

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

VINÍCIUS BARROS DA SILVA

**GEOMETRIA DE INFORMAÇÃO APLICADA A SISTEMAS DINÂMICOS:
UMA LEITURA GEOMÉTRICA NO CONTEXTO DE BIFURCAÇÕES**

Rio Claro-SP

2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

VINÍCIUS BARROS DA SILVA

**GEOMETRIA DE INFORMAÇÃO APLICADA A SISTEMAS DINÂMICOS:
UMA LEITURA GEOMÉTRICA NO CONTEXTO DE BIFURCAÇÕES**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física pelo Programa de Pós-graduação em Física.

Orientador: Prof. Dr. Tit. Edson Denis Leonel

Coorientador: Prof. Dr. João Peres Vieira

Rio Claro-SP

2023

S586g Silva, Vinícius Barros da
Geometria de Informação aplicada a sistemas dinâmicos : Uma
leitura geométrica no contexto de bifurcações / Vinícius Barros da
Silva. -- Rio Claro, 2023
75 p. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Prof. Dr. Tit. Edson Denis Leonel
Coorientador: Prof. Dr. João Peres Vieira

1. Bifurcações. 2. Geometria de informação. 3. Transições de fase.
4. Estabilidade. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

VINÍCIUS BARROS DA SILVA

**GEOMETRIA DE INFORMAÇÃO APLICADA A SISTEMAS DINÂMICOS:
UMA LEITURA GEOMÉTRICA NO CONTEXTO DE BIFURCAÇÕES**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Física pelo Programa de Pós-graduação em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Tit. EDSON DENIS LEONEL
IGCE/ UNESP/ Rio Claro (SP)

Prof. Dr. CHRISTIAN BONATO
UFRGS/ Rio Grande do Sul (RS)

Prof. Dr. MARCUS WERNER BEIMS
UFPR/ Curitiba (PR)

Prof. Dr. JOSÉ DANILO SZEZECH JÚNIOR
UEPG/ Paraná (PR)

Prof. Dr. LUIZ ANTONIO BARREIRO
IGCE/ UNESP/ Rio Claro (SP)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 19 de maio de 2023.

Agradecimentos

A DEUS pela iluminação e proteção ao longo desta jornada.

Aos meus pais Francisco e Maria pelo imensurável amor, carinho e apoio durante a realização deste projeto, assim como, nos meus demais objetivos. Vocês são a luz de vida que ilumina meus dias de incerteza, dúvidas e alegria. Para expressar o quão verdadeiramente sou abençoado por tê-los ao meu lado, eu teria que criar palavras novas.

Ao Prof. Dr. Edson Denis Leonel, do Departamento de Física, da UNESP “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus de Rio Claro, pela oportunidade de aprendizado durante estes anos e pela confiança depositada. Sou imensamente grato por sua dedicação, paciência, por não medir esforços em ajudar-me e pela compreensão sempre presente em todos os momentos de diálogo.

Ao Prof. Dr. João Peres Vieira, do Departamento de Matemática, da UNESP “Júlio de Mesquita Filho”, câmpus de Rio Claro, pela contribuição trazida a este trabalho envolvendo discussões, correções, sugestões e verificação dos resultados deste projeto.

Agradeço, renovadamente, aos professores Christian Bonato da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Marcus Werner Beims da Universidade Federal do Paraná, José Danilo Szezech Júnior da Universidade Estadual de Ponta Grossa e ao Antônio Barreiro da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” pela revisão geral da tese.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“A lição é a seguinte: nunca desista, nunca, nunca, nunca. Em nada.
Grande ou pequeno, importante ou não. Nunca desista.
Nunca se renda à força, nunca se renda ao poder aparentemente esmagador do inimigo”.*
(Winston Churchill)

Resumo

A teoria convencional de bifurcações locais (TCB) falha em apresentar uma caracterização completa da estabilidade e, ainda, mas não totalmente, aspectos gerais de fenômenos complexos. Afinal, a TCB só permite explorar o comportamento de sistemas dinâmicos não lineares na vizinhança de pontos fixos e órbitas periódicas. Esse último, portanto, impõe a necessidade de técnicas globais não triviais e soluções numéricas extensas. Neste trabalho, apresenta-se uma tentativa de superar esses problemas ao introduzir a teoria de informação de Fisher no estudo de bifurcações. Aqui, investiga-se uma estrutura métrica riemanniana para bifurcações locais e globais descritas no contexto de sistemas dinâmicos. A métrica introduzida é baseada no conceito de distância de informação. São estudados cinco modelos contrastantes de bifurcações em detalhes: sela-nó, transcritical, forquilha subcrítica, forquilha supercrítica e, por fim, bifurcações homoclínicas. É revelado que a métrica impõe um escalar de curvatura R no espaço de parâmetros dos sistemas investigados. Além disso, mostra-se que R diverge para o infinito enquanto se aproxima dos pontos de bifurcação. Demonstra-se aqui que as condições de estabilidade são recuperadas a partir de interpretações dos sinais da curvatura R e do caráter da métrica de Fisher. Os resultados obtidos evidenciam uma melhoria clara em relação à teoria convencional.

Palavras-chave: Bifurcações; Geometria de informação; Transições de fase; Estabilidade

Abstract

The conventional local bifurcation theory (CBT) fails to present a complete characterization of the stability and general aspects of complex phenomena. After all, CBT only explores the behavior of nonlinear dynamical systems in the neighborhood of their fixed points. Thus, this limitation imposes the necessity of non-trivial global techniques and lengthy numerical solutions. In this article, we present an attempt to overcome these problems by including the Fisher information theory in the study of bifurcations. Here, we investigate a Riemannian metrical structure of local and global bifurcations described in the context of dynamical systems. The introduced metric is based on the concept of information distance. We examine five contrasting models in detail: saddle-node, transcritical, supercritical pitchfork, subcritical pitchfork, and homoclinic bifurcations. We found that the metric imposes a curvature scalar R on the parameter space. Also, we discovered that R diverges to infinity while approaching bifurcation points. We demonstrate that the local stability conditions are recovered from the interpretations of the curvature R , while global stability is inferred from the character of the Fisher metric. The results are a clear improvement over those of the conventional theory.

Keywords: Bifurcations; Information geometry; Phase transitions; Stability

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
I	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2	GEOMETRIA MÉTRICA NO CONTEXTO DE SISTEMAS TERMODINÂMICOS	15
3	TEORIA	19
3.1	Bifurcações e funções de densidade de probabilidade	19
3.2	Geometria de informação	23
3.3	Estabilidade e o sinal de R	27
3.4	Análise de escala	32
3.5	Generalização para sistemas bidimensionais	35
II	RESULTADOS E DISCUSSÕES	40
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES PARA BIFURCAÇÕES LOCAIS E GLOBAIS	41
4.1	Bifurcações locais	41
4.2	Bifurcação sela-nó	42
4.3	Bifurcação transcítica	45
4.4	Bifurcações supercrítica e subcrítica de forquilha	49
4.5	Bifurcações globais	54
4.6	O oscilador de Duffing	55
III	CONCLUSÕES	60
5	CONCLUSÕES	61
IV	PERSPECTIVAS	66
6	PERSPECTIVAS DA TEORIA GEOMÉTRICA DE BIFURCAÇÕES .	67
	REFERÊNCIAS	69

1 Introdução

O objetivo geral da teoria de bifurcações, no contexto da dinâmica não linear, consiste em expressar as repentinas mudanças qualitativas do retrato de fases de sistemas dinâmicos nas vizinhanças de suas soluções locais, quando se alteram os parâmetros de controle de forma contínua e suave (IL'YASHENKO et al., 2013; KIELHÖFER, 2011). Apesar do amplo espectro de aplicações nas ciências e de ser presumidamente satisfatória em casos especiais, a teoria convencional de bifurcações locais (TCB) falha em apresentar uma caracterização completa da estabilidade e, ainda, mas não totalmente, aspectos gerais de fenômenos complexos. Afinal, a TCB só permite explorar o comportamento de sistemas dinâmicos não lineares na vizinhança de pontos fixos e órbitas periódicas, o que, por sua vez, impõe quatro dificuldades e limitações.

Primeiro, a TCB não permite estabelecer conclusões à cerca da estabilidade do sistema dinâmico quando a função de Lyapunov não pode ser determinada (KWON; BANG, 2018; MONTEIRO, 2006; STROGATZ, 2014). Devemos salientar que para um estado de equilíbrio estável, é possível estabelecer considerações de estabilidade para o sistema dinâmico em estudo, isto é, podemos escrever que um sistema dinâmico é estável se for possível provar a existência das funções de Lyapunov (MONTEIRO, 2006; DASGUPTA, 2006). Contudo, a construção de tais funções não é uma tarefa simples. Na realidade, a escassez de métodos robustos para gerar as funções de Lyapunov impõe diversas dificuldades e problemas práticos no estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos através desse método (MONTEIRO, 2006; STROGATZ, 2014).

Segundo, o estudo do comportamento qualitativo do sistema dinâmico nas proximidades de pontos de equilíbrio e de órbitas periódicas exige o emprego de transformações de coordenadas por meio da teoria de formas normais. Em sua totalidade, no entanto, a construção de formas normais não constitui uma tarefa de fácil obtenção para sistemas dinâmicos governados por equações diferenciais, já que as operações algébricas envolvidas nesse processo são não triviais de serem realizadas devido à ordem e à dimensão que exibem. Além disso, formas normais não são unicamente definidas, o que torna a obtenção delas ainda mais complicada (GUCKENHEIMER; HOLMES, 2013; CHOW; DRACHMAN; WANG, 1990).

Terceiro, bifurcações homoclínicas não podem ser detectadas pela TCB. Bifurcações homoclínicas pertencem à classe de bifurcações globais, em que um ciclo-limite colide com um ponto de sela. Mais precisamente, tais bifurcações são principalmente observadas quando estruturas invariantes colidem-se umas às outras, por exemplo: variedades invariantes e atratores caóticos, conduzindo à destruição de atratores caóticos. Nesse cenário, a destruição causa uma modificação considerável na topologia global do sistema, que, infelizmente, não pode ser estudada pela TCB, isto é, a análise da estabilidade local (WEBER, 2021; LEONEL, 2016; ZHONG, 2006).

Por conseguinte, o estudo dessa classe particular de bifurcações é geralmente estabelecida através de métodos aproximativos, *e.g.* balanço harmônico, método de Melnikov, além, é claro, de simulações numéricas (MONTEIRO, 2006; CUESTA; OLLERO, 2005).

De forma geral, não é possível determinar analiticamente nem o ponto de bifurcação nem os valores dos parâmetros em que uma bifurcação homoclínica ocorre. Nesse cenário, pontos de bifurcação podem apenas ser estimados usando o método de Melnikov cujo uso prático apresenta dificuldades técnicas e fundamentais (TSARIN; RYABOV; VARIV, 1996). Além disso, devemos notar que a abordagem de Melnikov pode apenas fornecer uma análise razoável do comportamento do sistema quando a perturbação é muito pequena ou próxima de zero. Para grandes perturbações, porém, esse método pode não permite obter uma compreensão significativa do comportamento do sistema na bifurcação homoclínica (TSARIN; RYABOV; VARIV, 1996; LUO, 2008).

Por fim, outra grande dificuldade e, por conseguinte, uma limitação da TCB consiste em determinar analiticamente o número máximo e as posições relativas de trajetórias periódicas isoladas, isto é, ciclos-limite de sistemas dinâmicos polinomiais (MONTEIRO, 2006; GAIKO, 2008). Na realidade, essa limitação consiste em um dos problemas mais difíceis da TCB. Em sua totalidade, há muitos métodos e resultados no estudo de ciclos-limite. Entretanto, esse problema não foi ainda completamente resolvido mesmo para os casos mais simples (MONTEIRO, 2006; GAIKO, 2008; GAIKO, 2000).

Com base no exposto, apresentamos, neste trabalho, uma tentativa de superar essas e outras dificuldades no estudo de sistemas dinâmicos no âmbito da geometria de informação. É possível observar, entre parênteses, que podemos considerar bifurcações como a versão temporal de transições de fase termodinâmicas em que o regime assintótico é assumido (LESNE; LAGUËS, 2011; LEONEL, 2021). Em outras palavras, uma transição de fase nada mais é do que uma bifurcação na dinâmica microscópica subjacente (LESNE; LAGUËS, 2011).

Recentemente, muitos autores têm caracterizado transições de fase, no espaço de parâmetros, para uma ampla variedade de sistemas termodinâmicos e dinâmicos no contexto da geometria de informação de Fisher (SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021; VETSOV, 2021; KOLEV; STAYKOV; VETSOV, 2019; XU; WU; YANG, 2020; RUPPEINER; SEFTAS, 2020; RUPPEINER, 2010; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990; JANKE; JOHNSTON; KENNA, 2004; ABDEL-ALL; ABD-ELLAH; MOUSTAFA, 2003). Ao introduzir uma estrutura métrica riemanniana para o espaço de parâmetros, foi possível investigar e atribuir propriedades, tanto globais quanto locais, aos sistemas clássicos e quânticos por meio do estudo da métrica de Fisher e da curvatura escalar riemanniana, também conhecida como curvatura escalar de Ricci, curvatura R ou apenas R . Nesse cenário, descobriu-se que a curvatura R é uma quantidade peculiar por três razões. Primeiro, R é um invariante geométrico, isto é, a curvatura é invariante a transformações de coordenadas. Segundo, o comportamento divergente de R na vizinhança de pontos críticos marca o fenômeno das transições de fase. Terceiro, finalmente,

o conceito de estabilidade pode ser analisado através da interpretação do sinal da métrica e da curvatura R do espaço de parâmetros.

Assim, a questão que naturalmente é colocada aqui é se podemos estender e aplicar os métodos da geometria de informação para explorar os aspectos críticos de bifurcações e se tais métodos permitem extrair inequivocamente as propriedades globais e locais de bifurcações. O presente trabalho encontra-se, portanto, no encargo dessas questões, objetivando-se, mais especificamente, a formulação de uma estrutura riemanniana completa e significativa para o estudo de bifurcações no contexto de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais.

O estudo de bifurcações apresenta inúmeras ocorrências nas ciências, bem como, em sistemas complexos, por exemplo, em reações químicas (SILVA, 2018a; BAKEŠ; SCHREIBEROVÁ; SCHREIBERA, 2008; IÑARREA et al., 2011), circuitos elétricos (GEORGIU; ROMEO, 2015; GARDINE; FOURIER-PRUNARET; CHARGE, 2011; SILVA; LEONEL, 2018), biologia (SILVA, 2018b; ZHANG et al., 2018; MIROLLO; STROGATZ, 2018) e outros (GUO; LUO, 2012; LICHTENBERG; LIEBERMAN, 2013; STROGATZ, 2014). Todavia, é importante destacar que extrair informações de sistemas dinâmicos têm seus desafios. As propriedades, que se têm o objetivo em determinar, dependem em grande parte da complexidade do sistema, do regime de interesse e do amplo contexto de modelos aplicáveis.

Desta maneira, o que impulsionou a realização deste trabalho foi propor uma nova abordagem que permitisse superar essas dificuldades ao investigar bifurcações no contexto de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais. Para isso são apresentados conceitos, definições e métodos geométricos para estudar o comportamento, condições de estabilidade, a curvatura R e o caráter das transições envolvidas em cinco classes distintas de bifurcações: sela-nó, transcítica, forquilha supercrítica, forquilha subcrítica, e, por fim, bifurcações homoclínicas com base nos princípios da geometria de informação de Fisher. Deste modo, este estudo é útil, pois além de permitir extrair informações, ainda contribui por introduzir uma nova perspectiva para investigar sistemas dinâmicos diversos, incluindo aqueles em que os métodos convencionais e padronizados mostram pouca ou nenhuma solução (SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021). A física apresentada neste trabalho é, em grande parte, bem compreendida, e pode ser aplicada no estudo de demais sistemas complexos.

Para o desenvolvimento do presente trabalho foram utilizadas pesquisas bibliográficas que se basearam em publicações científicas na área de geometria de informação de Fisher (SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021; VETSOV, 2021; KOLEV; STAYKOV; VETSOV, 2019; XU; WU; YANG, 2020; RUPPEINER; SEFTAS, 2020; RUPPEINER, 2010; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990; JANKE; JOHNSTON; KENNA, 2004; ABDEL-ALL; ABD-ELLAH; MOUSTAFA, 2003) e livros acadêmicos no contexto de sistemas dinâmicos (IL'YASHENKO et al., 2013; KIELHÖFER, 2011; LAYEK, 2015; SEYDEL, 2010; LESNE; LAGÜES, 2011; LEONEL, 2021). Neste trabalho, introduz-se uma estrutura métrica riemanniana baseando-se no conceito de distância de informação de Fisher (JANKE; JOHNSTON; KENNA,

2004; DEZA; DEZA, 2012; MURRAY, 2017). Como será mostrado ao longo deste trabalho, a teoria geométrica de bifurcações (TGB) desenvolvida aqui prevê corretamente os aspectos essenciais da TCB e, ainda, permite ir um pouco mais além, já que possibilita determinar propriedades globais e locais de bifurcações.

Esta tese estrutura-se em quatro capítulos, apresentando-se no primeiro a dedução do formalismo da geometria de informação de Fisher para sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais. O segundo capítulo é dedicado à determinação da matriz de informação de Fisher e da curvatura R . Nesse capítulo, apresentam-se as interpretações de estabilidade local e global no contexto da geometria de informação. O terceiro capítulo é dedicado a responder o problema de pesquisa, bem como, as questões levantadas acima. Em particular, são investigados o comportamento, condições de estabilidade, a curvatura R e o caráter das transições envolvidas em cinco classes distintas de bifurcações. Finalmente, conclusões e perspectivas são exibidas nos capítulos quatro e cinco, respectivamente.

Parte I

Fundamentação teórica

2 Geometria métrica no contexto de sistemas termodinâmicos

Nas últimas décadas, muita atenção tem sido dada ao emprego de métodos geométricos para o estudo de sistemas termodinâmicos e dinâmicos. Em particular, destaca-se o conceito de distância entre estados de equilíbrio (MRUGAŁA, 1984; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989a; SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021; VETSOV, 2021; KOLEV; STAYKOV; VETSOV, 2019; XU; WU; YANG, 2020; RUPPEINER; SEFTAS, 2020; RUPPEINER, 2010; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990; JANKE; JOHNSTON; KENNA, 2004; ABDEL-ALL; ABD-ELLAH; MOUSTAFA, 2003).

O primeiro grande estudo envolvendo a leitura geométrica de problemas termodinâmicos foi iniciado por Weinhold em 1975 ao conceber uma abordagem puramente fenomenológica baseada no espaço de Gibbs, isto é, um espaço \mathcal{R} , de dimensão $r + 1$, com coordenadas definidas por $r + 1$ parâmetros extensivos U, Q_1, \dots, Q_r , sendo U a energia interna, no qual os estados de equilíbrio formam uma superfície ϕ^r , r -dimensional, em concordância com a equação fundamental (WEINHOLD, 1975; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989a),

$$U = U(Q_1, \dots, Q_r). \quad (2.1)$$

Na abordagem desenvolvida por Weinhold, a estrutura métrica é estabelecida em termos do produto escalar de vetores tangentes à superfície da equação (2.1). Por conseguinte, o tensor métrico obtido através dessa definição, em particular, é expresso em termos de derivadas segundas da energia interna em relação aos parâmetros do sistema termodinâmico (WEINHOLD, 1975),

$$G^{\alpha\mu} = \frac{\partial^2 U}{\partial Q_\alpha \partial Q_\mu}. \quad (2.2)$$

Da presente formulação geométrica, é notável que a matriz $G^{\alpha\mu}$ é dada em termos de uma expressão definida positiva, o que, por sua vez, encontra-se em pleno acordo com os postulados e, por conseguinte, a segunda lei da termodinâmica. Todavia, é importante ressaltar que a presente abordagem não configura uma estrutura métrica significativa, já que, segundo Ruppeiner (RUPPEINER, 2016), essa abordagem não tem uma interpretação física clara para o conceito de distância entre estados de equilíbrio termodinâmicos. Em outras palavras, como a formulação de Weinhold não exhibe nenhuma regra clara e motivada, fisicamente, isso a torna não muito atraente para o estudo de sistemas no contexto termodinâmico.

Tendo em vista esses e outros aspectos na concepção de Weinhold, George Ruppeiner concebeu uma proposta alternativa para a estrutura métrica termodinâmica através da teoria

de flutuações (RUPPEINER, 1995). Nesta abordagem, Ruppeiner mostrou que se a teoria de flutuações é incluída nos axiomas termodinâmicos, é possível obter, naturalmente, uma estrutura métrica riemanniana do espaço de estados de equilíbrio (RUPPEINER, 2010; RUPPEINER, 2012; RUPPEINER, 2017; RUPPEINER, 1979; RUPPEINER, 1995; RUPPEINER, 2016; RUPPEINER; SEFTAS, 2020). Apesar das diferenças entre ambas as formulações, no entanto, estudos posteriores revelaram que, no contexto termodinâmico do espaço de estados, ambas as estruturas métricas de Weinhold e Ruppeiner são equivalentes (MRUGAŁA, 1984). Isto é, embora ambas as formulações apresentem definições e motivações distintas, elas estão conectadas através de diferentes parametrizações de superfícies termodinâmicas e são uniformemente equivalentes.

Sob uma perspectiva diferenciada, por sua vez, R. Gilmore propôs uma nova formulação para o conceito de estrutura métrica ao criticar, nas abordagens anteriores, que a matriz $U_{\alpha\mu}$ não tem possibilidade de avaliar distâncias em superfícies termodinâmicas, visto que tal formulação violaria a segunda lei da termodinâmica. Ao invés disso, Gilmore define em sua abordagem uma nova métrica no espaço \mathcal{R}^{r+1} de tal maneira que a curvatura seccional gaussiana da superfície seja dada em termos do determinante da matriz $U_{\alpha\mu}$ (GILMORE, 1993; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989a). Para alcançar esse resultado, Gilmore introduz um novo potencial \mathcal{U} que não possui interpretação física.

Existe ainda, no entanto, uma maneira alternativa de introduzir estruturas métricas riemannianas no espaço de parâmetros termodinâmicos através da formulação estatístico-geométrica proposta por C. R. Rao e desenvolvida por Fisher, também denominada de métrica de Fisher-Rao (DEZA; DEZA, 2012; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989a; SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021). No contexto de probabilidades, estatística e, por conseguinte, da geometria de informação, a métrica informacional de Fisher e Rao, ou simplesmente métrica de Fisher, é uma métrica riemanniana que assegura propriedades da geometria diferencial para famílias de distribuições de probabilidade (DEZA; DEZA, 2012).

De acordo com Deza e Amari (DEZA; DEZA, 2012; AMARI; NAGAOKA, 2000), seja $\mathcal{P}_X = \rho(\beta; X)$ uma família de densidades, referenciada por r parâmetros $X = (X_1, \dots, X_r)$ que constituem uma variedade paramétrica \mathcal{P} . A métrica de informação de Fisher $G = G_X$ em \mathcal{P} é uma métrica riemanniana, expressa pela matriz de informação $G_{\alpha\mu}(X)$, em que

$$G_{\alpha\mu}(X) = \left\langle \frac{\partial \ln \rho_X}{\partial X^\alpha} \frac{\partial \ln \rho_X}{\partial X^\mu} \right\rangle, \quad (2.3)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ é o valor médio ou esperado.

Ao longo desta tese, empregaremos a notação tensorial da geometria riemanniana (DEZA; DEZA, 2012; KREYSZIG, 2013). Nesse sentido, quantidades com índice superior, A^α , são chamadas de contravariantes, ao passo que quantidades com índice inferior, A_α , são denominadas de covariantes.

Deve-se notar, finalmente, que a matriz de Fisher nos leva à invariante geométrica denominada de segunda forma fundamental (DEZA; DEZA, 2012; KREYSZIG, 2013),

$$d\ell^2 = G_{\alpha\mu} dX^\alpha dX^\mu, \quad (2.4)$$

onde foi empregado a convenção de soma sobre índices repetidos: Sempre que um índice é repetido, uma soma sobre todos os valores desse índice é assumida,

$$a_i b_i \equiv \sum_{i=1}^n a_i b_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (2.5)$$

A métrica da equação (2.4) induz uma curvatura R no espaço de parâmetros X ,

$$R = G^{\mu\alpha} R_{\mu\vartheta\alpha}^\vartheta. \quad (2.6)$$

A curvatura R é uma consequência natural e, ainda, uma aplicação imediata da geometria de Fisher acima, já que revela propriedades intrínsecas de sistemas físicos, principalmente nas vizinhanças de pontos críticos. De outro modo, pode-se dizer ainda que ao introduzir uma estrutura métrica riemanniana no espaço de parâmetros, é possível investigar propriedades, tanto globais quanto locais, de sistemas clássicos e quânticos por meio do estudo da métrica de Fisher e da curvatura escalar riemanniana.

Nesse cenário, a curvatura R mostra-se como uma quantidade peculiar em três aspectos. Primeiro, R é um invariante geométrico, isto é, a curvatura é invariante a transformações de coordenadas. Segundo, o comportamento divergente de R na vizinhança de pontos críticos marca o fenômeno das transições de fase. Finalmente, o conceito de estabilidade pode ser analisado através da interpretação do sinal da métrica e da curvatura R do espaço de parâmetros.

Assim, o objetivo principal da formulação geométrica de Fisher consistirá, em sua totalidade, em determinar e interpretar a métrica de Fisher e a curvatura escalar de Ricci. Recentemente, alguns autores têm estudado transições de fase, no espaço de parâmetros, para um número considerado de distintos sistemas no contexto da geometria de informação (SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021; VETSOV, 2021; KOLEV; STAYKOV; VETSOV, 2019; XU; WU; YANG, 2020; RUPPEINER; SEFTAS, 2020; RUPPEINER, 2010; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990; JANKE; JOHNSTON; KENNA, 2004; ABDEL-ALL; ABD-ELLAH; MOUSTAFA, 2003).

Para concluir, é possível evidenciar que o emprego da geometria métrica no contexto de sistemas físicos apresenta distintas formulações, nas quais é possível inferir que cada uma delas possui pontos fortes e fracos a depender, em grande parte, do tipo de sistema considerado, bem como, das propriedades que se tem interesse em investigar (DEZA; DEZA, 2012). Por exemplo, no contexto de buracos negros de Deser–Sarioglu–Tekin, as métricas termodinâmicas de Ruppeiner e Weinhold mostram-se inadequadas para a descrição do espaço de estados de equilíbrio (VETSOV, 2021). Por outro lado, a métrica riemanniana de Ruppeiner mostra-se

fisicamente significativa no estudo de modelos de gases quânticos, bem como, em outros sistemas físicos (RUPPEINER; SEFTAS, 2020; RUPPEINER, 2010; RUPPEINER, 2012; RUPPEINER, 2017; RUPPEINER, 1979; RUPPEINER, 1995; RUPPEINER, 2016).

Contudo, é importante destacar que dentre todas as formulações, a abordagem que mais se alinha aos objetivos desta tese é a estrutura métrica riemanniana de Fisher. A métrica de Fisher mostra-se particularmente superior e mais vantajosa em relação às demais por duas razões. Primeiro, esta representa uma abordagem estatística e fenomenológica unificada (JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989a), uma vez que conceitualmente concorda e recupera os resultados provenientes das abordagens anteriores (JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b). Segundo, não é restrita apenas a sistemas termodinâmicos, já que considera diferentes tipos de distribuições de probabilidade, e não apenas aquelas provenientes da formulação de *ensembles*.

No próximo capítulo será mostrado como estender a abordagem geométrica de Fisher para, assim, estabelecer o estudo e a caracterização de bifurcações, no contexto de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais.

3 Teoria

Este capítulo é dedicado à apresentação da notação empregada e teoria que fundamenta este trabalho. O programa geral do capítulo consiste em estender os métodos geométricos empregados na geometria de informação de Fisher para investigar bifurcações no contexto de sistemas dinâmicos.

Para uma melhor apreciação dos resultados obtidos através da fundamentação teórica a ser deduzida aqui, a estrutura deste capítulo encontra-se organizada da seguinte forma. Primeiro, uma vez que a geometria de informação surge da investigação de funções de densidade de probabilidade (ABDEL-ALL; ABD-ELLAH; MOUSTAFA, 2003), nós nos dedicaremos inicialmente em construir uma distribuição própria de probabilidades para descrever sistemas dinâmicos não lineares de equações diferenciais.

Em segundo lugar, a partir do conhecimento dessa distribuição, que retém os aspectos críticos de bifurcações, descrevem-se os sistemas dinâmicos considerados através da construção de uma estrutura métrica riemanniana de seus respectivos espaços de parâmetros. Nosso interesse aqui jaz na obtenção da métrica de Fisher e, por conseguinte, da curvatura escalar de Ricci.

Em terceiro lugar, interpretam-se os conceitos de estabilidade local e global sob a perspectiva da geometria de informação de sistemas físicos para sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais.

Por fim, além de interpretar o sinal de R e da métrica, são investigadas as classes dos modelos de bifurcações em conformidade com o formalismo de escala com ênfase em avaliar a existência de expoentes críticos e leis de escala nas vizinhanças da criticalidade de sistemas dinâmicos.

3.1 Bifurcações e funções de densidade de probabilidade

A geometria de informação tem origem no estudo das denominadas funções de densidade de probabilidade. Assim, o primeiro passo para introduzir e estender os métodos geométricos da teoria de informação de Fisher é a definição de um modelo matemático de bifurcações, no contexto de sistemas dinâmicos de tempo contínuo, e, por conseguinte, a construção de sua respectiva distribuição de probabilidades.

A equação diferencial não linear que representa o modelo matemático de bifurcações no contexto de sistemas dinâmicos é dada por

$$\beta = \frac{ds}{d\tau} = \Phi(s, m), \quad (3.1)$$

em que β é o momento linear, s e τ são os parâmetro de ordem e de tempo, respectivamente, e m é o parâmetro de controle do sistema.

Aqui, deve-se resistir a tentação de interpretar o parâmetro de ordem s no contexto da física estatística. É importante salientar que essa terminologia não é restrita da mecânica estatística, mas também abarcada pela área de sistemas dinâmicos e, por conseguinte, da dinâmica não-linear. Segundo Haken (1977), Nowak e Vallacher (1998), Terry Marks-Tarlow *et al.* (2004), entende-se por parâmetro de ordem como sendo a variável de estado, isto é, a variável dinâmica que exibe o comportamento não-linear quando variada sob a influência ou não de parâmetros de controle (HAKEN, 1977; NOWAK; VALLACHER, 1998; MARKS-TARLOW; CLAYTON; GUASTELLO, 2004).

Nesse sentido, parâmetros de ordem são variáveis dinâmicas tais que as regularidades na evolução temporal do sistema em estudo podem ser expressas como variações nos valores desses parâmetros ao longo do tempo. Essa evolução pode ser descrita por diferenças ou equações diferenciais ou, ainda, trajetórias no espaço de fases.

Note que a definição de parâmetro de ordem está em plena harmonia com o modelo matemático de bifurcações, pois a variação de s sob a influência de m leva o sistema a exibir o fenômeno não linear de bifurcações cujo estudo é feito através da investigação da função não linear $\phi(s, m)$ e da equação diferencial Eq. (3.1).

Ainda com relação a Eq. (3.1) do modelo de bifurcações, é importante evidenciar que $\Phi(s, m)$ é uma função determinada pelo potencial $U(s, m)$ através da relação $\Phi(s, m) = -\partial U(s, m) / \partial s$. Além disso, $\Phi(s, m) = 0$ determina os estados de equilíbrio s^* do sistema¹. Para evitar um possível mal entendimento, convém evidenciar que s^* pode ainda ser denominado de ponto crítico, singularidade e estado estacionário no contexto da dinâmica não linear e da teoria de equações diferenciais (HALE, 2009). Porém, s^* não constitui o estado de equilíbrio termodinâmico e, portanto, não deve ser confundido como tal.

Uma observação adicional necessita ainda de ser aduzida ao presente modelo no que compete às condições que levam ao aparecimento de bifurcações. É apropriado observar que a condição matemática para o modelo acima exibir bifurcações consiste em provar que o autovalor Λ da equação (3.1) deve ser nulo para um valor crítico (s_c^*, m_c) do estado de equilíbrio s^* . Em outras palavras,

$$\Lambda = \left(\frac{\partial \Phi(s, m)}{\partial s} \right)_{(s_c^*, m_c)} = 0, \quad (3.2)$$

compreende a condição geral para a ocorrência de bifurcações em sistemas dinâmicos.

Além disso, deve-se ressaltar também que a equação (3.1), que, naturalmente, emerge das equações Hamiltonianas, é inequivocamente vantajosa, pois descreve a forma geral da maioria dos sistemas dinâmicos não lineares (IL'YASHENKO *et al.*, 2013; LESNE; LAGUËS, 2011).

¹ Também deve ser enfatizado que s^* não é necessariamente constante. Em sua totalidade, os estados s^* são dependentes dos parâmetros de controle do sistema dinâmico.

A partir desse modelo para descrever bifurcações, devemos agora apresentar o procedimento que será empregado para a construção da função de densidade de probabilidade para os sistemas dinâmicos em questão.

Para os sistemas contínuos descritos pela equação (3.1), a variável s segue uma trajetória ao longo do tempo, de tal maneira que cada valor de s está associado a um único valor de tempo τ . Em conformidade com essa correspondência um a um entre os valores de s e τ , podemos escrever, explicitamente (IL'YASHENKO et al., 2013; LESNE; LAGUËS, 2011; GONZÁLEZ-MEJÍA et al., 2015),

$$\rho(s) ds = \rho(\tau) d\tau, \quad (3.3)$$

onde $\rho(s)$ denota a densidade de probabilidade de se observar s e $\rho(\tau)$ lê-se como a probabilidade de observar um instante de tempo τ . No entanto, ao realizarmos uma aferição ao longo de um intervalo de tempo $[0, T]$, considerando expressamente que todos os tempos são igualmente prováveis, a equação (3.3) pode ser expressa simplificada como

$$\rho(s) = \frac{1}{T \Phi(s, m)}, \quad (3.4)$$

em virtude da equação (3.1).

Essa última equação basicamente nos ensina que a densidade de probabilidade para observar um determinado valor de s é inversamente proporcional à função não linear do sistema dinâmico, ou seja, $\Phi(s, m)$. Tal formulação, todavia, não é uma ideia nova deste trabalho, já que se encontra presente em desenvolvimentos recentes da geometria de informação de Fisher no âmbito de sistemas ecológicos sustentáveis (GONZÁLEZ-MEJÍA et al., 2015). Assim, a formulação apresentada acima, em conformidade com o princípio de correspondência da equação (3.3)—que relaciona os valores de s e τ —conduz a uma curiosa expressão que envolve o conceito de probabilidade ao contexto de bifurcações e, de modo geral, de sistemas dinâmicos.

Por outro lado, contudo, nota-se que a equação (3.4) diverge nos estados de equilíbrio de $\Phi(s, m)$. Portanto, isto nos leva a concluir que a existência de tais divergências servem para enfatizar que a presente função de distribuição de probabilidades deve, com todo o respeito, ser uma descrição incompleta. Com base no exposto, devemos então procurar por uma formulação que permita remover o caráter divergente da distribuição e, ainda, reter a evidente correspondência entre os valores de s e τ , além de oferecer algo semelhante à vantagem do modelo matemático de bifurcações definido acima, de tal maneira a envolver as singularidades dos sistemas dinâmicos.

A formulação desejada pode ser encontrada através da relação existente entre o momento β e a forma normal $\Phi(s, m)$ de sistemas dinâmicos ao escrever a densidade de probabilidade $\rho(\beta)$ da variável β a partir do conhecimento da densidade de probabilidade $\rho(s)$ de s . Para poder explorar essa possibilidade, é necessário encontrar uma transformação de variáveis que permita determinar $\rho(\beta)$. Essa transformação pode ser obtida com o auxílio da representação integral de

Fourier para funções características (KAMPEN, 2007; TOMÉ; OLIVEIRA, 2014; DEBNATH; BHATTA, 2014)².

Por conseguinte, para alterar a equação (3.4) em conformidade com que foi descrito acima, considere $g(\kappa)$ como a função característica da variável β . Como $\beta = \Phi(s, m)$, então podemos escrever

$$g(\kappa) = \{\exp(J \kappa \beta)\} = \{\exp(J \kappa \Phi(s, m))\} = \int ds \exp[J \kappa \Phi(s, m)] \rho(s), \quad (3.5)$$

em que $\{\cdot\}$ denota a transformada de Fourier; J , a unidade imaginária $\sqrt{-1}$.

No entanto,

$$\rho(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int d\kappa \exp[-J \kappa \beta] g(\kappa), \quad (3.6)$$

donde é possível obter³

$$\rho(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int \int ds d\kappa \exp[-J \kappa (\beta - \Phi(s, m))] \rho(s). \quad (3.7)$$

Ao lembrarmos da representação integral da distribuição delta de Dirac,

$$\delta(s) = \frac{1}{2\pi} \int d\kappa \exp(-J \kappa s), \quad (3.8)$$

chega-se em

$$\rho(\beta) = \int ds \delta(\beta - \Phi(s, m)) \rho(s). \quad (3.9)$$

Uma representação alternativa é obtida ao escrevermos

$$\rho(\beta) = \frac{1}{T} \int_0^T \rho(\tau) d\tau \delta(\beta - \Phi(s, m)), \quad (3.10)$$

em virtude da equação (3.3). Porém, não é difícil perceber que como o membro direito do integrando é independente de τ , então a solução da equação (3.10) assume a seguinte forma

$$\rho(\beta) = \delta(\beta - \Phi(s, m)), \quad (3.11)$$

que pode ainda ser expressa na representação Gaussiana (DEBNATH; BHATTA, 2014; MILTON; SCHWINGER, 2006)

$$\rho(\beta) = \delta_T(\beta - \Phi(s, m)) = \sqrt{\frac{T}{\pi}} \exp\left[-(\beta - \Phi(s, m))^2 T\right]. \quad (3.12)$$

² A função característica $g(k)$ de uma variável s é definida como a transformada de Fourier da densidade de probabilidade associada a s . Para mais detalhes, veja as referências (KAMPEN, 2007; TOMÉ; OLIVEIRA, 2014; DEBNATH; BHATTA, 2014).

³ Deve-se reconhecer que a transformada de Fourier pode ser definida ou por $\exp(J\kappa s)$ ou por $\exp(-J\kappa s)$. Em essência, não há diferenças entre essas definições. Neste trabalho, contudo, segue-se a definição padrão dos autores Kampen, Tomé e Oliveira (KAMPEN, 2007; TOMÉ; OLIVEIRA, 2014; DEBNATH; BHATTA, 2014) ao considerar a equação (3.5) de $g(\kappa)$ como a transformada de Fourier da variável β e a equação (3.6) de $\rho(\beta)$ como a respectiva transformada inversa de Fourier.

Devemos reconhecer que a última equação é consistente apenas quando T é grande. Todavia, para tornar a equação (3.12) matemática e fisicamente significativa, sem alterar demasiadamente as propriedades físicas que estão sendo representadas na formulação acima, deve-se, portanto, trazer outras considerações sobre o quão grande T deve ser no contexto de sistemas dinâmicos.

Em sua totalidade, entende-se que bifurcações podem ser interpretadas como uma versão temporal de transições de fase (LESNE; LAGUËS, 2011; LEONEL, 2021). No entanto, deve-se chamar a atenção para o fato de que esse último apenas é bem definido no denominado limite termodinâmico, no qual é permitido aos parâmetros extensivos do sistema, por exemplo, volume (V) e número de partículas (N), crescer sem limites de forma que as razões de tais parâmetros (N/V) permaneçam finitas (SALINAS, 2001).

Portanto, para as bifurcações poderem ser vistas como a versão temporal de transições de fase, o termo T deve ser o maior possível, isto é, devemos de fato compreender T como um caso limite para o que é esperado ser uma aproximação correta para as soluções da equação (3.1) a tempos longos, porém finitos. Por conseguinte, infere-se que a equação (3.12) é válida quando T atua como um caso limite, que deve ser tão grande quanto se queira, de tal modo a permitir que sejam mantidos apenas os termos dominantes da equação (3.12) e, ainda, os conceitos relevantes de bifurcações, do mesmo modo como considerar o limite termodinâmico é fundamental para que sistemas físicos exibam transições de fase bem definidas (SALINAS, 2001; LESNE; LAGUËS, 2011).

Com base no exposto, podemos então concluir que

$$\rho(\beta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \delta_T(\beta - \Phi(s, m)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{T}{\pi}} \exp\left[-(\beta - \Phi(s, m))^2 T\right]. \quad (3.13)$$

Encerra-se esta seção observando que a determinação da densidade de probabilidades $\rho(\beta)$ prova a correta escolha considerada para a transformação de coordenadas da equação (3.5), visto que foi possível determinar uma função de distribuição de probabilidades convincente que remove o caráter divergente da equação (3.4), e, além disso, mantém os aspectos críticos das possíveis bifurcações que têm origem na equação (3.1). Com base no exposto, passamos agora à construção da geometria de informação no contexto de sistemas dinâmicos.

3.2 Geometria de informação

Para introduzir a estrutura métrica riemanniana de Fisher no espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos, consideremos Ω uma família de distribuições de probabilidade que é suavemente parametrizada por dois parâmetros reais (JANKE; JOHNSTON; KENNA, 2004; DEZA; DEZA, 2012; MURRAY, 2017), em que

$$\Omega = \left\{ \mathcal{P}_X = \frac{\rho(\beta; X)}{T}; T \in \mathbb{R}^+; X \in \mathbb{R}^2, X = (X^1, X^2) \right\}, \quad (3.14)$$

onde o modelo estatístico Ω de variável β carrega a estrutura de uma variedade riemanniana suave, \mathcal{M} , em relação à qual $X = (X^1, X^2) = (s, m)$ desempenham o papel de coordenadas de um ponto $\mathcal{P}_X \in \Omega$ cuja métrica é definida pela matriz de Fisher $H = (G_{ij}(X))$, em que as componentes do tensor métrico são calculadas como o valor médio, ou o valor esperado, de um produto envolvendo derivadas parciais da função de distribuição de probabilidades expressa pela equação (3.12). Isto é,

$$G_{11}(X) = \langle (\mathbf{W}^1)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{-\ln \rho(\beta)}{T} \right) \right] \rho(\beta), \quad (3.15)$$

$$G_{22}(X) = \langle (\mathbf{W}^2)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \left[\frac{\partial^2}{\partial m^2} \left(\frac{-\ln \rho(\beta)}{T} \right) \right] \rho(\beta), \quad (3.16)$$

onde as quantidades estatísticas $\mathbf{W}^\mu = \partial \ln \rho / \partial X^\mu$ formam a base de um espaço vetorial da variável β , que é identificada com o espaço tangente $\eta_X \Omega$. Conseqüentemente, podemos definir um operador covariante de diferenciação usando a correspondência um a um existente entre Ω e variedade riemanniana.

É necessário enfatizar que como a probabilidade de aferir \mathbf{W}^1 não afeta necessariamente \mathbf{W}^2 e, ainda, ambas as quantidades possuem iguais probabilidades de serem observadas, então nós somos levados a escrever (JANKE; JOHNSTON; KENNA, 2004; DEZA; DEZA, 2012; MURRAY, 2017; SALINAS, 2001)

$$G_{21}(X) = G_{12}(X) = \langle \mathbf{W}^1 \mathbf{W}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \left[\frac{\partial \ln \rho(\beta)}{\partial s} \frac{\partial \ln \rho(\beta)}{\partial m} \right] \frac{\rho(\beta)}{T}, \quad (3.17)$$

que descrevem as componentes da diagonal secundária da matriz de informação de Fisher.

Uma representação alternativa, e aquela que de fato iremos considerar para os cálculos daqui em diante, é obtida substituindo a equação (3.12) nas equações (3.15)-(3.17), o que nos leva a

$$G_{11} = \langle (\mathbf{W}^1)^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta A(\beta) \delta_T(\beta - \Phi(s, m)), \quad (3.18)$$

em que

$$A(\beta) = \frac{1}{T} \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(-\ln \left[\delta_T(\beta - \Phi(s, m)) \right] \right) \right], \quad (3.19)$$

$$G_{22} = \langle (\mathbf{W}^2)^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta B(\beta) \delta_T(\beta - \Phi(s, m)), \quad (3.20)$$

onde

$$B(\beta) = \frac{1}{T} \left[\frac{\partial^2}{\partial m^2} \left(-\ln \left[\delta_T(\beta - \Phi(s, m)) \right] \right) \right], \quad (3.21)$$

e

$$G_{21} = G_{12} = \langle \mathbf{W}^1 \mathbf{W}^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta C(\beta) \delta_T(\beta - \Phi(s, m)), \quad (3.22)$$

no qual

$$C(\beta) = \frac{1}{T} \left[\frac{\partial \ln \left[\delta_T(\beta - \Phi(s, m)) \right]}{\partial s} \frac{\partial \ln \left[\delta_T(\beta - \Phi(s, m)) \right]}{\partial m} \right]. \quad (3.23)$$

No entanto, podemos, em virtude das propriedades já consolidadas da distribuição delta de Dirac, simplesmente escrever (HARRIS; ARFKEN; WEBER, 2013)

$$G_{11} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{T}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \tilde{A}(\beta) \exp\left[-(\beta - \Phi(s, m))^2 T\right], \quad (3.24)$$

onde

$$\tilde{A}(\beta) = \left[2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 - 2(\beta - \Phi) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \right) \right]. \quad (3.25)$$

Também pode ser mostrado, analogamente à equação (3.24), que

$$G_{22} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{T}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \tilde{B}(\beta) \exp\left[-(\beta - \Phi(s, m))^2 T\right], \quad (3.26)$$

em que

$$\tilde{B}(\beta) = \left[2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial m} \right)^2 - 2(\beta - \Phi) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial m^2} \right) \right]. \quad (3.27)$$

Para as componentes da diagonal secundária, temos

$$G_{21} = G_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{T}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \tilde{C}(\beta) \exp\left[-(\beta - \Phi(s, m))^2 T\right], \quad (3.28)$$

no qual

$$\tilde{C}(\beta) = \left[4T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial m} \right) (\beta - \Phi)^2 \right]. \quad (3.29)$$

Ao lembrar que (DEBNATH; BHATTA, 2014; HARRIS; ARFKEN; WEBER, 2013)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{T}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta \psi(\beta) \exp\left[-(\beta - \Phi(s, m))^2 T\right] = \psi(\Phi), \quad (3.30)$$

as soluções das equações (3.24)-(3.26) são

$$G_{11} = 2 \left(\frac{\partial \Phi(s, m)}{\partial s} \right)^2, \quad (3.31)$$

$$G_{22} = 2 \left(\frac{\partial \Phi(s, m)}{\partial m} \right)^2, \quad (3.32)$$

e

$$G_{21} = G_{12} = 0. \quad (3.33)$$

Consequentemente, a matriz de informação de Fisher \mathbf{H} é expressa por

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 \left(\frac{\partial \Phi(s, m)}{\partial s} \right)^2 & 0 \\ 0 & 2 \left(\frac{\partial \Phi(s, m)}{\partial m} \right)^2 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Observa-se incidentalmente que como W^1 e W^2 são estatisticamente independentes, o valor médio ou o valor esperado de $\langle W^1 W^2 \rangle$ torna-se o produto dos respectivos valores médios $\langle W^1 \rangle \langle W^2 \rangle$ (TOMÉ; OLIVEIRA, 2014; KAMPEN, 2007; SALINAS, 2001). Como cada um deles é zero, então $G_{21} = G_{12}$ também são nulos, conforme evidenciado acima.

Podemos então concluir, sem cálculos adicionais, que a resultante matriz de Fisher $H = G_{\alpha\mu}(X)$ é definida positiva, pois é uma matriz quadrada diagonal cujas componentes são expressas por derivadas de primeira ordem da forma normal $\Phi(s, m)$ ao quadrado, que se mostram independentes de β . Por conseguinte, $X = (X^1, X^2) = (s, m)$ desempenham o papel de coordenadas ortogonais de um ponto $\mathcal{P}_X \in \Omega$, uma vez que se o tensor métrico é diagonal então o sistema de coordenadas é dito ortogonal (HAZEWINKEL, 2013; LOPER, 2017).

Deve-se notar, finalmente, que a matriz H nos levou à invariante geométrica denominada de segunda forma fundamental (DEZA; DEZA, 2012; KREYSZIG, 2013),

$$d\ell^2 = G_{11}(ds)^2 + G_{22}(dm)^2, \quad (3.35)$$

em que $d\ell$ denota a distância quadrática local no espaço de parâmetros. Com o objetivo de obter declarações locais em mente, definimos essa métrica em relação ao estado de referência s^* . Portanto, é importante reconhecer que os elementos métricos $G_{\alpha\mu}$ são avaliados no estado $s = s^*$. Definir métricas riemannianas na vizinhança de um estado de referência não é uma ideia nova aqui e já foi discutida em outros contextos (RUPPEINER, 2012; RUPPEINER, 2017).

A partir da determinação da métrica de Fisher, que descreve uma adequada distância no espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos, procederemos agora ao cálculo da curvatura escalar de Ricci.

A curvatura R é uma consequência natural e, ainda, uma aplicação imediata da geometria de Fisher acima, já que revela propriedades intrínsecas de sistemas físicos, principalmente nas vizinhanças de pontos críticos. Além disso, vale destacar que o cálculo de R é invariante às coordenadas e que seu comportamento divergente encontra-se rigorosamente relacionado aos fenômenos de transição de fase.

A métrica da equação (3.35) induz uma curvatura R no espaço de parâmetros⁴,

$$R = \frac{1}{\sqrt{G}} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial G_{22}}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial G_{11}}{\partial m} \right) \right], \quad (3.36)$$

em que $G \equiv G_{11}G_{22}$. Originalmente, a expressão da curvatura escalar apresenta um sinal negativo em sua definição. Daqui em diante, nós nos limitamos, no entanto, à convenção padrão de sinal adotada por Weinberg (RUPPEINER, 2010; WEINBERG, 1972), na qual o sinal negativo de R é suprimido.

Contudo, para considerar R como uma nova maneira para investigar sistemas dinâmicos, do mesmo modo como é feito para sistemas termodinâmicos, devemos, portanto, interpretar a

⁴ Essa última equação é obtida empregando-se as componentes do tensor métrico no cálculo dos símbolos de Christoffel e, portanto, no tensor de curvatura de ordem quatro (KREYSZIG, 2013).

curvatura de acordo com a nossa abordagem estatística e, além disso, investigar as condições para a ocorrência de bifurcações da equação (3.36).

É possível reconhecer que a curvatura R apresentada acima está associada a nossa formulação, visto que, estatisticamente, podemos concluir que R é uma função expressa a partir dos segundos e terceiros momentos estatísticos das variáveis W^α . Fisicamente, por sua vez, reconhece-se que R é inversamente proporcional às derivadas de primeira ordem de $\Phi(s, m)$. Em sua totalidade, contudo, como os termos $\partial\Phi(s, m)/\partial m$ contribuem com uma constante diferente de zero, então, conseqüentemente, podemos concluir da equação (3.36) que R torna-se consideravelmente grande ou pequeno com a diminuição do termo $\partial\Phi(s, m)/\partial s$. Isto é,

$$R \rightarrow \pm\infty \quad \text{quando} \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right) \rightarrow 0, \quad (3.37)$$

o que implica diretamente na notável condição para a ocorrência de bifurcações expressa pela equação (3.2), quando os coeficientes são avaliados no valor crítico (s_C^*, m_C) . Assim, prevemos que R deve divergir nas singularidades de sistemas dinâmicos, que aparecem nos pontos de bifurcação, ou seja, nos valores críticos do ponto fixo s^* .

Conforme evidenciado acima, na investigação de sistemas físicos através da abordagem da geometria de informação, o comportamento divergente de R , nos pontos críticos, marca os fenômenos de transição de fase (SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021; VETSOV, 2021; KOLEV; STAYKOV; VETSOV, 2019; XU; WU; YANG, 2020; RUPPEINER; SEFTAS, 2020; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990). Portanto, nossa formulação está em conformidade com o ponto de vista da geometria de informação, uma vez que somos levados a concluir que a divergência de R nas proximidades dos pontos de bifurcação implica no fenômeno de bifurcações, assim como a divergência de R nas proximidades dos valores críticos marca a ocorrência de transições de fase em sistemas físicos.

Podemos concluir, portanto, estabelecendo uma nova e intrigante possibilidade para investigar e descrever sistemas dinâmicos, em particular, nas vizinhanças dos pontos de bifurcação, através do cálculo da curvatura R , que se mostra como uma quantidade invariante vantajosa, pois é consistente com a teoria moderna de fenômenos críticos, e, por conseguinte, bifurcações em sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais.

3.3 Estabilidade e o sinal de R

Estabilidade é um conceito crucial na compreensão de sistemas físicos. Nesse sentido, investigaremos no decorrer desta seção os conceitos de estabilidade local e global sob a perspectiva dos desenvolvimentos recentes da geometria de informação baseada na interpretação da métrica riemanniana e o sinal da curvatura escalar (SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021; VETSOV, 2021; KOLEV; STAYKOV; VETSOV, 2019; XU; WU; YANG, 2020; RUPPEINER; SEFTAS, 2020; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990; JANKE; JOHNSTON;

KENNA, 2004; ABDEL-ALL; ABD-ELLAH; MOUSTAFA, 2003).

Em sua totalidade, o comportamento das derivadas segundas de potenciais termodinâmicos caracteriza o critério de estabilidade de sistemas físicos na mecânica estatística. Mais precisamente, se o potencial termodinâmico em estudo é uma função convexa de variáveis extensivas e, ainda, uma função côncava de variáveis intensivas, então podemos concluir que o sistema físico é estável (RAU, 2017).

No contexto da geometria de informação, no entanto, Janyszek and Mrugała demonstraram que a curvatura R é um função das segundas e terceiras derivadas de potenciais termodinâmicos. Além disso, R diverge em pontos críticos. Como consequência desses fatos, R pode também ser interpretada como uma medida de ordem superior da estabilidade de sistemas físicos (JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b).

Estudos anteriores revelaram importantes conclusões à cerca da interpretação do sinal de R sobre a estabilidade (JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990; OSHIMA; OBATA; HARA, 1999). No estudo de gases quânticos, por exemplo, o sinal da curvatura escalar é uniformemente negativo para o gás de Bose. Além disso, a curvatura R decresce de zero para menos infinito na região de condensação, o que, por sua vez, indica que bósons são menos estáveis⁵. Todavia, o sinal da curvatura R para o gás de Fermi revelou ser uniformemente positivo. Isso indica que férmions são mais estáveis do que bósons. As conclusões extraídas através da interpretação do sinal de R , surpreendentemente, estão em pleno acordo com o princípio de Pauli (JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990; OSHIMA; OBATA; HARA, 1999). Diante do exposto, podemos então escrever que sistemas estáveis admitem R positivo, ao passo que sistemas instáveis exibem R negativo.

Contudo, devemos reconhecer que R é uma quantidade que descreve a estabilidade local de sistemas físicos, já que a determinação da curvatura revela quando a fase termodinâmica está em máximo ou mínimo local nas vizinhanças de pontos críticos, dado o fato de R ser uniformemente positivo ou negativo a depender dos valores dos parâmetros do sistema em estudo (VETSOV, 2021; KOLEV; STAYKOV; VETSOV, 2019). Assim, as condições suficientes e necessárias para assegurar a estabilidade global termodinâmica, seguindo considerações probabilísticas, são determinadas através da verificação dos requisitos do critério de Sylvester (VETSOV, 2021; KOLEV; STAYKOV; VETSOV, 2019; RUPPEINER; SEFTAS, 2020; RUPPEINER, 2010;

⁵ É importante evidenciar aqui que nós seguimos a convenção padrão de sinal de Weinberg (RUPPEINER, 2010; WEINBERG, 1972).

RUPPEINER, 1979; RUPPEINER, 1995; LIAO, 2013), em que

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= G_{11} > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix} > 0.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Se todos os menores principais do tensor métrico são positivo-definidos, isto é, os determinantes $\Delta_i > 0$, logo os elementos métricos termodinâmicos $G_{\alpha\mu}$ constituem uma matriz positiva-definida. Consequentemente, podemos concluir que o sistema é globalmente estável, independentemente do sinal de R . Nota-se, parenteticamente, que Δ_3 é negligenciado em geometrias bidimensionais.

Tendo isso em mente, a questão que naturalmente é colocada aqui é se tais noções de estabilidade podem ser estendidas a nossa formulação geométrica de sistemas dinâmicos.

Para descrever a interpretação da estabilidade em nossa abordagem do ponto de vista da geometria riemanniana, nós examinamos a relação entre o critério de estabilidade de sistemas dinâmicos e o resultado expresso pela Eq. (3.37) que relaciona a curvatura escalar.

De modo geral, há diferentes definições de estabilidade nas ciências não lineares (MONTEIRO, 2006; THOMPSON, 2002; HAZEWINKEL, 2010; WASZCZYSZYN; CICHÓN; RADWAŃSKA, 2013; MEIROVITCH, 1980; PEIXOTO, 1962). Tendo em mente os propósitos do presente trabalho, podemos nos restringir à estabilidade de estados de equilíbrio e a estabilidade estrutural, ou seja, a estabilidade de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais.

A estabilidade de pontos de equilíbrio se baseia no estudo do comportamento das soluções de equilíbrio de equações diferenciais em virtude da perturbação de condições iniciais (MONTEIRO, 2006; THOMPSON, 2002). Essa compreensão de estabilidade pode também ser compreendida sob a perspectiva da TCB. Mais precisamente, a interpretação de estabilidade de um estado de equilíbrio é dada pela análise do sinal das derivadas segundas do potencial $U(s, m)$ ou das derivadas primeiras da forma normal $\Phi(s, m)$ nas proximidades de estados críticos de equilíbrio de sistemas dinâmicos autônomos (IL'YASHENKO et al., 2013; LEONEL, 2021).

Em princípio, devemos salientar que para um estado de equilíbrio estável, pode-se estabelecer considerações de estabilidade para o sistema dinâmico em estudo, isto é, podemos escrever que um sistema dinâmico é estável se for possível provar a existência das funções de Lyapunov (MONTEIRO, 2006; DASGUPTA, 2006). A formulação teórica dessas funções está essencialmente baseada na generalização do conceito de energia total de um dado sistema

físico. Entretanto, a construção de tais funções não é uma tarefa simples. Na realidade, a escassez de métodos robustos para obter, quiçá, gerar as funções de Lyapunov impõe diversas dificuldades e problemas práticos no estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos através desse método (MONTEIRO, 2006; STROGATZ, 2014).

Por outro lado, a estabilidade estrutural está associada com a conservação da topologia do retrato de fases quando as equações diferenciais do sistema investigado são perturbadas através da variação de parâmetros de controle (MONTEIRO, 2006; THOMPSON, 2002; HAZEWINKEL, 2010; WASZCZYSZYN; CICHÓN; RADWAŃSKA, 2013; MEIROVITCH, 1980; PEIXOTO, 1962). Em outras palavras, um sistema é dito estruturalmente estável se o fluxo resultante é topologicamente equivalente ao inicial para uma perturbação suficientemente pequena dos parâmetros de controle das equações diferenciais que descrevem o sistema.

Além disso, é preciso ser observado que podemos também entender a estabilidade estrutural sob a perspectiva local. Em conformidade com Hazewinkel (HAZEWINKEL, 2010), pode-se definir o conceito de estabilidade estrutural local como a preservação de todas as propriedades topológicas do sistema em alguma vizinhança de um ponto de equilíbrio s^* de um sistema dinâmico contínuo sob alguma perturbação suficientemente pequena desse sistema. Em outras palavras, a estabilidade estrutural local denota a propriedade não de pontos de equilíbrio s^* , porém do sistema dinâmico considerado na vizinhança desse estado s^* .

Tendo introduzido as diferentes noções de estabilidade, apresentaremos agora a relação entre os conceitos de bifurcações, estabilidade estrutural e a curvatura escalar de Ricci. Com base no exposto, se os parâmetros de controle do sistema dinâmico contínuo, m , por exemplo, forem variados nas proximidades de m_C de tal maneira a impor mudanças qualitativas no retrato de fases, então podemos escrever que o sistema dinâmico não é mais localmente estruturalmente estável, mas estruturalmente instável. Precisamente, podemos escrever que essa mudança topológica é chamada de bifurcação. Além disso, o ponto de bifurcação (s_C^*, m_C) é aquele em que a modificação qualitativa do retrato de fases ocorre e leva à perda da estabilidade estrutural do sistema.

Dessa forma, podemos concluir que bifurcações estão, é claro, intimamente relacionadas ao conceito de estabilidade estrutural de sistemas dinâmicos. Com base nisso, voltemos agora ao resultado expresso pela Eq. (3.37), que diretamente implica na surpreendente condição para a ocorrência de bifurcações.

Conforme podemos demonstrar, Eq. (3.37) basicamente nos ensina que a curvatura R deve divergir nas singularidades de sistemas dinâmicos. Essas, por sua vez, aparecem em pontos de bifurcação. Sob a interpretação da Eq. (3.37) e as definições de estabilidade apresentadas acima, podemos escrever que se a curvatura R diverge no ponto de bifurcação de um sistema dinâmico e, à rigor, bifurcações estão relacionadas com a perda da estabilidade estrutural do sistema em estudo, então podemos concluir que a curvatura R pode ser interpretada como uma nova medida da ordem superior da estabilidade de sistemas dinâmicos.

Contudo, no contexto da geometria riemanniana (JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; RUPPEINER, 2017), devemos reconhecer que a curvatura escalar é uma medida local da estabilidade, dado que a determinação de R apenas revela se a fase está em máximo ou mínimo local na vizinhança dos pontos críticos do sistema físico, dado o fato que R pode ser uniformemente positivo ou negativo a depender dos valores dos parâmetros de controle.

Assim, em estreita analogia com a interpretação do sinal de R no contexto da geometria riemanniana (JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; RUPPEINER, 2017) e do conceito de estabilidade estrutural local (HAZEWINKEL, 2010), nós podemos entender que a curvatura escalar R revela-se como um medida das propriedades da estabilidade do sistema dinâmico nas vizinhanças dos valores críticos dos estados de equilíbrio (MONTEIRO, 2006; HAZEWINKEL, 2010). Mais do que isso, podemos prever que a curvatura escalar será localmente positiva para sistemas estruturalmente estáveis e negativa para sistemas estruturalmente instáveis.

Todavia, devemos salientar novamente que R é uma medida local da estabilidade. Portanto, com o propósito de estabelecer sentenças globais, retornaremos à interpretação de estabilidade global no contexto da geometria riemanniana.

Em analogia com o tratamento da mecânica estatística, pode-se observar que as Eqs. (3.31)-(3.34) satisfazem as condições necessárias e suficientes do critério de Sylvester, Eq. (3.38). Consequentemente, podemos escrever que os sistemas dinâmicos descritos pela equação diferencial Eq. (3.1) são globalmente estáveis, independentemente dos possíveis sinais que R pode vir a apresentar.

Todavia, precisamos ressaltar que essa estabilidade global através do ponto de vista do critério de Sylvester deve ser interpretada no sentido da estabilidade estrutural do sistema, ou seja, a estabilidade do sistema como um todo, pois a violação do critério de Sylvester é uma condição necessária para que o sistema dinâmico, Eq. (3.1), alcance o ponto de bifurcação e se torne estruturalmente instável (MONTEIRO, 2006; WASZCZYSZYN; CICHÓN; RADWAŃSKA, 2013; MEIROVITCH, 1980; PEIXOTO, 1962). Alternadamente, podemos também escrever que a verificação das condições do critério de Sylvester é necessária para que um sistema dinâmico exiba estabilidade estrutural.

Para concluir, desenvolvemos e estendemos até agora, muitos recursos da geometria de informação de Fisher para investigar bifurcações de sistemas dinâmicos expressos por equações diferenciais. Como resultado, obtivemos uma quantidade intrigante denominada de curvatura escalar de Ricci—aquí e em diante denotada por R — que se revela como uma função das derivadas de Φ .

Sob a ótica da geometria riemanniana, também obtivemos novas interpretações do conceito de estabilidade. Em particular, concluímos que a curvatura R apresenta-se como uma nova medida da estabilidade estrutural de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais. Consequentemente, podemos prever que R deverá ser positiva para sistemas localmente e

estruturalmente estáveis. Finalmente, deve ser observado que a métrica positiva-definida do sistema dinâmico de Eq. (3.1) satisfaz as condições necessárias e suficientes para assegurar a estabilidade global no sentido estrutural.

3.4 Análise de escala

Esta seção dedica-se em investigar classes de sistemas dinâmicos descritos por modelos de bifurcações em conformidade com o formalismo de escala.

Conforme argumentado por Ruppeiner (RUPPEINER, 1979; RUPPEINER, 1995) e outros (MRUGAŁA, 1984; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989a; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK, 1990; WIDOM, 1965; KADANOFF, 1966; STANLEY, 1971), a teoria moderna de fenômenos críticos se baseia em dois pilares fundamentais: (i) hipóteses de escala, em que se conjectura que potenciais termodinâmicos, nas vizinhanças da criticalidade, podem ser expressos como funções homogêneas generalizadas (FHG) de seus argumentos; (ii) universalidade, que estabelece que as FHG e os expoentes críticos são os mesmos dentro de determinadas classes de universalidade.

Desta maneira, a análise de escala dos fenômenos críticos para os modelos de bifurcações considerados neste trabalho, em concordância com o formalismo de escala, pode revelar expoentes críticos e relações de escala que possibilitam definir classes de universalidade para bifurcações.

Por conseguinte, objetiva-se com esta seção empregar o formalismo de escala adotado e bem-desenvolvido em sistemas dinâmicos e termodinâmicos, no âmbito da geometria de informação (SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021; RUPPEINER, 1979; RUPPEINER, 1995; MRUGAŁA, 1984; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989a; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK, 1990), a fim de estudar o comportamento de R das classes de bifurcações a serem consideradas neste trabalho.

Para alcançar esse objetivo e, por conseguinte, estudar o comportamento de R nas vizinhanças do ponto crítico com foco na determinação de propriedades de escala, considere que $I(\beta; s, m) = -\ln\rho(\beta; s, m)$ possa ser expresso como a soma de uma parte regular $I_0(\beta)$, e uma parte singular, $\tilde{I}(s, m)$, que contém todas as anomalias do comportamento crítico. Partindo dessa premissa, temos

$$I(\beta; s, m) = I_0(\beta) + \tilde{I}(s, m).$$

A hipótese de escala consiste na conjectura de que \tilde{I} possa ser expressa como uma FHG dos parâmetros s e m . Isto é,

$$\tilde{I}(s, m) = \lambda^{-1} \tilde{I}(s\lambda^b, m\lambda^a), \quad \lambda > 0, \quad (3.39)$$

em que a e b são parâmetros de escala; λ , uma constante positiva.

Deve-se observar, entre parênteses, que essa escolha particular de FHG é motivada pelo fato de que o resultado da integral para as segundas derivadas de I em relação aos parâmetros s e m são independentes de β , conforme demonstramos nas seções anteriores ⁶.

Com base no exposto, ao estabelecer $\lambda = m^{-1/a}$, veremos que

$$\tilde{I}(s, m) = m^{1/a} \tilde{I}(s m^{-b/a}, 1) = m^{1/a} F(s m^{-b/a}). \quad (3.40)$$

Supondo que F seja bem comportada, podemos agora determinar expoentes críticos (ν , ξ , ζ , ω), que podem ser expressos em função dos dois fatores de escala a e b . Para a determinação da curvatura escalar, começamos com a expressão

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial^3 \tilde{I}}{\partial s \partial m^2} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial^3 \tilde{I}}{\partial m \partial s^2} \right) \right) \right]. \quad (3.41)$$

No caso em que $m > m_C$ e $s = s^*$, conclui-se da equação (3.40) que

$$\frac{\partial \tilde{I}}{\partial s} = m^{(1-b)/a} F'(s^* m^{-b/a}) = 0 \Rightarrow F'(s^* m^{-b/a}) = 0, \quad (3.42)$$

visto que a proximidade das distribuições de probabilidade é dada por termos de segunda ordem (FISHER, 1922; JANKE; JOHNSTON; KENNA, 2004).

Para simplificar a notação dos cálculos que se seguem, coloca-se $D = 1/a$, $d = 1/b - 1$ e $u = -b/a$. A partir dessa escolha particular, identificamos

$$\nu = 2 - D, \quad \xi = -2u - D, \quad (3.43)$$

$$\zeta = D + u, \quad \omega = \frac{1}{d}, \quad (3.44)$$

e também leis de escala,

$$\nu + 2\zeta + \xi = 2, \quad \nu + \zeta(1 + \omega) = 2, \quad \omega = \frac{\xi}{\zeta} + 1, \quad (3.45)$$

donde é possível concluir que o coeficiente ν não é maior que 2. Em virtude de $F'(s^* m^u) = 0$, temos

$$\frac{\partial^2 \tilde{I}}{\partial s^2} = m^{D+2u} \frac{\partial^2 F(s^* m^u)}{\partial s^2}, \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{I}}{\partial m^2} = (-1 + D) D m^{-2+D} F(s^* m^u), \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial^3 \tilde{I}}{\partial s^2 \partial m} = (D + 2u) m^{-1+D+2u} \frac{\partial^2 F(s^* m^u)}{\partial s^2}, \quad (3.48)$$

⁶ Além disso, é importante destacar que funções como a apresentada acima são obtidas usando métodos da teoria de renormalização (WILSON, 1971).

$$\frac{\partial^2 \tilde{I}}{\partial s \partial m} = \frac{\partial^3 \tilde{I}}{\partial m^2 \partial s} = 0, \quad (3.49)$$

e

$$G = (-1 + D) D m^{-2+2D+2u} F(s^*) \frac{\partial^2 F(s^* m^u)}{\partial s^2}. \quad (3.50)$$

Assim, das equações (3.41)-(3.50), é possível obter a curvatura R fenomenológica

$$R_{\text{fenomenológica}} = \frac{u(D + 2u)m^{-D}}{(-1 + D)DF(s^* m^u)}. \quad (3.51)$$

Todavia, a Eq. (3.51) também pode ser expressa em termos dos expoentes críticos em virtude da Eq. (3.43). Logo,

$$R_{\text{fenomenológica}} = \frac{m^{\nu-2}\xi(\xi - \nu + 2)}{2(1 - \nu)(2 - \nu)F(s^* m^u)}. \quad (3.52)$$

O resultado encontrado para a curvatura escalar acima está em plena conformidade com os resultados determinados por Ruppeiner e Janyszek em estudos anteriores envolvendo o emprego da análise de escala no contexto da geometria de informação sob a convenção de sinal de Weinberg (MRUGAŁA, 1984; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989a; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK, 1990).

Analisando-se a equação (3.52) nota-se que o denominador é positivo e diferente de zero. Segundo Janyszek (JANYSZEK, 1990), a positividade desse termo não implica que $\nu < 1$ ou $\nu > 1$, uma vez que $F(s^* m^u)$ pode ser positivo ou negativo. Além disso, vale destacar que no limite em que m se aproxima de m_C , é possível prever que a curvatura escalar tende a divergir. Consequentemente, o expoente crítico ξ será maior que ν nesse regime.

Para concluir, até agora, desenvolvemos e estendemos muitos recursos da geometria de informação de Fisher para investigar bifurcações de sistemas dinâmicos expressos por equações diferenciais. Como resultado, obtivemos uma quantidade intrigante, denominada de curvatura escalar⁷ que se revela como uma função das derivadas das funções não lineares dos modelos matemáticos de bifurcações. Como os critérios de estabilidade em sistemas dinâmicos são dados pela análise das primeiras derivadas de Φ , podemos concluir que R é uma medida superior da estabilidade local.

Além do sinal de R nas vizinhanças das bifurcações, deve-se ressaltar que a métrica definida positiva dos sistemas dinâmicos satisfaz as condições suficientes e necessárias para garantir a estabilidade global devido ao fato desses últimos estarem em plena conformidade com o posicionamento de estudos anteriores na geometria de informação, dado que a métrica de Fisher satisfaz as condições do critério de Sylvester.

Por fim, através das hipóteses de escala, é possível prever ainda propriedades que dizem respeito ao comportamento da curvatura R nas vizinhanças da criticalidade. Nesse sentido, ao estabelecer um paralelo entre a curvatura R determinada para os modelos de bifurcações com a equação (3.52), encontrada por meio das suposições gerais de escala, poder-se-á, portanto, obter leis de escala, expoentes críticos e, ainda, definir classes de universalidade para modelos de bifurcações e, de modo geral, sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais.

3.5 Generalização para sistemas bidimensionais

Todo o desenvolvimento das seções anteriores permaneceu restrito ao domínio de bifurcações no contexto de sistemas dinâmicos unidimensionais. Tal consideração não consiste de uma restrição, mas, ao invés, pode ser estendida à vontade. No presente trabalho, no entanto, focaremos apenas em aplicações de sistemas dinâmicos bidimensionais, enquanto que uma aplicação própria de nossos métodos geométricos a casos N -dimensionais será discutida de forma mais incisiva em publicações futuras, em que ciclos-limite e bifurcações de Hopf serão investigados em detalhes.

O programa da generalização a ser apresentada se baseia na construção da estrutura métrica riemanniana do espaço de parâmetros de sistemas bidimensionais. Nossa atenção será dedicada em aplicar os métodos da geometria de informação para investigar bifurcações homoclínicas.

Portanto, nós organizamos esta seção da seguinte forma. Apresentaremos de forma revisada primeiro os principais desenvolvimentos da seção anterior sobre a derivação da função densidade de probabilidade de sistemas dinâmicos unidimensionais. Em seguida, estenderemos a abordagem original para sistemas de equações diferenciais. Finalmente, nos dedicaremos a determinação da métrica de Fisher e da curvatura escalar de Ricci.

⁷ No decorrer dos demais capítulos, iremos nos referir à curvatura escalar apenas por curvatura R .

Em plena conformidade com o exposto na seção 3.2, a equação diferencial que representa o modelo matemático de bifurcações em uma dimensão espacial, Eq. (3.1), nos leva a uma distribuição de probabilidade Gaussiana com auxílio das denominadas funções características de Fourier.

De modo a generalizar a Eq. (3.12), precisamos estender o modelo matemático original de bifurcações. Nesse sentido, o modelo para um sistema dinâmico bidimensional é dado por

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{ds_1}{d\tau} = \Phi_1(s_1, s_2), \\ \beta_2 = \frac{ds_2}{d\tau} = \Phi_2(s_1, s_2). \end{cases} \quad (3.53)$$

Nesse presente modelo, empregamos a seguinte notação: β_1 e β_2 são os momentos lineares. Aqui, s_1 e s_2 configuram os parâmetros de ordem. τ corresponde ao tempo. Φ_1 and Φ_2 denotam funções não-lineares, em que se depreende que essas podem apresentar dependência em um ou mais parâmetros de controle. Finalmente, observamos que $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ assinala a existência de estados de equilíbrio (s_1^*, s_2^*) dos parâmetros de ordem. Além disso, precisamos destacar que o presente modelo matemático bidimensional de bifurcações, Eq. (3.53), é vantajoso, visto que também descreve de modo geral a forma de sistemas bidimensionais em dinâmicas não-lineares (IL'YASHENKO et al., 2013; LESNE; LAGUËS, 2011).

Para o modelo de bifurcações apresentando acima, a distribuição delta de Dirac de probabilidade em duas dimensões passa agora ser dada por

$$\rho(\beta_1, \beta_2) = \delta(\beta_1 - \Phi_1(s_1, s_2), \beta_2 - \Phi_2(s_1, s_2)), \quad (3.54)$$

ou, simplesmente,

$$\rho(\beta_1, \beta_2) = \delta_T(\beta_1 - \Phi_1(s_1, s_2)) \delta_T(\beta_2 - \Phi_2(s_1, s_2)), \quad (3.55)$$

que também pode ser reduzida a bem conhecida representação Gaussiana (PINELE; COSTA; STRAPASSON, 2019; HASSANI, 2009; KATSIKADELIS, 2002)

$$\rho(\beta_1, \beta_2) = \left(\frac{T}{\pi}\right) e^{-T[(\beta_1 - \Phi_1)^2 + (\beta_2 - \Phi_2)^2]}. \quad (3.56)$$

A determinação da densidade de probabilidade de Eq. (3.55) segue do mesmo procedimento empregado na dedução de Eq. (3.12).

Deve-se observar que a última equação é consistente apenas quando $T \rightarrow \infty$. Em conformidade com os desenvolvimentos contidos nas seções anteriores, para bifurcações poderem ser interpretadas como versões temporais de transições de fase em sistemas dinâmicos bidimensionais, precisamos compreender T como um caso limite do que é esperado ser uma correta aproximação às soluções de Eq. (3.53) em tempos longos, porém finitos. Com base nisso, podemos então agora avançar para a construção da estrutura métrica riemanniana e, por conseguinte, da respectiva curvatura R .

Para introduzir a estrutura Riemannian ao espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos bidimensionais, Eq. (3.53), consideremos Ω uma família de distribuições de probabilidade. Aqui, Ω é parametrizada por três parâmetros reais ⁸, em que

$$\Omega = \left\{ \mathcal{P}_X = \frac{\rho(\beta_1, \beta_2; X)}{T}; T \in \mathbb{R}^+; X \in \mathbb{R}^3 \right\}, \quad (3.57)$$

onde o modelo estatístico Ω carrega a estrutura de uma variedade riemanniana \mathcal{M} de variáveis β_1 e β_2 . Nesse modelo, $X = (X^1, X^2, X^3) = (s_1, s_2, m)$ assume o papel de coordenadas de um ponto $\mathcal{P}_X \in \Omega$. Aqui, a métrica é definida pela matriz de Fisher $H = (G_{\alpha\mu}(X))$.

Seguindo o procedimento usado na obtenção das componentes do tensor métrico $G_{\alpha\mu}$ para sistemas unidimensionais, apresentado nas seções anteriores, nós encontramos

$$G_{\alpha\alpha} = \left(\frac{T}{\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta_1 d\beta_2 A_\alpha e^{-T[(\beta_1 - \Phi_1)^2 + (\beta_2 - \Phi_2)^2]}, \quad (3.58)$$

onde

$$A_\alpha = A_\alpha(\beta_1, \beta_2) = \left[2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X^\alpha} \right)^2 - 2(\beta_1 - \Phi_1) \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial (X^\alpha)^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X^\alpha} \right)^2 - 2(\beta_2 - \Phi_2) \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial (X^\alpha)^2} \right) \right].$$

Para as componentes da diagonal secundária, nós temos

$$G_{\alpha\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta_1 d\beta_2 B_{\alpha\mu} e^{-T[(\beta_1 - \Phi_1)^2 + (\beta_2 - \Phi_2)^2]}, \quad (3.59)$$

donde

$$B_{\alpha\mu} = B_{\alpha\mu}(\beta_1, \beta_2) = \frac{4T^2}{\pi} \left[(\beta_1 - \Phi_1)^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X^\alpha} \right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X^\mu} \right) + (\beta_2 - \Phi_2)^2 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X^\alpha} \right) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X^\mu} \right) + (\beta_1 - \Phi_1)(\beta_2 - \Phi_2) \times \left(\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X^\alpha} \right) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X^\mu} \right) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X^\mu} \right) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X^\alpha} \right) \right].$$

Nas Eq. (3.58)-(3.59), ambos os sub-índices α and μ assumem valores inteiros variando de 1 a 3, onde $\alpha \neq \mu$. Aqui, $X^1 = s_1$, $X^2 = s_2$ e $X^3 = m$. Além disso, convém destacar que o limite $T \rightarrow \infty$ está compreendido nas Eqs. (3.58)-(3.59).

⁸ Por questões de simplicidade, estamos considerando um sistema dinâmico governado por equações diferenciais em que há apenas um único parâmetro de controle. Todavia, isso novamente não deve ser interpretado como uma restrição, já que a presente abordagem também pode ser estendida para sistemas com mais de um parâmetro de controle.

Ao lembrarmos que (HASSANI, 2009; KATSIKADELIS, 2002)

$$\begin{aligned} \left(\frac{T}{\pi}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta_1 d\beta_2 \psi(\beta_1, \beta_2) e^{-T[(\beta_1 - \Phi_1)^2 + (\beta_2 - \Phi_2)^2]} \\ = \psi(\Phi_1, \Phi_2), \end{aligned}$$

em que o limite $T \rightarrow \infty$ é compreendido, as soluções das Eqs. (3.58)-(3.59) assumem a forma

$$G_{\alpha\alpha} = 2 \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X^\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial X^\alpha} \right)^2 \right], \quad (3.60)$$

$$G_{\alpha\mu} = G_{\mu\alpha} = 0. \quad (3.61)$$

Portanto, podemos concluir, sem a necessidade de mais cálculos que sistemas dinâmicos bidimensionais admitem uma matriz de Fisher, $H = G_{\alpha\mu}(X)$, positiva-definida, dado o fato de que essa é uma matriz quadrada diagonal cujas componentes, ou entradas, são derivadas de primeira ordem quadráticas das funções não-lineares Φ_i . Além disso, pode ser observado que os elementos métricos mostram-se independentes de β_1 e β_2 .

Precisamos observar, finalmente, que a matriz H nos leva a segunda forma fundamental seguinte (DEZA; DEZA, 2012; KREYSZIG, 2013),

$$d\ell^2 = G_{11}(ds_1)^2 + G_{22}(ds_2)^2 + G_{33}(dm)^2, \quad (3.62)$$

em que $d\ell$ denota a distância quadrática local no espaço de parâmetros. Com o nosso foco em investigar bifurcações globais em mente, não podemos definir a métrica nas vizinhanças de estados referenciais. Do contrário, a métrica riemanniana nos levaria a uma curvatura nula, da qual não é possível extrair informação alguma sobre o sistema dinâmico em estudo⁹.

Por meio da determinação da métrica de Fisher, que corresponde uma distância própria no espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos, nos dedicaremos agora ao cálculo da curvatura escalar riemanniana.

A métrica de Eq. (3.62) induz uma curvatura R sob a variedade do espaço de parâmetros X . O desafio agora se baseia em derivar a expressão da curvatura R para geometrias tridimensionais. Em dimensões superiores, precisamos notar, no entanto, que a curvatura não é mais dada pela Eq. (3.36). O programa geral para escrever a curvatura escalar no presente cenário consiste em calcular os símbolos de Christoffel e, por conseguinte, o tensor de curvatura de rank quatro. Dessa maneira, calculamos R como segue abaixo (KREYSZIG, 2013).

Primeiro, é necessário obter os símbolos de Christoffel. Isto é,

$$\Gamma_{\xi\sigma}^\alpha = \frac{1}{2} G^{\mu\alpha} (G_{\mu\xi,\sigma} + G_{\mu\sigma,\xi} - G_{\xi\sigma,\mu}), \quad (3.63)$$

⁹ Na realidade, $R = 0$ não nos ensina se o sistema em estudo admite bifurcações, porém permite determinar precisamente o caráter das trajetórias do espaço de parâmetros.

em que, a notação em vírgula denota a diferenciação parcial aos parâmetros s_1, s_2 and m .

Com base nisso, calculamos o tensor de curvatura empregando

$$R_{\xi\sigma l}^{\alpha} = \Gamma_{\xi\sigma, l}^{\alpha} - \Gamma_{\xi l, \sigma}^{\alpha} + \Gamma_{\xi\sigma}^{\mu} \Gamma_{\mu l}^{\alpha} - \Gamma_{\xi l}^{\mu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\alpha}. \quad (3.64)$$

Finalmente, a curvatura escalar de Ricci será

$$R = G^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{\vartheta}. \quad (3.65)$$

Podemos observar que a obtenção de R no espaço de parâmetros de sistemas dinâmicos bidimensionais envolve cálculos algébricos não triviais, já que o espaço corresponde a uma geometria tridimensional¹⁰.

Para concluir, estendemos a geometria de informação de Fisher para investigar bifurcações de sistemas bidimensionais expressos por equações diferenciais. A presente generalização está em pleno acordo com o ponto de vista da informação de Fisher em geometrias superiores (VETSOV, 2021; RUPPEINER, 1979; RUPPEINER, 1995).

No próximo capítulo, devemos aplicar e ilustrar a abordagem desenvolvida nos capítulos anteriores para calcular e interpretar a curvatura R e a métrica riemanniana para diferentes modelos de bifurcações locais e globais ao longo do regime físico. É importante destacar que se entende aqui por regime físico como sendo o domínio em que são válidos os modelos, os parâmetros, as variáveis e as teorias que modelam os fenômenos de bifurcações em estudo. Neste trabalho, portanto, o domínio em que a TGB é válida é o domínio real.

¹⁰ Aqui, nós, mais uma vez, nos restringimos a convenção padrão de sinais de Weinberg, onde o sinal negativo de R é suprimido.

Parte II

Resultados e discussões

4 Resultados e discussões para bifurcações locais e globais

4.1 Bifurcações locais

Nesta seção, aplicaremos a teoria desenvolvida ao longo do capítulo 2 para estudar o comportamento, condições de estabilidade, a curvatura R , caráter das transições de fase e propriedades de escala para modelos distintos de bifurcações. O procedimento a ser empregado nesta seção é análogo ao considerado por Janyszek para investigar classes de modelos magnéticos (JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990).

Desta maneira, para uma melhor apreciação dos resultados deste trabalho, organiza-se esta seção da seguinte forma. Primeiro, apresentamos o modelo da bifurcação e sua respectiva forma normal. Em segundo lugar, avaliam-se as condições de estabilidade. Para o desenvolvimento desse último, obtém-se, primeiramente, o tensor métrico de Fisher através do cálculo das derivadas de Φ . Deve-se observar, no entanto, que a métrica riemanniana é definida em relação ao estado de referência s^* , conforme discutido anteriormente. Portanto, devemos reconhecer que os elementos métricos $G_{\alpha\mu}$ são avaliados no estado $s = s^*$.

Em terceiro lugar, a análise da estabilidade global é realizada de acordo com o critério de Sylvester. Nossa tarefa aqui jaz em interpretar a distância quadrática local ($d\ell^2$) para verificar se os determinantes Δ_i são ou não positivos. Em seguida, nos dedicamos à análise de estabilidade local. Nesse último, avaliam-se as componentes do tensor métrico no estado de equilíbrio do parâmetro de ordem para calcular e interpretar a curvatura R próximo ao ponto de bifurcação.

Em quarto lugar, interpretam-se os diagramas para a curvatura R com interesse no seu caráter divergente. Deve-se notar que a divergência de R pode revelar diferentes tipos de transições (SOROUSHFAR; SAFFARI; KAMVAR, 2016; CAPELA; NARDINI, 2012). O primeiro tipo de transição é evidente quando R diverge nos pontos de bifurcação, mas não muda de sinal. Esse comportamento denota uma transição do tipo I, que pode ser interpretada como uma transição de segunda ordem em relação à classificação de Ehrenfest (SALINAS, 2001; MA; WANG, 2013). Por outro lado, se R mudar de sinal e, ainda, divergir nas vizinhanças do ponto de bifurcação, então estaremos diante de uma transição de tipo II, que pode ser interpretada como uma transição de primeira ordem no contexto da classificação de Ehrenfest.

Finalmente, nos dedicamos à investigação das classes dos modelos de bifurcações em conformidade com as relações de escala. Nesse sentido, ao estabelecer um paralelo entre a curvatura R determinada para os modelos de bifurcações com a equação (3.52), poder-se-á,

portanto, obter expoentes críticos através das relações de escala e, ainda, definir classes de universalidade para bifurcações.

4.2 Bifurcação sela-nó

A bifurcação sela-nó descreve o mecanismo para o aparecimento e desaparecimento de estados de equilíbrio (KIELHÖFER, 2011; LAYEK, 2015; LEONEL, 2021). Em sua totalidade, transições suaves no espaço de estados são governadas por bifurcações sela-nó cuja presença é marcante no estudo de modelos biológicos, por exemplo, protótipos matemáticos que descrevem a cadeia alimentar, modelos teóricos que descrevem a relação parasita-hospedeiro, e também, experimentos de laboratório (SARDANYÉS; MARTÍNEZ; SIMÓ, 2018; MCCANN; YODZIS, 1991; GROENENBOOM; HOGEWEG, 2002; DAI et al., 2012).

Na dinâmica não linear, a equação na forma

$$\beta = \frac{ds}{d\tau} = \Phi(s, m) = m - s^2, \quad (4.1)$$

representa o modelo matemático de bifurcações sela-nó (LEONEL, 2021; IL'YASHENKO et al., 2013). Não é difícil perceber que $\Phi(s, m) = 0$, quando $s^* = \pm\sqrt{m}$, em que esse último denota o estado de equilíbrio do parâmetro de ordem.

Deve-se ressaltar que s^* não é uma constante, pois esse tem dependência no parâmetro de controle m . O comportamento da equação (4.1) é plotado na figura 1(a), que exhibe o diagrama da bifurcação sela-nó. Infere-se, da equação (4.1), que no limite de $m \rightarrow m_C = 0$, tem-se $s^* = 0$, que é o ponto de bifurcação. A partir do que já se sabe da TCB (KIELHÖFER, 2011; LAYEK, 2015; SEYDEL, 2010; LEONEL, 2021), podemos também concluir que o estado s^* pode ser estável ou instável dependendo do valor do parâmetro de controle, conforme pode ser evidenciado na figura 1(a), sob a convenção de sinal de Weinberg.

No entanto, essa interpretação convencional de estabilidade, que advém da TCB, apresenta limitações por ser apenas local. Para obter uma caracterização completa, seria necessário, normalmente, que complementássemos essa análise local mediante técnicas de estabilidade global, além, é claro, de longas simulações numéricas, que apresentam diversos desafios e dificuldades.

Todavia, será mostrado que é possível obter propriedades globais e locais do modelo matemático acima, empregando-se a formulação da geometria de informação. Pelas equações (3.31)-(3.35) e (4.1), temos

$$dl^2 = 8m(ds)^2 + 2(dm)^2, \quad (4.2)$$

que descreve uma métrica invariante e definida positiva. Deve-se ressaltar que a métrica acima é estabelecida em relação ao estado de equilíbrio de referência, ou seja, s^* . Portanto, devemos reconhecer que os elementos métricos $G_{\alpha\mu}$ são avaliados no estado $s = s^*$.

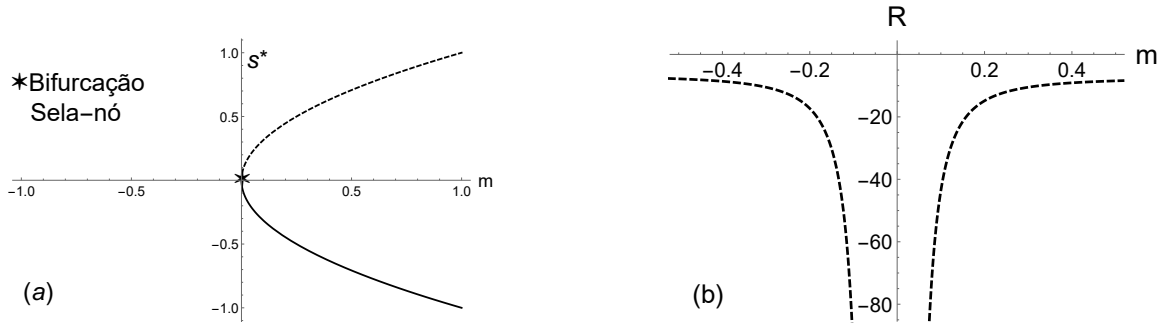


Figura 1 – Comportamento do sistema dinâmico, Eq. (4.1), nas vizinhanças da bifurcação sela-nó. A figura 1(a) exibe o diagrama da bifurcação sela-nó, no qual é possível observar a dependência de s^* em m . Da TCB, as linhas sólidas representam soluções estáveis (assumindo a convenção de sinal de Weinberg). Por outro lado, as linhas tracejadas referem-se às soluções instáveis. Notamos que no limite de $m \rightarrow m_C = 0$, obtém-se $s^* = 0$, que descreve o ponto de bifurcação. A figura 1(b) exibe R em função de m . R é real e uma função negativa de m em todo o domínio. Como $R(-m) = R(m)$, a função é par e o gráfico tem simetria ao longo do eixo R . Além disso, nota-se que R é independente da orientação de m . Conforme discutido no capítulo 2, R pode ser interpretado como uma medida superior de estabilidade do sistema em estudo. Por conseguinte, podemos observar que R diverge com m^{-2} , para $m > m_C$. Note que o termo m^{-2} nunca é negativo e os valores da função são negativos em todo o domínio. Portanto, $\lim_{m \rightarrow 0^-} R = -\infty$ e $\lim_{m \rightarrow 0^+} R = -\infty$ para o sistema se aproximando de m_C . Consequentemente, o comportamento de R indica que o sistema é menos estável se R for grande. Na figura 1(b), a linha tracejada representa que o sistema é instável.

As condições necessárias e suficientes do critério de Sylvester para o sistema de equação (3.38) exibir estabilidade global são

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 8m > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 8m & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

No entanto, como $m > 0$, então é possível concluir que o sistema é globalmente estável, sem a necessidade de técnicas complicadas ou mesmo cálculos numéricos.

Tendo discutido a análise de estabilidade global, procede-se agora para a análise da estabilidade local através da interpretação da curvatura R . Pela equação (3.36), temos

$$R = -\frac{1}{4m^2}. \tag{4.4}$$

A métrica de Fisher fornece uma expressão para R como uma função das derivadas de $\Phi(s, m)$. A partir da expressão de R , pode-se estabelecer a análise do gráfico e do sinal de R , conforme mostrado na figura 1(b). Pode-se observar, prontamente, que R é uma função negativa. Além disso, essa é uma função simétrica de m . Portanto, R é independente da orientação de m , isto é, $R(-m) = R(m)$.

O gráfico de R não tem interceptos ao longo do eixo m . Como $m^2 = 0$, quando $m \rightarrow m_C$, ou seja, quando o sistema se aproxima do ponto de bifurcação $m_C = 0$, então o eixo correspondente à curvatura R representa uma assíntota vertical. Uma vez que o grau do denominador é maior do que o grau do numerador, o eixo m representa uma assíntota horizontal.

Outra observação pertinente diz respeito à interpretação da estabilidade local e à divergência de R . Primeiro, como R é uniformemente negativo e diminui em todo o domínio, podemos escrever que o sistema é localmente instável. Além disso, pode-se notar na figura 1(b) que $R \rightarrow -\infty$ na vizinhança de (s_C^*, m_C) . Em outras palavras, desse último conclui-se que o ponto singular de R coincide com a singularidade do sistema dinâmico da equação (4.1), que aparece no ponto de bifurcação. Assim, podemos então concluir que o sistema tem uma transição de fase do tipo I.

Conclui-se esta seção com a investigação da classe dos modelos de bifurcações sela-nó em relação ao formalismo de escala. Nesse sentido, ao estabelecer um paralelo entre a curvatura R determinada para o modelo de bifurcações sela-nó, equação (4.4), com a equação (3.52), depreende-se que $\nu = 0$.

Esse resultado representa um achado importante na compreensão das bifurcações sela-nó. O expoente crítico ν obtido aqui é igual ao encontrado para o modelo do gás não ideal. Conforme argumentado por Ruppeiner e Janyszek (RUPPEINER; SEFTAS, 2020; JANYSZEK, 1990), $\nu = 0$ está associado a fenômenos de transição de fase de segunda ordem. Por conseguinte, conclui-se que a transição de fase do tipo I associada à bifurcação sela-nó, nas vizinhanças da criticalidade, pode ser entendida como uma transição suave no espaço de parâmetros, ou seja, uma transição de fase de segunda-ordem em conformidade com o critério de classificação de Ehrenfest.

Desta maneira, os resultados obtidos satisfazem os objetivos do presente trabalho, bem como, atendem ao problema de pesquisa estabelecido. Em outras palavras, é de fato possível estender a abordagem da geometria riemanniana para explorar propriedades de bifurcações e, de modo geral, sistemas dinâmicos.

Além disso, a partir do coeficiente ν e das leis de escala determinadas anteriormente, equação (3.45), infere-se que $\xi = -1 + \sqrt{2}$, $\zeta = (3 - \sqrt{2})/2$ e $\omega = (5 + 4\sqrt{2})/7$, para $F(s^*m^u) \simeq -1$. Conforme discutido anteriormente, esses expoentes críticos reais (ν, ξ, ζ, ω) podem ser usados para definir a classe de universalidade para as bifurcações sela-nó¹.

Para concluir, estendemos o método da geometria de informação para o estudo de sistemas dinâmicos envolvendo a bifurcação sela-nó. O estudo do modelo estatístico revelou que as derivadas de ordem superior da função de distribuição de probabilidade fornecem um tensor métrico de Fisher e, por conseguinte, uma expressão da curvatura escalar R em termos das derivadas primeiras e segundas da forma normal do sistema dinâmico.

¹ Embora $F(s^*m^u)$ possa ser positivo ou negativo, conjectura-se que esse deve ser negativo. Caso contrário, valores positivos de $F(s^*m^u)$ levariam a expoentes complexos.

Nesse sentido, a curvatura R mostrou-se como uma intrigante função não comumente usada em problemas convencionais da dinâmica não linear. Conforme exposto acima, R se conecta com a abordagem estatística e pode ainda ser interpretada como uma medida superior da estabilidade local de sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais.

Para bifurcações sela-nó, vale destacar que $R \rightarrow -\infty$, para $m \rightarrow m_C$, o que revela que, nas vizinhanças da criticalidade, o espaço de parâmetros torna-se instável. Por outro lado, a interpretação da métrica de Fisher revelou que o sistema é globalmente estável, já que satisfaz as condições do critério de Sylvester. Para evitar possíveis confusões, é importante salientar aqui que R não mede a estabilidade de s^* . A curvatura escalar constitui uma medida local da estabilidade estrutural do sistema.

Por fim, além da análise da estabilidade, foi possível analisar os fenômenos críticos associados à classe de modelos da bifurcação sela-nó em concordância com o formalismo de escala, o que conduziu a determinação de novos expoentes críticos e leis de escala. Os quatro expoentes determinados, à saber $(\nu, \xi, \zeta, \omega)$, podem ser usados para definir a classe de universalidade para bifurcações do tipo sela-nó supercrítica.

Os resultados determinados ao longo desta seção mostram-se em plena concordância com os resultados obtidos anteriormente por outros autores em outros contextos (JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990; SOROUSHFAR; SAFFARI; KAMVAR, 2016; CAPELA; NARDINI, 2012; SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021).

4.3 Bifurcação transcítica

Em sua totalidade, as bifurcações transcíticas caracterizam modelos matemáticos com troca de estabilidade na dinâmica não linear (SEYDEL, 2010; LEONEL, 2021). Existem vastas aplicações do conceito de bifurcações transcíticas, por exemplo, em lasers, dinâmica populacional e muitos outros (KIELHÖFER, 2011; LEONEL, 2021; STROGATZ, 2014). Como exemplo, a equação

$$\beta = \frac{ds}{d\tau} = \Phi(s, m) = ms - s^2, \quad (4.5)$$

descreve a forma normal de bifurcações transcíticas, em que $\Phi(s, m) = 0$, quando $s_0^* = 0$ e $s_1^* \equiv s^* = m$, fornecem os estados de equilíbrio do parâmetro s em estudo.

Da TCB (KIELHÖFER, 2011; LAYEK, 2015; SEYDEL, 2010; LEONEL, 2021), somos levados a concluir que s_0^* é instável para $m < 0$. Alternadamente, o último torna-se estável quando $m > 0$, assumindo a convenção de sinal de Weinberg. Por outro lado, embora s^* seja instável para $m > 0$, esse se torna estável quando $m < 0$. Além disso, pode-se notar também que no limite de $m \rightarrow m_C = 0$, temos $s^* = 0$, que é o ponto de bifurcação. Na figura 2(a), é plotado o comportamento da bifurcação transcítica, na qual é notável a troca de estabilidade na região próxima à criticalidade.

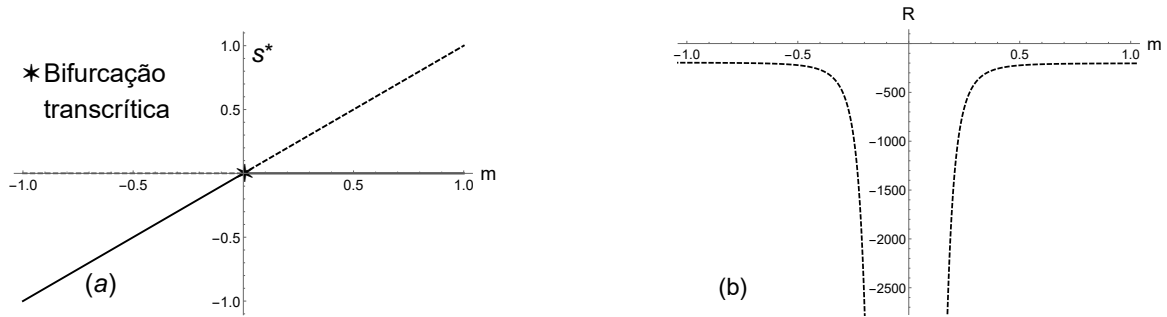


Figura 2 – Comportamento do sistema dinâmico, Eq. (4.5), nas vizinhanças da bifurcação transcritical. A figura 1(a) mostra o diagrama da bifurcação transcritical da equação (4.5). Esse também descreve qualitativamente a dependência do estado de equilíbrio no parâmetro de controle m . As linhas sólidas representam as soluções estáveis, enquanto as linhas tracejadas referem-se às soluções instáveis (tendo em vista a convenção de sinal de Weinberg). Nota-se incidentalmente que no limite de $m \rightarrow m_C = 0$, tem-se $s^* = 0$, no qual há uma notória troca de estabilidade. Esse último caracteriza o ponto crítico das bifurcações transcriticals. A figura 2(b) mostra R em função de m . Pode-se ver, prontamente, que R é uma função simétrica e negativa de m . O gráfico de R não tem interceptos ao longo do eixo m . Além disso, como $m^4 = 0$, quando $m \rightarrow m_C$, então o eixo R torna-se a única assíntota vertical. Como o grau do denominador é maior do que o grau do numerador, o eixo m representa a assíntota horizontal. Nota-se ainda que $\lim_{m \rightarrow 0^-} R = -\infty$ e $\lim_{m \rightarrow 0^+} R = -\infty$ para o sistema se aproximando de m_C . Por conseguinte, a divergência de R nas proximidades da região crítica marca a ocorrência da bifurcação transcritical. Aqui, a curvatura R é uma medida da estabilidade. Como R diverge com m^{-4} , para $m > m_C$, então pode-se concluir que o sistema é instável (linha tracejada).

No entanto, a interpretação da estabilidade mencionada acima é, de certa maneira, uma análise incompleta, uma vez que essa é apenas de natureza local. Tendo em vista uma caracterização mais completa do sistema, voltamos agora para a formulação geométrica obtida no capítulo 2 para investigar esta classe de bifurcações do ponto de vista da geometria de informação. Deve-se notar que a equação (4.5) possui estados de equilíbrio diferentes, o que requer análises separadas. Portanto, primeiro nos dedicamos a investigar s^* e, em seguida, s_0^* .

De acordo com as regras gerais desenvolvidas no capítulo 3, obtemos

$$d\ell^2 = 2m^2(ds)^2 + 2m^2(dm)^2, \quad (4.6)$$

em que as componentes do tensor métrico são avaliados no estado $s = s^*$.

As condições necessárias e suficientes do critério de Sylvester para o sistema de equação (3.38) exibir estabilidade global são

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= G_{11} > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

O que nos leva a

$$\Delta_1 = 2m^2, \quad \Delta_2 = 4m^4. \quad (4.8)$$

Apesar do caráter do parâmetro de controle m , vemos que Δ_1 e Δ_2 nunca são negativos no regime físico. Consequentemente, somos levados a concluir que o sistema apresenta estabilidade global.

Tendo discutido a análise global, agora nos dedicamos à análise da estabilidade local através da curvatura R . Pela equação (3.36), encontra-se

$$R = -\frac{1}{m^4}. \quad (4.9)$$

Da métrica de Fisher, recebe-se uma expressão para R em função das derivadas primeiras e segundas de $\Phi(s, m)$. Da expressão da curvatura, podemos agora dar atenção ao gráfico e ao sinal de R . A dependência de R em m é mostrada na figura 2(b). Analogamente à bifurcação sela-nó, observa-se que $R(-m) = R(m)$, ou seja, R é independente da orientação de m .

Pode-se notar também que a função R é par; seu gráfico tem simetria ao longo do eixo R . Outra observação diz respeito à estabilidade local e à divergência de R . Primeiro, uma vez que R é uniformemente negativo e diminui em todo o domínio, pode-se então escrever que o sistema é localmente instável, o que está de acordo com o ponto de vista de trabalhos anteriores (JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990; SOROUSHFAR; SAFFARI; KAMVAR, 2016; CAPELA; NARDINI, 2012). Em segundo lugar, infere-se, analogamente ao caso da bifurcação sela-nó, que o ponto singular de R é coincidente com a singularidade do sistema dinâmico de equação (4.5), como mostrado na figura 2(b). À luz do exposto, podemos então concluir que o sistema tem uma transição do tipo I.

Conclui-se a análise da bifurcação transcritical, em relação ao estado s^* , com a investigação da classe dos modelos de bifurcações em conformidade com o formalismo de escala.

Nesse sentido, ao estabelecer um paralelo entre a curvatura R determinada para o modelo de bifurcações transcriticals, equação (4.9), com a equação (3.52), infere-se que $\nu = -2$. Esse resultado basicamente nos diz que a transição de fase do tipo I, associada à bifurcação transcritical, representa uma transição suave no espaço de parâmetros, já que as transições de fase de segunda ordem são caracterizadas por uma singularidade da curvatura (QUEVEDO et al., 2011). A divergência de R para o modelo considerado na presente seção segue o mesmo comportamento daqueles considerados na geometria termodinâmica (RUPPEINER; SEFTAS, 2020; JANYSZEK, 1990; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990).

A partir das relações de escala, equação (3.45), e considerando $F(s^*m^u) \simeq -1$, temos $\xi = -2(1 - \sqrt{7})$, $\zeta = 3 - \sqrt{7}$, e $\omega = (5 + 2\sqrt{7})$. Esses expoentes podem ser usados para definir classes de universalidade para as bifurcações transcriticals. Portanto, os resultados obtidos estão em conformidade com os objetivos do problema de pesquisa e, ainda, com os resultados encontrados em estudos anteriores (JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1990;

SOROUSHFAR; SAFFARI; KAMVAR, 2016; CAPELA; NARDINI, 2012; SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021).

Conclui-se esta seção investigando o último caso, isto é, a análise da métrica em relação ao estado de equilíbrio s_0^* . A equação (3.35) no estado s_0^* nos leva a

$$d\ell^2 = G_{11}(ds)^2 + G_{22}(dm)^2, \quad (4.10)$$

onde

$$G_{11} = 2 \left(\frac{\partial \Phi(s, m)}{\partial s} \right)_{(s_0^*, m)}^2 = 2m^2, \quad (4.11)$$

$$G_{22} = 2 \left(\frac{\partial \Phi(s, m)}{\partial m} \right)_{(s_0^*, m)}^2 = 0. \quad (4.12)$$

No entanto, não é difícil perceber que a métrica da equação (4.10) é degenerada. Essa degenerescência permite concluir que a solução trivial s_0^* se apresenta como um estado de equilíbrio puramente matemático, sem necessariamente uma interpretação física. Assim, nada pode ser afirmado ou concluído sobre a estabilidade, bem como, das demais propriedades de interesse nesse caso.

Em suma, determinamos a métrica e a curvatura R para a bifurcação transcítica. A curvatura é interpretada como uma medida da estabilidade local do sistema. Como $R < 0$ no regime físico, então é possível concluir que o sistema é localmente instável. Por outro lado, a interpretação da métrica de Fisher revelou que o sistema é globalmente estável, já que satisfaz as condições do critério de Sylvester, apesar do caráter do parâmetro de controle.

Constatou-se ainda que R não possui singularidades, exceto no limite extremo, onde diverge com m^{-4} . Como a transição de fase de segunda ordem marca a singularidade da curvatura, depreende-se que as bifurcações transcíticas representam transições suaves ao longo do espaço de parâmetros, ou seja, transições de fase de segunda ordem, de acordo com o critério de Ehrenfest.

Estendeu-se também o método geométrico à classe de modelos de bifurcação transcítica em conformidade com o formalismo de escala. Com base nesta abordagem, vale destacar que a mesma relação de escala $R \sim m^{\nu-2}$ determinada para a bifurcação sela-nó, também foi encontrada para a bifurcação transcítica, assim como, novos expoentes críticos, que podem ser usados para definir a classe de universalidade de bifurcações transcíticas.

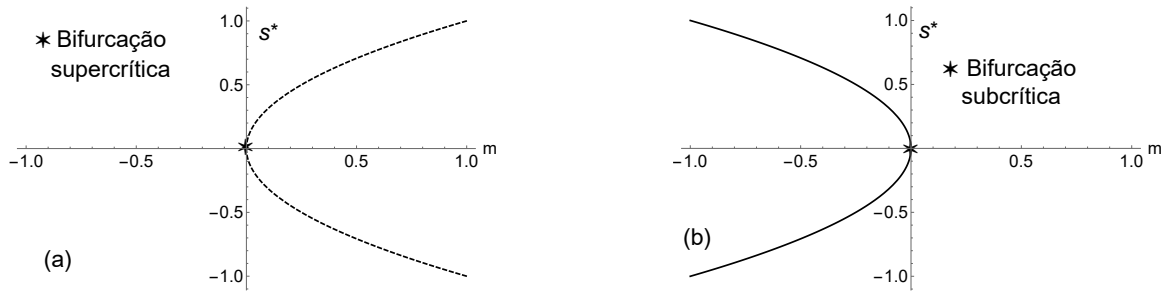


Figura 3 – Comportamento do sistema dinâmico, Eq. (4.13), nas vizinhanças das bifurcações forquilha supercrítica e subcrítica. A figura 3(a) descreve o comportamento da bifurcação supercrítica ($\gamma = 1$), enquanto a bifurcação subcrítica ($\gamma = -1$) é mostrada na figura 3(b). De ambos os diagramas de bifurcação, percebe-se, qualitativamente, a dependência do estado de equilíbrio no parâmetro de controle m . As linhas sólidas representam soluções estáveis, enquanto as linhas tracejadas referem-se às soluções instáveis (convenção de sinal assumida). Pode-se notar ainda em ambos os casos que se $m \rightarrow m_C = 0$, então $s^* = 0$, o que representa a origem do fenômeno de quebra de simetria.

4.4 Bifurcações supercrítica e subcrítica de forquilha

Nas ciências não lineares, a forma normal das bifurcações de forquilha marca uma ampla variedade de modelos caracterizados pela quebra de simetria. Aplicações e observações desta bifurcação incluem, por exemplo, esportes (HRISTOVSKI et al., 2013), modelos magnéticos estatísticos (KIM et al., 1977; HE; HAN, 2017), oscilações neurais (BOSE, 2015; JUN-JIE; CHUN-RUI; XIU-LING, 2005) e outros (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 2013; STROGATZ, 2014; GUCKENHEIMER; HOLMES, 2013). A equação

$$\beta = \frac{ds}{d\tau} = \Phi(s, m) = ms - \gamma s^3, \quad (4.13)$$

representa o modelo matemático de bifurcações forquilha. Todavia, deve-se reconhecer que a equação (4.13) envolve dois casos distintos de bifurcações: (i) supercrítico, quando $\gamma = 1$; (ii) subcrítico, quando $\gamma = -1$. Da equação (4.13), não é difícil perceber que $s^* = \pm (m/\gamma)^{1/2}$ são os estados de equilíbrio não triviais do parâmetro de ordem. Da TCB (KIELHÖFER, 2011; LAYEK, 2015; SEYDEL, 2010; LEONEL, 2021), e seguindo a convenção de sinal de Weinberg, pode-se concluir que os estados de equilíbrio s^* são localmente instáveis no caso supercrítico; localmente estáveis no caso subcrítico.

Deve-se reconhecer, além disso, que no limite de $m \rightarrow m_C = 0$, temos $s^* = 0$, que é o ponto de bifurcação. Na figura 3 é plotado o comportamento das bifurcações de forquilha em ambas as configurações, em que é notável o fenômeno de quebra de simetria na vizinhança dos regimes críticos.

Tendo discutido a análise usual das bifurcações, de acordo com a TCB, prossegue-se agora para a investigação do modelo acima considerando a formulação geométrica de Fisher. Aqui, negligenciaremos a investigação da solução trivial $s_0^* = 0$. Analogamente ao que foi

encontrado para a bifurcação transcítica, a solução trivial das bifurcações de forquilha também levará a uma divergência matemática da métrica, do qual não se pode extrair interpretações físicas sob a perspectiva da formulação apresentada e exemplificada ao longo deste capítulo.

Pelas equações (3.31)-(3.35) e (4.13), vemos que

$$d\ell^2 = 8m^2(ds)^2 + \frac{2m}{\gamma}(dm)^2, \quad (4.14)$$

que descreve uma métrica definida positiva invariante. Também deve ser notado que as componentes do tensor métrico são avaliados no estado $s = s^*$.

A estabilidade global do sistema exige

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= G_{11} > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{vmatrix} > 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

O que nos leva a

$$\Delta_1 = 8m^2, \quad \Delta_2 = \frac{16m^3}{\gamma}. \quad (4.16)$$

Com base no exposto, não é difícil ver que Δ_1 é sempre positivo no regime físico. No entanto, deve-se reconhecer que o determinante Δ_2 pode exibir regimes de valores positivos e negativos dependendo do parâmetro de controle e do caráter do fator γ . Consequentemente, devemos interpretar ambos os casos separadamente. Na configuração supercrítica ($\gamma = 1$), pode-se ver, prontamente, que Δ_2 é sempre positivo na região em que $m > 0$. Por conseguinte, podemos concluir que existe um regime em que Δ_1 e Δ_2 são de fato positivos, e o sistema exibi estabilidade global. Por outro lado, na configuração subcrítica ($\gamma = -1$), concluí-se que o sistema tem Δ_1 e Δ_2 maiores do que zero e, portanto, estabilidade global na região $m < 0$.

Tendo discutido as condições necessárias e suficientes para a estabilidade global, nos voltamos agora para a análise da divergência e da estabilidade local através da análise da curvatura R . Pela equação (3.36), temos

$$R = -\frac{\gamma}{2m^3}. \quad (4.17)$$

Uma vez que a curvatura R é determinada, investiga-se a dependência dessa em relação ao parâmetro de controle. O diagrama da curvatura R associado às bifurcações de forquilha encontra-se na figura 4. Na bifurcação supercrítica, o comportamento da estabilidade é mostrado na figura 4(a), no qual é possível observar que $R > 0$, quando $m < 0$. Na região de $-\infty < m < 0$, a função R é positiva (estável). Assim, pode-se concluir que há um ganho de estabilidade, conforme o sistema se aproxima do ponto crítico (s_C^*, m_C) .

Por outro lado, nota-se que $R < 0$, quando $m > 0$. Na região de $0 < m < +\infty$, R é negativo (instável). Consequentemente, podemos escrever que há uma perda de estabilidade à

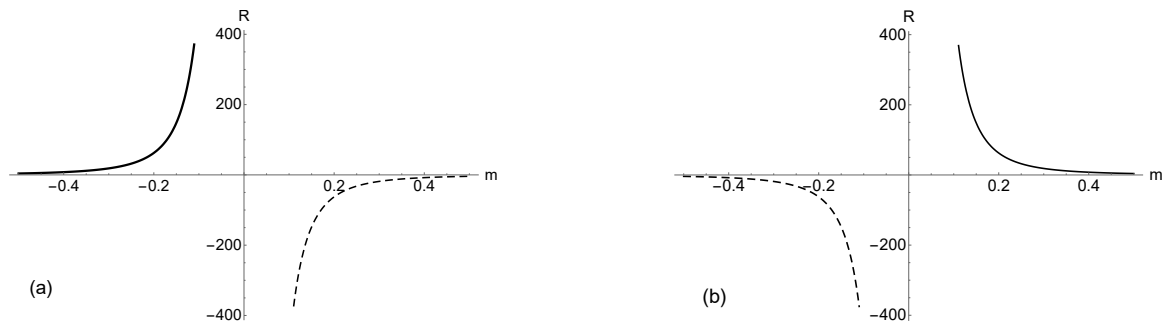


Figura 4 – Comportamento da curvatura escalar associada ao sistema dinâmico, Eq. (4.13), nas vizinhanças dos pontos de bifurcações de forquilha supercrítica e subcrítica. Aqui, é importante salientar que R não mede a estabilidade de s^* . Conforme discutido anteriormente, R constitui uma medida local da estabilidade estrutural do sistema nas vizinhanças de s^* . A figura 1 (a) descreve a dependência de R em m para a bifurcação supercrítica de forquilha ($\gamma = 1$). R não apresenta assinatura de apenas uma, mas sim de duas transições de fase diferentes. Na região de $-\infty < m < 0$, a função da curvatura R é positiva (estável), o que reflete uma transição de fase de segunda ordem. Por outro lado, na região de $0 < m < +\infty$, a curvatura R é negativa (instável). Conseqüentemente, conclui-se que há uma perda de estabilidade à medida que o sistema se aproxima do ponto crítico, o que produz uma transição de fase de primeira ordem, de acordo com o critério de classificação de Ehrenfest. A figura 4(b) exhibe o comportamento da curvatura R para a bifurcação subcrítica de forquilha ($\gamma = -1$). Em contraste com a figura 4(a), é evidente que $R > 0$ quando $m > 0$ e $R < 0$ quando $m < 0$. Podemos observar aqui uma descontinuidade em R para $m < m_C$, ou seja, na região de $-\infty < m < 0$, a curvatura R é negativa (instável), o que reflete a uma transição de fase de primeira ordem. Contudo, nota-se também que tal descontinuidade desaparece na região $0 < m < +\infty$, na qual a curvatura R passa a ser positiva (estável). Em ambos os casos, podemos observar que R é uma função ímpar, pois se comporta diferentemente para valores positivos e negativos de m , ou seja, $R(-m) = -R(m)$. Pode-se notar também que R não tem anomalias, exceto nos limites extremos, onde diverge proporcionalmente a m^{-3} . Assim como nos casos estudados anteriormente, a linha tracejada representa o regime em que o sistema é instável. Por outro lado, as linhas sólidas representam o regime onde o sistema é estável, seguindo a convenção de sinal de Weinberg.

medida que o sistema se aproxima do ponto crítico (s_C^*, m_C). Também deve ser observado que há uma descontinuidade em R para $m > m_C$, o que assinala uma transição de fase de primeira ordem (SALINAS, 2001; KADANOFF, 2000; SOROUSHFAR; SAFFARI; KAMVAR, 2016). Tal descontinuidade desaparece em $m = m_C = 0$, ou seja, na região de $-\infty < m < 0$, onde R mostra-se positivo (estável), refletindo, portanto, a uma transição de fase de segunda-ordem.

O comportamento discutido na figura 4(a), nos diz que $m = m_C = 0$ assinala o valor crítico para o qual há ocorrência de uma transição de fase de segunda ordem que termina em uma linha de primeira ordem. Na mecânica estatística, o mesmo comportamento também é evidenciado no ponto de Curie de ímãs, bem como, no término da transição vapor-líquido em sistemas fluídos (BELL; LAVIS; BELL, 1999; SALINAS, 2001).

Tendo investigado a estabilidade do caso supercrítico, é dedicada atenção agora ao comportamento da curvatura R para a bifurcação subcrítica de forquilha ($\gamma = -1$). A figura 4(b) mostra a dependência de R no parâmetro de controle m . Pode-se observar aqui que há uma descontinuidade em R na região de $m < m_C$. Assim, na região de $-\infty < m < 0$, a função da curvatura torna-se negativa (instável), o que reflete uma transição de fase de primeira ordem. Alternadamente, a descontinuidade desaparece na região $0 < m < +\infty$, no qual R é positivo (estável), o que reflete uma transição de fase de segunda ordem (SALINAS, 2001; KADANOFF, 2000; SOROUSHFAR; SAFFARI; KAMVAR, 2016).

Portanto, a análise da curvatura na figura 4 revela que ambas bifurcações apresentam assinaturas de duas formas diferentes de transição de fase. A primeira ocorre devido às mudanças do sinal de R , o que denota uma transição de fase do tipo II. A segunda se deve à divergência de R na medida que o sistema se aproxima do ponto crítico, o que indica uma transição de fase do tipo I.

As observações e, por conseguinte, as interpretações estabelecidas por meio dos diagramas da curvatura R para as bifurcações de forquilha estão de acordo com os resultados já observados na dinâmica não linear e, ainda, as conclusões aqui inferidas contribuem por expandir o estado da arte, uma vez que, em sua totalidade, não se vê uma bifurcação de forquilha como transições de fase de segunda-ordem com instâncias de transições de primeira ordem (HRISTOVSKI et al., 2013; MISBAH, 2016; MILTON; OHIRA, 2014; FREUND, 2008).

Ao investigar a curvatura R para as bifurcações de forquilha, constatou-se que essa pode tender a $\pm\infty$, dependendo da orientação do parâmetro de controle. Este resultado nos permitiu estabelecer, portanto, que o modelo de bifurcações de forquilha exhibe transições de fase distintas. Para obter uma caracterização mais completa de ambos os casos considerados acima, conclui-se esta seção com a investigação da classe dos modelos de bifurcações sob a perspectiva do formalismo de escala. Nesse sentido, abordagem adotada ao longo desta seção é análoga a desenvolvida no capítulo 2.

Para começar, vimos que $I(\beta; s, m)$ pode ser expressa como uma soma envolvendo duas componentes: (i) regular $I_0(\beta)$; (ii) outra singular, $\tilde{I}(s, m)$, que, por sua vez, contém todas as anomalias do comportamento crítico. Conforme discutido no capítulo 2, ao considerar que $\tilde{I}(s, m)$ seja uma FHG das variáveis s e m , temos que

$$\tilde{I}(s, m) = \lambda^{-1} \tilde{I}(s\lambda^b, m\lambda^a), \quad \lambda > 0, \quad (4.18)$$

em que a e b são parâmetros de escala e λ é uma constante positiva.

Todavia, diferentemente do caso discutido no capítulo 2, as bifurcações supercrítica e subcrítica de forquilha exibem regimes diferentes, o que requer propostas de FHG diferentes. Assim, para $m > m_C$, estabelece-se $\lambda = m^{-1/a}$, e para $m < m_C$, tem-se $\lambda = |m|^{-1/a}$. Seguindo essa premissa, a FHG pode ser reescrita de duas formas distintas

$$\tilde{I}(s, m) = m^{1/a} \tilde{I}(s m^{-b/a}, 1) = m^{1/a} F_+(s m^{-b/a}) \quad m > m_C, \quad (4.19)$$

$$\tilde{I}(s, m) = (-m)^{1/a} \tilde{I}(s(-m)^{-b/a}, 1) = (-m)^{1/a} F_- (s(-m)^{-b/a}) \quad m < m_C, \quad (4.20)$$

onde F_+ e F_- são funções diferentes e bem-comportadas de s e m . Com base nestes pressupostos, é possível, agora, determinar expoentes críticos para ambos os casos da bifurcação de forquilha. Entretanto, como esta última exhibe duas configurações distintas, convém analisarmos separadamente.

Por conseguinte, para uma melhor apreciação dos resultados provenientes do formalismo de escala para os modelos de bifurcações de forquilha, organiza-se esta análise, investigando-se, primeiramente, a curvatura R para o caso subcrítico e, em seguida, para o caso supercrítico.

Na bifurcação subcrítica de forquilha, onde $m > m_C$ e $\gamma = -1$, temos,

$$R_{\text{fenomenológica}} = \frac{m^{\nu-2} (-\xi + \nu - 2) (-\xi)}{2(1 - \nu)(2 - \nu)F_+(s^*m^u)}, \quad m > m_C, \quad (4.21)$$

em virtude da equação (4.19) e das equações (3.41)-(3.50) do capítulo 2.

Deve ser observado que a expressão da curvatura fenomenológica para a bifurcação subcrítica de forquilha é análoga à equação (3.51) determinada anteriormente. Nesse sentido, observa-se, para $m \rightarrow m_C = 0$, que $R_{\text{fenomenológica}} \rightarrow +\infty$. Assim, é possível concluir que $\xi > \nu$ nesse regime.

Comparando a equação (4.17) com a equação (4.21), vemos que $\nu = -1$, o que se mostra como um achado revelador na compreensão das bifurcações de forquilha. O expoente ν determinado acima é o análogo ao encontrado no estudo de transições de fase de segunda ordem para o modelo bidimensional de Ising (JANKE; JOHNSTON; KENNA, 2004; SRIVASTAVA; ASHOK, 2005).

Por conseguinte, a divergência de R para esse modelo no regime em que $m > m_C$, revela que a bifurcação subcrítica de forquilha representa uma transição física suave no espaço de parâmetros.

Substituindo $\nu = -1$ na equação (4.21), obtemos

$$R_{\text{fenomenológica}} = \frac{m^{-3}\xi(\xi + 3)}{12F_+(s^*m^u)}. \quad (4.22)$$

Considerando a equação (4.17) para $\gamma = -1$ e comparando-a com a equação (4.22), vemos a partir das relações de escala, equação (3.45), que²

$$\xi = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}, \quad \zeta = \frac{9 - \sqrt{33}}{4}, \quad \omega = \frac{5 + \sqrt{33}}{4}.$$

² De forma correlata ao disposto no capítulo 2, o denominador da equação (4.21) é positivo e diferente de zero. A positividade desse termo não é condição suficiente para garantir que $\nu < 1$ ou $\nu > 1$, pois F_+ também pode ser positivo ou negativo. Apesar da dualidade de F_+ , os resultados obtidos para este caso, em conformidade com os demais discutidos acima, sugerem que F_+ deve ser positivo, ou seja, $F_+ \simeq 1$ no regime de $m > m_C$, uma vez que valores negativos para F_+ conduzem a expoentes imaginários.

Os expoentes críticos determinados para a bifurcação subcrítica de forquilha podem ser usados para definir a classe de universalidade dessa bifurcação.

Tendo investigado o caso subcrítico e determinado os expoentes críticos, prossegue-se agora para a análise da bifurcação supercrítica de forquilha, na qual $m < m_C$ e $\gamma = 1$. Para este caso, a expressão da curvatura R nos leva a

$$R_{\text{fenomenológica}} = \frac{(-\xi)(-\xi + \nu - 2)(-m)^{\nu-2}}{2(1 - \nu)(2 - \nu)F_-(s^*m^u)}, \quad m < m_C \quad (4.23)$$

em virtude da equação (4.20).

Avaliando a equação (4.23) em $\nu = -1$, temos

$$R_{\text{fenomenológica}} = -\frac{m^{-3}\xi(\xi + 3)}{12F_-(s^*m^u)}. \quad (4.24)$$

Comparando a equação (4.24) com a equação (4.17), obtêm-se os mesmos expoentes críticos encontrados para a equação (4.19), ao considerar $F_- \simeq -1$. Caso contrário, $F_- > 0$ produz expoentes críticos imaginários no regime de $m < m_C$. Consequentemente, é possível inferir que o conjunto $(\nu, \xi, \zeta, \omega)$, define a classe de universalidade para ambas as bifurcações subcrítica e supercrítica de forquilha.

Em resumo, os resultados aqui obtidos permitem concluir que não é apenas possível aplicar o formalismo geométrico de Fisher para englobar bifurcações de forquilha, mas também se pode obter informações profundas não discutidas anteriormente para modelos de bifurcações na dinâmica não linear. Enfim, pode-se afirmar que os resultados encontrados se aliam aos objetivos do problema de pesquisa proposto, bem como, estão em conformidade com os resultados e as interpretações de estudos anteriores (SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021; JANYSZEK; MRUGAŁA, 1989b; JANYSZEK, 1990).

4.5 Bifurcações globais

Nesta seção, aplicaremos os resultados de nosso método para estudar apenas o comportamento, condições de estabilidade, curvatura R e o caráter de bifurcações homoclínicas presentes em um sistema correlato ao do oscilador de Duffing. O emprego do formalismo de escala no estudo de bifurcações globais será discutido em trabalhos futuros sob a perspectiva da TGB.

O procedimento empregado nesta seção é completamente análogo ao considerado anteriormente no estudo de bifurcações locais. Logo, podemos organizar esta seção da maneira a seguir. Primeiro, nós introduzimos a equação diferencial e o modelo de sistema dinâmico que consiste de uma versão modificada do oscilador de Duffing. Segundo, focaremos em condições de estabilidade. Aqui, se obtêm primeiramente o tensor métrico de Fisher através do cálculo das derivadas de funções não lineares Φ_i . A estabilidade global é analisada através do critério de Sylvester. Nossa tarefa, neste primeiro momento, consistirá de interpretar a distância quadrática

local ($d\ell^2$) para verificar se os determinantes Δ_i são ou não positivo-definidos. Finalmente, nós interpretamos os diagramas da curvatura escalar com interesse especial na divergência de R .

4.6 O oscilador de Duffing

O modelo sob o qual nós iremos basear nossas considerações é da equação de Duffing, que descreve a dinâmica de um curioso³ oscilador composto de uma tira metálica com eletroímãs do tipo CA (STROGATZ, 2014; CELIKOVSKY; ZELINKA, 2010; MONTEIRO, 2006). O modelo deve ser considerado apenas como sugestivo, mas conduz a uma compreensão qualitativa dos fenômenos das bifurcações homoclínicas (MONTEIRO, 2006; SARMAH et al., 2016).

Na dinâmica não linear, as equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{ds_1}{d\tau} = \Phi_1(s_1, s_2) = s_2, \\ \beta_2 = \frac{ds_2}{d\tau} = \Phi_2(s_1, s_2) = s_1 - s_1^3 + \epsilon(m s_2 + s_1^2 s_2), \end{array} \right. \quad (4.25)$$

representam o modelo matemático do oscilador de Duffing, onde m é o parâmetro de controle; ϵ , um parâmetro de perturbação fixo. Portanto, nós podemos escrever que a equação de Duffing mencionada acima possui apenas três parâmetros variantes: s_1 , s_2 e m . Devemos observar que esse modelo apresenta um bifurcação global homoclínica quando a perturbação ϵ da Eq. (4.25) é zero (MONTEIRO, 2006; SARMAH et al., 2016). Bifurcações homoclínicas⁴, contudo, não podem ser detectados pela TCB. Portanto, o estudo dessa classe particular de bifurcações é geralmente estabelecida através de métodos aproximativos, *e.g.* balanço harmônico, método de Melnikov, além, é claro, de simulações numéricas (MONTEIRO, 2006; CUESTA; OLLERO, 2005).

Todavia, mostraremos que é possível estudar o fenômeno de bifurcações globais do modelo matemático acima ao empregar nossa abordagem da geometria de informação. Mais especificamente, a questão que se coloca aqui é se a informação de Fisher pode ou não ser aplicada para explorar aspectos críticos dessas bifurcações.

Tendo isso dito, por meio das Eqs. (3.60)-(3.62) e Eq. (4.25), nós temos

$$d\ell^2 = 2 \left(1 - 3s_1^2 + 2s_1s_2\epsilon \right)^2 (ds_1)^2 + \left(2 + 2\epsilon^2 (s_1^2 + m)^2 \right) (ds_2)^2 + 2s_2^2\epsilon^2 (dm)^2,$$

³ A razão pelo qual o autor deste trabalho considera o presente sistema curioso, jaz no fato de que um oscilador trivial leva o sistema a exibir um comportamento não-trivial, complexo e, ainda, cujos métodos tradicionais ou padronizados mostram pouca ou nenhuma solução.

⁴ Bifurcações homoclínicas pertencem à classe de bifurcações globais, em que um ciclo-limite colide com um ponto de sela. Mais precisamente, tais bifurcações são principalmente observadas quando estruturas invariantes colidem-se umas às outras, por exemplo: variedades invariantes e atratores caóticos, conduzindo à destruição de atratores caóticos. Nesse cenário, a destruição causa uma modificação considerável na topologia global do sistema, que, infelizmente, não pode ser estudada pela TCB, isto é, a análise da estabilidade local. Para maiores detalhes, recomendamos a leitura das seguintes referências: (WEBER, 2021; LEONEL, 2016; ZHONG, 2006).

que denota uma métrica invariante e positiva-definida. Com foco em investigar bifurcações globais em mente, nós não podemos definir a métrica nas vizinhanças de estados de referência. Do contrário, a métrica riemanniana nos levaria a uma curvatura nula.

Para o presente modelo, a estabilidade global requer

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= G_{11} > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} G_{11} & 0 \\ 0 & G_{22} \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{vmatrix} > 0.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Calculando-os diretamente, temos

$$\Delta_1 = 2 \left(1 - 3s_1^2 + 2s_1s_2\epsilon \right)^2,\tag{4.27}$$

$$\Delta_2 = \left(2 + 2\epsilon^2 (s_1^2 + m)^2 \right) \left(2 \left(1 - 3s_1^2 + 2s_1s_2\epsilon \right)^2 \right),\tag{4.28}$$

$$\Delta_3 = \left(2s_2^2\epsilon^2 \right) \left(2 + 2\epsilon^2 (s_1^2 + m)^2 \right) \left(2 \left(1 - 3s_1^2 + 2s_1s_2\epsilon \right)^2 \right),\tag{4.29}$$

onde podemos observar que Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 nunca são negativos no regime físico. Com base no exposto, podemos, então, escrever que o sistema dinâmico, Eq. (4.25), satisfaz a condição do critério de Sylvester. Isso nos permite concluir que o oscilador perturbado de Duffing apresenta estabilidade global no sentido estrutural.

No entanto, é importante reconhecer que a equação não perturbada de Duffing viola a desigualdade de Eq. (4.29), já que $\Delta_3 = 0$ para $\epsilon = 0$. Esse resultado revela-se como um importante achado na compreensão de bifurcações homoclínicas no contexto da estabilidade estrutural. O resultado encontrado acima, nos permite concluir que a versão não perturbada do oscilador não apresenta estabilidade global. Isso está em plena conformidade com o teorema de Peixoto (MONTEIRO, 2006; PEIXOTO, 1962), que estabelece que bifurcações homoclínicas e heteroclínicas são ambas estruturalmente instáveis, com base na análise de seus respectivos retratos de fases.

Para concluir, encerramos esta seção enfatizando que a TGB mostra-se como uma abordagem alternativa para investigar instâncias de estabilidade estrutural de bifurcações globais sem considerar métodos aproximativos ou soluções numéricas.

Tendo discutido a análise global da estabilidade no sentido estrutural, nós agora nos dedicaremos ao estudo da curvatura R. Pelas Eqs. (3.63)-(3.64), encontramos

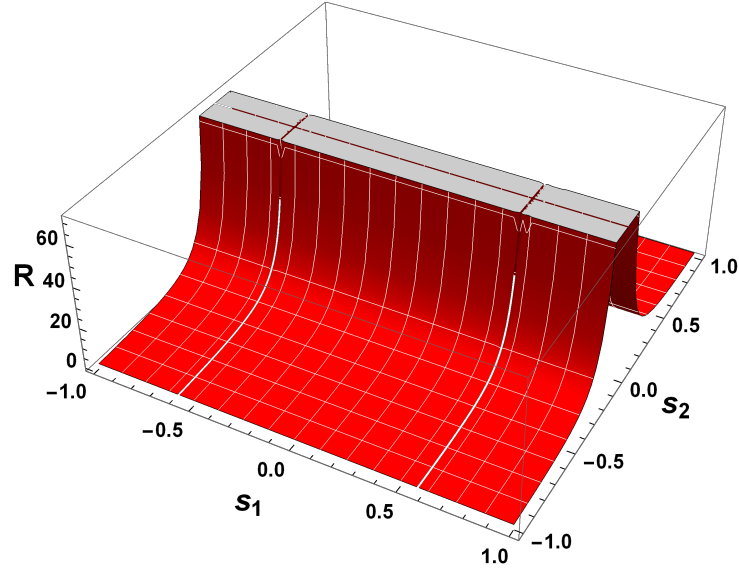


Figura 5 – (Cores online) Comportamento da curvatura R como função de s_1 e s_2 para variações de (s_1, s_2, m) na configuração não-perturbada do oscilador de Duffing ($\epsilon = 0$). Aqui, a cor vermelha representa estabilidade. Avaliações de R com a Eq. (4.30) mostram que a curvatura escalar diverge em $(s_1^*, s_2^*, m^*) = (\pm 1/\sqrt{3}, 0, -1/3)$. Aqui, R é real e positivo no regime físico. Isso nos permite concluir que o oscilador de Duffing tem novamente um ganho de estabilidade local estrutural quando o sistema aproxima-se do ponto crítico. Analogamente aos casos das bifurcações sela-nó e transcritical, o sistema tem uma transição do tipo I.

$$R = \phi(s_1, s_2)^{-1} \left[\left(1 + s_1 \left(4s_2\epsilon + s_1 \left(-6 + 9s_1^2 - 12s_1s_2\epsilon + 8s_2^2\epsilon^2 \right) \right) \right) \left(1 - 3s_1^2 + 2s_1s_2\epsilon \right) + 2s_2\epsilon \left(1 + \epsilon^2 \left(s_1^2 + m \right)^2 \right) \left(s_1 + 9s_1^5 - 9s_1^4s_2\epsilon + s_1^3 \left(-6 + 4s_2^2\epsilon^2 \right) + s_2m\epsilon + s_1^2s_2\epsilon \left(5 + \epsilon m \right) \right) \right], \quad (4.30)$$

em que

$$\phi(s_1, s_2) = \left[s_2^2 \left(1 - 3s_1^2 + 2s_1s_2\epsilon \right)^3 \left(1 + \epsilon^2 \left(s_1^2 + m \right)^2 \right)^2 \right]. \quad (4.31)$$

A métrica de Fisher nos leva a uma expressão para a curvatura escalar em termos das derivadas de Φ_i . Do conhecimento de R , estudaremos o comportamento divergente desse e o caráter das transições associadas com bifurcações homoclínicas.

Porém, nós devemos reconhecer que Eq. (4.25) se comporta diferentemente a depender do caráter da perturbação ϵ . Isto é, o oscilador de Duffing pode assumir duas configurações: não-perturbada, quando $\epsilon = 0$ e perturbada, quando $\epsilon \geq 1$. Por conseguinte, devemos interpretar ambos os casos separadamente.

A Figura 5 exhibe o comportamento de R para a configuração não-perturbada ($\epsilon = 0$). Como pode ser observado, a Eq. (4.30) é uniformemente positiva e aumenta longo de domínio. Consequentemente, nós podemos inferir que a estabilidade estrutural é predominante no regime físico.

Outra observação no que diz respeito ao oscilador não-perturbado é a divergência de R e conexão dessa com o fenômeno de bifurcações. Conforme provado anteriormente, R diverge nas singularidades de sistemas dinâmicos, que aparecem nos pontos de bifurcação. Na figura 5, pode ser claramente observado que R diverge nas vizinhanças da origem. Para encontrar o ponto de bifurcação, o denominador de R deve ser zero. Portanto, não é difícil verificar que R diverge para infinito positivo, quando

$$\phi(s_1, s_2) = \left(s_2^2 (1 - 3s_1^2 + 2s_1 s_2 \epsilon)^3 \left(1 + \epsilon^2 (s_1^2 + m)^2 \right)^2 \right) = 0, \quad (4.32)$$

em que se torna evidente que

$$R \rightarrow +\infty \quad \text{conforme} \quad p^C(s_1^*, s_2^*, m^*) \rightarrow (\pm 1/\sqrt{3}, 0, -1/3).$$

O procedimento adotado acima para encontrar os pontos singulares de R não é uma ideia nova. Essa abordagem já foi considerada ao estudar aspectos críticos do modelo de Kagome-Ising no contexto da geometria termodinâmica (MIRZA; TALAEI, 2013).

Todavia, precisamos enfatizar que quando $\epsilon = 0$, o sistema dinâmico, Eq. (4.25), exibe uma bifurcação homoclínica no retrato de fases (MONTEIRO, 2006; SARMAH et al., 2016). Consequentemente, esse fato surpreendente nos ensina que o comportamento divergente de R marca o fenômeno de bifurcações homoclínicas, onde $(s_1^*, s_2^*, m^*) = (\pm 1/\sqrt{3}, 0, -1/3)$ representa o ponto de bifurcação.

Além disso, o resultado nos mostra que bifurcações homoclínicas representam transições suaves de tipo I no espaço de parâmetros quando $\epsilon = 0$. As observações obtidas através do diagramas de R para bifurcações homoclínicas concordam muito bem com os resultados de estudos não lineares obtidos através de métodos aproximativos (MONTEIRO, 2006; SARMAH et al., 2016). Mais ainda, isso mostra uma evidência clara em favor da validade de nossa abordagem.

Tendo discutido a configuração não-perturbada do oscilador de Duffing, nós agora nos dedicaremos ao estudo da curvatura R quando a perturbação é grande⁵, isto é, $\epsilon \geq 1$.

O diagrama- R do oscilador de Duffing é mostrado na figura 6, em que podemos observar que a curvatura escalar é uma função negativa na região $-\infty < s_1 < -1/3$. Isso indica, localmente, que o sistema perde estabilidade estrutural nas vizinhanças do ponto crítico. Por outro lado, a curvatura é positiva na região $-1/3 < s_1 < +\infty$. Portanto, podemos inferir que há um ganho de estabilidade estrutural local no regime físico.

Pode-se observar ainda que R tem uma descontinuidade na vizinhança do ponto crítico $(s_1^*, s_2^*, m^*) = (\pm 1/\sqrt{3}, 0, -1/3)$. Logo, podemos concluir que o diagrama- R do oscilador em sua forma perturbada exibe uma transição de fase do tipo II que termina em um ponto de bifurcação isolado de uma transição de fase do tipo I. Esse tipo particular de transição já foi observado no estudo de fenômenos críticos de estruturas nucleares (CASTEN, 2004).

⁵ No modelo original de Duffing, perturbações na ordem de $\epsilon \approx 1$ já são consideradas elevadas. Assim, aqui daremos um passo além, já que consideraremos perturbações maiores do que 2.

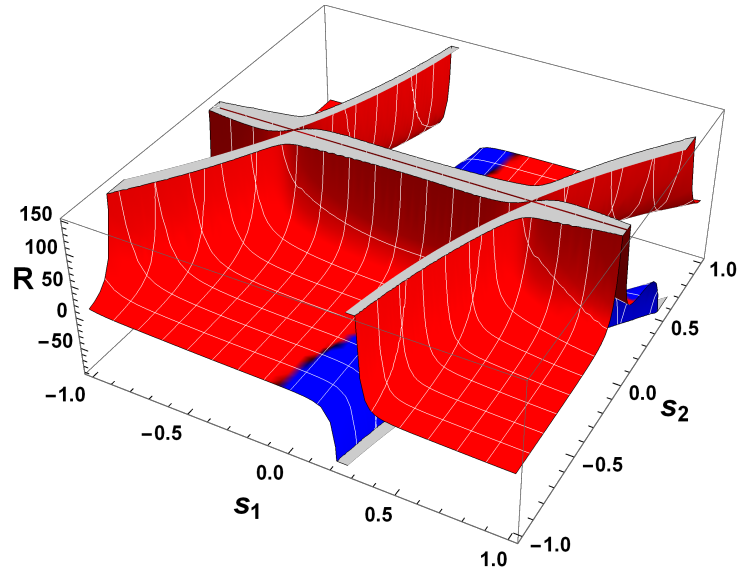


Figura 6 – (Cores online) Comportamento da curvatura R como função de s_1 e s_2 para variações de (s_1, s_2, m) na configuração perturbada do oscilador de Duffing. Deve ser observado que a cor vermelha representa estabilidade, enquanto que a cor azul refere-se à instabilidade. Para perturbações suficientemente elevadas ($\epsilon \geq 1$), avaliações com a Eq. (4.30) mostram que a curvatura é regular no regime físico, exceto em $(s_1^*, s_2^*, m^*) = (\pm 1/\sqrt{3}, 0, -1/3)$, onde a curvatura diverge. R é majoritariamente positiva, o que nos permite inferir que a estabilidade estrutural é predominante. A curvatura R apresenta assinaturas de transições de fase do tipo I e do tipo II.

Portanto, essas análises revelam dois tipos diferentes de transições de fase para bifurcações homoclínicas. Para a configuração não-perturbada ($\epsilon = 0$), o oscilador de Duffing apresenta uma divergência de R . Essa denota uma transição de fase do tipo I. Por outro lado, na configuração perturbada, a curvatura R muda de sinal e diverge nas vizinhanças do estado $(s_1^*, s_2^*, m^*) = (\pm 1/\sqrt{3}, 0, -1/3)$, o que reflete a uma transição de fase do tipo II.

Dessa maneira, com base nos resultados apresentados acima, podemos escrever que estendemos nossa abordagem geométrica para investigar bifurcações não triviais no contexto da TCB. Mais precisamente, estudamos o comportamento, condições de estabilidade e a caracterização de bifurcações homoclínicas em uma versão modificada do oscilador de Duffing.

Parte III

Conclusões

5 Conclusões

Neste trabalho, focamos em superar algumas das limitações da TCB ao introduzir métodos da geometria de informação. Em sua totalidade, uma abordagem geral capaz de abarcar tanto bifurcações locais quanto globais é desafiante. Consequentemente, a adição de métodos geométricos informacionais pode ser visto como uma esperança quando os métodos convencionais ou padronizados mostram pouco ou nenhuma solução.

Ao adotar essa premissa, nós estendemos muitos recursos da geometria de informação para investigar bifurcações no contexto de sistema dinâmicos. Mais precisamente, investigamos o comportamento, condições de estabilidade e o caráter de bifurcações através da interpretação da métrica de Fisher e da curvatura R .

No presente trabalho, a estabilidade global no sentido estrutural foi investigada para modelos contrastantes de bifurcações. No estudo das bifurcações sela-nó e transcítica, obtivemos métricas positiva-definidas, o que nos permitiu concluir que ambos os modelos são globalmente estáveis de acordo com o critério de Sylvester. No entanto, na investigação de bifurcações de forquilha, observamos condições diferentes para a estabilidade global. Na configuração supercrítica, concluiu-se que o sistema de Eq. (4.13) apresenta estabilidade global na região $0 < m < +\infty$, uma vez que ambos os determinantes Δ_1 e Δ_2 são positivos no regime físico. Alternadamente, na configuração subcrítica, inferimos que o sistema possui ambos Δ_1 e Δ_2 positivos e, ainda, estabilidade global na região $-\infty < m < 0$.

Em nossas análises, outro ponto de interesse foi a interpretação da estabilidade local estrutural através do estudo do sinal de R , bem como, o caráter das transições envolvidas em cada bifurcação. A tabela I apresenta de forma resumida o sinal e as divergências da curvatura escalar de bifurcações locais e globais.

Tabela 1 – Curvatura R para as bifurcações estudadas no trabalho, seguindo a convenção de sinal de Weinberg (SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021; RUPPEINER, 2010; WEINBERG, 1972). Aqui, nós fornecemos a dimensão do espaço de parâmetros investigado (r), o sinal de R , a estabilidade local, no sentido estrutural e o tipo de transição associada a cada bifurcação.

Bifurcação	r	Sinal de R	Estabilidade local	Tipo
Sela-nó	2	–	Instável	I
Transcítica	2	–	Instável	I
Forquilha supercrítica	2	+/-	Estável/Instável	I e II
Forquilha subcrítica	2	-/+	Instável/Estável	I e II
homoclínica do oscilador de Duffing não perturbado	3	+	Estável	I
homoclínica do oscilador de Duffing perturbado	3	+	Estável	I e II
Sela-nó do modelo de Kuramoto 2D	2	–	Instável	I

Em conformidade com os resultados determinados, as bifurcações sela-nó e transcritical possuem curvaturas negativas, como pode ser observado na tabela 1. Logo, isso nos permite concluir que o sistema é localmente estruturalmente instável nas vizinhanças do ponto de bifurcação.

Além disso, também se torna notório o comportamento divergente de R para essas bifurcações. A partir de nossas análises, encontramos que ambas as bifurcações sela-nó e transcritical apresentam pontos críticos divergentes, *i.e.* $R \rightarrow -\infty$ nas vizinhanças do ponto de bifurcação (s_C^*, m_C) . Esse caráter de transições ocorre quando as singularidades da curvatura R coincidem com as singularidades dos sistemas dinâmicos. Como uma consequência natural disso, podemos ver que as bifurcações sela-nó e transcritical possuem transições de fase do tipo I, conforme exposto na tabela 1.

Todavia, isso é completamente diferente para bifurcações de forquilha. No caso supercrítico, a curvatura escalar é positiva na região $-\infty < m < 0$. Além disso, R tende a infinito positivo no ponto crítico. Assim, podemos concluir que há um ganho de estabilidade local estrutural. Por outro lado, na região $0 < m < +\infty$, R é negativo e tende a infinito negativo. Portanto, infere-se que o sistema perde estabilidade nas vizinhanças do ponto crítico, como disposto resumidamente na tabela 1.

Na bifurcação subcrítica de forquilha, nós observamos que $R > 0$, quando $m > 0$. O que reflete a um ganho de estabilidade local estrutural. Por outro lado, quando $m < 0$, têm-se $R < 0$, conforme mostrado na tabela 1. Assim, podemos escrever que o sistema perde estabilidade local estrutural nas proximidades do ponto crítico.

Mais ainda, as análises dos diagramas- R revelam assinaturas de duas transições de fases distintas para bifurcações de forquilha. A primeira transição é observada em virtude da divergência de R conforme o sistema se aproxima do ponto crítico. Isso indica uma transição de fase do tipo I. A segunda transição ocorre, por sua vez, devido as mudanças no sinal de R . Logo, isso denota uma transição de fase do tipo II ou uma transição de fase de primeira ordem, conforme à classificação de Ehrenfest.

Finalmente, como resultado da generalização de nosso método geométrico da TGB para sistemas bidimensionais, bifurcações homoclínicas puderam ser investigadas no contexto da geometria de informação.

Bifurcações homoclínicas pertencem à família de bifurcações globais que não podem ser investigadas através da TCB. Geralmente, análises de bifurcações homoclínicas são realizadas através de simulações numéricas ou métodos globais aproximativos. Em virtude do fato da TCB falhar em propiciar uma descrição completa de bifurcações homoclínicas e dos métodos não lineares padronizados apresentarem limitações, nossa formulação mostrou-se como uma abordagem alternativa para investigar esse problema.

No contexto da geometria de informação, nós observamos diferentes condições para

a estabilidade global do oscilador de Duffing. Na configuração perturbada, concluiu-se que o sistema satisfaz as condições necessárias e suficientes para assegurar a estabilidade global de acordo com o critério de Sylvester. Porém, a equação não perturbada de Duffing viola a desigualdade da Eq. (4.29), visto que $\Delta_3 = 0$ para $\epsilon = 0$. Portanto, podemos concluir que o oscilador não-perturbado não apresenta estabilidade global, o que concorda com o teorema de Peixoto. Esse resultado representa um importante achado na compreensão de bifurcações homoclínicas, porque mostra que a abordagem geométrica fornece um modo alternativo de estabelecer condições de estabilidade para bifurcações globais.

Outro ponto de notório interesse jaz na interpretação do comportamento divergente de R . Na configuração não-perturbada, a curvatura R é uniformemente positiva e aumenta ao longo de todo o domínio, em que $R \rightarrow +\infty$ no ponto de bifurcação $(s_1^*, s_2^*) = (\pm 1/\sqrt{3}, 0)$. Portanto, esse fato marcante mostra que bifurcações homoclínicas representam transições suaves de tipo I no espaço de parâmetros, quando $\epsilon \rightarrow 0$, conforme exposto na tabela 1.

A análise dos diagramas de R para o oscilador perturbado mostraram assinaturas de dois tipos diferentes de transições de fase, como pode ser observado na tabela 1. A primeira ocorre devido à divergência de R , quando o sistema aproxima-se do ponto crítico. Isso indica uma transição de fase do tipo I. A segunda torna-se evidente dado o fato de R apresentar um comportamento divergente e mudar de sinal nas vizinhanças do ponto de bifurcação, o que denota uma transição de fase do tipo II.

Uma observação adicional sobre o oscilador Duffing consiste no ponto crítico $(s_1^*, s_2^*) = (\pm 1/\sqrt{3}, 0)$ e o respectivo valor de bifurcação $m^* = m_{\text{homoclínico}} = -1/3$. Em sua totalidade, não é possível determinar analiticamente nem o ponto de bifurcação nem os valores dos parâmetros em que uma bifurcação homoclínica ocorre. Nesse cenário, pontos de bifurcação podem apenas ser estimados usando o método de Melnikov. Embora esse método seja uma técnica universal para estudar bifurcações globais, seu uso prático ainda apresenta dificuldades técnicas e fundamentais (TSARIN; RYABOV; VARIV, 1996). Além disso, devemos notar que a abordagem de Melnikov pode apenas fornecer uma análise razoável do comportamento global quando a perturbação é muito pequena ou próxima de zero. Para grandes perturbações, porém, esse método pode não nos ajudar a entender o comportamento global de sistemas não lineares (TSARIN; RYABOV; VARIV, 1996; LUO, 2008).

Com base nisso, torna-se evidente que nossa abordagem expande o estado da arte, pois os métodos determinados aqui permitem localizar analiticamente o ponto de bifurcação e o valor do parâmetro de bifurcações homoclínicas.

Finalmente, na base da tabela, nós temos o modelo bidimensional de Kuramoto, que consiste no modelo mais bem-sucedido usado para estudar e investigar o fenômeno de sincronização (SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021; BASNARKOV; URUMOV, 2007; BASNARKOV; URUMOV, 2018; HSIA; JUNG; KWON, 2019).

Apesar de não ter sido investigado aqui, o sinal e o comportamento divergente de R para o modelo de Kuramoto foi realizado recentemente pelo autor da presente tese (SILVA; VIEIRA; LEONEL, 2021). Primeiramente, o estudo dos diagramas R revelou que uma curvatura escalar constante marca a sincronização de dois osciladores interagentes. Em segundo lugar, o estudo também permitiu mostrar que o regime de incoerência é caracterizado por $R \rightarrow 0$. Finalmente, o sinal de R mostrou-se sempre negativo com $R \rightarrow \infty$ nas vizinhanças do ponto de bifurcação. Logo, é possível concluir que o sistema bidimensional de Kuramoto é localmente estruturalmente instável de acordo com a TGB.

Em sua totalidade, porém, devemos reconhecer que a estrutura métrica riemanniana do espaço de parâmetros tem algumas peculiaridades para sistemas bidimensionais. Enfatizaremos algumas delas aqui.

Primeiro, a determinação da curvatura R torna-se uma tarefa desafiadora, uma vez que a obtenção dos símbolos de Christoffel, do tensor de curvatura e da curvatura escalar não são triviais.

Segundo, se permitirmos um ou dois dos parâmetros s_1 , s_2 , ou m variarem mais lentamente quando comparado aos demais, de tal maneira que possamos resguardar um desses como fixos, então a geometria de Fisher pode ser investigada. Mas, tal possibilidade nos permitiria analisar um determinado sistema de sete formas diferentes com um, dois ou três parâmetros independentes. O estudo da métrica riemanniana na forma delineada acima não se trata de uma ideia nova aqui. Isso já foi considerado ao investigar a estabilidade e flutuações da termodinâmica de buracos negros (RUPPEINER, 2008; RUPPEINER, 2007).

Finalmente, também analisaram-se os fenômenos críticos das classes dos modelos de bifurcações sela-nó, transcritical, forquilha supercrítica e forquilha subcrítica, de acordo com o formalismo de escala.

Como as derivadas de ordem superior e, conseqüentemente, os termos que compõem a métrica mostram-se independentes da variável β , foi possível estabelecer como hipótese que a distribuição de probabilidades pode ser interpretada como uma FHG, nas vizinhanças da criticalidade.

Por conseguinte, suposições usuais de escala permitiram determinar expoentes críticos diferentes que se relacionam entre si através de três novas leis de escala. Os quatro expoentes encontrados, a saber, $(\nu, \xi, \zeta, \omega)$, definem a classe de universalidade das bifurcações locais. Vale destacar ainda que a presente abordagem permitiu investigar tanto os casos subcríticos quanto os supercríticos da bifurcação de forquilha, o que representa uma expansão do estado da arte do formalismo de escala no contexto de bifurcações, visto que abordagens anteriores resguardam-se apenas a casos supercríticos, veja (LEONEL, 2016) e as referências desse.

À luz do exposto, podemos então concluir que estendemos com sucesso os métodos geométricos da teoria de informação para investigar bifurcações no contexto da dinâmica não

linear. Como resultado, foi possível adicionar uma nova possibilidade teórico-geométrica através do qual permitiu expandir o estado da arte de distintos modelos de bifurcações locais e globais. Não obstante, os resultados obtidos aqui concordam precisamente com aqueles obtidos por outros autores, há algum tempo, por outros métodos e em contextos um tanto diferentes.

Os métodos da física-matemática empregados neste trabalho são bem-compreendidos, e é uma questão de aplicação das técnicas apresentadas aqui a circunstâncias um tanto novas no contexto de sistemas complexos, bem como, da dinâmica não linear.

Parte IV

Perspectivas

6 Perspectivas da teoria geométrica de bifurcações

Nesta seção, eu quero discutir brevemente sobre um possível caminho para o futuro desenvolvimento da TGB, que consiste no estudo de ciclos-limite e, conseqüentemente, a resolução do problema da topologia de curvas algébricas e superfícies, que acredito que possa ser frutífero.

Em 8 de agosto de 1900, o célebre matemático David Hilbert apresentou uma lista magnífica de problemas no segundo congresso internacional de matemáticos em Paris. Atualmente, muitos dos problemas apresentados por Hilbert já foram resolvidos, mas, ainda existe um que permanece sem solução. O seguinte problema elementar, mas ainda não totalmente resolvido, é conhecido como décimo sexto problema de Hilbert:

Desejo apresentar uma questão que, a meu ver, pode ser atacada pelo mesmo método de variações contínuas de coeficientes, e cuja resposta é de valor correspondente para a topologia de famílias de curvas definidas por equações diferenciais. Esta é a questão do número máximo e das posições relativas dos ciclos-limite de Poincaré para uma equação diferencial de primeira ordem e grau da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

onde X e Y são funções integrais racionais de grau n em x e y . (HILBERT, 2000).

Em outras palavras, a questão levantada por Hilbert questiona o que pode ser dito sobre o número máximo e a localização de ciclos-limite de sistemas polinomiais planares de grau n . Um ciclo-limite consiste de uma trajetória fechada e isolada no espaço de fase de um sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias (ŻOŁĄEK; HENRYK; MURILLO, 2022; MONTEIRO, 2006; ROBINSON, 2012; JORDAN; SMITH, 2007).

Apesar da aparente simplicidade do problema, as previsões à acerca do número e da posição de tais trajetórias periódicas sob a perspectiva da TCB foram há muito desacreditadas em vista da natureza dos resultados contraditórios de investigações anteriores. Isto é, várias tentativas foram feitas ao longo da história, mas todos esses esforços foram infrutíferos, seja falhando no propósito declarado, seja por falta de consistência. A falha em resolver o décimo sexto problema de Hilbert sob ótica da TCB pode ser atribuída apenas a uma deficiência essencial da teoria atual e dos métodos padronizados para estudar ciclos-limite, em vez de uma aplicação defeituosa de tais métodos. Assim, a falta de métodos efetivos para o estudo dos ciclos-limite indica que uma revisão da teoria convencional de bifurcações é realmente necessária.

Apesar da natureza dos resultados contraditórios na compreensão do décimo sexto problema de Hilbert, têm sido apontado que o desenvolvimento de uma teoria invariante juntamente com métodos algébricos e geométricos pode contribuir para a solução completa de problemas ainda em aberto na teoria qualitativa de equações diferenciais (GAIKO, 2008; SCHLOMIUK, 1993).

De certo modo, esse objetivo foi alcançado através do desenvolvimento de nossa formulação geométrica da TGB, uma vez que a nova teoria de bifurcações desenvolvida nesta tese é claramente superior a TCB original em essencialmente cinco aspectos. Primeiro, permite abordar condições de estabilidade tanto locais quanto globais de sistemas dinâmicos.

Segundo, a abordagem da TGB é invariante a transformações de coordenadas, já que a curvatura escalar é um invariante geométrico. Esse fato, portanto, nos permite escrever que o estudo de sistemas descritos por equações diferenciais dispensa o emprego de transformações de coordenadas na TGB.

Terceiro, a TGB concorda com teoria moderna de fenômenos críticos, na qual é possível propor hipóteses de escala, derivar expoentes críticos e estabelecer classes de universalidade para sistemas dinâmicos, visto que a TGB também envolve o formalismo de escala.

Quarto, apesar de constituir de uma nova abordagem, a TGB envolve características essenciais da TCB de tal modo a permitir também investigar bifurcações locais sem a introdução de novos conceitos fundamentalmente.

Por fim, uma vez que a TGB constitui de uma nova abordagem cujos métodos não são comumente usados na dinâmica não linear, esta formulação geométrica fornece uma maneira alternativa de investigar problemas onde os métodos não lineares e convencionais apresentam limitações. Em conformidade com o último ponto, demonstramos que a TGB permite investigar bifurcações homoclínicas de sistemas com perturbações elevadas e, ainda, determinar o ponto de bifurcação de forma totalmente analítica e sem a necessidade de métodos aproximativos.

Com base no exposto, a pergunta fundamental que podemos fazer naturalmente agora é se a TGB pode fornecer inequivocamente o número máximo e a posição de ciclos-limite de sistemas dinâmicos no contexto de equações diferenciais.

O estudo de trajetórias periódicas e ciclos-limite em sistemas dinâmicos é de grande importância não só por suas extensões, mas também na interpretação de resultados práticos, que são interessantes teoricamente e certamente relevantes experimentalmente. Por conseguinte, devido ao fato de ciclos-limite serem difíceis de localizar e estudar, a aplicação de novos métodos geométricos pode lançar uma nova luz em seu estudo, particularmente onde os métodos comuns fornecem pouca ou nenhuma solução.

Um artigo com os detalhes da TGB desenvolvida nesta tese e as aplicações dessa teoria no décimo sexto problema de Hilbert está em curso de preparação.

Referências

- ABDEL-ALL, N. H.; ABD-ELLAH, H.; MOUSTAFA, H. Information geometry and statistical manifold. *Chaos, Solitons & Fractals*, v. 15, n. 1, p. 161–172, 2003. Citado 7 vezes nas páginas [11](#), [12](#), [15](#), [17](#), [19](#), [27](#) e [28](#).
- AMARI, S.-i.; NAGAOKA, H. *Methods of Information Geometry*. Reino Unido, GB: American Mathematical Society, 2000. Citado na página [16](#).
- BAKEŠ, D.; SCHREIBEROVÁ, L.; SCHREIBERA, I. Statistical scaling laws for chemical oscillators. *Chaos*, v. 18, n. 1, p. 015102, 2008. Citado na página [12](#).
- BASNARKOV, L.; URUMOV, V. Phase transitions in the kuramoto model. *Phys. Rev. E.*, v. 76, n. 5, p. 024037, 2007. Citado na página [63](#).
- BASNARKOV, L.; URUMOV, V. The mathematics of asymptotic stability in the kuramoto model. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, v. 474, n. 5, p. 1–20, 2018. Citado na página [63](#).
- BELL, G. M.; LAVIS, D. A.; BELL, G. M. *Statistical Mechanics of Lattice Systems: Volume 2: Exact, Series and Renormalization Group Methods*. Alemanha, DE: Springer, 1999. Citado na página [51](#).
- BOSE, A. In: JAEGER, D.; JUNG, R. (Ed.). *Encyclopedia of Computational Neuroscience*. 1. ed. New York, US: Springer, 2015. v. 1, cap. Bifurcations Dynamics of Single Neurons and Small Networks. Citado na página [49](#).
- CAPELA, F.; NARDINI, G. Hairy black holes in massive gravity: Thermodynamics and phase structure. *Phys. Rev. D*, v. 86, n. 2, p. 024030, 2012. Citado 4 vezes nas páginas [41](#), [45](#), [47](#) e [48](#).
- CASTEN, R. F. In: VITTURI, A.; CASTEN, R. F. (Ed.). *Symmetries in Nuclear Structure*. 1. ed. [S.l.]: World Scientific, 2004. v. 1, cap. Phase transional Behavior in Spherical-Deformed Transitions Regions, p. 172–181. Citado na página [58](#).
- CELIKOVSKY, S.; ZELINKA, I. In: ZELINKA, I. et al. (Ed.). *Evolutionary Algorithms and Chaotic Systems. Studies in Computational Intelligence*. 1. ed. Berlin, Heidelberg.: Springer, 2010. v. 267, cap. Chaos Theory for Evolutionary Algorithms Researchers, p. 89–143. Citado na página [55](#).
- CHOW, S.-N.; DRACHMAN, B.; WANG, D. Defining universality classes for three different local bifurcations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 29, n. 2, p. 129–143, 1990. Citado na página [10](#).
- CUESTA, F.; OLLERO, A. *Intelligent Mobile Robot Navigation*. Berlin, DE: Springer, 2005. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [55](#).
- DAI, L. et al. Generic indicators for loss of resilience before a tipping point leading to population collapse. *Proc. R. Soc. Lond. B*, v. 336, n. 6085, p. 1175–1177, 2012. Citado na página [42](#).
- DASGUPTA, B. *Applied Mathematical Methods*. India, IN: Pearson Education, 2006. Citado 2 vezes nas páginas [10](#) e [29](#).

- DEBNATH, L.; BHATTA, D. *Integral Transforms and their applications*. Estados Unidos, US: CRC Press, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 25.
- DEZA, E.; DEZA, M. *Encyclopedia of Distances*. Alemanha, DE: Springer Berlin Heidelberg, 2012. Citado 7 vezes nas páginas 13, 16, 17, 23, 24, 26 e 38.
- FISHER, R. A. On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Trans. Roy. Soc. London A*, v. 222, n. 594–604, p. 309, 1922. Citado na página 33.
- FREUND, J. A. *Stochastic Processes in Physics, Chemistry, and Biology*. Alemanha, DE: Springer Berlin Heidelberg, 2008. Citado na página 52.
- GAIKO, V. In: POPENDA, J.; RAKOWSKI, J.; ELAYDI, S. N. (Ed.). *Communications in Difference Equations: Proceedings of the Fourth International Conference on Difference Equations*. 1. ed. Países Baixos: CRC Press, 2000. cap. On Global bifurcation theory of Polynomial Dynamical Systems and Its Applications, p. 135–149. Citado na página 11.
- GAIKO, V. *Global Bifurcation Theory and Hilbert's Sixteenth Problem*. Estados Unidos, US: Springer US, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 68.
- GARDINE, L.; FOURIER-PRUNARET, D.; CHARGE, P. Border collision bifurcations in a two-dimensional piecewise smooth map from a simple switching circuit. *Chaos*, v. 21, n. 2, p. 023106, 2011. Citado na página 12.
- GEORGIU, I. T.; ROMEO, F. Multi-physics dynamics of a mechanical oscillator coupled to an electro-magnetic circuit. *Int. J. Non-Linear Mech.*, v. 70, p. 153–164, 2015. Citado na página 12.
- GILMORE, R. *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. Reino Unido, GB: Dover Publications, 1993. Citado na página 16.
- GONZÁLEZ-MEJÍA, A. et al. In: KLEMEŠ, J. J. (Ed.). *Assessing and Measuring Environmental Impact and Sustainability*. 1. ed. Oxford, GB: Butterworth-Heinemann, 2015. v. 1, cap. 2. Recent developments in the application of Fisher information to sustainable environmental management, p. 25–72. Citado na página 21.
- GROENENBOOM, M.; HOGEWEG, P. Space and the persistence of male-killing endosymbionts in insect populations. *Proc. R. Soc. Lond. B*, v. 269, n. 1509, p. 2509–2518, 2002. Citado na página 42.
- GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York, US: Springer, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 49.
- GUO, Y.; LUO, A. C. J. Parametric analysis of bifurcation and chaos in a periodically driven horizontal impact pair. *IJBC*, v. 22, n. 11, p. 1250268, 2012. Citado na página 12.
- HAKEN, H. *Synergetics: An Introduction Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology*. Alemanha, DE: Springer Berlin Heidelberg, 1977. Citado na página 20.
- HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. Estados Unidos, US: Dover Publications, 2009. Citado na página 20.

- HARRIS, F. E.; ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Países Baixos, NLD: Elsevier Science, 2013. Citado na página 25.
- HASSANI, S. *Mathematical Methods: For Students of Physics and Related Fields*. Nova York, NYC: Springer, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 38.
- HAZEWINKEL, M. Information. In: HAZEWINKEL, M. (Ed.). *Encyclopaedia of Mathematics*. 1st. ed. Países Baixos, NLD: Springer Netherlands, 2010. v. 1, p. 488. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 31.
- HAZEWINKEL, M. *Encyclopaedia of Mathematics: Monge—Ampère Equation — Rings and Algebras*. Alemanha, DE: Springer, 2013. Citado na página 26.
- HE, R.; HAN, Q. Dynamics and stability of permanent-magnet synchronous motor. *Math. Probl. Eng.*, v. 2017, n. 6, p. 8, 2017. Citado na página 49.
- HILBERT, D. Mathematical problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 37, p. 407–436, 2000. Citado na página 67.
- HRISTOVSKI, R. et al. *Complex Systems in Sport*. Reino Unido, GB: Taylor & Francis, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 52.
- HSIA, C.-H.; JUNG, C.-Y.; KWON, B. On the synchronization theory of kuramoto oscillators under the effect of inertia. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, v. 267, n. 2, p. 742–775, 2019. Citado na página 63.
- IL'YASHENKO, Y. S. et al. *Dynamical Systems V: Bifurcation Theory and Catastrophe Theory*. Alemanha, DE: Springer Berlin Heidelberg, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 10, 12, 20, 21, 29, 36 e 42.
- IÑARREA, M. M. et al. Bifurcations of dividing surfaces in chemical reactions. *J. Chem. Phys.*, v. 135, n. 1, p. 014110, 2011. Citado na página 12.
- JANKE, W.; JOHNSTON, D. A.; KENNA, R. Information geometry and phase transitions. *Physica A*, v. 336, p. 181–186, 2004. Citado 11 vezes nas páginas 11, 12, 13, 15, 17, 23, 24, 27, 28, 33 e 53.
- JANYSZEK, H. Riemannian geometry and stability of thermodynamical equilibrium systems. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 23, n. 4, p. 477–490, 1990. Citado 5 vezes nas páginas 32, 34, 44, 47 e 54.
- JANYSZEK, H.; MRUGAŁA, R. Geometrical structure of the state space in classical statistical and phenomenological thermodynamics. *Rep. Math. Phys.*, v. 27, n. 2, p. 145, 1989. Citado 5 vezes nas páginas 15, 16, 18, 32 e 34.
- JANYSZEK, H.; MRUGAŁA, R. Riemannian geometry and the thermodynamics of model magnetic systems. *Phys. Rev. A*, v. 39, n. 12, p. 6515–6523, 1989. Citado 15 vezes nas páginas 11, 12, 15, 17, 18, 27, 28, 31, 32, 34, 41, 45, 47, 48 e 54.
- JANYSZEK, H.; MRUGAŁA, R. Riemannian geometry and stability of ideal quantum gases. *J. Phys. A: Math. Gen.*, v. 23, n. 4, p. 467, 1990. Citado 10 vezes nas páginas 11, 12, 15, 17, 27, 28, 41, 45, 47 e 48.

- JORDAN, D.; SMITH, P. *Nonlinear Ordinary Differential Equations: An Introduction for Scientists and Engineers*. Reino Unido, GB: Oxford University Press, 2007. Citado na página 67.
- JUN-JIE, W.; CHUN-RUI, Z.; XIU-LING, L. Bifurcation in two-dimensional neural network model with delay. *Appl. Math. Mech*, v. 26, p. 210–217, 2005. Citado na página 49.
- KADANOFF, L. P. Equation of state in the neighborhood of the critical point t_c . *Phys. Phys. Fiz*, v. 2, n. 6, p. 263, 1966. Citado na página 32.
- KADANOFF, L. P. *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization*. Singapura, SG: World Scientific, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.
- KAMPEN, V. *Stochastic processes in physics and chemistry*. Alemanha, DE: Elsevier Science, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 26.
- KATSIKADELIS, J. *Boundary Elements: Theory and Applications*. Oxford, GB: Elsevier Science, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 38.
- KIELHÖFER, H. *Bifurcation Theory: An Introduction with Applications to Partial Differential Equations*. Alemanha, DE: Springer New York, 2011. Citado 5 vezes nas páginas 10, 12, 42, 45 e 49.
- KIM, S.-Y. et al. Bifurcations in a parametrically forced magnetic pendulum. *Phys. Rev. E*, v. 56, n. 6, p. 6613–6619, 1977. Citado na página 49.
- KOLEV, K.; STAYKOV, K.; VETSOV, T. Thermodynamic stability of the stationary lifshitz black hole of new massive gravity. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 1009, p. 1–13, 2019. Citado 7 vezes nas páginas 11, 12, 15, 17, 27, 28 e 29.
- KREYSZIG, E. *Differential Geometry*. Estados Unidos, US: Dover Publications, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 16, 17, 26 e 38.
- KWON, Y. W.; BANG, H. *The Finite Element Method Using MATLAB*. Estados Unidos, US: CRC Press, 2018. Citado na página 10.
- LAYEK, G. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Índia, IND: Springer India, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 12, 42, 45 e 49.
- LEONEL, E. D. Defining universality classes for three different local bifurcations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, v. 39, p. 520–528, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 10, 55 e 64.
- LEONEL, E. D. *Scaling Laws in Dynamical Systems*. Singapura, SG: Springer Singapore, 2021. Citado 7 vezes nas páginas 11, 12, 23, 29, 42, 45 e 49.
- LESNE, A.; LAGUËS, M. *Scale Invariance: From Phase Transitions to Turbulence*. Alemanha, DE: Springer Berlin Heidelberg, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 11, 12, 20, 21, 23 e 36.
- LIAO, X. *Absolute Stability of Nonlinear Control Systems*. Países Baixos, NLD: Springer Netherlands, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and Chaotic Dynamics*. Estados Unidos, US: Springer New York, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 49.

- LOPER, D. E. *Geophysical Waves and Flows: Theory and Applications in the Atmosphere, Hydrosphere and Geosphere*. Reino Unido, GB: Cambridge University Press, 2017. Citado na página 26.
- LUO, A. *Global Transversality, Resonance and Chaotic Dynamics*. Singapura, SG: World Scientific, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 63.
- MA, T.; WANG, S. *Phase Transition Dynamics*. New York, US: Oxford University Press, 2013. Citado na página 41.
- MARKS-TARLOW, T.; CLAYTON, K.; GUASTELLO, S. *Glossary of Nonlinear Terms*. 2004. Disponível em: <<https://www.societyforchaostheory.org/resources/files/00006/GlossaryTerms.html>>. Acesso em: 25 de maio de 2023. Citado na página 20.
- MCCANN, K.; YODZIS, P. Biological conditions for chaos in a three-species food chain. *Ecology*, v. 72, n. 3, p. 896–903, 1991. Citado na página 42.
- MEIROVITCH, L. *Computational Methods in Structural Dynamics*. Maryland, US: Springer Dordrecht, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 31.
- MILTON, J.; OHIRA, T. *Mathematics as a Laboratory Tool: Dynamics, Delays and Noise*. Estados Unidos, US: Springer New York, 2014. Citado na página 52.
- MILTON, K. A.; SCHWINGER, J. S. *Electromagnetic radiation variational methods, waveguides and accelerators*. Berlin, DE: Springer, 2006. Citado na página 22.
- MIROLLO, R. E.; STROGATZ, S. H. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, v. 50, n. 6, p. 1645–1662, 2018. Citado na página 12.
- MIRZA, B.; TALAEI, Z. Thermodynamic geometry of a kagome ising model in a magnetic field. *Phys. Lett. A*, v. 377, p. 513–517, 2013. Citado na página 58.
- MISBAH, C. *Complex Dynamics and Morphogenesis: An Introduction to Nonlinear Science*. Países Baixos, NLD: Springer, 2016. Citado na página 52.
- MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo, BR: Livraria da Física, 2006. Citado 9 vezes nas páginas 10, 11, 29, 30, 31, 55, 56, 58 e 67.
- MRUGAŁA, R. On equivalence of two metrics in classical thermodynamics. *Physica A*, v. 125A, n. 2-3, p. 631–639, 1984. Citado 4 vezes nas páginas 15, 16, 32 e 34.
- MURRAY, M. *Differential Geometry and Statistics*. Estados Unidos, US: CRC Press, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 13, 23 e 24.
- NOWAK, A.; VALLACHER, R. R. *Dynamical Social Psychology*. Reino Unido, GB: Guilford Publications, 1998. Citado na página 20.
- OSHIMA, H.; OBATA, T.; HARA, H. Solid-like features in dense vapors near the fluid critical point. *J. Phys. A*, v. 32, n. 36, p. 6373, 1999. Citado na página 28.
- PEIXOTO, M. M. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, v. 5, n. 22, p. 101–120, 1962. Citado 4 vezes nas páginas 29, 30, 31 e 56.

PINELE, J.; COSTA, S. I. R.; STRAPASSON, J. E. In: NIELSEN, F.; BARBARESCO, F. (Ed.). *Geometric Science of Information*. 1. ed. Berlin, Heidelberg.: Springer, 2019. v. 11712, cap. On the Fisher-Rao Information Metric in the Space of Normal Distributions, p. 676–684. Citado na página [36](#).

QUEVEDO, H. et al. Phase transitions in geometrothermodynamics. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 43, p. 1153–1165, 2011. Citado na página [47](#).

RAU, J. *Statistical Physics and Thermodynamics: An Introduction to Key Concepts*. Reino Unido, GB: Oxford University Press, 2017. Citado na página [28](#).

ROBINSON, R. C. *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*. Estados Unidos, US: American Mathematical Society, 2012. Citado na página [67](#).

RUPPEINER, G. Thermodynamics: A riemannian geometric model. *Phys. Rev. A.*, v. 20, n. 4, p. 1608, 1979. Citado 6 vezes nas páginas [16](#), [18](#), [28](#), [29](#), [32](#) e [39](#).

RUPPEINER, G. Riemannian geometry in thermodynamic fluctuation theory. *Phys. Mod. Phys.*, v. 67, n. 3, p. 605, 1995. Citado 6 vezes nas páginas [16](#), [18](#), [28](#), [29](#), [32](#) e [39](#).

RUPPEINER, G. Stability and fluctuations in black hole thermodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 75, p. 024037, 2007. Citado na página [64](#).

RUPPEINER, G. Thermodynamic curvature and phase transitions in kerr-newmann black holes. *Phys. Rev. D*, v. 78, p. 024016, 2008. Citado na página [64](#).

RUPPEINER, G. Thermodynamic curvature measures interactions. *Am. J. Phys.*, v. 78, n. 11, p. 1170, 2010. Citado 10 vezes nas páginas [11](#), [12](#), [15](#), [16](#), [17](#), [18](#), [26](#), [28](#), [29](#) e [61](#).

RUPPEINER, G. Thermodynamic curvature from the critical point to the triple point. *Phys. Rev. E*, v. 86, n. 2, p. 021130, 2012. Citado 3 vezes nas páginas [16](#), [18](#) e [26](#).

RUPPEINER, G. Some early ideas on the metric geometry of thermodynamics. *J. Chem. Phys.*, v. 185, n. 3–4, p. 246–261, 2016. Citado 3 vezes nas páginas [15](#), [16](#) e [18](#).

RUPPEINER, G. Solid-like features in dense vapors near the fluid critical point. *Phys. Rev. E*, v. 146, n. 22, p. 224501, 2017. Citado 4 vezes nas páginas [16](#), [18](#), [26](#) e [31](#).

RUPPEINER, G.; SEFTAS, A. Thermodynamic curvature of the binary van der waals fluid. *Entropy*, v. 22, n. 11, p. 1208, 2020. Citado 11 vezes nas páginas [11](#), [12](#), [15](#), [16](#), [17](#), [18](#), [27](#), [28](#), [29](#), [44](#) e [47](#).

SALINAS, S. *Introduction to Statistical Physics*. Alemanha, DE: Springer, 2001. Citado 6 vezes nas páginas [23](#), [24](#), [26](#), [41](#), [51](#) e [52](#).

SARDANYÉS, J.; MARTÍNEZ, R.; SIMÓ, C. Trans-heteroclinic bifurcation: a novel type of catastrophic shift. *R. Soc. Open sci.*, v. 5, p. 129, 2018. Citado na página [42](#).

SARMAH, H. K. et al. Homoclinic bifurcation in a second order differential equation. *Int. J. Appl. Math. Stat.*, v. 5, p. 29–40, 2016. Citado 2 vezes nas páginas [55](#) e [58](#).

SCHLOMIUK, D. Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 338, n. 2, p. 799–841, 1993. Citado na página [68](#).

- SEYDEL, R. *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Alemanha, DE: Springer, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 12, 42, 45 e 49.
- SILVA, V. B. da. Statistical scaling laws for chemical oscillators. *Physica A*, v. 509, n. 1, p. 66–73, 2018. Citado na página 12.
- SILVA, V. B. da. Statistical scaling laws for competing biological species. *Complex Systems*, v. 27, n. 4, p. 355–367, 2018. Citado na página 12.
- SILVA, V. B. da; LEONEL, E. D. A scaling investigation for a van der pol circuit: normal form applied to a hopf bifurcation. *Int. J. Dyn. Control*, v. 1, n. 2, p. 154–170, 2018. Citado na página 12.
- SILVA, V. B. da; VIEIRA, J. P.; LEONEL, E. D. Fisher information of the kuramoto model: A geometric reading on synchronization. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 423, p. 132926, 2021. Citado 15 vezes nas páginas 11, 12, 15, 16, 17, 27, 28, 32, 45, 47, 48, 54, 61, 63 e 64.
- SOROUSHFAR, S.; SAFFARI, R.; KAMVAR, N. Thermodynamic geometry of black holes in $f(r)$ gravity. *EPJ C*, v. 76, n. 9, p. 476, 2016. Citado 6 vezes nas páginas 41, 45, 47, 48, 51 e 52.
- SRIVASTAVA, R. K.; ASHOK, J. *Statistical Mechanics*. Índia, IND: PHI Learning, 2005. Citado na página 53.
- STANLEY, H. E. *Introduction to Phase transitions and critical phenomena*. Reino Unido, GB: Oxford University Press, 1971. Citado na página 32.
- STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Estados Unidos, US: CRC Press, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 10, 12, 30, 45, 49 e 55.
- THOMPSON, J. M. T. *Nonlinear dynamics and chaos*. São Paulo, BR: Wiley, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- TOMÉ, T.; OLIVEIRA, M. J. *Stochastic Dynamics and Irreversibility*. Alemanha, DE: Springer International Publishing, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 26.
- TSARIN, Y. A.; RYABOV, V. B.; VARIV, D. M. In: DOERING, C. R.; LÁSZLÓ; SHLESINGER, M. F. (Ed.). *Proc. of the First International Conference on Unsolved Problems of Noise in Physics, Biology, Electronic Technology and Information Technology*. 1. ed. [S.l.]: Hungary, 1996. v. 1, cap. Problems of the application of Melnikov method for chaos forecast in Dissipative dynamical systems, p. 251–259. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 63.
- VETSOV, T. Information geometry on the space of equilibrium states of black holes in higher derivative theories. *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 71, p. 1–11, 2021. Citado 8 vezes nas páginas 11, 12, 15, 17, 27, 28, 29 e 39.
- WASZCZYSZYN, Z.; CICHÓN, C.; RADWAŃSKA, M. *Stability of Structures by Finite Element Methods*. Países baixos, NLD: Elsevier Science, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 31.
- WEBER, G. F. *How Complexity Shapes the World*. Cambridge, GB: Cambridge Scholars Publisher, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 55.

WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Egito, EG: Wiley, 1972. Citado 3 vezes nas páginas 26, 28 e 61.

WEINHOLD, F. Metric geometry of equilibrium thermodynamics. *J. Chem. Phys.*, v. 63, n. 6, p. 2479–2483, 1975. Citado na página 15.

WIDOM, B. Equation of state in the neighborhood of the critical point. *J. Phys. Chem.*, v. 43, n. 11, p. 477–490, 1965. Citado na página 32.

WILSON, K. G. Renormalization group and critical phenomena. i. renormalization group and the kadanoff scaling picture. *Phys. Rev. B*, v. 4, n. 9, p. 3174–3183, 1971. Citado na página 33.

XU, Z.-M.; WU, B.; YANG, W.-L. Ruppeiner thermodynamic geometry for the schwarzschild-ads black hole. *Eur. Phys. J. C*, v. 101, n. 2, p. 024018, 2020. Citado 6 vezes nas páginas 11, 12, 15, 17, 27 e 28.

ZHANG, H. et al. Hopf bifurcation, hopf-hopf bifurcation, and period-doubling bifurcation in a four-species food web. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 27, p. 1–21, 2018. Citado na página 12.

ZHONG, L. *Fuzzy Chaotic Systems: Modeling, Control, and Applications*. Berlin, DE: Physica-Verlag, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 55.

ŻOŁĄEK; HENRYK; MURILLO, R. *Qualitative Theory Of Odes: An Introduction To Dynamical Systems Theory*. Singapura, SG: World Scientific Publishing Company, 2022. Citado na página 67.