant 2$,

$$(\overline{d}+n+1)\alpha_n - (d+n-1)\alpha_{n-2} = -\frac{2i\,\mathrm{Im}(\gamma_n)\,\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2}$$

e

$$(\overline{d}+n+1)\alpha_n - (d+n-1)\alpha_{n-2}(1-|\alpha_{n-1}|^2) = -\{2\gamma_n + (d+n+1)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} - 2(\lambda-\beta)\}\alpha_{n-1}.$$

Exemplo 5: coeficientes de Verblunsky reais

Polinômios de Jacobi na circunferência unitária

Escolhendo $\eta = 0$ em (2.21) ou no Exemplo 4, temos

$$w(\theta) = \tau(\lambda, \beta)[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \lambda, \beta > -1/2, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Essa função peso foi estudada em Magnus [37] considerando os polinômios de Jacobi na circunferência unitária. Os coeficientes de Verblunsky são reais e dados por

$$\alpha_n = -\frac{\lambda + (-1)^{n+1}\beta}{n + 1 + \lambda + \beta}.$$

Observe que os coeficientes γ_n dados por (1.7) são reais também.

Com $\eta = 0$, o polinômio B torna-se $B(z) = i[(\lambda + \beta + 2)\, z^2 + 2(\lambda - \beta)z + (\lambda + \beta)]$. A relação de estrutura para os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária é

$$(z^2 - 1)\Phi_n'(z) = \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + n\Phi_{n+1}(z) - (\lambda + \beta + 1)\alpha_n\Phi_n^*(z),$$

com os coeficientes

$$\mathfrak{s}_{n,n-1} = -(\lambda + \beta + n)(1 - \alpha_{n-1}^2), \qquad \mathfrak{s}_{n,n} = -[(\lambda + \beta + n + 1)\alpha_n\alpha_{n-1} + \gamma_n]$$

e, também, $\mathfrak{s}_{n,n} = \gamma_n + (\lambda + \beta + n + 1)\alpha_n\alpha_{n-1} - 2(\lambda - \beta)$.

Finalmente, usando o Teorema 3.7, obtemos as equações de diferenças não lineares para os coeficientes de Verblunsky:

$$(\lambda+\beta+n+1)\alpha_n-(\lambda+\beta+n-1)\alpha_{n-2}(1 - \alpha_{n-1}^2) = -[2\gamma_n+(\lambda+\beta+n+1)\alpha_n\alpha_{n-1}-2(\lambda-\beta)]\alpha_{n-1},$$

e

$$(\lambda + \beta + n + 1)\alpha_n = (\lambda + \beta + n - 1)\alpha_{n-2}, \quad n \geqslant 2.$$

Uma equação de diferenças semelhante a esta última, foi apresentada em [37].

Polinômios circulares de Jacobi

Escolhendo $\eta = 0$ e $\beta = 0$ em (2.21) ou no Exemplo 4, obtemos

$$w(\theta) = \tau(\lambda)[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}, \text{ com } \lambda > -1/2, \ \theta \in [0, 2\pi].$$

De (3.32), os coeficientes de Verblunsky satisfazem

$$\alpha_n = \frac{n + \lambda}{n + 1 + \lambda}\alpha_{n-1} \quad \text{e} \quad \alpha_n = -\frac{\lambda}{n + 1 + \lambda}.$$

É bem conhecido que os polinômios circulares de Jacobi satisfazem a relação de estrutura

$$(z - 1)\Phi_n'(z) = n\Phi_n(z) - \frac{n(n + 2\lambda)}{n + \lambda}\Phi_{n-1}(z), \tag{3.36}$$

ver [32] e [37]. Usando o Teorema 3.5 também obtemos (3.36). Além disso, de (3.19), (3.20) e (3.21) seguem, respectivamente, as relações de estrutura

$$z(z - 1)\Phi_n'(z) = -(\lambda + n)\Phi_n(z) + n\Phi_{n+1}(z) + \frac{\lambda(\lambda + 1)}{n + 1 + \lambda}\Phi_n^*(z),$$

$$(z - 1)^2\Phi_n'(z) = \frac{n(n + 2\lambda)}{n + \lambda}\Phi_{n-1}(z) - (\lambda + 2n)\Phi_n(z) + n\Phi_{n+1}(z) + \frac{\lambda(\lambda + 1)}{n + 1 + \lambda}\Phi_n^*(z)$$

e

$$(z^2 - 1)\Phi_n'(z) = -\frac{n(n + 2\lambda)}{n + \lambda}\Phi_{n-1}(z) - \lambda\Phi_n(z) + n\Phi_{n+1}(z) + \frac{\lambda(\lambda + 1)}{n + 1 + \lambda}\Phi_n^*(z).$$

Polinômios de Bessel modificados

Se $u = it/2$ com $t > 0$, ver Observação 2.2, então $\sin(\theta + \arg u) = \sin(\theta + \pi/2) = \cos(\theta)$,

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{t\cos(\theta)} \quad \text{e} \quad \nu(z) = \frac{1}{2\pi} e^{t(z+z^{-1})/2}.$$

Neste caso, os coeficientes de Verblunsky são reais. A função peso associada ν satisfaz

$$\frac{\mathrm{d}\,\nu(z)}{\mathrm{d}\,z} = \frac{t}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)\nu(z),$$

e os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária satisfazem a relação de estrutura (2).

Da Observação 2.2, a função peso w satisfaz a equação do tipo Pearson (1.17) com $A(z) = z$ e $B(z) = i\,[(t/2)z^2 + z - t/2]$. Do Corolário 3.3 e $\kappa_{n-1}^2/\kappa_n^2 = 1 - |\alpha_{n-1}|^2$, obtemos a seguinte relação de estrutura

$$z\Phi_n'(z) = n\Phi_n(z) + \frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2}\left[\Phi_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_n \Phi_{n-1}^*(z)\right]. \tag{3.37}$$

Fazendo $z = 0$ em (3.37), encontramos

$$\frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2}\alpha_n = -n\alpha_{n-1} - \frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2}\alpha_{n-2}. \tag{3.38}$$

Substituindo (3.38), (1.4) e $\Phi_{n-1}^*(z) = \Phi_{n-2}^*(z) - \alpha_{n-2} z \Phi_{n-2}(z)$ na equação (3.37), temos

$$\begin{aligned}
z\Phi_n'(z) &= n\Phi_n(z) + \frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2}\Phi_{n-1}(z) + \left[n\overline{\alpha}_{n-1} + \frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2}\overline{\alpha}_{n-2}\right]\Phi_{n-1}^*(z) \\
&= nz\Phi_{n-1}(z) + \frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2}\{\Phi_{n-1}(z) + \overline{\alpha}_{n-2}[\Phi_{n-2}^*(z) - \alpha_{n-2} z\Phi_{n-2}(z)]\} \\
&= nz\Phi_{n-1}(z) + \frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-1}^2}{\kappa_n^2}[z\Phi_{n-2}(z) - |\alpha_{n-2}|^2 z\Phi_{n-2}(z)] \\
&= nz\Phi_{n-1}(z) + \frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-2}^2}{\kappa_n^2} z\Phi_{n-2}(z).
\end{aligned}$$

Assim, encontramos

$$\Phi_n'(z) = n\Phi_{n-1}(z) + \frac{t}{2}\frac{\kappa_{n-2}^2}{\kappa_n^2}\Phi_{n-2}(z),$$

que é a equação (2). Portanto, a equação (3.37) é equivalente a relação de estrutura (2).

4 Relações diferenciais derivadas do problema de Riemann-Hilbert

Neste capítulo, utilizando a técnica de Riemann-Hilbert, apresentamos equações diferenciais de primeira ordem para polinômios ortogonais associados a duas funções peso na circunferência unitária, algumas dessas equações são equivalentes a relações de estruturas expostas no Capítulo 3. Além disso, usando essa abordagem, encontramos equações diferenciais de segunda ordem para os polinômios ortogonais e recuperamos a segunda equação discreta de Painlevé. Para o desenvolvimento deste capítulo foram utilizadas as referências Deift [17], Martínez [42] e Cassatela-Contra e Mañas [13].

É importante ressaltar que no Capítulo 1 consideramos w e ν funções peso definidas na circunferência unitária $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z = e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. Essas funções peso estão relacionadas da seguinte forma

$$w(\theta) = \frac{\nu(z)}{iz}, \quad z = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Lembramos da Seção 1.2, que a sequência de polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária, $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$, satisfaz

$$\int_{\mathbb{T}} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)}\frac{\nu(z)}{iz}\,\mathrm{d}\,z = \frac{1}{\kappa_n^2}\delta_{n,m}. \tag{4.1}$$

E os polinômios recíprocos, $\Phi_n^*(z) = z^n\overline{\Phi_n(1/\overline{z})}$, satisfazem

$$\int_{\mathbb{T}} z^k\Phi_n^*(z)\frac{\nu(z)}{iz}\,\mathrm{d}\,z = 0,\ k = -1, -2\ldots, -n.$$

Além disso, na Seção 1.2 também foram apresentadas as relações satisfeitas por esses polinômios, ou seja, (1.4) e (1.5), que são dadas por

$$\begin{aligned}\Phi_n(z) &= z\Phi_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z), \quad n \geqslant 1,\\ \Phi_n^*(z) &= \Phi_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}z\Phi_{n-1}(z), \quad n \geqslant 1,\end{aligned}$$

onde $\Phi_0(z) = 1$ e $\alpha_{n-1} = -\overline{\Phi_n(0)}$ são os coeficientes de Verblunsky. E da relação (1.4), sabemos que

$$\frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n+1}^2} = 1 - |\alpha_n|^2.$$

Neste capítulo, por simplicidade, denotamos o polinômio mônico Φ_n como

$$\Phi_n(z) = z^n + \Phi_1^n z^{n-1} + \Phi_2^n z^{n-2} + \cdots + \Phi_{n-1}^n z + \Phi_n^n, \quad n \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Nos capítulos anteriores utilizamos a notação (1.6) para o polinômio mônico, ou seja,

$$\Phi_n(z) = z^n + \gamma_n z^{n-1} + \xi_n z^{n-2} + \cdots + \beta_n z - \overline{\alpha}_{n-1}, \quad n \geqslant 0,$$

observe que $\Phi_1^n = \gamma_n$, $\Phi_2^n = \xi_n$, $\Phi_{n-1}^n = \beta_n$ e $\Phi_n^n = -\overline{\alpha}_{n-1}$.

4.1 Análise de Riemann-Hilbert e desenvolvimentos assintóticos

Como visto na Subseção 1.5.2, em [42], associada a uma função peso ν, foi apresentada a solução Y_n para o problema de Riemann-Hilbert na circunferência unitária que satisfaz

($\mathbf{Y}_n$-RH1) Y_n é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$;

($\mathbf{Y}_n$-RH2) Y_n satisfaz a condição de salto

$$(Y_n)_+(t) = (Y_n)_-(t) \begin{bmatrix} 1 & \nu(t)/t^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{T};$$

($\mathbf{Y}_n$-RH3) Y_n tem o seguinte comportamento assintótico quando $z \to \infty$

$$\lim_{z\to\infty} Y_n(z) \begin{bmatrix} z^{-n} & 0 \\ 0 & z^n \end{bmatrix} = I_2,$$

onde Y_n é a única solução dada por

$$Y_n(z) = \begin{bmatrix} \Phi_n(z) & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_n(t)}{t-z}\frac{\nu(t)}{it^n}\,\mathrm{d}\,t \\ -2\pi\kappa_{n-1}^2\Phi_{n-1}^*(z) & -\kappa_{n-1}^2\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_{n-1}^*(t)}{t-z}\frac{\nu(t)}{it^n}\,\mathrm{d}\,t \end{bmatrix}.$$

Por simplicidade, Y_n também pode ser escrita como

$$Y_n(z) = \begin{bmatrix} \Phi_n(z) & G_n(z) \\ -b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

e $b_{n-1} = 2\pi\kappa_{n-1}^2$,

$$G_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_n(t)}{t-z}\frac{\nu(t)}{it^n}\,\mathrm{d}\,t \quad \text{e} \quad G_{n-1}^*(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_{n-1}^*(t)}{t-z}\frac{\nu(t)}{it^n}\,\mathrm{d}\,t. \tag{4.4}$$

Em 1.5.2 vimos que $\det Y_n = 1$, então a inversa de Y_n existe e é dada em (1.29). Note que Y_n^{-1} pode ser escrita como

$$Y_n^{-1}(z) = \begin{bmatrix} -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) & -G_n(z) \\ b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & \Phi_n(z) \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Observe que, G_n e G_{n-1}^* satisfazem as seguintes relações.

Proposição 4.1. Sejam Φ_n um polinômio ortogonal mônico com relação a uma função peso ν definida no circunferência unitária e G_n e G_{n-1}^* dados em (4.4), então G_n e G_{n-1}^* satisfazem, respectivamente, as seguintes relações

$$G_{n+1}(z) = G_n(z) - \overline{\alpha}_n G_n^*(z), \tag{4.6}$$

$$zG_n^*(z) = G_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} G_{n-1}(z). \tag{4.7}$$

Demonstração: Para mostrar a equação (4.6), usamos a relação de recorrência (1.4) e obtemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_{n+1}(t)\nu(t)}{it^{n+1}(t-z)}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{t\Phi_n(t)\nu(t)}{it^{n+1}(t-z)}\mathrm{d}\,t - \overline{\alpha}_n \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_n^*(t)\nu(t)}{it^{n+1}(t-z)}\mathrm{d}\,t$$

e, assim, temos

$$G_{n+1}(z) = G_n(z) - \overline{\alpha}_n G_n^*(z),$$

que é a equação desejada.

Para mostrar (4.7), usamos a relação (1.5)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_n^*(t)\nu(t)}{it^{n}(t-z)}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{t\Phi_{n-1}(t)\nu(t)}{it^{n}(t-z)}\mathrm{d}\,t - \alpha_{n-1} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{t\Phi_{n-1}(t)\nu(t)}{it^{n}(t-z)}\mathrm{d}\,t.$$

Agora, sabendo que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_n^*(t)\nu(t)}{it^{n}(t-z)}\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{[t-z+z]}{t-z}\,\frac{\Phi_n^*(t)\nu(t)}{it^{n+1}}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_n^*(t)\nu(t)}{it^{n+1}}\mathrm{d}\,t + \frac{1}{2\pi}z\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_n^*(t)\nu(t)}{it^{n+1}(t-z)}\mathrm{d}\,t \\
&= 0 + \frac{1}{2\pi}z\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_n^*(t)\nu(t)}{it^{n+1}(t-z)}\,\mathrm{d}\,t,
\end{aligned}$$

obtemos

$$zG_n^*(z) = G_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} G_{n-1}(z).$$

■

Utilizando as propriedades de ortogonalidade, nos próximos dois resultados apresentamos o desenvolvimento assintótico de G_n e G_{n-1}^* quando $z \to \infty$.

Proposição 4.2. Seja ν uma função peso definida na circunferência unitária e $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos associada a ν, então podemos reescrever G_{n-1}^*, dado em (4.4), como

$$G_{n-1}^*(z) = b_{n-1}^{-1}\left(-\frac{1}{z^n} + \frac{\gamma_n}{z^{n+1}} - \frac{\gamma_n\gamma_{n+1} - \xi_{n+1}}{z^{n+2}} + \cdots\right).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
G_{n-1}^*(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_{n-1}^*(t)\nu(t)}{it^{n}(t-z)}\,\mathrm{d}\,t \\
&= -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{j+1}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} t^j \Phi_{n-1}^*(t)\frac{\nu(t)}{it^n}\,\mathrm{d}\,t \\
&= -\sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{1}{z^{j+1}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} t^j \overline{\Phi_{n-1}(t)}\frac{\nu(t)}{it}\,\mathrm{d}\,t.
\end{aligned}$$

De (4.1) com grau $n-1$, sabe-se

$$\int_{\mathbb{T}} \left\{t^{n-1} + \Phi_1^{n-1} t^{n-2} + \cdots \right\} \overline{\Phi_{n-1}(t)} \frac{\nu(t)}{it}\, \mathrm{d}\, t = \int_{\mathbb{T}} t^{n-1} \overline{\Phi_{n-1}(t)} \frac{\nu(t)}{it}\, \mathrm{d}\, t = \frac{1}{\kappa_{n-1}^2}. \tag{4.8}$$

Observe que usando (4.2) e a relação anterior, temos

$$\int_{\mathbb{T}} t^n \overline{\Phi_{n-1}(t)} \frac{\nu(t)}{it}\, \mathrm{d}\, t = -\frac{\Phi_1^n}{\kappa_{n-1}^2}.$$

Seguindo deste modo, utilizando (4.1) e as duas últimas equações, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} t^{n+1} \overline{\Phi_{n-1}(t)} \frac{\nu(t)}{it}\, \mathrm{d}\, t &= -\Phi_1^{n+1} \int_{\mathbb{T}} t^n \overline{\Phi_{n-1}(t)} \frac{\nu(t)}{it}\, \mathrm{d}\, t - -\Phi_2^{n+1} \int_{\mathbb{T}} t^{n-1} \overline{\Phi_{n-1}(t)} \frac{\nu(t)}{it}\, \mathrm{d}\, t \\ &= [\Phi_1^{n+1}\Phi_1^n - \Phi_2^{n+1}] \frac{1}{\kappa_{n-1}^2}.\end{aligned}$$

Portanto, de forma geral, tem-se a relação dada por

$$\int_{\mathbb{T}} t^{n+j} \overline{\Phi_{n-1}(t)} \frac{\nu(t)}{it}\, \mathrm{d}\, t = -\sum_{k=1}^{j+1} \Phi_k^{n+j} \int_{\mathbb{T}} z^{n-k+j} \overline{\Phi_{n-1}(z)} \frac{\nu(z)}{it}\, \mathrm{d}\, t. \tag{4.9}$$

Considerando a relação dada por (4.9) e lembrando que $\Phi_1^n = \gamma_n$ e $\Phi_2^n = \xi_n$. Então, obtemos

$$\begin{aligned}G_{n-1}^*(z) &= -\left[\frac{1}{2\pi\kappa_{n-1}^2 z^n} - \frac{\gamma_n}{2\pi\kappa_{n-1}^2 z^{n+1}} + \frac{\gamma_n\gamma_{n+1}}{2\pi\kappa_{n-1}^2 z^{n+2}} - \frac{\xi_{n+1}}{2\pi\kappa_{n-1}^2 z^{n+2}} + \cdots\right] \\ &= b_{n-1}^{-1}\left[-\frac{1}{z^n} + \frac{\gamma_n}{z^{n+1}} - \frac{1}{z^{n+2}}(\gamma_n\gamma_{n+1} - \xi_{n+1}) + O(z^{-(n+3)})\right].\end{aligned}$$

■

Proposição 4.3. Seja ν uma função peso definida na circunferência unitária e $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos associada a ν, então podemos reescrever G_n, dado em (4.4), como

$$G_n(z) = -\frac{\overline{\alpha}_n}{b_n}\frac{1}{z^{n+1}} + \left(\frac{\overline{\alpha}_n}{b_n}\gamma_{n+1} - \frac{\overline{\alpha}_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\frac{1}{z^{n+2}} + \cdots .$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}G_n(z) =& \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_n(t)\nu(t)}{it^n(t-z)}\, \mathrm{d}\, t \\ =& -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^{j+1}} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} t^j \Phi_n(t) \frac{\nu(t)}{it^n}\, \mathrm{d}\, t \\ =& -\frac{1}{z^{n+1}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Phi_n(t) t \frac{\nu(t)}{it}\, \mathrm{d}\, t - \frac{1}{z^{n+2}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Phi_n(t) t^2 \frac{\nu(t)}{it}\, \mathrm{d}\, t + \\ & - \cdots - \frac{1}{z^{n+j}}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \Phi_n(t) t^j \frac{\nu(t)}{it}\, \mathrm{d}\, t - \cdots\end{aligned}$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{T}} t\Phi_n(t)\frac{\nu(t)}{it}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\overline{\alpha}_n}{\kappa_n^2} \tag{4.10}$$

De fato, calculando a integral na circunferência unitária da recorrência de Szegő (1.4), temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} z\Phi_n(t)\frac{\nu(t)}{it}\,\mathrm{d}\,t &= \int_{\mathbb{T}} \Phi_{n+1}(t)\frac{\nu(t)}{it}\,\mathrm{d}\,t + \overline{\alpha}_n\int_{\mathbb{T}} \Phi_n^*(t)\frac{\nu(t)}{it}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \overline{\alpha}_n\int_{\mathbb{T}} t^n\overline{\Phi_n(t)}\frac{\nu(t)}{it}\,\mathrm{d}\,t \\
&= \frac{\overline{\alpha}_n}{\kappa_n^2}.
\end{aligned}$$

Analogamente, utilizando (1.4), (4.10) e (4.8), obtemos

$$\int_{\mathbb{T}} t^2\Phi_n(t)\frac{\nu(t)}{it}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\overline{\alpha}_{n+1}}{\kappa_{n+1}^2} - \Phi_1^{n+1}\frac{\overline{\alpha}_n}{\kappa_n^2}.$$

Portanto, de forma geral, temos a relação

$$\int_{\mathbb{T}} t^{j+1}\Phi_n(t)\frac{\nu(t)}{it}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\overline{\alpha}_{n+j}}{\kappa_{n+j}^2} - \overline{\alpha}_n\int_{\mathbb{T}} t^{n+j}\overline{\Phi_n(t)}\frac{\nu(t)}{it}\,\mathrm{d}\,t. \tag{4.11}$$

Usando a relação (4.11), obtemos

$$G_n(z) = -\frac{1}{z^{n+1}}\overline{\alpha}_n b_n^{-1} + \frac{1}{z^{n+2}}[\overline{\alpha}_n b_n^{-1}\gamma_{n+1} - \overline{\alpha}_{n+1}b_{n+1}^{-1}] + O(z^{-(n+3)}).$$

■

Seja Y_n a solução do problema de Riemann-Hilbert na circunferência unitária, então T_n pode ser dada em termos da matriz Y_n, ou seja,

$$T_n(z) = Y_{n+1}(z)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}Y_n^{-1}(z), \tag{4.12}$$

onde T_n é conhecida como a matriz de Szegő. Em [13], essa matriz é apresentada de forma similar.

Teorema 4.4. Seja T_n a matriz de Szegő dada por (4.12), então T_n pode ser calculada explicitamente como

$$T_n(z) = \begin{bmatrix} z + \overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} & \dfrac{\overline{\alpha}_n}{b_n} \\ \alpha_{n-1}b_n & 1\end{bmatrix}.$$

Demonstração: Como Y_n e Y_n^{-1} são holomorfas em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$, então T_n é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$. No entanto, T_n não tem salto em $\mathbb{T}$. De fato, temos

$$\begin{aligned}
(T_n)_+(z) &= (Y_{n+1})_+(z)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}(Y_n^{-1})_+(z) \\
&= (Y_{n+1})_-(z)\begin{bmatrix}1 & \nu(z)/z^{n+1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\nu(z)/z^n\\ 0 & 1\end{bmatrix}(Y_n^{-1})_-(z) \\
&= (Y_{n+1})_-(z)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}(Y_n^{-1})_-(z) \\
&= (T_n)_-(z), \quad z \in \mathbb{T}.
\end{aligned}$$

Logo, T_n é holomorfa em $\mathbb{C}$ e, portanto, é uma função inteira.

Além disso, sabendo que Y_n e Y_n^{-1} são dadas por (4.3) e (4.5), respectivamente. De (4.12), com $z \in \mathbb{T}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
T_n(z) &= Y_{n+1}(z)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}Y_n^{-1}(z)\\
&= \begin{bmatrix}\Phi_{n+1}(z) & G_{n+1}(z)\\ -b_n\Phi_n^*(z) & -b_nG_n^*(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b_{n-1}G_{n-1}^*(z) & -G_n(z)\\ b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & \Phi_n(z)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}b_{n-1}[z\Phi_{n-1}^*(z)G_{n+1}(z)-\Phi_{n+1}(z)G_{n-1}^*(z)] & -\Phi_{n+1}(z)G_n(z)+z\Phi_n(z)G_{n+1}(z)\\ b_nb_{n-1}[\Phi_n^*(z)G_{n-1}^*(z)-z\Phi_{n-1}^*(z)G_n^*(z)] & b_n[\Phi_n^*(z)G_n(z)-z\Phi_n(z)G_n^*(z)]\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Usando as Proposições 4.2 e 4.3, temos

$$
T_n(z) = \begin{bmatrix} z+\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} & \dfrac{\overline{\alpha}_n}{b_n}\\ \alpha_{n-1}b_n & 1\end{bmatrix} + O(z^{-1}), \quad z\to\infty.
$$

Uma extensão do Teorema de Liouville diz que se uma função f é inteira e $f(z) = O(z^n)$ com $z \to \infty$, então f é um polinômio de grau menor do que ou igual a n. Assim

$$
T_n(z) = \begin{bmatrix} z+\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1} & \dfrac{\overline{\alpha}_n}{b_n}\\ \alpha_{n-1}b_n & 1\end{bmatrix}.
$$

■

O próximo resultado mostra que, da definição de T_n, temos as seguintes relações de recorrência para Φ_n, Φ_n^*, G_n e G_n^*.

Corolário 4.5. Seja T_n a matriz de Szegő, dada por (4.12), então temos explicitamente cada uma das relações

i) $$\Phi_{n+1}(z) = (z+\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1})\Phi_n(z) - \frac{b_{n-1}}{b_n}\overline{\alpha}_n\Phi_{n-1}^*(z) \tag{4.13}$$

ii) $$-b_n\Phi_n^*(z) = \alpha_{n-1}b_n\Phi_n(z) - b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) \tag{4.14}$$

iii) $$zG_{n+1}(z) = (z+\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1})G_n(z) - \frac{b_{n-1}}{b_n}\overline{\alpha}_nG_{n-1}^*(z) \tag{4.15}$$

iv) $$-b_nzG_n^*(z) = \alpha_{n-1}b_nG_n(z) - b_{n-1}G_{n-1}^*(z). \tag{4.16}$$

Observe que fazendo algumas manipulações, as equações (4.13) e (4.14) são as relações de Szegő conhecidas, isto é, as equações (1.4) e (1.5) e as relações (4.15) e (4.16) são as relações de recorrência que obtivemos para G_n e G_n^* dadas em (4.6) e (4.7), respectivamente.

A seguir apresentamos um lema que será relevante para os cálculos das próximas seções.

Lema 4.6. Seja ν uma função peso definida na circunferência unitária e $\{\Phi_n\}_{n\geqslant 0}$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos associadas a ν. De G_n e G_{n-1}^* dados em (4.4), temos

$$
G_n(0) = \frac{1}{b_n} \quad \text{e} \quad G_{n-1}^*(0) = \frac{\alpha_{n-1}}{b_{n-1}}.
$$

Demonstração: Sabendo que

$$G_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_n(t)}{t-z}\frac{\nu(t)}{it^n}\,\mathrm{d}\,t,$$

então

$$\begin{aligned} G_n(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_n(t)}{t^{n+1}}\frac{\nu(t)}{i}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overline{t^n}\Phi_n(t)\frac{\nu(t)}{it}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \overline{\Phi_n(t)}\Phi_n(t)\frac{\nu(t)}{it}\,\mathrm{d}\,t. \end{aligned}$$

Portanto,

$$G_n(0) = \frac{1}{b_n}.$$

Para G^*_{n-1}, tem-se

$$G^*_{n-1}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi^*_{n-1}(t)}{t-z}\frac{\nu(t)}{it^n}\,\mathrm{d}\,t,$$

então

$$G^*_{n-1}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi^*_{n-1}(t)}{t^{n+1}}\frac{\nu(t)}{i}\,\mathrm{d}\,t.$$

Utilizando (1.5) e as propriedades de ortogonalidade, temos

$$\begin{aligned} G^*_{n-1}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{[\Phi^*_n(t) + \alpha_{n-1}t\Phi_{n-1}(t)]}{t^{n+1}}\frac{\nu(t)}{i}\,\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{\alpha_{n-1}}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\Phi_{n-1}(t)}{t^n}\frac{\nu(t)}{i}\,\mathrm{d}\,t. \end{aligned}$$

E então, obtemos

$$G^*_{n-1}(0) = \frac{\alpha_{n-1}}{b_{n-1}}.$$

■

Seja ν uma função peso definida na circunferência unitária. Definimos a matriz fundamental de salto constante, Z_n, em termos da matriz Y_n, isto é,

$$Z_n(z) = Y_n(z)C_n(z), \quad z \in \mathbb{T}, \tag{4.17}$$

onde

$$C_n(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z^{-n/2}}{[\nu(z)]^{-1/2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{z^{n/2}}{[\nu(z)]^{1/2}} \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.18}$$

A seguir temos um resultado envolvendo as matrizes Z_n e T_n que será muito útil para as próximas seções.

Proposição 4.7. Seja ν uma função peso definida na circunferência unitária, T_n a matriz de Szegő e Z_n a matriz definida em (4.17), então temos

$$\sqrt{z}Z_{n+1}(z) = T_n(z)Z_n(z), \quad z \in \mathbb{T}. \tag{4.19}$$

Demonstração: De (4.12) e (4.17),

$$\begin{aligned}
T_n(z)Z_n(z) &= Y_{n+1}(z)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}Y_n^{-1}(z)Y_n(z)C_n(z)\\
&= Y_{n+1}(z)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & z\end{bmatrix}C_n(z)\\
&= Y_{n+1}(z)\begin{bmatrix}\dfrac{z^{-n/2}}{[\nu(z)]^{-1/2}} & 0\\ 0 & \dfrac{z^{(n+2)/2}}{[\nu(z)]^{1/2}}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{z}Z_{n+1} &= \sqrt{z}Y_{n+1}(z)C_{n+1}(z)\\
&= Y_{n+1}(z)\begin{bmatrix}\dfrac{z^{-n/2}}{[\nu(z)]^{-1/2}} & 0\\ 0 & \dfrac{z^{(n+2)/2}}{[\nu(z)]^{1/2}}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, a equação (4.19) vale. ■

Consideramos então a matriz de estrutura, M_n, dada em termos da derivada logarítmica de Z_n, ou seja,

$$M_n(z) = Z_n'(z)Z_n^{-1}(z), \quad z \in \mathbb{T}. \tag{4.20}$$

Estudamos as propriedades analíticas de M_n para cada problema de Riemann-Hilbert associados as funções peso (1.21) e (1.25), para obter equações diferenciais de primeira e de segunda ordem satisfeitas pelos respectivos polinômios ortogonais. Nas próximas seções apresentamos os resultados desse estudo.

4.2 Caso Bessel modificado

Como apresentado na Introdução, um exemplo bem conhecido de função peso definida na circunferência unitária é a função peso de Bessel modificada (1.21), dada como

$$w(\theta) = \frac{1}{2\pi}e^{l\cos(\theta)} \quad \text{e} \quad \nu(z) = \frac{1}{2\pi}e^{l(z+z^{-1})/2}, \quad z = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

onde $l > 0$ é um parâmetro real. Neste caso, os coeficientes de Verblunsky são reais e dependem de l. Por simplicidade, consideramos aqui

$$\nu(z) = e^{l(z+z^{-1})/2}, \quad z \in \mathbb{T}.$$

O próximo resultado apresenta algumas propriedades satisfeitas pela matriz Z_n definida em (4.17) relacionada a função peso em questão.

Teorema 4.8. Seja $\nu(z) = e^{l(z+z^{-1})/2}$, então a matriz fundamental de salto constante, Z_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, satisfaz as seguintes propriedades

i) Z_n é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{T} \cup \{0\}\}$;

ii) Z_n apresenta salto constante, ou seja,

$$(Z_n)_+(t) = (Z_n)_-(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{T};$$

iii) Z_n tem o seguinte comportamento assintótico, quando $z \to \infty$,

$$\lim_{z\to\infty} Z_n(z) \begin{bmatrix} z^{-n/2}\nu^{-1/2} & 0 \\ 0 & z^{n/2}\nu^{1/2} \end{bmatrix} = I_2.$$

Demonstração:

i) Como C_n é uma matriz de funções inteiras em $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{T}\cup\{0\}\}$ e Y_n é uma matriz holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$, então Z_n é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{T}\cup\{0\}\}$.

ii) Para $t \in \mathbb{T}$, temos

$$\begin{aligned}
(Z_n)_+(t) &= (Y_n)_+(t) \begin{bmatrix} \dfrac{t^{-n/2}}{\nu^{-1/2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{t^{n/2}}{\nu^{1/2}} \end{bmatrix} \\
&= (Y_n)_-(t) \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\nu(t)}{t^n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{t^{-n/2}}{\nu^{-1/2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{t^{n/2}}{\nu^{1/2}} \end{bmatrix} \\
&= (Y_n)_-(t) \begin{bmatrix} \dfrac{t^{-n/2}}{\nu^{-1/2}} & \dfrac{\nu^{1/2}}{t^{n/2}} \\ 0 & \dfrac{t^{n/2}}{\nu^{1/2}} \end{bmatrix} \\
&= (Y_n)_-(t) \begin{bmatrix} \dfrac{t^{-n/2}}{\nu^{-1/2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{t^{n/2}}{\nu^{1/2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= (Z_n)_-(t) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

iii) Segue do comportamento assintótico da matriz Y_n.

■

4.2.1 Matriz de estrutura

Nos próximos resultados apresentamos propriedades da matriz de estrutura satisfeita pelos polinômios ortogonais com relação a função peso de Bessel modificada.

Teorema 4.9. Seja $\nu(z) = e^{l(z+z^{-1})/2}$, então a matriz de estrutura M_n dada em (4.20) é uma função holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{T}\cup\{0\}\}$ com um polo de ordem 2 em $z = 0$.

Demonstração: Sabemos que M_n é definida por

$$M_n(z) = Z_n'(z)Z_n^{-1}(z).$$

Então, por definição, M_n é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{T}\cup\{0\}\}$. Como Z_n tem salto constante em $\mathbb{T}\cup\{0\}$ e Z_n' tem o mesmo salto em $\mathbb{T}\cup\{0\}$, então M_n não tem salto em $\mathbb{T}\cup\{0\}$. Logo, M_n tem uma singularidade isolada em $z = 0$.

Observe que

$$M_n(z) = Z_n'(z)Z_n^{-1}(z) = Y_n'(z)Y_n^{-1}(z) + Y_n(z)C_n'(z)C_n^{-1}(z)Y_n^{-1}(z).$$

Multiplicando M_n por z^2, isto é,

$$z^2M_n(z) = z^2Y_n'(z)Y_n^{-1}(z) + z^2Y_n(z)C_n'(z)C_n^{-1}(z)Y_n^{-1}(z).$$

Assim, obtemos

$$\lim_{z\to 0} z^2M_n(z) = \begin{bmatrix} \frac{l}{4}[b_{n-1}b_n^{-1} - \alpha_{n-1}^2] & -\frac{l}{2}b_n^{-1}\alpha_{n-1} \\ -\frac{l}{2}b_{n-1}\alpha_{n-1} & -\frac{l}{4}[b_{n-1}b_n^{-1} - \alpha_{n-1}^2] \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}_2,$$

onde $\mathbf{0}_2$ é a matriz nula de ordem 2×2. Portanto, M_n tem uma singularidade isolada de ordem 2 em $z = 0$. ■

Pelo resultado anterior, mostramos que M_n tem um polo de ordem 2 em $z = 0$. Chamando

$$\tilde{M}_n = z^2M_n,$$

temos que $\tilde{M}_n$ é uma função holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. O próximo teorema apresenta tal matriz.

Teorema 4.10. Sejam $\nu(z) = e^{l(z+z^{-1})/2}$ e M_n a matriz definida em (4.20). Então $\tilde{M}_n$ é dada por

$$\tilde{M}_n(z) = \begin{bmatrix} \frac{l}{4}z^2 + \frac{n}{2}z + \frac{l}{4}[b_{n-1}b_n^{-1} - \alpha_{n-1}^2] & -\frac{l}{2}b_n^{-1}[\alpha_{n-1} - \alpha_n z] \\ -\frac{l}{2}b_{n-1}[\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}z] & -\frac{l}{4}z^2 - \frac{n}{2}z - \frac{l}{4}[b_{n-1}b_n^{-1} - \alpha_{n-1}^2] \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Demonstração: Sabemos que

$$\tilde{M}_n(z) = z^2Y_n'(z)Y_n^{-1}(z) + z^2Y_n(z)C_n'(z)C_n^{-1}(z)Y_n^{-1}(z).$$

De (4.3), (4.5) e (4.18), então

$$\tilde{M}_n = z^2 \begin{bmatrix} \Phi_n'(z) & G_n'(z) \\ -b_{n-1}(\Phi_{n-1}^*)'(z) & -b_{n-1}(G_{n-1}^*)'(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) & -G_n(z) \\ b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & \Phi_n(z) \end{bmatrix}$$

$$+ z^2 \begin{bmatrix} \Phi_n(z) & G_n(z) \\ -b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left[l\left(1-\frac{1}{z^2}\right) - \frac{2n}{z}\right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\left[\frac{2n}{z} - l\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\right] \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) & -G_n(z) \\ b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & \Phi_n(z) \end{bmatrix}$$

$$= z^2 \begin{bmatrix} b_{n-1}[\Phi_{n-1}^*(z)G_n'(z) - G_{n-1}^*(z)\Phi_n'(z)] & -\Phi_n'(z)G_n(z) + G_n'(z)\Phi_n(z) \\ b_{n-1}^2[G_{n-1}^*(z)(\Phi_{n-1}^*)'(z) - \Phi_{n-1}^*(z)(G_{n-1}^*)'(z)] & b_{n-1}[G_n(\Phi_{n-1}^*)'(z) - \Phi_n(z)(G_{n-1}^*)'(z)] \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \Phi_n(z) & G_n(z) \\ -b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}[l(z^2-1) - 2nz] & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}[2nz - l(z^2-1)] \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) & -G_n(z) \\ b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & \Phi_n(z) \end{bmatrix}.$$

Calculando a multiplicação entre as matrizes e usando as Proposições 4.2 e 4.3, obtemos o desenvolvimento assintótico da Matriz $\tilde{M}_n$ quando $z \to \infty$, isto é,

$$\tilde{M}_n(z) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{l}{4}z^2 + \frac{n}{2}z - \frac{1}{4}(b_{n-1}b_n^{-1}\alpha_n\alpha_{n-2} + l + 4\gamma_n) & b_n^{-1}\frac{l}{2}\alpha_n z + b_n^{-1}\alpha_n[n+1+\frac{l}{2}(\gamma_n - 1)] + \frac{l}{2}b_{n+1}^{-1}\alpha_{n-1} \\ b_{n-1}\frac{l}{2}\alpha_{n-2}z + b_{n-1}[n-1-\frac{l}{2}\gamma_n)\alpha_{n-2} + \overline{\beta}_{n-1}] & -\frac{l}{4}z^2 - \frac{n}{2}z - \frac{1}{4}(b_{n-1}b_n^{-1}\alpha_n\alpha_{n-2} - l - 4\gamma_n) \end{bmatrix}$$

$$+ O(z^{-1}), \quad z \to \infty. \quad (4.22)$$

Uma extensão do Teorema de Liouville diz que se uma função f é inteira e $f(z) = O(z^n)$ com $z \to \infty$, então f é um polinômio de grau menor do que ou igual a n. Portanto, como $\tilde{M}_n$ é inteira e é dada por (4.22), pelo Teorema de Liouville temos

$$\tilde{M}_n(z) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{l}{4}z^2 + \frac{n}{2}z - \frac{1}{4}(b_{n-1}b_n^{-1}\alpha_n\alpha_{n-2} + l + 4\gamma_n) & b_n^{-1}\frac{l}{2}\alpha_n z + b_n^{-1}\alpha_n[n+1+\frac{l}{2}(\gamma_n - 1)] + \frac{l}{2}b_{n+1}^{-1}\alpha_{n-1} \\ b_{n-1}\frac{l}{2}\alpha_{n-2}z + b_{n-1}[n-1-\frac{l}{2}\gamma_n)\alpha_{n-2} + \overline{\beta}_{n-1}] & -\frac{l}{4}z^2 - \frac{n}{2}z - \frac{1}{4}(b_{n-1}b_n^{-1}\alpha_n\alpha_{n-2} - l - 4\gamma_n) \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Observe que $\tilde{M}_n$ em (4.23) é uma função polinomial de grau 2, ou seja, podemos reescrevê-la como

$$\tilde{M}_n(z) = \tilde{F}_2 z^2 + \tilde{F}_1 z + \tilde{F}_0,$$

onde $\tilde{F}_2$, $\tilde{F}_1$, e $\tilde{F}_0$ são constantes e

$$\lim_{z\to 0} \tilde{M}_n(z) = \tilde{F}_0.$$

Logo, usando o Lema 4.6, encontramos

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} \frac{l}{4}[b_{n-1}b_n^{-1} - \alpha_{n-1}^2] & -\frac{l}{2}b_n^{-1}\alpha_{n-1} \\ -\frac{l}{2}b_{n-1}\alpha_{n-1} & -\frac{l}{4}[b_{n-1}b_n^{-1} - \alpha_{n-1}^2] \end{bmatrix}.$$

Além disso, de (4.23), temos

$$\tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & \frac{l}{2}b_n^{-1}\alpha_n \\ \frac{l}{2}b_{n-1}\alpha_{n-2} & -\frac{n}{2} \end{bmatrix}$$

e

$$\tilde{F}_2 = \begin{bmatrix} \frac{l}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{l}{4} \end{bmatrix}.$$

Portanto, quando $z \to 0$, a matriz $\tilde{M}_n$ torna-se

$$\tilde{M}_n(z) = \begin{bmatrix} \frac{l}{4}z^2 + \frac{n}{2}z + \frac{l}{4}[b_{n-1}b_n^{-1} - \alpha_{n-1}^2] & -\frac{l}{2}b_n^{-1}[\alpha_{n-1} - \alpha_n z] \\ -\frac{l}{2}b_{n-1}[\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}z] & -\frac{l}{4}z^2 - \frac{n}{2}z - \frac{l}{4}[b_{n-1}b_n^{-1} - \alpha_{n-1}^2] \end{bmatrix}.$$

■

4.2.2 Fórmula de curvatura nula

Aqui apresentamos duas equações fundamentais associadas aos polinômios de Bessel modificados. O próximo resultado apresenta a primeira equação fundamental, também conhecida como fórmula de curvatura nula. A fórmula de curvatura nula é uma ferramenta importante para encontrarmos equações de diferenças não lineares satisfeitas pelos coeficientes de Verblunsky.

Proposição 4.11. Sejam $\nu(z) = e^{l(z+1/z)/2}$ e $\tilde{M}_n$ a matriz definida em (4.21), então a fórmula de curvatura nula relacionada a esta função peso é dada por

$$z^2 T_n' + T_n\tilde{M}_n - \frac{z}{2}T_n - \tilde{M}_{n+1}T_n = \mathbf{0}_2. \tag{4.24}$$

Demonstração: Pela Proposição 4.7 temos $\sqrt{z}Z_{n+1} = T_n Z_n$, então calculando a derivada em z de ambos os lados da equação

$$(\sqrt{z})' Z_{n+1} + \sqrt{z} Z_{n+1}' = T_n' Z_n + T_n Z_n'.$$

Multiplicando z^2, temos

$$\frac{z^2}{2}\frac{Z_{n+1}}{\sqrt{z}} + z^2\sqrt{z}Z'_{n+1} = z^2T'_nZ_n + z^2T_nZ'_n.$$

Como $z^2Z'_n = \tilde{M}_nZ_n$, então

$$\frac{1}{2}z^{3/2}Z_{n+1} + \sqrt{z}\tilde{M}_{n+1}Z_{n+1} = z^2T'_nZ_n + T_n\tilde{M}_nZ_n.$$

Usando novamente $\sqrt{z}Z_{n+1} = T_nZ_n$, obtemos

$$\frac{z}{2}T_nZ_n + \tilde{M}_{n+1}T_nZ_n = z^2T'_nZ_n + T_n\tilde{M}_nZ_n.$$

Logo,

$$\left\{z^2T'_n + T_n\tilde{M}_n - \frac{z}{2}T_n - \tilde{M}_{n+1}T_n\right\}Z_n = \mathbf{0}_2.$$

Portanto, como Z_n é invertível, a fórmula de curvatura nula é

$$z^2T'_n + T_n\tilde{M}_n - \frac{z}{2}T_n - \tilde{M}_{n+1}T_n = \mathbf{0}_2.$$

■

Corolário 4.12. Sejam T_n e $\tilde{M}_n$ dadas por (4.12) e (4.21), respectivamente, então pela fórmula de curvatura nula (4.24), temos a equação

$$\alpha_n(l) + \alpha_{n-2}(l) = -\frac{2n}{l}\frac{\alpha_{n-1}(l)}{1-\alpha_{n-1}^2(l)}, \quad n \geqslant 2, \tag{4.25}$$

com l parâmetro real.

Como já mencionado no Capítulo 1, a equação (4.25) corresponde a equação discreta de Painlevé ($\mathrm{dP_{II}}$) (1.27).

A proposição a seguir apresenta a segunda equação fundamental. Esta equação, também chamada de segunda fórmula de curvatura nula, é importante para a determinação explícita do resíduo em 0 das equações diferenciais de segunda ordem.

Proposição 4.13. Nas mesmas condições da Proposição 4.11, temos a segunda equação fundamental dada por

$$\tilde{M}_{n+1}\left\{z^2T'_n - \frac{z}{2}T_n\right\} + \left\{z^2T'_n - \frac{z}{2}T_n\right\}\tilde{M}_n = \tilde{M}_{n+1}^2T_n - T_n\tilde{M}_n^2.$$

Demonstração: De (4.24), temos

$$z^2T'_n + T_n\tilde{M}_n - \frac{z}{2}T_n - \tilde{M}_{n+1}T_n = \mathbf{0}_2,$$

isto é,

$$z^2T'_n - \frac{z}{2}T_n = \tilde{M}_{n+1}T_n - T_n\tilde{M}_n.$$

Multiplicando a última equação por $\tilde{M}_{n+1}$ no lado esquerdo

$$\tilde{M}_{n+1}z^2T_n' - \tilde{M}_{n+1}\frac{z}{2}T_n = \tilde{M}_{n+1}^2T_n - \tilde{M}_{n+1}T_n\tilde{M}_n \tag{4.26}$$

e multiplicando por $\tilde{M}_n$ no lado direito, obtemos

$$z^2T_n'\tilde{M}_n - \tilde{M}_{n+1}\frac{z}{2}T_n\tilde{M}_n = \tilde{M}_{n+1}^2T_n\tilde{M}_n - \tilde{M}_{n+1}T_n\tilde{M}_n^2. \tag{4.27}$$

Somando (4.26) e (4.27), temos a segunda equação fundamental

$$\tilde{M}_{n+1}\left\{z^2T_n' - \frac{z}{2}T_n\right\} + \left\{z^2T_n' - \frac{z}{2}T_n\right\}\tilde{M}_n = \tilde{M}_{n+1}^2T_n - T_n\tilde{M}_n^2.$$

■

4.2.3 Equações diferenciais de primeira e de segunda ordem

Nesta subseção apresentamos as equações diferenciais de primeira e de segunda ordem satisfeitas pelos polinômios com relação a função peso (1.21).

Equação diferencial de primeira ordem

No resultado abaixo apresentamos o operador diferencial de primeira ordem para Y_n.

Proposição 4.14. Sejam ν a função peso (1.21) e a matriz de estrutura, M_n, associada a esta função peso, então o operador diferencial de primeira ordem é dado por

$$z^2Y_n' = \tilde{M}_nY_n - z^2Y_nC_n'C_n^{-1}. \tag{4.28}$$

Demonstração: Sabemos que M_n é definida por

$$M_n = Z_n'Z_n^{-1},$$

onde $Z_n = Y_nC_n$. Logo, temos

$$\begin{aligned} M_n &= [Y_n'C_n + Y_nC_n']C_n^{-1}Y_n^{-1} \\ &= Y_n'Y_n^{-1} + Y_nC_n'C_n^{-1}Y_n^{-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando z^2Y_n em ambos os lados da equação e sabendo que $z^2M_n = \tilde{M}_n$, então

$$\tilde{M}_nY_n = z^2Y_n' + z^2Y_nC_n'C_n^{-1}.$$

E, assim, obtemos o operador diferencial de primeira ordem

$$z^2Y_n' = \tilde{M}_nY_n - z^2Y_nC_n'C_n^{-1}.$$

■

Assim, utilizando o operador diferencial (4.28), encontramos equações diferenciais de primeira ordem para Φ_n, G_n, Φ_{n-1}^* e G_{n-1}^*.

Corolário 4.15. Nas condições da Proposição 4.14, encontramos as seguintes equações diferenciais de primeira ordem para Φ_n, G_n, Φ^*_{n-1} e G^*_{n-1}, respectivamente, isto é,

$$\textbf{i)}\quad z^2\Phi'_n(z) = \left\{nz + \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\alpha^2_{n-1}\right\}\Phi_n(z) + \frac{l}{2}b_{n-1}b_n^{-1}[\alpha_{n-1} - \alpha_n z]\Phi^*_{n-1}(z), \tag{4.29}$$

$$\textbf{ii)}\quad z^2G'_n(z) = \left\{\frac{l}{2}z^2 - \frac{l}{2}\alpha^2_{n-1}\right\}G_n(z) + \frac{l}{2}b_{n-1}b_n^{-1}[\alpha_{n-1} - \alpha_n z]G^*_{n-1}(z),$$

$$\textbf{iii)}\quad z^2[\Phi^*_{n-1}]'(z) = \frac{l}{2}[\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}z]\Phi_n(z) + \left\{ -\frac{l}{2}z^2 + \frac{l}{2}\alpha^2_{n-1}\right\}\Phi^*_{n-1}(z),$$

$$\textbf{iv)}\quad z^2[G^*_{n-1}]'(z) = \frac{l}{2}[\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}z]G_n(z) + \left\{ -nz - \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\alpha^2_{n-1}\right\}G^*_{n-1}(z).$$

A equação (4.29) é equivalente a relação de estrutura (3.37) apresentada no Capítulo 3.

Equação diferencial de segunda ordem

Apresentamos abaixo o operador diferencial de segunda ordem para Y_n.

Proposição 4.16. Seja ν a função de Bessel modificada (1.21) e $\tilde{M}_n$ a matriz dada por (4.21). O operador diferencial de segunda ordem é

$$z^2Y''_n + 2Y'_n[z^2C'_nC_n^{-1} + z\,I_2] + Y_n[z^2C''_nC_n^{-1} + 2zC'_nC_n^{-1}] = \left[\tilde{M}'_n + \frac{\tilde{M}^2_n}{z^2}\right]Y_n. \tag{4.30}$$

Demonstração: Temos $z^2Z'_n = \tilde{M}_nZ_n$, então derivando a equação com relação a z, obtemos

$$2zZ'_n + z^2Z''_n = \tilde{M}'_nZ_n + \tilde{M}_nZ'_n.$$

Usando $z^2Z'_n = \tilde{M}_nZ_n$, então

$$z^2Z''_n = \tilde{M}'_nZ_n + \tilde{M}_n\frac{\tilde{M}_nZ_n}{z^2} - 2z\frac{\tilde{M}_nZ_n}{z^2}.$$

Assim, colocando Z_n em evidência, temos

$$z^2Z''_n = \left\{\tilde{M}'_n + \frac{\tilde{M}^2_n}{z^2} - 2\frac{\tilde{M}_n}{z}\right\}Z_n.$$

Multiplicando a equação por Z_n^{-1}, encontramos

$$z^2Z''_nZ_n^{-1} = \left\{\tilde{M}'_n + \frac{\tilde{M}^2_n}{z^2} - \frac{2\tilde{M}_n}{z}\right\}. \tag{4.31}$$

Por outro lado, temos $Z_n = Y_nC_n$, assim

$$Z''_n = Y''_nC_n + 2Y'_nC'_n + Y_nC''_n.$$

Logo,

$$z^2Z''_nZ_n^{-1} = z^2Y''_nY_n^{-1} + 2Y'_nz^2C'_nC_n^{-1}Y_n^{-1} + Y_nz^2C''_nC_n^{-1}Y_n^{-1}.$$

Multiplicando Y_n na última equação, obtemos

$$z^2 Z_n'' Z_n^{-1} Y_n = z^2 Y_n'' + 2Y_n' z^2 C_n' C_n^{-1} + Y_n z^2 C_n'' C_n^{-1}.$$

E então, usando (4.31), segue

$$z^2 Y_n'' + 2Y_n' z^2 C_n' C_n^{-1} + Y_n z^2 C_n'' C_n^{-1} = \left[\tilde{M}_n' + \frac{\tilde{M}_n^2}{z^2} - \frac{2\tilde{M}_n}{z}\right] Y_n.$$

Note que

$$2\frac{\tilde{M}_n}{z} Y_n = 2zY_n' + 2zY_n C_n' C_n^{-1}.$$

Portanto, o operador diferencial de segunda ordem é dado por

$$z^2 Y_n'' + 2Y_n'[z^2 C_n' C_n^{-1} + z\, I_2] + Y_n[z^2 C_n'' C_n^{-1} + 2z C_n' C_n^{-1}] = \left[\tilde{M}_n' + \frac{\tilde{M}_n^2}{z^2}\right] Y_n.$$

■

Como consequência da Proposição 4.16, utilizando o operador diferencial (4.30) e a Proposição 4.13, obtemos as equações diferenciais de segunda ordem para Φ_n, G_n, Φ_{n-1}^* e G_{n-1}^*.

Corolário 4.17. Nas condições da Proposição 4.16, temos equações diferenciais de segunda ordem para Φ_n, G_n, Φ_{n-1}^* e G_{n-1}^*, respectivamente, isto é,

i) $$z^2 \Phi_n''(z) + \left[\frac{l}{2} z^2 + (2-n)z - \frac{l}{2}\right] \Phi_n'(z) + \left[-\frac{ln}{2} z - \frac{l^2}{4} - n - \frac{l^2}{4}[(1-\alpha_{n-1}^2)\alpha_n \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}^2]\right] \Phi_n(z) = -\frac{l}{2}(1-\alpha_{n-1}^2)\alpha_n \Phi_{n-1}^*(z),$$

ii) $$z^2 G_n''(z) + \left[-\frac{lz^2}{2} + (n+2)\, z + \frac{l}{2}\right] G_n'(z) - \left[lz + \frac{ln}{2} + \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}[(1-\alpha_{n-1}^2)\alpha_n \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}^2]\right] G_n(z) = -\frac{l}{2}(1-\alpha_{n-1}^2)\alpha_n G_{n-1}^*(z),$$

iii) $$z^2 [\Phi_{n-1}^*]''(z) + \left[\frac{lz^2}{2} + (2-n)\, z - \frac{l}{2}\right] [\Phi_{n-1}^*]'(z) - \left[l\Big(\frac{n}{2} - 1\Big) z + \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}[(1-\alpha_{n-1}^2)\alpha_n \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}^2]\right] \Phi_{n-1}^*(z) = -\frac{l}{2}\alpha_{n-2}\Phi_n(z),$$

iv) $$z^2 [G_{n-1}^*]''(z) + \left[-\frac{lz^2}{2} + (n+2)\, z + \frac{l}{2}\right] [G_{n-1}^*]'(z) - \left[\frac{ln}{2} z + \frac{l^2}{4} - n + \frac{l^2}{4}[(1-\alpha_{n-1}^2)\alpha_n \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}^2]\right] G_{n-1}^*(z) = -\frac{l}{2}\alpha_{n-2} G_n(z).$$

4.3 Caso Jacobi modificado

Para este segundo exemplo, consideramos a função peso semiclássica (1.25), estudada em [50],

$$w(\theta) = \tau(b) e^{-\eta\theta} [\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

onde $\eta \in \mathbb{R}$, $\lambda > -1/2$, $b = \lambda + i\eta$ e

$$\tau(b) = \frac{e^{\pi\eta}2^{b+\bar{b}}|\Gamma(b+1)|^2}{2\pi\Gamma(b+\bar{b}+1)}.$$

Como $z = e^{i\theta}$, podemos reescrevê-la como

$$\nu(z) = \frac{\tau(b)}{2^{b+\bar{b}}}(-z)^{-\bar{b}}(1-z)^{b+\bar{b}}, \quad z \in \mathbb{T}.$$

Por simplicidade, consideramos aqui a função peso sem a constante, isto é,

$$\nu(z) = (-z)^{-\bar{b}}(1-z)^{b+\bar{b}}, \quad z \in \mathbb{T}.$$

O próximo resultado apresenta algumas propriedades satisfeitas pela matriz Z_n relacionada a função peso em questão.

Teorema 4.18. Seja $\nu(z) = (-z)^{-\bar{b}}(1-z)^{b+\bar{b}}$ definida na circunferência unitária, então a matriz fundamental de salto constante, Z_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, satisfaz as seguintes propriedades

i) Z_n é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{T} \cup \{0,1\}\}$;

ii) Z_n apresenta salto constante, ou seja,

$$(Z_n)_+(t) = (Z_n)_-(t)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{T};$$

iii) Z_n tem o seguinte comportamento assintótico, quando $z \to \infty$,

$$\lim_{z\to\infty} Z_n(z)\begin{bmatrix} z^{-n/2}\nu^{-1/2} & 0 \\ 0 & z^{n/2}\nu^{1/2} \end{bmatrix} = I_2.$$

Demonstração:

i) Como C_n é uma matriz de funções inteiras em $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{T} \cup \{0,1\}\}$ e Y_n é uma matriz holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$, então Z_n é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{T} \cup \{0,1\}\}$.

ii) Análogo ao que foi feito na demonstração do caso **ii)** do Teorema 4.8.

iii) Segue do comportamento assintótico da matriz Y_n.

■

4.3.1 Matriz de estrutura

Assim como no caso anterior, o próximo resultado apresenta propriedades satisfeitas pela matriz de estrutura dos polinômios ortogonais com relação a função peso em questão.

Teorema 4.19. Seja $\nu(z) = (-z)^{-\bar{b}}(1-z)^{b+\bar{b}}$, então a matriz de estrutura M_n é uma função holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{T} \cup \{0,1\}\}$ com dois polos simples em $z = 0$ e em $z = 1$.

Demonstração: Por (4.17), sabemos que M_n é definida por

$$M_n(z) = Z_n'(z)Z_n^{-1}(z).$$

Então, por definição, M_n é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{\mathbb{T}\cup\{0,1\}\}$. Como Z_n e Z_n' tem o mesmo salto constante em $\mathbb{T}\cup\{0,1\}$, então M_n não tem salto em $\mathbb{T}\cup\{0,1\}$. Logo, M_n tem singularidades em $z=0$ e $z=1$. Multiplicando M_n por $z(1-z)$ e lembrando que Z_n é dada por (4.17), então obtemos

$$z(1-z)M_n = z(1-z)Y_n'Y_n^{-1} + z(1-z)Y_nC'C^{-1}Y_n^{-1}.$$

Note que

$$\lim_{z\to 0} z(1-z)M_n(z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\bar{b}+n)(2|\alpha_{n-1}|^2-1) & -b_n^{-1}(\bar{b}+n)\overline{\alpha}_{n-1} \\ -b_{n-1}(\bar{b}+n)\alpha_{n-1} & \frac{1}{2}(\bar{b}+n)(2|\alpha_{n-1}|^2-1) \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}_2$$

e

$$\lim_{z\to 1} z(1-z)M_n(z) = \begin{bmatrix} -|\alpha_{n-1}|^2(\bar{b}+n) - i\eta & -b_n^{-1}\left(\bar{b}+n\right)\overline{\alpha}_{n-1} \\ -b_{n-1}\left(\bar{b}+n\right)\alpha_{n-1} & |\alpha_{n-1}|^2\left(\bar{b}+n\right) + i\eta \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}_2.$$

Portanto, M_n tem dois polos simples em $z=0$ e em $z=1$. ■

Pelo resultado anterior, mostramos que M_n tem dois polos simples em $z=0$ e em $z=1$. Denotando

$$\tilde{M}_n = z(1-z)M_n,$$

temos então que $\tilde{M}_n$ é uma função holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. O próximo teorema apresenta tal matriz.

Teorema 4.20. Sejam $\nu(z) = (-z)^{-\bar{b}}(1-z)^{b+\bar{b}}$ e M_n a matriz definida em (4.20). Então $\tilde{M}_n$ é dada por

$$\tilde{M}_n(z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left[(b+n)z + (\bar{b}+n)\left(2|\alpha_{n-1}|^2-1\right)\right] & -b_n^{-1}(\bar{b}+n)\overline{\alpha}_{n-1} \\ -b_{n-1}(\bar{b}+n)\alpha_{n-1} & \frac{1}{2}\left[(b+n)z + (\bar{b}+n)\left(2|\alpha_{n-1}|^2-1\right)\right] \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Demonstração: Sabemos que

$$z(1-z)M_n = z(1-z)Y_n'Y_n^{-1} + z(1-z)Y_nC'C^{-1}Y_n^{-1}.$$

De (4.3), (4.5) e (4.18), então

$$\tilde{M}_n(z) = z(1-z)\begin{bmatrix} \Phi_n'(z) & G_n'(z) \\ -b_{n-1}(\Phi_{n-1}^*)'(z) & -b_{n-1}(G_{n-1}^*)'(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) & -G_n(z) \\ b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & \Phi_n(z) \end{bmatrix}$$

$$+ z(1-z)\begin{bmatrix} \Phi_n(z) & G_n(z) \\ -b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left[\frac{(b-n)z+(\overline{b}+n)}{z(1-z)}\right] & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left[\frac{(b-n)z+(\overline{b}+n)}{z(1-z)}\right] \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) & -G_n(z) \\ b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & \Phi_n(z) \end{bmatrix}$$

$$= z(1-z)\begin{bmatrix} b_{n-1}[\Phi_{n-1}^*(z)G_n'(z) - G_{n-1}^*(z)\Phi_n'(z)] & -\Phi_n'(z)G_n(z) + G_n'(z)\Phi_n(z) \\ b_{n-1}^2[G_{n-1}^*(z)(\Phi_{n-1}^*)'(z) - \Phi_{n-1}^*(z)(G_{n-1}^*)'(z)] & b_{n-1}[G_n(\Phi_{n-1}^*)'(z) - \Phi_n(z)(G_{n-1}^*)'(z)] \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \Phi_n(z) & G_n(z) \\ -b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[(b-n)z+(\overline{b}+n)] & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}[(b-n)z+(\overline{b}+n)] \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} -b_{n-1}G_{n-1}^*(z) & -G_n(z) \\ b_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z) & \Phi_n(z) \end{bmatrix}.$$

Calculando a multiplicação entre as matrizes e usando as Proposições 4.2 e 4.3 obtemos o desenvolvimento assintótico da matriz $\tilde{M}_n$ quando $z \to \infty$, isto é,

$$\tilde{M}_n(z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[(b+n)z+(\overline{b}-n)] + \gamma_n & -(b+n+1)b_n^{-1}\overline{\alpha}_n \\ -(b+n-1)b_{n-1}\alpha_{n-2} & \frac{1}{2}[(b+n)z+(\overline{b}-n)] - \gamma_n \end{bmatrix} + O(z^{-1}), \quad z \to \infty. \tag{4.33}$$

Assim como feito no exemplo anterior, pelo Teorema de Liouville, como $\tilde{M}_n$ é inteira é dada por (4.33), então

$$\tilde{M}_n(z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[(b+n)z+(\overline{b}-n)] + \gamma_n & -(b+n+1)b_n^{-1}\overline{\alpha}_n \\ -(b+n-1)b_{n-1}\alpha_{n-2} & \frac{1}{2}[(b+n)z+(\overline{b}-n)] - \gamma_n \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

Note que, $\tilde{M}_n(z) = \tilde{F}_1 z + \tilde{F}_0$, onde $\tilde{F}_1$ e $\tilde{F}_0$ são constantes e

$$\lim_{z\to 0} z(1-z)M_n = \tilde{F}_0.$$

Logo, usando o Lema 4.6, encontramos

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\overline{b}+n)[2|\alpha_{n-1}|^2 - 1] & -b_n^{-1}(\overline{b}+n)\overline{\alpha}_{n-1} \\ -b_{n-1}(\overline{b}+n)\alpha_{n-1} & \frac{1}{2}(\overline{b}+n)[2|\alpha_{n-1}|^2 - 1] \end{bmatrix}.$$

Além disso, de $\tilde{M}_n$ em (4.34), temos

$$\tilde{F}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(b+n) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\bar{b}+n) \end{bmatrix}.$$

Portanto, quando $z \to 0$, $\tilde{M}_n$ torna-se

$$\tilde{M}_n(z) =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\left[(b+n)z + (\bar{b}+n)\Big(2|\alpha_{n-1}|^2 - 1\Big)\right] & -b_n^{-1}(\bar{b}+n)\overline{\alpha}_{n-1} \\ -b_{n-1}(\bar{b}+n)\alpha_{n-1} & \frac{1}{2}\left[(b+n)z + (\bar{b}+n)\Big(2|\alpha_{n-1}|^2 - 1\Big)\right] \end{bmatrix}.$$

■

Observação 4.21. Note que, comparando os elementos $[1,2]$ (primeira linha e segunda coluna) da matriz (4.32) e da matriz (4.34), temos

$$\alpha_n = \frac{b+n}{\bar{b}+n+1}\alpha_{n-1},$$

que é equivalente a fórmula para os coeficientes de Verblunsky dada por (3.13) apresentada em [50].

4.3.2 Fórmula de curvatura nula

A seguir apresentamos a fórmula de curvatura nula associada a este caso.

Proposição 4.22. Sejam a função peso $\nu(z) = (-z)^{-\bar{b}}(1-z)^{b+\bar{b}}$ e a matriz (4.32). A fórmula de curvatura nula é dada por

$$z(1-z)T_n' + T_n\tilde{M}_n - \frac{1-z}{2}T_n - \tilde{M}_{n+1}T_n = \mathbf{0}_2. \tag{4.35}$$

Demonstração: Pela Proposição 4.7 temos $\sqrt{z}Z_{n+1} = T_nZ_n$. Derivando a equação com relação a z, temos

$$\frac{Z_{n+1}}{2\sqrt{z}} + \sqrt{z}Z_{n+1}' = T_n'Z_n + T_nZ_n'.$$

Como $z(1-z)Z_n' = \tilde{M}_nZ_n$, então

$$(1-z)z\frac{Z_{n+1}}{2\sqrt{z}} + z(1-z)\sqrt{z}Z_{n+1}' = z(1-z)T_n'Z_n + z(1-z)T_nZ_n'.$$

E novamente, utilizando $\sqrt{z}Z_{n+1} = T_nZ_n$ e colocando Z_n em evidência, obtemos

$$\left[\frac{(1-z)}{2}T_n + \tilde{M}_{n+1}T_n - z(1-z)T_n' - T_n\tilde{M}_n\right]Z_n = \mathbf{0}_2.$$

Como Z_n é invertível, então

$$\frac{(1-z)}{2}T_n + \tilde{M}_{n+1}T_n - z(1-z)T_n' - T_n\tilde{M}_n = \mathbf{0}_2.$$

■

Como consequência da fórmula de curvatura nula (4.35) temos o seguinte resultado.

Corolário 4.23. Sob as condições da Proposição 4.22, obtemos as equações

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \alpha_{n-1}\overline{\alpha}_n, \tag{4.36}$$

$$(\overline{b}+n+2)\alpha_{n+1} = [n+b+1-(\overline{b}+n)\overline{\alpha}_{n-1}\alpha_n]\frac{\alpha_n}{1-|\alpha_n|^2},$$

$$(b+n-1)\alpha_{n-2} = [\overline{b}+n-(b+n+1)\alpha_{n-1}\overline{\alpha}_n]\frac{\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2},$$

$$\overline{\alpha}_n(\alpha_{n-1}+\alpha_n) = (\overline{b}+n)(|\alpha_{n-1}|^2-|\alpha_n|^2). \tag{4.37}$$

A equação (4.36) é consequência da equação (1.7) apresentada no Capítulo 1 e a equação (4.37) é exatamente a equação (3.34) apresentada no Capítulo 3.

A proposição a seguir apresenta a segunda fórmula de curvatura nula que é importante para a determinação explícita dos resíduos em 0 e em 1 das equações diferenciais de segunda ordem.

Proposição 4.24. Nas mesmas condições da Proposição 4.22, temos a equação dada por

$$\tilde{M}_{n+1}\left\{z(1-z)T_n' - \frac{(1-z)}{2}T_n\right\} + \left\{z(1-z)T_n' - \frac{(1-z)}{2}T_n\right\}\tilde{M}_n = \tilde{M}_{n+1}^2T_n - T_n\tilde{M}_n^2.$$

Demonstração: De (4.35), temos

$$z(1-z)T_n' + T_n\tilde{M}_n - \frac{1-z}{2}T_n - \tilde{M}_{n+1}T_n = \mathbf{0}_2,$$

isto é,

$$z(1-z)T_n' - \frac{1-z}{2}T_n = \tilde{M}_{n+1}T_n - T_n\tilde{M}_n.$$

Multiplicando a última equação por $\tilde{M}_{n+1}$ no lado esquerdo, temos

$$\tilde{M}_{n+1}z(1-z)T_n' - \tilde{M}_{n+1}\frac{1-z}{2}T_n = \tilde{M}_{n+1}^2T_n - \tilde{M}_{n+1}T_n\tilde{M}_n \tag{4.38}$$

e multiplicando por $\tilde{M}_n$ no lado direito, obtemos

$$z(1-z)T_n'\tilde{M}_n - \frac{1-z}{2}T_n\tilde{M}_n = \tilde{M}_{n+1}T_n\tilde{M}_n - T_n\tilde{M}_n^2. \tag{4.39}$$

Somando (4.38) e (4.39), temos a segunda equação fundamental

$$\tilde{M}_{n+1}\left\{z(1-z)T_n' - \frac{1-z}{2}T_n\right\} + \left\{z(1-z)T_n' - \frac{1-z}{2}T_n\right\}\tilde{M}_n = \tilde{M}_{n+1}^2T_n - T_n\tilde{M}_n^2.$$

■

4.3.3 Equações diferenciais de primeira e de segunda ordem

Nesta subseção apresentamos as equações diferenciais de primeira e de segunda ordem satisfeitas pelos polinômios ortogonais com relação a função peso (1.25).

Equação diferencial de primeira ordem

No resultado abaixo apresentamos o operador diferencial de primeira ordem para Y_n.

Proposição 4.25. Sejam ν a função peso (1.25) e a matriz de estrutura, M_n, associada a esta função peso, então o operador diferencial de primeira ordem é dado por

$$z(1-z)Y_n' = \tilde{M}_n Y_n - z(1-z)Y_n C_n' C_n^{-1}. \tag{4.40}$$

Demonstração: Como definimos

$$M_n = Z_n' Z_n^{-1},$$

onde $Z_n = Y_n C_n$. Logo,

$$\begin{aligned} M_n &= [Y_n' C_n + Y_n C_n'] C_n^{-1} Y_n^{-1} \\ &= Y_n' Y_n^{-1} + Y_n C_n' C_n^{-1} Y_n^{-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando $z(1-z)Y_n$ em ambos os lados da equação, encontramos

$$\tilde{M}_n Y_n = z(1-z)Y_n' + z(1-z)Y_n C_n' C_n^{-1}.$$

E assim obtemos o operador diferencial de primeira ordem

$$z(1-z)Y_n' = \tilde{M}_n Y_n - z(1-z)Y_n C_n' C_n^{-1}.$$

■

Assim, utilizando o operador diferencial (4.40), encontramos equações diferenciais de primeira ordem para Φ_n, G_n, Φ_{n-1}^* e G_{n-1}^*.

Corolário 4.26. Nas condições da Proposição 4.25, temos as seguintes equações diferenciais de primeira ordem para Φ_n, G_n, Φ_{n-1}^* e G_{n-1}^*, respectivamente, isto é,

i) $$z(1-z)\Phi_n'(z) = [-nz + (\bar{b}+n)(1-|\alpha_{n-1}|^2)]\Phi_n(z) + (\bar{b}+n)(1-|\alpha_{n-1}|^2)\overline{\alpha}_{n-1}\Phi_{n-1}^*(z), \tag{4.41}$$

ii) $z(1-z)G_n'(z) = [-bz - (\bar{b}+n)|\alpha_{n-1}|^2]G_n(z) + (\bar{b}+n)(1-|\alpha_{n-1}|^2)\overline{\alpha}_{n-1}G_{n-1}^*(z)$,

iii) $z(1-z)[\Phi_{n-1}^*(z)]'(z) = [bz + (\bar{b}+n)|\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}^*(z) + (\bar{b}+n)\alpha_{n-1}\Phi_n(z)$,

iv) $z(1-z)[G_{n-1}^*(z)]'(z) = [nz - (\bar{b}+n)(1-|\alpha_{n-1}|^2)]G_{n-1}^*(z) + (\bar{b}+n)\alpha_{n-1}G_n(z)$.

A equação (4.41) é equivalente a relação de estrutura (3.18), ou seja,

$$(z-1)\Phi_n'(z) = -(\bar{b}+n)[1-|\alpha_{n-1}|^2]\Phi_{n-1}(z) + n\Phi_n(z),$$

apresentada no Capítulo 3.

Equação diferencial de segunda ordem

Novamente encontramos primeiro o operador diferencial de segunda ordem para Y_n.

Proposição 4.27. Sejam ν a função peso (1.25) e a matriz de estrutura, M_n, associada a esta função peso, então o operador diferencial de segunda ordem é dado por

$$\begin{aligned} z(1-z)Y_n'' + Y_n'[2z(1-z)C_n'C_n^{-1} + (1-2z)I_2] + Y_n[z(1-z)C_n''C_n^{-1} + (1-2z)C_n'C_n^{-1}] \\ = \left[\tilde{M}_n' + \frac{\tilde{M}_n^2}{z(1-z)}\right]Y_n. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Demonstração: Temos $z(1-z)Z_n' = \tilde{M}_n Z_n$, então calculando a derivada com relação a z, temos

$$(1-2z)Z_n' + z(1-z)Z_n'' = \tilde{M}_n' Z_n + \tilde{M}_n Z_n'.$$

Sabendo que $z(1-z)Z_n' = \tilde{M}_n Z_n$ e isolando Z_n, então

$$z(1-z)Z_n'' = \left\{\tilde{M}_n' + \frac{\tilde{M}_n^2}{z(1-z)} - (1-2z)\frac{\tilde{M}_n}{z(1-z)}\right\} Z_n.$$

Portanto,

$$z(1-z)Z_n'' Z_n^{-1} = \left\{\tilde{M}_n' + \frac{\tilde{M}_n^2}{z(1-z)} - (1-2z)\frac{\tilde{M}_n}{z(1-z)}\right\}. \tag{4.43}$$

Por outro lado, temos $Z_n = Y_n C_n$, assim

$$Z_n'' = Y_n'' C_n + 2Y_n' C_n' + Y_n C_n''.$$

E então, obtemos

$$z(1-z)Z_n'' Z_n^{-1} = z(1-z)Y_n'' Y_n^{-1} + 2Y_n' z(1-z)C_n' C_n^{-1} Y_n^{-1} + Y_n z(1-z)C_n'' C_n^{-1} Y_n^{-1}.$$

Multiplicando Y_n na última equação, tem-se

$$z(1-z)Z_n'' Z_n^{-1} Y_n = z(1-z)Y_n'' + 2Y_n' z(1-z)C_n' C_n^{-1} + Y_n z(1-z)C_n'' C_n^{-1}. \tag{4.44}$$

Multiplicando Y_n na equação (4.43) e igualando com a equação (4.44), temos

$$z(1-z)Y_n'' + 2Y_n' z(1-z)C_n' C_n^{-1} + Y_n z(1-z)C_n'' C_n^{-1} = \left[\tilde{M}_n' + \frac{\tilde{M}_n^2}{z(1-z)} - (1-2z)\frac{\tilde{M}_n}{z(1-z)}\right] Y_n.$$

Note que,

$$\frac{\tilde{M}_n}{z(1-z)} Y_n = Y_n' + Y_n C_n' C_n^{-1}.$$

Então, o operador diferencial de segunda ordem é

$$\begin{aligned} z(1-z)Y_n'' + Y_n'[2z(1-z)C_n' C_n^{-1} + (1-2z)I_2] + Y_n[z(1-z)C_n'' C_n^{-1} + (1-2z)C_n' C_n^{-1}] \\ = \left[\tilde{M}_n' + \frac{\tilde{M}_n^2}{z(1-z)}\right] Y_n. \end{aligned}$$

■

Finalmente, como consequência da Proposição 4.27, utilizando o operador diferencial (4.42) e a Proposição 4.24, obtemos as equações diferenciais de segunda ordem para Φ_n, G_n, Φ_{n-1}^* e G_{n-1}^*.

Corolário 4.28. Nas mesmas condições da Proposição 4.27, temos as seguintes equações diferenciais de segunda ordem para Φ_n, G_n, Φ_{n-1}^* e G_{n-1}^*, respectivamente, isto é,

i) $z(1-z)\Phi_n''(z) + [(n-b-2)z + (1-n-\bar{b})]\Phi_n'(z) + n(1+b)\Phi_n(z) = 0,$

ii) $z(1-z)G_n''(z) + [(b-n-2)z + (1+n+\bar{b})]G_n'(z) + b(1+n)G_n(z) = 0,$

iii) $z(1-z)[\Phi_{n-1}^*(z)]'' + [(n-b-2)z + (1-n-\bar{b})][\Phi_{n-1}^*]'(z) + b(n-1)\Phi_{n-1}^*(z) = 0,$

iv) $z(1-z)[G_{n-1}^*(z)]'' + [(b-n-2)z + (1+n+\bar{b})][G_{n-1}^*]'(z) + n(b-1)G_{n-1}^*(z) = 0.$

5 Considerações finais

Neste capítulo apresentamos os principais resultados deste trabalho e as perspectivas futuras que visam a continuidade desta investigação.

5.1 Resultados principais

O principal objetivo desta tese foi o estudo de funções peso semiclássicas definidas na circunferência unitária que satisfazem uma equação do tipo Pearson, ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\theta}\Big[A(e^{i\theta})w(\theta)\Big] = B(e^{i\theta})w(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \;\; z = e^{i\theta}, \tag{5.1}$$

onde $A(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$ e $B(z) = b_2z^2 + b_1z + b_0$, com $a_2, a_1, a_0, b_2, b_1, b_0 \in \mathbb{C}$.

Este trabalho foi dividido em três grandes tópicos: a determinação de funções peso semiclássicas que satisfazem uma equação do tipo Pearson com determinadas condições, equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblusnky e equações diferenciais de primeira e de segunda ordem satisfeitas por alguns polinômios ortogonais na circunferência unitárias através de uma análise envolvendo o Problema de Riemann-Hilbert. Estes tópicos são encontrados nos Capítulos 2, 3 e 4, respectivamente. Os principais resultados destes capítulos podem ser sintetizados por

- uma nova função peso foi apresentada no Capítulo 2, tal função peso generaliza várias outras funções peso conhecidas. Essa função peso é dada por
$$w(\theta) = e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \;\text{ e }\; \eta, \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$
- no Capítulo 3 apresentamos a relação de estrutura (3.1) satisfeita pelos polinômios ortogonais na circunferência unitária, ou seja,
$$A(z)\Phi_n'(z) = na_2\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) + \mathfrak{t}_n\Phi_n^*(z), \;\; n \geqslant 2,$$
onde os coeficientes $\mathfrak{t}_n$, $\mathfrak{s}_{n,n-1}$ e $s_{n,n}$ são dados em (3.2), (3.3) e (3.4), respectivamente. E como aplicação, também mostramos que os coeficientes de Verblusnky complexos satisfazem as equações de diferenças não lineares (3.9) e (3.10), isto é,
$$[(n-1)\overline{a}_2 + i\overline{b}_2]\alpha_n + [(n-1)\overline{a}_0 - i\overline{b}_0]\alpha_{n-2} = -(n\overline{a}_1 - \gamma_n\overline{a}_0 - \overline{\gamma}_n\overline{a}_2)\frac{\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2}, \; n \geqslant 2$$
e
$$\begin{aligned}[(n-1)\overline{a}_2 + i\overline{b}_2]&\frac{\alpha_n}{1-|\alpha_{n-1}|^2} + [(n-1)\overline{a}_0 - i\overline{b}_0]\alpha_{n-2} \\ &= -\Big\{[i\overline{b}_0 - (n+1)\overline{a}_0]\alpha_{n-1}\overline{\alpha}_n - i\overline{b}_1 + (n+1)\overline{a}_1 - 2\gamma_n\overline{a}_0\Big\}\frac{\alpha_{n-1}}{1-|\alpha_{n-1}|^2}, \; n \geqslant 2,\end{aligned}$$
onde γ_n é dado em (1.7).

- no Capítulo 4 foram apresentadas relações diferenciais para os polinômios ortogonais na circunferência unitária associados as funções peso (1.21) e (1.25), este estudo foi realizado utilizando o problema de Riemann-Hilbert, esta abordagem tem muitas vantagens, uma delas é de determinar estes operadores sem recorrer à ortogonalidade, pois ela está implícita no método. Considerando a função peso (1.25) e Y_n a única solução do problema de Riemann-Hilbert na circunferência unitária, temos os seguintes operadores diferenciais de primeira e de segunda ordem, respectivamente,

$$z(1-z)Y_n' = \tilde{M}_n Y_n - z(1-z)Y_n C_n' C_n^{-1}$$

e

$$\begin{aligned} z(1-z)Y_n'' + Y_n'[2z(1-z)C_n'C_n^{-1} + (1-2z)I_2] + Y_n[z(1-z)C_n''C_n^{-1} \\ + (1-2z)C_n'C_n^{-1}] = \left[\tilde{M}_n' + \frac{\tilde{M}_n^2}{z(1-z)}\right]Y_n, \end{aligned}$$

onde C_n e $\tilde{M}_n$ são dadas em (4.18) e (4.32), associadas a esta função peso. Como consequência direta destes operadores, sejam $\{G_n\}_{n\geqslant 0}$ funções introduzidas por Deift, Its e Krasowsky em [18], dadas por (4.4), então a equação diferencial de primeira ordem satisfeita por estas funções é dada por

$$z(1-z)G_n'(z) = -[bz + (\bar{b}+n)|\alpha_{n-1}|^2]G_n(z) + (\bar{b}+n)(1-|\alpha_{n-1}|^2)\overline{\alpha}_{n-1}G_{n-1}^*(z)$$

e a equação diferencial de segunda ordem

$$z(1-z)G_n''(z) + [(b-n-2)z + (1+n+\bar{b})]G_n'(z) + b(1+n)G_n(z) = 0.$$

Além disso, são apresentadas, no Capítulo 4, equações diferenciais de primeira e de segunda ordem para Φ_n, Φ_{n-1}^* e G_{n-1}^*.

5.2 Trabalhos futuros

Nesta seção são apresentadas direções para dar continuidade ao trabalho.

Relação de estrutura e equações de diferenças

Como trabalho futuro pretendemos estender os resultados apresentados nos Capítulos 2 e 3, ou seja, investigar funções peso semiclássicas na circunferência unitária que satisfazem uma equação do tipo Pearson em que os polinômios A e B em (5.1) são polinômios de grau maior que ou igual a 3. Quando A e B são polinômios de grau 3, a relação de estrutura satisfeita pelos polinômios ortogonais mônicos terá seis termos. Como aplicação, é esperado encontrar equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblunsky e, se possível, relacionar com as equações de Painlevé. Desta forma, temos os seguintes problemas em aberto.

- Determinar as funções peso semiclássicas na circunferência unitária que satisfazem a equação do tipo Pearson (5.1) com A e B polinômios de grau maior que ou igual a 3.

- Encontrar relações de estrutura para polinômios ortogonais mônicos associados a essas funções peso. Acreditamos que, quando os polinômios A e B em (5.1) tiverem grau exatamente 3 e forem denotados por $A(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$ e $B(z) = b_3z^3 + b_2z^2 + b_1z + b_0$, a relação de estrutura terá a seguinte forma.

$$\begin{aligned} A(z)\Phi_n'(z) = \quad & na_3\Phi_{n+2}(z) + \mathfrak{s}_{n,n+1}\Phi_{n+1}(z) + \mathfrak{s}_{n,n}\Phi_n(z) + \mathfrak{s}_{n,n-1}\Phi_{n-1}(z) \\ & +\mathfrak{p}_{n,n}z\Phi_n^*(z) + \mathfrak{t}_{n,n}\Phi_n^*(z), \quad n \geqslant 3, \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_{n,n} &= (ib_3 + 2a_3)\overline{\alpha}_n, \\ \mathfrak{t}_{n,n} &= (ib_3 + a_3)\overline{\alpha}_{n+1}(1 - |\alpha_n|^2) + (ib_2 + a_2 + a_3\gamma_{n+1})\overline{\alpha}_n, \\ \mathfrak{s}_{n,n-1} &= (ib_0 + na_0)(1 - |\alpha_{n-1}|^2), \\ \mathfrak{s}_{n,n} &= ib_1 + (n+1)a_1 - a_0\overline{\gamma_n} - (ib_0 + (n+1)a_0)\alpha_n\overline{\alpha}_{n-1}, \\ \mathfrak{s}_{n,n+1} &= na_2 + a_3[(n-1)\gamma_n - n\gamma_{n+2}] + (ib_3 + 2a_3)\overline{\alpha}_n\alpha_{n-1}. \end{aligned}$$

- Encontrar as equações de diferenças satisfeitas pelos coeficientes de Verblunsky.

Problema de Riemann-Hilbert na circunferência unitária

Um outro trabalho futuro que pretendemos realizar é continuar desenvolvendo a análise feita no Capítulo 4 para outras funções peso na circunferência unitária, em especial, para a nova função peso encontrada no Capítulo 2. Utilizando o método de Riemann-Hilbert, pretendemos encontrar equações diferenciais de primeira e de segunda ordem para os polinômios ortogonais relativamente a essa função peso. Ademais, também pretendemos estender os resultados apresentados no Capítulo 4 à ortogonalidade matricial na circunferência unitária, na literatura existem poucos exemplos deste caso. Em síntese, temos os seguintes problemas em aberto.

- Encontrar operadores diferenciais de primeira e de segunda ordem associados a função peso (2.21), isto é,

$$w(\theta) = e^{-\eta\theta}[\sin^2(\theta/2)]^{\lambda}[\cos^2(\theta/2)]^{\beta}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } \eta, \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Estender os resultados estudados no Capítulo 4 à ortogonalidade matricial na circunferência unitária.

Referências

[1] M. Ablowitz, A. Fokas, Complex Variables: Introduction and Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1997

[2] J. Baik, Riemann–Hilbert problems for last passage percolation, In: K. McLaughlin and X. Zhou, (ed.) Recent Developments in Integrable Systems and Riemann–Hilbert Problems. 2003 p. 1–21. (Contemporary Mathematics, v. 326).

[3] P. Bleher, and A. Its, Double scaling limit in the random matrix model: the Riemann-Hilbert approach, Comm. Pure Appl. Math. 56, (2003), 433-516.

[4] L. Boelen, W. Van Assche, Discrete Painlevé equations for recurrence coefficients of semiclassical Laguerre polynomials. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, v. 138, n. 4, p. 1317–1331, 2010.

[5] S. Bonan, D. Lubinsky, P. Nevai, Orthogonal polynomials and their derivatives II, SIAM J. Math. Anal., 18 (1987) 1163–1176.

[6] C. F. Bracciali, K. S. Rampazzi, L. L. Silva Ribeiro, On semi-classical weight functions on the unit circle. J. Approx. Theory, 295, art. 105957, 2023.

[7] A. Branquinho, A note on semi-classical orthogonal polynomials, Bull. Belg. Math. Soc., 3 (1996) 1–12.

[8] A. Branquinho, A. Foulquié-Moreno, A. Fradi, and M. Mañas, Matrix Jacobi biorthogonal polynomials via Riemann–Hilbert problem, Proc. Am. Math. Soc., (2022) 193-208.

[9] A. Branquinho, A. Foulquié-Moreno, A. Fradi, M. Mañas, Matrix orthogonal polynomials: a Riemann–Hilbert approach. https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.19954.

[10] A. Branquinho, M. N. Rebocho, Structure relations for orthogonal polynomials on the unit circle, Linear Algebra Appl., 436 (2012) 4296–4310.

[11] A. Cachafeiro, C. Suárez, About semiclassical polynomials on the unit circle corresponding to the class (2,2), J. Comput. Appl. Math., 85 (1997) 123–144.

[12] G. Cassatella-Contra, M. Mañas, Riemann–Hilbert problem and matrix discrete Painlevé II systems, Stud. Appl. Math., (2019) 1–43.

[13] G. A. Cassatella-Contra, M. Mañas, Matrix biorthogonal polynomials in the unit circle: Riemann-Hilbert problem and matrix discrete Painleve II system. https://doi.org/10.48550/arXiv.1601.07236.

[14] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials. New York: Gordon and Breach, 1978.

[15] T. Claeys, A. B. J. Kuijlaars, M. Vanlessen, Multi-critical unitary random matix ensembles and the general Painlevé II equation, Ann. of Math. 168 (2008), 601–642.

[16] P. Clarkson, K. Jordaan, A. Kelil, A generalized Freud weight. Stud. Appl. Math, Cambridge, v. 136, n. 3, p. 288–320, 2016.

[17] P. Deift, Orthogonal Polynomials and Random Matrices: A Riemann-Hilbert Approach, Courant Lectures Notes 3, New York University, 1999.

[18] P. Deift, A. Its, I. Krasovsky, Asymptotics of Toeplitz, Hankel, and Toeplitz+Hankel determinants with Fisher-Hartwig singularities. Ann. Math., 174 (2011) 1243-1299.

[19] P. Deift, A. R. Its, X. Zhou, A Riemann-Hilbert approach to asymptotic problems arising in the theory of random matrix models and also in the theory of integrable statistical mechanics, Ann. of Math. 146 (1997) 149–235.

[20] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights, Comm. Pure Appl. Math. 52 (12) (1999) 1491–1552.

[21] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, Uniform asymptotics for orthogonal polynomials with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory, Comm. Pure Appl. Math. 52 (12) (1999) 1335–1425.

[22] P. A. Deift and X. Zhou, A steepest descent method for oscillatory Riemann–Hilbert problems. Asymptotics for the MKdV equation, Ann. Math., 137 (1993) 295-368.

[23] P. Drazin, R. Johnson, Solitons: An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[24] L. Edelstein-Keshet, Mathematical Models in Biology, Classics in Applied Mathematics - SIAM, Philadelphia, 2005

[25] S. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, Springer–Verlag, New York, 2005.

[26] G. Filipuk, W. Van Assche, L. Zang, The recurrence coefficients of semi-classical Laguerre polynomials and the fourth Painlevé equation. J. Phys. A Math. Theor., Bristol, v. 45, n. 20, p. 1–13, 2012.

[27] A.S. Fokas, A.R. Its, A.V. Kitaev, The isomonodromy approach to matrix models in 2D quantum gravity, Comm. Math. Phys. 147 (1992), no. 2, 395–430.

[28] P. Freire, Educação e mudança. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979.

[29] G. Freud, On the coefficients in the recursion formulae of orthogonal polynomials. Proc. R. Irish Acad. Sect., A 76 (1976), 1–6.

[30] F. D. Gakhov, Boundary Value Problems. Pergamon Press, 1966.

[31] E. Hendriksen, H. Van Rossum, Semi-classical orthogonal polynomials. In: C. Brezinski, A. Draux, A.P. Magnus, P. Maroni, A. Ronveaux, (ed.) Polynômes orthogonaux et applications. Berlin: Spring-Verlag, 1985. p. 354–361. (Lecture Notes in Mathematics, v. 1171).

[32] M.E.H. Ismail, Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 98, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

[33] M.E.H. Ismail, N.S. Witte, Discriminants and functional equations for polynomials orthogonal on the unit circle, J. Approx. Theory, 110 (2001) 200–228.

[34] D. Jackson, Fourier Series and Orthogonal Polynomials, The Carus Mathematical Monographs 6, Math. Assoc. Amer., 1941.

[35] R. Koekoek, P.A. Lesky, R.F. Swarttouw, Hypergeometric Orthogonal Polynomials and their q-Analogues. 1 ed. Berlin: Springer Monographs in Mathematics , 2010.

[36] A. P. Magnus, On Freud's equations for exponential weights. J. Approx. Theory, 46 (1986) 64-99.

[37] A. P. Magnus, Special Topics in Approximation Theory: semi-classical orthogonal polynomials on the unit circle, MAPA 3072A, Université Catholique de Louvain, Louvain-La-Neuve, Belgium. 2013 (manuscript).

[38] F. Marcellán, A. Branquinho, J Petronilho Classical orthogonal polynomials: A functional approach, Acta Appl. Math., 34, (1994) 283-303.

[39] F. Marcellán, A. Sri Ranga, Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle and coherent pairs of measures of the second kind, Results Math., 71 (2017) 1127–1149.

[40] P. Maroni, Sur quelques espaces de distributions qui sont des formes linéaires sur l'espace vectoriel des polynômes, (French), in Orthogonal Polynomials and Applications (Bar-le-Duc, 1984), 184–194, Lecture Notes in Math., 1171, Springer, Berlin, 1985.

[41] P. Maroni, Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux. Application aux polynômes orthogonaux semi-classiques, in Orthogonal Polynomials and their Applications (Erice, 1990), 95–130, IMACS Ann. Comput. Appl. Math., 9, Baltzer, Basel, 1991.

[42] A. Martínez Finkelshtein, Szegő polinomials: a view from the Riemann-Hilbert window, Electron. Trans. Numer. Anal., 25 (2006), 369-392.

[43] V. Periwal, D. Shevitz, Unitary-matrix models as exactly solvable string theories, Phys. Rev. Letters, 64 (1990) 1326–1329.

[44] M.N.V. Rebocho, Polinómios ortogonais do tipo Laguerre-Hahn sobre a circunferência unitária, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, 2008. Tese de doutorado.

[45] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 54, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[46] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2: Spectral Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 54, Part 2. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2005.

[47] G. Szegő. Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. Math. Z., 6:167–202, 1920.

[48] G. Szegő. Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen, II. Math. Z., 9:167–190, 1921.

[49] G. Szegő, Orthogonal Polynomials. Providence: American Mathematical Society, 1975. (American Mathematical Society Colloquium Publications).

[50] A. Sri Ranga, Szegő polynomials from hypergeometric functions, Proc. Amer. Math. Soc., 138 (2010) 4259–4270.

[51] C. Suárez, About semiclassical orthogonal polynomials of the class (2, 2), J. Comput. Appl. Math. 131 (2001) 457–472.

[52] C. Suárez, On a family of semiclassical orthogonal polynomials on the unit circle belonging to the class (p,p), Integral Transforms Spec. Funct., 19 (2008) 333–349.

[53] W. Van Assche, Orthogonal Polynomials and Painlevé Equations. Cambridge Univ. Press, 2018.