

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**“Controle Ativo de Vibrações e Localização Ótima de Sensores e Atuadores Piezelétricos”**

**DOUGLAS DOMINGUES BUENO**

**Orientador:** Prof. Dr. Vicente Lopes Júnior

**Dissertação** apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Ilha Solteira – SP

Setembro/2007

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO: Controle Ativo de Vibrações e Localização Ótima de Sensores e Atuadores Piezelétricos**

**AUTOR: DOUGLAS DOMINGUES BUENO**

**ORIENTADOR: Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR**

**DATA DA REALIZAÇÃO: 24 DE SETEMBRO DE 2004**

Aprovada com parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA MECÂNICA pela Comissão Examinadora:



**Prof. Dr. VICENTE LOPES JUNIOR (Presidente)**

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



**Prof. Dr. WALTER KATSUMI SAKAMOTO**

Departamento de Física e Química / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



**Prof. Dr. ALBERTO LUIZ SERPA**

Departamento de Mecânica Computacional / Universidade Estadual de Campinas

## Dedicatória

**Dedico este trabalho à minha família,  
em especial à minha mãe Maria Antonia,  
minha irmã e irmãos pelo infinito apoio  
incondicional.**

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria inicialmente de agradecer ao Prof. Dr. Vicente Lopes Júnior por todas as oportunidades, pela confiança, paciência e por ter compartilhado comigo seu conhecimento desde os tempos de iniciação científica.

À todos os amigos e amigas do Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes (GMSINT) da UNESP/Ilha Solteira, pelos bons momentos de aprendizagem e descontração. Em especial aos meus amigos Samuel da Silva, Clayton Rodrigo Marqui e Leandro Cordeiro, os quais eu considero “co-autores” deste trabalho, pois sempre me incentivaram e estiveram prontos para me ajudar em muitas dúvidas que surgiram no decorrer do projeto. Também, aos amigos Rodrigo Borges Santos, Paulo Henrique Tozoni Palma e Camilo Mesquita Neto por todo o apoio, prontidão e principalmente pela amizade. Ao estagiário Danilo Henrique Queiroz Bueno, pois vários de seus trabalhos foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores que compartilharam comigo parte de seus conhecimentos desde o início da graduação em engenharia mecânica. Em especial ao prof. Dr. Mário Susumo Haga, do Departamento de Física e Química da UNESP/Ilha Solteira, pois com sua amizade muito me incentivou aos estudos.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica e a Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista, pois através do conhecimento contribuem para a transformação social tão desejada por muitos.

À Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro, processo 06/01993-0, que possibilitou a execução deste trabalho com dedicação exclusiva.

“Sorte e oportunidade sempre são importantes, mas coragem é tudo.”

BUENO, D. D. 2007. **Controle Ativo de Vibrações e Localização Ótima de Sensores e Atuadores Piezelétricos**. Dissertação de Mestrado (Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

## RESUMO

Este trabalho apresenta o projeto do regulador linear quadrático (LQR – do inglês *Linear Quadratic Regulator*) para atenuar vibrações em estruturas mecânicas. Estas estruturas, com atuadores e sensores acoplados, são denominadas estruturas inteligentes. Os projetos de controladores ativos são resolvidos utilizando desigualdades matriciais lineares (*LMIs* – do inglês *Linear Matrix Inequalities*). Assim, é possível projetar controladores robustos considerando incertezas paramétricas na planta a ser controlada. São utilizados atuadores e sensores piezelétricos (PZTs) para aplicações em estruturas flexíveis dos tipos vigas e placas e, também, atuadores de pilha para aplicações em estruturas do tipo treliça. O problema do posicionamento ótimo dos atuadores e sensores piezelétricos também é resolvido utilizando as normas de sistemas  $H_2$ ,  $H_\infty$ , Hankel e as matrizes gramianas de observabilidade e controlabilidade. O modelo matemático da estrutura inteligente é obtido a partir do Método dos Elementos Finitos e, também, utilizando o Método de Identificação de Subespaços através de dados experimentais. O problema de posicionamento ótimo dos atuadores e sensores e o controle ativo de vibração são apresentados em simulações numéricas e experimentais. Os resultados mostram que os controladores robustos aumentam o amortecimento estrutural minimizando as amplitudes de vibração.

**Palavras-chave:** *Controle Ativo de Vibrações, Estruturas Inteligentes, Controladores Robustos, Posicionamento Ótimo, Atuadores e Sensores Piezelétricos.*

BUENO, D. D. 2007. **Active Vibration Control and Optimal Placement of Piezoelectric Sensors and Actuators**. Master of Science in Mechanical Engineering – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, Brazil.

### ABSTRACT

This work presents the Linear Quadratic Regulator design to vibration attenuation in mechanical structures. These structures are named Smart Structures because they use actuators and sensors electromechanically coupled. Active controller designs are solved using Linear Matrix Inequalities. So, it is possible to consider polytopic uncertainties. Piezoelectric actuators and sensors are used for applications in flexible structures as beams and plates and, also, stack actuators for applications in truss structures. Optimal placement problem of piezoelectric actuators and sensors also solved using  $H_2$ ,  $H_\infty$ , Hankel system norms and controllability and observability grammian matrices. The mathematical model of the smart structure is obtained through Finite Element Method and, also, through Numerical State Space of Subspace System Identification (Subspace Method) by experimental data. The optimal placement of actuator and sensor and the active vibration control is numerically and experimentally implemented. Results show that the robust controllers increase the structural damping minimizing magnitude of vibrations.

**Keywords:** *Active Vibration Control, Smart Structures, Robust Controllers, Optimal Placement, Piezoelectric Actuators and Sensors.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Desenho esquemático de um sistema de controle ativo.....	24
Figura 1.2 – Célula unitária de PZT: (1) Tipo Perovskite Titanato Zirconato de Chumbo (PZT), célula unitária no estado de simetria cúbica abaixo da temperatura de <i>Curie</i> ; (2) Célula unitária distorcida tetragonalmente acima a temperatura de <i>Curie</i> .....	33
Figura 1.3 – Dipolos elétricos nos domínios: (1) cerâmica ferroelétrica não-polarizada; (2) durante a polarização e (3) após a polarização (cerâmica piezelétrica).....	34
Figura 1.4 – Ilustração do efeito piezelétrico direto e inverso.....	34
Figura 1.5 – Aplicação de sensores e atuadores nas asas de um avião.....	36
Figura 1.6 – Comparação do coeficiente piezelétrico do PVDF e Polyimides em função da temperatura (em °C).....	38
Figura 1.7 – Raquetes de tênis que utilizam materiais inteligentes.....	39
Figura 1.8 – Bastão de Baisebol com sistema para atenuar vibrações.....	39
Figura 1.9 – Esqui tradicional e esqui inteligente da companhia ACX.....	40
Figura 1.10 – Materiais inteligentes monitorando as condições da estrutura.....	41
Figura 1.11 – Robô com músculos artificiais.....	41
Figura 1.12 – Localização de sistemas inteligentes em um avião.....	42
Figura 1.13 – (a) Helicóptero e vórtices, (b) Esquema das hélices com PZTs embutidos..	43
Figura 1.14 – Estação Espacial Internacional.....	43
Figura 1.15 – Protótipo de transportador vibratório acionado por elementos piezelétricos	44
Figura 1.16 – Análise modal em um automóvel utilizando materiais piezelétricos.....	44
Figura 1.17 – Perfurador vibratório utilizado para coletar amostras de rochas.....	45
Figura 1.18 – Material MR sem aplicação e com a aplicação de campo magnético.....	46
Figura 1.19 – Empilhadeira Komatsu FD 20.....	46
Figura 1.20 – Detalhes do sistema de suspensão semi-ativa utilizando material MR.....	47
Figura 2.1 – Antena de comunicação com o espaço da NASA localizada em Madri.....	58
Figura 2.2 – Boeing 747SP utilizado para transportar o telescópio SOFIA.....	59
Figura 3.1 – Sistema submetido à ação de distúrbios e saída de desempenho.....	79
Figura 4.1 – Incerteza aditiva.....	96

Figura 4.2 – Incerteza multiplicativa na saída.....	96
Figura 4.3 – Incerteza multiplicativa na entrada.....	96
Figura 5.1 – Pesquisadores do <i>Bell Laboratories</i> – (a) Harry Nyquist; (b) Hendrik Bode.	101
Figura 5.2 – Rudolf Kalman, matemático e engenheiro eletricitista húngaro-americano.....	103
Figura 5.3 – Diagrama de blocos do sistema ótimo proposto.....	106
Figura 5.4 – Etapas para o projeto de um sistema de controle ótimo quadrático.....	109
Figura 6.1 – Definição de observador de estado.....	115
Figura 7.1 – (a) atuador PZT de pilha; (b) PZT de pilha conectado em um braço-alavanca.....	130
Figura 7.2 – Viga discretizada e posições candidatas para o atuador PZT.....	131
Figura 7.3 – Índice grammiano de posicionamento do atuador – aplicação numérica.....	132
Figura 7.4 – Viga de aço utilizada na aplicação experimental.....	132
Figura 7.5 – Equipamentos utilizados na aquisição dos sinais.....	133
Figura 7.6 – Configuração completa do experimento realizado.....	133
Figura 7.7 – Sinais de entrada para cada posição candidata.....	134
Figura 7.8 – Resposta do sistema para a entrada na primeira posição.....	134
Figura 7.9 – Resposta do sistema para a entrada na segunda posição.....	134
Figura 7.10 – Resposta do sistema para a entrada na terceira posição.....	135
Figura 7.11 – FRF do sistema para entrada na primeira posição.....	135
Figura 7.12 – FRF do sistema para entrada na segunda posição.....	136
Figura 7.13 – FRF do sistema para entrada na terceira posição.....	136
Figura 7.14 – Índice grammiano de posicionamento do atuador – aplicação experimental	137
Figura 7.15 – Índice grammiano de posicionamento para o 1º modo.....	137
Figura 7.16 – Índice grammiano de posicionamento para o 2º modo.....	138
Figura 7.17 – Placa flexível utilizada na simulação de posicionamento ótimo.....	139
Figura 7.18 – Atuadores PZT colado em uma superfície gerando momento de flexão.....	139
Figura 7.19 – Quatro primeiros modos de vibrar da placa de alumínio.....	140
Figura 7.20 – Índice de posicionamento do atuador – primeiro modo.....	140
Figura 7.21 – Índice de posicionamento do atuador – segundo modo.....	141
Figura 7.22 – Índice de posicionamento do atuador – terceiro modo.....	141
Figura 7.23 – Índice de posicionamento do atuador – quarto modo.....	141
Figura 7.24 – Índice grammiano de posicionamento do sensor – 1º modo.....	142
Figura 7.25 – Índice grammiano de posicionamento do sensor – 2º modo.....	142

Figura 7.26 – Índice grammiano de posicionamento do sensor – 3º modo.....	143
Figura 7.27 – Índice grammiano de posicionamento do sensor – 4º modo.....	143
Figura 7.28 – PZT atuador e placa flexível de alumínio.....	144
Figura 7.29 – Disposição da configuração experimental.....	144
Figura 7.30 – Vértices do politopo que limita as incertezas nos parâmetros modais da placa.....	146
Figura 7.31 – FRF para o sistema com e sem controle.....	148
Figura 7.32 – Posição dos pólos do sistema com e sem controle – vértice 1.....	148
Figura 7.33 – FRFs obtidas a partir de cada identificação experimental. Cada uma está representada por um vértice do politopo.....	149
Figura 7.34 – Função de resposta ao impulso para o sistema com e sem controle – vértices 1, 2 e 3.....	150
Figura 7.35 – Treliça plana utilizada no posicionamento do atuador PZT.....	152
Figura 7.36 – Avaliação das posições candidatas ao pior caso de distúrbio.....	153
Figura 7.37 – Primeiro modo de vibrar da treliça plana [149,14 Hz].....	154
Figura 7.38 – Segundo modo de vibrar da treliça plana [550,95 Hz].....	154
Figura 7.39 – Terceiro modo de vibrar da treliça plana [732,56 Hz].....	155
Figura 7.40 – Quarto modo de vibrar da treliça plana [1.171,20 Hz].....	155
Figura 7.41 – Índice de posicionamento na ausência do distúrbio: 1º, 2º, 3º e 4º modos....	156
Figura 7.42 – Índice de posicionamento considerando o distúrbio: 1º, 2º, 3º e 4º modos...	157
Figura 7.43 – Índice de posicionamento do PZT sem distúrbio considerando todos os modos de vibrar.....	158
Figura 7.44 – Índice de posicionamento do PZT com distúrbio considerando todos os modos de vibrar.....	158
Figura 7.45 – Treliça espacial utilizada na aplicação de posicionamento e projeto de controlador robusto.....	160
Figura 7.46 – Dez primeiros modos de vibrar da treliça espacial.....	163
Figura 7.47 – Norma $H_\infty$ dos modos da treliça espacial: $G_{wz}$ e $G_{uy}$ ; $G_{wy}$ e $G_{uz}$ .....	165
Figura 7.48 – Propriedade multiplicativa da norma $H_\infty$ para a treliça espacial.....	165
Figura 7.49 – Peso modal do distúrbio impulsivo para cada da treliça espacial.....	166
Figura 7.50 – Peso modal do desempenho para cada modo da treliça espacial.....	166
Figura 7.51 – Índice de posicionamento do atuador de pilha de PZT na treliça espacial....	167
Figura 7.52 – Índice de posicionamento do sensor na treliça espacial.....	168

Figura 7.53 – Índice de posicionamento do sensor no nó 13.....	168
Figura 7.54 – Índice de posicionamento do sensor no nó 14.....	169
Figura 7.55 – Índice de posicionamento do sensor no nó 15.....	169
Figura 7.56 – Índice de posicionamento do sensor no nó 15.....	169
Figura 7.57 – Índice de relacionamento dos sensores.....	170
Figura 7.58 – Índice de posicionamento dos sensores eliminando as posições altamente correlacionadas.....	171
Figura 7.59 – Treliça espacial com dois atuadores de pilha de PZT (barras em vermelho), distúrbio (em azul) e sensores (nós em vermelho).....	172
Figura 7.60 – Vértices do politopo para duas incertezas paramétricas.....	173
Figura 7.61 – FRF do modelo reduzido com +5% de variação na rigidez dos elementos 5 e 7 (posições ótimas para o atuador de pilha).....	174
Figura 7.62 – FRF dos modos residuais para o sistema com e sem controle.....	175
Figura 7.63 – Força modal no atuador 1 (elemento 5).....	175
Figura 7.64 – Força modal no atuador 2 (elemento 7).....	175
Figura 7.65 – Deslocamento modal obtido para o sistema com e sem controle.....	176
Figura 7.66 – FRF do sistema considerando os controladores tradicional e robusto para o sistema no vértice 1.....	178
Figura 7.67 – Treliça 3D e atuadores PZT de pilha.....	179
Figura 7.68 – Adaptadores construídos em alumínio para fixar os atuadores nas barras da treliça.....	181
Figura 7.69 – Desenho esquemático dos nós estruturais da treliça.....	182
Figura 7.70 – Nó estrutural confeccionado em latão.....	182
Figura 7.71 – FRF da treliça 3D estimada a partir da resposta ao impulso.....	183
Figura 7.72 – (a) Resposta ao impulso; (b) Martelo de impacto.....	184
Figura 7.73 – Resposta ao impulso da treliça com e sem controle.....	186
Figura 7.74 – Resposta da estrutura com e sem controle – distúrbio senoidal (16Hz).....	187
Figura 7.75 – Resposta estrutural estimador pelo filtro de Kalman – distúrbio senoidal (16Hz).....	188
Figura 7.76 – Força de controle – distúrbio senoidal (16Hz).....	188
Figura 7.77 – Resposta estrutural sem e com controle – distúrbio senoidal (26Hz).....	189
Figura 7.78 – Força de controle – distúrbio senoidal (26Hz).....	190
Figura 7.79 – Resposta estrutural estimada pelo Filtro de Kalman – distúrbio senoidal	190

(26Hz).....	
Figura 7.80 – Sinal de distúrbio senoidal (26Hz) e sinal do acelerômetro.....	191
Figura 7.81 – FRF da treliça com e sem controle – valores absolutos.....	191
Figura 7.82 – FRF da treliça com e sem controle – valores em dB.....	192
Figura 7.83 – FRF da treliça com e sem controle – <i>Zoom</i> nos dois primeiros modos.....	192
Figura A1.1 – Quinto modo de vibrar da treliça plana [1.657,95 Hz].....	215
Figura A1.2 – Sexto modo de vibrar da treliça plana [1.884,42 HZ].....	215
Figura A1.3 – Sétimo modo de vibrar da treliça plana [2.301,08 Hz].....	216
Figura A1.4 – Oitavo modo de vibrar da treliça plana [2.836,45 Hz].....	216
Figura A1.5 – Nono modo de vibrar da treliça plana [3.478,72 Hz].....	216
Figura A1.6 – Décimo modo de vibrar da treliça plana [3.628,35 Hz].....	217
Figura A1.7 – Décimo primeiro modo de vibrar da treliça plana [3.864,81 Hz].....	217
Figura A1.8 – Décimo segundo modo de vibrar da treliça plana [4.144,89 Hz].....	217
Figura A1.9 – Décimo terceiro modo de vibrar da treliça plana [4.256,82 Hz].....	218
Figura A1.10 – Décimo quarto modo de vibrar da treliça plana [4.757,73 Hz].....	218
Figura A1.11 – Décimo quinto modo de vibrar da treliça plana [5.032,19 Hz].....	218
Figura A1.12 – Décimo sexto modo de vibrar da treliça plana [5.417,29 Hz].....	219
Figura A1.13 – Índice de posicionamento na ausência do distúrbio: 5°, 6°, 7° e 8° modos.	219
Figura A1.14 – Índice de posicionamento considerando o distúrbio: 5°, 6°, 7° e 8° modos	220
Figura A1.15 – Índice de posicionamento na ausência do distúrbio: 9°, 10°, 11° e 12° modos.....	220
Figura A1.16 – Índice de posicionamento considerando o distúrbio: 9°, 10°, 11° e 12° modos.....	221
Figura A1.17 – Índice de posicionamento na ausência do distúrbio: 13°, 14°, 15° e 16° modos.....	221
Figura A1.18 – Índice de posicionamento considerando o distúrbio: 13°, 14°, 15° e 16° modos.....	222
A2.1 – Diagrama de controle utilizado na placa dSpace 1103 para aplicação de controle experimental na treliça 3D.....	225
Figura A2.2 – Placa de controle da DSPACE 1103.....	227
Figura A2.3 – Condicionador de sinais da PCB Piezotronics®.....	228
Figura A2.4 – Sistema de aquisição utilizado na aplicação de controle.....	228
Figura A2.5 – Gerador de sinais de distúrbio e amplificador do sinal de controle.....	229

Figura A2.6 – Atuador PZT de pilha <i>CEDRAT</i> APA 60M.....	229
Figura A2.7 – Acelerômetro PCB Piezotronics® modelo 352C22.....	230
Figura A2.8 – Configuração do experimento de controle experimental na treliça 3D.....	230

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Propriedades físicas do PZT e PVDF.....	35
Tabela 1.2 – Comparação entre propriedades dos polímeros PVDF e Polyimides.....	37
Tabela 7.1 – Propriedades físicas e geométricas da viga utilizada.....	131
Tabela 7.2 – Comparação entre as frequências do modelo FEM e experimental.....	137
Tabela 7.3 – Propriedades físicas e geométricas da placa de alumínio.....	139
Tabela 7.4 – Propriedades físicas e geométricas dos atuadores PZTs, baseadas no material PSI-5A-S4 ( <i>Piezo-Systems®</i> , <i>Inc.</i> ).....	145
Tabela 7.5 – Frequências naturais e fatores de amortecimento de cada identificação.....	147
Tabela 7.6 – Comparação entre as frequências naturais: FEM versus Modelo Identificado.....	151
Tabela 7.7 – Comparação entre os fatores de amortecimento: FEM <i>versus</i> Modelo Identificado.....	151
Tabela 7.8 – Propriedades físicas e geométricas da treliça.....	152
Tabela 7.9 – Posições candidatas ao pior caso de distúrbio.....	153
Tabela 7.10 – Frequências naturais e os fatores de amortecimento estrutural.....	154
Tabela 7.11 – Propriedades físicas e geométricas da treliça espacial.....	160
Tabela 7.12 – Número dos elementos (barras) em função dos nós.....	164
Tabela 7.13 – Posições dos sensores altamente correlacionados.....	170
Tabela 7.14 – Atenuação em dB na amplitude de vibração para os quatro primeiros modos.....	174
Tabela 7.15 – Parâmetros estatísticos dos sinais de força modal nos atuadores.....	176
Tabela 7.16 – Parâmetros estatísticos dos sinais de deslocamento modal.....	177
Tabela 7.17 – Atenuação em dB considerando o sistema em cada vértice do politopo.....	178
Tabela 7.18 – Propriedades físicas e geométricas da treliça.....	180
Tabela 7.19 – Propriedades físicas e geométricas do atuador de pilha ( <i>CEDRAT Technologies</i> ).....	180

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{A}^T$	Transposto da matriz $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inversa da matriz quadrada não-singular $\mathbf{A}$
$\ \mathbf{A}\ _2$	Norma euclidiana de uma matriz $\mathbf{A}$ com valores reais
$\ \mathbf{v}\ _2$	Norma euclidiana de um vetor $\mathbf{v}$ com valores reais
$\text{diag}(a_i)$	Matriz diagonal com elementos $a_i$ na diagonal
$\lambda_i(\mathbf{A})$	Autovalores da matriz quadrada $\mathbf{A}$
$\lambda_{\max}(\mathbf{A})$	Máximo autovalor da matriz quadrada $\mathbf{A}$
$\mathbf{I}_{n,n}$	Matriz identidade de ordem $n \times n$
$\mathbf{O}_{n,n}$	Matriz de zeros de ordem $n \times n$
$\mathbf{A}^\dagger$	Pseudo-inversa da matriz $\mathbf{A}$
$[\ ]^\perp$	Matriz com espaço de linhas perpendicular ao espaço de linhas de $[\ ]$
$\min(x) \ a-b\ $	Mínimo entre $a = a(x)$ e $b = b(x)$ com incógnita $x$
$\text{tr}(\mathbf{A})$	Traço da matriz $\mathbf{A}$
$\text{Co}(V_1, \dots, V_n)$	Domínio convexo com vértices $V_1, \dots, V_n$
$\lim_{t \rightarrow \infty}(\mathbf{A})$	Limite de $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ com $t$ (tempo) tendendo ao infinito
$E(a)$	Esperança da variável $a$
$N(a,b)$	Função densidade probabilidade Gaussiana com argumento $a$ e covariância $b$
$p(ab)$	Probabilidade do evento $a$ sabendo que ocorreu outro evento $b$
$\det(\mathbf{A})$	Determinante da matriz quadrada $\mathbf{A}$
$L(x,u)$	Função quadrática envolvendo as variáveis $x$ e $u$

## Letras Latinas

<b>A</b>	Matriz dinâmica
<b>A<sub>m</sub></b>	Matriz dinâmica modal
<b>A<sub>c</sub></b>	Matriz dinâmica do sistema a malha fechada
<b>B</b>	Matriz de entrada de controle
<b>B<sub>w</sub></b>	Matriz de entrada de distúrbio
<b>B<sub>m</sub></b>	Matriz de entrada de controle modal
<b>B<sub>mw</sub></b>	Matriz de entrada de distúrbio modal
<b>B<sub>0</sub></b>	Matriz de entrada do sinal de controle
<b>B<sub>0w</sub></b>	Matriz entrada do distúrbio
<b>C</b>	Matriz de saída
<b>C</b>	Matriz de controlabilidade
<b>C<sub>m</sub></b>	Matriz de saída modal
<b>C<sub>mq</sub></b>	Matriz de saída de deslocamento modal
<b>C<sub>mv</sub></b>	Matriz de saída de velocidade modal
<b>C<sub>oq</sub></b>	Matriz de saída de deslocamento
<b>C<sub>ov</sub></b>	Matriz de saída de velocidade
<b>D</b>	Matriz de transmissão direta da entrada de controle
<b>D<sub>w</sub></b>	Matriz de transmissão direta da entrada de distúrbio
<b>D<sub>a</sub></b>	Matriz de amortecimento estrutural
<b>D<sub>ap</sub></b>	Matriz de amortecimento estrutural proporcional
<b>D<sub>m</sub></b>	Matriz de amortecimento modal
<b>e(t)</b>	Vetor de erro
<b>g<sub>uyk</sub></b>	Vetor da norma do <i>k-ésimo</i> sensor
<b>G</b>	Função de transferência do sistema
<b>G</b>	Matriz de ganho do controlador
<b>G(s)</b>	Função de transferência real
<b>G<sub>n</sub>(s)</b>	Função de transferência nominal
<b>  G  <sub>∞</sub></b>	Norma H <sub>∞</sub> do sistema com função de transferência G
<b>  G  <sub>2</sub></b>	Norma H <sub>2</sub> do sistema com função de transferência G

$\ G\ _h$	Norma Hankel do sistema com função de transferência $G$
$H$	Matriz de Toeplits
$I(k)$	Índice de relacionamento do $k$ -ésimo sensor
$IG_a$	Índice grammiano de posicionamento do atuador
$IG_d$	Índice grammiano de sensibilidade de distúrbio
$IG_s$	Índice grammiano de posicionamento do sensor
$J$	Índice de vibração do controlador regulador linear quadrático
$K$	Matriz de rigidez estrutural
$K_m$	Matriz de rigidez modal
$K_t$	Ganho do Estimador de Kalman
$L$	Matriz de redução do modelo modal
$M$	Matriz de massa estrutural
$M_m$	Matriz de massa modal
$O$	Matriz de observabilidade
$P$	Matriz simétrica positiva definida
$Q$	Matriz positiva definida
$Q_{lqr}$	Matriz de ponderação da taxa de decaimento
$q$	Vetor de deslocamento
$q_m$	Vetor de deslocamento modal
$r_{ik}$	Coefficiente de correlação dos sensores
$R$	Matriz de transformação de coordenadas
$R_{lqr}$	Matriz de ponderação do sinal de controle
$R$	Número de sensores
$r(t)$	Sinal de referência para a realimentação linear das saídas ou dos estados
$S$	Número de atuadores
$u$	Vetor do sinal de controle
$U$	Matriz de Hankel das entradas
$V(x)$	Função de Lyapunov
$V_K$	Matriz de covariância de ruído de processo
$w$	Vetor do sinal de distúrbio
$w_{ki}$	Peso do $k$ -ésimo atuador para o $i$ -ésimo modo
$W_c$	Matriz grammiana de controlabilidade
$W_D$	Matriz grammiana de sensibilidade de distúrbio

$\mathbf{W}_K$	Matriz de covariância de ruído de medida
$\mathbf{W}_o$	Matriz gramiana de observabilidade
$\mathbf{y}$	Vetor das saídas de realimentação
$\mathbf{Y}$	Matriz de Hankel das saídas
$\mathbf{x}$	Vetor de estados
$\mathbf{X}$	Matriz de estados
$\mathbf{Z}$	Matriz de fatores de amortecimento
$\mathbf{z}$	Vetor de saídas de desempenho ou saídas reguladas

## Letras Gregas

$\omega_i$	Frequência natural do <i>i-ésimo</i> modo
$\Omega$	Espaço convexo
$\mathbf{\Omega}$	Matriz de frequências naturais
$\mathbf{\Phi}$	Matriz modal
$\alpha$	Escalar de proporcionalidade entre as matrizes de massa e amortecimento
$\alpha_{wi}$	Peso do distúrbio $\mathbf{w}$ no <i>i-ésimo</i> modo
$\alpha_{zi}$	Peso da saída de desempenho $\mathbf{z}$ no <i>i-ésimo</i> modo
$\beta$	Escalar de proporcionalidade entre as matrizes de rigidez e amortecimento
$\zeta_i$	Fator de amortecimento do <i>i-ésimo</i> modo
$\gamma_i$	Valor singular de Hankel do <i>i-ésimo</i> modo
$\mathbf{\Gamma}$	Matriz de observabilidade estendida
$\mathbf{\Delta}$	Matriz de controlabilidade estendida
$\Delta_a(s)$	Representação da incerteza aditiva
$\Delta_o(s)$	Representação da incerteza multiplicativa na saída
$\Delta_i(s)$	Representação da incerteza multiplicativa na entrada
$\mathbf{\Sigma}$	Matriz diagonal da decomposição de valores singulares
$\sigma_{\max}(\mathbf{G})$	Maior valor singular da função de transferência $\mathbf{G}$
$\mu$	Escalar da formulação da norma $H_\infty$ via LMIs
$\sigma_\infty$	Índice de posicionamento envolvendo a norma $H_\infty$
$\sigma_2$	Índice de posicionamento envolvendo a norma $H_2$
$\sigma_h$	Índice de posicionamento envolvendo a norma Hankel

$\sigma_a$	Índice de posicionamento do atuador
$\sigma_s$	Índice de posicionamento do sensor
$\sigma_m$	Índice dos modos
$\lambda_{\max}(\mathbf{A})$	Maior autovalor da matriz $\mathbf{A}$

## Subscritos

$m$	Referente à representação em coordenadas modais
$w$	Referente à matriz de entrada de distúrbio
$i$	Referente ao <i>i-ésimo</i> modo de vibração
$r$	Referente aos estados mantidos após o truncamento
$t$	Referente aos estados truncados
$d$	Referente à forma discreta
$s$	Referente aos sensores
$a$	Referente aos atuadores
$c$	Referente ao modelo a ser controlado
$r$	Referente ao modelo residual

## Siglas

AVC	Controle Ativo de Vibrações ( <i>Active Vibration Control</i> )
LMI	Desigualdades Matriciais Lineares ( <i>Linear Matrix Inequalities</i> )
LQR	Regulador Linear Quadrático ( <i>Linear Quadratic Regulator</i> )
ANC	Controle Ativo de Ruídos ( <i>Active Noise Control</i> )
ANVC	Controle Ativo de Vibrações e Ruídos ( <i>Active Noise and Vibration Control</i> )
SISO	Simple Entrada – Simple Saída ( <i>Single Input – Single Output</i> )
AG	Algoritmos Genéticos
PZT	Titanato-Zirconato-Chumbo
PVDF	Polyvinilidene Fluoride
NASA	Agência Aeroespacial dos Estados Unidos ( <i>National Aeronautics and Space Administration</i> )
SHM	Monitoramento da Integridade Estrutural ( <i>Structural Health Monitoring</i> )
ACX	<i>Active Control eXperts</i> , Empresa de Cambridge, Massachusetts, EUA
ATVA	<i>Active Tuned Vibration Attenuators</i>
USDC	<i>Ultrasonic/sonic driller/corer</i>
ER	Eletroreológico
MR	Magnetoreológico
FEM	Método dos Elementos Finitos ( <i>Finite Element Method</i> )
EDOL	Equação Diferencial Ordinária Linear
GL	Grau de Liberdade
ERA	Algoritmo de Realização de Autosistemas ( <i>Eigensystem Realization Algorithm</i> )
SOFIA	<i>Stratospheric Observatory for Infrared Astronomy</i>
DLR	Centro Aeroespacial da Alemanha
FFT	Transformada Rápida de Fourier ( <i>Fast Fourier Transform</i> )
MIMO	Múltiplas Entradas – Múltiplas Saídas ( <i>Multi Input – Multi Output</i> )
N4SID	<i>Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification</i>
SVD	Decomposição em Valores Singulares ( <i>Singular Value Decomposition</i> )
FRF	Função de Resposta em Frequência
RMS	<i>Root Mean Square</i>

GEPV	Problema de Autovalor Generalizado
LDI	Inclusão Diferencial Linear
PLDI	LDI Politópica
NLDI	LDI Limitada por Norma
LMIP	Problema de Factibilidade de uma LMI
LTI	Sistema Linear e Invariante no Tempo
LQG	Regulador Linear Quadrático Gaussiano
EVP	Problema de Autovalor ( <i>Eigenvalue Problem</i> )
PDF	Função Densidade de Probabilidade ( <i>Probability Density Function</i> )

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>24</b>
1.2.1 <i>Configuração Geral do Problema de Posicionamento Ótimo .....</i>	29
1.3.1 <i>Algumas Aplicações de Materiais Inteligentes .....</i>	38
<b>CAPÍTULO 2. MODELO DINÂMICO ESTRUTURAL .....</b>	<b>49</b>
2.1 <b>MODELOS ESTRUTURAIS DE SEGUNDA ORDEM.....</b>	50
2.2 <b>MODELOS ESTRUTURAIS NO ESPAÇO DE ESTADOS .....</b>	52
2.3 <b>CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE.....</b>	55
2.4 <b>REDUÇÃO DE MODELOS.....</b>	58
2.5 <b>MÉTODO DE SUBESPAÇO PARA IDENTIFICAÇÃO DAS MATRIZES DO SISTEMA .....</b>	61
2.5.1 <i>Esquema da Identificação .....</i>	65
<b>CAPÍTULO 3. POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES E ATUADORES .....</b>	<b>68</b>
3.1 <b>NORMAS DE SISTEMAS.....</b>	68
3.1.1 <i>A Norma <math>H_{\infty}</math>.....</i>	69
3.1.2 <i>A Norma <math>H_2</math>.....</i>	71
3.1.3 <i>A Norma Hankel .....</i>	74
3.1.4 <i>Índice de Atuador/Sensor e índice de modos .....</i>	76
3.2 <b>ESTRATÉGIAS PARA O POSICIONAMENTO DE SENSORES/ATUADORES.....</b>	78
3.2.1 <i>Estratégia de Posicionamento de Atuadores .....</i>	78
3.2.2 <i>Estratégia de Posicionamento de Sensores .....</i>	79
3.3 <b>CONFIGURAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES/ATUADORES.....</b>	79
3.3.1 <i>Propriedades .....</i>	80
3.3.2 <i>Índices e Matrizes de Posicionamento.....</i>	83
3.4 <b>POSICIONAMENTO ÓTIMO UTILIZANDO MATRIZES GRAMMIANAS .....</b>	86
<b>CAPÍTULO 4. DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES .....</b>	<b>89</b>
4.1 <b>HISTÓRICO.....</b>	89
4.2 <b>DEFINIÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS.....</b>	91
4.2.1 <i>Problema de Factibilidade de uma LMI (LMIP).....</i>	92
4.2.2 <i>Problema de Autovalor (EVP) .....</i>	92
4.2.3 <i>Problema de Autovalor Generalizado (GEVP).....</i>	93
4.3 <b>SISTEMAS INCERTOS.....</b>	93
4.3.1 <i>Incertezas Estruturadas.....</i>	94
4.3.2 <i>Incertezas Não-estruturadas .....</i>	95
4.4 <b>ESTABILIDADE QUADRÁTICA .....</b>	97

<b>CAPÍTULO 5. PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE NO DOMÍNIO DO TEMPO .....</b>	<b>99</b>
5.1 REALIMENTAÇÃO LINEAR DE SAÍDAS .....	103
5.2 REALIMENTAÇÃO LINEAR DE ESTADO .....	104
5.3 CONTROLE ÓTIMO COM FUNÇÃO DE CUSTO QUADRÁTICA.....	105
5.3.1 <i>Problema de Controle Ótimo Quadrático</i> .....	106
5.3.2 <i>Regulador Linear Quadrático via LMIs</i> .....	109
5.4 MODELO DINÂMICO PARA PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO.....	112
<b>CAPÍTULO 6. OBSERVADORES DE ESTADOS.....</b>	<b>114</b>
6.1 CONCEITO DE OBSERVADOR DE ESTADOS.....	115
6.2 OBSERVADOR DE ORDEM PLENA.....	115
6.2.1 <i>Estrutura para Observadores de Ordem Plena</i> .....	117
6.2.2 <i>Observador para Sistemas Detectáveis</i> .....	118
6.2.3 <i>Escolha dos Autovalores do Observador</i> .....	118
6.3 OBSERVADOR DE ORDEM REDUZIDA .....	119
6.4 OBSERVADOR DE UMA FUNÇÃO LINEAR DO ESTADO DE ORDEM MÍNIMA.....	120
6.5 OBSERVADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL.....	121
6.6 ESTIMADOR DE KALMAN .....	122
<b>CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES .....</b>	<b>128</b>
7.1 POSICIONAMENTO ÓTIMO DE ATUADORES DE PILHA.....	129
7.2 POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES/ATUADORES EM PLACAS FLEXÍVEIS ...	138
7.3 INFLUÊNCIA DE DISTÚRBIOS NO POSICIONAMENTO ÓTIMO.....	151
7.4 CONFIGURAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE POSICIONAMENTO ÓTIMO E PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO .....	159
7.5 PROJETO EXPERIMENTAL DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM UMA TRELIÇA 3D..	178
<b>CAPÍTULO 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>193</b>
8.1 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES .....	193
8.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	196
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>197</b>
<b>ANEXO 1.....</b>	<b>215</b>
<b>ANEXO 2.....</b>	<b>223</b>

## 1. INTRODUÇÃO

Atualmente, diversas pesquisas de engenharia são voltadas para o desenvolvimento de técnicas de controle ativo de vibrações (AVC – do inglês *Active Vibration Control*) juntamente com a aplicação de uma nova classe de materiais com propriedades eletromecânicas específicas. Estas pesquisas são impulsionadas pela necessidade de estruturas leves e sistemas com altos desempenhos, gerando menores custos operacionais e aumentando os lucros. Algumas destas pesquisas têm causado profundo impacto nas aplicações aeroespaciais e em robótica (LIU; ZHANG, 2000).

As técnicas de controle se dividem em três classes básicas: técnicas passivas, ativas e as semi-ativas. Técnicas passivas envolvem aumento de massa estrutural, em geral, adicionando materiais visco elásticos como absorvedores de vibrações, e até mesmo barreiras mecânicas a propagação sonora, no caso de controle de ruídos (SOUZA, 2003; MATHEU, 1997). As técnicas de controle ativo de vibração utilizam forças secundárias aplicadas na estrutura por um controlador que adquire as informações obtidas por um sensor. Estas forças procuram reduzir a vibração estrutural causada por uma fonte de vibração primária, Figura 1.1. Estes estudos têm recebido contribuições significativas nas últimas décadas, sobretudo, dadas aos avanços no processamento digital de sinais. O assunto é amplamente investigado em Fuller et al. (1996) e em Hansen e Snyder (1997). Já as técnicas semi-ativas se formam através da aplicação das duas anteriores simultaneamente (KARNOPP, 1990).



Figura 1.1 – Desenho esquemático de um sistema de controle ativo.

Existem várias técnicas de AVC e, em geral, o sucesso destas técnicas depende de diversos fatores, incluindo: o posicionamento dos sensores e atuadores na estrutura; o tipo do controlador; o parâmetro que é controlado e o tipo de sensor e atuador usado para medir cada

parâmetro. Grande parte da contribuição científica para AVC, nas últimas décadas, é devido ao desenvolvimento de algoritmos evolutivos, que a partir dos anos 90 começam a ganhar espaço e técnicas de resolução de problemas de controle baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs – do inglês *Linear Matrix Inequalities*). Esta formulação se caracteriza como uma eficiente ferramenta de otimização. Apesar de vantagens consideráveis, ainda são poucos os autores que utilizam esta metodologia para o controle estrutural de sistemas mecânicos (MOREIRA, 1998; SILVA, 2005; SARRACINI JR., 2006; SARRACINI; SERPA, 2006).

O problema de localização ótima de sensores e atuadores é uma importante etapa da utilização de uma técnica de controle. Tal problema está na sua configuração geral quando se considera a influência de distúrbios externos sobre a estrutura base, além de saídas de desempenho (ou saída reguladas). Após a definição do posicionamento dos atuadores e sensores em localizações ótimas considerando a configuração geral do problema, se torna necessário a aplicação de técnicas de controle para atenuar sinais de vibrações estruturais. Existem várias possibilidades de projeto de controle, cada uma com vantagens específicas em função da aplicação.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é utilizar técnicas de controle ativo de vibrações estruturais e sensores/atuadores piezelétricos em posições ótimas obtidas através das normas de sistemas e matrizes gramianas. É usada uma metodologia de controle via realimentação de estados e o ganho do controlador obtido utilizando o Regulador Linear Quadrático (LQR – do inglês *Linear Quadratic Regulator*), cuja equação de Riccati é resolvida via LMIs. Os controladores são projetados segundo o enfoque de otimização convexa, com requisitos envolvendo LMIs possibilitando se considerar incertezas nos parâmetros estruturais.

## 1.1 CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES

Em geral sempre são abordados dois tipos de estratégias de controle: controle de alimentação direta ou controle antecipativo (*feedforward*) e controle por realimentação (*feedback*). A primeira estratégia (*feedforward*) é um algoritmo de controle simples, mas que requer um sinal de referência. O controlador usa este sinal de referência e o erro de saída para ajustar continuamente o sinal de controle e minimizar este erro (ANTHONY, 2000). Grande parte das técnicas de controle ativo de ruído (ANC – *Active Noise Control*) envolve esta estratégia, onde a meta é o cancelamento deste erro através de um filtro. No entanto, em

muitas aplicações práticas o erro é também causado por vibração mecânica. Surgiam assim as técnicas de controle ativo de vibração e ruído (ANVC – *Active Noise and Vibration Control*, FULLER et al., 1996). A literatura tem apresentado diversas variantes de técnicas ANVC, como por exemplo, o controle acústico estrutural ativo. Nesta técnica somente são atenuados os modos naturais com maior eficiência na irradiação de som quando uma estrutura é excitada.

A outra estratégia (*feedback*) não requer um sinal de referência, mas há limitações no desempenho devido às restrições de estabilidade (LEE, 2000). O controle por realimentação é particularmente usado para controlar modos individuais em regiões de baixa frequência, como é o caso da maioria das aplicações de controle de estruturas flexíveis. Nestes problemas os sistemas devem seguir uma trajetória com alta precisão e tempo curto, como exemplo prático tem-se os mecanismos robóticos (VALER, 1999).

De maneira geral os problemas de controle ativo de vibrações (AVC) com realimentação, de estados ou de saída, têm como meta o projeto de um controlador para suprir vibrações na região de baixa frequência. Várias metodologias têm sido utilizadas para projetos de controladores para estas aplicações. Inicialmente técnicas de AVC foram projetadas considerando apenas sistemas SISO (*Single Input-Single Output*) e técnicas clássicas de controle, como método do lugar das raízes e métodos de resposta em frequência (OGATA, 1997).

Durante muitos anos estas técnicas se mostraram suficientes, porém com a evolução das exigências estruturais estas metodologias se tornaram insatisfatórias motivando a introdução de técnicas de controle moderno (MEIROVITCH, 1990; OGATA, 1997). Outro grande problema encontrado é o fato da maioria dos modelos de estruturas flexíveis serem compostos com parâmetros distribuídos, portanto, são necessárias aproximações e truncamentos. Isto invariavelmente conduz a erros de modelagem, sobretudo na dinâmica referente aos modos residuais, o que pode provocar efeitos nocivos ao sistema. Além disto, variações paramétricas também podem prejudicar o sistema e devem ser consideradas no projeto. Isto faz com que técnicas de controle robusto mereçam destaque em aplicações de AVC, ainda que muitas vezes elas sejam esquecidas, uma vez que o controle por realimentação por si só já dá certo grau de robustez ao sistema, mas que nem sempre se mostra suficiente em termos práticos (VALER, 1999).

## 1.2 POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES E ATUADORES

Para o controle de vibrações mecânicas, principalmente quando há um grande número de posições candidatas, o problema do posicionamento de sensores e atuadores talvez mereça a maior atenção. Este posicionamento pode definir a eficiência do controle, pois, em função da posição onde são colocados, atuadores e sensores podem comprometer a controlabilidade e a observabilidade do sistema, ou exigir altos níveis de energia para se obter o resultado esperado. De outro lado, se posicionados em localizações ótimas, o número necessário destes dispositivos pode ser reduzido, diminuindo assim o custo de instrumentação, do processamento de sinais e da energia necessária para o controle da estrutura. Em geral, a localização ótima dos atuadores/sensores surge das seguintes considerações (PAPATHEODOROU et al., 1999):

- Uso de um pequeno número de sensores e atuadores para minimizar o custo de instrumentação e processamento de sinais;
- Obtenção de boas estimativas dos parâmetros modais;
- Melhora do controle estrutural;
- Determinar eficientemente as propriedades estruturais e mudá-las para monitorar a condição da estrutura;
- Assegurar a visibilidade de erros no modelo.

O problema de localização ótima de atuadores e sensores para o controle ativo de vibrações pode ser estudado usando diferentes métodos de otimização e função objetivo. Diversos autores utilizam uma metodologia conhecida como otimização discreto-contínua, (PEREIRA, 2003). Nesta metodologia o problema é dividido em dois laços de otimização: um externo correspondendo à posição do atuador, sendo caracterizado por um problema de otimização discreta e um laço interno correspondendo à otimização do controlador (LOPES JR. et al., 2000a). Em geral se utiliza como função objetivo a minimização da energia mecânica interna da estrutura e do esforço do controlador.

Heverly II et al. (2001) usam como técnica de otimização discreta “*simulated annealing*”, que corresponde a um método evolucionário de busca. Nestes casos a maioria dos autores trabalham com problemas de otimização restrita, limitando a amplitude do sinal de controle. Vários autores seguem esta linha, como Rao et al. (1991) que estudaram otimização

discreta utilizando como ferramenta algoritmos genéticos (AG). Furuya e Haftka (1993) também usaram AG para encontrar a posição ótima de oito atuadores em uma estrutura com 1507 posições candidatas. Kirby III et al. (1994) também usam AG para solucionar o problema do tamanho e localização ótima de atuadores para controle de multivariáveis. Silva e Lopes Jr. (2002) utilizaram esta técnica para otimizar o posicionamento de atuadores em uma viga com vinte elementos e discutem a influência da escolha dos parâmetros genéticos adotados. Han e Lee (1999) usaram AG para posicionar sensores e atuadores piezelétricos em uma placa. Eles analisaram a controlabilidade, observabilidade e o efeito *spillover*\*. Jha e Inman (2002) também usam AG para localização da posição ótima de atuadores e sensores em um toróide.

\*O efeito da dinâmica residual no sistema controlado, denominado *spillover*, é o mais importante fator de instabilidade do sistema de controle (MOREIRA, 1998).

Técnicas envolvendo as matrizes gramianas de controlabilidade e observabilidade são amplamente utilizadas e disponibilizadas na literatura (LELEU et al., 2001; BRUANT; PROSLIER, 2005; PENG et al., 2005). Entre os vários autores pode-se citar Q. Wang e C. M. Wang (2000), que posicionaram um par de atuadores em uma viga encontrando a matriz gramiana de controlabilidade para cada posição candidata maximizando um índice que envolve a matriz. Carvalhal e Lopes Jr. (2004) calcularam tais matrizes para posicionar atuadores/sensores em uma treliça 3D. Brasseur et al. (2004) apresentam o posicionamento de uma lâmina piezelétrica para controle acústico baseado na análise da controlabilidade gramiana do sistema escrito no espaço de estados em coordenadas modais. Chen e Cao (2000) também estudaram o problema do posicionamento ótimo de sensores utilizando esta técnica.

O problema do posicionamento de sensores e atuadores também é resolvido para aplicações com mancais magnéticos. Johnson et al. (2003) apresentam o controle de vibrações geradas por uma massa desbalanceada em um rotor utilizando mancais magnéticos. O trabalho apresenta resultados para três posições de um par de sensores mantendo as posições dos mancais e da massa desbalanceada, no entanto, nada é mencionado sobre a localização ótima dos sensores. O rotor é representado por uma viga utilizando um modelo analítico de linha elástica, escrito em função da frequência e do modo de vibrar que se deseja controlar.

Lammering et al. (1994) posicionam atuadores piezelétricos (PZT) em uma treliça plana. O método dos elementos finitos é utilizado para o cálculo do modelo matemático e em posições escolhidos os elementos estruturais são substituídos por os atuadores, tais elementos são denominados “membros ativos”. As posições ótimas dos atuadores são para os elementos

que possuem os nós com maiores potenciais elétricos nos seis primeiros modos de vibrar da treliça engastada em duas posições. Isto foi possível porque na formulação foi introduzido um grau de liberdade de potencial elétrico em cada nó do elemento piezelétrico.

Também considerando membros ativos, Gao et al. (2004) posicionam atuadores em uma treliça plana. Como índice de desempenho dos atuadores, considera-se a máxima dissipação de energia de vibração. No modelo de segunda ordem é incluído o efeito do potencial elétrico dos membros ativos.

### 1.2.1 Configuração Geral do Problema de Posicionamento Ótimo

A determinação da localização e do número de atuadores e sensores para finalidade de controle e testes modais é um passo extremamente importante, que se não for bem feito pode afetar o recebimento de sinais e o próprio controle. O problema de posicionamento de sensores/atuadores é caracterizado em sua forma geral quando é considerada a posição de um distúrbio externo e saídas reguladas. Poucos autores consideram o problema geral, apesar de já discutido em livros textos, como em Gawronski (1998). Segundo Demetriou (2004), o distúrbio externo deve ser considerado na formulação sempre que conhecido a priori e, se for desconhecido, sua distribuição pode ser suposta e, subseqüentemente, o pior caso deve ser considerado. Ainda, para grandes estruturas Gawronski (1997) apresenta que um conjunto de atuadores e/ou sensores nas  $n$  melhores posições podem eventualmente ser substituído por outro conjunto com  $m$  dispositivos, onde  $m < n$  uma vez que ajustando corretamente o ganho de um deles outro pode não ser necessário. Neste caso os sensores/atuadores são chamados de altamente correlacionados. Tal análise é realizada através do índice de relacionamento dos sensores.

Yan e Yam (2002) otimizaram o número e a posição de atuadores para controle ativo de vibrações em uma treliça espacial analisando a energia do sinal de controle e AGs, respectivamente. Os autores mostram que o número de atuadores e suas posições podem mudar para diferentes condições iniciais dos distúrbios. Na formulação o amortecimento é desprezado e o modelo dinâmico de segunda ordem é escrito em espaço de estados utilizando coordenadas físicas. O projeto foi baseado em um controlador LQR.

Demetriou (2004) mostra que ao se encontrar a posição ótima para o par sensor/atuador através de análise dos autovalores da matriz grammiana de controlabilidade ou das normas  $H_2$  ou  $H_\infty$  não necessariamente se obtém robustez espacial, ou seja, se a posição do distúrbio mudar, o par ótimo pode deixar de ser nas posições determinadas anteriormente.

Por isto, este autor considera os efeitos de distúrbios através da matriz de influência de distúrbio. A metodologia é aplicada em uma viga de Euler-Bernoulli bi-engastada com modelo dinâmico de segunda ordem, escrito em coordenadas físicas. A estrutura apresentou melhores índices de controlabilidade quando se considerou o pior caso do distúrbio integrado com o posicionamento ótimo do sensor e do atuador e com o projeto do controlador.

Moghani (2004) apresenta controle de vibrações em placas flexíveis utilizando atuadores PZTs e considerando a variação espaço-temporal de distúrbios. O trabalho é dividido em duas partes. Na primeira, o autor analisa o desempenho do controlador LQR para cada posição do atuador buscando minimizar os efeitos de distúrbios. Na segunda parte do trabalho a posição do distúrbio é desconhecida, com isto também é possível caracterizar os casos onde a posição do distúrbio é aleatoriamente variável. Assim, é proposto no trabalho um algoritmo que recalcula o índice de desempenho do LQR para cada intervalo de tempo, então, após determinado número de iterações, pode-se encontrar a posição mais eficiente para o atuador.

Matrizes gramianas podem também ser utilizadas para obtenção da localização ótima de atuadores quando se considera distúrbios externos. Neste caso, se utiliza a matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio, que inclui o efeito de distúrbios conhecidos a priori. Mirza e Niekerk (1999) apresentam tal metodologia posicionando um atuador em uma viga bi-engastada e em uma membrana em forma de L. No trabalho são apresentados dois índices que envolvem os autovalores e o traço da referida matriz para conhecer o desempenho do atuador. Tal matriz é obtida escrevendo o modelo da estrutura com uma realização no espaço de estados considerando a matriz de entrada de distúrbio e substituindo o vetor do sinal de controle pelo resultado fornecido pelo LQR, ou seja, pelo oposto do ganho do controlador multiplicado pelo vetor de estados. Com isto, agrupando os termos semelhantes é possível se obter uma matriz dinâmica equivalente e então resolver a equação de Lyapunov encontrando a matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio.

Similarmente à proposta de Mirza e Niekerk (1999), é possível se utilizar a matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio também para posicionamento ótimo de sensores. Utilizando uma técnica de controle via realimentação de saídas, onde o vetor de entrada de controle é obtido com a multiplicação do ganho de controlador pelo vetor de saída. Substituindo o vetor de saída pela matriz de saída multiplicada pelo vetor de estados e, substituindo o vetor de entrada de controle na equação completa do espaço de estados (entenda por completa a forma em que aparece a matriz de posição e o vetor de distúrbio), se obtém uma equação análoga à utilizada por Mirza e Niekerk (1999), no entanto, envolvendo a

matriz de saída, que se refere à posição do sensor. Assim, avaliando a matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio para cada localização candidata à posição do sensor, é possível obter o posicionamento ótimo.

No trabalho atual, são utilizadas normas de sistemas como função objetivo. Panossian et al. (1998) mostram uma aplicação prática desta técnica. Os autores localizam quatro atuadores e cerca de trezentos e quarenta sensores no módulo Z1 da Estação Espacial Internacional (entre mais de 10000 posições candidatas) usando como critério de desempenho a norma  $H_2$ . Na presente proposta foi estudada e implementada uma estratégia para localização ótima de atuadores e sensores para controle ativo de vibrações usando como função objetivo as normas de sistemas  $H_2$ ,  $H_\infty$  e Hankel e as matrizes gramianas de observabilidade, controlabilidade e de sensibilidade de distúrbios.

Apesar de vantagens aparentes destas técnicas, poucos autores têm usado estas ferramentas. A técnica é amplamente investigada em Gawronski (1998), porém poucas informações são repassadas a respeito de aplicações práticas.

### **1.3 MATERIAIS PIEZELÉTRICOS**

Materiais com propriedades piezelétricas fazem parte dos materiais chamados “materiais inteligentes”. São da classe dos dielétricos que, quando submetidos à aplicação de um campo elétrico, exibem uma significativa deformação e, inversamente, produzem polarização elétrica em resposta a tensões mecânicas. Materiais piezelétricos sintéticos como cerâmicas (PZT’s – zirconato titanato de chumbo) e polímeros (PVDF’s – fluorido de polivinilideno) podem ser produzidos através de polarização da rede cristalina ou das cadeias poliméricas gerando um alinhamento parcial dos dipolos elétricos através da aplicação de um intenso campo elétrico a temperaturas elevadas.

Alguns sólidos, notavelmente certos cristais, têm polarização elétrica permanente. Outros cristais se tornam eletricamente polarizados quando sujeitos a uma tensão (*Stress*). Piezeletricidade (literalmente “eletricidade de pressão”) é observada se uma deformação é aplicada a um sólido, por exemplo, dobrando, torcendo, ou comprimindo este sólido. O quartzo é um material que exhibe propriedades piezelétricas. Se um cristal de quartzo for comprimido entre dois eletrodos, uma diferença de potencial é notada, reciprocamente, se o cristal de quartzo é inserido em um campo elétrico, a tensão elétrica resultante altera suas dimensões. A piezeletricidade é responsável pela grande precisão de relógios equipados com osciladores de quartzo. Alguns dos exemplos de suas aplicações são os transdutores de

pressão, acelerômetros, violões elétricos e vários outros instrumentos musicais para transformar vibrações mecânicas em sinais elétricos que são então amplificados e convertidos em sons através de amplificadores.

O surgimento de eletricidade devido ao aquecimento do cristal turmalina já era conhecido desde o século XVIII. Em 1824, Brewster observou o efeito em vários tipos de cristais, chamando este fenômeno de “piroeletricidade”. Lord Kelvin notou que a piroeletricidade era devida à polarização permanente. De acordo com sua teoria, o efeito piezoelétrico é simplesmente a manifestação do coeficiente de temperatura desta polarização. Por isso, este efeito ficou conhecido como a interação entre o sistema elétrico e térmico (Ikeda, 1996).

O efeito piezoelétrico foi descoberto em 1880 por Pierre (1859-1906) e Jacques Curie (1856-1941). Pierre Curie tinha previamente estudado a relação entre piroeletricidade e cristal simétrico. Este estudo levou os irmãos não somente a notar a eletrificação devido à pressão, mas também prever em qual direção a pressão deveria ser aplicada e em qual classe de cristal o efeito era esperado. O mesmo fenômeno foi encontrado em outros cristais, como os de turmalina. Hankel (1839-1873) propôs o nome “piezeletricidade”. Portanto, piezeletricidade é a interação entre o sistema elétrico e mecânico (IKEDA, 1996).

Cerâmicas de PZT estão disponíveis em muitas variações e atualmente são amplamente empregadas como atuadores. Abaixo da *Temperatura de Curie* ou *Ponto Curie*, temperatura para a qual a estrutura do cristal muda de não-simétrica para uma estrutura simétrica, expresso em graus Celsius, cristais PZT exibem estrutura tetragonal. Devido a permanente assimetria elétrica e mecânica, estes tipos de células unitárias exibem espontânea polarização e deformação. Grupos de células unitárias com a mesma orientação de polarização e deformação são chamados domínios. Devido à distribuição aleatória da orientação destes domínios no material cerâmico, um processo de polarização ferroelétrico é necessário para se obter anisotropia macroscópica, associada às propriedades piezoelétricas (Fig. 1.2).

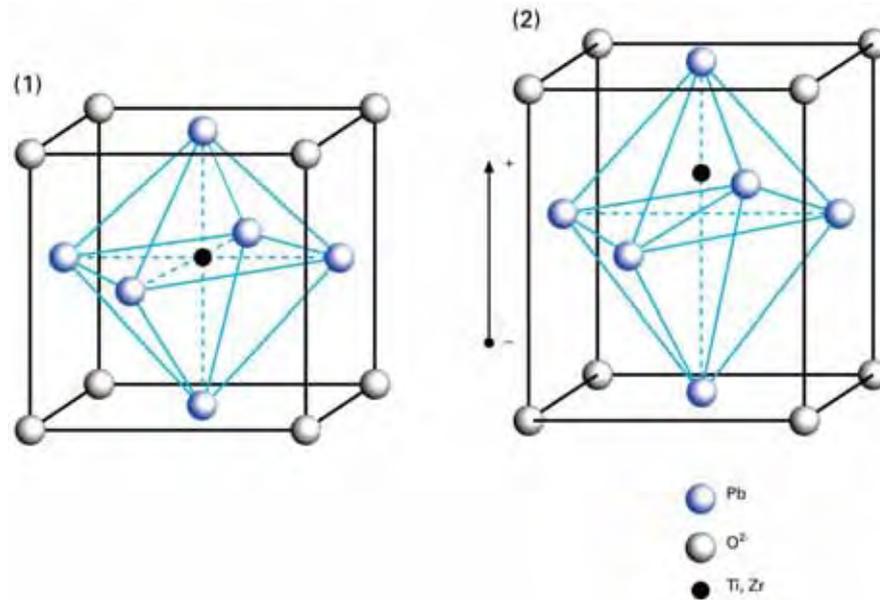


Figura 1.2 – Célula unitária de PZT: (1) Tipo Perovskite Titanato Zirconato de Chumbo (PZT), célula unitária no estado de simetria cúbica abaixo da temperatura de *Curie*; (2) Célula unitária distorcida tetragonalmente acima da temperatura de *Curie*.

Quando submetida a uma temperatura acima da temperatura de *Curie*, a célula unitária do PZT apresenta uma estrutura cúbica isotrópica. Quando resfriada, os domínios modificam, mas devido à orientação aleatória, o material não apresenta macroscopicamente propriedades piezoelétricas. O arranjo assimétrico dos íons positivos e negativos fornece o comportamento permanente de dipolo elétrico para os cristais. Antes do tratamento de polarização, os domínios estão orientados aleatoriamente no PZT. Durante a polarização, um intenso campo elétrico (acima de 2000 V/mm) é aplicado sobre a piezocerâmica. Com o campo aplicado, o material expande ao longo do eixo do campo e contrai na direção perpendicular para que o eixo do domínio fique para cima. Quando o campo é removido, os dipolos elétricos ficam direcionados, mas não completamente alinhados. O material agora tem uma polarização remanescente a qual pode ser degradada pelo excesso dos limites mecânico, térmico ou elétrico do material.

Conseqüentemente, quando uma tensão elétrica é aplicada no pólo do material piezolétrico, os íons da célula unitária são trocados e, adicionalmente, os domínios mudam o grau de alinhamento (Fig. 1.3). O resultado é a correspondente mudança de dimensão (expansão, contração) do material PZT. Ainda, a tensão mecânica, a deformação, o campo elétrico e o deslocamento elétrico, dentro do material piezolétrico, podem ser completamente

descritos por um par de equações eletromecânicas, maiores detalhes podem ser obtidos em Rocha (2004).

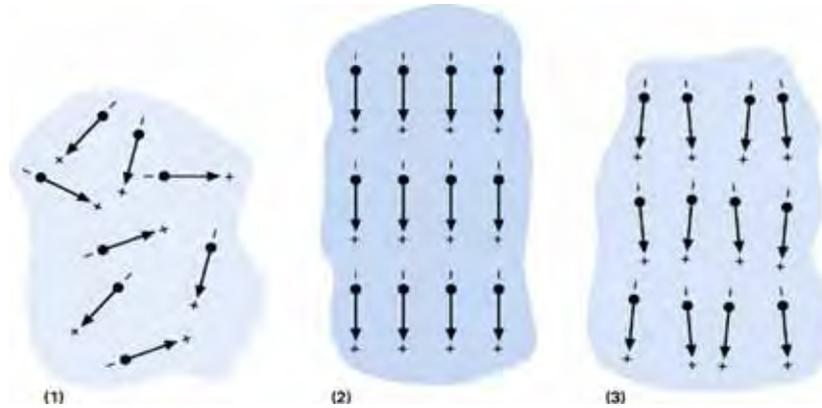


Figura 1.3 – Dipolos elétricos nos domínios: (1) cerâmica ferroelétrica não-polarizada; (2) durante a polarização e (3) após a polarização (cerâmica piezolétrica).

A polarização destes materiais favorece o acoplamento eletromecânico. Como resultado o material se deforma em resposta a um campo elétrico externo, portanto, estando capacitado para ser utilizado como atuador (Fig. 1.4a). A capacidade de sensoriamento resulta do efeito piezolétrico inverso, segundo o qual a aplicação de deformações mecânicas externas ao material provoca rotações dos dipolos inicialmente alinhados, provocando o surgimento de uma distribuição de cargas elétricas (Fig. 1.4b).



(a) efeito inverso ou efeito atuador



(b) efeito direto ou efeito sensor

Figura 1.4 – Ilustração do efeito piezolétrico direto e inverso.

(Fonte: ROCHA, 2004)

A relação campo elétrico-deformação é aproximadamente linear para baixas intensidades do campo elétrico e, uma vez que em geral as aplicações práticas se limitam ao regime linear, a utilização do efeito piezoeletrico em sistemas de controle é vantajosa.

A utilização dos materiais piezoeletricos requer cuidados. Estes materiais não devem ser submetidos a temperaturas acima da denominada temperatura de Curie já que acima desta temperatura limite ocorre uma despolarização espontânea e a conseqüente perda das características piezoeletricas (CLARK et al., 1998). Para temperaturas inferiores à temperatura de Curie existe uma relativa insensibilidade das características do material em relação às variações de temperatura. Isto constitui uma das principais vantagens do uso de elementos piezoeletricos para controle e localização de falhas estruturais.

Apesar de vantajosa a utilização dos materiais piezoeletricos, as piezocerâmicas possuem uma considerável fragilidade mecânica, fato que dificulta sua manipulação e a possibilidade de formatação em geometrias mais complexas. Como alternativa geralmente são utilizados os polímeros PVDF em forma de filmes finos. Assim além de possibilitarem uma formatação com geometrias complexas são facilmente colados em superfícies irregulares. Por apresentarem baixa rigidez, os filmes PVDF mostram-se mais adequados e eficientes na confecção de sensores. A tabela 1.1 mostra algumas propriedades dos PZT e PVDF.

Tabela 1.1 – Propriedades físicas do PZT e PVDF.

<b>Propriedade</b>	<b>PZT</b>	<b>PVDF</b>
Temperatura de Curie (°C)	210	100
Módulo de elasticidade (N/m)	$59.5 \times 10^9$	$3 \times 10^9$
Coefficiente Piezoeletrico $d_{31}$ (m/V)	$212 \times 10^{-12}$	$23 \times 10^{-12}$
Campo elétrico máximo (V/m)	$0.4 \times 10^6$	$40 \times 10^6$

O número de aplicações em engenharia utilizando o polímero piezoeletrico PVDF é cada vez maior (LEE; SUNG, 1999; ODON, 2003). Entre os diversos fatores responsáveis se destacam: baixo peso; flexível e baixa impedância mecânica e acústica, o que o torna ideal para aplicações subaquáticas e médicas. Estes sensores apresentam como desvantagens o uso em limitada faixa de temperatura e baixa estabilidade química em ambientes ásperos. Por estes e outros fatores, a combinação de cerâmicas e polímeros com propriedades piezoeletricas é uma alternativa interessante e vem sendo amplamente estudada (SAKAMOTO et al., 2004; MALMONGE et al., 2006).

As limitações existentes na utilização dos sensores de PVDF geram um grande interesse no desenvolvimento de outras classes de polímeros piezelétricos, tais como polyimides amorfos, que permitem maior variedade de aplicações (JHA, 2002). Grandes centros de pesquisa, como a NASA (*National Aeronautics and Space Administration*), têm interesse em desenvolver estes materiais para aplicações denominadas *Smart Aircraft Systems*, que em geral são: controle de vibrações e ruídos, monitoramento da integridade estrutural (SHM – do inglês *Structural Health Monitoring*) e monitoramento do fluxo de ar em torno de aviões. Devido suas propriedades térmicas, mecânicas e dielétricas, além de resistência e estabilidade química elevadas, os polyimides são intensamente utilizados como materiais da matriz de aviões e como materiais dielétricos em dispositivos microeletrônicos (GHOSH; MITTAL, 1996). A figura 1.5 ilustra uma aplicação deste material utilizado nas asas de um avião.

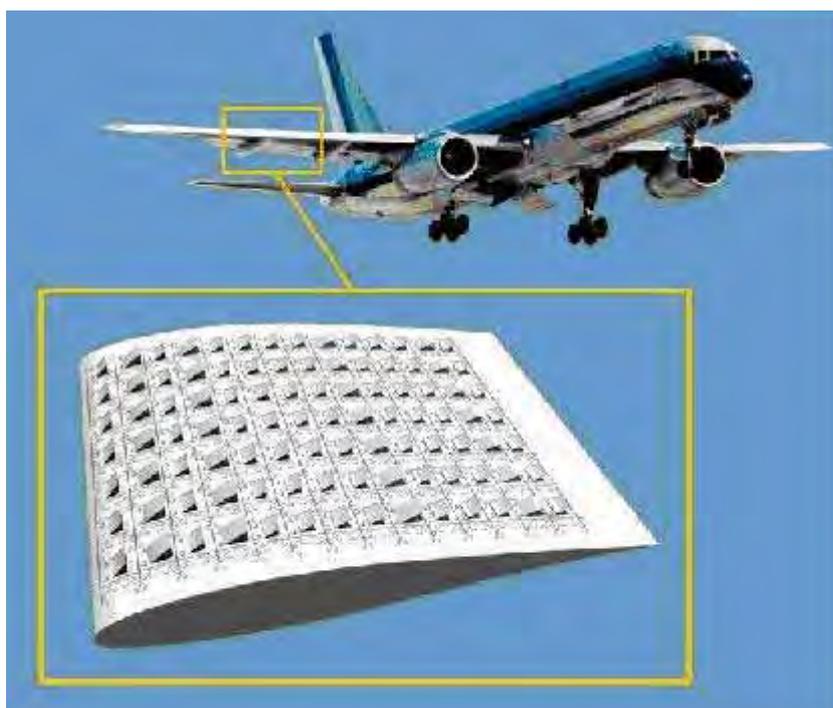


Figura 1.5 – Aplicação de sensores e atuadores nas asas de um avião.

(Fonte: <http://www.icas.edu/RQ/archive/v8n2/art1.html>, acesso em 23/07/2006)

A tabela 1.2 mostra uma comparação entre PVDFs e Polyimides. Entre as propriedades comparadas está a temperatura de transição vítrea. A transição vítrea ( $T_g$ ) é um importante efeito térmico que pode ser utilizado para a caracterização de plásticos e outros materiais amorfos ou semicristalinos, como vidros inorgânicos ou alimentos, onde os componentes nos materiais alimentícios apresentam efeitos similares aos dos polímeros. A  $T_g$

é a propriedade do material com a qual se pode obter a temperatura da passagem do estado vítreo para um estado “maleável”, sem ocorrência de uma mudança estrutural. A parte amorfa do material (parte onde as cadeias moleculares estão desordenadas) é a responsável pela caracterização da “Temperatura de Transição Vítreo”. Abaixo da  $T_g$  o material não tem energia interna suficiente para permitir deslocamento de uma cadeia com relação à outra por mudanças conformacionais. Portanto, quanto mais cristalino for o material, menor será a representatividade da Transição Vítreo. Esta propriedade é uma transição termodinâmica de segunda ordem, isto é, afeta as variáveis termodinâmicas secundárias. Algumas propriedades mudam com a  $T_g$  e, portanto, podem ser utilizadas para a sua determinação. Nesta tabela, também, é possível comparar a polarização remanente, ou seja, a polarização que permanece após o campo elétrico utilizado para polarizar os materiais piezelétricos ser retirado (MOURA, 1998). Outra propriedade mostrada é o coeficiente de acoplamento eletromecânico transversal ( $k_{31}$ ), que garante a conversão efetiva de energia em um sistema de interação linear. Este coeficiente (algumas vezes denominado fator de acoplamento) é medido em percentagem para a maioria dos casos, porém, tem maior significado quando utilizando ao quadrado, o qual corresponde à razão de energia (TEBALDI et al., 2006).

Tabela 1.2 – Comparação entre propriedades dos polímeros PVDF e Polyimides.

<b>Polímero</b>	<b><math>T_g</math> (°C)</b>	<b><math>P_{\text{remanente}}</math> (mC/m<sup>2</sup>)</b>	<b><math>d_{31}</math> (m/V)</b>	<b><math>k_{31}</math></b>	<b>Descrição</b>
Polyimide	220	14,0	$0,3 \cdot 10^{-12}$	0,002	- Utilizável em altas temperaturas - Necessita alta concentração de dipolos
PVDF	-35	40,0-55,0	$23 \cdot 10^{-12}$	0,120	- Desempenho elevado em temperaturas moderadas - Degrada em altas temperaturas

A figura 1.6 mostra a comparação do coeficiente piezelétrico em função da temperatura. Nota-se claramente que sensores de PVDF perdem suas propriedades piezelétricas na presença de temperaturas abaixo de 80°C, enquanto os Polyimides às mantém sob temperaturas em torno de 150°C. Estes sensores têm sido amplamente investigados por diversos pesquisadores (ATKINSON et al., 2003; PARK et al., 2004). Note que a unidade C/N é equivalente a unidade m/V, sendo C, m e V iguais a Coulomb, metros e Volts, respectivamente, pois  $V = \text{Watts/C} = \text{Nm/C}$ .

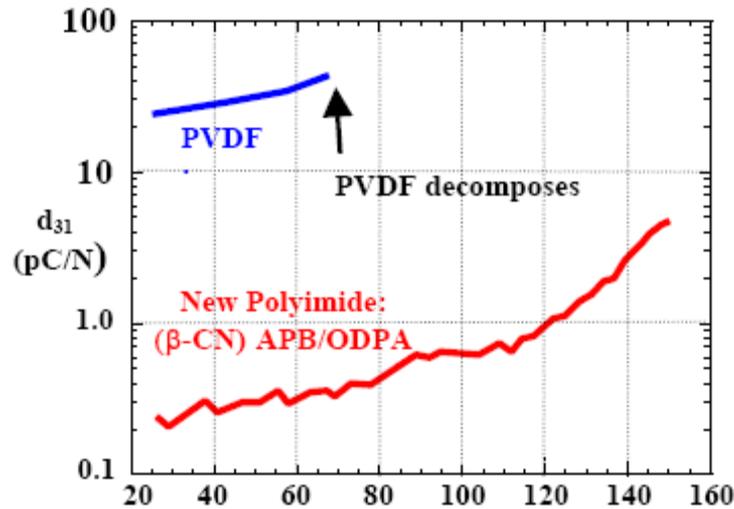


Figura 1.6 – Comparação do coeficiente piezelétrico do PVDF e Polyimides em função da temperatura (em °C).

(Fonte: ATKINSON et al., 2003)

### 1.3.1 Algumas Aplicações de Materiais Inteligentes

Atualmente é crescente a utilização de materiais inteligentes em artigos esportivos, que vêm sendo conhecidos como *Intellifibers*, ou Fibras Inteligentes. Uma aplicação bastante conhecida é em raquetes de tênis (Fig. 1.7a). O material adicionado na raquete, como mostra a figura 1.7b, juntamente com um sistema de controle via micro *chips*, permite que a energia mecânica produzida no impacto com a bola seja transformada em energia elétrica. Leva apenas um milésimo de segundo para esta energia atuar nas fibras da raquete aumentando sua rigidez. Desta forma, a energia do impacto é transferida para a bola e, ainda, uma vez que a energia elétrica não gera vibrações, reduz-se cerca de 20% das vibrações do impacto. Isto certamente torna o equipamento mais poderoso e eficiente. Outro equipamento conhecido é o bastão de *baseball* inteligente, que possui o sistema chamado *Piezo Damper*, responsável por absorver parte da energia do impacto que seria transferida ao rebatedor. O bastão é conhecido como *A Smart Electrical Baseball Bat* (Fig. 1.8).



(a) raquetes inteligentes

(b) Detalhe das *Intellifibers*

Figura 1.7 – Raquetes de tênis que utilizam materiais inteligentes.

(Fonte: <http://people.bath.ac.uk/vft20/Tennis%20web%20page.htm>, acesso em 23/07/2006)

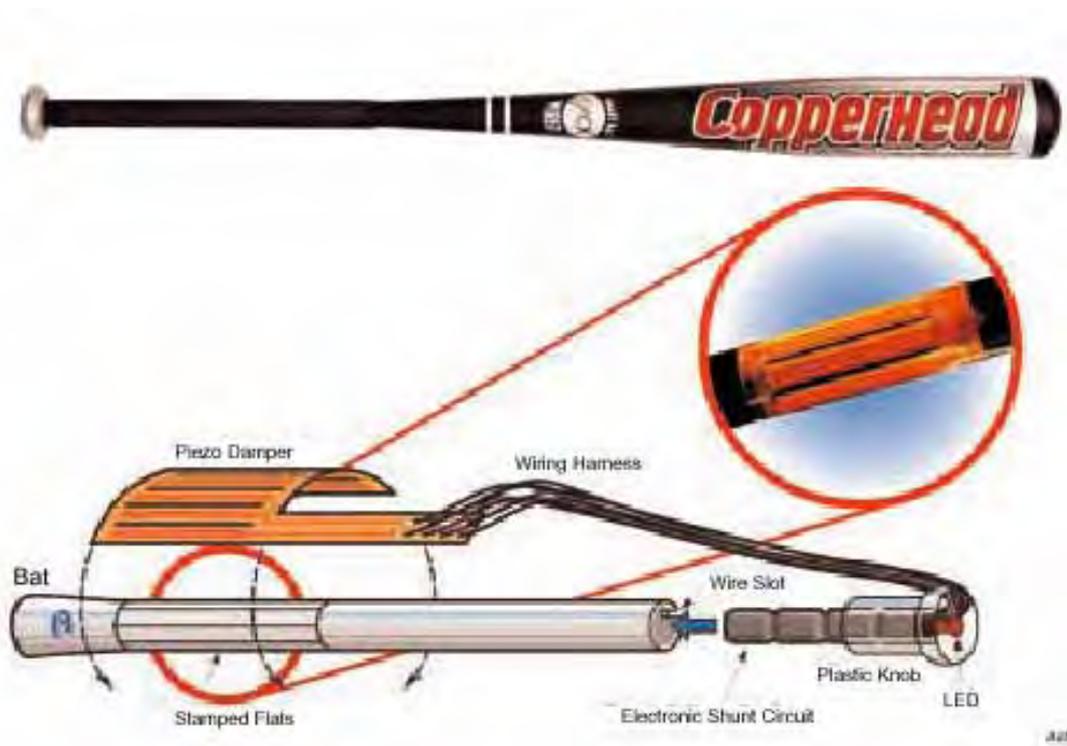


Figura 1.8 – Bastão de Baisebol com sistema para atenuar vibrações.

(Fonte: AKHRAS, 2000)

A companhia *Active Control eXperts* (ACX) de Cambridge, Massachusetts, especializada em materiais piezelétricos e no desenvolvimento de *Smart Structures*, desenvolveu o denominado “esqui inteligente”, que ficou conhecido como o primeiro esqui com cérebro e já estava disponível aos consumidores americanos em dezembro de 1995. O esqui “K2 Alpine” possuía material piezelétrico entre suas fibras que permitia a dissipação de

parte da energia transmitida devido a vibrações causadas pelas irregularidades das superfícies (Fig. 1.9).



(a) esqui tradicional



(b) esqui inteligente

Figura 1.9 – Esqui tradicional e esqui inteligente da companhia ACX.

(Fonte: <http://people.bath.ac.uk/vft20/Tennis%20web%20page.htm>, acesso em 23/07/2006)

O uso de materiais inteligentes em sistemas de monitoramento das condições de máquinas e estruturas, como mostra Kumar et al. (2004), já possui grande impacto nos setores aeroespacial e da construção civil (Fig. 1.10). Empresas americanas como a Smartfibres Ltd (2000) e a Smartec (2003) empregam fibras óticas como sensores embutidos em estruturas aeroespaciais e marítimas. O objetivo deste procedimento é o monitoramento das estruturas para estender a vida útil e reduzir o risco de falhas catastróficas.

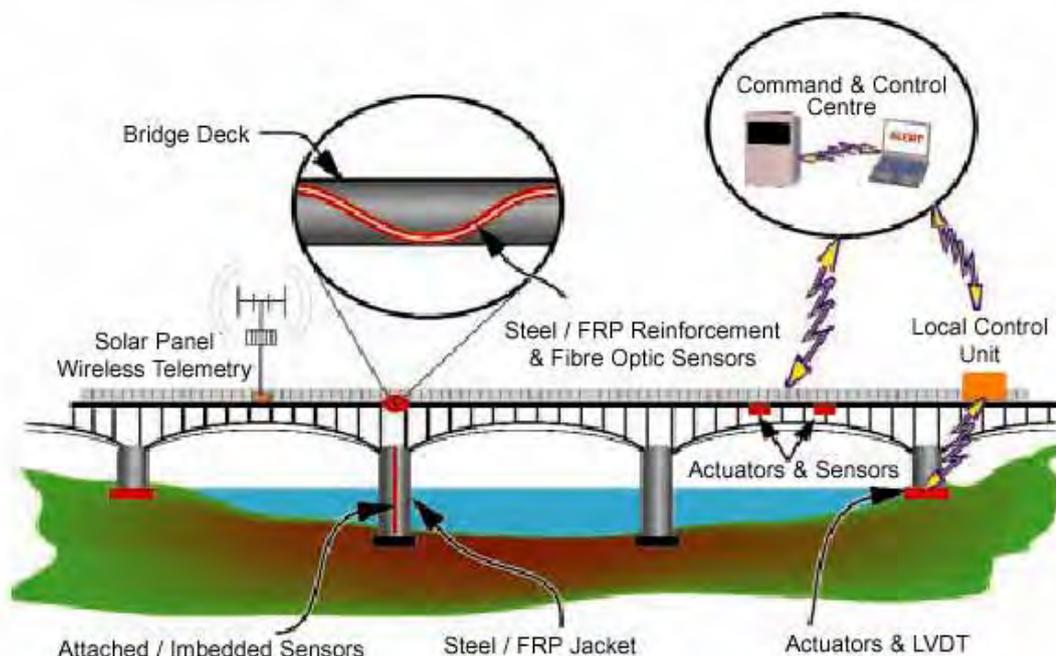


Figura 1.10 – Materiais inteligentes monitorando as condições da estrutura.

(Fonte: AKHRAS, 2000)

Materiais piezelétricos têm sido empregados no desenvolvimento de músculos artificiais que simulam movimentos humanos para aplicações em robótica, University of Alberta (2001), (Fig. 1.11). Pesquisadores do Illinois Institute of Technology implantaram um sensor piezelétrico no músculo de um paciente. O dispositivo transmite informações sobre a atividade do nervo local via rádio para um sistema de monitoramento externo. O dispositivo pode, também, receber sinais e estimular a ação do músculo (TROYK et al., 1991).



Figura 1.11 – Robô com músculos artificiais.

(Fonte: [http://www.cs.ualberta.ca/~database/MEMS/sma\\_mems/muscle.html](http://www.cs.ualberta.ca/~database/MEMS/sma_mems/muscle.html), acesso em 29/07/2006)

Atuando como parte de uma estrutura inteligente, os materiais piezelétricos têm sido largamente empregados para o controle de vibrações e supressão de ruídos em aeronaves (Fig. 1.12) e estruturas convencionais. A empresa Ultra Electronics Ltd (1999) desenvolveu, entre

outros, um equipamento denominado *Active Tuned Vibration Attenuators* (ATVAs) composto por sensores, atuadores e controladores, que é acoplado diretamente a fuselagem da aeronave para controle ativo de vibrações e ruídos. Quando comparados com as técnicas convencionas de amortecimento passivo, os ATVAs apresentam uma atenuação de vibrações e ruídos mais efetiva, acrescentando menor peso a estrutura.



Figura 1.12 – Localização de sistemas inteligentes em um avião.

(Fonte: AKHRAS, 2000)

Pesquisadores, financiados pelo exército dos EUA, estão embutindo cerâmicas piezelétricas nas hélices do rotor de helicópteros, as quais produzem uma resposta de realimentação que é utilizada para reduzir a vibração causada pelos vórtices produzidos pelas hélices (*The Institute of Materials, Minerals and Mining*, 2003), (Fig. 1.13).

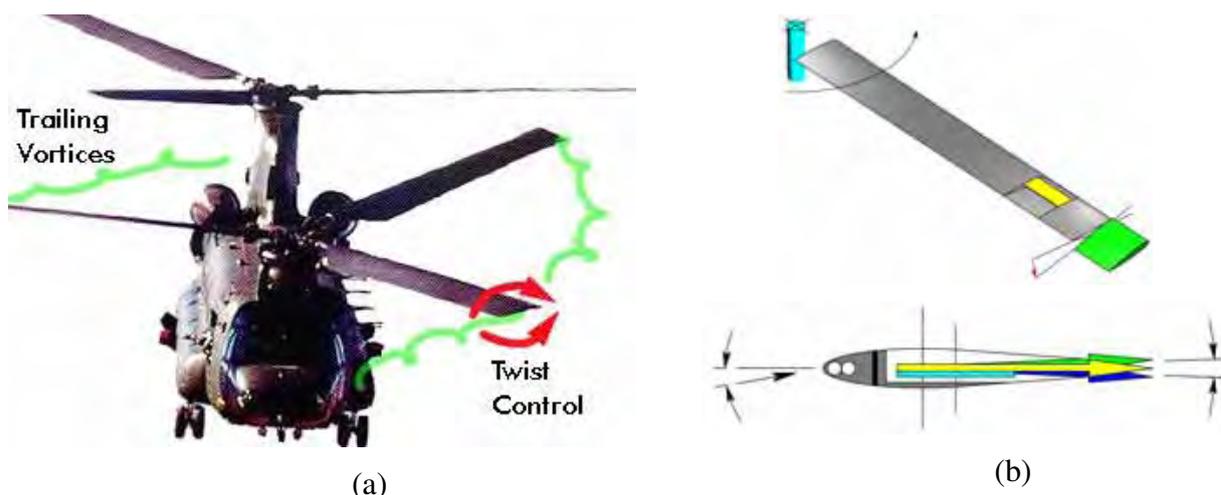


Figura 1.13 – (a) Helicóptero e vórtices, (b) Esquema das hélices com PZTs embutidos.

(Fonte: ROCHA, 2004)

O módulo ZI da Estação Espacial Internacional (Fig. 1.14) possui sensores e atuadores piezelétricos acoplados. Os sensores enviam um sinal, causado por vibrações, a um circuito lógico que produz uma lei de controle a ser seguida pelos atuadores. Os movimentos dos atuadores, no sentido oposto ao das vibrações, proporcionam maior estabilidade à estrutura (PANOSSIAN et al., 1998).



Figura 1.14 – Estação Espacial Internacional.

(Fonte: <http://spaceflight1.nasa.gov/gallery/images/station/>, acesso em 28/07/2006)

O transportador vibratório, figura 1.15, para o transporte e orientação de peças e material a granel, desenvolvido na UFU (Universidade Federal de Uberlândia – MG), possui acionamento por materiais piezelétricos. Estes atuadores permitem movimento em ampla

faixa de frequência, com formas de ondas arbitrárias, não necessariamente harmônicas, reduz o consumo de energia e apresenta baixo nível de ruído (MARTINS, 1997).

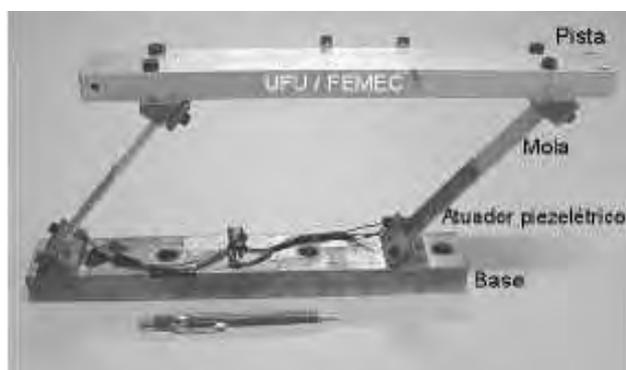


Figura 1.15 – Protótipo de transportador vibratório acionado por elementos piezelétricos.

(Fonte: STEFFEN JR.; RADE, 2004)

Na indústria automobilística a utilização de sensores e atuadores também está cada vez mais usual. Stöbener e Gaul (2001) reduziram vibrações na estrutura de um carro usando seis atuadores PVDF colados em uma placa fina que estava presa à carroceria do automóvel (Fig. 1.16). Com este sistema se conseguiu reduzir aproximadamente 25% da amplitude do 1.º modo e 60% da amplitude do 3.º modo.

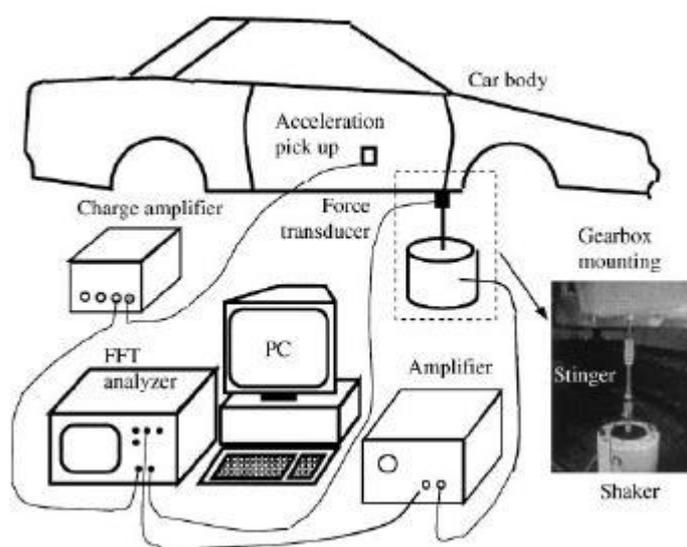


Figura 1.16 – Análise modal em um automóvel utilizando materiais piezelétricos.

(Fonte: STÖBENER; GAUL, 2001)

O perfurador vibratório USDC (*ultrasonic/sonic driller/corer*) também utiliza material piezelétrico (Fig. 1.17a). Este aparelho, que está em desenvolvimento pela NASA, permite coletar amostras de vários planetas ou corpos pequenos, como asteróides, usando pequena carga axial (de 3 a 10 N). As vibrações ultra-sônicas (ou sônicas) são responsáveis pela perfuração. Os materiais piezelétricos são fontes de vibrações que geram movimento para cima e para baixo na broca de quatro quilogramas que o dispositivo possui. O modelo em elementos finitos está em desenvolvimento na Cybersonics (<http://www.cybersonicsinc.com/>) para otimizar o funcionamento. A figura 1.17b mostra a plataforma Sojourner com o USDC acoplado.



(a) perfurador vibratório



(b) plataforma de operação do USDC

Figura 1.17 – Perfurador vibratório utilizado para coletar amostras de rochas.

(Fonte: <http://ndea.jpl.nasa.gov/nasa-nde/usdc/usdc.htm>, acesso 28/08/2006)

Além dos piezelétricos, materiais fluidos com propriedades elétricas e magnéticas também são conhecidos como materiais inteligentes. Denominados eletreológicos (ER) e magnetoreológicos (MR) e apresentando inúmeras aplicações, estes materiais possuem suas propriedades físicas alteradas na presença de campos elétricos ou magnéticos, respectivamente. A figura 1.18 ilustra o comportamento de um material MR com e sem um campo magnético aplicado. Devido suas propriedades, estes materiais vêm sendo utilizados no desenvolvimento de sistemas absorvedores de vibrações com várias aplicações em suspensão de veículos. Pode-se citar o caminhão do tipo empilhadeira, modelo Komatsu FD 20 com capacidade para levantar até duas toneladas (Figura 1.19), que vem sendo estudado pelo Laboratório de Estruturas Ativas da Universidade de Bruxelas (UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES, 2006). Trata-se de um sistema de suspensão semi-ativa, utilizando amortecedores com materiais MR, como mostra em detalhes a figura 1.20.

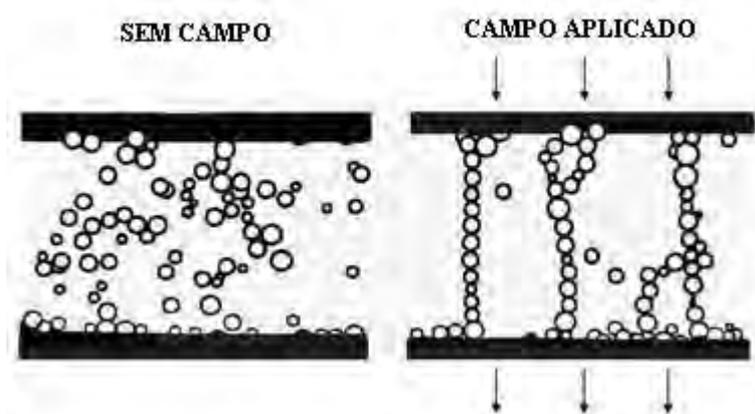


Figura 1.18 – Material MR sem aplicação e com a aplicação de campo magnético.



Figura 1.19 – Empilhadeira Komatsu FD 20.

(Fonte: <http://www.ulb.ac.be/scmero/>, acesso 22/07/2006)

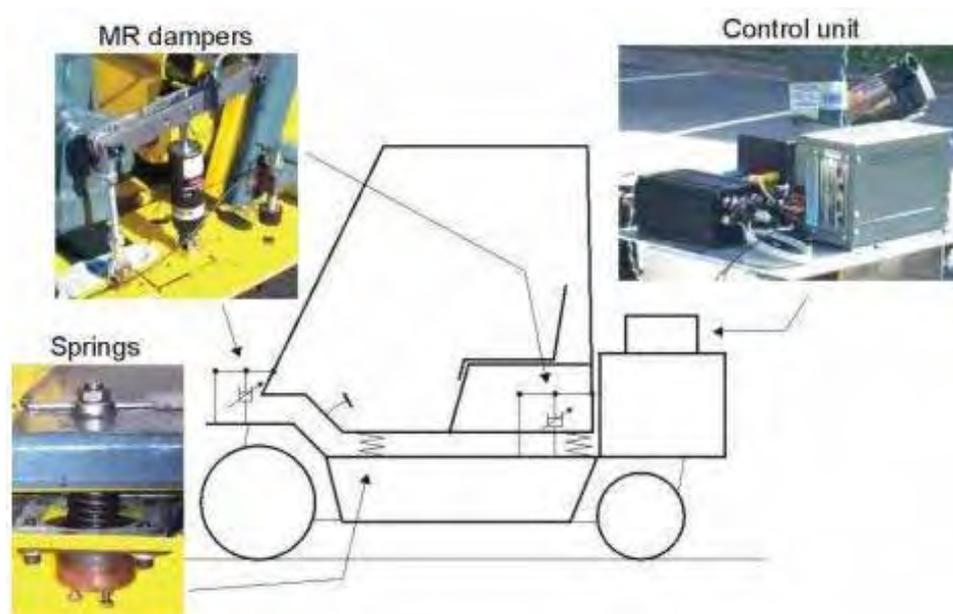


Figura 1.20 – Detalhes do sistema de suspensão semi-ativa utilizando material MR.

(fonte: <http://www.ulb.ac.be/scmero/>, acesso 22/07/2006)

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho é organizado da seguinte forma:

- O capítulo 1 apresenta uma introdução aos assuntos discutidos no trabalho. Basicamente é abordado o problema de controle ativo de vibrações e algumas técnicas utilizadas, incluindo o uso de LMIs. Também, é esclarecido o problema do posicionamento ótimo de sensores a atuadores, algumas técnicas disponíveis na literatura e a configuração geral do problema, que considera a influência de distúrbios e saídas de desempenho (saídas reguladas). Os conceitos básicos de materiais inteligentes e algumas aplicações de materiais piezelétricos também são apresentados, buscando tornar o texto completo e mais agradável ao leitor;
- O capítulo 2 apresenta o modelo dinâmico de segunda ordem em coordenadas física e modal e, ainda, a realização no espaço de estados. É discutida a necessidade da utilização de técnicas de redução de modelos e, apresenta-se a técnica de redução via truncamento dos estados. Também, são apresentados os conceitos de observabilidade, controlabilidade, matrizes gramianas e as quatro maneiras básicas de transformação da matriz dinâmica para a forma em blocos diagonais. Transformação similar permite desacoplar as matrizes de controle, de distúrbio e de saídas para cada modo de vibrar. O método de

identificação de subespaços também é apresentado. Este método foi utilizado para a identificação das matrizes na forma de espaço de estados a partir de dados experimentais;

- O capítulo 3 apresenta o problema do posicionamento ótimo de sensores e atuadores. Na metodologia utilizada estão envolvidas normas de sistemas  $H_2$ ,  $H_\infty$  e Hankel, além das matrizes gramianas de observabilidade, controlabilidade e sensibilidade de distúrbio. São apresentadas as diversas formas de se calcular as normas de sistemas, suas propriedades e as estratégias de posicionamento de sensores e atuadores. Também, é discutida a influência de distúrbios externos e saídas de desempenho no posicionamento ótimo e, ainda, o índice de relacionamento, que permite reduzir o número de sensores necessários no projeto de controle e monitoramento em grandes estruturas.

- O capítulo 4 apresenta uma revisão de LMIs, incluindo definições, sistemas incertos e tipos de incertezas;

- O capítulo 5 apresenta uma revisão da teoria de controle e a formulação do controlador LQR e sua versão via LMIs;

- O capítulo 6 apresenta o projeto de observadores de estados, incluindo o filtro de Kalman que, em particular, é utilizado neste trabalho;

- O capítulo 7 apresenta as aplicações numéricas e experimentais buscando validar a metodologia proposta e especificar suas vantagens e limitações;

- O capítulo 8 apresenta as considerações finais e as sugestões para trabalhos futuros;

- Finalmente são apresentadas as referências bibliográficas e os anexos, respectivamente.

## CAPÍTULO 2. MODELO DINÂMICO ESTRUTURAL

Os pioneiros no desenvolvimento de modelos dinâmicos para estruturas inteligentes são os trabalhos de Bailey e Hubbard (1985) e Crawley e De Luis (1987). Ambos usam a tensão mecânica induzida pelos atuadores piezelétricos para contribuir com a tensão mecânica total da estrutura base. Porém o primeiro trabalho de pesquisa que desenvolveu uma sistemática rigorosa para o projeto de uma estrutura deste tipo foi o de Hagood et al. (1990), que aplicaram o princípio generalizado de Hamilton para sistemas acoplados eletromecanicamente, também conhecido como princípio variacional aplicado a meios piezelétricos (ALLIK; HUGHES, 1970). A grande contribuição de Hagood et al. (1990) foi formular de modo mais claro o acoplamento eletromecânico. A partir daí estruturas inteligentes mais complexas, como placas e cascas, começaram a surgir na literatura (DOSH; INMAN, 1992). Banks et al. (1995) apresentam um modelo geral descrevendo a interação entre materiais piezelétricos e uma estrutura elástica constituída de cascas cilíndricas, placas ou vigas.

Abreu et al. (2004) apresentam a modelagem de uma placa usando o elemento de Kirchhoff via FEM com sensores e atuadores piezelétricos acoplados considerando que cada superfície do atuador ou sensor possui um potencial constante. Utilizando o princípio de Hamilton os autores consideram as energias mecânica e elétrica da estrutura e do material piezelétrico, respectivamente. Ainda, apresentam análises estática e dinâmica comparando os resultados com os obtidos através *software* comercial ANSYS®. Rocha et al. (2004) e Marqui et al. (2006a) também apresentam a modelagem de uma placa usando o elemento de Kirchhoff via FEM, no entanto, os elementos piezelétricos são modelados como elementos de viga de Euler-Bernoulli. Apesar da simplificação os resultados também são representativos ao serem comparados com os resultados do software ANSYS® (ROCHA, 2004).

Neste trabalho foi considerado um modelo dinâmico de estruturas flexíveis descrito em coordenadas modais, tanto para modelos estruturais de segunda ordem quanto para modelos no espaço de estados.

## 2.1 MODELOS ESTRUTURAIS DE SEGUNDA ORDEM

Modelos estruturais de segunda ordem descritos por equações diferenciais ordinárias lineares (EDOL) são muito utilizados em problemas de dinâmica estrutural. A representação do modelo depende da escolha das coordenadas. Alguns autores escrevem estes modelos em coordenadas físicas, no entanto, neste trabalho os modelos são escritos em coordenadas modais e são conhecidos como modelos modais.

Os modelos escritos em coordenadas físicas, também conhecidos por modelos físicos, são formulados em termos de deslocamento, velocidade e aceleração. Tais modelos são caracterizados pelas matrizes de massa, de rigidez, de amortecimento e pelas matrizes de localização dos sensores e atuadores e são em geral obtidos via FEM, equação (2.1).

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D}_a\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) &= \mathbf{B}_0\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_{0w}\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_{oq}\mathbf{q}(t) + \mathbf{C}_{ov}\dot{\mathbf{q}}(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{q}(t)$  é o vetor de deslocamento  $nd \times 1$ ,  $\mathbf{u}(t)$  é o vetor do sinal de controle  $s \times 1$ ,  $\mathbf{w}(t)$  é o vetor de entrada de distúrbios  $s_d \times 1$ ,  $\mathbf{y}(t)$  é o vetor de saídas  $r \times 1$ ,  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa  $nd \times nd$ ,  $\mathbf{D}_a$  é a matriz de amortecimento  $nd \times nd$ ,  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez  $nd \times nd$ . A matriz de entrada do sinal de controle  $\mathbf{B}_0$  é  $nd \times s$ , a matriz de entrada do distúrbio  $\mathbf{B}_{0w}$  é  $nd \times s_d$ , a matriz de saída de deslocamento  $\mathbf{C}_{oq}$  é  $r \times nd$  e a matriz de saída de velocidade  $\mathbf{C}_{ov}$  é  $r \times nd$ . A matriz de massa é positiva definida e as matrizes de amortecimento e rigidez são positivas semidefinidas. Também,  $nd$  é o número de GL do sistema,  $r$  é o número de saídas,  $s$  é o número de entradas de controle e  $s_d$  é o número de distúrbios. Distúrbio, neste trabalho, é entendido como qualquer entrada que resulte em vibrações estruturais indesejáveis.

Em geral as matrizes de massa e rigidez são estimadas em coordenadas físicas, por exemplo, via FEM (KWON; BANG, 1997), sendo a matriz de amortecimento proporcional a elas (BHASKAR, 1995). Em particular, o amortecimento proporcional será utilizado neste trabalho. Já os modelos modais podem ser obtidos via procedimentos de ensaio de identificação (MAIA et al., 1996) ou através de uma transformação a partir de modelos físicos. As idéias desta formulação são apresentadas a seguir.

Considerando o caso de vibrações livres da equação (2.1) para um sistema sem amortecimento, sabe-se que a solução da EDOL (2.1) é da forma:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi}e^{j\omega t} \quad (2.2)$$

assim, substituindo em (2.1), tem-se (EWINS, 1984):

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \Phi e^{j\omega t} = 0 \quad (2.3)$$

A solução não trivial desta equação existe se:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (2.4)$$

Onde são encontrados  $n$  valores de  $\omega$ :  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  tal que esta equação seja satisfeita, sendo  $n$  menor ou igual à  $nd$ . A frequência  $\omega_i$  é chamada *i-ésima* frequência natural do sistema. Substituindo  $\omega_i$  em (2.3) obtém-se as soluções correspondentes  $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  para cada frequência natural.  $\phi_i$  é chamado de *i-ésimo* modo natural ou forma dos modos. Estas soluções não são únicas, e podem ser escalonadas arbitrariamente. Comumente se define a matriz de frequências naturais (MAIA et al., 1996):

$$\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \quad (2.5)$$

E a matriz modal  $\Phi$  ( $nd \times n$ ), que consiste dos  $n$  modos naturais da estrutura:

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] \quad (2.6)$$

As matrizes modais de massa podem ser diagonalizadas através das seguintes equações:

$$\mathbf{M}_m = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{K}_m = \Phi^T \mathbf{K} \Phi \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{D}_m = \Phi^T \mathbf{D}_{ap} \Phi \quad (2.7c)$$

A matriz  $\mathbf{D}_{ap}$  é a matriz de amortecimento proporcional dada por:

$$\mathbf{D}_{ap} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2.8)$$

Pode-se introduzir uma transformação de coordenadas no problema,  $\mathbf{q}_m(t)$ , tal que:

$$\mathbf{q}(t) = \Phi \mathbf{q}_m(t) \quad (2.9)$$

Assim, pré-multiplicando a equação (2.1) por  $\Phi^T$  e utilizando a transformação da equação (2.8), obtém-se:

$$\ddot{\mathbf{q}}_m(t) + 2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{q}}_m(t) + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{q}_m(t) = \mathbf{B}_m \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_{mw} \mathbf{w}(t) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{mq} \mathbf{q}_m(t) + \mathbf{C}_{mv} \dot{\mathbf{q}}_m(t)$$

sendo:

$$\mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{K}_m \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2} \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{D}_m \mathbf{\Omega}^{-1} = \frac{1}{2} \mathbf{M}_m^{-1/2} \mathbf{K}_m^{-1/2} \mathbf{D}_m \quad (2.12)$$

As matrizes de entrada modal de controle  $\mathbf{B}_m$  e de distúrbio  $\mathbf{B}_{mw}$  são dadas por:

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B}_0 \quad (2.13a)$$

$$\mathbf{B}_{mw} = \mathbf{M}_m^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B}_{0w} \quad (2.13b)$$

e  $\mathbf{C}_{mq}$  e  $\mathbf{C}_{mv}$  são as matrizes de saída de deslocamento e velocidade modal, respectivamente:

$$\mathbf{C}_{mq} = \mathbf{C}_{oq} \mathbf{\Phi} \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{C}_{mv} = \mathbf{C}_{ov} \mathbf{\Phi} \quad (2.14b)$$

A matriz modal de saída equivalente é definida por:

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_{mq} \mathbf{\Omega}^{-1} + \mathbf{C}_{mv} \quad (2.15a)$$

que tem a seguinte propriedade:

$$\|\mathbf{C}_m\|_2^2 = \|\mathbf{C}_{mq} \mathbf{\Omega}^{-1}\|_2^2 + \|\mathbf{C}_{mv}\|_2^2 \quad (2.15b)$$

onde  $\|\cdot\|_2$  é a norma euclidiana.

## 2.2 MODELOS ESTRUTURAIS NO ESPAÇO DE ESTADOS

Para finalidade de controle, modelos de segunda ordem como mostrados na seção anterior não são atraentes. Para projeto de controladores é muito mais conveniente representar as equações de estruturas flexíveis na forma de espaço de estados. A representação no espaço de estados é determinada pelo trio de matrizes ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ) e pelo vetor de estados  $\mathbf{x}(t)$ , (MOREIRA, 1998).

Ressalta-se que uma realização no espaço de estados não é única, o que deve valer são as relações de entrada-saída que sempre são mantidas independentemente da realização feita. Entretanto, faz diferença qual representação no espaço de estados é escolhida para análise de um sistema e projeto do controlador, podendo facilitar ou dificultar o processamento de informações. A seguir descreve-se a realização no espaço de estados de modelos modais.

A modelagem de estruturas por FEM exige elevado número de graus de liberdade. Com isto a ordem  $N$  da representação física é geralmente muito grande (WANG et al., 1999), gerando dificuldades numéricas adicionais. Além disto, a representação no espaço de estados física raramente é utilizada em aplicações práticas de engenharia, uma vez que a estimativa de parâmetros modais é muito mais fácil de ser implementada do que de parâmetros físicos. Uma forma alternativa é obter a realização no espaço de estados a partir do modelo de segunda ordem na forma modal, representado pela equação (2.16).

Definindo o vetor de estados modal:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_m(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_m(t) \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

A equação (2.16) pode ser reescrita como um conjunto de equações de primeira ordem na forma da equação (2.17a):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_w\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.17a)$$

sendo as matrizes  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{B}_w, \mathbf{C})$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega}^2 & -2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{mw} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_{mq} \quad \mathbf{C}_{mv}] \quad (2.17b)$$

Nesta realização  $\mathbf{x}_1$  é o vetor de deslocamento modal e  $\mathbf{x}_2$  é o vetor de velocidade modal. A dimensão desta representação é  $2n$ , enquanto a representação física é  $2nd$ , sendo,  $n \ll nd$ .

Vale ressaltar que a equação (2.17b) não é uma representação modal, uma vez que as equações não se desacoplaram. A realização no espaço de estados modal é caracterizada por uma matriz de bloco diagonal,  $\mathbf{A}_m$ , e as matrizes de entrada e saída relacionadas:

$$\mathbf{A}_m = \text{diag}(\mathbf{A}_{mi}), \quad \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m1} \\ \mathbf{B}_{m2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{mw} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{mw1} \\ \mathbf{B}_{mw2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{mwn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_m = [\mathbf{C}_{m1} \quad \mathbf{C}_{m2} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{mn}] \quad (2.18)$$

sendo  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $\mathbf{A}_{mi}$ ,  $\mathbf{B}_{mi}$ ,  $\mathbf{B}_{mwi}$  e  $\mathbf{C}_{mi}$  são blocos  $2 \times 2$ ,  $2 \times s$ ,  $2 \times s_d$  e  $r \times 2$ , respectivamente. Estes blocos podem ser arranjados de diversas formas diferentes através da utilização de uma transformação linear. Isto pode ser feito usando a seguinte matriz de transformação:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_n & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde  $\mathbf{e}_i$  é um vetor linha com todos os elementos iguais a zero, exceto no  $i$ -ésimo. Denota-se  $\mathbf{A}_{mk}$  como sendo a matriz dinâmica  $\mathbf{A}_m$  na forma modal  $k$ . Em geral se trabalha com quatro formas diferentes, portanto,  $k=1, 2, 3$  ou  $4$ . A matriz de transformação  $\mathbf{R}_{kr}$  transforma a variável de estado  $\mathbf{x}_k$  na variável  $\mathbf{x}_r$ :

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{R}_{kr} \mathbf{x}_k, \quad k, r = 1, 2, 3 \text{ ou } 4 \quad (2.20)$$

sendo:

$$\mathbf{R}_{kr} = \text{diag}(\mathbf{R}_{kri}) \quad (2.21)$$

Assumindo um amortecimento pequeno, i. e.,  $\zeta_i \ll 1$ ,  $i=1, \dots, n$ , com  $j$  sendo a unidade imaginária, obtém-se:

$$\mathbf{R}_{12i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \zeta_i & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{13i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{14i} = \begin{bmatrix} 1 - j\zeta_i & -j \\ 1 + j\zeta_i & j \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{R}_{23i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\zeta_i \omega_i & \omega_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{24i} = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{34i} = \begin{bmatrix} 1 - j\zeta_i & -j/\omega_i \\ 1 + j\zeta_i & j/\omega_i \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

A transformação inversa pode ser derivada pelas seguintes relações:

$$\mathbf{R}_{kpi} = \mathbf{R}_{pji}^{-1} \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{R}_{kji} = \mathbf{R}_{rji} \mathbf{R}_{kri}, \quad r, k, j = 1, 2, 3, 4. \quad (2.24b)$$

Uma nova representação pode ser obtida da seguinte maneira, sendo  $\mathbf{R}$  uma matriz não singular:

$$\mathbf{A}_n = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}, \quad \mathbf{B}_n = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}, \quad \mathbf{C}_n = \mathbf{C} \mathbf{R} \quad (2.25)$$

Os blocos  $\mathbf{A}_{mi}$  utilizados são geralmente de quatro diferentes formas (GAWRONSKI, 1998). A seguir, apresentam-se estas formas e os respectivos estados modais para cada realização:

- Forma Modal 1:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{mi} \\ \dot{\mathbf{q}}_{mi}/\omega_i \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

- Forma Modal 2:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} -\zeta_i\omega_i & \omega_i \\ -\omega_i(\zeta_i^2 - 1) & -\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{mi} \\ \mathbf{q}_{moi} \end{Bmatrix}, \quad \text{sendo } \mathbf{q}_{moi} = \zeta_i\mathbf{q}_{mi} + \dot{\mathbf{q}}_{mi}/\omega_i \quad (2.27)$$

- Forma Modal 3:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta_i\omega_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{mi} \\ \dot{\mathbf{q}}_{mi} \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

- Forma Modal 4:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} -\zeta_i\omega_i + j\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2} & 0 \\ 0 & -\zeta_i\omega_i - j\omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{mi} - j\mathbf{q}_{moi} \\ \mathbf{q}_{mi} + j\mathbf{q}_{moi} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

O vetor  $\mathbf{x}$  da representação modal consiste de  $n$  componentes  $\mathbf{x}_i$  independentes que representam o estado de cada modo. A forma 4 em geral não é muito interessante, uma vez que é uma representação imaginária, o que aumenta as dificuldades numéricas e analíticas. Porém ela pode ser usada como base para encontrar a representação de qualquer estado na forma de representação 2, equação (2.27), que foi utilizada neste trabalho.

## 2.3 CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade fornecem informações úteis sobre sistemas dinâmicos e, portanto, são fundamentos básicos para o estudo de controle, estimação de sistemas e testes modais (VALER, 1999), ainda que, muitos engenheiros estruturais, freqüentemente, passem a largo sobre estes conceitos (GAWRONSKI, 1998).

Um sistema flexível possui como uma característica intrínseca, o fato de ser controlável e observável. Uma estrutura é controlável se os atuadores acoplados são capazes de excitar todos os modos e envolvem o par de matrizes do sistema ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ). Por outro lado o sistema é observável se os sensores distribuídos na estrutura conseguem detectar os movimentos de todos os modos e envolvem o par de matrizes do sistema ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{C}$ ). Estas informações são essenciais em diversas aplicações.

As propriedades de controlabilidade e observabilidade de um sistema linear e invariante no tempo podem ser definidas como a seguir:

- **Definição 1:** Um sistema é dito controlável no instante  $t_0$  se e somente se é possível por meio de uma entrada  $\mathbf{u} \in \mathfrak{X}$  transferir o sistema do estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  a qualquer outro estado  $\mathbf{x}(t_f)$  em um tempo finito  $t_f - t_0 \geq 0$ . Além disso, se o sistema é controlável para qualquer instante  $t_0$  e estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  o sistema é dito completamente controlável.

- **Definição 2:** Um sistema é dito observável no instante  $t_0$  se e somente se é possível determinar o estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  a partir da resposta  $\mathbf{y}(t)$  do sistema para  $t_0 \leq t \leq t_f$ . Além disso, se o sistema é observável para qualquer instante  $t_0$  e estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  o sistema é dito completamente observável.

Estas definições são gerais para qualquer tipo de sistema dinâmico. Existem diferentes critérios para determinar controlabilidade e observabilidade de sistemas. Por exemplo, os testes do posto de Popov, Belevitch e Hautus (testes PBH) são úteis para avaliar eficientemente a controlabilidade e observabilidade modal do sistema, apesar de levarem a um conceito um pouco mais fraco (TRINDADE, 1999).

O critério clássico de controlabilidade é definido como a seguir: um sistema linear e invariante no tempo com  $s$  entradas é completamente controlável se e somente se a matriz  $N \times N \cdot s$ :

$$\mathbf{C} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}] \quad (2.30)$$

tem posto  $N$ . Agora um sistema linear com  $r$  saídas é completamente observável se e somente se a matriz  $r \cdot N \times N$ :

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-1} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

tem posto  $N$ . O conceito de “posto” de uma matriz está diretamente relacionado com a dependência linear das linhas ou colunas da matriz. Se uma matriz de ordem  $or \times or$ , possui

linhas linearmente independentes tem-se posto =  $or$ . Se uma linha é combinação das outras, tem-se posto =  $or - 1$ . Logo, o posto de uma matriz é igual ao número de linhas (ou colunas) linearmente independentes. Uma matriz  $m \times or$  (com  $m > or$ ) possui posto total se seu posto =  $or$ , ou posto deficiente se seu posto  $< or$ . Para uma matriz quadrada, ter posto deficiente implica que a matriz é singular, isto é, seu determinante é igual à zero.

Os critérios de controlabilidade e observabilidade têm dois sérios problemas. Primeiro, eles respondem as questões de controlabilidade e observabilidade em termos de “sim” ou “não” e não fornecem nenhuma resposta quantitativa sobre o grau de controlabilidade e observabilidade do sistema. Além disto, eles só funcionam bem para sistemas com dimensões pequenas, por problemas numéricos.

Para contornar estas dificuldades uma alternativa é a formulação em termos de grammianos. Os grammianos de controlabilidade e observabilidade são definidos como a seguir:

$$\mathbf{W}_c = \int_0^t \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \exp(\mathbf{A}^T t) dt \quad (2.32)$$

$$\mathbf{W}_o = \int_0^t \exp(\mathbf{A}^T t) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \exp(\mathbf{A}t) dt \quad (2.33)$$

Alternativamente eles podem ser determinados das seguintes equações diferenciais:

$$\dot{\mathbf{W}}_c = \mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T \quad (2.34)$$

$$\dot{\mathbf{W}}_o = \mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (2.35)$$

Para sistemas estáveis, a solução estacionária das equações (2.34) e (2.35) são obtidas assumindo que estas são homogêneas, além disto,  $\mathbf{W}_c$  e  $\mathbf{W}_o$  são positivas definidas. Neste caso, os grammianos são determinados das seguintes equações de Lyapunov:

$$\mathbf{A} \mathbf{W}_c + \mathbf{W}_c \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{0} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_o + \mathbf{W}_o \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

Os grammianos dependem das coordenadas do sistema e para uma transformação linear de estados, como apresentada pela equação (2.20), eles são transformados da seguinte maneira:

$$\overline{\mathbf{W}}_c = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}_c \mathbf{R}^{-T} \quad (2.38)$$

$$\overline{\mathbf{W}}_o = \mathbf{R}^T \mathbf{W}_o \mathbf{R} \quad (2.39)$$

Uma propriedade importante é que os autovalores do produto dos gramianos são invariantes da transformação linear, ou seja:

$$\lambda_i(\overline{\mathbf{W}}_c \overline{\mathbf{W}}_o) = \lambda_i(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}_c \mathbf{R}^{-T} \mathbf{R}^T \mathbf{W}_o \mathbf{R}) = \lambda_i(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}_c \mathbf{W}_o \mathbf{R}) = \lambda_i(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o) \quad (2.40)$$

Estes invariantes são conhecidos como valores Hankel singulares do sistema e são denotados como a seguir:

$$\gamma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o)}, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.41)$$

## 2.4 REDUÇÃO DE MODELOS

Para controle de sistemas flexíveis se exige uma formulação especial devido ao grande tamanho dos modelos estruturais, portanto, técnicas de redução de modelos são ferramentas essenciais. A figura 2.1, que mostra uma das antenas de comunicação da NASA para a exploração do espaço, é um exemplo da necessidade de redução de modelos. Esta antena é um sistema flexível articulado de grande dimensão com a rotação e elevação controladas. O modelo desta estrutura via método dos elementos finitos (FEM) consiste de aproximadamente 5000 graus de liberdade e foi identificado através do método de realização de auto-sistemas (ERA), Gawronski e Mellstrom (1994). A ordem do sistema depois da redução foi de dezoito estados, o que certamente simplifica o projeto de controladores robustos.



Figura 2.1 – Antena de comunicação com o espaço da NASA localizada em Madri (Espanha).

(Fonte: [http://es.wikipedia.org/wiki/Madrid\\_Deep\\_Space\\_Communications\\_Complex](http://es.wikipedia.org/wiki/Madrid_Deep_Space_Communications_Complex), acesso em

15/05/2007)

Schönhoff e Nordmann (1998) apresentam a modelagem do telescópio SOFIA (*Stratospheric Observatory for Infrared Astronomy*) utilizando FEM. O telescópio refletor de 2,5 metros (espelho de 97 polegadas) foi desenvolvido pela NASA e o DLR (Centro Aeroespacial da Alemanha) para a astronomia infravermelha, com capacidade de observação de comprimentos de ondas de 0,3 até 1600  $\mu\text{m}$  e foi instalado em um Boeing 747SP modificado pela empresa *Raytheon Aircraft Integration Services* para observações na estratosfera (Fig. 2.2a). Uma porta na lateral do Boeing permite a utilização do telescópio (Fig. 2.2b). O modelo completo escrito em coordenadas modais na realização de espaço de estados apresentava 60000 graus de liberdade (GL). No entanto, através do índice de Litz (LITZ, 1979 – citado por SCHÖNHOFF; NORDMANN, 1998), utilizando o software Matlab<sup>®</sup>, reduziu-se em apenas 206.



(a) Boeing 747SP



(b) porta de utilização do telescópio

Figura 2.2 – Boeing 747SP utilizado para transportar o telescópio SOFIA.

(Fonte: <http://www.sofia.usra.edu/Gallery/featuredimages.html>, acesso 30/08/2006)

A obtenção de um modelo de baixa ordem que aproxime bem uma planta de alta ordem é muito importante para controle e tem atraído a atenção de muitos pesquisadores, sobretudo nos últimos 30 anos (ASSUNÇÃO, 2000). Este interesse pode ser explicado pelo fato de que a complexidade e o desempenho de um controlador, baseado em modelos depende, sobretudo da ordem da planta em estudo. Porém, a obtenção de um modelo reduzido também é interessante para propósitos de análise dinâmica e testes modais. Tipicamente, um modelo obtido por FEM contém um grande número de graus de liberdade quando desenvolvido para análise estática do projeto estrutural (WANG et al., 1999). Isto pode causar dificuldades numéricas quando o modelo é utilizado para análise dinâmica, sem falar no alto custo computacional. Em todos estes casos a redução de modelos é uma etapa crucial em projeto e análise.

Métodos ótimos de redução utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs) foram propostos para os casos de otimização local e global, usando como critérios de desempenho normas de sistemas (ASSUNÇÃO et al., 2002). Estas técnicas fornecem excelentes resultados, mas, infelizmente, são complexas e computacionalmente caras. Outros métodos, comparativamente mais simples, também foram propostos, sobretudo nos anos 80, e causaram profundo impacto, tornando-se métodos clássicos. Como por exemplo, pode ser citado o método da realização balanceada, que inclui a realização balanceada e o truncamento modal (MOORE, 1981). Problemas típicos de redução de modelos de estruturas flexíveis exigem uma formulação específica. Na literatura são encontradas referências de diversos autores, como por exemplo, Skelton (1988) e Gawronski e Juang (1990). A chave para o sucesso de uma redução de modelos depende, sobretudo, da escolha do índice a ser usado para avaliar o erro de redução. Em geral se utiliza normas de sistemas como critério de avaliação.

Um modelo de ordem reduzida é obtido truncando os estados. Denota-se por  $\mathbf{x}$  o vetor de estados e o trio  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  como na realização de espaço de estados. O vetor de estados  $\mathbf{x}$  é dividido da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_r \\ \mathbf{x}_t \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

sendo  $\mathbf{x}_r$  o vetor de coordenadas mantidas e  $\mathbf{x}_t$  o vetor de estados truncados. Se existem  $k < n$  estados mantidos,  $\mathbf{x}_r$  é um vetor de  $2k$  estados e  $\mathbf{x}_t$  é um vetor de  $2(n-k)$  estados. Também se particionam as matrizes do sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_r \\ \mathbf{B}_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_r \quad \mathbf{C}_t] \quad (2.43)$$

Os gramianos diagonalmente dominantes também são divididos de forma similar:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}_t \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

O modelo reduzido é obtido desconsiderando as últimas  $2(n-k)$  linhas das matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  e as últimas  $2(n-k)$  colunas de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$ . Matematicamente temos:

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{LAL}^T, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{LB}, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{CL}^T \quad (2.45)$$

sendo  $\mathbf{L} = [\mathbf{I}_{2k} \quad \mathbf{0}]$ . O procedimento descrito para a matriz de entrada de controle  $\mathbf{B}$  é similar para a matriz  $\mathbf{B}_w$ .

A redução de modelos pelo truncamento de modelos estáveis sempre produz o modelo reduzido estável, desde que os pólos do modelo reduzido sejam os pólos dominantes do sistema. O grande problema é decidir quais estados  $\mathbf{x}_r$  devem ser mantidos tal que se obtenha a melhor reprodução do sistema de alta ordem. Esta escolha depende da definição do índice de redução escolhido. Em geral se utilizam as normas  $H_2$ ,  $H_\infty$  e Hankel para se avaliar os erros de redução. A primeira formulação baseada na norma  $H_2$  é conhecida na literatura como método de Skelton (SKELTON, 1988). Já o segundo método, baseado nas normas  $H_\infty$  e Hankel, é conhecido como método de Moore (MOORE, 1981). Uma vez que a norma  $H_\infty$  corresponde a duas vezes a norma Hankel a metodologia de posicionamento utilizando estas normas é idêntica.

## **2.5 MÉTODO DE SUBESPAÇO PARA IDENTIFICAÇÃO DAS MATRIZES DO SISTEMA**

Durante estas últimas três décadas muitos estudiosos têm direcionado seus esforços para o desenvolvimento de metodologias que resultem na identificação de um modelo estrutural com boa representatividade das propriedades dinâmicas reais de uma estrutura. O desenvolvimento dos computadores e dos equipamentos de aquisição e de processamento de dados; além da aplicação da Transformada Rápida de Fourier (FFT – do inglês *Fast Fourier Transform*) estimularam estes estudos. As técnicas de identificação podem ser para sistemas SISO (uma - entrada e uma - saída; do inglês *simple-input simple-output*); ou para sistemas MIMO (múltiplas - entradas e múltiplas - saídas; do inglês *multi-input multi-output*). Os métodos de identificação, ainda, podem ser classificados em dois grupos básicos: métodos no domínio do tempo; e métodos no domínio da frequência. Em geral, os métodos baseados no domínio do tempo fornecem resultados melhores quando é grande a faixa de frequência, ou seja, quando é grande o número de modos presentes nos dados. Já os métodos no domínio da frequência são mais interessantes para a identificação de um número relativamente pequeno de modos (MAIA et al., 1997).

Grande parte dos métodos de identificação disponíveis na literatura é baseada em cálculos de modelos polinomiais que facilmente podem causar problemas numéricos como mau condicionamento, principalmente para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas. Os algoritmos numéricos de subespaço para identificação de sistemas no espaço de estados (N4SID do inglês *Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification*) são vistos como alternativas melhores. Isto é especialmente verdadeiro para sistemas multivariáveis e de alta ordem (VAN OVERSCHEE; DE MOOR, 1994).

Em geral, em algoritmos clássicos de identificação é necessário se conhecer a priori a ordem do modelo e os índices de observabilidade ou controlabilidade (LJUNG, 1987). Com algoritmos N4SID somente a ordem do modelo é requerida. Nestes algoritmos a identificação das matrizes no espaço de estados não é em formas canônicas (com um número mínimo de parâmetros), mas como matrizes cheias e em uma determinada base quase otimamente condicionada. Isto significa que os índices de observabilidade e controlabilidade não precisam ser conhecidos a priori.

A origem do nome subespaço é o fato de que os modelos lineares podem ser obtidos a partir do espaço de linhas e colunas de certas matrizes de dados. O espaço de colunas de cada matriz de dados contém informações sobre o modelo, enquanto o espaço de linhas permite obter as seqüências de estados do filtro de Kalman diretamente dos dados de saída. Este nome surgiu na teoria de controle e define o grupo de métodos de identificação que compõem a classe de problemas denominada realização estocástica (NUNES JR., 2006). O espaço de linhas de uma matriz é o subespaço gerado pelas linhas da matriz considerada como um conjunto de vetores. O espaço de colunas é similar, ou seja, é o subespaço gerado pelas colunas da matriz considerada como um conjunto de vetores. Um subconjunto  $W \in \mathbb{R}^n$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  sempre que: se  $x \in W$  e  $y \in W$  implica que  $(x + y) \in W$  e, se  $x \in W$  e  $k \in K$  (corpo de escalares), implica que  $kx \in W$ .

A identificação do sistema utilizando o método de subespaço é baseada na realização de espaço de estados na forma discreta, como mostra a equação (2.46).

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) \tag{2.46}$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_d \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d \mathbf{u}(k)$$

onde  $\mathbf{u}(k)$  e  $\mathbf{y}(k)$  são os vetores de entrada e saída medidos;  $\mathbf{D}_d$  é a matriz de transmissão direta e  $k = 1, \dots, n_p$ ; sendo  $n_p$  o número de pontos. O subíndice  $d$  indica que as matrizes do sistema são as do modelo no espaço de estados na forma discreta.

Com isto o problema em questão pode ser definido: dado um conjunto de dados medidos  $u_1, \dots, u_N$  e  $y_1, \dots, y_N$ , com  $N \rightarrow \infty$ , geradas a partir de um modelo desconhecido, encontrar as matrizes  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{B}_d$ ,  $\mathbf{C}_d$  e  $\mathbf{D}_d$ . Para isto são definidas matrizes estendidas de observabilidade e controlabilidade associadas a este sistema. A matriz de observabilidade estendida  $\mathbf{\Gamma}_i$  (onde o subíndice  $i$  denota o número de linhas) é dada por

$$\mathbf{\Gamma}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-1} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

E a matriz de controlabilidade estendida  $\Delta_i$  (onde o subíndice  $i$  denota o número de colunas) é dada por

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d^{i-2} \mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Com isto, a matriz triangular de Toeplits  $\mathbf{H}_i$ , pode ser escrita como mostrado a seguir

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{D}_d & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{D}_d & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-2} \mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-3} \mathbf{B}_d & \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-4} \mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{D}_d \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

As matrizes de Hankel para a entrada e para saída, respectivamente, são dadas por:

$$\mathbf{U}_{0|i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_{j-1} \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \cdots & \mathbf{u}_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{u}_{i-1} & \mathbf{u}_i & \mathbf{u}_{i+1} & \cdots & \mathbf{u}_{i+j-2} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{Y}_{0|i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \cdots & \mathbf{y}_{j-1} \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \cdots & \mathbf{y}_j \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}_{i-1} & \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{i+j-2} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

com  $j \rightarrow \infty$ .

As entradas “passadas” são denotadas por  $\mathbf{U}_{0|i-1}$  ou  $\mathbf{U}_{0|i}$  e as entradas “futuras” são denotadas por  $\mathbf{U}_{i|2i-1}$  ou  $\mathbf{U}_{i+1|2i-1}$ . Uma notação similar é usada para as saídas “passadas” e “futuras”. A matriz de estados é definida por

$$\mathbf{X}_i = [\mathbf{x}_i \quad \mathbf{x}_{i+1} \quad \mathbf{x}_{i+2} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{i+j-1}] \quad (2.52)$$

As equações das matrizes de entrada e saída são definidas como mostrado a seguir. O teorema com a prova destas equações é apresentado em De Moor (1988) e é baseado na substituição das matrizes de entrada e saída na equação do espaço de estados.

$$\mathbf{Y}_{0|i-1} = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X}_0 + \mathbf{H}_i \mathbf{U}_{0|i-1} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{Y}_{i|2i-1} = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{H}_i \mathbf{U}_{i|2i-1} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{A}_d^i \mathbf{X}_0 + \Delta_i \mathbf{U}_{0|i-1} \quad (2.55)$$

O próximo passo é a definição da projeção das saídas futuras sobre as entradas passadas e futuras e sobre as saídas passadas. Este resultado pode ser descrito em função das matrizes do sistema e das matrizes de Hankel das entradas e das saídas. As matrizes  $\mathbf{Z}_i$  and  $\mathbf{Z}_{i+1}$  são definidas como

$$\mathbf{Z}_i = \mathbf{Y}_{i|2i-1} / \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i-1} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$\mathbf{Z}_{i+1} = \mathbf{Y}_{i+1|2i-1} / \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

onde  $\mathbf{F}/\mathbf{R}_{n4sid} = \mathbf{F}\mathbf{R}_{n4sid}^T (\mathbf{R}_{n4sid}\mathbf{R}_{n4sid}^T)^{-1} \mathbf{R}_{n4sid}$ . Uma linha de  $\mathbf{F}/\mathbf{R}_{n4sid}$  é igual à projeção de uma linha de  $\mathbf{F}$  sobre uma linha de  $\mathbf{R}_{n4sid}$ , considerando:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Y}_{i|2i-1} \quad \text{ou} \quad \mathbf{Y}_{i+1|2i-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_{n4sid} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i-1} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i} \end{bmatrix}$$

A equação (2.56) corresponde à predição ótima de  $\mathbf{Y}_{i|2i-1}$  dado  $\mathbf{U}_{0|2i-1}$  e  $\mathbf{Y}_{0|i-1}$  desde que  $\|\mathbf{Y}_{i|2i-1} - \mathbf{Z}_i\|_{\mathbf{F}}^2$  é minimizado considerando

$$\mathbf{Z}_i \in \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i-1} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Intuitivamente, a  $k$ -ésima linha de  $\mathbf{Z}_i$  corresponderia a predição do  $k$ -ésimo seguinte passo da saída. Estas projeções ( $\mathbf{Z}_i$  e  $\mathbf{Z}_{i+1}$ ) são úteis na determinação do sistema, desde que as combinações lineares a serem feitas com as matrizes de Hankel das entradas-saídas para gerar as matrizes  $\mathbf{Z}_i$  e  $\mathbf{Z}_{i+1}$  sejam funções das matrizes  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{B}_d$ ,  $\mathbf{C}_d$  e  $\mathbf{D}_d$  do sistema.

### 2.5.1 Esquema da Identificação

Nesta seção é apresentada a utilização do algoritmo N4SID para a obtenção das matrizes do sistema diretamente a partir das entradas  $\mathbf{u}(k)$  e das saídas  $\mathbf{y}(k)$ . Maiores detalhes podem ser obtidos em Van Overschee e De Moor (1996).

As projeções das saídas futuras sobre as entradas passadas e futuras e saídas passadas podem ser descritas como uma função das matrizes do sistema e das matrizes de Hankel das entradas e das saídas. Primeiramente, as projeções  $\mathbf{Z}_i$  e  $\mathbf{Z}_{i+1}$  devem ser calculadas a partir equações (2.56) e (2.57). Isto permite calcular  $\mathbf{\Gamma}_i$  e  $\mathbf{\Gamma}_{i+1}$  e a ordem  $n$  do sistema como se segue: seja  $\mathbf{T}$  alguma matriz cujo posto coincide com o de  $\mathbf{\Gamma}_i$ .

- Calcular a decomposição de valores singulares (SVD do inglês *Singular Value Decomposition*):

$$\mathbf{T} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \sum_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{V}^t \quad (2.59)$$

onde  $\mathbf{U}_{n4sid} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2]$  e  $\mathbf{V}$  são matrizes ortogonais e  $\sum$  é uma matriz diagonal, cujo seus elementos são chamados de valores singulares da matriz  $\mathbf{T}$ .

- Desde que  $\mathbf{T}$  seja de posto  $n$ , o número de valores singulares diferentes de zero será igual à ordem do sistema.
- Os espaços da coluna de  $\mathbf{\Gamma}_i$  e  $\mathbf{U}_1 \sum_1^{1/2}$  coincidem. Então,  $\mathbf{\Gamma}_i$  pode ser adotada como  $\mathbf{U}_1 \sum_1^{1/2}$ .

O fator  $\mathbf{U}_1 \sum_1^{1/2}$  é introduzido por razões de simetria (VAN OVERSCHEE; DE MOOR, 1994).

- Define-se  $\underline{\mathbf{\Gamma}}_i$  como  $\mathbf{\Gamma}_i$  sem as últimas  $r$  linhas ( $r$  é o número de saídas), então:

$$\Gamma_{i-1} = \underline{\Gamma}_i \quad (2.60)$$

Para a determinação das matrizes do sistema é considerando que  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_{i-1}$  e  $n$  foram determinados como descrito anteriormente, e, assim, então são conhecidos. Com isto, pode-se definir  $\hat{\mathbf{X}}_i$  e  $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$ :

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \Gamma_i^\uparrow [\mathbf{Z}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{U}_{i|2i-1}] \quad (2.61)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{i+1} = \Gamma_{i-1}^\uparrow [\mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{H}_{i-1} \mathbf{U}_{i+1|2i-1}] \quad (2.62)$$

onde  $\Gamma^\uparrow$  denota a pseudo-inversa Morre-Penrose. Nestas equações apenas  $\mathbf{H}_i$  e  $\mathbf{H}_{i-1}$  são desconhecidos.

Desde que as colunas correspondentes de  $\hat{\mathbf{X}}_i$  e  $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$  são os estados estimados (nas mesmas condições iniciais) em dois instantes de tempo consecutivos (VAN OVERSCHEE; DE MOOR, 1996), então:

$$\hat{\mathbf{X}}_{i+1} = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{X}}_i + \mathbf{B}_d \mathbf{U}_{i|i} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i-1} \\ \hat{\mathbf{X}}_i \end{bmatrix}^\perp \quad (2.63)$$

$$\mathbf{Y}_{i|i} = \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{X}}_i + \mathbf{D}_d \mathbf{U}_{i|i} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0|2i-1} \\ \mathbf{Y}_{0|i-1} \\ \hat{\mathbf{X}}_i \end{bmatrix}^\perp \quad (2.64)$$

A partir das equações (2.63) e (2.64) é possível escrever:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d \\ \mathbf{D}_d \end{bmatrix} \mathbf{U}_{i|i} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0|2i-1} \\ \mathbf{Z}_i \\ \hat{\mathbf{X}}_i \end{bmatrix}^\perp \quad (2.65)$$

$[\cdot]^\perp$  indica uma matriz cujo o espaço de linhas seja perpendicular ao espaço de linhas de  $[\cdot]$ .

Substituindo as equações (2.61) e (2.62) na equação (2.65) se obtém

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{i-1}^\uparrow \mathbf{Z}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \end{bmatrix}}_{\text{termo 1}} \Gamma_i^\uparrow \mathbf{Z}_i + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}}_{\text{termo 2}} \mathbf{U}_{i|2i-1} + \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{0|2i-1} \\ \mathbf{Z}_i \\ \hat{\mathbf{X}}_i \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \kappa_{12} \\ \kappa_{22} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d - \mathbf{A}_d \Gamma_i^\uparrow \left[ \frac{\mathbf{D}_d}{\Gamma_{i-1} \mathbf{B}_d} \right] \Gamma_{i-1}^\uparrow \mathbf{H}_{i-1} - \mathbf{A}_d \Gamma_i^\uparrow \left[ \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{H}_{i-1}} \right] \\ \mathbf{D}_d - \mathbf{C}_d \Gamma_i^\uparrow \left[ \frac{\mathbf{D}_d}{\Gamma_{i-1} \mathbf{B}_d} \right] - \mathbf{C}_d \Gamma_i^\uparrow \left[ \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{H}_{i-1}} \right] \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Observe que as matrizes  $\mathbf{B}_d$  e  $\mathbf{D}_d$  aparecem linearmente nas matrizes  $\kappa_{12}$  e  $\kappa_{22}$ .

Seja  $\mathbf{\Pi}$  a matriz que os espaços de linhas coincidam com as de

$$\begin{bmatrix} \Gamma_i^\uparrow \mathbf{Z}_i \\ \mathbf{U}_{il2i-1} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Então, a partir de (2.66)

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{i-1}^\uparrow \mathbf{Z}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{ii} \end{bmatrix} / \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \kappa_{12} \\ \mathbf{C}_d & \kappa_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_i^\uparrow \mathbf{Z}_i \\ \mathbf{U}_{il2i-1} \end{bmatrix} / \mathbf{\Pi} \quad (2.69)$$

Este é um conjunto de equações lineares com as incógnitas  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{C}_d$ ,  $\kappa_{12}$  e  $\kappa_{22}$ , mas também, a resolução pode ser obtida considerando um problema de mínimos quadrados:

$$\min(\mathbf{A}_d, \mathbf{C}_d, \kappa_{12}, \kappa_{22}) \left\| \begin{bmatrix} \Gamma_{i-1}^\uparrow \mathbf{Z}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{ii} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \kappa_{12} \\ \mathbf{C}_d & \kappa_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_i^\uparrow \mathbf{Z}_i \\ \mathbf{U}_{il2i-1} \end{bmatrix} \right\| \quad (2.70)$$

Outra maneira é, a partir de (2.66), pode-se encontrar termo por termo (termo 1):  $\mathbf{A}_d$  e  $\mathbf{C}_d$  exatas; (termo 2):  $\kappa_{12}$ ,  $\kappa_{22}$  a partir das quais  $\mathbf{B}_d$  e  $\mathbf{D}_d$  podem ser obtidas resolvendo um conjunto de equações lineares análogo ao descrito em (2.69), De Moor (1988). Note que, em (2.67),  $\mathbf{B}_d$  e  $\mathbf{D}_d$  aparecem linearmente. Assim, se  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{C}_d$ ,  $\Gamma_i$ ,  $\Gamma_{i-1}$ ,  $\kappa_{12}$  e  $\kappa_{22}$  são conhecidos, resolver para  $\mathbf{B}_d$  e  $\mathbf{D}_d$  é equivalente a resolver um conjunto de equações lineares. Em particular, por não ser objetivo de trabalho, o algoritmo N4SID não foi implementado. Foi utilizado o algoritmo disponível no programa “ident” do *software* Matlab<sup>®</sup>. Para projetar os controladores, as matrizes do sistema identificadas pelo método de subespaço foram convertidas para a forma contínua através do comando “d2c” do *software* Matlab<sup>®</sup>.

## **CAPÍTULO 3. POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES E ATUADORES**

Neste capítulo são apresentadas duas metodologias de posicionamento ótimo de sensores e atuadores. A primeira utilizada como índice de desempenho de atuadores e sensores as normas de sistemas  $H_2$ ,  $H_\infty$  e Hankel. A segunda metodologia, bastante conhecida na literatura, envolve as matrizes gramianas de observabilidade e controlabilidade para posicionar sensores e atuadores, respectivamente. Ainda, é apresentada a matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio que permite avaliar a influência de distúrbios externos sobre a estrutura base na localização ótima dos sensores/atuadores (MIRZA; NIEKERK, 1999). Neste trabalho é utilizado o traço da matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio como índice de desempenho, diferentemente do proposto por Mirza e Niekerk (BUENO et al., 2005a).

Envolvendo as normas de sistemas é apresentada a configuração geral do problema de posicionamento ótimo de sensores e atuadores. Nesta situação são levadas em consideração saídas de desempenho (ou saídas reguladas) a distúrbios externos sobre a estrutura.

### **3.1 NORMAS DE SISTEMAS**

Normas de sistemas são “tamanhos” de medidas de sistemas e podem ser utilizadas para diversas aplicações. Em geral, para aplicações de engenharia é necessário escolher estrategicamente quais propriedades ou parâmetros estruturais são mais interessantes para se calcular uma norma. Para estruturas flexíveis, a norma  $H_\infty$  corresponde ao maior pico da função de resposta em frequência (FRF) e a norma  $H_2$  corresponde à área sob a curva da mesma função (GAWRONSKI, 1998).

Entre as aplicações das normas de sistemas pode-se destacar a utilização para localização de falhas estruturais (GAWRONSKI; SAWICKI, 2000; CORDEIRO et al., 2006; MARQUI et al., 2006b), redução de modelos (GAWRONSKI; JUANG, 1990; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2001; MAHMOUD et al., 2002), controle (MUSTAFA; GLOVER, 1991; MOREIRA, 1998; BURL, 1999; CERNA, 2001; BUENO et al., 2006a; BUENO et al., 2006b; BUENO et al., 2006c) e posicionamento de sensores e atuadores (GAWRONSKI, 1998; PANOSSIAN et al., 1998; SILVA, 2005, BUENO et al., 2005b; BUENO et al., 2006d).

### 3.1.1 A Norma $H_\infty$

Um sistema dinâmico é “pequeno” caso sua função de transferência  $G(\omega)$  possua pequenas magnitudes em todos os seus modos. Uma norma que quantifica esta medida para sistemas SISO é a chamada norma  $H_\infty$  de  $G(\omega)$ . Considerando um sistema estável, a norma  $H_\infty$  é definida como:

$$\|G\|_\infty = \max_{\omega} \sigma_{\max}(G(\omega)) \quad (3.1)$$

sendo  $\sigma_{\max}(G(\omega))$  o maior valor singular de  $G(\omega)$ . A norma do sistema SISO é a magnitude do maior pico da função de transferência  $G(\omega)$  em termos de valores singulares.

A norma  $H_\infty$  do *i-ésimo* modo natural ( $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$ ) ou  $(\omega_i, \zeta_i, b_i, c_i)$  pode ser estimada através da seguinte equação (GAWRONSKI, 1998):

$$\|G_i\|_\infty \cong \frac{\|\mathbf{B}_i\|_2 \|\mathbf{C}_i\|_2}{2\zeta_i \omega_i} \cong \frac{\|b_i\|_2 \|c_i\|_2}{2\zeta_i \omega_i} \quad (3.2)$$

A norma  $H_\infty$  do sistema todo corresponde a maior norma de todos os modos (GAWRONSKI, 1998):

$$\|G\|_\infty = \max_i \|G_i\|_\infty, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

onde  $n$  é o número de modos.

Outra maneira de se calcular a norma  $H_\infty$  é via LMI. Boyd et al. (1994b) demonstram detalhadamente como computar este cálculo. A norma  $H_\infty$  pode ser encontrada a partir do seguinte problema de otimização convexa:

$$\begin{aligned} & \|G\|_\infty = \min \mu \\ \text{sujeito à } & \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C} \mathbf{C}^T & \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} & -\mu \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ & \mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad \mu > 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo  $\mathbf{P}$  é uma matriz simétrica positiva definida e  $\mu$  um escalar. Em Assunção e Teixeira (2001) há uma subrotina para computar esta norma com o auxílio do LMI *toolbox* do Matlab<sup>®</sup>.

A norma  $H_\infty$  do *i-ésimo* modo de uma estrutura com um conjunto  $s$  de atuadores é a soma RMS das normas dos modos para cada atuador separadamente, ou seja:

$$\|G_i\|_\infty = \sqrt{\sum_{j=1}^s \|G_{ij}\|_\infty^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

Da mesma forma a norma  $H_\infty$  do  $i$ -ésimo modo de uma estrutura com um conjunto  $r$  de sensores é a soma RMS das normas dos modos para cada sensor separadamente, ou seja:

$$\|G_i\|_\infty = \sqrt{\sum_{k=1}^r \|G_{ki}\|_\infty^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

### 3.1.1.1 Índice e Matrizes de Posicionamento $H_\infty$

O índice de posicionamento  $\sigma_{\infty ki}$  que avalia o  $k$ -ésimo atuador no  $i$ -ésimo modo em termos da norma  $H_\infty$  é definido para todos os modos e todas as localizações candidatas possíveis:

$$\sigma_{\infty ki} = w_{ki} \frac{\|G_{ki}\|_\infty}{\|G\|_\infty}, \quad k = 1, \dots, S \quad i = 1, \dots, n \quad (3.7)$$

sendo  $w_{ki} \geq 0$  o peso para o  $k$ -ésimo atuador e para o  $i$ -ésimo modo. Usando estes índices, pode-se definir uma matriz de posicionamento do atuador:

$$\sum_a = \begin{bmatrix} \sigma_{\infty 11} & \sigma_{\infty 12} & \cdots & \sigma_{\infty 1k} & \cdots & \sigma_{\infty 1S} \\ \sigma_{\infty 21} & \sigma_{\infty 22} & \cdots & \sigma_{\infty 2k} & \cdots & \sigma_{\infty 2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\infty i1} & \sigma_{\infty i2} & \cdots & \sigma_{\infty ik} & \cdots & \sigma_{\infty iS} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\infty n1} & \sigma_{\infty n2} & \cdots & \sigma_{\infty nk} & \cdots & \sigma_{\infty nS} \end{bmatrix} \leftarrow i \text{-ésimo modo} \quad (3.8)$$

↑↑

k -ésimo atuador

A  $i$ -ésima linha desta matriz corresponde ao  $i$ -ésimo modo e  $k$ -ésima coluna ao  $k$ -ésimo atuador. O procedimento para o índice de posicionamento do sensor  $\sigma_{\infty ki}$  é similar e avalia o  $k$ -ésimo sensor no  $i$ -ésimo modo em termos de norma  $H_\infty$ :

$$\sigma_{\infty ki} = w_{ki} \frac{\|G_{ki}\|_\infty}{\|G\|_\infty}, \quad k = 1, \dots, R \quad i = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

sendo  $w_{ki} \geq 0$  o peso para o  $k$ -ésimo sensor e para o  $i$ -ésimo modo. Usando estes índices, pode-se definir uma matriz de posicionamento do sensor:

$$\sum_s = \begin{bmatrix} \sigma_{\infty 11} & \sigma_{\infty 12} & \cdots & \sigma_{\infty 1k} & \cdots & \sigma_{\infty 1R} \\ \sigma_{\infty 21} & \sigma_{\infty 22} & \cdots & \sigma_{\infty 2k} & \cdots & \sigma_{\infty 2R} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\infty i1} & \sigma_{\infty i2} & \cdots & \sigma_{\infty ik} & \cdots & \sigma_{\infty iR} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\infty n1} & \sigma_{\infty n2} & \cdots & \sigma_{\infty nk} & \cdots & \sigma_{\infty nR} \end{bmatrix} \leftarrow i - \text{ésimo modo}$$

↑

k - étimo sensor

(3.10)

A  $i$ -ésima linha desta matriz corresponde ao  $i$ -ésimo modo e  $k$ -ésima coluna ao  $k$ -ésimo sensor.

### 3.1.2 A Norma $H_2$

Considerando  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  a representação em espaço de estados de um sistema onde a função de transferência  $G$  é dada por:

$$G(\omega) = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.11)$$

A norma  $H_2$  do sistema é definida por:

$$\|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(G^*(\omega)G(\omega))d\omega \quad (3.12)$$

onde  $tr$  é o traço da matriz.

Uma maneira conveniente de determinar o valor numérico é através das equações:

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{W}_c)} \quad (3.13a)$$

$$\|G\|_2 = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{W}_o)} \quad (3.13b)$$

onde  $\mathbf{W}_c$  e  $\mathbf{W}_o$  são as matrizes gramianas de contrabilidade e observabilidade já definidas na seção 2.3.

Define-se  $\Delta\omega_i$  como meia potência da  $i$ -ésima frequência de ressonância (CLOUGH; PENZIEN, 1975; EWINS, 1984), com  $\Delta\omega_i = 2\zeta_i\omega_i$  sendo  $\zeta_i$  o  $i$ -ésimo fator de amortecimento e  $\omega_i$  a

$i$ -ésima frequência natural. Tal variável corresponde à área limitada por  $\|G_i\|_\infty / \sqrt{2}$  onde  $\|G_i\|_\infty$  é o valor da norma  $H_\infty$  do  $i$ -ésimo modo (GAWRONSKI, 1998).

Considerando  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i)$  a representação em espaço de estados do  $i$ -ésimo modo de um sistema, é possível aproximar a norma  $H_2$  por (GAWRONSKI, 1998):

$$\|G_i\|_2 \cong \frac{\|\mathbf{B}_i\|_2 \|\mathbf{C}_i\|_2}{2\sqrt{\zeta_i \omega_i}} \cong \frac{\|\mathbf{B}_i\|_2 \|\mathbf{C}_i\|_2}{\sqrt{2\Delta\omega_i}} \cong \gamma_i \sqrt{2\Delta\omega_i} \quad (3.14)$$

onde  $\gamma_i$  é o valor singular, assim, reescrevendo as equações, a norma  $H_2$  associada ao  $i$ -ésimo modo pode ser calculada por (GAWRONSKI, 1998):

$$\|G_i\|_2 \cong \sqrt{\text{tr}(\mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{W}_{ci})} \cong (\|\mathbf{B}_i\|_2 \|\mathbf{C}_i\|_2) / (2\sqrt{\zeta_i \omega_i}) \quad (3.15)$$

Uma vez calculada a norma para cada modo, a norma  $H_2$  do sistema pode ser obtida pela soma RMS de todos os modos, onde  $n$  é o número total de modos.

$$\|G\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|G_i\|_2^2} \quad (3.16)$$

Prova: desde que a matriz grammiana de controlabilidade em coordenadas modais seja diagonalmente dominante, a norma  $H_2$  é dada por (GAWRONSKI, 1998):

$$\|G\|_2^2 = \text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{W}_c) \cong \sum_{i=1}^n \text{tr}(\mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{W}_{ci}) = \sum_{i=1}^n \|G_i\|_2^2 \quad (3.17)$$

A norma  $H_2$  também pode ser calculada via LMI. Assunção et al. (2002) mostram que a norma  $H_2$  do sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  pode ser obtida resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$\|G\|_2^2 = \min \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{R}_2 \mathbf{C}^T) \quad (3.18)$$

sujeito à  $\mathbf{A} \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_2 \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \mathbf{B}^T < 0$  com  $\mathbf{R}_2 > 0$

onde  $\mathbf{R}_2$  é uma matriz simétrica positiva definida.

Assim como para a norma  $H_\infty$ , a norma  $H_2$  para um sistema com mais de um atuador, ou sensor, é a soma RMS das normas para o sistema com cada um deles separadamente.

### 3.1.2.1 Índice e Matrizes de Posicionamento $H_2$

O índice de posicionamento  $\sigma_{2ki}$  que avalia o  $k$ -ésimo atuador no  $i$ -ésimo modo em termos da norma  $H_2$  é definido para todos os modos e todas as localizações candidatas possíveis:

$$\sigma_{2ki} = w_{ki} \frac{\|G_{ki}\|_2}{\|G\|_2}, \quad k = 1, \dots, S \quad i = 1, \dots, n \quad (3.19)$$

sendo  $w_{ki} \geq 0$  o peso para o  $k$ -ésimo atuador e para o  $i$ -ésimo modo. Usando estes índices pode-se definir uma matriz de posicionamento do atuador:

$$\sum_a = \begin{matrix} \begin{bmatrix} \sigma_{211} & \sigma_{212} & \cdots & \sigma_{21k} & \cdots & \sigma_{21S} \\ \sigma_{221} & \sigma_{222} & \cdots & \sigma_{22k} & \cdots & \sigma_{22S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{2i1} & \sigma_{2i2} & \cdots & \sigma_{2ik} & \cdots & \sigma_{2iS} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{2n1} & \sigma_{2n2} & \cdots & \sigma_{2nk} & \cdots & \sigma_{2nS} \end{bmatrix} & \leftarrow i\text{-ésimo modo} \\ \uparrow \\ k\text{-ésimo atuador} \end{matrix} \quad (3.20)$$

A  $i$ -ésima linha desta matriz corresponde ao  $i$ -ésimo modo e  $k$ -ésima coluna ao  $k$ -ésimo atuador. O procedimento para o índice de posicionamento do sensor  $\sigma_{2ki}$  é similar e avalia o  $k$ -ésimo sensor no  $i$ -ésimo modo em termos de norma  $H_2$ :

$$\sigma_{2ki} = w_{ki} \frac{\|G_{ki}\|_2}{\|G\|_2}, \quad k = 1, \dots, R \quad i = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

sendo  $w_{ki} \geq 0$  o peso para o  $k$ -ésimo sensor e para o  $i$ -ésimo modo. Usando estes índices pode-se definir uma matriz de posicionamento do sensor:

$$\sum_s = \begin{bmatrix} \sigma_{211} & \sigma_{212} & \cdots & \sigma_{21k} & \cdots & \sigma_{21R} \\ \sigma_{221} & \sigma_{222} & \cdots & \sigma_{22k} & \cdots & \sigma_{22R} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{2i1} & \sigma_{2i2} & \cdots & \sigma_{2ik} & \cdots & \sigma_{2iR} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{2n1} & \sigma_{2n2} & \cdots & \sigma_{2nk} & \cdots & \sigma_{2nR} \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ésimo modo}$$

↑

k - ésimo sensor

(3.22)

A *i-ésima* linha desta matriz corresponde ao *i-ésimo* modo e *k-ésima* coluna ao *k-ésimo* sensor.

### 3.1.3 A Norma Hankel

A norma Hankel de um sistema é a medida do efeito entrada e saída ou a soma da energia armazenada e, subseqüentemente retirada do sistema. Pode ser calculada por:

$$\|G\|_h = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{W}_c \mathbf{W}_o)} \quad (3.23)$$

onde  $G$  é a função de transferência do sistema,  $\lambda_{\max}(\cdot)$  denota o maior autovalor e  $\mathbf{W}_c$  e  $\mathbf{W}_o$  são as matrizes grammianas de controlabilidade e observabilidade, respectivamente. Da definição de valores singulares segue que a norma Hankel do sistema é o maior valor singular do sistema,  $\gamma_{\max}$ .

$$\|G\|_h = \gamma_{\max} \quad (3.24)$$

Considerando  $(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i)$  a representação em espaço de estados do *i-ésimo* modo de um sistema ou  $(\omega_i, \zeta_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i)$  o correspondente de segunda ordem, a norma Hankel deste modo é dada por:

$$\|G_i\|_h = \gamma_i \cong \frac{\|\mathbf{B}_i\|_2 \|\mathbf{C}_i\|_2}{4\zeta_i \omega_i} = \frac{\|\mathbf{b}_i\|_2 \|\mathbf{c}_i\|_2}{4\zeta_i \omega_i} \quad (3.25)$$

onde  $\mathbf{b}_i$  é a *i-ésima* linha de  $\mathbf{B}_m$  e  $\mathbf{c}_i$  é a *i-ésima* coluna de  $\mathbf{C}_m$ .

A norma Hankel do sistema é o máximo valor obtido em todos os modos analisados:

$$\|G\|_h = \max \|G_i\|_h = \gamma_{\max} \quad (3.26)$$

onde  $\gamma_{\max}$  é o maior valor singular do sistema.

A partir das equações (3.2) e (3.25) é possível verificar que a norma Hankel corresponde à metade da norma  $H_\infty$ , tanto para cada modo quanto para o sistema (GAWRONSKI, 1998).

$$\|G\|_h = 0,5 \|G\|_\infty \quad (3.27)$$

Assim como para as normas  $H_\infty$  e  $H_2$ , a norma Hankel para um sistema com mais de um sensor, ou atuador, é a soma RMS para cada um deles separadamente.

Ainda, a norma Hankel também pode ser calculada via LMI. Boyd et al. (1994b) mostram que a norma Hankel do sistema é menor que  $\gamma_h$  se e somente se for satisfeita a seguinte LMI

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \leq 0 \\ \gamma_h^2 \mathbf{I} - \mathbf{W}_c^{1/2} \mathbf{Q} \mathbf{W}_c^{1/2} \geq 0, \quad \mathbf{Q} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde  $\mathbf{W}_c$  é a matriz gramiana de controlabilidade,  $\mathbf{Q}$  é uma matriz positiva definida e  $\gamma_h$  é um escalar. Note que  $\mathbf{D} = 0$ , ou seja, a entrada é transmitida diretamente para a saída.

### 3.1.3.1 Índice e Matrizes de Posicionamento Hankel

O índice de posicionamento  $\sigma_{hki}$  que avalia o  $k$ -ésimo atuador no  $i$ -ésimo modo em termos da norma Hankel é definido para todos os modos e todas as localizações candidatas possíveis:

$$\sigma_{hki} = w_{ki} \frac{\|G_{ki}\|_h}{\|G\|_h}, \quad k = 1, \dots, S \quad i = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

sendo  $w_{ki} \geq 0$  o peso para o  $k$ -ésimo atuador e para o  $i$ -ésimo modo. Usando estes índices pode-se definir uma matriz de posicionamento do atuador:

$$\sum_a = \begin{bmatrix} \sigma_{h11} & \sigma_{h12} & \cdots & \sigma_{h1k} & \cdots & \sigma_{h1S} \\ \sigma_{h21} & \sigma_{h22} & \cdots & \sigma_{h2k} & \cdots & \sigma_{h2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{hi1} & \sigma_{hi2} & \cdots & \sigma_{hik} & \cdots & \sigma_{hiS} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{hn1} & \sigma_{hn2} & \cdots & \sigma_{hnk} & \cdots & \sigma_{hnS} \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ésimo modo} \quad (3.30)$$

↑

k - ésimos atuador

A *i-ésima* linha desta matriz corresponde ao *i-ésimo* modo e *k-ésima* coluna ao *k-ésimo* atuador. O procedimento para o índice de posicionamento do sensor  $\sigma_{hki}$  é similar e avalia o *k-ésimo* sensor no *i-ésimo* modo em termos de norma Hankel:

$$\sigma_{hki} = w_{ki} \frac{\|G_{ki}\|_h}{\|G\|_h}, \quad k = 1, \dots, R \quad i = 1, \dots, n \quad (3.31)$$

sendo  $w_{ki} \geq 0$  o peso para o *k-ésimo* sensor e para o *i-ésimo* modo. Usando estes índices, pode-se definir uma matriz de posicionamento do sensor:

$$\sum_s = \begin{bmatrix} \sigma_{h11} & \sigma_{h12} & \cdots & \sigma_{h1k} & \cdots & \sigma_{h1R} \\ \sigma_{h21} & \sigma_{h22} & \cdots & \sigma_{h2k} & \cdots & \sigma_{h2R} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{hi1} & \sigma_{hi2} & \cdots & \sigma_{hik} & \cdots & \sigma_{hiR} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{hn1} & \sigma_{hn2} & \cdots & \sigma_{hnk} & \cdots & \sigma_{hnR} \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ésimo modo} \quad (3.32)$$

↑

k - ésimos sensor

A *i-ésima* linha desta matriz corresponde ao *i-ésimo* modo e *k-ésima* coluna ao *k-ésimo* sensor.

### 3.1.4 Índice de Atuador/Sensor e índice de modos

A matriz de posicionamento fornece as propriedades de localização de cada atuador. O índice de posicionamento do *k-ésimo* atuador é determinado pela soma RMS da *k-ésima* coluna da matriz de posicionamento para a norma  $H_2$ . O vetor de índice de posicionamento do atuador é definido por:

$$\sigma_a = [\sigma_{a1} \quad \sigma_{a2} \quad \cdots \quad \sigma_{aS}]^T \quad (3.33)$$

e é o  $k$ -ésimo entre os índices de posicionamento do  $k$ -ésimo atuador. No caso do índice envolvendo a norma Hankel ou  $H_\infty$ , é o maior índice sobre todos os modos, ou seja:

$$\sigma_{ak} = \max_i (\sigma_{ik}) \quad i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, S \quad (3.34)$$

De maneira similar o vetor de índice de posicionamento do sensor é definido como:

$$\sigma_s = [\sigma_{s1} \quad \sigma_{s2} \quad \cdots \quad \sigma_{sR}]^T \quad (3.35)$$

No caso do índice envolvendo a norma Hankel ou  $H_\infty$ , é o maior índice sobre todos os modos, ou seja:

$$\sigma_{sk} = \max_i (\sigma_{ik}) \quad i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, R \quad (3.36)$$

O vetor de índice dos modos por sua vez é definido da seguinte forma:

$$\sigma_m = [\sigma_{m1} \quad \sigma_{m2} \quad \cdots \quad \sigma_{mn}]^T \quad (3.36)$$

Estes índices podem ser determinados como sendo a soma RMS do  $i$ -ésimo modo sobre todos os atuadores:

$$\sigma_{mi} = \sqrt{\sum_{k=1}^S \sigma_{ik}^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.37)$$

ou a soma RMS do  $i$ -ésimo modo sobre todos os sensores:

$$\sigma_{mi} = \sqrt{\sum_{k=1}^R \sigma_{ik}^2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.38)$$

Das propriedades e equações acima, constata-se que o índice  $\sigma_{ak}$  ( $\sigma_{sk}$ ) caracteriza a importância do  $k$ -ésimo atuador (sensor), assim este índice pode ser usado como um índice de posicionamento de atuador (sensor). Por outro lado, os índices de atuadores (sensores) com valor pequeno  $\sigma_{ak}$  ( $\sigma_{sk}$ ) podem ser removidos por terem participação insignificante.

O índice modal  $\sigma_{mi}$  também pode ser usado. Este índice caracteriza a importância do  $i$ -ésimo modo para uma dada localização de sensores e atuadores. Os modos com normas menos significativas (ou seja, com valores pequenos do índice  $\sigma_{mi}$ ) podem ser eliminados da escolha de melhor posicionamento.

## 3.2 ESTRATÉGIAS PARA O POSICIONAMENTO DE SENSORES/ATUADORES

Os atuadores devem ser posicionados em localizações para excitar os modos de interesse mais eficientemente. O problema de localização ótima de sensores e atuadores consiste em determinar o posicionamento de um pequeno conjunto de atuadores e sensores tal que a norma  $H_2$ ,  $H_\infty$  ou Hankel do sistema seja o mais próximo da norma do sistema completo. Ainda, também como índice de desempenho, é considerado a maximização dos gramianos de observabilidade e controlabilidade. A metodologia estudada neste trabalho é simples de ser implementada. Outros métodos citados na literatura – como, por exemplo, algoritmos genéticos ou algoritmos baseados em inteligência artificial, não garantem a obtenção de ótimo global para sistemas com um grande número de posições candidatas.

Utiliza-se  $R$  e  $S$  para representarem as localizações candidatas para o sensor e o atuador, respectivamente. O número de posições candidatas é superior ao número de atuadores e sensores disponíveis.

### 3.2.1 Estratégia de Posicionamento de Atuadores

Para posicionar atuadores em localizações ótimas os seguintes passos são seguidos:

1. Localizar o sensor em uma posição qualquer acessível.
2. Baseado em experiências de engenharia, exigências técnicas e restrições físicas selecione as localizações possíveis de atuadores. Com isto  $S$  candidatos de posicionamento de atuadores são selecionados.
3. Para cada modo ( $k$ ), e cada localização ( $i$ ), determinar o índice do posicionamento do atuador  $\sigma_{ak}(i)$ .
4. Para controlar um determinado modo, selecionar a localização ( $i$ ) mais importante (ou seja, com o maior índice  $\sigma_{ak}(i)$ ).
5. Para controlar um determinado número  $n_m$  de modos, geralmente definidos pelo modelo truncado, encontrar o índice  $\sigma_{ak}$  para todos os  $n_m$  modos e cada posição  $k$  candidata ( $k = 1, \dots, S$ ). Definir o número de atuadores necessários ( $a_n$ ) tal que os  $n_m$  sejam controláveis ( $a_n \leq S$ ).

### 3.2.2 Estratégia de Posicionamento de Sensores

Para posicionar sensores em localizações ótimas os seguintes passos são seguidos:

1. Localizar o atuador na posição ótima obtida anteriormente.
2. Baseado em experiências de engenharia, exigências técnicas e restrições físicas selecione as localizações possíveis de sensores. Com isto  $R$  candidatos de posicionamento de sensores são selecionados.
3. Para cada modo ( $k$ ), e cada localização ( $i$ ), determinar o índice do posicionamento do sensor  $\sigma_{sk}(i)$ .
4. Para observar um determinado modo, selecionar a localização ( $i$ ) mais importante (ou seja, com o maior índice  $\sigma_{sk}(i)$ ).
5. Para observar um determinado número  $n_m$  de modos, encontrar o índice  $\sigma_{sk}$  para todos os  $n_m$  modos e cada posição  $k$  candidata ( $k = 1, \dots, R$ ). Definir o número de sensores necessários ( $s_n$ ) tal que os  $n_m$  sejam observáveis ( $s_n \leq R$ ).

### 3.3 CONFIGURAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES/ATUADORES

A mais simples e direta resolução do problema do posicionamento ótimo de sensores e atuadores objetivando atenuar o efeito de distúrbios e atingir saídas com desempenhos pré-definidas é colocando os atuadores nas regiões de ação dos distúrbios e os sensores nas áreas que se deseja um determinado desempenho. No entanto, isso raramente é possível por razões técnicas e econômicas (GAWRONSKI, 1997). Conseqüentemente, atuadores e sensores devem ser estrategicamente posicionados buscando atingir o desempenho mais próximo possível do que teriam se fossem colocados como mencionado.

Com isto, um típico problema de posicionamento de sensores e atuadores considerando uma configuração geral é baseado na análise dos parâmetros estruturais, na ação de distúrbios conhecidos – ou não – e no desempenho de saída. A figura 3.1 ilustra um sistema submetido à ação de distúrbios e considerando uma saída regulada.

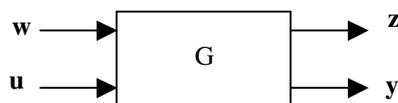


Figura 3.1 – Sistema submetido à ação de distúrbios e desempenho de saída.

onde  $\mathbf{u}$  é o sinal de controle,  $\mathbf{y}$  é a saída,  $\mathbf{w}$  é o vetor de entrada de distúrbios e  $\mathbf{z}$  é o vetor de desempenho de saída ou saída regulada.

### 3.3.1 Propriedades

Nesta seção será tratado o problema de posicionamento de sensores e atuadores aplicados em estruturas flexíveis considerando a ação de distúrbios e saída regulada. Seja o trio  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  a representação modal de uma estrutura com  $s$  entradas,  $r$  saídas,  $n$  modos e  $N = 2n$  estados.

Considerando a planta apresentada na figura 3.1, com entradas  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{u}$  e saídas  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{y}$ . Sejam  $\mathbf{G}_{wz}$  a matriz de transferência de  $\mathbf{w}$  para  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{G}_{wy}$  a matriz de transferência de  $\mathbf{w}$  para  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{G}_{uz}$  de  $\mathbf{u}$  para  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{G}_{uy}$  de  $\mathbf{u}$  para  $\mathbf{y}$ . Sejam ainda  $\mathbf{G}_{wzi}$ ,  $\mathbf{G}_{uyi}$ ,  $\mathbf{G}_{wyi}$  e  $\mathbf{G}_{uzi}$  as funções de transferência do  $i$ -ésimo modo.

#### 3.3.1.1 Propriedade Multiplicativa:

A propriedade multiplicativa da norma modal considerando uma configuração geral da planta é:

$$\|\mathbf{G}_{wzi}\| \|\mathbf{G}_{uyi}\| \cong \|\mathbf{G}_{wyi}\| \|\mathbf{G}_{uzi}\| \quad (3.39)$$

com  $i = 1, \dots, n$ , onde  $\|\cdot\|$  denota a norma  $H_2$ ,  $H_\infty$  ou Hankel.

Prova. Denote por  $\mathbf{B}_w$  e  $\mathbf{B}$  as matrizes modais de entrada de  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{u}$ , respectivamente,  $\mathbf{C}_z$  e  $\mathbf{C}_y$  as matrizes modais de saída de  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{y}$ , respectivamente e  $\mathbf{B}_{wi}$ ,  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{C}_{zi}$  e  $\mathbf{C}_{yi}$  são os blocos do  $i$ -ésimo modo. A norma  $H_\infty$  é aproximadamente dada por (GAWRONSKI, 1998):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}_{wzi}\|_\infty &\cong \frac{\|\mathbf{B}_{wi}\|_2 \|\mathbf{C}_{zi}\|_2}{2\zeta_i \omega_i}; & \|\mathbf{G}_{uyi}\|_\infty &\cong \frac{\|\mathbf{B}_i\|_2 \|\mathbf{C}_{yi}\|_2}{2\zeta_i \omega_i} \\ \|\mathbf{G}_{wyi}\|_\infty &\cong \frac{\|\mathbf{B}_{wi}\|_2 \|\mathbf{C}_{yi}\|_2}{2\zeta_i \omega_i}; & \|\mathbf{G}_{uzi}\|_\infty &\cong \frac{\|\mathbf{B}_i\|_2 \|\mathbf{C}_{zi}\|_2}{2\zeta_i \omega_i} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Introduzindo as equações acima na (3.39) pode-se provar a aproximação por inspeção. As normas  $H_\infty$  e Hankel possuem propriedade semelhante (GAWRONSKI, 1998).

A propriedade multiplicativa mostra que o produto da norma modal de cada modo do laço de desempenho (isto é, distúrbio e desempenho de saída) e o laço de controle (isto é, dos

atuadores e sensores) é aproximadamente igual ao produto das normas “cruzadas”, ou seja, distúrbios e sensores e entre atuadores e desempenho.

A vantagem física desta propriedade se encontra no fato que melhorando o desempenho entre atuador-sensor de realimentação aumenta-se automaticamente o desempenho para o *i-ésimo* modo. Os desempenhos entre a relação atuador-saída de desempenho e distúrbio-sensor de realimentação mostram que os sensores respondem não somente a entrada do atuador, mas também aos distúrbios e os atuadores agem não somente nos sensores de realimentação, mas também na saída de desempenho.

Esta propriedade é importante em projetos de controladores. Para a planta da figura 3.1 se obtém:

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}_{wz} \mathbf{w} + \mathbf{G}_{uz} \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{G}_{wy} \mathbf{w} + \mathbf{G}_{uy} \mathbf{u} \quad (3.41)$$

A matriz à malha fechada  $\mathbf{G}_{mf}$  de  $\mathbf{w}$  para  $\mathbf{z}$ , com o ganho  $\mathbf{K}$  do controlador tal que  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$ , é dada por:

$$\mathbf{G}_{mf} = \mathbf{G}_{wz} + \mathbf{G}_{uz} (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{G}_{uy})^{-1} \mathbf{K}\mathbf{G}_{wy} \quad (3.42)$$

Observação: facilmente é possível provar a equação (3.42) substituindo  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$  na expressão de  $\mathbf{y}$  (mostrada na equação 3.41), e então, isolando  $\mathbf{u}$ , substituir a expressão resultante na expressão de  $\mathbf{z}$  (também mostrada na equação 3.41).

Analisando o lado direito da equação acima percebe-se que a matriz à malha fechada não envolve apenas a saída  $\mathbf{y}$ , mas também a saída de desempenho  $\mathbf{z}$  e nos distúrbios  $\mathbf{w}$ . Conseqüentemente, se as matrizes  $\mathbf{G}_{wy}$  e  $\mathbf{G}_{uz}$  forem matrizes nulas, o controlador não exerce impacto nenhum sobre o desempenho  $\mathbf{z}$ . Assim, a meta no projeto de controladores consiste na melhoria simultânea do ganho entre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{z}$ . Entretanto, a propriedade multiplicativa mostra que a melhoria de  $\mathbf{G}_{uy}$  conduz automaticamente à melhoria de  $\mathbf{G}_{wy}$  e  $\mathbf{G}_{uz}$ . Com isso, o desafio do posicionamento dos sensores e atuadores consiste na otimização do ganho para  $\mathbf{G}_{uy}$ .

O impacto de  $\mathbf{G}_{uy}$  no desempenho do sistema pode ser mostrado através da seguinte propriedade da norma modal. Seja  $\mathbf{G}_i$  a função de transferência do *i-ésimo* modo combinando as entradas  $\{\mathbf{w}, \mathbf{u}\}$  e as saídas  $\{\mathbf{z}, \mathbf{y}\}$ . É possível mostrar que (GAWRONSKI, 1998):

$$\|\mathbf{G}_i\|^2 \cong \|\mathbf{G}_{uzi}\|^2 + \|\mathbf{G}_{uyi}\|^2 + \|\mathbf{G}_{wzi}\|^2 + \|\mathbf{G}_{wyi}\|^2 \quad (3.43)$$

onde  $\|\cdot\|$  denota a norma  $H_2$ ,  $H_\infty$  ou Hankel. Considerando o posicionamento de  $S$  atuadores, produzindo  $S$  entradas  $\{u_1, u_2, \dots, u_S\}$ , o impacto dos atuadores é apenas nos dois primeiros

termos da equação (3.43), sendo constantes nos outros dois. Denota-se os termos que sofrem ação dos atuadores como  $\|\mathbf{G}_{ui}\|^2$ , i.e.,

$$\|\mathbf{G}_{ui}\|^2 \cong \|\mathbf{G}_{uzi}\|^2 + \|\mathbf{G}_{uyi}\|^2 \quad (3.44)$$

Com isso pode-se definir a propriedade de adição para os atuadores.

### 3.3.1.2 Propriedade de Adição para os Atuadores

A propriedade aditiva para S atuadores é dada por:

$$\|\mathbf{G}_{ui}\|^2 \cong \alpha_{wi}^2 \sum_{k=1}^S \|\mathbf{G}_{u_k y_i}\|^2 \quad (3.45)$$

onde  $\|\mathbf{G}_{u_k y_i}\|$  é a função de transferência do *i-ésimo* modo para o *k-ésimo* atuador e para a saída *y*, e  $\alpha_{wi}$  é o peso no distúrbio no *i-ésimo* modo, definido como:

$$\alpha_{wi} = \sqrt{1 + \frac{\|\mathbf{G}_{wzi}\|^2}{\|\mathbf{G}_{wyi}\|^2}} \quad (3.46)$$

Nota-se que o peso do distúrbio  $\alpha_{wi}$  não depende da localização do atuador, mas sim das características da dinâmica estrutural resultantes da ação do distúrbio.

Similarmente, define-se a propriedade aditiva para o posicionamento dos sensores. Considerando o posicionamento de R sensores com R saídas  $\{y_1, \dots, y_R\}$ . A ação dos sensores está apenas sobre o segundo e o quarto termo da equação (3.43) sendo constantes os termos restantes. Denota-se o segundo e quarto termos por  $\|\mathbf{G}_{yi}\|^2$ , que é dado por:

$$\|\mathbf{G}_{yi}\|^2 \cong \|\mathbf{G}_{wyi}\|^2 + \|\mathbf{G}_{uyi}\|^2 \quad (3.47)$$

Com isso, se obtém a propriedade aditiva para os sensores.

### 3.3.1.3 Propriedade de Adição para os Sensores

A propriedade aditiva para os sensores é dada por:

$$\|\mathbf{G}_{yi}\|^2 \cong \alpha_{zi}^2 \sum_{k=1}^R \|\mathbf{G}_{uy_k i}\|^2 \quad (3.48)$$

onde  $\alpha_{zi}$  é o peso do desempenho no *i-ésimo* modo e é dado por:

$$\alpha_{zi} = \sqrt{1 + \frac{\|\mathbf{G}_{wzi}\|^2}{\|\mathbf{G}_{uzi}\|^2}} \quad (3.49)$$

Nota-se que o peso do desempenho caracteriza a parte da dinâmica estrutural, que é observada no desempenho de saída não dependendo da localização do sensor.

### 3.3.2 Índices e Matrizes de Posicionamento

As propriedades de adição para os sensores e atuadores formam a base para a resolução do problema de posicionamento ótimo de atuadores e sensores considerando distúrbios e desempenho de saída. Assim, pode-se definir o índice do atuador, que avalia o desempenho do atuador para cada posição candidata.

$$\sigma_{aki} = \frac{\alpha_{ui} \|\mathbf{G}_{u_k y_i}\|}{\|\mathbf{G}_u\|} \quad (3.50a)$$

onde  $\|\mathbf{G}_u\|^2 = \|\mathbf{G}_{uy}\|^2 + \|\mathbf{G}_{uz}\|^2$ . Similarmente o índice do sensor é dado por:

$$\sigma_{ski} = \frac{\alpha_{yi} \|\mathbf{G}_{u y_k i}\|}{\|\mathbf{G}_y\|} \quad (3.50b)$$

onde  $\|\mathbf{G}_y\|^2 = \|\mathbf{G}_{uy}\|^2 + \|\mathbf{G}_{wy}\|^2$ ,  $\alpha_{zi} \approx \alpha_{yi}$  e  $\alpha_{wi} \approx \alpha_{ui}$  devido a propriedade multiplicativa.

A matriz de posicionamento dos atuadores é dada por:

$$\sum_a = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} & \cdots & \sigma_{1S} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2k} & \cdots & \sigma_{2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \cdots & \sigma_{ik} & \cdots & \sigma_{iS} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nk} & \cdots & \sigma_{nS} \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ésimo modo} \quad (3.51a)$$

↑  
k - ésimο atuador

e a matriz de posicionamento para o sensor é dada por:

$$\sum_s = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} & \cdots & \sigma_{1R} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2k} & \cdots & \sigma_{2R} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{i1} & \sigma_{i2} & \cdots & \sigma_{ik} & \cdots & \sigma_{iR} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nk} & \cdots & \sigma_{nR} \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ésimo modo}$$

↑

k - étimo sensor

(3.51b)

O índice de posicionamento do *k-ésimo* atuador ou sensor é determinado na *k-ésima* coluna da matriz de posicionamento. No caso da norma  $H_2$  o índice para todos os modos é dado pela soma RMS dos índices de cada modo:

$$\sigma_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{ik}^2}, \quad k = 1, \dots, S \text{ ou } R \quad (3.52a)$$

e para as normas  $H_\infty$  e Hankel o índice de todos os modos corresponde ao maior entre os índices de cada modo:

$$\sigma_k = \max_i(\sigma_{ki}), \quad i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, S \text{ ou } R \quad (3.52b)$$

Esta propriedade mostra que o índice de sensor ou atuador é determinado através dos índices de cada sensor ou atuador individualmente. Assim, é possível avaliar a contribuição de cada sensor/atuador no desempenho do conjunto.

Para o posicionamento de um considerável número de sensores não é satisfatório apenas utilizar o índice de desempenho individual. Suponha que um sensor em determinada posição tenha o índice de posicionamento  $\sigma_k$  com elevado desempenho e que outros sensores em localizações próximas a este tenham também elevados desempenhos. Portanto, com ajuste apropriado no primeiro sensor não são necessários os outros em sua região (GAWRONSKI, 1997). Neste caso diz que tais sensores são altamente correlacionados.

Por isso, as posições ótimas são obtidas através do índice de posição, que é função do coeficiente de correlação dos sensores. Logo, define-se o vetor da norma do *k-ésimo* sensor como:

$$\mathbf{g}_{uy_k} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{G}_{uy_k 1}\|^2 \\ \|\mathbf{G}_{uy_k 2}\|^2 \\ \vdots \\ \|\mathbf{G}_{uy_k n}\|^2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

onde  $\mathbf{G}_{uy_k i}$  é a função de transferência do  $i$ -ésimo modo para o  $k$ -ésimo sensor e  $\|\cdot\|$  é a norma  $H_2$ ,  $H_\infty$  ou Hankel. As posições dos sensores podem ser encontradas utilizando o coeficiente de correlação dos sensores  $r_{ik}$ , definido como:

$$r_{ik} = \frac{\mathbf{g}_{uy_i}^T \mathbf{g}_{uy_k}}{\|\mathbf{g}_{uy_i}\|_2 \|\mathbf{g}_{uy_k}\|_2}, \quad i = 1, \dots, R, \quad k = i + 1, \dots, R \quad (3.54)$$

Denota-se o  $\varepsilon$  como um escalar positivo pequeno, entre 0,01 e 0,20 (GAWRONSKI, 1998). O índice de relacionamento  $\mathbf{I}(k)$ ,  $k = 1, \dots, r$ , é definido como:

$$\mathbf{I}(k) = \begin{cases} 0 & \text{se } r_{ik} > 1 - \varepsilon \text{ e } \sigma_k \leq \sigma_j \\ 1 & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (3.55)$$

onde  $k > j$  e  $R$  é o número de sensores. Se  $\mathbf{I}(k) = 1$  o sensor é aceito, se  $\mathbf{I}(k) = 0$  o sensor é rejeitado (neste caso, para o sensor em ambas as posições  $j$  e  $k$  o desempenho é ruim; ou são altamente correlacionados; ou para o sensor na  $j$ -ésima posição o desempenho é mais elevado).

Resumindo, a partir da propriedade de adição o procedimento de posicionamento do sensor é:

1. Determinar as normas das funções de transferência  $\mathbf{G}_{wzi}$ ,  $\mathbf{G}_{uy_k i}$  para todos os modos para cada sensor e, também, a norma de  $\mathbf{G}_y$  para todos os atuadores e todos os sensores;
2. O índice de desempenho de cada sensor através da equação (3.50b);

Verificar se as posições são altamente correlacionadas, utilizando a equação (3.54) e o índice  $\mathbf{I}(k)$ , mostrado na equação (3.55). Os sensores altamente correlacionados são rejeitados.

### 3.4 POSICIONAMENTO ÓTIMO UTILIZANDO MATRIZES GRAMMIANAS

A principal aplicação das matrizes grammianas de observabilidade e de controlabilidade na literatura é para localização ótima de sensores e atuadores, respectivamente. Bueno et al., 2005b, apresenta uma comparação entre matrizes grammianas e a norma  $H_2$  no posicionamento ótimo de um atuador/sensor PZT em uma viga flexível engastada. No referido trabalho, os autores mostram que para a estrutura considerada os resultados obtidos são semelhantes. As matrizes grammianas de controlabilidade e observabilidade também podem ser utilizadas para detecção e localização de falhas em estruturas. Esta aplicação é interessante para monitoramento da integridade estrutural (SHM, que é uma área de grande interesse de toda comunidade científica. DOEBLING et al., 1996; CARDEN; FANNING, 2004; LOPES JR. et al., 2000b). Detalhes e aplicações desta metodologia podem ser encontrados em Bueno et al. (2006e; 2006f) e Bueno et al. (2007).

Para o posicionamento de sensores calcula-se a matriz grammiana de observabilidade para cada posição candidata do sensor e se utiliza um índice de desempenho que possa ser comparado. Alguns autores utilizam índices que relacionam o produto dos autovalores da matriz; o determinante ou qualquer outra norma como, por exemplo, a norma de Frobenius. Neste trabalho é utilizado o traço da matriz como índice de desempenho, como mostra a equação 3.46. Esta escolha se deve ao fato de que as matrizes grammianas são diagonais quando se utiliza a representação em coordenadas modais (GAWRONSKI, 1998).

$$IG_{s_{i,k}} = \text{tr}(\mathbf{W}_{oi}), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad k = 1, \dots, R \quad (3.56)$$

onde  $IG_{s_{i,k}}$  denota o índice grammiano do sensor para o *i-ésimo* modo e o *k-ésimo* sensor;  $\text{tr}()$  é o traço da matriz; e  $\mathbf{W}_{oi}$  é a matriz grammiana de observabilidade para o *i-ésimo* modo.

Com isto, similarmente o que foi apresentado para as normas de sistemas, a matriz grammiana de posicionamento de sensores que é dada por:

$$\sum_s = \begin{bmatrix} \text{IGs}_{11} & \text{IGs}_{12} & \cdots & \text{IGs}_{1k} & \cdots & \text{IGs}_{1R} \\ \text{IGs}_{21} & \text{IGs}_{22} & \cdots & \text{IGs}_{2k} & \cdots & \text{IGs}_{2R} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{IGs}_{i1} & \text{IGs}_{i2} & \cdots & \text{IGs}_{ik} & \cdots & \text{IGs}_{iR} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{IGs}_{n1} & \text{IGs}_{n2} & \cdots & \text{IGs}_{nk} & \cdots & \text{IGs}_{nR} \end{bmatrix} \leftarrow i - \text{ésimo modo}$$

↑

$k - \text{ésimo sensor}$

(3.57)

Para o posicionamento dos atuadores se utiliza o índice grammiano do atuador obtido através do traço da matriz grammiana de controlabilidade para cada modo e posição candidata:

$$\text{IGa}_{i,k} = \text{tr}(\mathbf{W}_{ci}), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad k = 1, \dots, S \quad (3.58)$$

Assim, define-se a matriz grammiana de posicionamento por:

$$\sum_a = \begin{bmatrix} \text{IGa}_{11} & \text{IGa}_{12} & \cdots & \text{IGa}_{1k} & \cdots & \text{IGa}_{1S} \\ \text{IGa}_{21} & \text{IGa}_{22} & \cdots & \text{IGa}_{2k} & \cdots & \text{IGa}_{2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{IGa}_{i1} & \text{IGa}_{i2} & \cdots & \text{IGa}_{ik} & \cdots & \text{IGa}_{iS} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{IGa}_{n1} & \text{IGa}_{n2} & \cdots & \text{IGa}_{nk} & \cdots & \text{IGa}_{nS} \end{bmatrix} \leftarrow i - \text{ésimo modo}$$

↑

$k - \text{ésimo atuador}$

(3.59)

Como já mencionado anteriormente, é interessante se considerar o efeito de distúrbios externos sobre a estrutura base ao se resolver o problema da localização ótima de sensores e atuadores. Embora pouco discutido na literatura, é possível se utilizar a matriz grammiana de sensibilidade de distúrbio. Nesta formulação se considera a realização no espaço de estados na forma que aparece a matriz de posição do distúrbio  $\mathbf{B}_w$ , mostrada no capítulo 2 deste trabalho. Substituindo o vetor de entrada de controle  $\mathbf{u}(t)$  pela relação linear entre o ganho de controle e o vetor de estados, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_w \mathbf{w}(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{u}(t) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(t) \quad \text{logo:}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(-\mathbf{G}\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}_w \mathbf{w}(t) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_w \mathbf{w}(t) \quad \text{assim:} \quad (3.60)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_w \mathbf{w}(t)$$

onde  $\mathbf{A}_c$  é matriz dinâmica do sistema a malha fechada.

Considerando a equação na forma mostrada acima é possível definir a seguinte equação de Lyapunov:

$$\mathbf{A}_c \mathbf{W}_D + \mathbf{W}_D \mathbf{A}_c^T + \mathbf{B}_w \mathbf{B}_w^T = \mathbf{0} \quad (3.61)$$

onde  $\mathbf{W}_D$  é a matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio. A prova desta equação é similar à solução da matriz gramiana de controlabilidade (MIRZA; NIEKERK, 1999).

Logo, é possível definir o índice gramiano de sensibilidade de distúrbio como mostra a equação (3.62). Este índice reflete o desempenho do atuador na  $k$ -ésima posição considerando o efeito do distúrbio  $\mathbf{w}(t)$ .

$$\text{IGd}_{i,k} = \text{tr}(\mathbf{W}_{D_i}), \quad i = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad k = 1, \dots, S \quad (3.62)$$

A matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio é dada por:

$$\sum_w = \begin{bmatrix} \text{IGd}_{11} & \text{IGd}_{12} & \cdots & \text{IGd}_{1k} & \cdots & \text{IGd}_{1S} \\ \text{IGd}_{21} & \text{IGd}_{22} & \cdots & \text{IGd}_{2k} & \cdots & \text{IGd}_{2S} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{IGd}_{i1} & \text{IGd}_{i2} & \cdots & \text{IGd}_{ik} & \cdots & \text{IGd}_{iS} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{IGd}_{n1} & \text{IGd}_{n2} & \cdots & \text{IGd}_{nk} & \cdots & \text{IGd}_{nS} \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-ésimo modo} \quad (3.63)$$

↑

$k$ -ésimo atuador

## CAPÍTULO 4. DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Neste capítulo são apresentados os principais fundamentos envolvidos no controle via LMI. Inicialmente é feito um breve histórico do uso de LMI na teoria de controle; na seqüência são apresentadas definições preliminares sobre LMI mostrando os problemas padrões tratados e os tipos de representação de incertezas que podem ser utilizadas. Em seguida são apresentadas considerações sobre estabilidade quadrática e sobre o projeto de controladores robustos com restrições. Outras informações podem ser obtidas em Silva (2005).

### 4.1 HISTÓRICO

O uso de LMI em problemas de análise dinâmica começou por volta de 1890 quando Lyapunov publicou seu trabalho, surgindo a Teoria de Lyapunov (BOYD et al., 1994a). A idéia de seu trabalho foi mostrar que o sistema dinâmico:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (4.1)$$

é assintoticamente estável, isto é, todas as trajetórias convergem a zero, se e somente se existe uma matriz  $\mathbf{P}$  positiva definida tal que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad (4.2)$$

A inequação acima é conhecida como desigualdade de Lyapunov e é resultado direto do 2.º teorema de Lyapunov (OGATA, 1997). A equação (4.2) é uma forma especial de LMI. Lyapunov também mostrou que esta LMI pode ser resolvida analiticamente através de um conjunto de equações lineares equivalentes.

O próximo grande passo ocorreu nos anos 40 quando Lur'e, Postnikov e outros na antiga União Soviética aplicaram o método de Lyapunov para alguns problemas práticos de engenharia de controle, especialmente em problemas de estabilidade de sistemas de controle com não-linearidade no atuador (BOYD et al., 1994a). Apesar de não resolverem explicitamente na forma de LMI, o critério utilizado tinha a forma de uma desigualdade matricial. Esta desigualdade era reduzida a uma inequação polinomial que podia ser resolvida à "mão" e foi a primeira demonstração de que a teoria de Lyapunov poderia ser utilizada em problemas práticos de engenharia.

Já no início dos anos 60, Yakubovich, Popov, Kalman e outros pesquisadores reduziram a solução das LMIs que surgiram no problema de Lur'e a um critério gráfico simples, chamado atualmente de lema KYP (Kalman-Yakubovich e Popov) ou, também, de *positive real-lemma*. Este lema tem muitas variantes na literatura, as quais podem ser aplicadas a sistemas de ordem elevada, apesar de não serem atraentes em sistemas com não-linearidades. Para Boyd et al. (1994a) a contribuição do lema KYP foi mostrar que certas classes de problemas envolvendo LMI podem ter solução através de métodos gráficos.

O lema KYP e suas extensões foram exaustivamente estudados até a metade dos anos 60 e foram relacionadas a idéias de passividade, ao teorema dos ganhos pequenos e ao controle ótimo quadrático. Em 1970 foi mostrado que as LMIs que apareciam no lema KYP poderiam ser resolvidas não apenas graficamente, mas também pela solução de certas equações algébricas de Riccati (BOYD et al. 1994a). Neste mesmo período a solução do problema do regulador linear quadrático (LQR), envolvendo a resolução da equação de Riccati, marcou época, sendo utilizada até hoje em problemas de controle ótimo (PERES, 1997).

Na fase inicial, grande parte dos problemas com restrições LMI envolvia soluções via métodos analíticos, como método direto para sistemas de ordem pequena, métodos gráficos e soluções de equações de Riccati. Porém a partir da década de 70, constatou-se que as LMI que aparecem na teoria de controle podem ser formuladas como problemas de otimização convexa e solucionadas via algoritmos numéricos. Pyatnitskii e Skorodinskii foram, provavelmente, os primeiros a mostrar isto claramente. Eles reduziram o problema de Lur'e a um problema de otimização convexa envolvendo LMIs, que podia ser solucionado pelo algoritmo do elipsóide. Até onde se sabe, Pyatnitskii e Skorodinskii foram os primeiros a formular a solução de uma LMI por meio de um algoritmo de busca convexa com garantias de se encontrar uma solução (BOYD et al., 1994b).

Dois desenvolvimentos recentes fizeram com que este enfoque ganhasse destaque. O primeiro foi o grande aumento na capacidade dos computadores e o segundo o desenvolvimento de poderosos algoritmos numéricos para otimização convexa (BOYD et al., 1993). Entre eles, pode-se destacar o desenvolvimento de um método de programação linear que resolve problemas descritos na forma de LMIs com convergência polinomial, muito útil na prática, que foi proposto por Karmarkar em 1984. Em 1988, Nesterov e Nemirovski desenvolveram o método de pontos interiores que se aplicam diretamente nos problemas de programação convexa, que envolvem LMIs (ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2001 e BOYD et al., 1994a).

Através do método proposto por Nesterov e Nemirovski o enfoque de controle via LMI começou a se tornar popular. Atualmente é possível resolver rapidamente problemas de otimização convexa que não tem solução analítica através de técnicas tradicionais. Além disto, as soluções de muitos problemas de otimização convexa podem ser computadas em tempo computacional relativamente pequeno se comparado às soluções via técnicas convencionais (BOYD et al., 1993). Somado a tudo isto está o fato de inúmeros pacotes computacionais especializados em LMIs serem disponíveis, como o *LMI Control Toolbox* do Matlab® (GAHINET et al., 1995), ou o software *LMISol* de domínio público (OLIVEIRA et al., 1997).

Atualmente, as LMIs estão sendo objeto de estudo de muitas pesquisas por renomados pesquisadores mundiais, tendo sido aplicadas nas mais diversas áreas: controle de sistemas contínuos e discretos no tempo (GHAOUI; NICULESCU, 2000), controle ótimo, controle robusto (VAN ANTWERP; BRAATZ, 2000 e SILVA; LOPES JR., 2006), redução de modelos (ASSUNÇÃO, 2000), controle de sistemas não lineares, teoria de filtros robustos, identificação de sistemas, controle com estrutura variável, controle usando lógica fuzzy, detecção, localização e quantificação de falhas estruturais em sistemas mecânicos (ABDALLA et al., 1999 e ABDALLA et al., 2000).

## 4.2 DEFINIÇÕES E CONCEITOS BÁSICOS

Uma LMI é definida como sendo uma desigualdade matricial da forma (BOYD et al., 1993):

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \mathbf{F}_i > \mathbf{0} \quad (4.3)$$

sendo  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$  a variável, e  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  dados. O conjunto  $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}\}$  é convexo e positivo definido. A LMI da inequação (4.3) é equivalente a um conjunto de  $n$  inequações polinomiais em  $\mathbf{x}$ .

Múltiplas LMIs,  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ , podem ser expressas como uma LMI simples através de  $\text{diag}(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x})) > \mathbf{0}$ . Além disto nenhuma distinção é feita entre o conjunto de LMIs e uma LMI simples, ou seja, as LMIs  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$  são iguais a LMI  $\text{diag}(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x})) > \mathbf{0}$ .

Um resultado importante em LMI é que uma classe de desigualdades não-lineares podem ser convertidas na forma de LMI através do uso do complemento de Schur. A idéia básica é a seguinte: Seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{x}) & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (4.4)$$

sendo  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$  são dependentes afins de  $\mathbf{x}$ . A inequação (4.4) é equivalente a desigualdade matricial não-linear:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}^T(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \quad (4.5)$$

Uma demonstração do complemento de Schur pode ser encontrada em Van Antwerp e Braatz (2000). Existem muitos problemas convexos e quasi-convexos comuns que aparecem na teoria de controle. Na seqüência são apresentados os mais comuns.

#### 4.2.1 Problema de Factibilidade de uma LMI (LMIP)

Dada uma LMI  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ , o problema de factibilidade de uma LMI (LMIP) corresponde a encontrar  $\mathbf{x}^{\text{fact}}$  tal que a desigualdade  $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{\text{fact}}) > \mathbf{0}$  é verdadeira, ou determinar que a LMI seja infactível. LMIP é um problema de factibilidade convexa. O problema de estabilidade de Lyapunov, mostrado na inequação (4.2) é um exemplo de um LMIP.

#### 4.2.2 Problema de Autovalor (EVP)

O problema de autovalor (EVP) se restringe a minimizar o máximo autovalor de uma matriz, sujeito a LMI (BOYD et al., 1993):

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \lambda \\ & \text{sujeito à } \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ & \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.6)$$

sendo  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  matrizes simétricas que dependem da variável de otimização  $\mathbf{x}$ . EVP é um problema de otimização convexa e pode aparecer em controle com problemas de minimização de funcionais.

### 4.2.3 Problema de Autovalor Generalizado (GEVP)

O problema de autovalor generalizado (GEVP), neste caso, se restringe a minimizar o máximo autovalor generalizado de um par de matrizes dependentes de uma variável, e sujeitos as restrições LMI. A forma geral de um GEVP é:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \lambda \\ & \text{sujeito à } \lambda \mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ & \mathbf{B}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ & \mathbf{C}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.7}$$

sendo  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  dependentes de  $\mathbf{x}$ . GEVP é um problema quasi-convexo. Um problema quasi-convexo envolve uma função matemática quasi-convexa. Considere um conjunto convexo  $C$ ,  $f : C \rightarrow R$  é denominada uma função quase-convexa se  $\forall x_1, x_2 \in C$  e  $\forall \alpha \in (0,1)$ ;  $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ . Quando as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são todas diagonais, este problema se reduz a um problema de programação linear fracional geral. Muitas funções quasi-convexas não-lineares podem ser representadas na forma de um GEVP.

### 4.3 SISTEMAS INCERTOS

Todo projeto de controle é baseado no uso de um modelo do sistema dinâmico, que procura representar o sistema real. Entretanto, este modelo nominal que em muitos casos é descrito como sistema linear e invariante no tempo contém incertezas significativas em relação ao modelo real do sistema. Isto ocorre, principalmente, devido a incertezas nos parâmetros, que são originadas pela imprecisão dos parâmetros físicos ou devidas as variações destes parâmetros durante a operação, e incertezas dinâmicas, que consistem em componentes dinâmicos omitidos no modelo linear que causam variações no comportamento dinâmico durante a operação. As incertezas dinâmicas podem ser originadas nos modos flexíveis a altas frequências, nas não-linearidades devido às entradas excessivas e variações lentas no tempo. Em geral as incertezas são divididas em duas classes: incertezas estruturadas e não estruturadas.

### 4.3.1 Incertezas Estruturadas

Incetezas paramétricas são geralmente referenciadas como estruturadas e a caracterização destas incetezas pode ser feita através de modelos politópicos, modelos a parâmetro-dependentes afim e modelos com matrizes de inceteza. A caracterização destas incetezas utiliza inclusões diferenciais lineares (LDI).

Considerando um sistema linear variante no tempo:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}_w(t)\mathbf{w} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}_w(t)\mathbf{w} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}\end{aligned}\tag{4.8}$$

sendo  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  o vetor de estados e todas as matrizes com dimensão apropriada. Uma LDI é dada por (OLIVEIRA; ARRIFANO, 2001):

$$\Omega \in \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{B}_w(t) & \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{C}(t) & \mathbf{D}_w(t) & \mathbf{D}(t) \end{bmatrix} \right\}\tag{4.9}$$

sendo que  $\Omega$  pode ter formas especiais, isto é, pode ser um politopo, um sistema determinado, etc. Uma LDI pode ser usada para descrever uma família de sistemas lineares variantes no tempo.

Considerando agora um sistema linear e invariante no tempo (LTI):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_w\mathbf{w} + \mathbf{B}\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_w\mathbf{w} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{4.10}$$

sendo  $\mathbf{A}$  a matriz dinâmica,  $\mathbf{B}_w$  a matriz de entrada de distúrbio,  $\mathbf{B}$  a matriz de entrada de controle,  $\mathbf{C}$  a matriz de saída,  $\mathbf{D}_w$  e  $\mathbf{D}$  as matrizes de transmissão direta,  $\mathbf{x}$  o vetor de estados,  $\mathbf{w}$  o vetor de distúrbio e  $\mathbf{u}$  o sinal de controle. Todas as matrizes e vetores têm dimensões apropriadas. Este sistema pode ser interpretado como uma LDI, assim:

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_w & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D}_w & \mathbf{D} \end{bmatrix} \right\}\tag{4.11}$$

Quando  $\Omega$  é um politopo, a LDI é chamada de LDI politópica ou PLDI. Muitos dos resultados que aparecem em LMI podem ser descritos como uma combinação convexa dos sistemas de vértices de politopos:

$$Co\{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_v\}\tag{4.12}$$

sendo  $v$  o número de vértices do politopo e:

$$\mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_{w,i} & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_{w,i} & \mathbf{D}_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, v \quad (4.13)$$

Neste caso as matrizes da equação (4.13) são conhecidas.

Outros casos especiais de LDI surgem em problemas de controle robusto, como exemplo, modelos a parâmetro-dependentes afim e modelos com matrizes de incerteza. Uma descrição destes sistemas incertos pode ser encontrada em Oliveira e Arrifano (2001).

Caso o sistema possua incertezas politópicas, o projeto de controladores robustos através de LMIs pode ser realizado utilizando o conceito de estabilidade quadrática, (ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2001).

### 4.3.2 Incertezas Não-estruturadas

Incertezas não estruturadas são perturbações descritas em termos de suas amplitudes e podem ser descritas como modelos de incertezas aditivas e multiplicativas, além de LDIs limitadas por norma (OLIVEIRA; ARRIFANO, 2001). Incertezas deste tipo não podem ser descritas como função de um parâmetro específico. Em geral estão relacionadas à dinâmica não modelada (sobretudo em altas frequências devido ao truncamento modal) e não-linearidades do sistema. Este tipo de incertezas é especificado como limites para a FRF do sistema (VALER, 1999).

Os tipos de incertezas não estruturadas mais comuns são: o modelo de incerteza aditiva, o modelo de incerteza multiplicativa na saída e o modelo de incerteza multiplicativa na entrada. O modelo de incerteza aditiva é dado por:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_n(s) + \mathbf{\Delta}_a(s) \quad (4.14)$$

sendo  $\mathbf{G}(s)$  a função de transferência real,  $\mathbf{G}_n(s)$  a função de transferência nominal e  $\mathbf{\Delta}_a(s)$  representando a incerteza aditiva. Moreira (1998) utiliza, no projeto de controlador  $H_\infty$  robusto, este modelo de incerteza. A representação deste sistema é mostrada na figura (4.1).

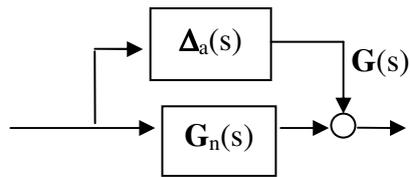


Figura 4.1 – Incerteza aditiva.

O modelo de incerteza multiplicativa na saída é dado por:

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{I} + \Delta_o(s))\mathbf{G}_n(s) \quad (4.15)$$

sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade e  $\Delta_o(s)$  representando a incerteza multiplicativa na saída. A representação deste sistema é mostrada na figura (4.2).

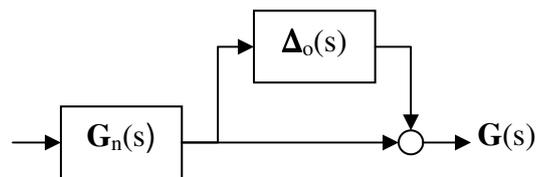


Figura 4.2 – Incerteza multiplicativa na saída.

Já o modelo de incerteza multiplicativa na entrada é dado por:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_n(s)(\mathbf{I} + \Delta_i(s)) \quad (4.16)$$

sendo  $\Delta_i(s)$  a representação da incerteza multiplicativa na entrada. A representação deste sistema é mostrada na figura (4.3).

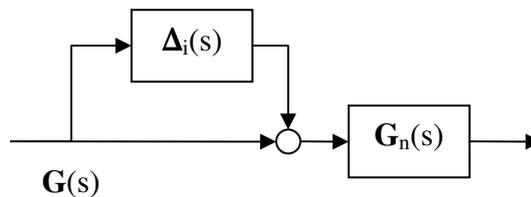


Figura 4.3 – Incerteza multiplicativa na entrada.

Outra classe especial de LDI são as LDIs limitadas por normas (NLDIs). Limitantes de normas especificam a quantidade de incerteza em termos de ganho RMS. Ganho RMS ou ganho  $L_2$  é definido como a pior razão entre as entradas e saídas do sistema:

$$\|\Delta\|_{\infty}^2 = \sup_{\substack{w \neq 0 \\ w \in L_2}} \frac{\|\Delta w\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} \quad (4.17)$$

sendo  $\|w\|_{L_2}$  a energia do sinal de saída. Além disto, limitantes de normas também são úteis para quantificar incertezas paramétricas dependentes de frequência. Maiores detalhes de NLDIs são apresentadas em Boyd et al. (1994b).

#### 4.4 ESTABILIDADE QUADRÁTICA

Um sistema dinâmico descrito por uma LDI:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(t) \in \Omega \quad (4.18)$$

é assintoticamente estável se e somente se, todas as trajetórias do sistema convergem para zero em  $t \rightarrow \infty$ . Uma condição suficiente para isto é a existência de uma função na forma quadrática:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (4.19)$$

sendo  $\mathbf{P}$  uma matriz positiva definida, ou seja,  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ . O sistema é assintoticamente estável se a equação (4.18) decai para todas as trajetórias não-nulas. Se existe uma matriz  $\mathbf{P}$  que satisfaça estas condições o sistema da equação (4.18) é dito ser *assintoticamente estável*. Estas condições vêm diretamente do teorema principal de Lyapunov, já apresentado na seção 1.2. Assim uma condição necessária e suficiente para a LDI da equação (4.18) ser estável é solucionar o seguinte LMIP:

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \Omega \quad (4.20)$$

Assumindo uma nova variável  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ , pode-se representar o dual desta equação que é uma condição equivalente para a estabilidade quadrática:

$$\mathbf{Q} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Q} < \mathbf{0} \quad \text{para todo } \mathbf{A} \in \Omega \quad (4.21)$$

As condições para estabilidade quadrática podem ser estendida para qualquer família de LDIs, como sistemas LTIs, PLDIs ou NLDIs. Assim:

**Sistema LTI:** A condição (4.20) torna-se:

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad (4.22)$$

checar a estabilidade de um sistema LTI é solucionar este LMIP na variável  $\mathbf{P}$ .

**Sistema PLDI:** A condição (4.20) é equivalente a:

$$\mathbf{P} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}_i^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_i < \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, v \quad (4.23)$$

sendo  $v$  o número de vértices do politopo.

A condição de estabilidade para um sistema NLDI pode ser vista em detalhes em Boyd et al. (1994b). No referido trabalho, também é possível encontrar as condições para estabilidade quadrática escritas para sistemas considerando realimentação de estados, onde a meta é encontrar um ganho de realimentação que garanta que o sistema seja quadraticamente estabilizável à malha fechada.

Assumindo controle por realimentação de estados para a LTI descrita pela equação (4.8) e utilizando uma lei de controle linear, é possível considerar algumas restrições no projeto de um controlador. Entre as principais restrições estão: estabilidade quadrática para o sistema à malha fechada; limitação de sinais de saída; limitação de sinais de entrada e imposição da taxa de decaimento. Em Silva (2005) é possível encontrar informações sobre estas restrições e detalhes complementares podem ser obtidos em Boyd et al. (1994b).

## CAPÍTULO 5. PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE NO DOMÍNIO DO TEMPO

A teoria de controle é uma área de pesquisa interdisciplinar, onde diversos conceitos e métodos matemáticos são utilizados para a representação e resolução de problemas físicos. A idéia principal deste início de capítulo é propiciar ao leitor uma revisão sobre a história da teoria de controle, visto que não é comum encontrá-la em livros ou artigos científicos.

A palavra controle tem dois significados básicos. O primeiro é *fiscalizar* ou *certificar-se* que um dispositivo físico tenha um comportamento satisfatório, ou seja, de acordo com as condições padrão de funcionamento. O segundo é *agir*, para se assegurar que tal dispositivo se comporte como desejado. Logo, para este trabalho, controlar é *mudar do inaceitável para o aceitável*. A idéia de controle é antiga, originada nos tempos de Aristóteles (384-322 a.C.), segundo Bennet (1979). Em seu livro intitulado *Politéia* (Política), Aristóteles – o mais famoso filósofo grego discípulo de Platão – descreveu de maneira simples as finalidades da teoria de controle para automatizar processos e então se atingir objetivos.

Inicialmente, a descrição de sistemas físicos ou artificiais era feita apenas pela lingüística; e mesmo a matemática antiga, sintetizada por Euclides (325-265 a.C.; *Euclides de Alexandria, como ficou conhecido, até hoje é considerado o “Pai da Geometria”, mas pouco se sabe de sua vida, como por exemplo, onde nasceu*) e Diophantus de Alexandria (200-284 a. C., *importante algebrista da Grécia antiga*) era expressa por símbolos. Os acontecimentos no mundo eram vistos como aleatórios, mas os filósofos afirmavam que o mundo poderia ser discutido nos termos de processos descritos por um conjunto de leis. A primeira tentativa neste sentido foi com Fibonacci (1170-1250), filho de um comerciante italiano e chamado Leonardo de Pisa, que publicou sua obra mais famosa intitulada Livro do Ábaco, contendo um tratamento completo sobre métodos e problemas algébricos, após retornar de seus estudos com um professor muçulmano. René Descartes (1596-1650) apresentou o conceito de método; Galileu (1564-1642) com o uso de experimentos físicos; e mais tarde Isaac Newton (1642-1727) e Baron Gottfried Leibniz (1646-1716), introduzindo o cálculo, conseguiram a primeira metamorfose da ciência antiga baseada nos estudos de Aristóteles para o que se conhece atualmente. Esta mudança foi baseada no uso de experimentos físicos e de modelos matemáticos envolvendo equações diferenciais.

Embora a formulação matemática de problemas de controle seja relativamente complexa, as idéias fundamentais da teoria de controle são bastante intuitivas e simples. Estas idéias chaves são três e podem ser encontradas na natureza, na evolução e no comportamento dos seres vivos. A primeira idéia básica é chamada de realimentação ou *feedback*. Uma importante contribuição foi dada por Charles Darwin (1805-1882) com a teoria de que longos períodos de tempo eram responsáveis pela evolução da espécie. Mais tarde, Vito Volterra (1860-1940) usou este conceito para explicar a diferença de tamanho entre duas populações de peixes em uma pequena lagoa, no entanto, o mais importante foi Norbert Wiener (1885-1964), que introduziu na biologia o conceito de realimentação positiva e negativa. Em engenharia, este conceito foi introduzido por engenheiros do laboratório *Bell Telephone Laboratory* (MAYR, 1970) e agora é um conceito presente em quase todas as áreas de atividade. O processo de realimentação é o modo em que os estados do sistema, ou as saídas, determinam como o controle deve agir para cada instante de tempo.

O segundo conceito chave é denominado de necessidade de flutuações, ou *need for fluctuations*. Basicamente, a idéia deste conceito é de que não se deve necessariamente forçar o sistema a se dirigir imediatamente o estado desejado. Assim, na tentativa de retornar o sistema ao estado desejado, permite-se uma flutuação em torno do desejado, evitando forçar demasiadamente. Este conceito foi introduzido por Hall (1907) quando comparou a ação dos economistas políticos que admitiram que uma ação apropriada da lei devesse admitir flutuações, ou seja, ter uma tolerância temporária. O princípio da flutuação pode também ser encontrado em programação matemática, por exemplo, no método dos pontos interiores (ANDREI, 1999; ANDREI, 2004).

O terceiro e mais importante conceito da teoria de controle é o de otimização, ou *optimization*. Esta é uma área bastante conhecida na matemática, cujo objetivo principal é encontrar valores desconhecidos para maximizar ou minimizar alguma função sujeita as restrições. Tal idéia é muito importante no contexto de controle já que uma grande variedade de problemas podem ser reduzidos a problemas de otimização convexa ou quase-convexa envolvendo desigualdades matriciais lineares. Em geral, estes problemas de otimização podem ser resolvidos numericamente utilizando-se o método dos pontos interiores. Conseqüentemente, a redução de problemas de controle para problemas de otimização constitui a solução dos problemas originais, claramente em um sentido muito prático (BOYD et al., 1994b, ANDREI, 2001). Adicionalmente as idéias básicas, existem as contribuições de Richard Bellman (1920-1984) introduzindo a programação dinâmica\* (*dynamic*

*programming*) e Lev Pontryagin (1908-1988) com o *maximum principle*\*\* direcionado a controle ótimo não-linear, que juntos estabelecem as bases da teoria de controle moderno.

\***Programação dinâmica** é um método para a construção de algoritmos para a resolução de problemas computacionais, em especial os de otimização combinatória. Ela é aplicável à problemas no qual a solução ótima pode ser computada a partir da solução ótima previamente calculada e memorizada – de forma a evitar recálculo – de outros subproblemas que, sobrepostos, compõem o problema original.

\*\***Máximo Princípio** é usado na teoria de controle ótimo para encontrar o melhor controlador possível para mudar um sistema dinâmico de um estado para o outro. Foi originalmente formulado pelo matemático russo Lev Semenovich Pontryagin e um estudante sob sua orientação.

São dois os seguimentos básicos da teoria de controle: o **controle no domínio da frequência** e **controle no domínio do tempo**. A teoria de controle no domínio da frequência é baseada nos trabalhos de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), Joseph Fourier (1768-1830), Augustin Louis Cauchy (1789-1857), entre outros; e o conceito central é a utilização da função de transferência que, para um sistema LTI é dada pela divisão da transformada de Laplace da saída pela transformada de Laplace da entrada do sistema. Mais tarde, os pesquisadores Harry Nyquist (1889-1976, Fig. 5.1a) e Hendrik Bode (1905-1982, Fig. 5.1b), do *Bell Laboratories*, apresentaram contribuições que ainda hoje são utilizadas por estudiosos de controle (NYQUIST, 1932; BODE, 1940).



(a)



(b)

Figura 5.1 – Pesquisadores do *Bell Laboratories* – (a) Harry Nyquist; (b) Hendrik Bode.

Já a metodologia de controle no domínio do tempo é baseada na utilização de equações diferenciais. Esta teoria é fundamentada nos estudos de Newton e Leibniz, nos trabalhos dos irmãos Bernoulli, Jacopo Riccati (1676-1754), Leonhard Euler (1707-1783), entre outros. A análise do movimento de um sistema dinâmico através da representação de equações diferenciais (EDO) foi realizada por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e William Rowan Hamilton (1805-1865). Entre os problemas a serem estudados, um dos mais importantes era sobre a estabilidade de um sistema representado por EDO. George Airy (1801-1892) foi o primeiro a discutir a instabilidade de um sistema a malha fechada usando EDOs (AIRY, 1840). Mais tarde, Edward Routh (1831-1907) propôs uma técnica numérica para avaliar a estabilidade de um sistema em movimento (ROUTH, 1877). James Clerk Maxwell também estudou o problema de estabilidade (MAXWELL, 1868), mas a teoria de estabilidade mais geral e elegante foi criada por Alexander Lyapunov (1857-1918, matemático russo), que estudou a estabilidade de equações diferenciais não-lineares usando a energia generalizada de movimento (LYAPUNOV, 1877). Tal proposta é utilizada ainda hoje.

Outro importante problema considerado na representação no domínio do tempo era o de controle ótimo e de estimadores. Johann Bernoulli (1667-1748) foi o primeiro a discutir o princípio do ótimo (*Principle of Optimality*). Entre os vários princípios do ótimo, alguns foram formulados por Pierre de Fermat (1601-1665), em sistemas óticos; e Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Jean d' Alembert (1717-1783), Pierre de Maupertuis (1698-1759), Euler, Lagrange e Hamilton, e Albert Einstein (1879-1955), para sistemas mecânicos.

A era moderna na teoria de controle começou com o trabalho de Rudolf Kalman (Fig. 5.2) que publicou vários livros nos quais os principais problemas em análise eram sobre a teoria de sistemas não lineares. Em Kalman e Bertram (1960) foi considerada a estabilidade de Lyapunov no domínio do tempo, para sistemas não lineares. O controle ótimo de sistemas bem como o regulador linear quadrático foi discutido em Kalman (1960a); já as teorias de filtragem e dos estimadores foram discutidas em Kalman (1960b) para sistemas discretos. A versão para sistemas contínuos foi publicada em Kalman e Bucy (1961) e neste contexto, Kalman introduziu o conceito da variável de estado como uma entidade entre a entrada e a saída de um sistema de controle. O presente trabalho e, ainda, grande parte dos trabalhos atuais, são baseados em formulações no domínio do tempo.



Figura 5.2 – Rudolf Kalman, matemático e engenheiro eletricitista húngaro-americano.

As técnicas de controle do domínio do tempo representam uma ferramenta efetiva de sistemática que permite o projeto tanto de sistemas com entrada e saída simples (SISO) como de sistemas multivariáveis (MIMO) com a mesma facilidade. Já os métodos no domínio da frequência são mais úteis na análise das propriedades obtidas no projeto como robustez e estabilidade. A seguir é apresentado sucintamente o projeto de controle para sistemas MIMO e LTI descritos pelas seguintes equações:

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

Existem basicamente dois tipos de realimentação no domínio do tempo:

- Realimentação linear da saída
- Realimentação linear de estado.

## 5.1 REALIMENTAÇÃO LINEAR DE SAÍDAS

Quando o sinal de controle é uma função linear das saídas do sistema (variáveis medidas) temos que:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{G}\mathbf{y}(t) + \mathbf{r}(t) \quad (5.2)$$

onde  $\mathbf{G}$  é a matriz de ganhos de realimentação de saídas ( $r \times m$ ),  $\mathbf{y}$  é o vetor de saídas do sistema,  $r$  é o número de atuadores,  $m$  é o número de estados medidos e  $\mathbf{r}$  é o sinal de referência (sinal de comando). Quando esta lei de controle é implementada, resulta a seguinte equação de estado para o sistema em malha fechada:

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{C})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{D}\mathbf{G})^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{r}(t)) \end{cases} \quad (5.3)$$

Este tipo de controle por realimentação tem muitos inconvenientes. Entre os inconvenientes temos a falta de algoritmos eficientes tanto para se determinar a existência de uma matriz de ganhos  $\mathbf{G}$  tal que o sistema de controle cumpra as especificações do projeto, como para a determinação numérica desta. Os algoritmos numéricos disponíveis na literatura, geralmente, não apresentam boas propriedades de convergência (VALER, 1999).

## 5.2 REALIMENTAÇÃO LINEAR DE ESTADO

Uma alternativa para o controle de sistemas dinâmicos, que oferece maior flexibilidade e eficiência nos algoritmos numéricos é através da realimentação das variáveis de estado do sistema. Neste caso o sinal de controle depende do estado do sistema, tendo a seguinte forma geral:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) \quad (5.4)$$

onde  $\mathbf{G}$  é a matriz de ganhos de realimentação de estado ( $r \times n$ ), onde  $n$  é o número de estados do sistema.

Com esta lei de controle, a equação de estado e saída do sistema em malha fechada fica:

$$S_{re}: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{r}(t) \\ \mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{G})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{r}(t) \end{cases} \quad (5.5)$$

A principal limitação deste tipo de estrutura de controle é a necessidade de se dispor de todas as variáveis de estados para realimentação. Em geral, estão disponíveis só algumas delas. Neste sentido, como será visto no capítulo 6, um observador de estado, o qual tem como função estimar as variáveis de estado, oferece uma solução para este problema. Já que o observador de estado é um sistema dinâmico, um sistema de controle baseado em observador não é mais do que um estado com realimentação dinâmica de saídas.

Com o fim de se conseguir boas características de estabilidade e um desempenho adequado do sistema em malha fechada é preciso escolher a matriz de ganho  $\mathbf{G}$  de acordo com algum critério. Diversos métodos são frequentemente utilizados para a determinação da matriz de ganho  $\mathbf{G}$ , entre eles estão: alocação de pólos (SANTOS et al., 2006); controle  $H_\infty$  (SILVA, 2005; BUENO et al., 2006a; SARRACINI JR., 2006; SANTOS et al., 2007); e o LQR

(JOHNSON; ERKUS, 2002; BUENO, et al., 2006c; HASSAN, 2006), que em particular é utilizado neste trabalho. Logo, a seguir são apresentados alguns detalhes desta técnica que se baseia em uma função de custo quadrática.

### 5.3 CONTROLE ÓTIMO COM FUNÇÃO DE CUSTO QUADRÁTICA

O regulador linear quadrático, abreviado como LQR, tem um papel muito importante nos projetos de controle de sistemas dinâmicos multivariáveis, não apenas por ser um método poderoso, mas também porque representa a origem de muitos, recentemente desenvolvidos, procedimentos para projetos de sistemas de controle para sistemas lineares MIMO. Além de proporcionar uma metodologia para o controle do ganho de realimentação o regulador linear quadrático garante boas margens de estabilidade para o sistema a malha fechada.

Considerando um sistema de controle estável definido por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (5.6)$$

no qual  $\mathbf{x}$  é um vetor de estados,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são matrizes constantes e  $\mathbf{u}$  é um vetor de controle. Em projetos de sistemas de controle estáveis baseados em índices de desempenho quadráticos o objetivo é escolher um vetor de controle  $\mathbf{u}$  de modo que o índice de desempenho seja minimizado. É usual realizar medidas efetivas de vibração através do índice de desempenho de controle de vibrações de estruturas. Este índice, que se trata da função de custo, pode ser formulado a partir da integração da energia total do sistema de um tempo inicial para um tempo infinito (MEIROVITCH, 1990). Um índice de desempenho quadrático é dado por

$$J = \int_0^{\infty} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (5.7)$$

sendo  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  uma função quadrática ou uma função hermitiana que conduz a leis de controle lineares, ou seja

$$\mathbf{u} = -\mathbf{Gx}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & G_{11} & \vdots \\ G_{R1} & G_{R2} & \cdots & G_{Rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Os projetos de controles ótimos e reguladores lineares se resumem na determinação dos elementos da matriz de ganho de retroalimentação  $\mathbf{G}$ . O sistema projetado é estável, exceto no caso em que o sistema não é controlável. Uma forma de se representar o índice de desempenho é dada por (OGATA, 1997)

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_{lqr} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_{lqr} \mathbf{u}) dt \quad (5.9)$$

sendo  $\mathbf{Q}_{lqr}$  uma matriz hermitiana ou real simétrica e definida positiva,  $\mathbf{R}_{lqr}$  uma matriz hermitiana ou real simétrica e definida positiva e  $\mathbf{u}$  o vetor de controle sem restrições, que regulam respectivamente a taxa de decaimento e o sinal de controle.

Na abordagem clássica, primeiro se projeta o sistema de controle e depois se verifica a estabilidade do sistema, entretanto, utilizando o método direto de Lyapunov, primeiro as condições de estabilidade são verificadas e então, projeta-se o controlador dentro destas limitações. Por estes motivos, o método direto de Lyapunov é a base para projeto de controladores ótimos. Para uma grande classe de problemas, mostra-se uma relação direta entre índices de desempenho quadráticos e as funções de Lyapunov, que são utilizadas como síntese nos sistemas de controle ótimo.

### 5.3.1 Problema de Controle Ótimo Quadrático

Considerando o sistema descrito pela equação (5.6), o problema é determinar a matriz de ganho de retroalimentação  $\mathbf{G}$  do vetor de controle ótimo (lei de controle linear) da equação (5.8) de modo a minimizar o índice de desempenho, definido pela equação (5.9). Assim o vetor de controle  $\mathbf{u}$  é ótimo qualquer que seja o estado inicial. A figura 5.3 mostra a configuração ótima proposta.

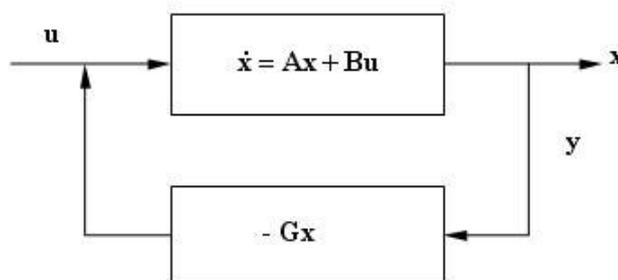


Figura 5.3 – Diagrama de blocos do sistema ótimo proposto.

Substituindo (5.8) em (5.6) obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})\mathbf{x} \quad (5.10)$$

Nas deduções a seguir assume-se que a matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})$  é estável, isto é, que os seus autovalores tenham parte real negativa. Substituindo a lei de controle linear (5.8) no índice de desempenho dado pela equação (5.9) tem-se

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_{lqr} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{lqr} \mathbf{G} \mathbf{x}) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q}_{lqr} + \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{lqr} \mathbf{G}) \mathbf{x} dt \quad (5.11)$$

Para minimizar (5.11) se utiliza o problema de otimização paramétrica. Neste ponto a função de Lyapunov,  $V(\mathbf{x})$  dada pela equação (4.19), pode ser usada efetivamente na solução deste problema, baseando nas hipóteses do teorema principal de Lyapunov. Admitindo-se que

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q}_{lqr} + \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{lqr} \mathbf{G}) \mathbf{x} = -\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = -\dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} \quad (5.12)$$

Substituindo (5.6) em (5.12) tem-se

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{Q}_{lqr} + \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{lqr} \mathbf{G}) \mathbf{x} = -(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) \quad (5.13)$$

E finalmente substituindo a lei de controle linear dada por (5.8) em (5.13) obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q}_{lqr} + \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{lqr} \mathbf{G}) \mathbf{x} &= -(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{x}) \\ &= -\mathbf{x}^T (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^T \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}) \mathbf{x} \\ &= -\mathbf{x}^T \left[ (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}) \right] \mathbf{x} \end{aligned} \quad (5.14)$$

A equação (5.14) deve ser verdadeira para qualquer estado  $\mathbf{x}$ , assim (5.14) torna-se

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}) = -(\mathbf{Q}_{lqr} + \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{lqr} \mathbf{G}) \quad (5.15)$$

Como de princípio se assumiu que a matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})$  é estável, então existe uma matriz Hermitiana  $\mathbf{P}$  positiva definida que satisfaz a equação (5.15). O procedimento agora é determinar os elementos desta matriz e verificar se esta é definida positiva. Observa-se que mais de uma matriz  $\mathbf{P}$  pode satisfazer (5.15) e que se o sistema é estável sempre irá existir uma matriz  $\mathbf{P}$  positiva definida. Podem existir outras matrizes  $\mathbf{P}$  que satisfaçam a equação (5.15), mas que não são definidas positivas, portanto, estas soluções devem ser descartadas. O índice de desempenho de (5.11) pode ser calculado como a seguir

$$J = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^T (\mathbf{Q}_{lqr} + \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{lqr} \mathbf{G}) \mathbf{x} dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = -\mathbf{x}_{\infty}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_{\infty} + \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \quad (5.16)$$

Como se define  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})$  estável; tem-se  $\mathbf{x}_{\infty} \rightarrow 0$ . Então de (5.16), tem-se:

$$J = \mathbf{x}_0^T \mathbf{P} \mathbf{x}_0 \quad (5.17)$$

Com isto, o índice de desempenho é obtido em termos de estado inicial e da matriz  $\mathbf{P}$ . Uma técnica para a solução do problema é apresentada a seguir. Uma vez suposto que  $\mathbf{R}_{lqr}$  é uma matriz hermitiana ou real simétrica positiva definida, pode-se escrever

$$\mathbf{R}_{lqr} = \mathbf{T}^T \mathbf{T} \quad (5.18)$$

Sendo  $\mathbf{T}$  uma matriz não-singular. Então substituindo (5.18) em (5.15)

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}) + \mathbf{Q} + \mathbf{G}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{G} = 0 \quad (5.19)$$

Reescrevendo (5.19) obtém-se (OGATA, 1997)

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \left[ \mathbf{T} \mathbf{G} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right]^T \left[ \mathbf{T} \mathbf{G} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right] - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}_{lqr} = 0 \quad (5.20)$$

A minimização do índice de desempenho  $J$  requer a minimização de (OGATA, 1997)

$$\mathbf{x}^T \left[ \mathbf{T} \mathbf{G} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right]^T \left[ \mathbf{T} \mathbf{G} - (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right] \mathbf{x} \quad (5.21)$$

em relação a  $\mathbf{G}$ . Como (5.21) é não-negativa, o mínimo ocorre quando o seu valor é zero, ou seja, quando

$$\mathbf{T} \mathbf{G} = (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (5.22)$$

Assim, tem-se

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (5.23)$$

A equação (5.23) fornece a matriz ótima de ganho  $\mathbf{G}$ . Em conseqüência o sinal de controle ótimo será dado por

$$\mathbf{u} = -\mathbf{G} \mathbf{x} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (5.24)$$

A matriz  $\mathbf{P}$  da equação (5.23) deve satisfazer a seguinte equação reduzida

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q}_{lqr} = 0 \quad (5.25)$$

A equação (5.25) é conhecida como equação matricial reduzida de Riccati. As etapas para o projeto de um sistema de controle ótimo quadrático podem ser vistas de forma esquemática na figura 5.4.

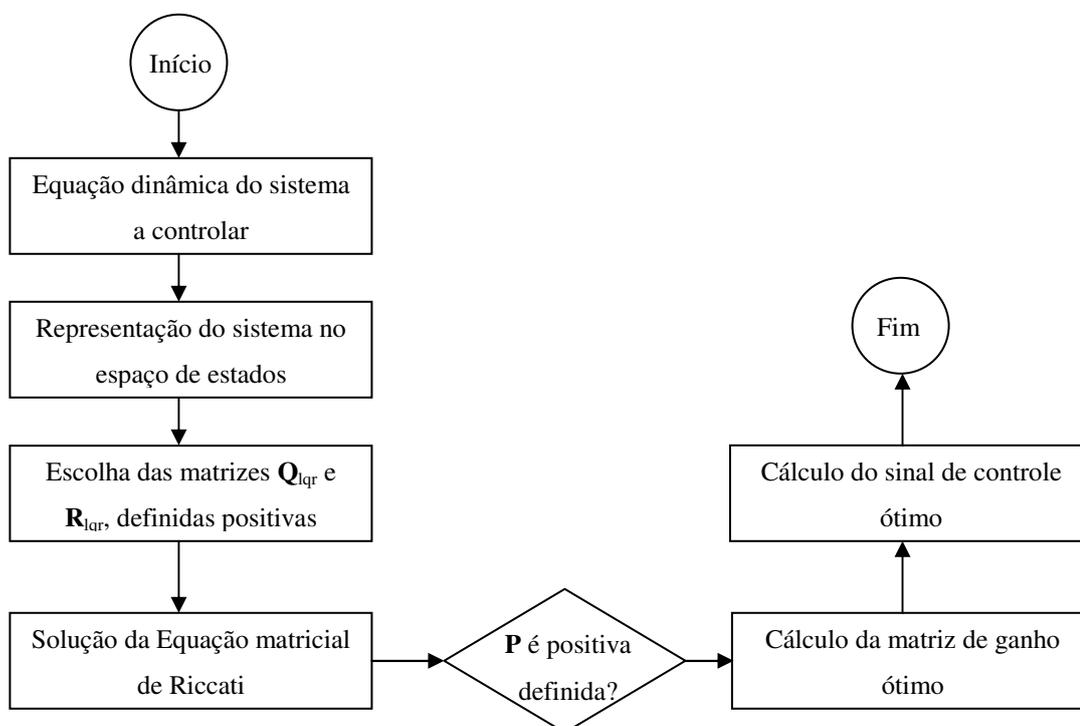


Figura 5.4 – Etapas para o projeto de um sistema de controle ótimo quadrático.

### 5.3.2 Regulador Linear Quadrático via LMIs

Diversos autores têm avaliado aplicações do LQR, no entanto, nem tantos discutem a versão LMI deste controlador (BALAKRISHNAN, S.d.; JOHNSON; ERKUS, 2002). Talvez seja este um dos fatos que ainda impulsionam o estudo deste controlador, já considerado clássico pelos pesquisadores. Alguns autores apresentam, ainda, novas propostas de solução deste controlador sem envolverem a tradicional equação de Riccati (NASCIMENTO; FILHO, 2007 e FILHO; NASCIMENTO, 2007), assim, claramente se percebe a relevância deste tema. A seguir é apresentada a formulação do LQR em sua versão LMI.

Para um sistema LTI descrito pela realização no espaço de estados, mostrado na equação (5.26), o problema do LQR é: dada uma condição inicial  $\mathbf{x}(0)$ , encontrar a entrada de

controle  $\mathbf{u}(t)$  que minimize a energia de saída  $\int_0^{\infty} \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) dt$ . Assume-se que o trio  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  é a realização mínima, isto é, controlável e observável (OLIVEIRA, 2004),  $\mathbf{D}_{zu}^T \mathbf{D}_{zu}$  é inversível; e  $\mathbf{D}_{zu}^T \mathbf{C}_z = 0$ .

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_z \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{zu} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Note que  $\mathbf{C}_z$  e  $\mathbf{D}_{zu}$  são as matrizes de saída e de transmissão direta considerando a entrada de controle  $\mathbf{u}(t)$  e a saída de desempenho  $\mathbf{z}(t)$ . O procedimento é similar se considerada a saída  $\mathbf{y}(t)$ .

Assim, considera-se que a entrada ótima  $\mathbf{u}(t)$  pode ser expressa por uma constante realimentação dos estados, ou seja,  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{G}\mathbf{x}(t)$ , onde  $\mathbf{G} = (\mathbf{D}_{zu}^T \mathbf{D}_{zu})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$  e  $\mathbf{P}$  é uma matriz única, positiva definida, que satisfaz a equação algébrica de Riccati.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{D}_{zu}^T \mathbf{D}_{zu})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z = 0 \quad (5.27)$$

A energia ótima de saída para uma condição inicial  $\mathbf{x}(0)$  é então dada por  $\mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$ . Com  $\mathbf{Q}_{are} = \mathbf{P}^{-1}$  (o subíndice “are” é utilizado para representar a matriz  $\mathbf{Q}$  da Equação Algébrica de Riccati, do inglês *Algebraic Riccati Equation*); logo, é possível escrever a equação anterior sendo:

$$\mathbf{A} \mathbf{Q}_{are} + \mathbf{Q}_{are} \mathbf{A}^T - \mathbf{B} (\mathbf{D}_{zu}^T \mathbf{D}_{zu})^{-1} \mathbf{B}^T + \mathbf{Q}_{are} \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \mathbf{Q}_{are} = 0 \quad (5.28)$$

E a energia ótima de saída é:  $\mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_{are}^{-1} \mathbf{x}(0)$ .

Assim, é considerado o problema de encontrar o ganho de realimentação  $\mathbf{G}$  que minimize, restrito por um limite superior, a energia de saída, dada uma condição inicial. Em Boyd et al., 1994b é mostrado que para sistemas LTI, o limitante superior é igual à energia de saída. Neste caso, tal energia de saída mínima é dada minimizando  $\mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_{lqr}^{-1} \mathbf{x}(0)$  sujeito a  $\mathbf{Q}_{lqr} > 0$  e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{Q}_{lqr} + \mathbf{Q}_{lqr} \mathbf{A}^T - \mathbf{B}_u \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T & (\mathbf{C}_z \mathbf{Q}_{lqr} + \mathbf{D}_{zu} \mathbf{Y})^T \\ \mathbf{C}_z \mathbf{Q}_{lqr} + \mathbf{D}_{zu} \mathbf{Y} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.29)$$

O valor ótimo deste EVP (problema de autovalor, do inglês *Eigenvalue Problem*) deve ser igual à energia de saída obtida resolvendo a equação de Riccati (equação 5.28). A equação de Riccati pode ser interpretada como o campo de soluções analíticas para o EVP. Pode-se mostrar esta solução analítica para o EVP através dos seguintes passos. Primeiramente, tal

solução pode ser mostrada usando o argumento que a LMI (5.29) é mantida para algum  $\mathbf{Q}_{lqr} > 0$  e  $\mathbf{Y}$  se e somente se  $\mathbf{Y} = (\mathbf{D}_{zu}^T \mathbf{D}_{zu})^{-1} \mathbf{B}^T$  e neste caso,  $\mathbf{Q}_{lqr} > 0$  deve ser satisfeito.

$$\mathbf{Q}_{lqr} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Q}_{lqr} + \mathbf{Q}_{lqr} \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \mathbf{Q}_{lqr} - \mathbf{B}^T (\mathbf{D}_{zu}^T \mathbf{D}_{zu})^{-1} \mathbf{B}^T \leq 0 \quad (5.30)$$

Logo, pode ser mostrada uma manipulação que se  $\mathbf{Q}_{lqr} > 0$  for satisfeita a LMI (5.30), então  $\mathbf{Q}_{lqr} \leq \mathbf{Q}_{are}$ . Entretanto, para toda condição inicial  $\mathbf{x}(0)$ , tem-se que  $\mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_{are}^{-1} \mathbf{x}(0) \leq \mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_{lqr}^{-1} \mathbf{x}(0)$ ; e, no entanto, o valor ótimo de EVP é apenas  $\mathbf{x}^T(0) \mathbf{Q}_{are}^{-1} \mathbf{x}(0)$ , e o ganho ótimo de realimentação é

$$\mathbf{G}_{\text{ótimo}} = \mathbf{Y}_{\text{ótimo}} \mathbf{Q}_{are}^{-1} = -(\mathbf{D}_{zu}^T \mathbf{D}_{zu})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (5.31)$$

Isto é interessante para notar que com  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{lqr}^{-1}$ , o EVP é equivalente a minimização  $\mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$  sujeito a

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z - \mathbf{P} \mathbf{B}^T (\mathbf{D}_{zu}^T \mathbf{D}_{zu})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \leq 0 \quad (5.32)$$

Que não é uma otimização convexa em  $\mathbf{P}$  (BOYD et al., 1994b). No entanto, o problema de maximização  $\mathbf{x}^T(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0)$  sujeito a  $\mathbf{P} > 0$  e

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B}^T (\mathbf{D}_{zu}^T \mathbf{D}_{zu})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{C}_z^T \mathbf{C}_z \geq 0 \quad (5.33)$$

que não é nada além da inequação (5.32), mas com a desigualdade invertida, é um EVP (BOYD et al., 1994b). Willems (1971) mostra que esta é uma outra formulação do problema do LQR.

A versão LMI do regulador linear quadrático é também apresentada por Erkus e Lee (2004). Os autores propõem ainda um algoritmo implementado em Matlab<sup>®</sup>, que calcula o ganho de realimentação. Segundo estes autores, o problema LMI-LQR é descrito por:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{Y}, \mathbf{P}, \mathbf{X}_{LMI}} \quad & \text{tr}(\mathbf{Q}_{lqr} \mathbf{P}) + \text{tr}(\mathbf{X}_{LMI}) + \text{tr}(\mathbf{Y}_{LMI} \mathbf{N}) + \text{tr}(\mathbf{N}^T \mathbf{Y}_{LMI}^T) \\ \text{sujeito à} \quad & \mathbf{A} \mathbf{P} - \mathbf{B} \mathbf{Y}_{LMI} + \mathbf{P} \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}_{LMI}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B}_w \mathbf{B}_w < 0, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{LMI} & \mathbf{R}_{lqr}^{1/2} \mathbf{Y}_{LMI} \\ \mathbf{Y}_{LMI}^T \mathbf{R}_{lqr}^{1/2} & \mathbf{P} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde  $\mathbf{N}$  é o vetor de posição dos ruídos,  $\mathbf{X}_{LMI}$  e  $\mathbf{Y}_{LMI}$  são a solução da LMI e  $\text{tr}(\cdot)$  é o traço da matriz. Em Valer (1999) é possível, ainda, encontrar informações sobre as propriedades de robustez e sobre acompanhamento de sinais de referência utilizando o LQR.

## 5.4 MODELO DINÂMICO PARA PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO

O problema real do projeto de controle robusto consiste em sintetizar um controlador, o qual mantém a resposta do sistema em condições aceitáveis, mesmo na presença de incertezas no sistema. Estas incertezas podem aparecer pelos seguintes fatores: erros na modelagem da planta, presença de não linearidades, parâmetros modais imprecisos (principalmente para modelos identificados a partir de dados experimentais), presença de distúrbios desconhecidos e ruídos nos sensores. O problema de controle robusto se tornou mais popular após os resultados obtidos com o LQR em sistemas multivariáveis. Além de garantir que o sistema de controle a malha fechada é estável, o LQR tem excelentes propriedades de robustez incluindo margens de ganho de  $-6$  dB a  $+\infty$  dB e margens de fase de  $\pm 60^\circ$  por canal de controle (VALER, 1999). Em particular para o controlador LQR, que foi utilizado neste trabalho, as principais vantagens são as margens de estabilidade garantidas e que o ganho do controlador é constante (o que facilita sua implementação) e como principal desvantagem está a necessidade de se conhecer todos os estados.

Neste trabalho, para o projeto dos controladores robustos foram consideradas incertezas na matriz dinâmica da estrutura. Em algumas aplicações as matrizes foram identificadas a partir de dados experimentais, assim, realizando  $n_t$  (com  $n_t > 1$ ) testes de aquisição dos sinais de entrada e saída,  $n_t$  conjuntos de matrizes que representam o sistema através da realização no espaço de estados modal foram identificados. Uma vez que a partir de cada teste de identificação se obtém matrizes com propriedades modais relativamente diferentes (*principalmente o fator de amortecimento, que em geral é de difícil identificação*), foi considerado que a matriz dinâmica do sistema nominal se encontra limitada pelas matrizes identificadas, logo, sendo estas os vértices do politopo considerado no projeto. Idéia similar é apresentada por Moreira (1998), no entanto, o autor obtém as matrizes que representam os vértices do politopo provocando variações conhecidas na estrutura. Para clareza de entendimento, a seguir é apresentada esta formulação.

O modelo dinâmico no espaço de estados que representa as considerações descritas acima é apresentado na equação (5.35), mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_w \mathbf{w}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{A}(t) \in \Omega \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{5.35}$$

onde  $\Omega$  é o politopo descrito por um conjunto de vértices em um espaço convexo. Note que as matrizes dinâmicas  $\mathbf{A}(t)$  são obtidas através da utilização do método de subespaço

considerando dados experimentais, logo, aqui são representadas em função do tempo para enfatizar a presença de parâmetros incertos. Mais claramente é mostrado na equação (5.36)

$$\mathbf{A} \in \Omega, \quad \Omega = Co\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_v\} \quad (5.36)$$

onde  $v$  é o número de vértices do polítopo no espaço convexo  $Co$  (BOYD et al., 1994b).

Com esta metodologia, é possível projetar controladores com robustez a variações da matriz dinâmica e obter o ganho ótimo no espaço convexo considerado. Também, realizando o truncamento dos estados se consegue projetar controladores de ordem reduzida, como é mostrado na equação (5.37).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c \\ \dot{\mathbf{x}}_r \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_r(t) \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{cases} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{wc} \\ \mathbf{B}_{wr} \end{bmatrix} \mathbf{w} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{uc} \\ \mathbf{B}_{ur} \end{bmatrix} \mathbf{u}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c & \mathbf{C}_r \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_r \end{cases} \quad (5.37)$$

onde  $\mathbf{A}_c(t)$  é dada pela equação (2.27); e o subíndices  $c$  e  $r$  correspondem aos modos controlados e aos modos residuais, respectivamente.

## CAPÍTULO 6. OBSERVADORES DE ESTADOS

A teoria de controle moderno é baseada na formulação do espaço de estados (OGATA, 1997). Algumas características impulsionam esta utilização, com destaque no projeto de sistemas de controle multivariável (MIMO), que pode ser realizado com a mesma facilidade que para sistemas com entradas e saídas simples (SISO). Isto encoraja a utilização desta formulação escrita no domínio do tempo e, em contrapartida, deixa as formulações escritas no domínio da frequência em certo desuso (VALER, 1999).

Uma característica comum desta formulação é a suposição de que o vetor de estado completo é disponível para propósitos de realimentação, o que é factível apenas quando a dinâmica do sistema a controlar é descrita por um pequeno número de equações diferenciais, tais que todas as variáveis de estado possam ser medidas. No entanto, quando o número de variáveis é grande a quantidade de sensores necessários pode inviabilizar esta implementação.

Em geral, é disponível apenas um pequeno número de sensores, então, o uso de um observador de estados (no sentido de estimador) permite a solução do problema de se obter o vetor de estado completo a partir das variáveis disponíveis. Assim, um algoritmo de controle é dividido em duas partes: uma parte baseada na suposição de que todas as variáveis de estado podem ser medidas; e a outra é o projeto do observador de estado. A propriedade de poder separar o projeto de controle por realimentação em duas partes é conhecida como *Princípio da Separação* e é muito importante para sistemas lineares e uma classe limitada de sistemas não lineares.

O conceito de observador para sistemas dinâmicos foi introduzido por Luenberger em 1964 com a demonstração de como as entradas e saídas disponíveis de um sistema podem ser usadas para construir uma estimativa do vetor de estados deste sistema. Este dispositivo de reconstrução dos estados foi chamado de *observador de Luenberger*, ou simplesmente *observador* (MARANO, 2002). A demonstração completa da reconstrução do vetor de estados a partir das variáveis conhecidas para um sistema linear foi mostrada em Luenberger (1966). O trabalho de Luenberger mostra que para um sistema com vetor de estados de ordem  $n$  e  $m$  estados independentes medidos ( $m < n$ ), um observador de ordem  $(n-m)$  pode reconstruir os estados não medidos. Vários trabalhos foram apresentados discutindo diferentes tipos de observadores, como observador identidade e o de ordem reduzida (LUENBERGER, 1971); e o trabalho de Rudolph Emil Kalman, publicado em 1960, que descreveu um processo recursivo

para solucionar problemas lineares relacionados à filtragem de dados discretos foi de grande importância para todo este desenvolvimento (KALMAN, 1960b). Desde então, novos tipos de observadores e algumas variações têm surgido. O presente capítulo apresenta um resumo de alguns tipos de observadores para propiciar ao leitor mais informações sobre o assunto. O observador utilizado nas aplicações deste trabalho foi o estimador baseado no filtro de Kalman.

## 6.1 CONCEITO DE OBSERVADOR DE ESTADOS

Um observador de estados para um sistema dinâmico original  $S(\mathbf{y};\mathbf{x};\mathbf{u})$  com estado  $\mathbf{x}$ , saída  $\mathbf{y}$  e entrada  $\mathbf{u}$  é um sistema dinâmico auxiliar  $\hat{S}(\hat{\mathbf{x}};\mathbf{z};\mathbf{y};\mathbf{u})$  com a propriedade de que a saída  $\hat{\mathbf{x}}$  do sistema  $\hat{S}$  converge ao vetor de estado  $\mathbf{x}$  do sistema  $S$ , independentemente da entrada  $\mathbf{u}$  e do estado  $\mathbf{x}$  de  $S$ . A figura 6.1 ilustra este enunciado graficamente:

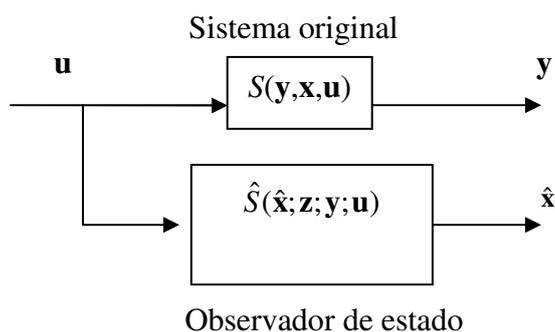


Figura 6.1 – Definição de observador de estado.

A construção deste observador é possível somente se o sistema original é observável ou pelo menos detectável. Diferentemente do sistema  $S$ , que é em geral algo físico, o sistema  $\hat{S}$  é abstrato e é implementado por um programa de computador.

## 6.2 OBSERVADOR DE ORDEM PLENA

Considere um sistema original linear, invariante no tempo e observável:

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (6.1)$$

A primeira idéia que surge para obter as variáveis de estado  $\mathbf{x}$  a partir das variáveis disponíveis é resolver o sistema de equações dado pela equação das saídas:

$$\mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$$

mas isto só é possível quando  $\mathbf{C}$  tem posto  $n$ , ou seja, quando o número de medições independentes é igual ao número de variáveis de estado do sistema. No entanto, em geral este não é o caso.

Um segundo modo de recuperar as variáveis de estado quando a matriz de observabilidade  $\mathbf{O}$  tem posto  $n$ , ou seja, quando o sistema é observável, é mediante derivação. Assim, derivando-se a equação de saídas do sistema original (6.1):

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}(t)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

e assim por diante até  $\mathbf{y}^{(n-1)}$ . Arranjando estas expressões em forma matricial:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{O}\mathbf{x}(t) + \mathbf{T}_\Delta \mathbf{u}(t) \quad (6.2)$$

onde:

$$\mathbf{y}(t) = [\mathbf{y}(t); \dot{\mathbf{y}}(t); \dots; \mathbf{y}^{(n-1)}(t)]$$

$$\mathbf{u}(t) = [\mathbf{u}(t); \dot{\mathbf{u}}(t); \dots; \mathbf{u}^{(n-1)}(t)]$$

a matriz  $\mathbf{O}$  é a matriz de observabilidade do sistema  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  como definida na equação (2.31) e a matriz  $\mathbf{T}_\Delta$  é uma matriz triangular inferior. Da equação 6.2:

$$\mathbf{O}\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{T}_\Delta \mathbf{u}(t) \quad (6.3)$$

Já que  $\mathbf{O}$  possui  $n$  linhas linearmente independentes; pode-se determinar desta última equação o vetor de estado  $\mathbf{x}$ . Ainda que este procedimento seja teoricamente válido, o uso de derivadas de alta ordem das variáveis medidas, que na prática sempre contêm ruído, faz com que esta implementação não seja possível.

Uma outra idéia que surge é a da construção de um observador em malha aberta, o qual é determinado pelas mesmas equações e condições iniciais do sistema a observar. Então:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

mas este tipo de observador conduz ao desejado vetor de estado só no caso em que as condições iniciais do sistema original são conhecidas com precisão e o sistema original é estável.

### 6.2.1 Estrutura para Observadores de Ordem Plena

Na prática, o estado inicial é desconhecido e um melhor estado pode ser obtido tomando vantagem da disponibilidade tanto da entrada como da saída do sistema. Assim, a diferença entre a saída  $y$  do sistema original  $S$  e o vetor  $C\hat{x}$  chamada *residual*:  $\epsilon_r(t) = y(t) - C\hat{x}(t)$  pode ser considerado como um termo de correção da seguinte maneira:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_{ot}(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (6.4)$$

ou

$$\hat{S}_{ot} : \dot{\hat{x}}(t) = (A - K_{ot}C)\hat{x}(t) + Bu(t) + K_{ot}y(t) \quad (6.5)$$

O sistema auxiliar  $\hat{S}_{ot}$  é chamado de *observador de estado de ordem plena* para o sistema  $S$ . A matriz  $K_{ot}$  é chamada de *matriz ganho do observador* e a matriz  $\hat{A} = A - K_{ot}C$  é chamada de *matriz do observador*. Neste caso, o observador pode ser interpretado como um sistema de controle por realimentação, onde o residual  $\epsilon_r$ , por conseguinte o erro de aproximação  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  tem que tender assintoticamente à zero. Das equações (6.1) e (6.5), pode-se determinar a dinâmica do erro de aproximação:

$$\dot{e}(t) = \hat{x}(t) - x(t) = \hat{A}e(t) \quad (6.6)$$

este erro convergirá a zero se e somente se a matriz do observador  $\hat{A}$  tem todos seus autovalores com parte real negativa, de tal forma que o problema fundamental no projeto de observadores é a determinação da matriz de ganho  $K_{ot}$  (VALER, 1999). O seguinte teorema, conhecido como Teorema de Wonham, garante a alocação arbitrária dos autovalores desta matriz quando o sistema é completamente observável.

**Teorema:** *Há pelo menos uma matriz real  $K_{ot}$  tal que o conjunto de autovalores de  $A - K_{ot}C$  (em pares complexos conjugados) pode ser arbitrariamente atribuído se e somente se o par de matrizes  $(A, C)$  é completamente observável.*

### 6.2.2 Observador para Sistemas Detectáveis

Muitos dos sistemas dinâmicos são completamente observáveis e a alocação arbitrária dos  $n$  autovalores do observador é possível. Quando o sistema não é observável esta alocação arbitrária já não é mais possível, no entanto, se o sistema é detectável, a alocação dos autovalores dos modos observáveis pode ser arbitrária, enquanto, que os autovalores dos modos não observáveis não poderão ser modificados. Mas, já que estes últimos autovalores são estáveis um observador estável poderá ser construído.

Quando o sistema é detectável\*, este pode ser dividido em dois subsistemas, tal que um deles seja observável e o outro não observável, mas estável através de uma transformação de similaridade:

$$S: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{no}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_o(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{no} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{no}(t) \\ \mathbf{x}_o(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{no}(t) \\ \mathbf{x}_o(t) \end{bmatrix} = \mathbf{C}_o \mathbf{x}_o(t) \end{cases} \quad (6.7)$$

onde o par de matrizes  $(\mathbf{A}_o, \mathbf{C}_o)$  é observável e  $\mathbf{A}_{no}$  tem todos seus autovalores com parte real negativa. Neste caso, a matriz do observador  $\hat{\mathbf{A}}$  será:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{no} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_o \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{no} & \mathbf{A}_{12} - \mathbf{K}_1 \mathbf{C}_o \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_o - \mathbf{K}_2 \mathbf{C}_o \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

\*Um sistema é detectável quando para o par  $(\mathbf{C}, \mathbf{A})$  existe uma matriz  $\mathbf{M}$  tal que  $\rho(\mathbf{A} + \mathbf{M}\mathbf{C})$  pertence ao disco unitário aberto, onde  $\rho(\mathbf{A} + \mathbf{M}\mathbf{C})$  é o conjunto dos autovalores de  $(\mathbf{A} + \mathbf{M}\mathbf{C})$ .

Já que os autovalores da matriz  $\hat{\mathbf{A}}$  são formados pelos autovalores de  $\mathbf{A}_{no}$  e  $(\mathbf{A}_{no} - \mathbf{K}_2 \mathbf{C}_o)$ , só será possível alocar os autovalores da matriz  $\mathbf{A}_o$  mediante a matriz  $\mathbf{K}_2$  e os autovalores restantes ficarão determinados pela matriz  $\mathbf{A}_{no}$  (com todos seus autovalores com parte real negativa). Uma forma prática de se determinar a matriz de ganho  $\mathbf{K}_{ot}$  para sistemas detectáveis é usando a equação de Riccati (VALER, 1999).

### 6.2.3 Escolha dos Autovalores do Observador

A velocidade de resposta de um sistema dinâmico depende dos autovalores. Quando o observador é implementado num sistema de controle por realimentação, os autovalores do

observador deverão ser escolhidos tal que a resposta deste seja muito mais rápida que a resposta do sistema de controle em malha fechada, quando todo o vetor de estado é disponível. Isto é para não alterar a velocidade de resposta do sistema de controle. Já que o observador é implementado de forma analógica ou digital, o projetista pode ficar tentado incrementar a velocidade de resposta tal que o vetor de estado estimado  $\hat{\mathbf{x}}$  convirja rapidamente ao vetor de estado  $\mathbf{x}$ . No entanto, quando isto acontece, o observador pode atuar como um derivador e a sensibilidade à ruídos aumentará. Uma boa regra prática é escolher estes autovalores tal que a resposta dinâmica do observador seja pelo menos 2 a 5 vezes mais rápida que a resposta do sistema a malha fechada com realimentação total de estado (VALER, 1999).

### 6.3 OBSERVADOR DE ORDEM REDUZIDA

O observador de ordem plena tem a mesma ordem da planta  $n$  com a finalidade de reconstruir todas as variáveis de estado do sistema. No entanto, esta ordem pode ser reduzida já que as variáveis de saída provêm  $m$  relações lineares independentes entre as variáveis de estado e daqui é apenas preciso observar  $n-m$  variáveis e determinar as restantes destas relações lineares. Esta redução de ordem não é muito significativa quando é observada apenas uma variável, mas para sistemas com mais de uma variável de saída uma redução mais substancial pode ser obtida. É importante notar que as variáveis de saída envolvem ruídos significantes, então o uso de um observador de ordem plena pode ser uma melhor escolha.

A idéia básica de um observador de ordem reduzida é gerar  $n-m$  combinações lineares das variáveis de estado:

$$\mathbf{z}_a(t) = \mathbf{M}_{\text{obs}} \mathbf{x}(t) \quad (6.9)$$

combinando o vetor  $\mathbf{z}(t)$  de dimensão  $(n-m)$  com a equação de saídas  $\mathbf{y}$  de  $m \times 1$  do sistema original (3.1)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{M}_{\text{obs}} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (6.10)$$

daqui o vetor completo de estado poderá ser obtido através de:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{M}_{\text{obs}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\text{obs}} & \mathbf{P}_{\text{obs}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}_a(t) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

a matriz  $\mathbf{M}_{\text{obs}}$  é tal que a inversa da matriz  $[\mathbf{C}^T \mathbf{M}_{\text{obs}}^T]$  exista. O vetor  $\mathbf{z}$  pode ser construído através de uma aproximação assintótica  $\mathbf{z}$  a partir de  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{u}$  usando um sistema dinâmico auxiliar de ordem reduzida  $n-m$ . O vetor de estado aproximado do sistema original  $\hat{\mathbf{x}}$  pode ser determinado utilizando a equação (6.11). Assim:

$$\hat{S}_{or} : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{D}\mathbf{z}(t) + \mathbf{E}\mathbf{y}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}_{\text{obs}}\mathbf{z}(t) + \mathbf{V}_{\text{obs}}\mathbf{y}(t) \end{cases} \quad (6.12)$$

O sistema  $\hat{S}_{or}$  é chamado *observador de estado de ordem reduzida* para o sistema dinâmico  $S$ . Este observador é algumas vezes chamado *observador de estado de ordem mínima*, já que é um sistema dinâmico com a menor ordem possível capaz de estimar o vetor de estado completo com alocação arbitrária dos seus autovalores.

As matrizes  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{G}$  são as *matrizes de projeto do observador*. Um detalhe a ressaltar é que neste tipo de observador as variáveis de saída  $\mathbf{y}$  influenciam diretamente na estimativa do vetor de estado  $\hat{\mathbf{x}}$  e daqui este observador é mais suscetível a ruídos nas medições do que o observador de ordem plena onde todas as medições passam pelo processo dinâmico do observador o qual atua como um filtro passa baixa (VALER, 1999).

#### 6.4 OBSERVADOR DE UMA FUNÇÃO LINEAR DO ESTADO DE ORDEM MÍNIMA

Tanto o observador de ordem plena quanto o de ordem reduzida descritos anteriormente, tem como finalidade a reconstrução total do vetor de estado. Um resultado importante foi que um observador de ordem  $n-m$  poderia realizar a tarefa. No entanto, freqüentemente o observador é usado em sistemas de controle e daqui é apenas preciso estimar uma função linear das variáveis de estado:  $\mathbf{w} = \mathbf{F}\mathbf{x} \in R^r$  para propósitos de realimentação.

Com esta finalidade o conceito de observador de estados é generalizado para o caso em que um funcional linear precisa ser estimado com aproximação assintótica. Já que a estimação de uma função linear das variáveis de estado não requer necessariamente a estimação de todas as variáveis de estado, a ordem deste observador pode ser menor que a ordem do observador de estado de ordem reduzida no caso que o número de variáveis medidas ( $m$ ) seja menor que o número de funcionais a estimar ( $r$ ), (VALER, 1999). Assim, um observador de ordem:

$$l_{fl} \leq n - m \quad (6.13)$$

pode realizar esta tarefa diminuindo desta maneira o tempo de cálculo já na simulação numérica, como na implementação em tempo real (VALER, 1999).

Com a finalidade de poder estimar uma função linear do vetor de estado para um sistema original (6.1) do tipo:

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad (6.14)$$

um observador de ordem  $l$  com a seguinte estrutura é considerado:

$$\hat{S}_{pl} : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{D}\mathbf{z}(t) + \mathbf{E}\mathbf{y}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \\ \hat{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t) + \mathbf{V}\mathbf{y}(t) \end{cases} \quad (6.15)$$

O vetor  $\mathbf{z} \in R^{l_n}$  aproximará uma função linear do vetor de estado  $\mathbf{M}\mathbf{x}$  e  $\hat{\mathbf{w}} \in R^r$  aproximará  $\mathbf{F}\mathbf{x}$ . O problema do observador do funcional linear é a determinação das matrizes do observador (6.15) tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\hat{\mathbf{w}}(t) - \mathbf{F}\mathbf{x}(t)] = \mathbf{0} \quad (6.16)$$

## 6.5 OBSERVADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL

O observador proporcional-integral é capaz de estimar qualquer distúrbio (constante, linear, não-linear) sempre que este seja mais lento que a constante de tempo da ação integral; e o número de medições não seja menor que o número de distúrbios (VALER, 1999). Aumentando o ganho integral é possível rejeitar distúrbios mais rápidos, no entanto, isto tem o efeito negativo de diminuir a margem de estabilidade do observador. Temos para este caso de observador:

$$\hat{S}_{pl} : \begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_w \mathbf{w}(t) + \mathbf{K}_p (\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \\ \dot{\hat{\mathbf{w}}}(t) = \mathbf{K}_I (\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \end{cases} \quad (6.17)$$

onde  $\mathbf{K}_p$  e  $\mathbf{K}_I$  são os ganhos proporcional e integral, respectivamente. Equivalentemente:

$$\hat{S}_{pl} : \dot{\hat{\mathbf{x}}}_{pl}(t) = \mathbf{A}_{pl} \hat{\mathbf{x}}_{pl}(t) + \mathbf{B}_{pl} \mathbf{u}(t) + \mathbf{K}_{pl} (\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}_{pl} \hat{\mathbf{x}}_{pl}(t)) \quad (6.18)$$

onde

$$\hat{\mathbf{x}}_{pl} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{pl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_w \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{pl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_{pl} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}]; \quad \mathbf{K}_{pl} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p \\ \mathbf{K}_I \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

A condição necessária e suficiente para a existência do observador é que o par  $(\mathbf{A}_{pl}, \mathbf{C}_{pl})$  seja observável ou pelo menos detectável, de maneira que seja possível alocar os autovalores da seguinte matriz do lado esquerdo do plano complexo:

$$\hat{\mathbf{A}}_{pl} = \mathbf{A}_{pl} - \mathbf{K}_{pl} \mathbf{C}_{pl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{K}_p \mathbf{C} & \mathbf{B}_w \\ -\mathbf{K}_I \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

## 6.6 ESTIMADOR DE KALMAN

Esta seção trata da apresentação resumida do filtro de Kalman. O filtro de Kalman tem sua origem na década de sessenta, dentro da área da engenharia elétrica relacionado à teoria do controle de sistemas. Posteriormente, esta metodologia foi sendo incorporada a outras áreas como a estatística. Sua aplicação na área econômica e financeira é vasta. Inúmeros artigos e trabalhos são publicados rotineiramente fazendo uso do filtro de Kalman. Este conteúdo está baseado em Harvey (1989). Outra referência relevante e recente sobre o filtro de Kalman e modelos não lineares e não Gaussianos é Durbin e Koopman (2002). As referências clássicas sobre o tema são: Anderson e Moore (1979) e Jazwinski (1970).

Em 1960 Rudolph Emil Kalman publicou um famoso artigo descrevendo um processo recursivo para solucionar problemas lineares relacionados à filtragem de dados discretos. Sua pesquisa proporcionou contribuições relevantes ajudando a estabelecer bases teóricas sólidas em várias áreas da engenharia de sistemas. Em 1960-1961 Kalman desenvolveu, com colaboração de Richard S. Bucy, a versão em tempo contínuo do filtro de Kalman, que se tornou conhecida como o filtro de Kalman-Bucy. Com o avanço computacional, o filtro de Kalman e suas extensões a problemas não lineares representam o produto mais largamente utilizado dentro da moderna teoria de controle.

O filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que constitui um processo recursivo eficiente de estimação, uma vez que o erro quadrático é minimizado (WELCH; BISHOP, 1995). Através da observação da variável denominada “variável de observação” outra variável, não observável, denominada “variável de estado” pode ser estimada eficientemente. Podem ser estimados os estados passados, o estado presente e mesmo previstos os estados futuros. O filtro de Kalman é um procedimento aplicável quando os modelos estão escritos sob a forma espaço-estado. Além disso, o filtro de Kalman permite a estimação dos parâmetros desconhecidos do modelo através da maximização da verossimilhança\* via decomposição do erro de previsão.

\*Maximização da verossimilhança é o mesmo que maximização de uma função de probabilidade condicional, ou seja, a probabilidade de um evento “a” sabendo que ocorreu um outro evento “b”, e representa-se por  $p(alb)$ .

Para a definição do problema do projeto de um estimador de estados baseado no filtro de Kalman é necessário considerar o sistema com a seguinte representação

$$\hat{S}_K : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_{Rp} \mathbf{w}_{Rp}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \end{cases} \quad (6.21)$$

onde  $\mathbf{B}_{Rp}$  é a matriz de posição do ruído de processo,  $\mathbf{w}_{Rp}(t)$  é chamado de ruído de excitação no estado (ou ruído de processo) e representa um distúrbio no sistema,  $\mathbf{v}(t)$  é o vetor de ruídos no sensor (ou ruído de medida). As matrizes  $\mathbf{V}_K$  e  $\mathbf{W}_K$  são as matrizes de covariância de ruído de processo e de ruído de medidas, respectivamente. Estas matrizes são definidas por

$$\mathbf{V}_K = E(\mathbf{w}_{Rp}(t)\mathbf{w}_{Rp}^T(t)), \quad \mathbf{W}_K = E(\mathbf{v}(t)\mathbf{v}^T(t)) \quad (6.22)$$

onde  $E(\cdot)$  denota o valor esperado (média). Matematicamente o valor esperado  $E(x)$  é definido

como  $\int_{-\infty}^{\infty} x \text{PDF}(x) dx$ , onde  $\text{PDF}(x)$  é a função densidade de probabilidade. Uma FDP é uma

função que representa a distribuição da probabilidade em termos de uma integral.

Devido à natureza estocástica do filtro de Kalman, o ruído de processo e o ruído de medida são supostos ruídos Gaussianos branco, estacionários (invariante no tempo) e não correlacionados entre si, seja (VALER, 1999)

$$E(\mathbf{w}_{Rp}(t)) = 0, \quad E(\mathbf{v}(t)) = 0, \quad \forall t \quad \text{e} \quad E(\mathbf{w}_{Rp}(t)\mathbf{v}^T(t)) = E(\mathbf{v}(t)\mathbf{w}_{Rp}^T(t)) = 0 \quad (6.23)$$

*Observação: um ruído branco Gaussiano é um ruído cuja função densidade de probabilidade corresponde a uma distribuição normal. O ruído branco é um tipo de ruído produzido pela combinação simultânea de sons de todas as componentes de frequência. O adjetivo branco é utilizado para descrever este tipo de ruído em analogia ao funcionamento da luz branca, dado que está é obtida a partir da combinação simultânea de todas as componentes cromáticas.*

Seja  $\mathbf{y}_t$  uma série temporal multivariada com  $N$  elementos. Estas variáveis são denominadas variáveis observáveis e constituem um vetor  $N \times 1$ ,  $\mathbf{y}_t \in \mathbf{R}^N$ . As variáveis observáveis estão relacionadas às variáveis de estado  $\mathbf{x}_t$  através da equação de medição (ou observação):

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{d}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (6.24)$$

onde  $\mathbf{Z}_t$  é uma matriz  $N \times m$ ,  $\mathbf{d}_t$  é um vetor  $N \times 1$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  é um vetor serialmente não correlacionado com média zero e matriz de covariância  $\mathbf{H}_t$  e  $\mathbf{x}_t$  é um vetor  $m \times 1$  que contém as variáveis de estado não observáveis. A matriz  $\mathbf{Z}_t$  transforma o sistema de coordenadas do vetor de características estimadas no vetor de características medido (ARULAMPALAM et al., 2002).

As variáveis de estado são geradas por um processo Markoviano de primeira ordem e sua equação é denominada equação de transição:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{T}_t \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{c}_t + \mathbf{R}_t \boldsymbol{\eta}_t, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (6.25)$$

onde  $\mathbf{T}_t$  é uma matriz  $m \times m$ ,  $\mathbf{c}_t$  é um vetor  $m \times 1$ ,  $\mathbf{R}_t$  é uma matriz  $m \times g$  e  $\boldsymbol{\eta}_t$  é um vetor  $g \times 1$  serialmente não correlacionado com média zero e matriz de covariância  $\mathbf{Q}_t$ .

Além disso, o vetor inicial de estado  $\mathbf{x}_0$  tem média  $\hat{\mathbf{x}}_0$  e matriz de covariância  $\mathbf{P}_0$ . Os ruídos  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  e  $\boldsymbol{\eta}_t$  são não correlacionados entre si e não correlacionados com estado inicial.

Para se conhecer as origens computacionais do filtro de Kalman é necessário definir por  $\hat{\mathbf{x}}_t^- \in \mathbb{R}^m$  a estimativa do estado anterior (a *priori*) no tempo  $t$  dado que se conhece todo o processo anterior a  $t$ . Por estado anterior se refere ao estado antes do conhecimento da variável de observação em  $t$ ,  $\mathbf{y}_t$ . Da mesma forma,  $\hat{\mathbf{x}}_t \in \mathbb{R}^m$  é a estimativa do estado posterior (a *posteriori*) em  $t$  dado que conhece a medição (ou observação)  $\mathbf{y}_t$ .

Então, definem-se os erros de medição anterior e posterior como:

$$\mathbf{e}_t^- = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t^- \quad (6.26)$$

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t \quad (6.27)$$

A matriz de covariância de erro anterior  $\mathbf{P}_t^-$  é  $m \times m$  e dada por:

$$\mathbf{P}_t^- = E(\mathbf{e}_t^- \mathbf{e}_t^{-T}) \quad (6.28)$$

A matriz de covariância de erro posterior  $\mathbf{P}_t$  é  $m \times m$  e dada por:

$$\mathbf{P}_t = E(\mathbf{e}_t \mathbf{e}_t^T) \quad (6.29)$$

Deseja-se encontrar uma equação que relacione o estado posterior  $\hat{\mathbf{x}}_t$  como uma combinação linear do estado anterior  $\hat{\mathbf{x}}_t^-$  com a ponderação da diferença entre a observação  $\mathbf{y}_t$  e a previsão  $\mathbf{Z}_t \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{d}_t$ , ou seja,

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t \hat{\mathbf{x}}_t^- - \mathbf{d}_t) \quad (6.30)$$

O termo entre parênteses reflete a diferença entre o previsto  $\mathbf{Z}_t \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{d}_t$  e a observação  $\mathbf{y}_t$ . A matriz  $\mathbf{K}_t$  ( $m \times N$ ) é denominada ganho de Kalman e é tal que minimiza a matriz de covariância de erro  $\mathbf{P}_t$  dada pela equação (6.29).

A minimização da covariância de erro é obtida substituindo a equação (6.30) na equação (6.27) e obtendo uma expressão para  $\mathbf{e}_t$  em termos de  $\mathbf{K}_t$ . Levando este resultado na equação (6.29), tomando-se então os valores esperados, derivando-os com relação à  $\mathbf{K}_t$  e igualando a equação à zero; tem-se a condição de primeira ordem. Resolvida esta equação para  $\mathbf{K}_t$ , resulta:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t \mathbf{Z}_t^T (\mathbf{Z}_t \mathbf{P}_t \mathbf{Z}_t^T + \mathbf{H}_t)^{-1} \quad (6.31)$$

Na equação acima quando o erro da equação de medição aproxima-se de zero ( $\mathbf{H}_t \rightarrow 0$ ), a ponderação da matriz ganho aumenta; ou ainda,  $\lim_{\mathbf{H}_t \rightarrow 0} \mathbf{K}_t = \mathbf{Z}_t^{-1}$ .

A derivação do filtro de Kalman se apóia no fato de que tanto os ruídos das equações de medição e transição como o vetor inicial de estado, são normalmente distribuídos. Isto significa que apenas os dois primeiros momentos são suficientes para descrever todos os estados em qualquer instante de  $t = 1$  a  $t = T$ . Assim sendo, escreve-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = E(\mathbf{x}_t) \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_t = E\{(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^T\} \quad (6.32)$$

A estimativa anterior dada pela equação (6.30) é Gaussiana. A matriz de covariância posterior (Eq. 6.29) reflete a variância da distribuição das variáveis de estado. Então,  $p(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_t) \sim N(\hat{\mathbf{x}}_t, \mathbf{P}_t)$

onde  $N(\hat{\mathbf{x}}_t, \mathbf{P}_t)$  é uma função densidade de probabilidade Gaussiana com argumento  $\hat{\mathbf{x}}_t$  e covariância  $\mathbf{P}_t$ .

A formulação acima mostra que o filtro de Kalman é um procedimento recursivo que permite determinar o estimador ótimo do vetor de estado; dadas às informações disponíveis até o tempo  $t$ , inclusive as variáveis de observação  $\mathbf{y}_t$ . Esta é a interpretação básica do que aparece na equação (6.30). O estimador é dito ótimo no sentido de que a matriz de ganho é tal que a variância do erro das variáveis de estado é mínima (Eq. 6.31). Quando a hipótese da normalização não se verifica, o filtro de Kalman não fornece os valores esperados das variáveis de estado, no entanto, o filtro continua sendo o estimador ótimo; isto é, minimiza a variância do erro.

As equações do filtro de Kalman podem ser agrupadas em dois tipos distintos: equações de atualização do tempo e equações de atualização da medição. Estes dois grupos de equações funcionam conjuntamente como um sistema de retroalimentação.

As equações de atualização de tempo são responsáveis pelo avanço das variáveis de estado e das covariâncias no tempo para se obter, desta forma, as estimativas anteriores (a *priori*) para o próximo instante. As equações das atualizações são responsáveis pela retroalimentação, ou seja, incorporam uma nova informação da variável observável nas estimativas anteriores para obter um ganho (ou melhoria) na estimação anterior. As equações de atualização do tempo são denominadas equações de previsão. As equações de atualização de medições são denominadas equações de correção.

Seja então o modelo especificado pelas equações (6.24) e (6.25), seja  $\hat{\mathbf{x}}_{t-1}$  o estimador ótimo de  $\mathbf{x}_{t-1}$  baseado em informações até  $t-1$ , incluindo  $\mathbf{y}_{t-1}$ . Dados  $\hat{\mathbf{x}}_{t-1}$  e  $\mathbf{P}_{t-1}$ , o estimador ótimo de  $\mathbf{x}_t$  é dado por:

$$\hat{\mathbf{x}}_t^- = \mathbf{T}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \mathbf{c}_t \quad (6.34)$$

A matriz de covariância de erros das variáveis de estado é dada por:

$$\mathbf{P}_t^- = \mathbf{T}_t \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{T}_t^T + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t^T \quad (6.35)$$

As equações (6.34) e (6.35) constituem o grupo denominado de equações de atualização do tempo ou equações de previsão. Estas equações apresentam um avanço no tempo de  $t-1$  para  $t$ . Quando uma nova observação  $\mathbf{y}_t$  é verificada, o estimador  $\hat{\mathbf{x}}_t^-$  de  $\mathbf{x}_t$  pode ser melhorado ou corrigido. As equações de atualização das medições são:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^- \mathbf{Z}_t^T (\mathbf{Z}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{Z}_t^T + \mathbf{H}_t)^{-1} \quad (6.36)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{K}_t (\mathbf{y}_t - \mathbf{Z}_t \hat{\mathbf{x}}_t^- - \mathbf{d}_t) \quad (6.37)$$

$$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{Z}_t) \mathbf{P}_t^- \quad (6.38)$$

O primeiro passo é determinar o ganho de Kalman  $\mathbf{K}_t$  dado pela equação (6.36). Posteriormente, a nova informação observada  $\mathbf{y}_t$  é incorporada à previsão anterior  $\hat{\mathbf{x}}_t^-$  juntamente com a matriz ganho  $\mathbf{K}_t$  através da equação (6.37), gerando a estimação posterior  $\hat{\mathbf{x}}_t$ . O último passo é obter a matriz de covariância dos erros através da equação (6.38). O ciclo do algoritmo se repete para o instante de tempo  $t+1$  sendo  $\hat{\mathbf{x}}_t$  e  $\mathbf{P}_t$  dados de entrada nas equações (6.34) e (6.35), respectivamente. Esta natureza recursiva do modelo o torna um

instrumento de atualização de medidas em tempo real, daí o seu grande uso em sistemas de controle de rastreamento no campo de engenharia. Nas aplicações deste trabalho o ganho do observador baseado no filtro de Kalman foi obtido através do comando “lqe” do *software* Matlab<sup>®</sup>.

## CAPÍTULO 7. APLICAÇÕES

Nesta seção são apresentadas algumas aplicações envolvendo as metodologias de posicionamento ótimo de sensores e atuadores e o projeto de controladores robustos via desigualdades matriciais lineares. A primeira aplicação apresenta o posicionamento ótimo de atuadores de pilha em uma viga de aço engastada. Na aplicação foi utilizado um modelo via método dos elementos finitos (FEM) considerando o elemento de viga de Euler Bernoulli, que possui dois graus de liberdade (GL) por nó. Como índice de desempenho do atuador foi utilizado o índice grammiano do atuador. Ainda, é apresentada uma comparação com os resultados obtidos experimentalmente. Nas aplicações numéricas deste trabalho, utilizou-se a matriz de amortecimento proporcional às matrizes de massa e rigidez com os escalares  $\alpha$  e  $\beta$  iguais a  $10^{-1}$  e  $2 \cdot 10^{-8}$ , respectivamente. As matrizes de massa e rigidez de vigas e placas foram obtidas utilizando o programa SMARTSYS, que considera o efeito do acoplamento eletromecânico entre atuadores/sensores e a estrutura base (MARQUI, 2007).

A segunda aplicação apresenta o posicionamento ótimo de atuadores e sensores em uma placa de alumínio engastada em um de seus lados. A placa foi discretizada via FEM considerando o elemento de placa de Kircchoff. Os desempenhos de um atuador e de um sensor foram avaliados para os quatro primeiros modos de vibrar da placa. Como índices de posicionamento foram utilizados as matrizes grammianas de controlabilidade (*para o atuador*) e de observabilidade (*para o sensor*). Nesta aplicação o modelo dinâmico representado no espaço de estados modal e identificado utilizando o método de subespaço a partir de dados experimentais, e com isto, um controlador robusto foi projetado considerando o estimador de estados via filtro de Kalman.

A terceira aplicação apresenta a influência de distúrbios externos no posicionamento ótimo de atuadores. Os resultados foram simulados para uma treliça plana modelada via FEM, considerando dois GL por nó (deslocamentos nas direções x e y). Como índice de desempenho do posicionamento do atuador na ausência de distúrbios foi utilizado o traço da matriz grammiana de controlabilidade. Para se considerar o efeito de distúrbio no posicionamento foi utilizado a matriz grammiana de sensibilidade de distúrbio. Nesta formulação, como apresentado no capítulo 3, item 3.4, se utiliza a matriz dinâmica a malha fechada e o ganho de realimentação foi obtido através do controlador LQR.

A quarta aplicação apresenta a resolução do problema de posicionamento ótimo de sensores e atuadores considerando a configuração geral, ou seja, com distúrbios e saídas de desempenho (saídas reguladas). Nesta aplicação foi utilizada uma treliça espacial modelada via FEM considerando três GL por nó. O desempenho do conjunto de atuadores e sensores em posições ótimas é avaliado através do projeto do controlador LQR buscando atenuar sinais de vibrações nos quatro primeiros modos de vibrar da treliça. Ainda, é apresentada, em detalhes, uma comparação do desempenho deste controlador para o ganho calculado via solução da equação de Riccati (denominado neste trabalho como *ganho tradicional*); e calculado via LMIs (denominado *ganho robusto*). Nesta aplicação se considera que a inclusão dos atuadores em membros estruturais resulta em variação na rigidez destes elementos, então, no projeto do controlador são consideradas incertezas paramétricas.

## 7.1 POSICIONAMENTO ÓTIMO DE ATUADORES DE PILHA

Nesta aplicação é apresentado o posicionamento ótimo de atuadores de pilha (PZT *stacks*). Em geral, estes atuadores são construídos com  $n$  elementos piezelétricos conectados mecanicamente em série e eletricamente em paralelo, como mostra a figura 7.1a (CARVALHAL, 2005; LI et al., 2006). No projeto de controle ativo de vibrações em estruturas do tipo treliças, alguns autores utilizam estes atuadores acoplados nos elementos (barras) estruturais. No entanto, em algumas aplicações envolvendo outras estruturas, estes atuadores são conectados em apenas um ponto da estrutura buscando transmitir força (LI et al., 2006). No referido trabalho os autores apresentam a utilização de um atuador PZT *stack* para controle ativo de vibrações em um eixo de uma caixa de câmbio. A idéia deste tipo de aplicação é ilustrada na figura 7.1b, onde um atuador aplica uma força em um braço-alavanca.

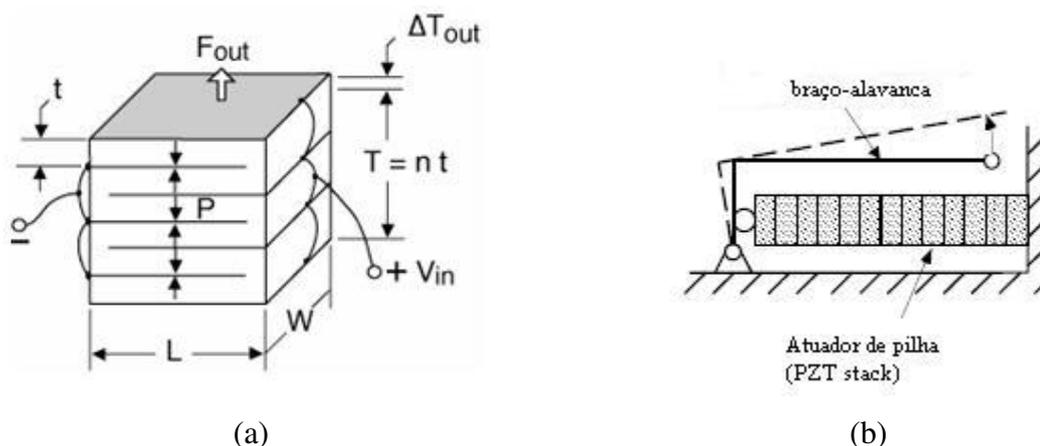


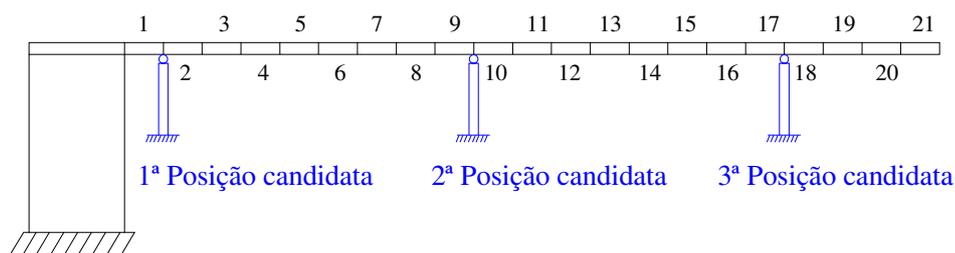
Figura 7.1 – (a) atuador PZT de pilha; (b) PZT de pilha conectado em um braço-alavanca.

Neste contexto, a presente aplicação ilustra o seguinte problema hipotético: *Avaliar o desempenho de um atuador de pilha (PZT stack) quando posicionado em três diferentes posições de uma viga de aço engastada. Apenas três posições (nós 2, 10 e 18) são avaliadas para simplificar a comprovação experimental.*

A aplicação numérica foi realizada em uma viga de aço engasta, discretizada via FEM em 21 elementos estruturais e 22 nós (Fig. 7.2a). Foi utilizado o elemento de Euller-Bernoulli, que considera 2 GL por nó. A tabela 7.2 mostra as propriedades físicas e geométricas da estrutura. Foi considerado um sensor acelerômetro na extremidade livre da viga e foram avaliadas três posições para o atuador PZT, como mostra a figura 7.2b.



(a) elementos e nós da viga de aço



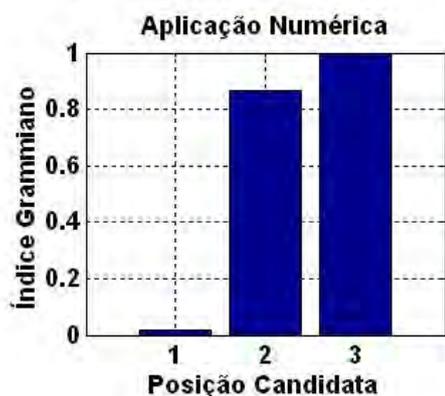
(b) viga e posições candidatas para o atuador de pilha

Figura 7.2 – Viga discretizada e posições candidatas para o atuador PZT.

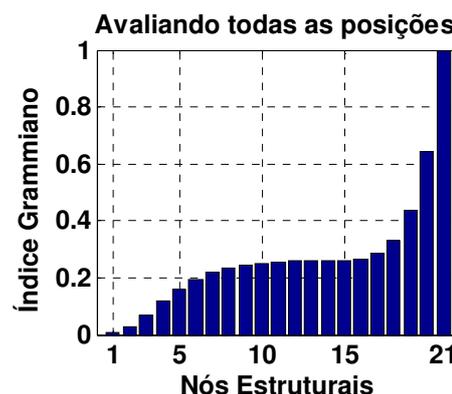
Tabela 7.1 – Propriedades físicas e geométricas da viga utilizada.

Módulo de Elasticidade (GPa)	210
Largura (mm)	37
Espessura (mm)	5
Comprimento L (mm)	420
Densidade (Kg/m <sup>3</sup> )	7800

A figura 7.3a mostra o índice grammiano de desempenho do atuador quando conectado em cada uma das três posições avaliadas. Neste trabalho os gráficos que mostram os valores dos índices foram normalizados para o maior valor ser a unidade. Este índice de posicionamento é dado pelo traço da matriz grammiana de controlabilidade. Nota-se que o desempenho do atuador é maior quando conectado na posição 3. Para aplicações numéricas facilmente é possível avaliar todas as posições candidatas, ou seja, o desempenho do atuador ao ser posicionado em cada um dos nós estruturais, como mostra a figura 7.3b.



(a) índices grammianos para as posições candidatas



(b) índices grammianos para o atuador em cada nó estrutural

Figura 7.3 – Índice grammiano de posicionamento do atuador – aplicação numérica.

Para verificar experimentalmente os resultados obtidos no posicionamento do atuador, foi utilizada a viga de aço mostrada na figura 7.4a. As propriedades físicas e geométricas são as mesmas da aplicação numérica (tabela 7.1). Neste caso, as matrizes necessárias para a representação do sistema no espaço de estados foram obtidas através do método de subespaços. Para indicar a posição do atuador PZT foi utilizado um martelo de impacto (figura 7.4b). Os sinais de saída foram obtidos por um acelerômetro modelo 352C22 PCB Piezotronics®. Para realizar a aquisição dos sinais de entrada e saída foi utilizado o *software* SignalCalc ACE II e um microcomputador com processador Pentium 4. A figura 7.5 mostra os condicionadores de sinais modelos 480E09 PCB Piezotronics®; o martelo de impacto modelo 086C04 PCB Piezotronics®; e o *hardware* de aquisição de dados do ACE II. A figura 7.6 ilustra a configuração completa do experimento realizado.



(a) viga de aço utilizada



(b) martelo de impacto e acelerômetro

Figura 7.4 – Viga de aço utilizada na aplicação experimental.



Figura 7.5 – Equipamentos utilizados na aquisição dos sinais.

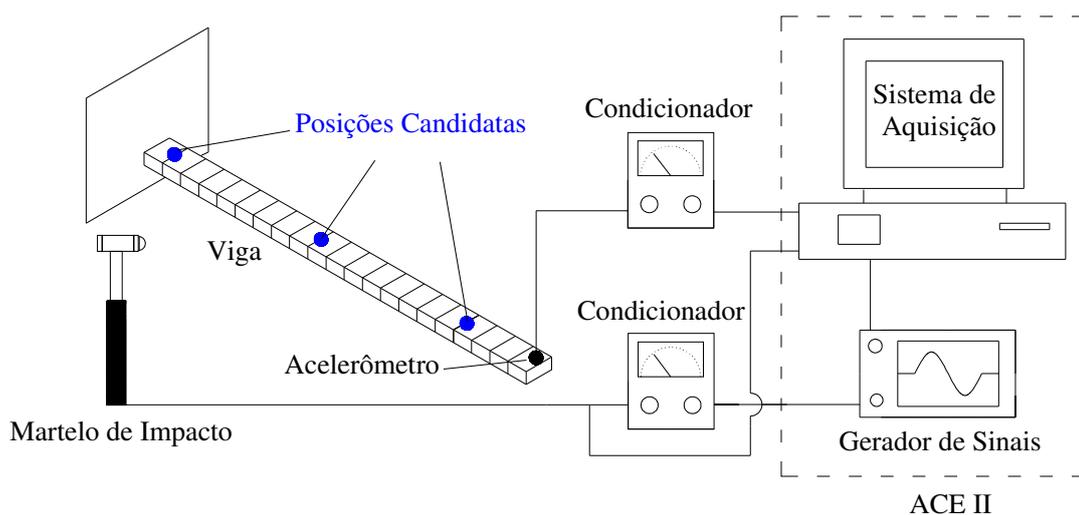


Figura 7.6 – Configuração completa do experimento realizado.

A aquisição dos sinais foi feita para uma largura de banda de 0-1000 Hz e uma taxa de amostragem de 1,25 Hz. As figuras 7.7a, b e c mostram os sinais de entrada obtidos com o martelo de impacto, para cada posição candidata. Os sinais de saída, obtidos com o acelerômetro, são mostrados nas figuras 7.8, 7.9 e 7.10. Ainda, as FRF para cada posição candidata, são mostradas nas figuras 7.11, 7.12 e 7.13. Apenas para comparação entre o modelo obtido via FEM e os resultados experimentais, a tabela 7.2 apresenta as quatro primeiras frequências da viga e os desvios em relação aos valores numéricos.

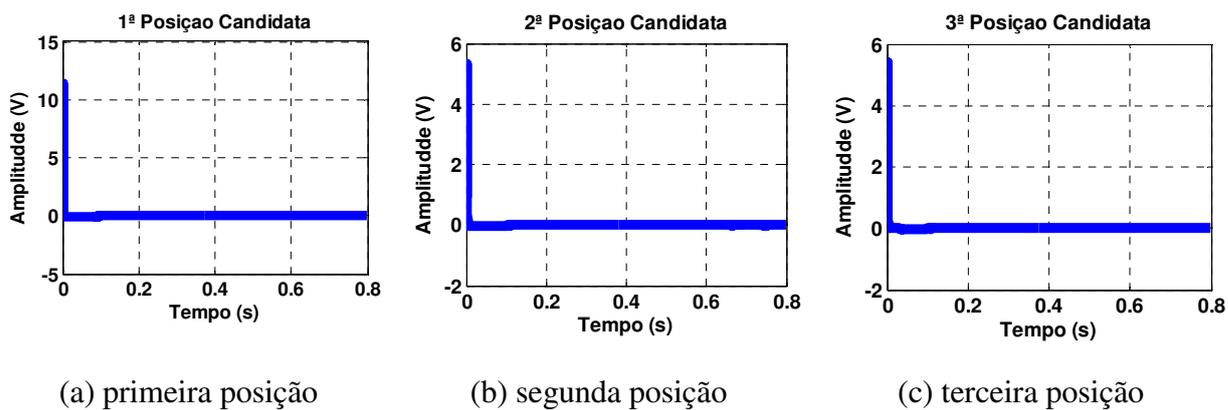


Figura 7.7 – Sinais de entrada para cada posição candidata.

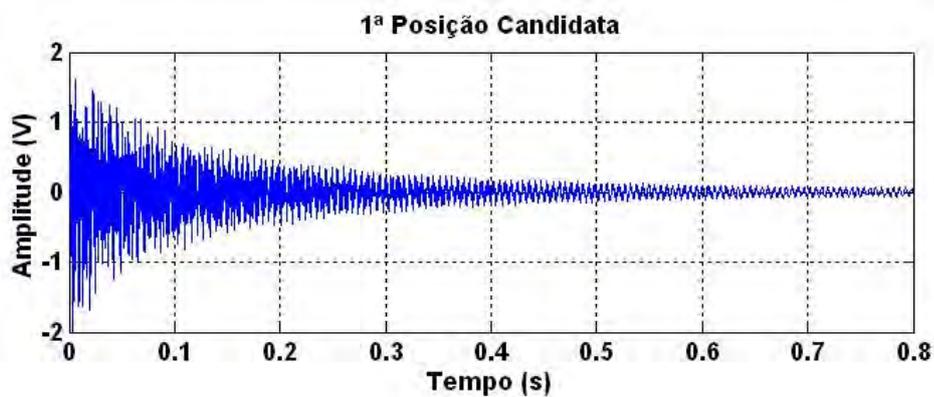


Figura 7.8 – Resposta do sistema para a entrada na primeira posição.

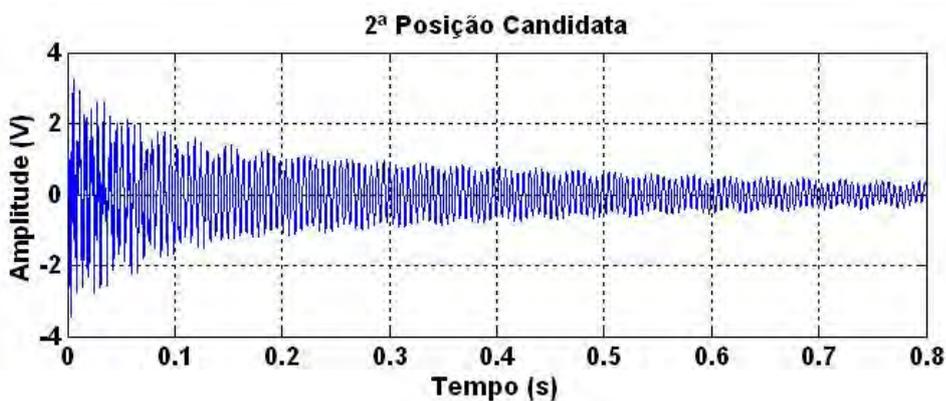


Figura 7.9 – Resposta do sistema para a entrada na segunda posição.

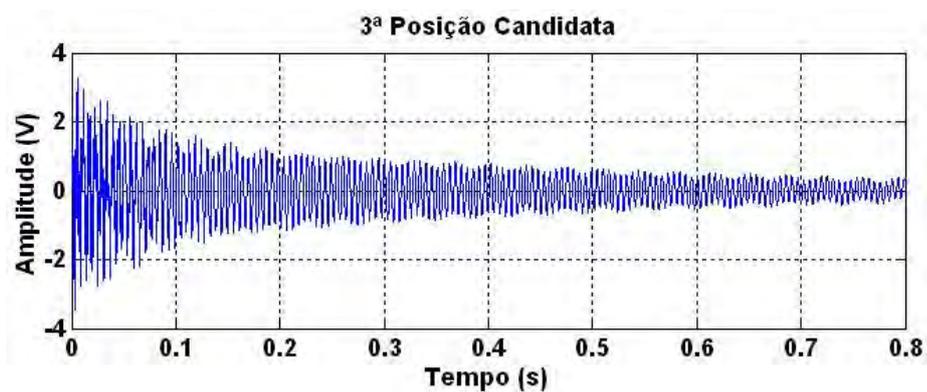


Figura 7.10 – Resposta do sistema para a entrada na terceira posição.

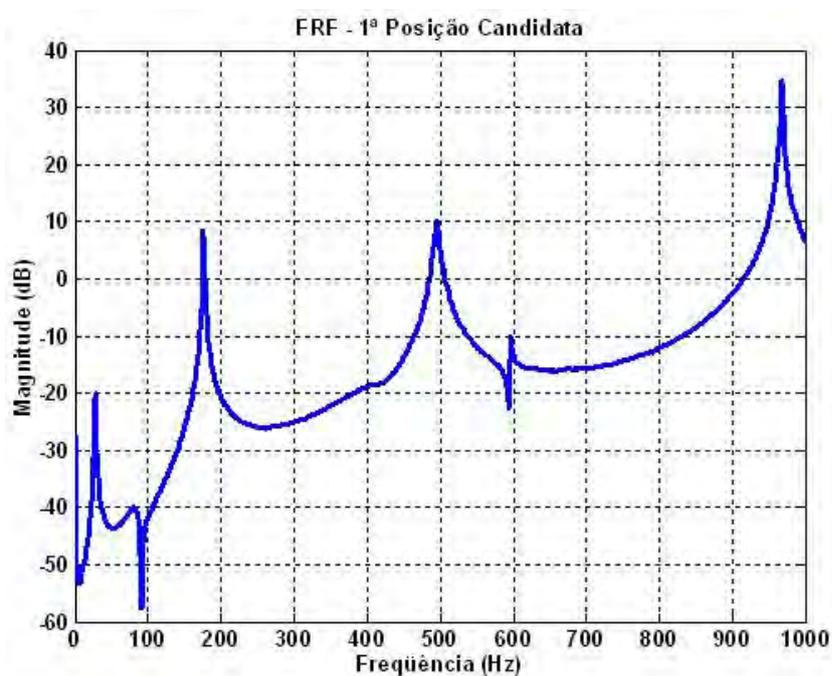


Figura 7.11 – FRF do sistema para entrada na primeira posição.

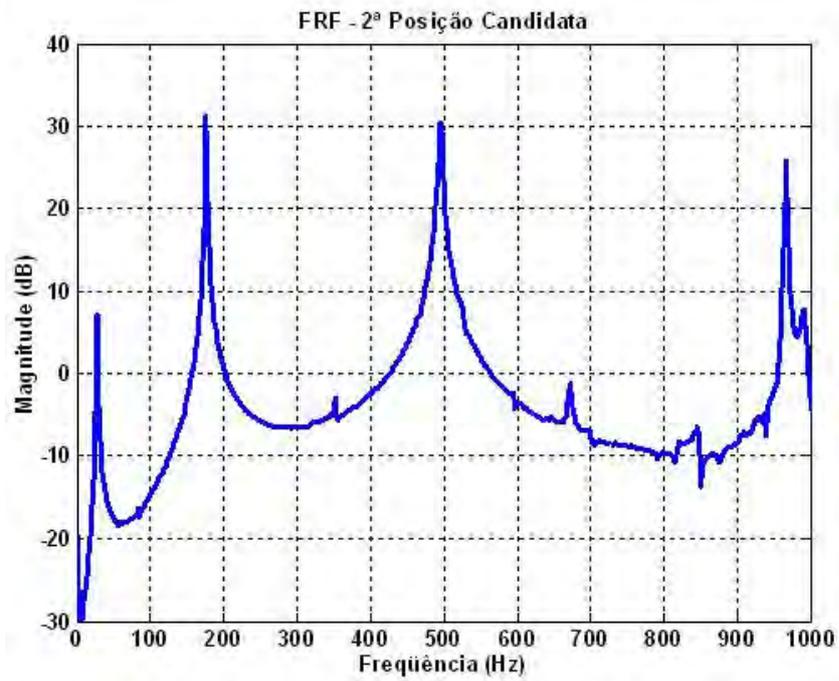


Figura 7.12 – FRF do sistema para entrada na segunda posição.

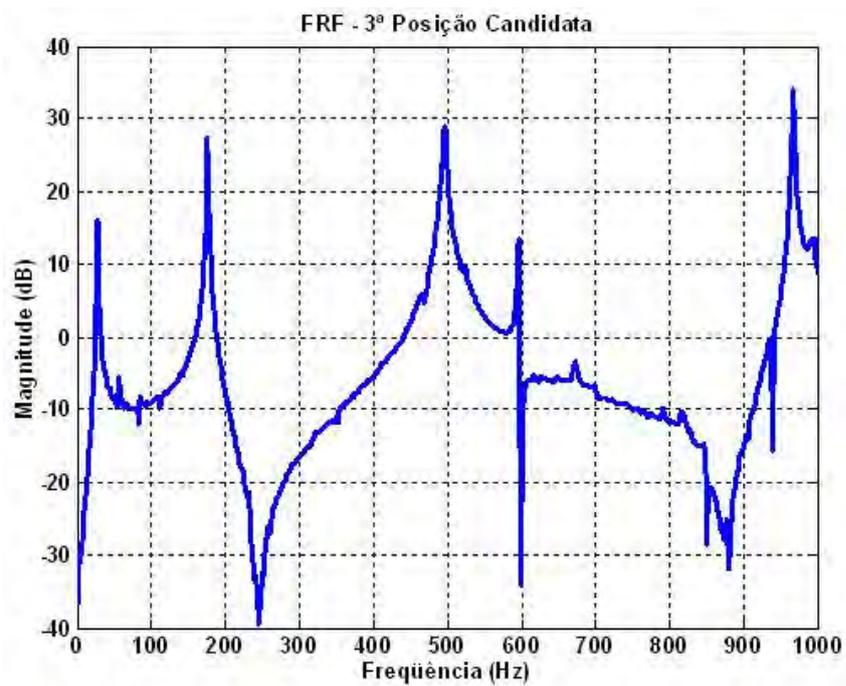


Figura 7.13 – FRF do sistema para entrada na terceira posição.

Tabela 7.2 – Comparação entre as frequências do modelo FEM e experimental.

Frequência	Modelo FEM (Hz)	Experimental (Hz)	Desvio (%)
1 <sup>a</sup>	28,51	28,75	0,84
2 <sup>a</sup>	178,67	176,25	1,35
3 <sup>a</sup>	500,28	495,00	1,05
4 <sup>a</sup>	980,39	967,50	1,31

A figura 7.14 mostra o índice de posicionamento do atuador de pilha obtido a partir dos dados experimentais. Pode-se verificar que os resultados são similares aos encontrados com a aplicação numérica (Fig. 7.3a), ou seja, mostra o desempenho do atuador aumentando à medida que este é afastado da extremidade engastada. Ainda, as figuras 7.15 e 7.16 mostram os índices grammianos de posicionamento, para o primeiro e segundo modos, para o modelo numérico e na estrutura real, respectivamente. Também é possível se verificar a similaridade entre os resultados numéricos e experimentais.

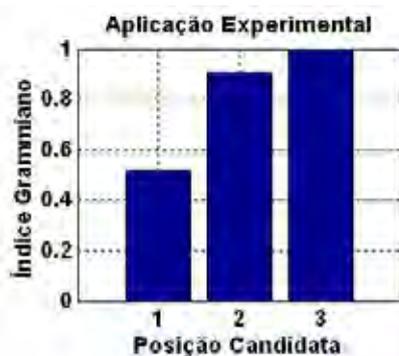


Figura 7.14 – Índice grammiano de posicionamento do atuador – aplicação experimental.

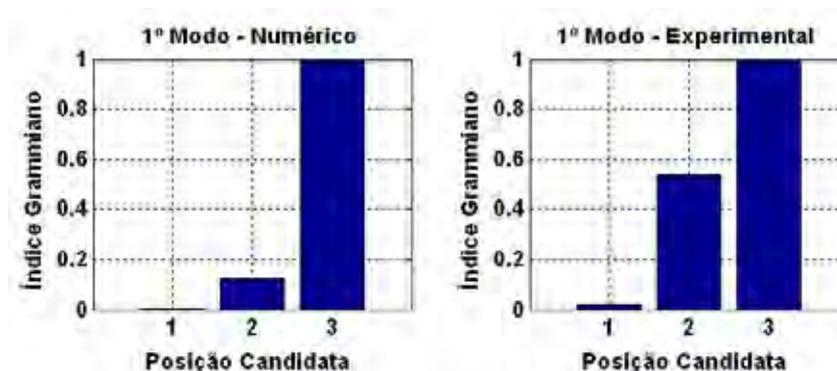


Figura 7.15 – Índice grammiano de posicionamento para o 1º modo.

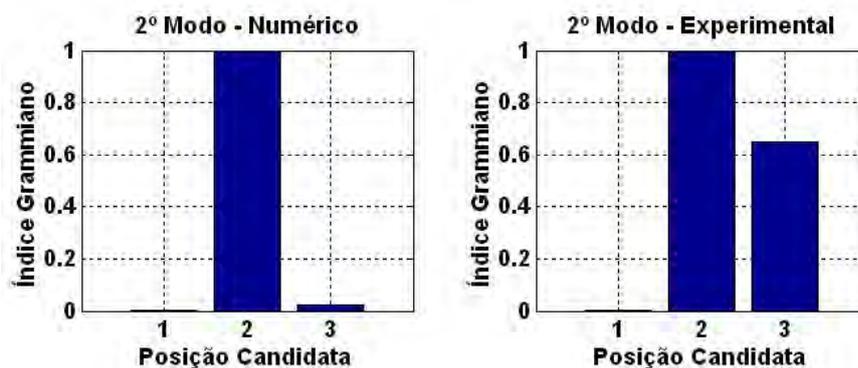
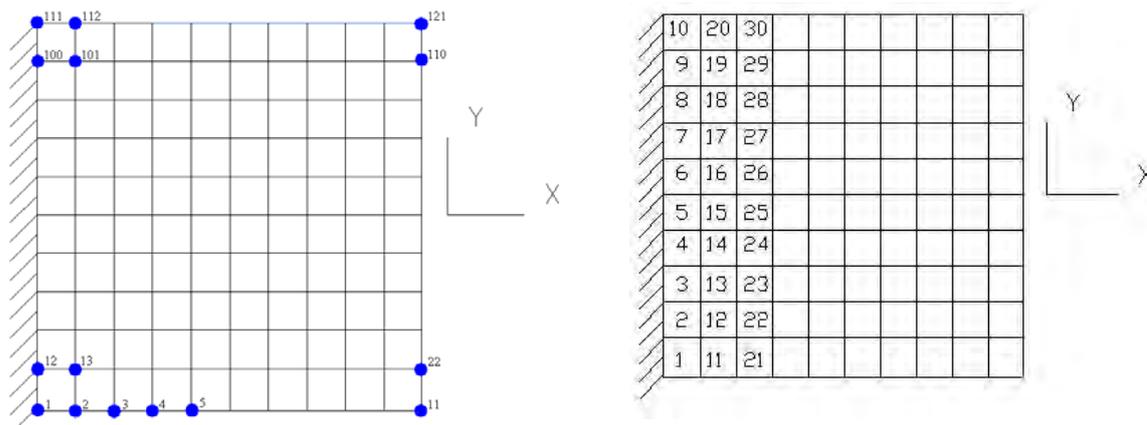


Figura 7.16 – Índice grammiano de posicionamento para o 2º modo.

Com estes resultados, nota-se a viabilidade da aplicação da metodologia proposta para a obtenção das posições ótimas para atuadores em aplicações reais de engenharia. Ainda, outros métodos de identificação podem ser utilizados para se obter a representação da estrutura no espaço de estados e então os índices grammianos de posicionamento. Entre os diversos métodos de identificação propostos na literatura estão os métodos de identificação de parâmetros via funções ortogonais (MORAIS et al., 2005); método exponencial complexa (MAIA et al., 1996); predição de erros (LJUNG, 2002; MESQUITA NETO et al., 2006); decomposição no domínio da frequência (MAIA et al., 1996), entre outros.

## 7.2 POSICIONAMENTO ÓTIMO DE SENSORES/ATUADORES EM PLACAS FLEXÍVEIS

Neste exemplo se buscou apresentar o posicionamento ótimo de atuadores PZT e sensores (acelerômetro) em uma placa de alumínio. Este estudo é considerado importante, e pode ser generalizado, para as mesmas condições de engaste, pois os resultados para placas com diferentes dimensões geométricas e diferentes materiais são similares. Para esta aplicação o modelo dinâmico no espaço de estados, em coordenadas modais, foi obtido via FEM considerando 100 elementos estruturais, 121 nós e 363 GL. O desempenho do atuador foi avaliado para as trinta posições mais próximas ao engaste (Fig. 7.17b) e o desempenho do sensor foi avaliado na direção perpendicular a placa, para todos os nós estruturais. A figura 7.17a mostra a placa discretizada; e a tabela 7.3 mostra as propriedades físicas e geométricas.



(a) placa de alumínio discretizada via FEM

(b) posições do atuador avaliadas

Figura 7.17 – Placa flexível utilizada na simulação de posicionamento ótimo.

Tabela 7.3 – Propriedades físicas e geométricas da placa de alumínio.

Dimensões (mm)	Comprimento	Largura	Espessura
	200	200	3
Densidade ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	2710		
Módulo de Elasticidade (GPa)	70		

Os atuadores piezelétricos, para aplicações em placas, quando submetido a um campo elétrico alternado produzem uma deformação alternada (efeito inverso). Considerando este elemento colado em uma estrutura, seu esforço pode ser modelado como um momento  $M$  aplicado em suas extremidades, como mostra a figura 7.18. O desempenho dos atuadores PZT e dos sensores (acelerômetros) foram avaliados para cada um dos quatro primeiros modos de vibrar da placa, mostrados na figura 7.19.

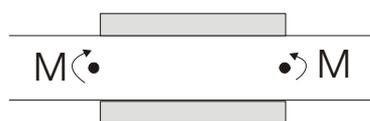


Figura 7.18 – Atuadores PZT colado em uma superfície gerando momento de flexão.

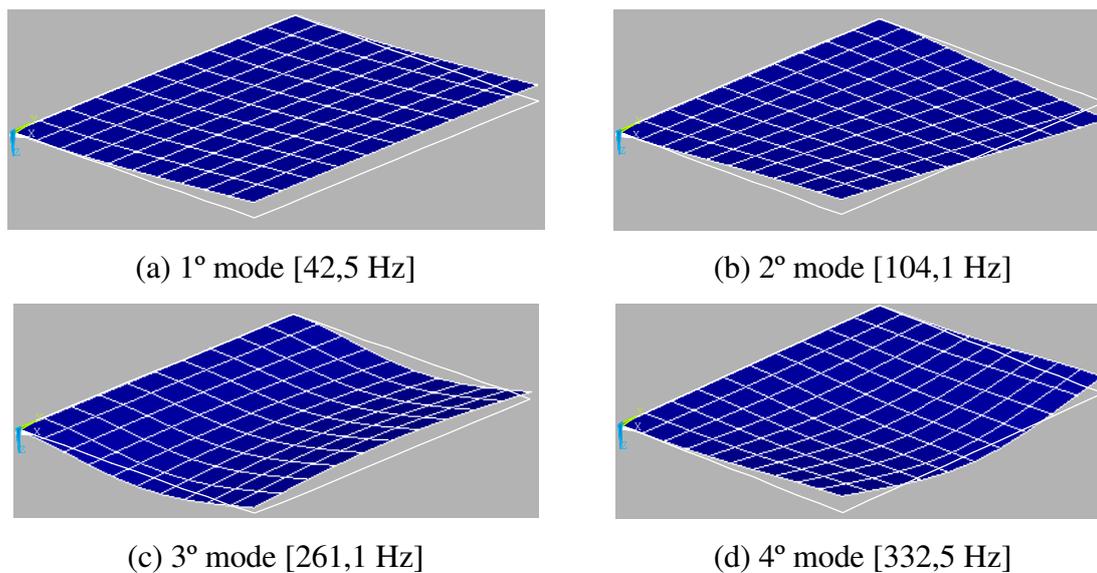


Figura 7.19 – Quatro primeiros modos de vibrar da placa de alumínio.

A figura 7.20 mostra o índice de posicionamento do atuador para o primeiro modo e para cada uma das trinta posições candidatas mostradas na figura 7.17b. Nota-se que o desempenho do PZT é maior quando este é colocado em um dos extremos da placa próximo ao engaste. As figuras 7.21 a 7.23 mostram os mesmos índices para o segundo, terceiro e quarto modos de vibrar, respectivamente.

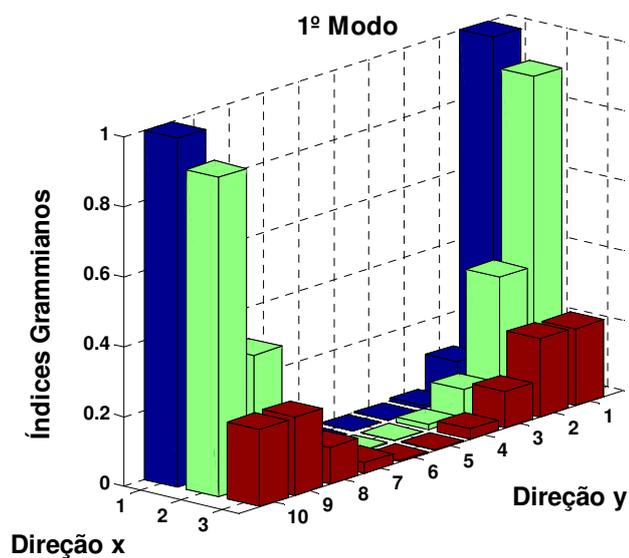


Figura 7.20 – Índice de posicionamento do atuador – primeiro modo.

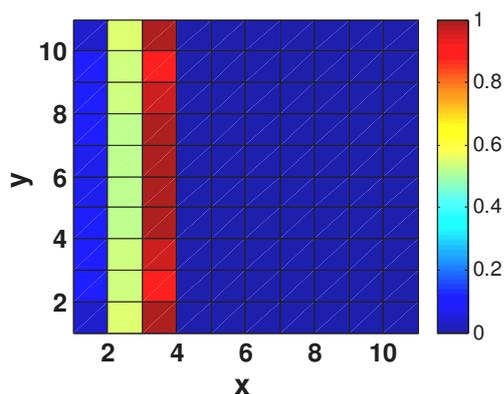


Figura 7.21 – Índice de posicionamento do atuador – segundo modo.\*

\*Note que: para as figura 7.21 a 7.23 a cor azul escuro corresponde ao valor zero e a cor marrom ao maior valor de índice de posicionamento.

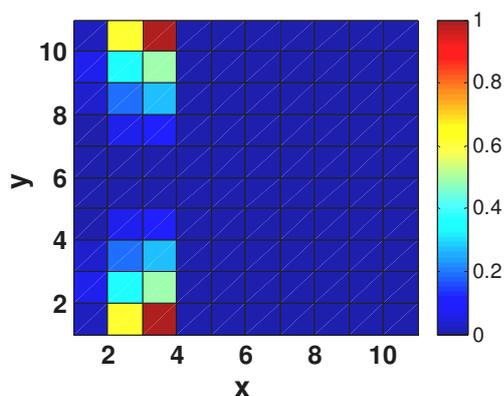


Figura 7.22 – Índice de posicionamento do atuador – terceiro modo.

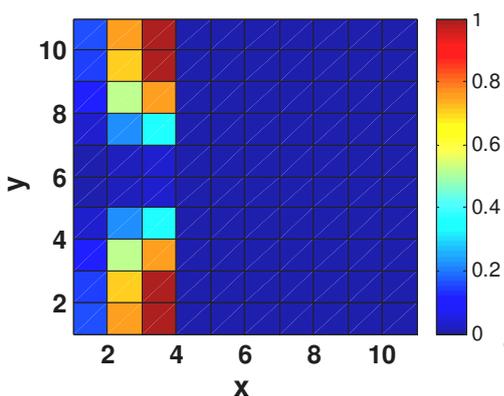


Figura 7.23 – Índice de posicionamento do atuador – quarto modo.

Assim como descrito nas estratégias de posicionamento, conhecidas as posições ótimas do PZT para cada modo de vibrar de interesse, e considerando-o nestas localizações, o desempenho de um acelerômetro foi avaliado para cada posição candidata, ou seja, para o

sensor posicionado em cada nó estrutural e na direção perpendicular a placa. Nesta aplicação, dois atuadores PZT foram considerados nas posições 12 e 19 (Fig. 7.17b)\*. As figuras 7.24 a 7.27 mostram os índices de posicionamento do sensor quando colocado em cada nó estrutural na direção z da figura 7.17b.

\*A proximidade com o engaste, geralmente, inviabiliza o posicionamento dos PZTs nas posições 1 e 10, que seriam as ótimas nestas condições.

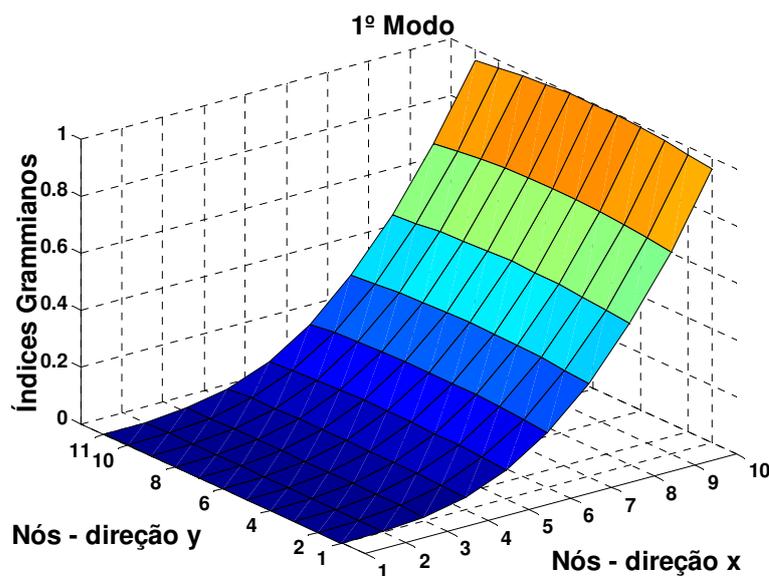


Figura 7.24 – Índice grammiano de posicionamento do sensor – 1º modo.

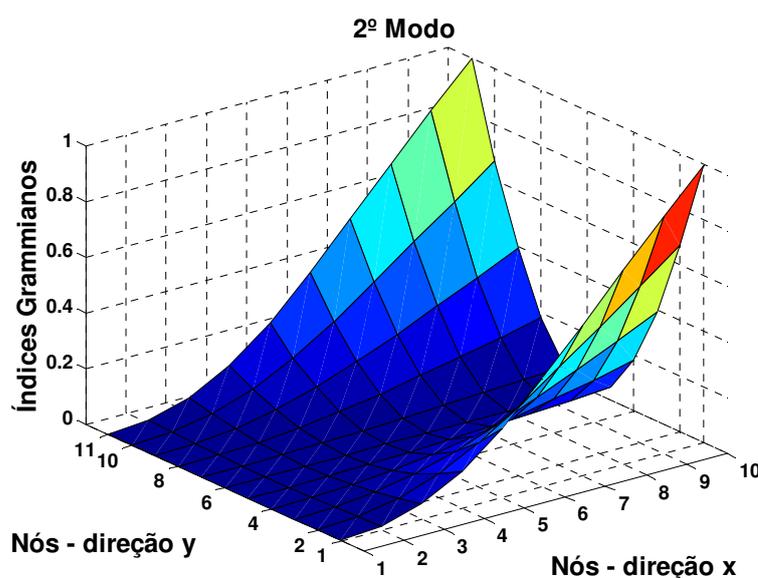


Figura 7.25 – Índice grammiano de posicionamento do sensor – 2º modo.

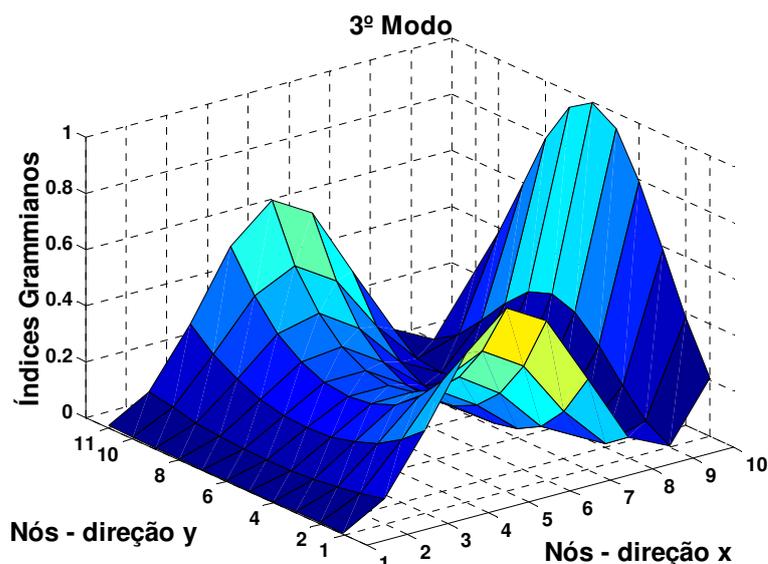


Figura 7.26 – Índice grammiano de posicionamento do sensor – 3º modo.

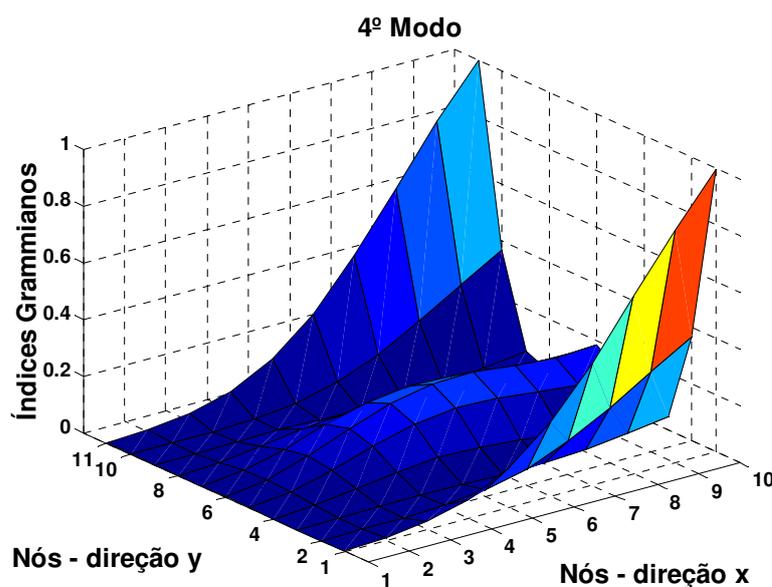


Figura 7.27 – Índice grammiano de posicionamento do sensor – 4º modo.

Avaliadas as posições ótimas para atuadores e sensores, um controlador robusto foi projetado para atenuar vibrações na placa de alumínio, mostrada na figura 7.28. Dois pares de PZTs foram utilizados nas posições indicadas na figura 7.28b (dois PZTs estão na face oposta, nas mesmas posições). Também, um acelerômetro foi utilizado como sensor posicionado na extremidade livre da placa, como é mostrado da figura 7.29. As propriedades físicas e geométricas são as mesmas mostradas na tabela 7.3. As propriedades dos PZT são mostradas na tabela 7.4 e os sinais de saída foram medidos com um acelerômetro modelo 352C22 PCB Piezotronics®. Os sinais foram obtidos através da média de cinco medições para cada teste de

aquisição. Para a aquisição dos sinais foi utilizado o *software* SignalCalc ACE<sup>®</sup> II. A figura 7.29 apresenta a configuração do experimento realizado para a aquisição dos sinais.



(a) Atuador PZT



(b) placa de alumínio

Figura 7.28 – PZT atuador e placa flexível de alumínio.

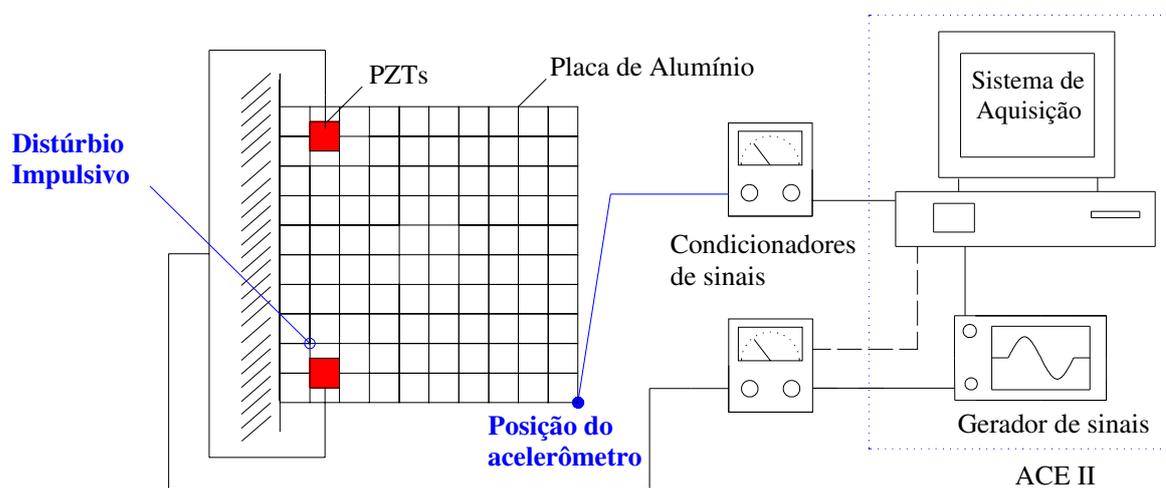


Figura 7.29 – Disposição da configuração experimental.



$$\mathbf{A}_2 = 10^3 \begin{bmatrix} -0,0083 & 0,2661 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2661 & -0,0083 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0220 & 0,6209 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6209 & -0,0220 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0043 & 1,5830 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5830 & -0,0043 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0097 & 2,0776 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,0776 & -0,0097 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = 10^3 \begin{bmatrix} -0,0141 & 0,2678 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2678 & -0,0141 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0026 & 0,6262 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6262 & -0,0026 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0041 & 1,5778 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5778 & -0,0041 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0041 & 2,0928 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,0928 & -0,0041 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = [-0,6606 \quad -0,2064 \quad -1,2632 \quad 2,4181 \quad 2,1838 \quad -0,1270 \quad -4,0526 \quad -1,1555]^T$$

$$\mathbf{C} = [-0,0091 \quad -0,0012 \quad 0,0003 \quad 0,0007 \quad -0,0001 \quad 0,0002 \quad 0,0001 \quad -0,0001]$$

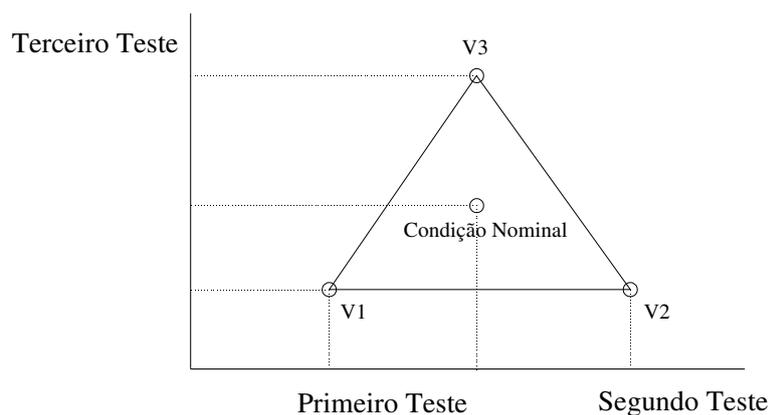


Figura 7.30 – Vértices do polítopo que limita as incertezas nos parâmetros modais da placa.

Tabela 7.5 – Freqüências naturais e fatores de amortecimento de cada identificação.

Modo	Freqüência Natural (Hz)			Fator de Amortecimento		
	1° teste	2° teste	3° teste	1° teste	2° teste	3° teste
1°	43,8232	42,3678	42,6750	0,0361	0,0312	0,0525
2°	99,8489	98,8888	99,6678	0,0087	0,0355	0,0041
3°	252,2666	251,9396	251,1175	0,0023	0,0027	0,0026
4°	327,9723	330,6602	333,0857	0,0017	0,0047	0,0020

O controlador LQR via LMI foi projetado considerando as incertezas representadas nos vértices do polítopo da figura 7.30. As matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  foram definidas como  $5000\mathbf{I}$  e  $0,5\mathbf{I}$ , respectivamente; onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Para o projeto do observador, a partir do estimador de Kalman, foram consideradas as matrizes  $\mathbf{V}_K$  (matriz de covariância de ruído de processo) e  $\mathbf{W}_K$  (matriz de covariância de ruído de medida) iguais a  $3 \cdot 10^{-7}\mathbf{I}$  e  $1 \cdot 10^{-6}\mathbf{I}$ , respectivamente. *Note que na prática as intensidades dos ruídos nos estados (ruídos de processo) e no sensor (ruídos de medida) são desconhecidas. Por isto, a escolha das matrizes  $\mathbf{V}_K$  e  $\mathbf{W}_K$  é feita considerando a aproximação dada pela multiplicação de um escalar (escolhido pelo projetista) pela matriz identidade. No entanto, o filtro de Kalman será ótimo se estas intensidades coincidirem com as intensidades reais.* As figuras 7.31 e 7.32 mostram a função de resposta em freqüência (FRF) e os pólos, respectivamente, para o sistema com e sem controle.

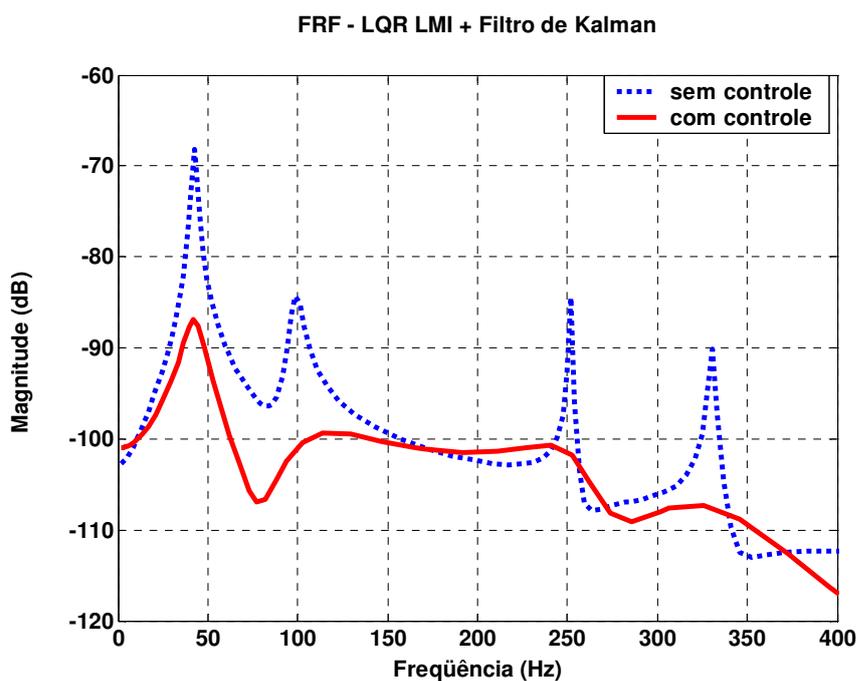


Figura 7.31 – FRF para o sistema com e sem controle.

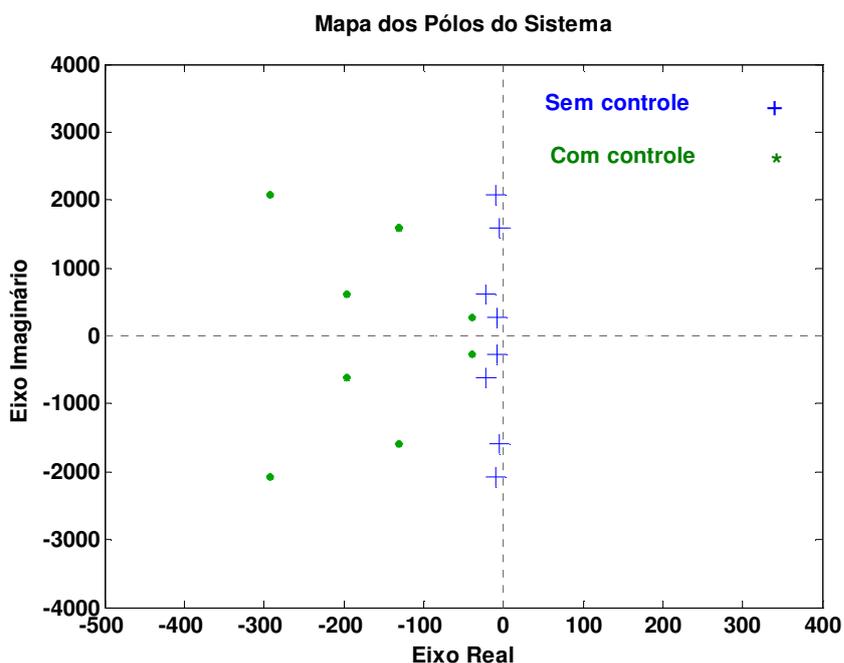


Figura 7.32 – Posição dos pólos do sistema com e sem controle – vértice 1\*.

\*Os resultados são similares para os vértices 2 e 3.

A figura 7.33 mostra a FRF obtida a partir de cada teste de identificação. O ganho do controlador calculado considerando as três matrizes dinâmicas foi  $\mathbf{G} = [-92,0316 \ -55,3374 \ -49,6693 \ 123,2657 \ 136,5534 \ -1,2564 \ -133,4559 \ 35,5574]$ . *Note, pela ordem de  $\mathbf{G}$ , que foi projetado um controlador SISO, ou seja, os quatro PZTs atuando simultaneamente e*

aplicando a mesma força de controle. Isto se deve ao fato de que o desempenho dos atuadores é similar para posições consideradas, como mostram as figuras 7.20 a 7.23. O ganho  $\mathbf{K}_t$  do observador foi  $\mathbf{K}_t = 10^4 * [-0,4070 \ -0,0430 \ 0,1781 \ 0,2368 \ -0,0894 \ 0,1606 \ 0,1699 \ -0,0695]^T$ . A figura 7.34 mostra a resposta ao impulso do sistema com e sem controle considerando uma entrada impulsiva na posição mostrada na figura 7.29. As respostas são mostradas para cada vértice do politopo.

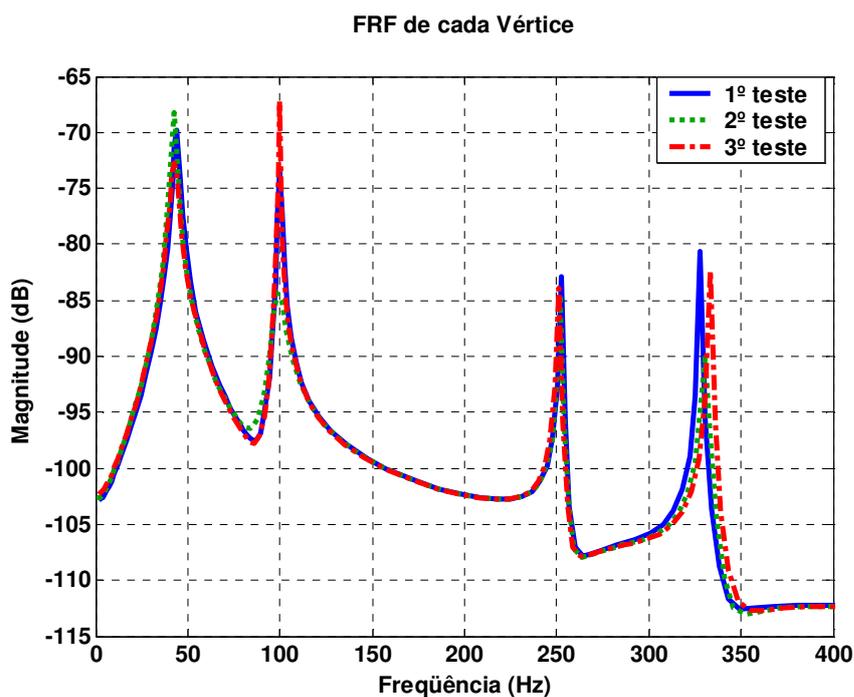


Figura 7.33 – FRFs obtidas a partir de cada identificação experimental. Cada uma está representada por um vértice do politopo.

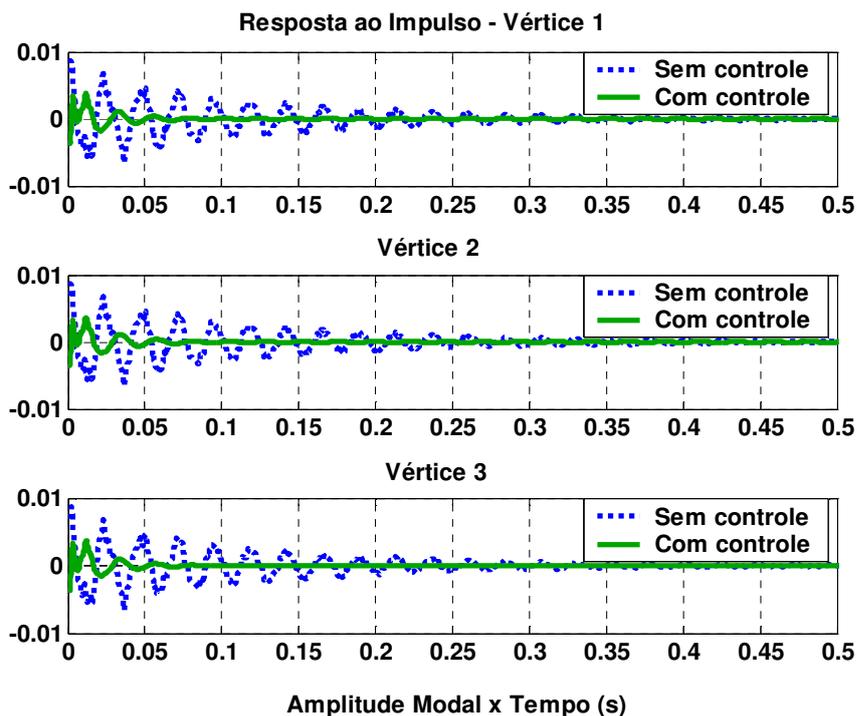


Figura 7.34 – Função de resposta ao impulso para o sistema com e sem controle – vértices 1, 2 e 3.

As tabelas 7.6 e 7.7 mostram as frequências naturais e os fatores de amortecimento, respectivamente, obtidos através do modelo FEM e dos modelos identificados a partir de dados experimentais, para comprovação das simulações do posicionamento dos atuadores e sensores. É importante notar que para avaliar o desempenho de um atuador ou sensor para todas as posições candidatas, quando são várias, a utilização de um modelo identificado via dados experimentais é dificultada pela necessidade de se realizar diversas aquisições de sinais, além de diversos processos de identificação. Também, deve-se destacar que o projeto de um controlador robusto baseado em um modelo identificado é incentivado principalmente pela identificação dos fatores de amortecimento, que geralmente origina consideráveis erros relativos quando comparados com um modelo FEM.

Tabela 7.6 – Comparação entre as frequências naturais: FEM versus Modelo Identificado.

Frequência Natural (Hz)							
Modo	1° teste	2° teste	3° teste	Modelo FEM	Erro Relativo (%)		
1°	43,8232	42,3678	42,6750	42,58	2,83	0,52	0,21
2°	99,8489	98,8888	99,6678	104,64	4,81	5,83	5,00
3°	252,2666	251,9396	251,1175	260,70	3,35	3,48	3,82
4°	327,9723	330,6602	333,0857	335,17	2,20	1,36	0,63

Erro Relativo =  $100 * \{[(\text{Freq. Teste } i) - (\text{Freq. FEM})] / (\text{Freq. Teste } i)\}$ ; com  $i = 1, 2$  e  $3$ .

Tabela 7.7 – Comparação entre os fatores de amortecimento: FEM versus Modelo Identificado.

Fator de Amortecimento							
Modo	1° teste	2° teste	3° teste	Modelo FEM	Erro Relativo (%)		
1°	0,0361	0,0312	0,0525	0,0120	66,67	61,54	77,14
2°	0,0087	0,0355	0,0041	0,0053	39,08	85,07	29,27
3°	0,0023	0,0027	0,0026	0,0033	43,48	22,22	26,92
4°	0,0017	0,0047	0,0020	0,0033	94,12	29,79	65,00

Erro Rel. =  $100 * \{[(\text{Fat. Amort. Teste } i) - (\text{Fat. Amort. FEM})] / (\text{Fat. Amort. Teste } i)\}$ ; com  $i = 1, 2$  e  $3$ .

### 7.3 INFLUÊNCIA DE DISTÚRBIOS NO POSICIONAMENTO ÓTIMO

Neste exemplo se buscou avaliar a influência de distúrbios no posicionamento ótimo de um PZT como atuador/sensor. A aplicação foi realizada em uma treliça plana modelada via FEM, mostrada na figura 7.35. A treliça possui 17 barras, 10 nós, 2 GL por nó; e suas propriedades físicas e geométricas são mostradas na tabela 7.8. Devido ao engaste uma barra e 4 GL são restritos, restando 16 barras como candidatas à posição do atuador/sensor. O efeito do acoplamento eletromecânico entre PZT e a estrutura não é considerado e para clareza de compreensão, o atuador é do tipo PZT *stack* (HEVERLY II et al., 2001).

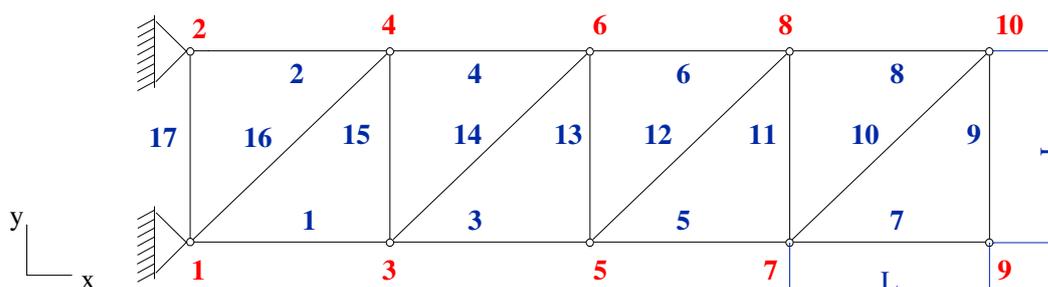


Figura 7.35 – Treliça plana utilizada no posicionamento do atuador PZT.

Tabela 7.8 – Propriedades físicas e geométricas da treliça.

L	0,3 m
Módulo de Elasticidade	70 MPa
Densidade	2710 Kg/m <sup>3</sup>
Área da seção transversal	2,95.10 <sup>-5</sup> m <sup>2</sup>

Inicialmente, buscando ilustrar um problema real de engenharia, a posição do distúrbio externo foi considerada desconhecida. Segundo Demetriu (2004), nesta situação, o pior caso deve ser considerado. No entanto, no referido trabalho o autor não discute como classificar o distúrbio para se descobrir qual a pior situação. Para o presente trabalho foram utilizadas as normas de sistemas para avaliar cada posição candidata à localização do distúrbio. A avaliação foi feita através do cálculo da norma para cada possível posição do distúrbio, considerando um sensor co-localizado. O maior valor da norma corresponde à posição que o distúrbio mais significativamente perturba a estrutura ou um modo estrutural. A tabela 7.9 apresenta as dez posições avaliadas para se obter a pior localização do distúrbio. A figura 7.36 mostra claramente que o pior caso de distúrbio é quando este é localizado nas posições 8 ou 9, que correspondem aos nós 9 (direção positiva de  $y$ ) e 10 (direção negativa de  $y$ ), respectivamente. Na figura 7.36 foram considerados todos os modos de vibrar, no entanto, para problemas específicos, pode-se classificar o distúrbio para cada modo estrutural.

Tabela 7.9 – Posições candidatas ao pior caso de distúrbio.

Posição Candidata	Nó / Direção	Posição Candidata	Nó / Direção
1	3 / y	6	8 / -y
2	4 / -y	7	9 / -x
3	5 / y	8	9 / y
4	6 / -y	9	10 / -x
5	7 / y	10	10 / -y

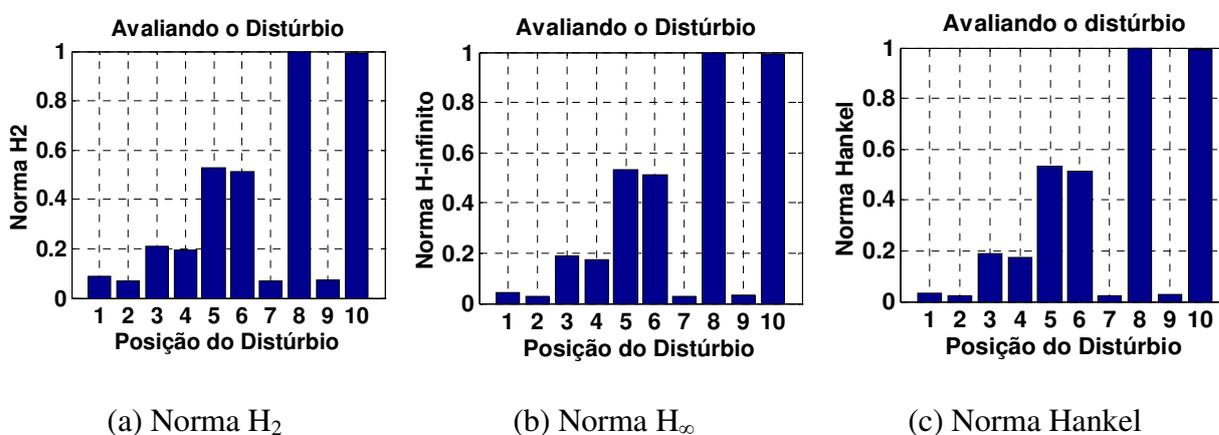


Figura 7.36 – Avaliação das posições candidatas ao pior caso de distúrbio.

Para avaliar o desempenho do PZT em cada posição candidata foi utilizada a matriz gramiana de controlabilidade. Para se considerar o efeito de distúrbio no posicionamento foi utilizado a matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio. Nesta formulação, como apresentado no capítulo 3, se utilizou a matriz dinâmica do sistema a malha fechada, onde o ganho de realimentação foi calculado através do controlador LQR. As matrizes de ponderação utilizadas foram  $\mathbf{Q} = 10^{-2}\mathbf{I}$  e  $\mathbf{R} = 0,001$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. As frequências naturais e os fatores de amortecimento da treliça são mostrados na tabela 7.10. As figuras 7.37 a 7.40 mostram os quatro primeiros modos de vibrar para clareza de entendimento. A forma dos demais modos são mostradas no Anexo 1.

Tabela 7.10 – Frequências naturais e os fatores de amortecimento estrutural (sistema a malha aberta).

Modo	Frequência (Hz)	Fat. Amort.	Modo	Frequência (Hz)	Fat. Amort.
1°	149,14	$6,27 \cdot 10^{-5}$	9°	3.478,72	$2,208 \cdot 10^{-4}$
2°	550,95	$4,90 \cdot 10^{-5}$	10°	3.628,35	$2,301 \cdot 10^{-4}$
3°	732,56	$5,69 \cdot 10^{-5}$	11°	3.864,81	$2,448 \cdot 10^{-4}$
4°	1.171,20	$8,03 \cdot 10^{-5}$	12°	4.144,89	$2,623 \cdot 10^{-4}$
5°	1.657,95	$1,089 \cdot 10^{-4}$	13°	4.256,82	$2,693 \cdot 10^{-4}$
6°	1.884,42	$1,226 \cdot 10^{-4}$	14°	4.757,73	$3,006 \cdot 10^{-4}$
7°	2.301,08	$1,480 \cdot 10^{-4}$	15°	5.032,19	$3,177 \cdot 10^{-4}$
8°	2.836,45	$1,810 \cdot 10^{-4}$	16°	5.417,29	$3,418 \cdot 10^{-4}$

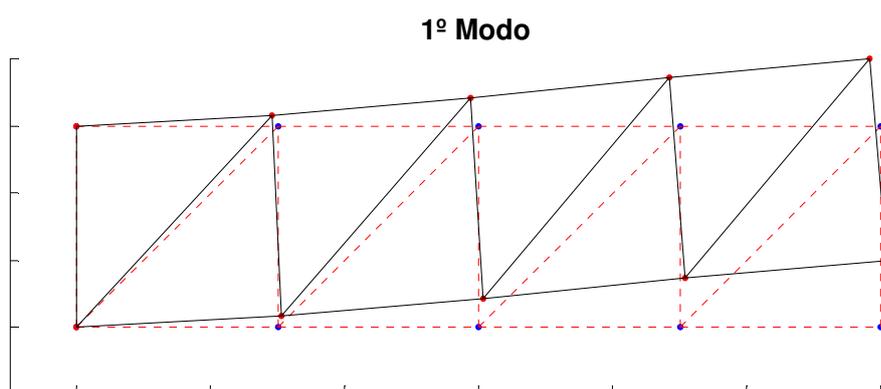


Figura 7.37 – Primeiro modo de vibrar da treliça plana [149,14 Hz].

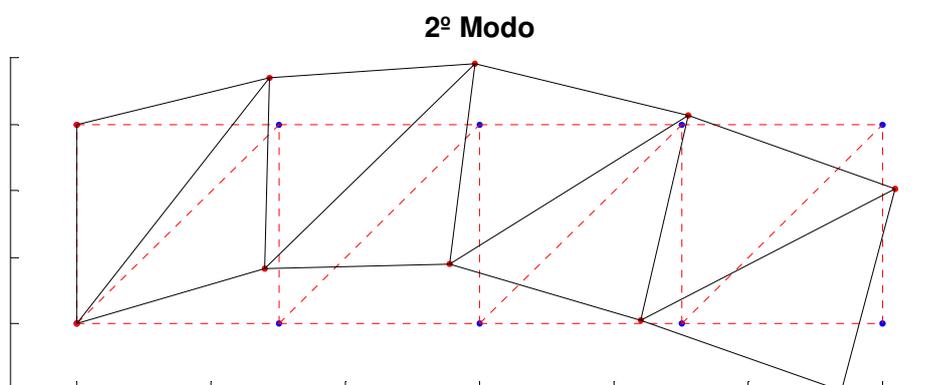


Figura 7.38 – Segundo modo de vibrar da treliça plana [550,95 Hz].

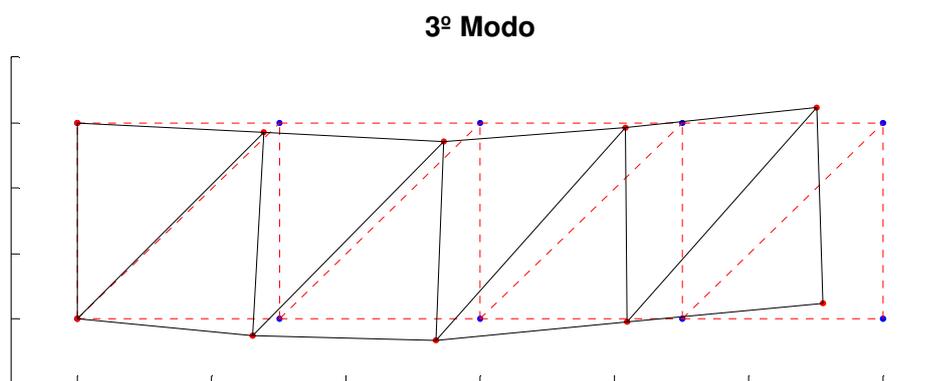


Figura 7.39 – Terceiro modo de vibrar da treliça plana [732,56 Hz].

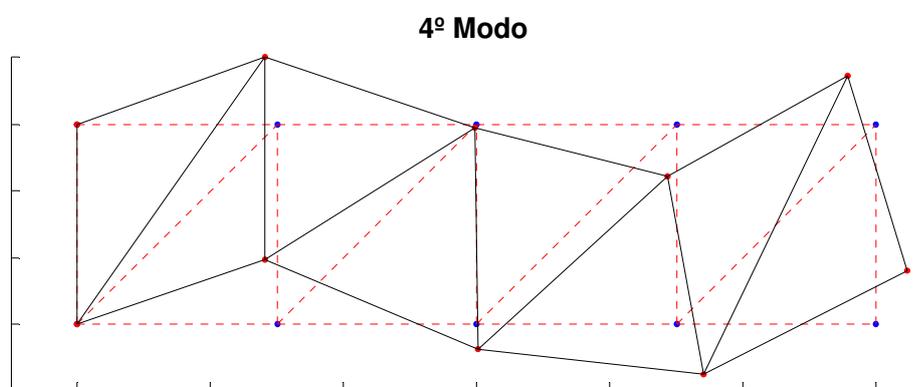


Figura 7.40 – Quarto modo de vibrar da treliça plana [1.171,20 Hz].

Após se verificar qual o pior caso, foi considerado um distúrbio impulsivo no nó 10 na direção negativa de  $y$ . As figuras 7.41 e 7.42 mostram os índices grammianos de posicionamento para cada posição candidata do PZT considerando os casos sem e com influência de distúrbios, respectivamente. Estes valores foram encontrados considerando os quatro primeiros modos de vibração (*os resultados para os demais modos podem ser visto no Anexo I*). Pode-se observar claramente que a posição ótima do PZT para cada modo de vibrar é similar, considerando ou não a ação do distúrbio, mas ocorre uma mudança no desempenho do atuador em cada barra. Analisando o primeiro modo, por exemplo, sem a ação do distúrbio se verifica que a posição ótima do PZT é na barra 2 e nas demais posições seu desempenho é inferior à 40% em relação a localização ótima, exceto para as barras 1, 4 e 16. Na presença do distúrbio se observa, também para o mesmo modo, que o desempenho do atuador é superior aos 40% quando posicionado nas barras 1, 4, 12, 14 e 16, chegando a mais de 60% em relação ao desempenho ótimo. Resultados similares podem ser verificados para os outros modos, logo, é possível notar que a presença do distúrbio afeta o desempenho do atuador. Para

estruturas mais complexas, o desempenho do PZT em estratégicas posições não ótimas pode ser semelhante ou próximo do desempenho ótimo. Esta análise pode ser vantajosa para situações práticas, onde a localização ótima pode não ser acessível.

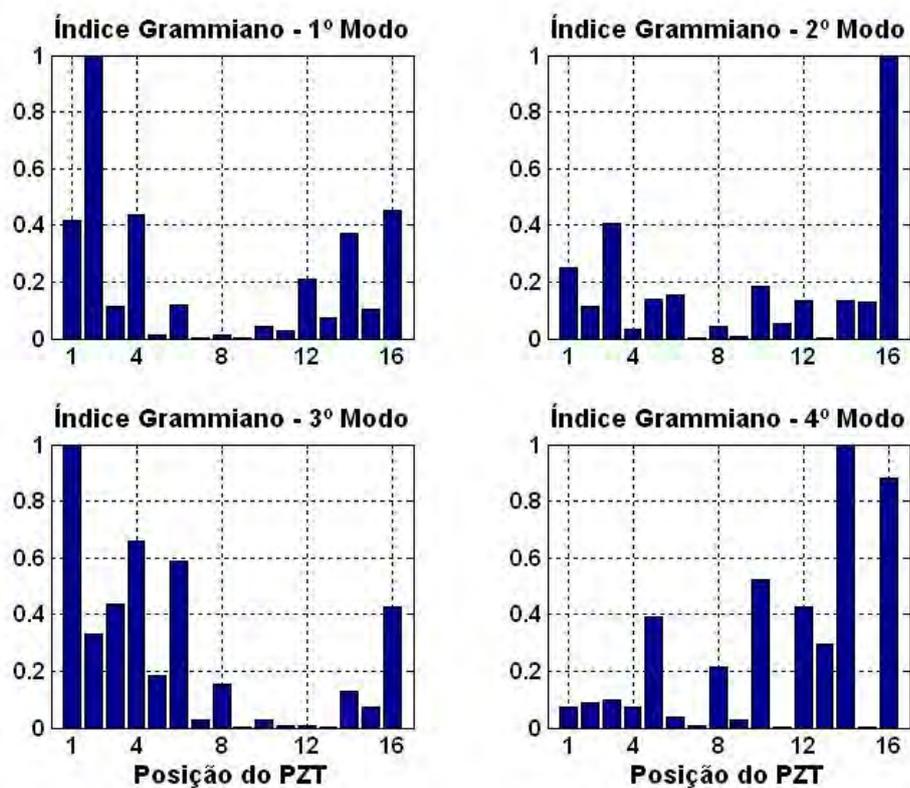


Figura 7.41 – Índice de posicionamento na ausência do distúrbio: 1º, 2º, 3º e 4º modos.

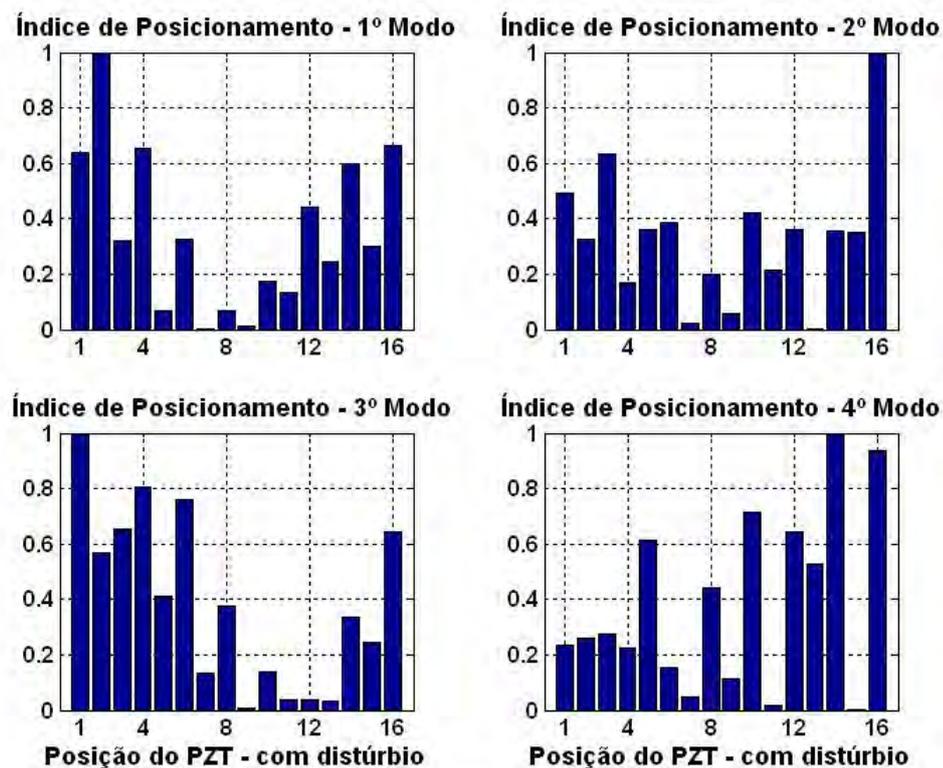


Figura 7.42 – Índice de posicionamento considerando o distúrbio: 1º, 2º, 3º e 4º modos.

As figuras 7.43 e 7.44 mostram o índice grammiano de posicionamento com e sem a ação do distúrbio, respectivamente, considerando o modelo completo. Ou seja, buscou-se encontrar a localização ótima do atuador/sensor PZT para o projeto de um controlador envolvendo todos os modos de vibrar. Pode-se observar claramente que sem o distúrbio as três melhores posições para o PZT são nas barras 16, 10 e 12 e ao se considerar o distúrbio tais posições são nas barras 10, 5 e 14. O número de atuadores a se utilizar no projeto deve ser escolhido analisando a controlabilidade estrutural sobre os modos de interesse.

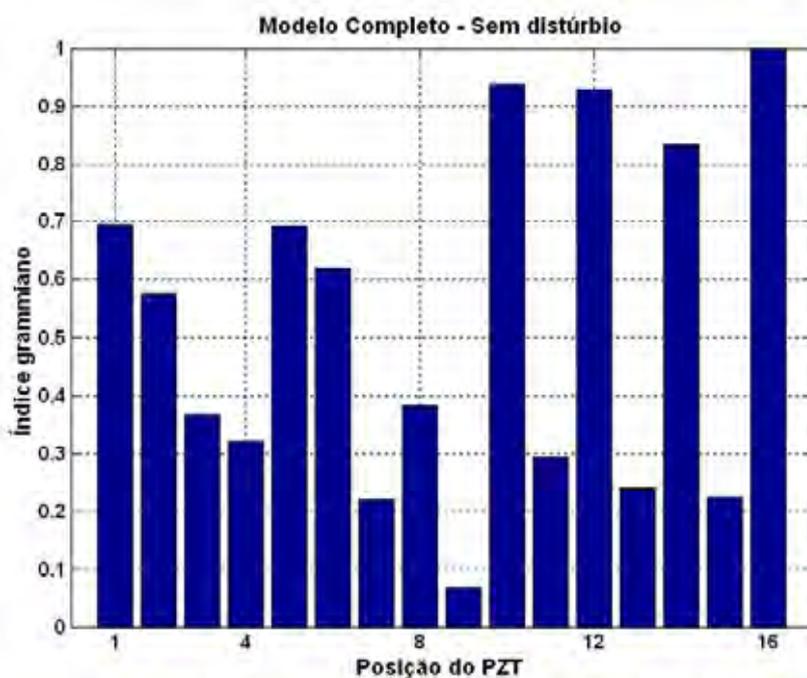


Figura 7.43 – Índice de posicionamento do PZT sem distúrbio considerando todos os modos de vibrar.

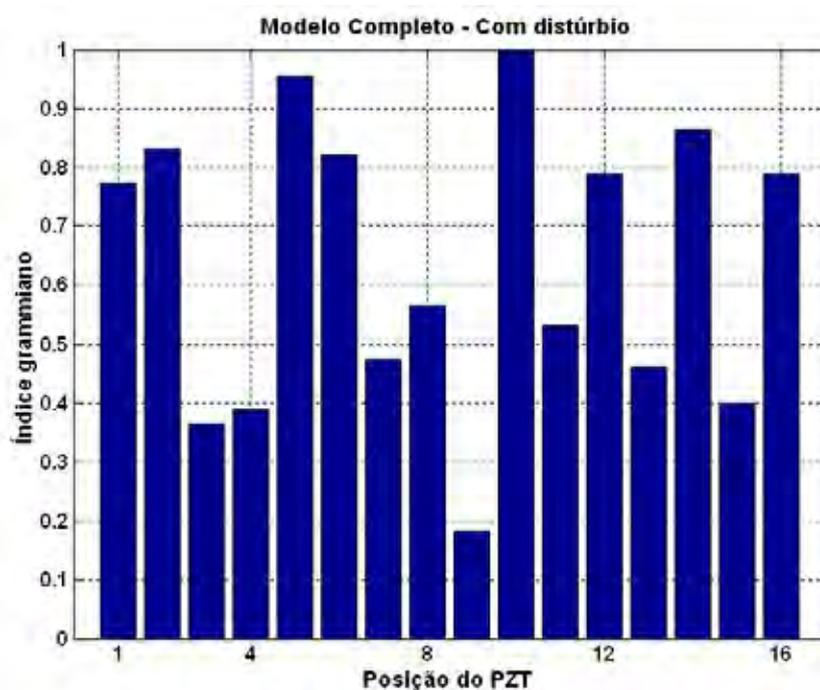


Figura 7.44 – Índice de posicionamento do PZT com distúrbio considerando todos os modos de vibrar.

Em geral, estruturas grandes são modeladas com muitos modos, então se utiliza técnicas de redução de modelos como truncamento seguido do projeto de controle apenas para

os modos de baixa frequência como será discutido na quarta aplicação deste trabalho. Assim, com esta aplicação é possível perceber que ao se considerar alguns modos no projeto de controladores, a localização ótima dos atuadores pode mudar ao se incluir a influência de distúrbios.

#### **7.4 CONFIGURAÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE POSICIONAMENTO ÓTIMO E PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO**

Nesta aplicação o objetivo foi encontrar os pontos ótimos para posicionar atuadores de pilha (PZT *stack*) e sensores piezelétricos e se projetar um controlador robusto capaz de atenuar sinais de vibração nos quatro primeiros modos de vibrar da treliça espacial mostrada na figura 7.45. Definidas as posições ótimas para atuadores e sensores, ainda como objetivo desta aplicação, será mostrada uma comparação do desempenho do controlador LQR quando o ganho de realimentação é calculado resolvendo a equação de Riccati na forma tradicional e por LMIs. Para clareza de entendimento, esta proposta ilustra o seguinte problema hipotético:

*Determinar o posicionamento ótimo de sensores/atuadores e projetar um controlador para atenuar sinais de vibração nos quatro primeiros modos de uma treliça espacial. Ainda, comparar o desempenho do controlador LQR para o ganho de realimentação calculado resolvendo a equação de Riccati da maneira tradicional (utilizando a função de Lyapunov) e por LMIs. Considerar incertezas na rigidez dos elementos estruturais que contém os atuadores PZT.*

Os atuadores de pilha e os sensores (acelerômetros) são colocados em pontos ótimos obtidos via normas de sistemas e considerando distúrbio externo e saída de desempenho (entenda por distúrbio uma entrada indesejável gerando vibrações estruturais).

As propriedades físicas e geométricas da treliça são mostradas na tabela 7.11. Para auxiliar a compreensão do problema, os dez primeiros modos de vibrar da estrutura são mostrados nas figuras 7.46a, b, c, d, e, f, g, h, i e j. Foi utilizado um modelo obtido via FEM considerando 3 graus de liberdade (GL) por nó, translação nas direções x, y e z.

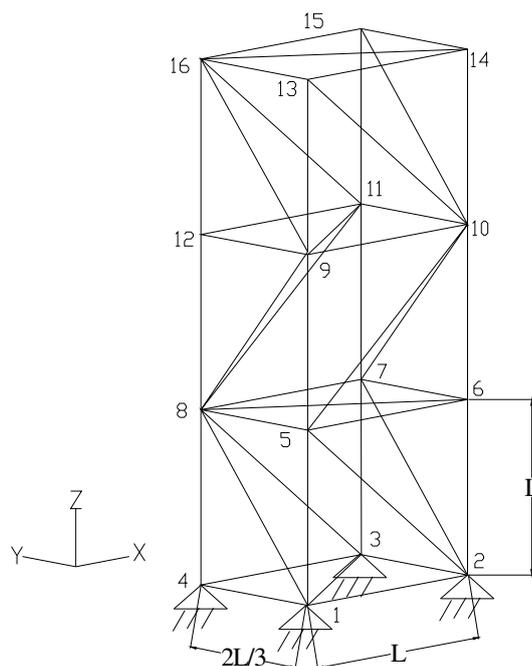
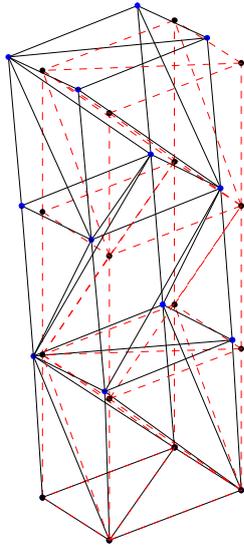


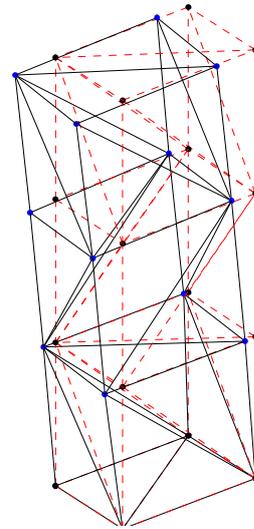
Figura 7.45 – Treliça espacial utilizada na aplicação de posicionamento e projeto de controlador robusto.

Tabela 7.11 – Propriedades físicas e geométricas da treliça espacial.

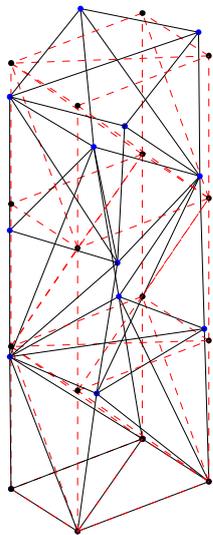
Módulo de Elasticidade (GPa)	72,70
Área da seção transversal (mm <sup>2</sup> )	28,27
Densidade (Kg/m <sup>3</sup> )	3100
Comprimento L (m)	0,3

**1º Modo**

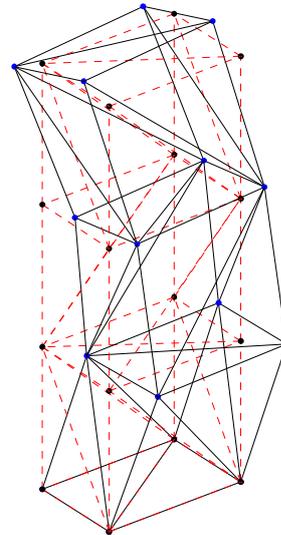
(a) 1º modo [47,7 Hz]

**2º Modo**

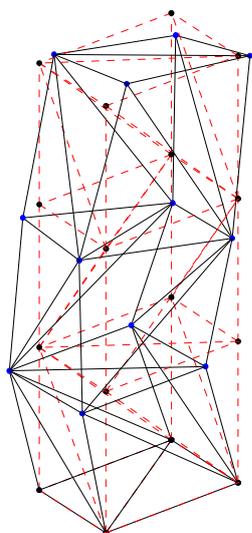
(b) 2º modo [64,4 Hz]

**3º Modo**

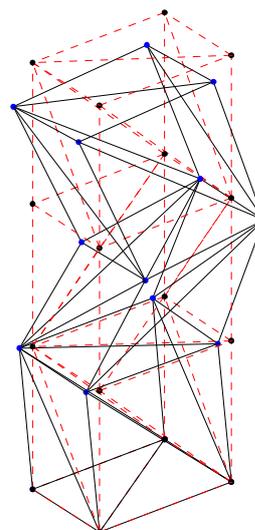
(c) 3º modo [87,8 Hz]

**4º Modo**

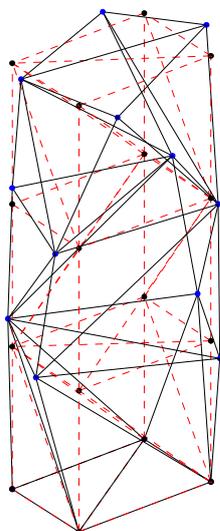
(d) 4º modo [166,9 Hz]

**5° Modo**

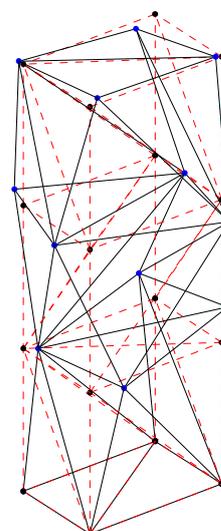
(e) 5° modo [208,3 Hz]

**6° Modo**

(f) 6° modo [229,1 Hz]

**7° Modo**

(g) 7° modo [233,2 Hz]

**8° Modo**

(h) 8° modo [333,3 Hz]

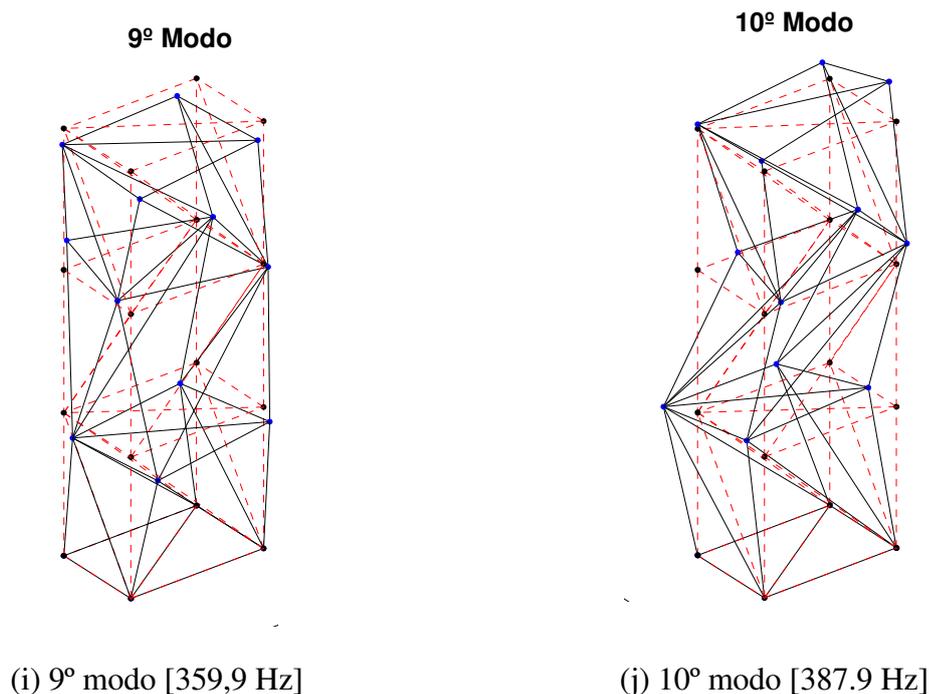


Figura 7.46 – Dez primeiros modos de vibrar da treliça espacial.

A configuração geral do problema de posicionamento de sensores/atuadores foi considerada, ou seja, incluindo o efeito de distúrbios e saída de desempenho (ou saídas reguladas) como apresentado no capítulo 3. O desempenho do atuador PZT foi avaliado quando posicionado em cada uma das 39 barras da treliça. A tabela 7.12 mostra a numeração das barras em função dos nós para clareza de entendimento. *Note que 5 barras estão presas no plano x-y entre os nós 1, 2, 3 e 4; portanto, não são consideradas como candidatas para posicionar os atuadores.* O desempenho do sensor foi avaliado quando posicionado em cada um dos 36 GL livres da estrutura, ou seja, nas direções x, y e z dos nós 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e 16 totalizando 36 posições candidatas. Foi considerado um distúrbio impulsivo no nó 13 na direção x e a saída de desempenho  $z(t)$  foi medida como deslocamento no nó 14 na direção x (*escolha aleatória*).

Tabela 7.12 – Número dos elementos (barras) em função dos nós.

Elemento	Nós	Elemento	Nós	Elemento	Nós	Elemento	Nós
1	1-5	11	7-8	21	8-9	31	11-15
2	2-5	12	5-8	22	9-10	32	11-16
3	2-6	13	6-8	23	10-11	33	12-16
4	2-7	14	5-9	24	11-12	34	9-16
5	3-7	15	5-10	25	9-12	35	13-14
6	3-8	16	6-10	26	9-11	36	14-15
7	4-8	17	7-10	27	9-13	37	15-16
8	1-8	18	7-11	28	10-13	38	13-16
9	5-6	19	8-11	29	10-14	39	14-16
10	6-7	20	8-12	30	10-15		

A figura 7.47 mostra os valores da norma  $H_{\infty}$  entre o distúrbio,  $w(t)$ , e a saída controlada,  $z(t)$ ; entre a força de controle,  $u(t)$ , e a saída,  $y(t)$ ; entre o distúrbio e saída; e entre o controle e a saída controlada. Estes gráficos permitem verificar a propriedade multiplicativa, seção 3.3.1.1. A figura 7.48 mostra a comparação desta propriedade, onde  $g_1$  é a norma  $H_{\infty}$  entre o distúrbio e a saída controlada multiplicada pela norma  $H_{\infty}$  entre o controle e saída e  $g_2$  é a norma  $H_{\infty}$  entre o distúrbio e saída multiplicada pela norma  $H_{\infty}$  entre o controle e a saída controlada. A propriedade multiplicativa e a norma  $H_{\infty}$  são mostradas para todos os modos da treliça.

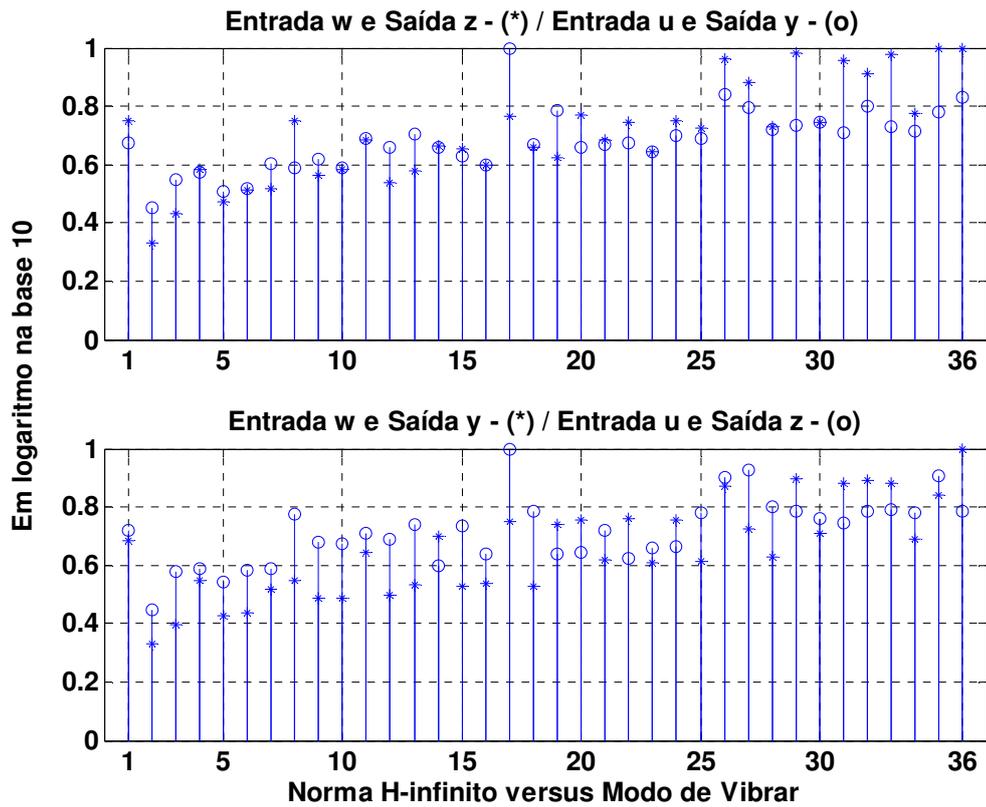


Figura 7.47 – Norma  $H_\infty$  dos modos da treliça espacial:  $G_{wz}$  e  $G_{uy}$ ;  $G_{wy}$  e  $G_{uz}$ .

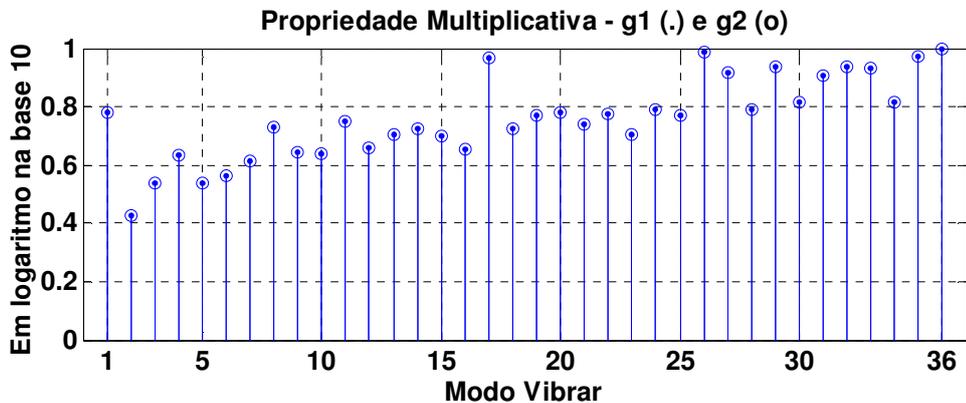


Figura 7.48 – Propriedade multiplicativa da norma  $H_\infty$  para a treliça espacial.

As figuras 7.49 e 7.50 mostram o peso do distúrbio e do desempenho sobre cada modo, respectivamente. Nota-se que o distúrbio impulsivo aplicado afeta pouco os modos de baixa frequência quando comparado com os modos 11, 14, 19, 22, 24 e 36. Uma vez que se pretende projetar um controlador para atenuar sinais de vibração nos quatro primeiros modos, deve-se destacar que o distúrbio afeta o segundo modo mais efetivamente que os modos 1, 3 e 4. Este resultado é importante, principalmente quando se utiliza modelos reduzidos para o

projeto de controladores, ou seja, é necessário conhecer os modos mais afetados pela ação dos distúrbios para a correta escolha dos modos a serem truncados. Já o peso do desempenho é uma importante informação por evidenciar a parte da dinâmica estrutural observada pela saída de desempenho, ou seja, é possível monitorar os modos de maior interesse. Nota-se que dos quatro primeiros modos, a saída de desempenho adotada permite observar mais efetivamente os modos 2 e 3. Esta informação pode ser confirmada nas figuras 7.46b e 7.46c. Na presente aplicação foi utilizada a norma  $H_\infty$  e, embora não mostrados, os resultados utilizando as normas  $H_2$  e Hankel são similares.

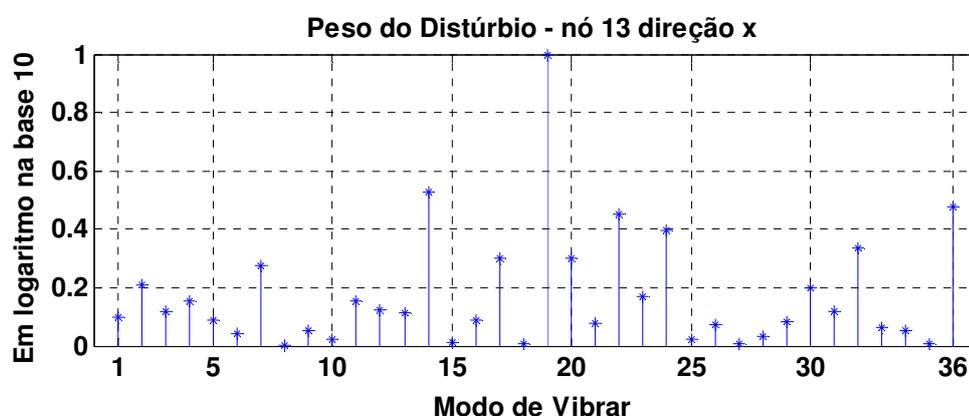


Figura 7.49 – Peso modal do distúrbio impulsivo para cada da treliça espacial.

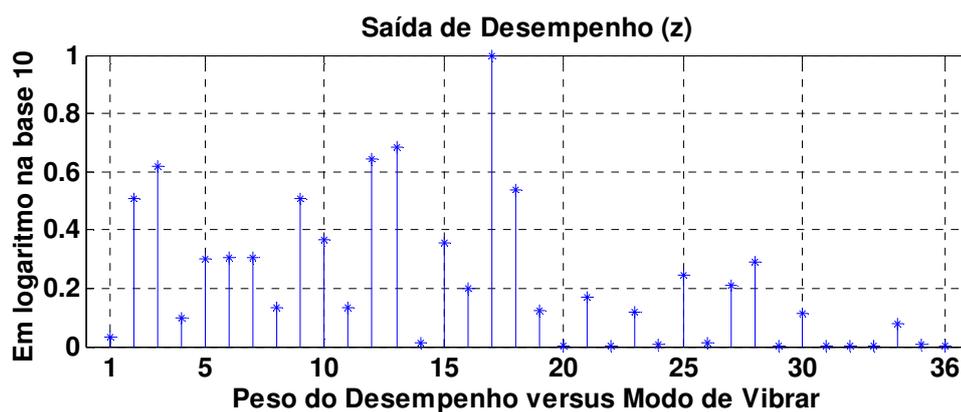


Figura 7.50 – Peso modal do desempenho para cada modo da treliça espacial.

Como apresentado na seção 3.2, a estratégia de posicionamento consiste em considerar um sensor em uma posição qualquer e obter o índice de posicionamento dos atuadores. O sensor foi, portanto, inicialmente considerado no nó 14 na direção  $y$ . Em seguida, posicionado o atuador na localização ótima, obtém-se o índice de posicionamento dos sensores. A figura

7.51 apresenta o índice de posicionamento do atuador PZT na treliça espacial. Nota-se que para o PZT localizado nos elementos 5, 7, 4 ou 14 se obtém melhores desempenhos.

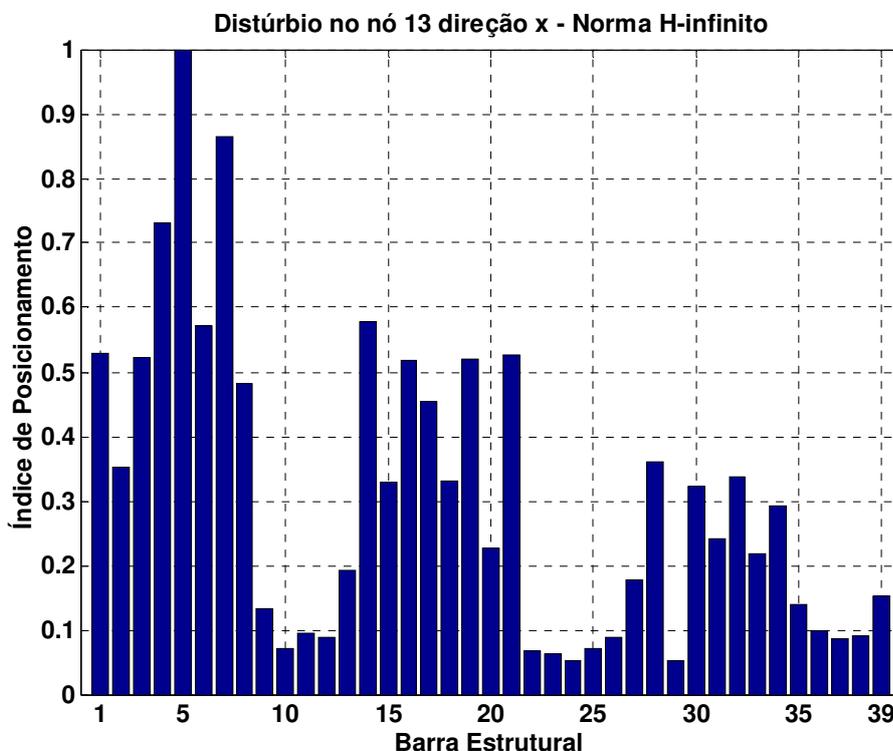


Figura 7.51 – Índice de posicionamento do atuador de pilha de PZT na treliça espacial.

Considerando um atuador na posição ótima (barra 5) foi calculado o índice de posicionamento dos sensores para cada uma das 36 posições candidatas, como mostra a figura 7.52. Verifica-se que as quatro melhores posições para o sensor são na direção x dos nós 14, 13, 15 e 16, respectivamente. As figuras 7.53 a 7.56 mostram o índice de posicionamento do sensor nos nós 13, 14, 15 e 16 para cada um dos dez primeiros modos de vibrar nas direções x, y e z. Caso se queira monitorar um modo específico é possível verificar qual a posição mais efetiva para o determinado modo.

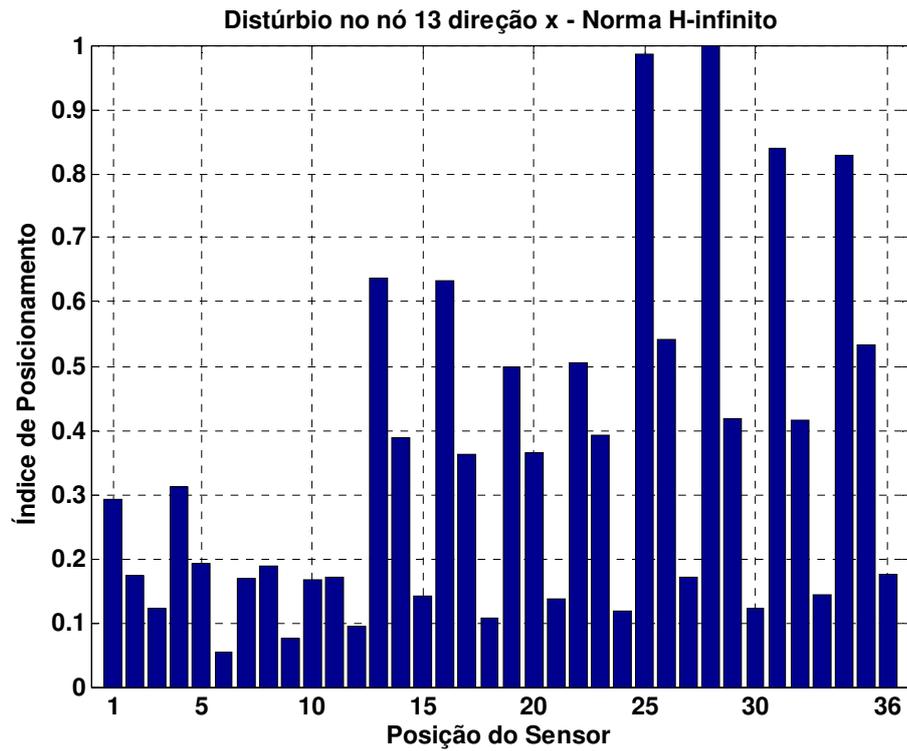


Figura 7.52 – Índice de posicionamento do sensor na treliça espacial.

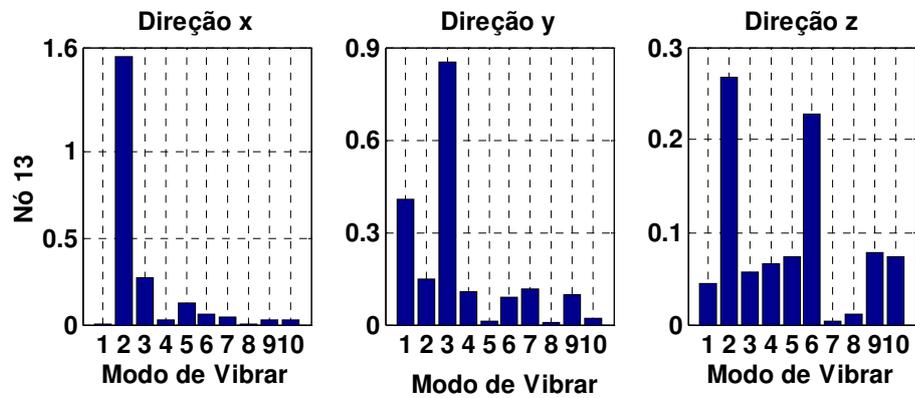


Figura 7.53 – Índice de posicionamento do sensor no nó 13.

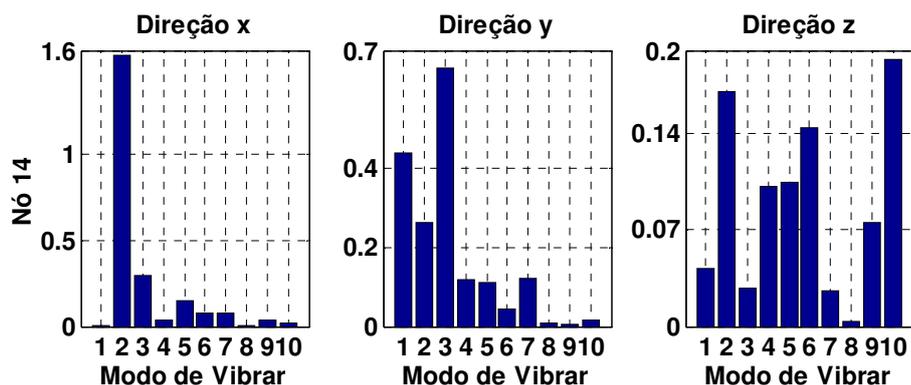


Figura 7.54 – Índice de posicionamento do sensor no nó 14.

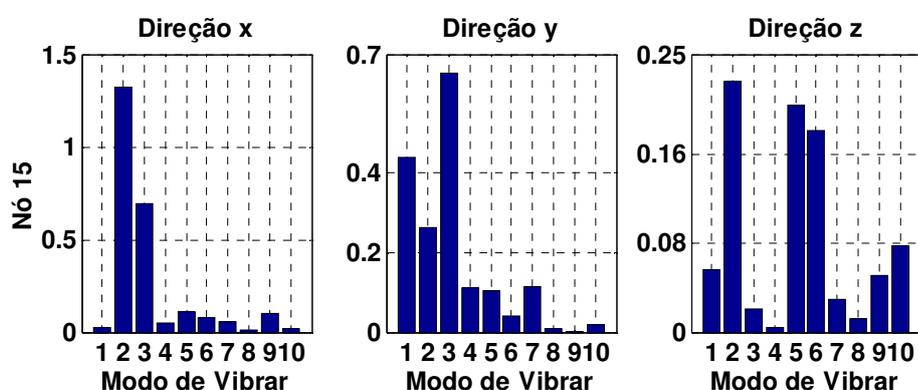


Figura 7.55 – Índice de posicionamento do sensor no nó 15.

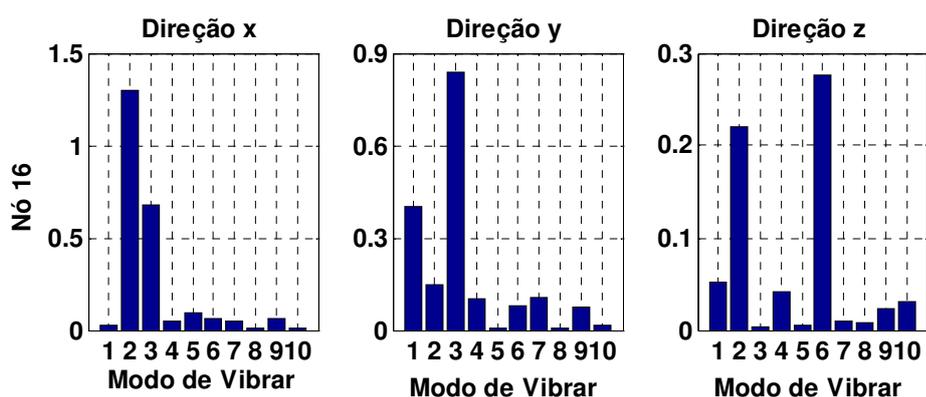


Figura 7.56 – Índice de posicionamento do sensor no nó 15.

Como discutido no capítulo 3, para o posicionamento de um considerável número de sensores não é satisfatório apenas utilizar o índice de desempenho individual. Dois sensores com elevados índices de posicionamento (ou seja, duas posições de alto desempenho para os

sensores) podem ser substituídos por apenas um deles utilizando um adequado ajuste de ganho. Neste caso se diz que tais sensores são altamente correlacionados. A figura 7.57 mostra o índice de relacionamento dos sensores e, verifica-se que as posições 8, 11, 16, 17, 20, 29, 31, 32, 34 e 35 são rejeitadas como candidatas por estarem altamente correlacionadas com as demais. O escalar positivo foi escolhido sendo  $\varepsilon = 0,01$  (Eq. 3.55). A tabela 7.13 mostra quais são estas posições na treliça para clareza de interpretação. A figura 7.58 mostra o índice de posicionamento do sensor nas posições aceitas, atribuindo valor zero as posições rejeitadas.

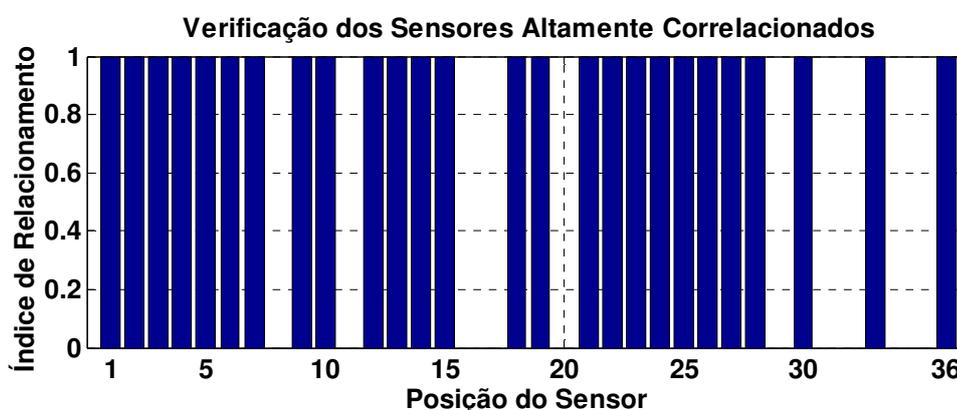


Figura 7.57 – Índice de relacionamento dos sensores.

Tabela 7.13 – Posições dos sensores altamente correlacionados.

Posição do sensor	Nó e direção na treliça
8	7 – y
11	8 – y
16	10 – x
17	10 – y
20	11 – y
29	14 – y
31	15 – x
32	15 – y
34	16 – x
35	16 – y

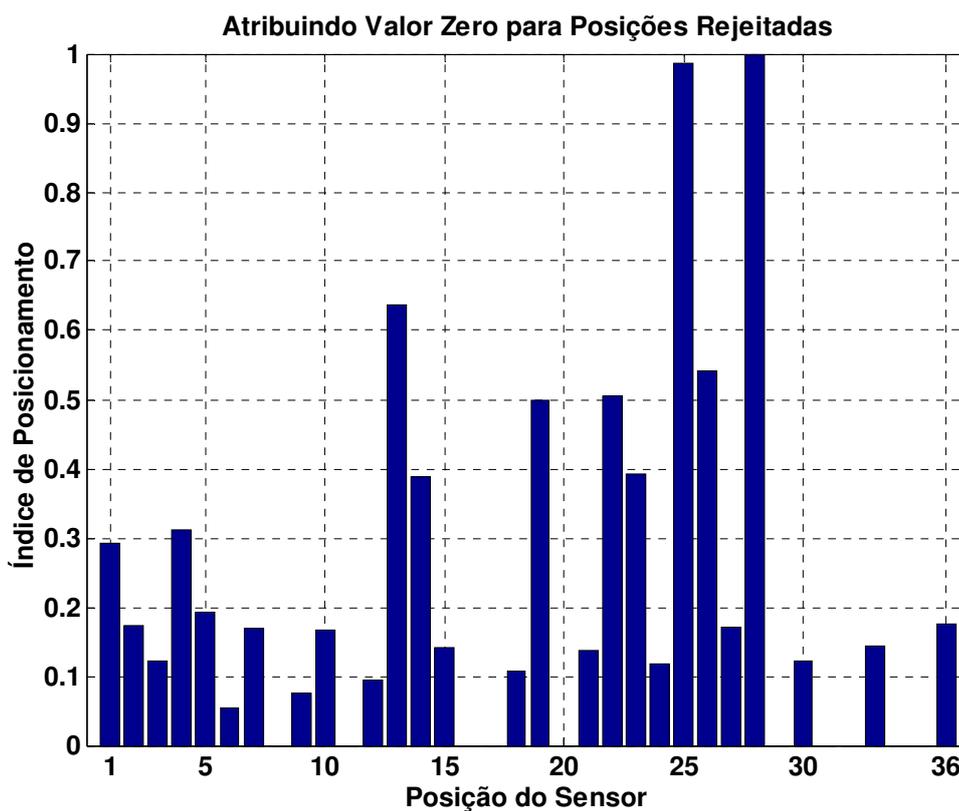


Figura 7.58 – Índice de posicionamento dos sensores eliminando as posições altamente correlacionadas.

Conhecidos os índices de posicionamentos dos atuadores e sensores e excluídas as posições ditas altamente correlacionadas, é possível se verificar que são necessários dois atuadores e dois sensores para que os quatro primeiros modos de vibrar sejam controláveis e observáveis, respectivamente. Logo, para o projeto do controlador robusto foram considerados dois atuadores PZTs, nas barras 5 e 7, e dois sensores, nos nós 13 e 14 ambos na direção  $x$ . Observe que a posição no nó 14 e direção  $x$  corresponde à localização do sensor de saída de desempenho (saída  $z(t)$ ), então este sensor também será utilizado para informar a saída de realimentação (saída  $y(t)$ ). A figura 7.59 mostra a treliça com os dois PZTs, os sensores e o distúrbio para auxiliar a compreensão do projeto de controle.

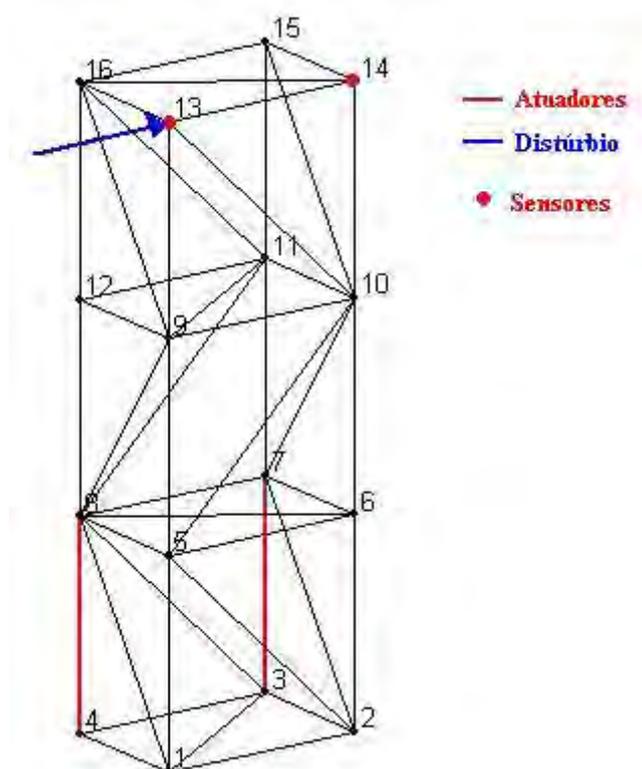


Figura 7.59 – Treliça espacial com dois atuadores de pilha de PZT (barras em vermelho), distúrbio (em azul) e sensores (nós em vermelho).

Como já mencionado no enunciado desta seção, é importante considerar o efeito dos membros ativos nas propriedades estruturais. Isto pode ser feito considerando o efeito do acoplamento eletromecânico em atuadores/sensores e a estrutura base (CARVALHAL, 2005); ou ainda, projetando um controlador que considere variações paramétricas. Nesta aplicação se considera que a inclusão dos atuadores de pilha origina variação na rigidez destes membros ativos. Para dois destes membros (pois são usados dois atuadores) são duas incertezas paramétricas, que podem ser representadas por quatro vértices em um sistema politópico, ( $2^p$ , onde  $p$  é o número de incertezas paramétricas). A representação destas incertezas é mostrada na figura 7.60, onde os vértices do politopo são dados pela combinação entre os valores máximos e mínimos das incertezas. Assim, é suposto que o sistema pode assumir qualquer combinação limitada por estes vértices que representam os extremos.

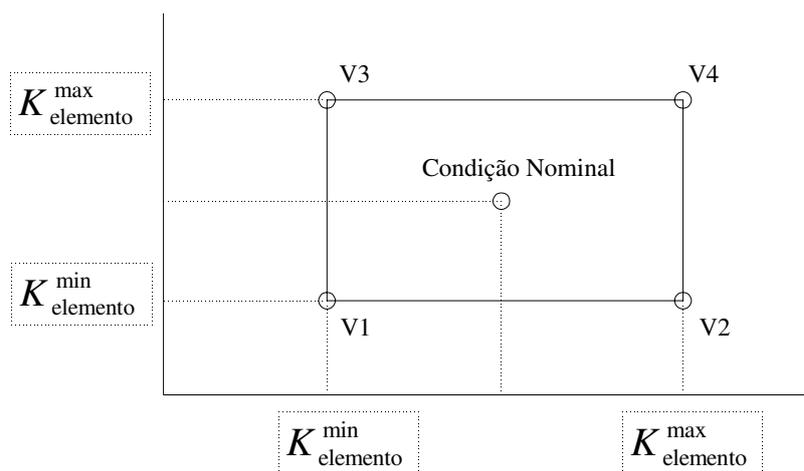


Figura 7.60 – Vértices do polígono para duas incertezas paramétricas.

Com os atuadores e sensores nas posições mostradas na Figura 7.59 os quatro primeiros modos de vibrar da treliça são controláveis e observáveis, respectivamente. O controlador LQR foi projetado para atenuar vibrações originadas pelo distúrbio externo. Foi considerado que a inclusão dos atuadores de pilha gera uma variação de 5% na rigidez nos elementos estruturais em que foram colocados. A figura 7.61 mostra a função de resposta em frequência (FRF) para os quatro primeiros modos do sistema sem controle, com controle via LQR e com controle LQR-LMI. A tabela 7.14 mostra a atenuação em dB para cada um dos quatro primeiros modos para os controladores LQR-tradicional e LQR-LMI.

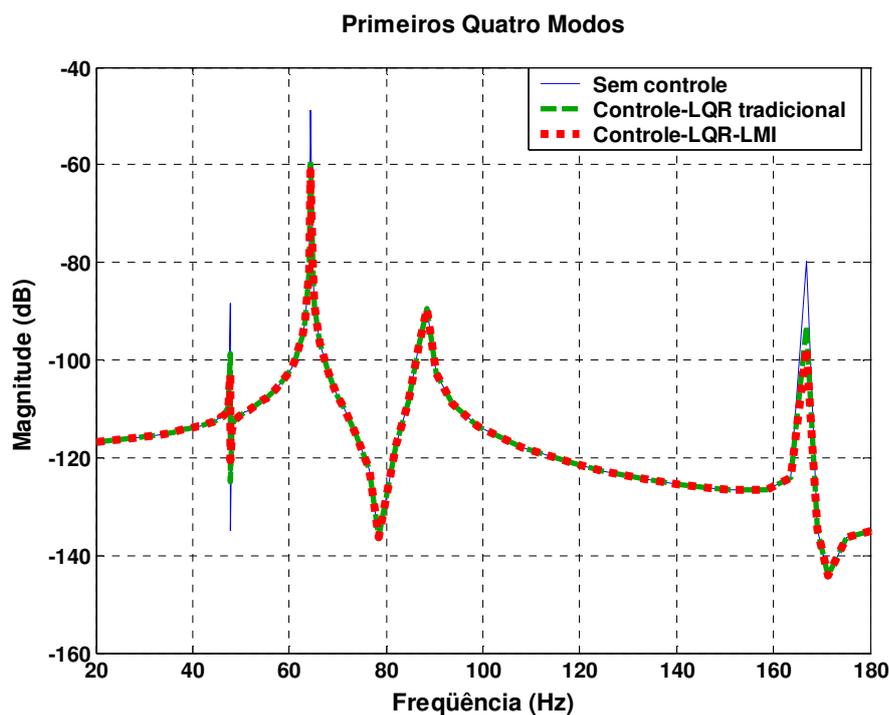


Figura 7.61 – FRF do modelo reduzido com +5% de variação na rigidez dos elementos 5 e 7 (posições ótimas para o atuador de pilha).

Tabela 7.14 – Atenuação em dB na amplitude de vibração para os quatro primeiros modos.

<b>Modo</b>	<b>LQR Tradicional</b> (Matriz de ganho calculada para o sistema na condição nominal)	<b>LQR LMI</b> (controle robusto)
Primeiro	10,5 dB	15,3 dB
Segundo	10,5 dB	12,5 dB
Terceiro	3,9 dB	5,4 dB
Quarto	13,2 dB	17,9 dB

No projeto de um controlador considerando um modelo reduzido é importante avaliar o efeito sobre os modos residuais, pois eventualmente, algum modo pode ser indesejavelmente amplificado, originando o efeito de *spillover* de controle. Portanto, a figura 7.62 mostra a FRF dos modos residuais para o sistema com e sem controle. É possível verificar que o sinal de vibração é atenuado também nos modos residuais devido à ação do controlador. As figuras 7.63 e 7.64 mostram a força modal em cada um dos atuadores PZT e, para detalhar a compreensão, a tabela 7.15 mostra alguns parâmetros destes sinais.

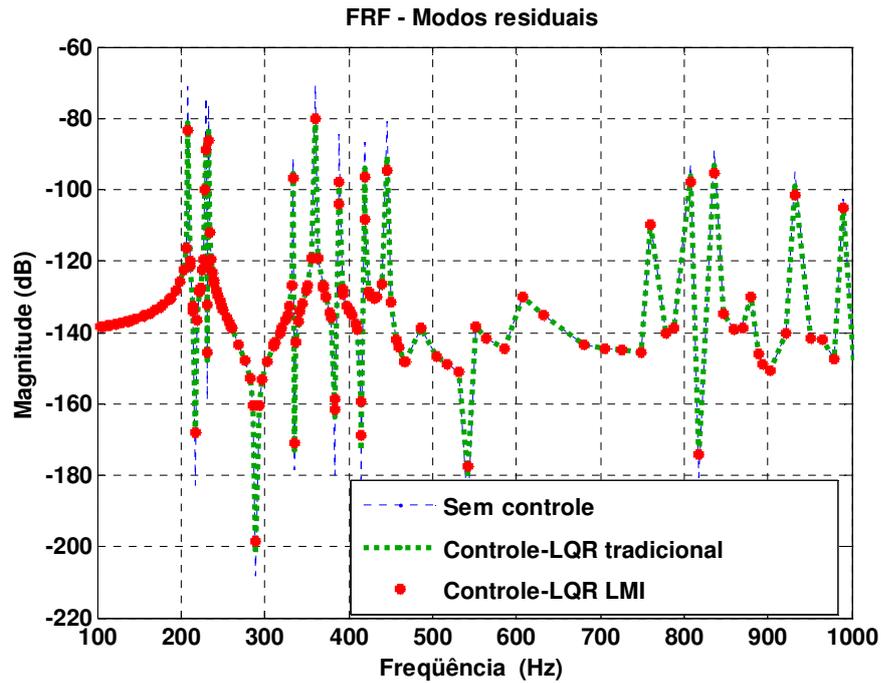


Figura 7.62 – FRF dos modos residuais para o sistema com e sem controle.

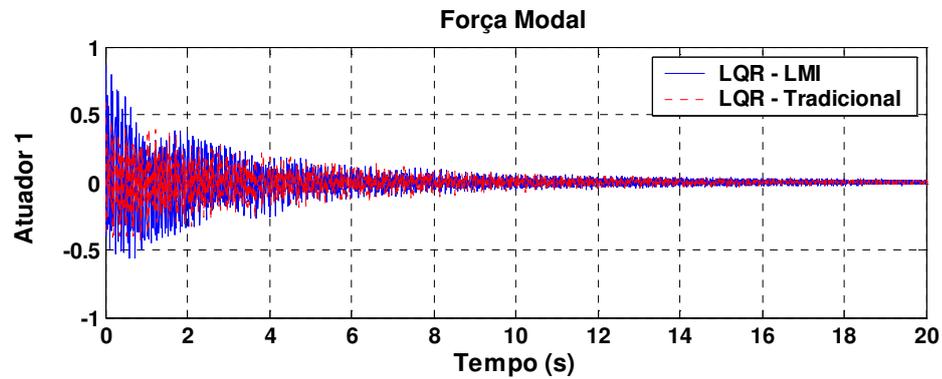


Figura 7.63 – Força modal no atuador 1 (elemento 5).

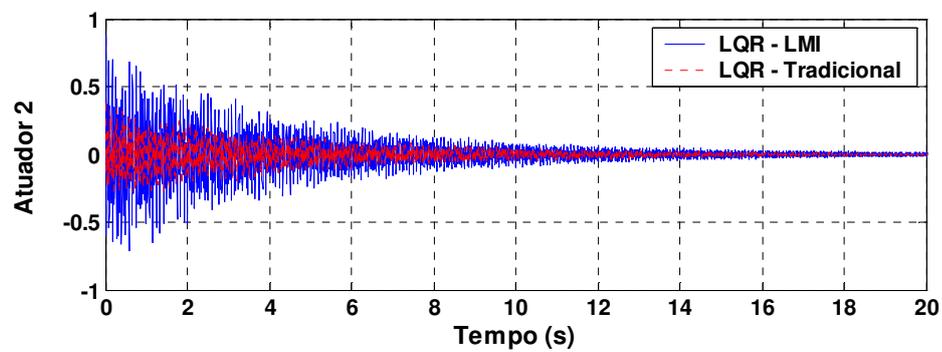


Figura 7.64 – Força modal no atuador 2 (elemento 7).

Tabela 7.15 – Parâmetros estatísticos dos sinais de força modal nos atuadores.

Força Modal	LQR Tradicional		LQR LMI	
	PZT 1	PZT 2	PZT 1	PZT 2
<i>Norma-2*</i>	4,1	3,1	5,2	6,5
<i>Valor Médio</i>	$6 \times 10^{-5}$	$4 \times 10^{-5}$	$9 \times 10^{-5}$	$9 \times 10^{-5}$
<i>Valor Máximo</i>	0,59	0,38	0,86	0,88
<i>Desvio Padrão</i>	0,06	0,04	0,07	0,09

\* A norma-2 de um vetor  $\mathbf{v} = \{v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n\}$  é:  $\|\mathbf{v}\|_2 = (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)^{1/2}$ .

A figura 7.65 mostra o deslocamento modal dos nós 13 e 14 na direção x. Nesta figura, pode-se notar, qualitativamente, que para o sistema controlado utilizando o ganho robusto obtido via LMIs ocorre uma atenuação um pouco mais efetiva das vibrações em relação ao controlador LQR tradicional. Para uma avaliação quantitativa a tabela 7.16 mostra alguns parâmetros estatísticos destes sinais.

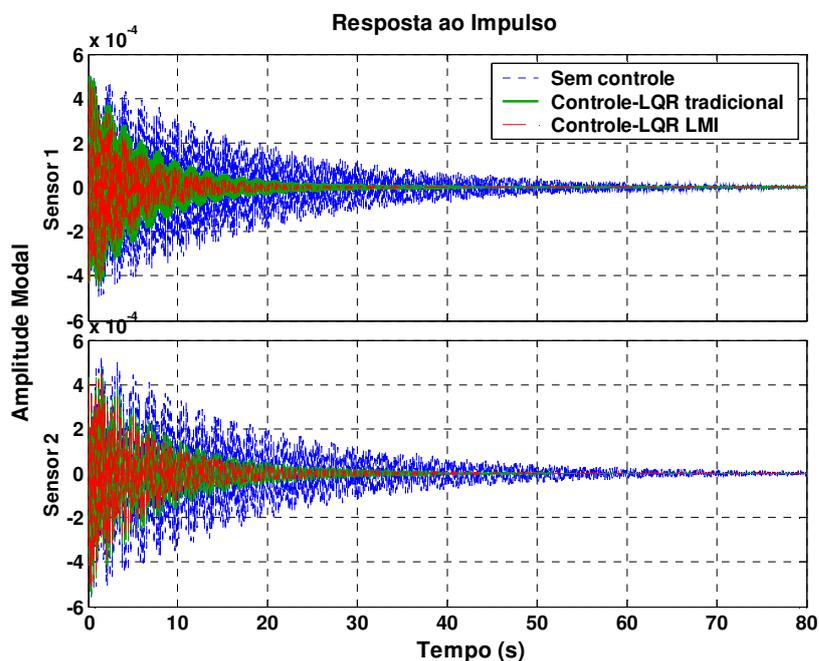
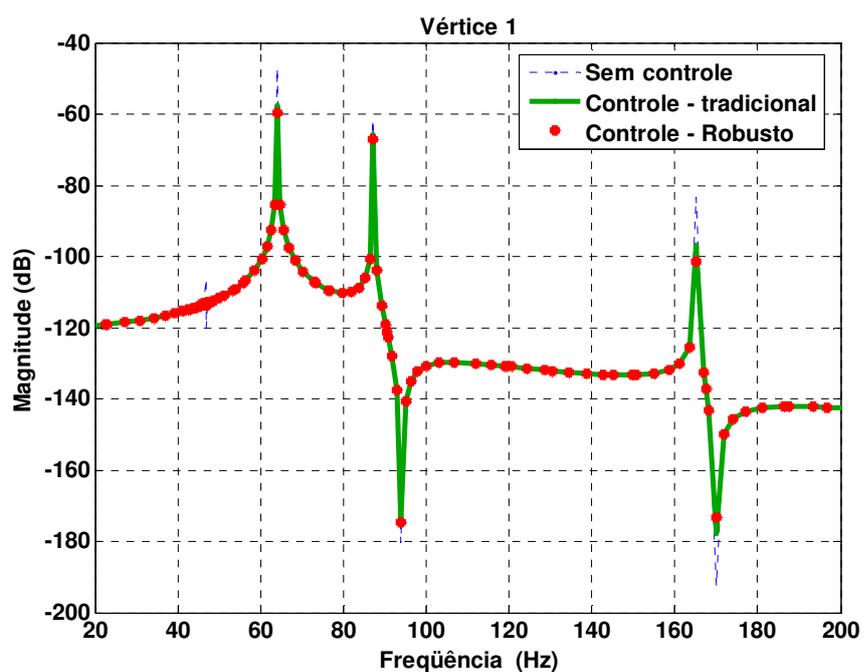


Figura 7.65 – Deslocamento modal obtido para o sistema com e sem controle.

Tabela 7.16 – Parâmetros estatísticos dos sinais de deslocamento modal.

Deslocamento Modal	LQR Tradicional		LQR LMI	
	Sensor 1	Sensor 2	Sensor 1	Sensor 2
<i>Norm-2</i>	0,0052	0,0053	0,0050	0,0052
<i>Valor Médio</i>	$-1,91 \times 10^{-8}$	$-5,79 \times 10^{-8}$	$2,05 \times 10^{-10}$	$-6,89 \times 10^{-8}$
<i>Valor Máximo</i>	$5,0 \times 10^{-4}$	$5,3 \times 10^{-4}$	$5,2 \times 10^{-4}$	$5,3 \times 10^{-4}$
<i>Desvio Padrão</i>	$7,3 \times 10^{-5}$	$7,5 \times 10^{-5}$	$7,1 \times 10^{-5}$	$7,4 \times 10^{-5}$

A figura 7.66 mostra a FRF do sistema com e sem controle quando considerado em um vértice do politopo, ou seja, em um extremo da variação. Para clareza de entendimento a tabela 7.17 mostra o desempenho do controlador LQR tradicional e robusto considerando o sistema em cada vértice do politopo. Nota-se que utilizando o ganho robusto é possível se conseguir uma maior atenuação para o sistema incerto.



(a) FRF dos quatro primeiros modos considerando o sistema no vértice 1.

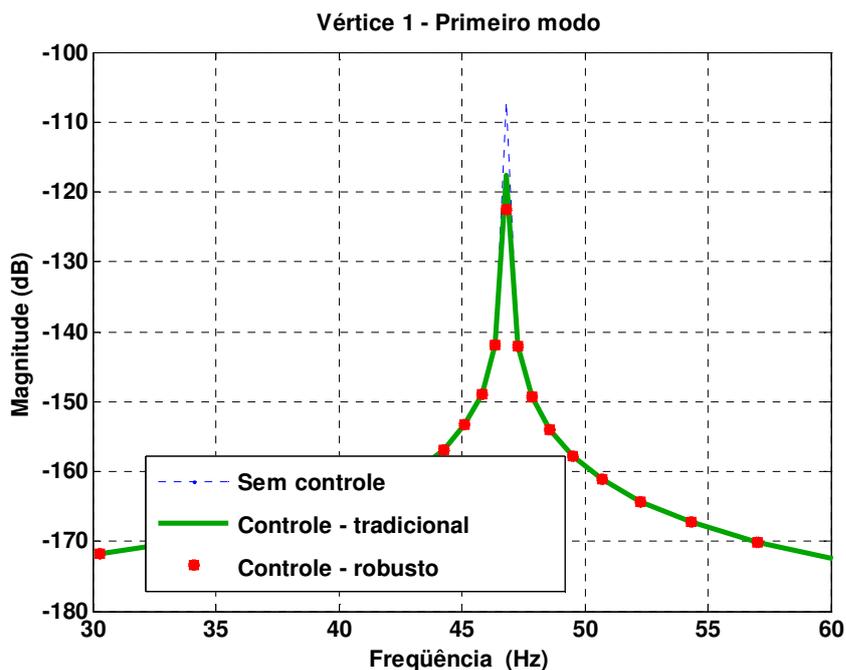
(b) *Zoom no primeiro modo.*

Figura 7.66 – FRF do sistema considerando os controladores tradicional e robusto para o sistema no vértice 1.

Tabela 7.17 – Atenuação em dB considerando o sistema em cada vértice do politopo.

	Vértice 1		Vértice 2		Vértice 3		Vértice 4	
Modo	Tradicional	Robusto	Tradicional	Robusto	Tradicional	Robusto	Tradicional	Robusto
1°	10,48	15,34	10,48	15,33	10,49	15,33	10,48	15,33
2°	10,40	12,46	10,40	12,45	10,40	12,46	10,40	12,45
3°	3,89	5,38	3,89	5,34	3,89	5,33	3,89	5,33
4°	13,19	17,93	13,17	17,92	13,16	17,90	13,14	17,88

## 7.5 PROJETO EXPERIMENTAL DE CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM UMA TRELIÇA 3D

Neste exemplo se buscou apresentar o projeto experimental do controlador LQR via LMI para atenuar um sinal de vibração nos dois primeiros modos de uma estrutura do tipo treliça 3D. A treliça, mostrada na figura 7.67, foi construída utilizando barras de aço e os “nós” estruturais foram confeccionados em latão. Cada barra foi conectada no nó por meio de

rosca M5. As propriedades físicas e geométricas da estrutura são mostradas na tabela 7.18. Na treliça foram acoplados dois atuadores PZT de pilha (PZT *stack*) da CEDRAT cujas propriedades são mostradas na tabela 7.19. Um PZT (PZT 1) foi utilizado para aplicar o distúrbio na estrutura e o outro (PZT 2) foi utilizado como atuador. Além dos dois PZTs foi utilizado um acelerômetro modelo 352C22 PCB Piezotronics® para medir a saída  $y(t)$  utilizada para o projeto do estimador de estados.



(a)



(b)



(c)

Figura 7.67 – Treliça 3D e atuadores PZT de pilha.

Observação: para testes experimentais é muito importante ligar individualmente cada equipamento, inclusive a estrutura e a placa de controle, em um único ponto de aterramento para se evitar danos.

Tabela 7.18 – Propriedades físicas e geométricas da treliça.

Comprimento da barra (mm)	30
Diâmetro da barra (mm)	5
Módulo de elasticidade (GPa)	210
Densidade (Kg/m <sup>3</sup> )	7800

Tabela 7.19 – Propriedades físicas e geométricas do atuador de pilha (*CEDRAT Technologies*).

<b>Propriedade</b>	<b>Unidade</b>	<b>Modelo APA60M</b>
Deslocamento	( $\mu\text{m}$ )	80
Força (Bloqueado)	(N)	110
Rigidez	(N/ $\mu\text{m}$ )	1,38
Frequência de Ressonância (livre-livre)	(Hz)	10400
Tempo de Resposta (livre-livre)	(ms)	0,05
Frequência de Ressonância (bloqueado-livre)	(Hz)	2800
Tempo de Resposta (bloqueado-livre)	(ms)	0,18
Faixa de Tensão Elétrica	(V)	-20...150
Capacitância	( $\mu\text{F}$ )	1,55
Resolução	(nm)	0,8
Relação Termo-Mecânica	( $\mu\text{m}/\text{K}$ )	1,02
Altura (na direção de atuação)	(mm)	13,0
Comprimento	(mm)	26,9
Largura	(mm)	11,5
Massa	(g)	20,0
Interface Mecânica Padrão	2 superfícies planas de 5*10 mm <sup>2</sup> e furo com rosca M2,5	
Interface Elétrica Padrão	fios de 100 mm e <i>plug</i> banana ( $\varnothing$ 1)	

Para possibilitar o acoplamento dos atuadores foram desenvolvidos pequenos adaptadores que permitem o posicionamento dos atuadores piezelétricos (PZTs) nos elementos estruturais (barras). Os adaptadores, confeccionados em alumínio, são mostrados nas figuras 7.68a e 7.68b e possuem um furo em sua direção perpendicular, com rosca M3, para que um pequeno parafuso possa fixá-lo na barra. Isto proporcionou maior facilidade no acoplamento diminuindo risco de danificar os PZTs. Note que, em um dos extremos do adaptador existe um parafuso com rosca M2,5 que permite conectá-lo ao atuador. Para clareza de compreensão a figura 7.68c mostra o atuador fixado na barra utilizando o adaptador.



(a)



(b) adaptadores



(c) atuador PZT fixado

Figura 7.68 – Adaptadores construídos em alumínio para fixar os atuadores nas barras da treliça.

Os nós estruturais foram confeccionados com 24mm de diâmetro no formato de octógono (figura 7.69). As imagens mostradas nas figuras 7.70a e b mostram um nó estrutural em detalhe e conectado a alguns elementos da treliça para clareza de entendimento.

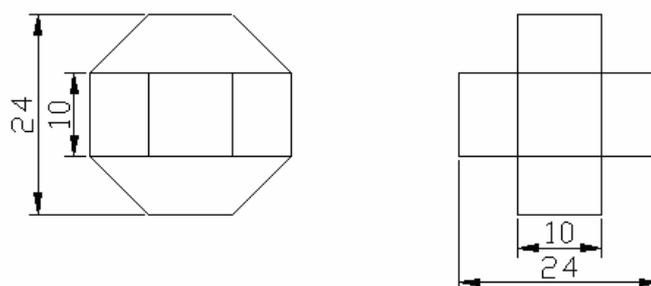


Figura 7.69 – Desenho esquemático dos nós estruturais da treliça.



Figura 7.70 – Nó estrutural confeccionado em latão.

Para o projeto do controlador foi necessário identificar o modelo no Espaço de Estados em coordenadas modais. Para isto, o primeiro passo foi realizar uma estimação da função de resposta em frequência (FRF) e, então, definir quais os dois primeiros modos de vibração da treliça. Com isto, o processo de identificação do modelo é facilitado, pois são conhecidas as frequências naturais da estrutura. Outro procedimento válido, porém não adotado neste trabalho, seria utilizar, por exemplo, o diagrama de estabilização para definir a ordem do modelo estrutural e então as frequências naturais. A figura 7.71 mostra a FRF da estrutura obtida através da aplicação da Transformada de Fourier (TF) na resposta ao impulso. Um filtro digital *butterworth* passa-baixa de quinta ordem e com frequência de corte igual a 112,5Hz foi utilizado (ver o comando “*butter*” do *software* Matlab). A resposta ao impulso, mostrada na figura 7.72a, foi obtida com a aplicação de um impulso em uma das barras verticais da treliça através do martelo mostrado na figura 7.72b.

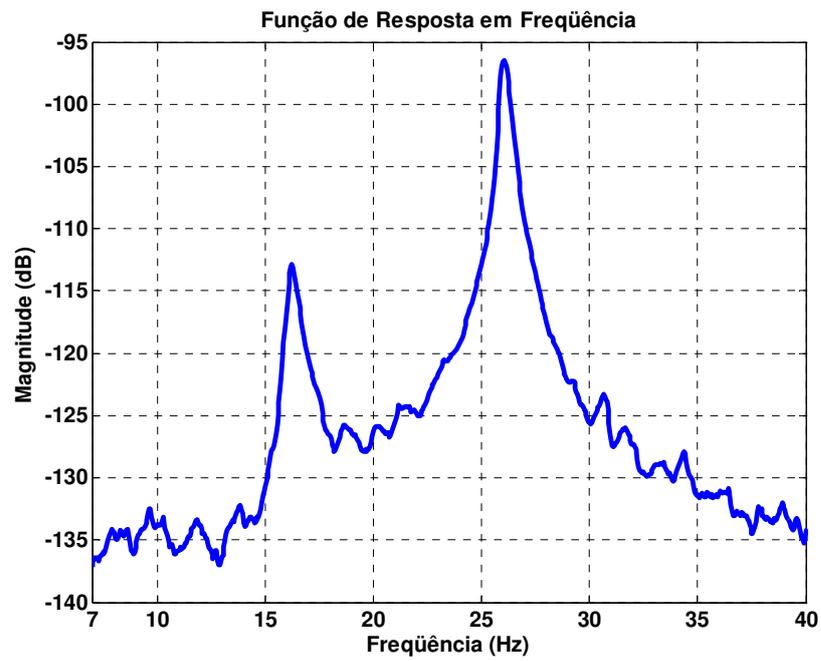
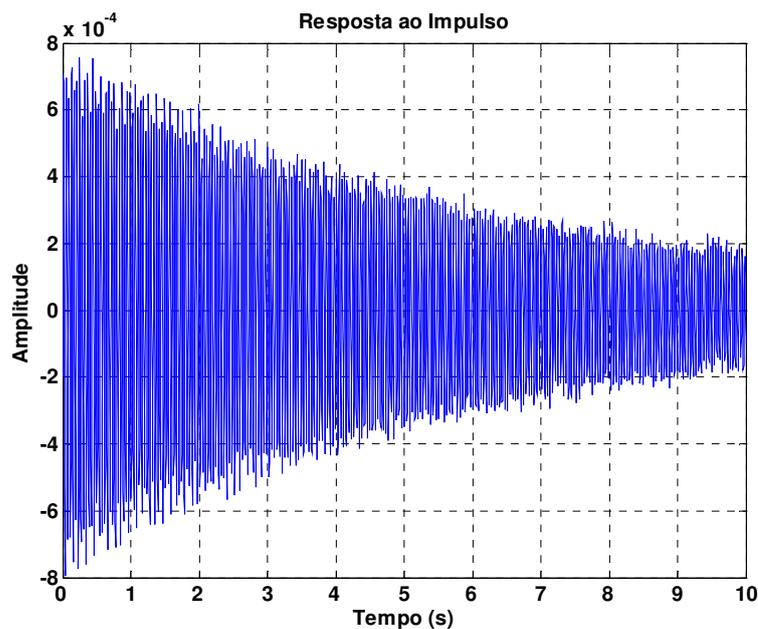


Figura 7.71 – FRF da treliça 3D estimada a partir da resposta ao impulso.



(a)



(b)

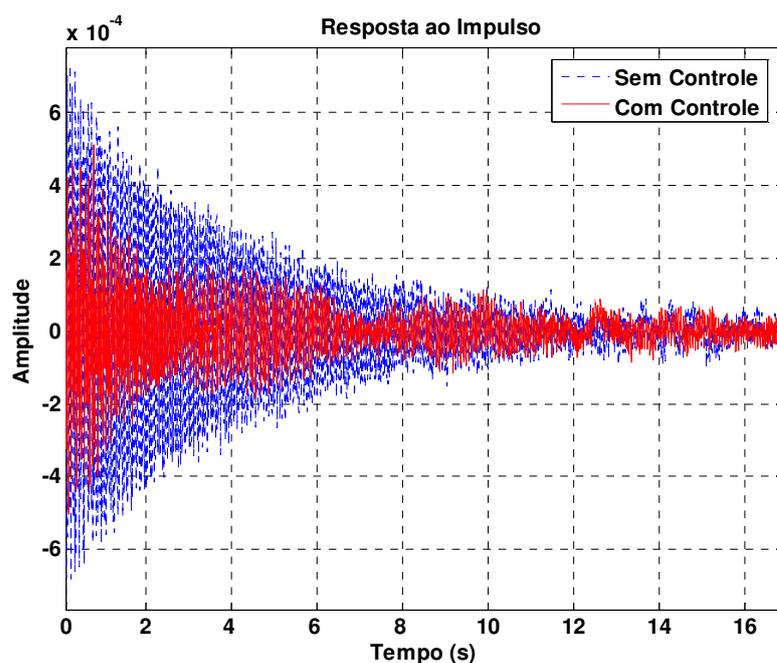
Figura 7.72 – (a) Resposta ao impulso; (b) Martelo de impacto.

A partir dos resultados obtidos com a FRF, mostrada na figura 7.71, foi possível definir que a primeira e a segunda frequência natural da treliça estão aproximadamente em 16Hz e 26Hz, respectivamente. Note que, uma vez que o objetivo de projeto é atenuar sinais de vibração nestes dois modos, não foi necessário especificar com exatidão os valores destas frequências. O passo seguinte foi estimar as matrizes do sistema utilizando os sinais de entrada e saída da estrutura. Para a correta identificação da matriz de entrada de controle ( $\mathbf{B}$ ) e de distúrbio ( $\mathbf{B}_w$ ) foi preciso realizar dois testes de aquisição. No primeiro teste foi enviado um sinal para o PZT 1 e medida a resposta do acelerômetro. Analogamente, o segundo teste foi realizado enviando um sinal para o PZT 2. Cada teste foi repetido três vezes, então, foram obtidos três sinais de entrada e saída para cada PZT. Para cada par de sinais (de entrada e

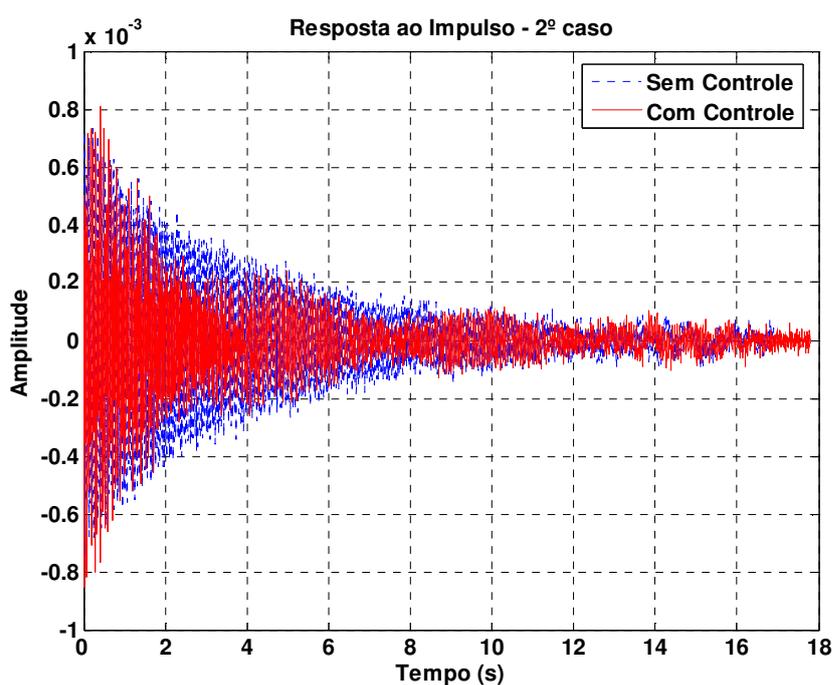
saída) as matrizes do sistema foram identificadas utilizando o método de Subespaço. O Anexo 2 apresenta em detalhes o procedimento realizado para a identificação das matrizes.

Após a identificação dos modelos o filtro de Kalman foi projetado. Uma vez que os ganhos encontrados foram aproximadamente iguais para cada conjunto de matrizes, foi utilizado o ganho do observador igual à  $\mathbf{K}_t = [463,9982 \ 65,8124]^T$  considerando as matrizes  $\mathbf{V}_K$  e  $\mathbf{W}_K$  iguais a  $100*\mathbf{I}$  e  $0,02*\mathbf{I}$ , respectivamente, sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade. Considerando  $\mathbf{Q} = 5*\mathbf{I}$  e  $\mathbf{R} = 1*\mathbf{I}$ , o ganho do controlador LQR obtido foi  $\mathbf{G} = [-1,5426 \ 2,5514]$ . O controle experimental foi realizado utilizando um diagrama escrito em *Simulink/Matlab* e a placa de controle DSPACE 1103 (Para clareza de entendimento ver o Anexo 2).

As figuras 7.73a e b mostram a resposta ao impulso da treliça com e sem a ação do controle. Uma vez que a entrada impulsiva foi aplicada utilizando um pequeno martelo, não foi possível ter controle da magnitude do impulso, então, são mostradas as duas figuras. O impulso com controle, mostrado na figura 7.73a, foi aplicado involuntariamente com menor força, porém, o da figura 7.73b foi aplicado com maior força. A força de excitação do martelo não foi medida ou controlada para avaliar a robustez do controlador projetado. Contudo, percebe-se claramente a dissipação do sinal de vibração para ambos os casos.



(a)



(b)

Figura 7.73 – Resposta ao impulso da treliça com e sem controle.

Além da aplicação do controle para uma entrada impulsiva, dois outros testes foram realizados. Nestes testes foram aplicadas forças de distúrbio senoidal com frequências de 16Hz e 26Hz, respectivamente. O objetivo foi mostrar que o controlador projetado é capaz de atenuar vibrações nos dois primeiros modos apenas com ajuste de ganho. A figura 7.74

mostra a resposta da estrutura com e sem controle para a excitação senoidal de 16Hz e a figura 7.75 mostra a resposta estimada com o filtro de Kalman. A força de controle é mostrada na figura 7.76.

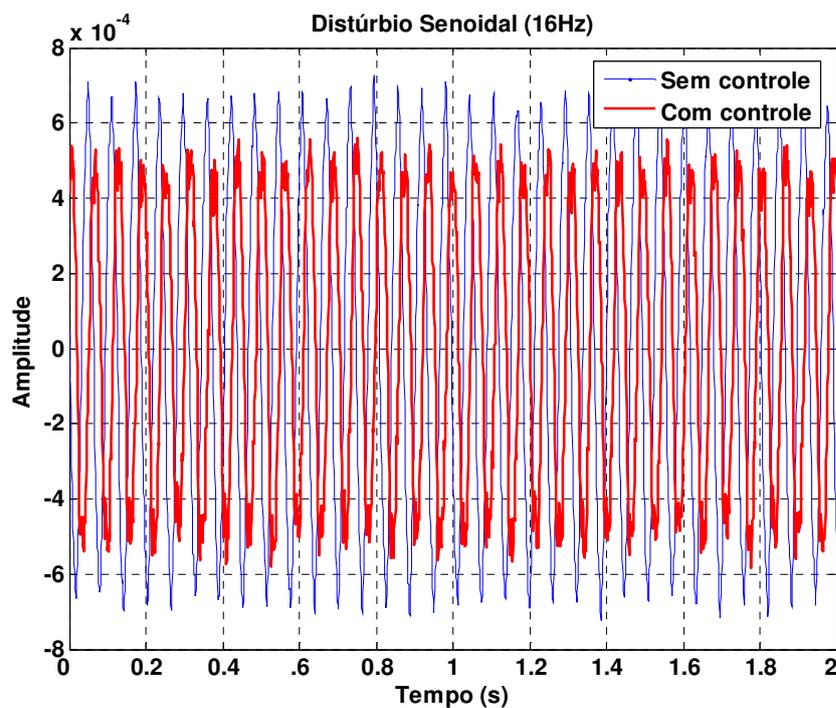


Figura 7.74 – Resposta da estrutura com e sem controle – distúrbio senoidal (16Hz).

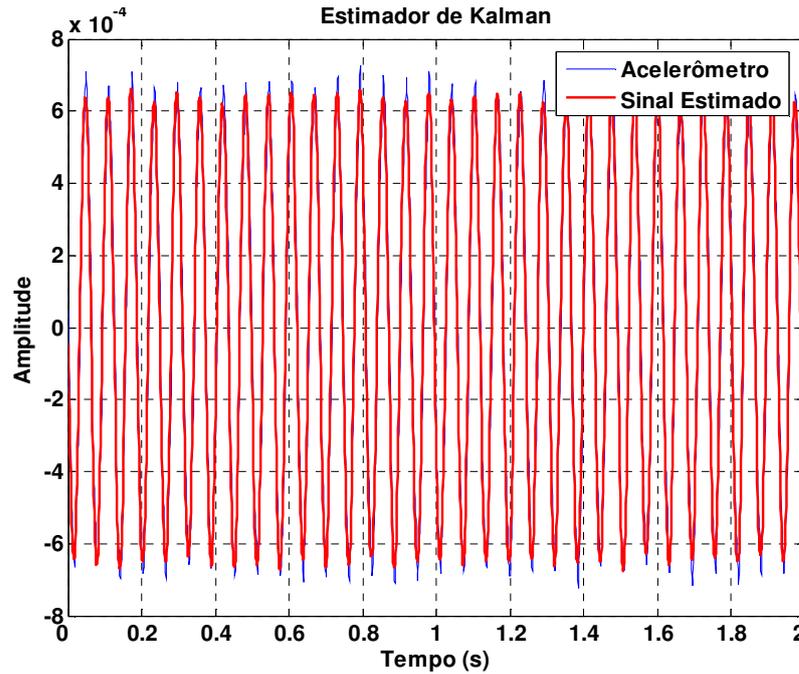


Figura 7.75 – Resposta estrutural estimada pelo filtro de Kalman – distúrbio senoidal (16Hz).

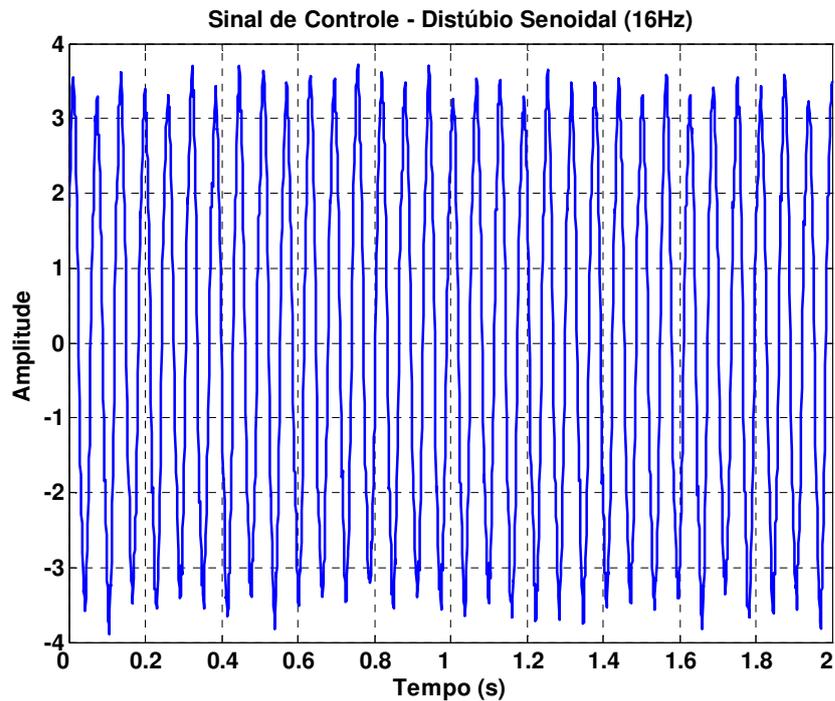


Figura 7.76 – Força de controle – distúrbio senoidal (16Hz).

A figura 7.77 mostra o sinal do acelerômetro sem controle e, após aproximadamente 4,5 segundos, com controle. Neste caso, em que foi considerado o distúrbio senoidal de 26Hz, é possível notar claramente a minimização do sinal de vibração. É possível identificar as

matrizes do sistema e projetar o controle especificamente para o segundo modo de vibração, assim, certamente seria possível maximizar a dissipação de energia de vibração e, então, diminuir ainda mais a amplitude do sinal durante a ação do controlador. No entanto, em particular neste trabalho, buscou-se apresentar que um único projeto permite atenuar vibrações indesejáveis nestes três casos (entrada impulsiva e excitação nos dois primeiros modos de vibração).

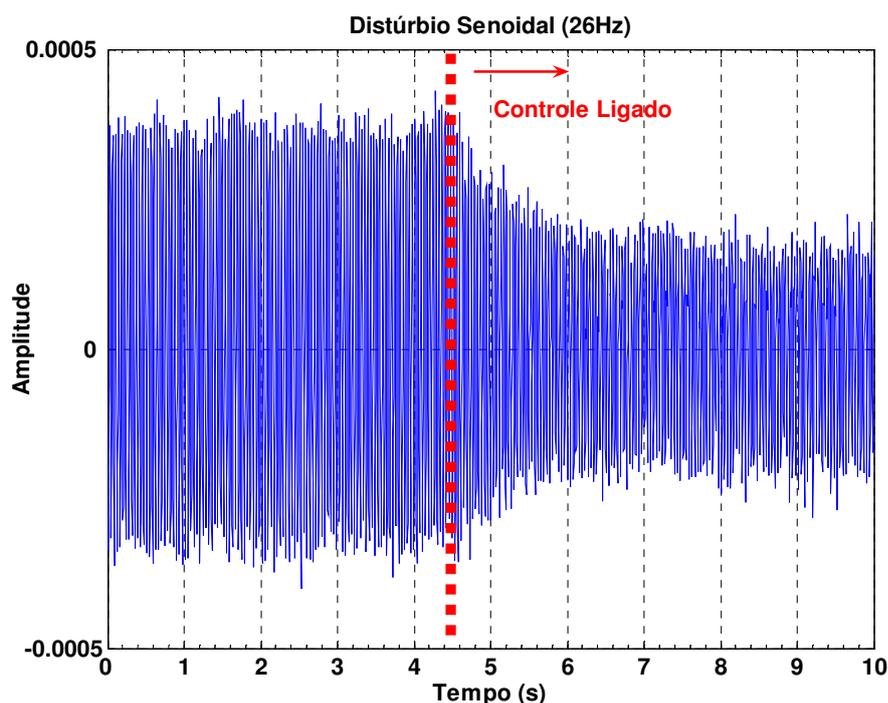


Figura 7.77 – Resposta estrutural sem e com controle – distúrbio senoidal (26Hz).

As figuras 7.78 e 7.79 mostram a força de controle e saída estimada pelo filtro de Kalman para o caso de distúrbio senoidal de 26Hz, respectivamente. Também, é possível ver o sinal de distúrbio e a resposta estrutural medida pelo acelerômetro na figura 7.80 com maior detalhe. Ainda, as figuras 7.81 e 7.82 mostram a FRF da treliça com e sem controle em valores absolutos e em dB, respectivamente, obtidas aplicando a TF na resposta ao impulso com e sem controle. Estas FRFs foram obtidas considerando a média de três FRFs para os casos sem e com controle, resultando em uma atenuação de aproximadamente 6 dB e 9 dB no primeiro e segundo modo, respectivamente. Para facilitar a visualização dos resultados, a figura 7.83 mostra a FRF com um *Zoom* nos dois modos de vibração.

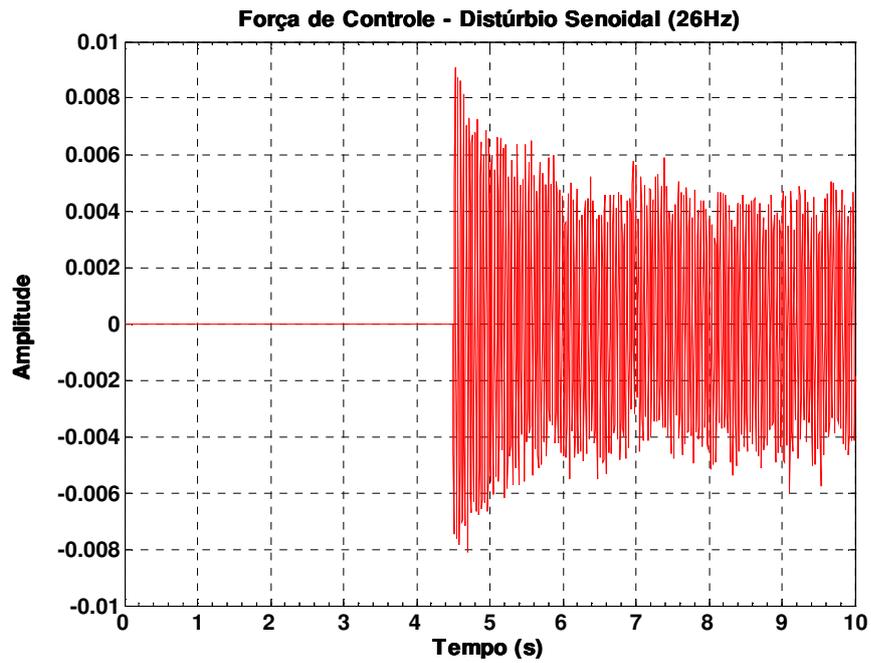


Figura 7.78 – Força de controle – distúrbio senoidal (26Hz).

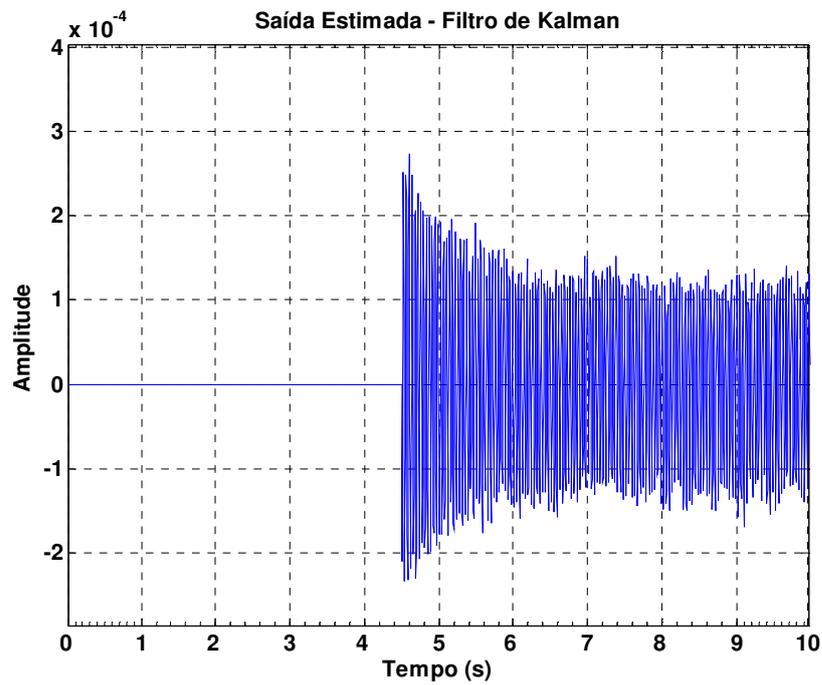


Figura 7.79 – Resposta estrutural estimada pelo Filtro de Kalman – distúrbio senoidal (26Hz).

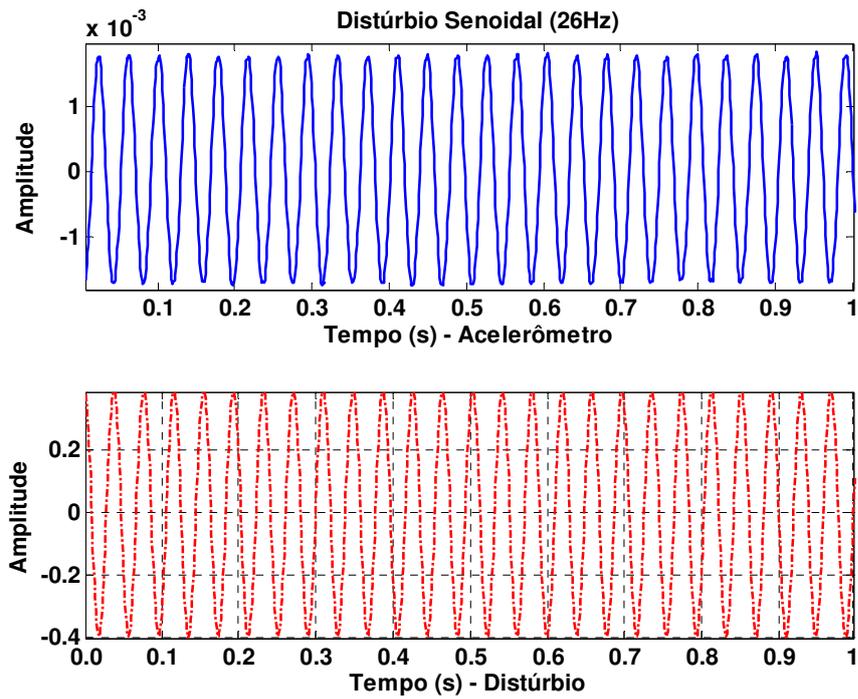


Figura 7.80 – Sinal de distúrbio senoidal (26Hz) e sinal do acelerômetro.

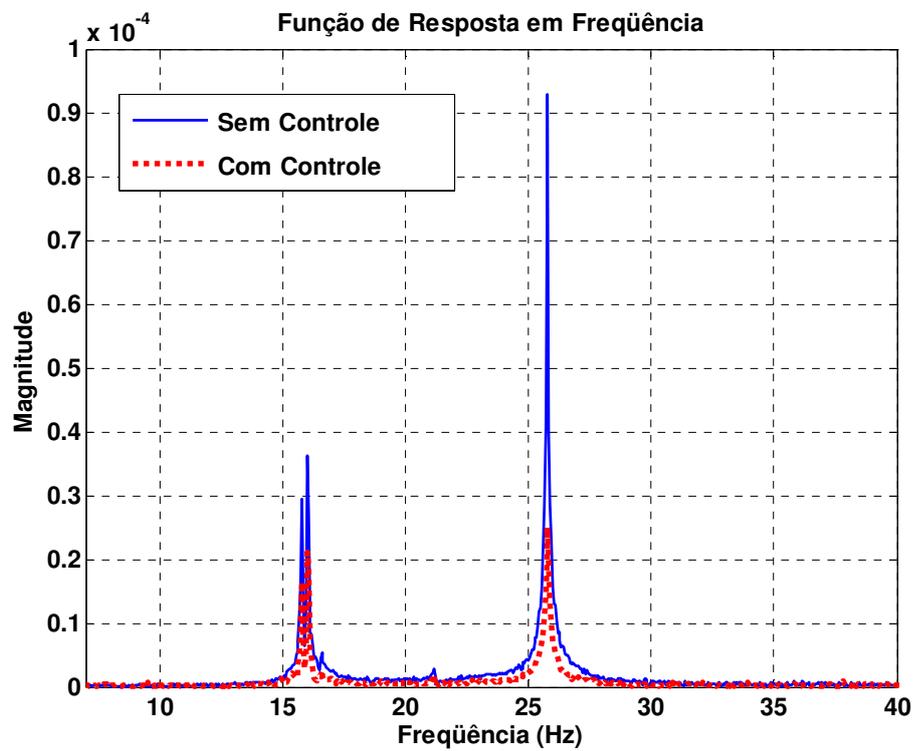


Figura 7.81 – FRF da treliça com e sem controle – valores absolutos.

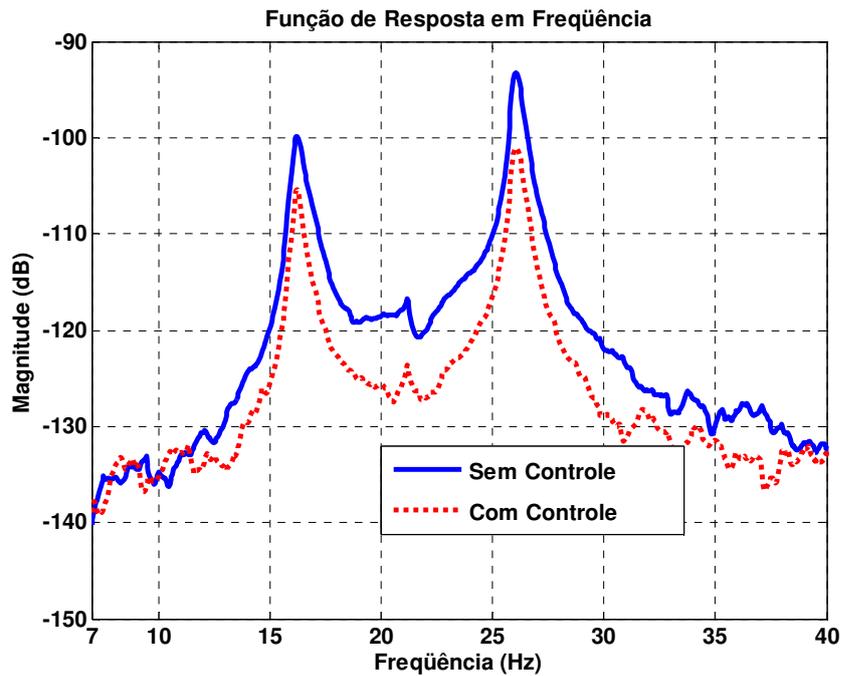


Figura 7.82 – FRF da treliça com e sem controle – valores em dB.

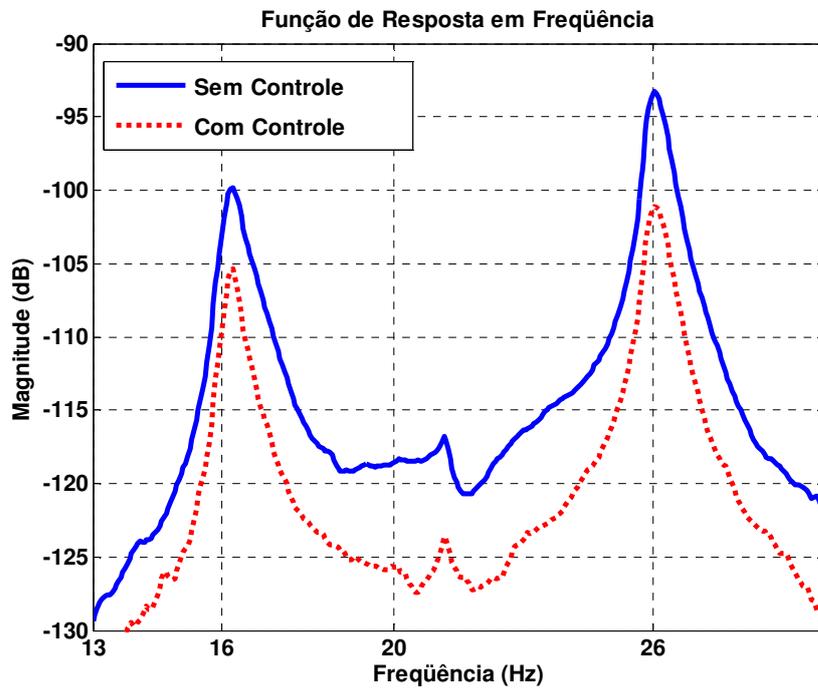


Figura 7.83 – FRF da treliça com e sem controle – *Zoom* nos dois primeiros modos.

Observação: o aspecto qualitativo das figuras 7.82 e 7.83 para com e sem controle pode ser melhorado utilizando a média de vários sinais e, ainda, filtros analógicos.

## CAPÍTULO 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo são apresentados alguns comentários, conclusões e sugestões para novas pesquisas a partir dos assuntos discutidos neste trabalho.

### 8.1 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou algumas técnicas de posicionamento ótimo de sensores e atuadores piezelétricos e controle ativo de vibrações em estruturas mecânicas. Devido à adição dos atuadores e sensores juntamente com o projeto de um controlador, as estruturas são denominadas **estruturas inteligentes** (ou *smart structures* em inglês). Para obter as localizações ótimas de atuadores e sensores foram utilizadas formulações envolvendo as matrizes gramianas de controlabilidade e observabilidade; e as normas de sistemas (norma Hankel,  $H_2$  e  $H_\infty$ ). Os índices de posicionamento, ou seja, os índices de desempenho dos atuadores e sensores foram calculados para cada modo de vibração, permitindo assim uma avaliação mais detalhada. As estruturas foram representadas pela realização no espaço de estados modal, o que permitiu o truncamento do modelo. Em algumas aplicações as matrizes do sistema foram obtidas através do método dos elementos finitos (construindo as matrizes de massa e rigidez e considerando a matriz de amortecimento proporcional). No entanto, em algumas aplicações as matrizes do sistema foram identificadas através de dados experimentais dos sinais de entrada e saída e utilizando o método de subespaço.

Neste trabalho, também, foi apresentado o índice de relacionamento dos sensores. Para o posicionamento de um considerável número de sensores – por exemplo, em estruturas mecânicas do tipo treliças espaciais com muitos graus de liberdade e relativa complexidade – é necessário avaliar se um adequado ajuste de ganho em um sensor não é capaz de eliminar a necessidade de um outro sensor. Sendo assim, dois sensores com elevado índice de posicionamento podem ser substituídos por apenas um, e neste caso, pode-se dizer que eles estão altamente correlacionados. Além desta avaliação, também foi apresentada a configuração geral do problema de posicionamento ótimo de sensores e atuadores, que envolve a consideração de distúrbios e saídas reguladas. Os distúrbios também foram considerados em uma aplicação que envolveu o cálculo da matriz gramiana de sensibilidade de distúrbio.

Além do problema do posicionamento ótimo de sensores e atuadores, neste trabalho foi apresentado o controlador LQR em sua versão LMI e o projeto de controladores robustos. As LMIs foram resolvidas utilizando o Toolbox do *software* Matlab<sup>®</sup>. Alguns autores consideram incertezas em um determinado parâmetro modal da estrutura, como mostra Silva *et al.* 2006, que considera incerteza no valor das duas primeiras frequências naturais de uma placa flexível. No entanto, definir este parâmetro não é uma tarefa trivial, logo, buscando considerar estas incertezas, neste trabalho foram consideradas duas estratégias básicas:

1<sup>a</sup> – para modelos identificados a partir de dados experimentais, um número de testes de aquisição de sinais maior que 1 foi utilizado. Assim, já que para cada teste de aquisição é possível se obter um conjunto de matrizes que representam o sistema (matrizes da realização no espaço de estados), as matrizes dinâmicas de todos os testes foram consideradas simultaneamente no cálculo do ganho do controlador. Com isto, uma vez que a partir de cada identificação se obtém parâmetros modais com pequenas diferenças, é possível projetar um controlador robusto.

2<sup>a</sup> – a segunda estratégia, apresentada na quarta aplicação, considerou que a inclusão dos atuadores de pilha (PZTs *stacks*) alteram a rigidez da barra em que são colocadas. Assim, também foi possível projetar um controlador com robustez a incertezas.

Devido à necessidade de se conhecer o vetor de estados completo para realimentar o sistema, um observador de estados (utilizado como estimar de estados) foi projetado. Em particular, neste trabalho foi utilizado o estimador baseado no filtro de Kalman, que é um excelente observador na presença de ruídos brancos, atua como filtro passa-baixa e tem margens de estabilidade garantidas. O conceito fundamental para o projeto de um controlador juntamente com um observador de estados é o **Princípio da Separação**. Este princípio evidencia que os autovalores do sistema de controle por realimentação, baseado em um observador de estados são os autovalores do sistema de controle por realimentação total dos estados (o sistema dado por  $\mathbf{A}_c = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}$ ) e os autovalores do observador. Isto permite que o ganho do controlador e o ganho do observador possam ser computados independentemente. Este princípio é aplicável para qualquer que seja o observador utilizado, pois a equação característica de duas funções de transferência em série (a da dinâmica de um observador qualquer e a dinâmica de um sistema de controle sem o observador) é equivalente ao produto das duas equações características. Na literatura é possível encontrar algumas versões do observador baseado no filtro de Kalman, como o filtro de Kalman de ordem reduzida, cujas propriedades são limitadas e é equivalente ao filtro de Kalman de ordem plena para os casos onde o ruído no sensor é igual à zero. Outra variação é o filtro de Kalman proporcional-

integral o qual tem exatamente a mesma estrutura que o observador de Luenberger proporcional-integral, com a diferença de que o ganho do observador é calculado usando uma equação algébrica. Assim, tem-se um observador com capacidade de rejeição de ruídos e distúrbios. Outra variação conhecida é o chamado filtro de Kalman Extendido, que é uma extensão do filtro de Kalman para sistemas não lineares (SOUZA et al., S.d.).

Neste trabalho, para a identificação das matrizes do sistema a partir de dados experimentais foi utilizado o método de subespaços. Como já mencionado anteriormente, para a execução deste método apenas é necessário informar a ordem desejada para o modelo. Para a identificação do modelo é preciso estimar a função de resposta em frequência (FRF) a partir dos sinais de entrada e saída, obtidos experimentalmente (isto pode ser feito utilizando o comando “tfestimate” do *software* Matlab<sup>®</sup> - versão 6.5 ou superior; ou “tfe” para versões anteriores). Assim é possível se verificar quantos modos de vibrar estão presentes na faixa de frequência para a qual se fez a aquisição dos sinais. Após esta verificação, é possível definir a ordem do modelo a ser identificado. Conceitualmente é suficiente definir a ordem do modelo igual a duas vezes o número de modos presentes na FRF (pois na realização de espaço de estados são dois estados para cada modo de vibrar). No entanto, na prática a ordem escolhida deve ser, em geral, maior que duas vezes o número de modos, principalmente porque a presença de ruídos nos sinais medidos afeta a eficiência do método de identificação.

O método de subespaços calcula matrizes cheias em bases otimamente condicionadas, logo, tais matrizes não são obtidas em formas canônicas (com um número mínimo de variáveis). Esta desvantagem pode facilmente ser minimizada utilizando uma mudança de coordenadas, com o que se resulta nas matrizes do sistema escritas em blocos modais (um bloco de matrizes para cada modo de vibração). Em particular neste trabalho, esta mudança de coordenadas foi realizada utilizando o comando “canon” do *software* Matlab<sup>®</sup>.

Com a aplicação de controle experimental na treliça espacial (3D) foi possível validar a metodologia de projeto de controle utilizada neste trabalho. Para esta aplicação não foi resolvido o problema de posicionamento ótimo dos atuadores e sensores, no entanto, esta etapa pode ser realizada em trabalhos futuros. Para o cálculo do ganho do controlador foram consideradas as matrizes estruturais resultantes de seis testes de identificação (três testes excitando a estrutura com o PZT1 e três com o PZT2). Com esta consideração foi possível representar as incertezas nos parâmetros modais da treliça (nas frequências naturais e fatores de amortecimento). É importante ressaltar que, para o projeto **experimental** de um controlador, uma das etapas mais importantes é a obtenção do modelo matemático que represente adequadamente a dinâmica estrutural. Resolvido este problema, deve-se projetar

um estimador para os casos de controle por realimentação de estados. A etapa de cálculo do ganho do controlador é relativamente mais fácil, quando comparado com as duas citadas anteriormente. Ainda, em aplicações experimentais é necessário ajustar a amplificação do sinal enviado ao PZT de controle. Neste trabalho este ajuste foi realizado utilizando o potenciômetro de um amplificador de tensão elétrica.

## 8.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como propostas para trabalhos futuros é possível citar:

- Investigar a formulação de um índice de desempenho quadrático, como o LQR, baseado apenas na saída  $y(t)$  para não ser necessário projetar um observador de estados;
- Envolver na formulação do cálculo do ganho dos controladores as matrizes de entrada e de saída obtidas de cada teste de identificação, ou seja, incertezas de posição dos atuadores e dos sensores, respectivamente. Isto é interessante para a posição de distúrbios desconhecidos, pois o projetista pode considerar a matriz  $\mathbf{B}_w$  nas piores posições e assim, projetar um controlador robusto à posição do distúrbio.
- Estudar metodologias de controle baseadas em uma formulação discreta, pois se espera que a implementação em tempo real dos controladores tenha melhores resultados ao se utilizar modelos discretos, principalmente quando o modelo dinâmico é identificado a partir de dados experimentais (os métodos de identificação como ERA, PEM, subespaço, entre outros, são baseados na realização do espaço de estados discreta).
- Testar a viabilidade da utilização das normas  $L_2$  e  $L_\infty$  da resposta ao impulso para formular um índice de desempenho de posicionamento de atuadores e sensores.
- Estudar métodos de identificação e técnicas de controle para sistemas não lineares.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDALLA, M.O.; ZIMMERMAN, D.C.; GRIGORIADIS, K.M. Structural Damage Detection using Strain Data via Linear Matrix Inequality Based Methods. AMERICAN CONTROL CONFERENCE, San Diego, Califórnia, p. 1114-1118, 1999.

ABDALLA, M.O.; ZIMMERMAN, D.C.; GRIGORIADIS, K.M. Reduce Optimal Parameter Update in Structural Systems Using LMIs". AMERICAN CONTROL CONFERENCE, Chicago, Illinois, p. 991-995, 2000.

ABREU, G.L.C.M.; RIBEIRO, J.F.; STEFFEN JR., V. Finite Element Modeling of a Plate with Localized Piezoelectric Sensors and Actuators. JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES AND ENGINEERING, Vol. XXVI, nº 2, p. 117-128, 2004.

AIRY, G.B. On the regulator of the clock-work for effecting uniform movement of equatorials. MEMOIRS OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY, vol.11, 1840, p. 249-267, 1840.

AKHRAS, G. Smart Materials and Smart Systems for the Future, CANADIAN MILITARY JOURNAL, Vol.1 Nº 3, p. 24-31, 2000.

ALLIK, H.; HUGHES, T.J.R. Finite Element Method for Piezoelectric Vibration. JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENG., vol. 2, p. 151-157, 1970.

ANDERSON, B.D.O.; MOORE, J.B. OPTIMAL FILTERING. Prentice-Hall, 357 p., 1979.

ANDREI, N. ADVANCED MATHEMATICAL PROGRAMMING. THEORY, COMPUTATIONAL METHODS, APPLICATIONS. Technical Press, Bucharest, 1999.

ANDREI, N. SEMIDEFINITE PROGRAMMING. MatrixRom, Bucharest, 2001.

ANDREI, N. CONVERGENCE OF OPTIMIZATION ALGORITHMS. Technical Press, Bucharest, 2004.

ANTHONY, D.K. ROBUST OPTIMAL DESIGN USING PASSIVE AND ACTIVE METHODS OF VIBRATION CONTROL. Ph. D. Thesis, Faculty of Engineering And Applied Science, Institute of Sound And Vibration Research, University of Southampton, 2000.

ARULAMPALAM, M.; MAKKELLI, S.; GORDON, N.; CLAPP, T. A Tutorial on Particle Filters of Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking. IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, 50 (2), p. 174-188, 2002.

ASSUNÇÃO, E. REDUÇÃO  $H_2$  E  $H_\infty$  DE MODELOS ATRAVÉS DE DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES: OTIMIZAÇÃO LOCAL E GLOBAL. Tese de Doutorado (em português), UNICAMP, Campinas, SP, 2000.

ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M.C.M. Projeto de Sistema de Controle Via LMIs usando o MATLAB. ESCOLA BRASILEIRA DE APLICAÇÕES EM DINÂMICA E CONTROLE – APLICON USP – São Carlos – SP, 2001.

ASSUNÇÃO, E.; MARCHESI, H.F.; TEIXEIRA, M.C.M.; PERES, P.L.D. Otimização global rápida para o problema de redução  $H_\infty$  de modelos. XIV CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, Natal - RN, in CD-Room, 2002.

ATKISON, G.M.; PEARSON, R.E.; OUNAIES, Z.; PARK, C.; HARRISON, J.S.; DOGAN, S.; MIDKIFF, J.A. Novel Piezoelectric Polyimide Mems. 12<sup>th</sup> INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOLID STATE SENSORS, ACTUATORS AND MICROSYSTEMS, Boston, 8-12 de Junho, 2003.

BAILEY, T.; HUBBARD, J.E. Distributed Piezoelectric-Polymer Active Vibration Control of a Cantilever Beam. JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL AND DYNAMICS, Vol. 8, n.º 5, p. 605-611, 1985.

BALAKRISHNAN, V. LINEAR MATRIX INEQUALITIES IN ROBUST CONTROL A BRIEF SURVEY. School of Electrical and Computer Engineering, Purdue University, West Lafayette, IN 47907-1285, USA, <http://citeseer.ist.psu.edu/563520.html>, acesso em 09/04/2007, S.d.

BANKS, H.T.; SMITH, R.C.; WANG, Y. The modeling of piezoceramic patch interactions with shells, plates and beams. QUATERLY OF APPLIED MATHEMATICS, vol. 53, n.º 2, p. 353-381, 1995.

BENNET, S. A history of control engineering 1800-1930. IEE CONTROL ENGINEERING SERIES 8, Peter Peregrinus Ltd., London, 1979.

BHASKAR, A. Estimates of error in the frequency response of non-classically damped systems. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, v. 184, p. 59-72, 1995.

BODE, H.W. Feedback amplifier design. BELL SYSTEMS TECHNICAL JOURNAL, vol.19, 1940, p. 42, 1940.

BOYD, S., BALAKRISHNAN, V.; FERON, E.; EL GHAOUI, L. Control System Analysis and Synthesis via Linear Matrix Inequalities. AMERICAN CONTROL CONFERENCE, p. 2147-2154, 1993.

BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; FERON, E.; EL GHAOUI, L. History of Linear Matrix Inequalities in Control Theory. AMERICAN CONTROL CONFERENCE, Baltimore, Maryland, 1994a.

BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; FERON, E.; EL GHAOUI, L. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. SIAM STUDIES IN APPLIED MATHEMATICS, USA, 193p, 1994b.

BRASSEUR, M.; DE BOE, P.; GOLINVAL, J.C.; TAMAZ, P.; CAULE, P.; EMBRECHTS, J.J.; NEMERLIN, J. Placement of Piezoelectric Laminate Actuator for Active Structural Acoustic Control. ISMA 2004 ACTIVE NOISE CONTROL, p. 41-54, 2004.

BRUANT, I.; PROSLIER, L. Optimal Location of Actuators and Sensors in Active Vibration Control. JOURNAL OF INTELLIGENT MATERIAL SYSTEMS AND STRUCTURES, Vol. 16, p. 197-206, 2005.

BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; CORDEIRO, L.; LOPES Jr., V. Optimal Placement of Piezoelectric Actuators Considering the Disturbances Effects Using the Disturbance Sensitivity Grammian. XXVI IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, CILAMCE, Guarapari, ES, Brasil, 2005a.

BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; CORDEIRO, L.; LOPES Jr., V. Estudo Comparativo da Norma  $H_2$  e Matrizes Grammianas para o Posicionamento de Sensores/Atuadores Piezelétricos. IV CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, Dincon, Bauru, SP, Brasil, 2005b.

BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES Jr., V. Atenuação de Vibrações em Estruturas Flexíveis Utilizando Controle Hinf via Técnicas LMIs. VII SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, Simmec 2006, Araxá, MG, Brasil, 2006a.

BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES Jr., V. Active Control in Flexible Plates with Piezoelectric Actuators Using Linear Matrix Inequalities. THIRTEENTH INTERNATIONAL CONGRESS ON SOUND VIBRATION, ICSV13, Vienna, Áustria, 2006b.

BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES Jr., V. Active Vibration Control Using Piezoelectric Actuator Solved Through Linear Matrix Inequalities. XXVII IBERIAN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, Belém, PA, Brasil, 2006c.

BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; CORDEIRO, L.; LOPES Jr., V. Optimal Placement of Sensors/Actuators in Truss Structures with Known Disturbances. XXIV INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, IMAC 2006, St. Louis, Missouri, EUA, 2006d.

BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES Jr., V.; BRENNAN, M.J. Structural Damage Location Using Observability Grammian Matrix. NINTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON RECENT ADVANCES IN STRUCTURAL DYNAMICS, RASD, Southampton, UK, 2006e.

BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES Jr., V.; BRENNAN, M.J. Experimental Damage Detection Using Observability Grammian Matrix. INTERNATIONAL CONFERENCE ON NOISE & VIBRATION ENGINEERING, ISMA 2006, Leuven, 2006f.

BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; TURRA, A.E.; LOPES Jr., V. Damage Detection Using Controllability Grammian Matrices. XII INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS, DINAME, Ilhabela, SP, Brasil, 2007.

BURL, J.B. LINEAR OPTIMAL CONTROL:  $H_2$  AND  $H_\infty$  METHODS. Addison-Wesley, ISBN 0-21-80868-4, 1999.

CARDEN, E. P.; FANNING, P. Vibration Based Condition Monitoring: A Review. STRUCTURAL HEALTH MONITORING, vol. 3(4), p. 355-377, 2004.

CARVALHAL, R. CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS ESPACIAIS TIPO TRELIÇAS USANDO CONTROLADORES IMSC. Dissertação de Mestrado, Faculdade de

Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, Unesp, Ilha Solteira, SP, 2005.

CARVALHAL, R.; LOPES Jr., V. Posicionamento Ótimo de Atuadores e Sensores Piezelétricos em uma Treliça 3D. 3º CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA E CONTROLE DA SBMAC, DINCON 2004, Ilha Solteira, SP, Brasil, 31 de maio a 3 junho, 2004.

CERNA, E.R.V.; CONTROLE ROBUSTO DE VIBRAÇÕES: APLICAÇÕES DE UM CONTROLADOR  $H_2/H_\infty$ . Dissertação de Mestrado, PUC/RJ, 2001.

CHEN, S.; CAO, Z. A NEW METHOD FOR DETERMINING LOCATIONS OF THE PIEZOELECTRIC SENSOR/ACTUATOR FOR VIBRATION CONTROL OF INTELLIGENT STRUCTURES. Relatório Técnico. Department of Mechanics, Jilin University of Technology and The Second Aeronautic Institute of Air Force, China, 2000.

CLARK, R.L.; SAUNDERS, W.R.; GIBBS, G.P. ADAPTIVE STRUCTURES – DYNAMICS & CONTROL. A Wiley-Interscience Publication, John Willey & Sons, Inc., 467p., 1998.

CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. DYNAMICS OF STRUCTURES. McGraw-Hill, New York, 1975.

CORDEIRO, L.; BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES Jr., V. Identification of Structural Damage in Flexible Structures Using System Norms and Neural Networks. XXIV INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, IMAC 2006, St. Louis, Missouri, EUA, 2006.

CRAWLEY, E.F.; DE LUIS, J. Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures. AIAA JOURNAL, vol. 25, n.º 10, p. 1373-1385, 1987.

DE MOOR, B. MATHEMATICAL CONCEPTS AND TECHNIQUES FOR MODELING OF STATIC AND DYNAMIC SYSTEMS. Doctoral Dissertation, Department of Electrical Engineering, Kath. University Leuven, Dept. E.E. Belgium, 1988.

DEMETRIU, M.A. Integrated Actuator-Sensor Placement and Hybrid Controller Design of Flexible Structures Under Worst Case Spatiotemporal Disturbance Variations. JOURNAL OF INTELLIGENT MATERIAL SYSTEMS AND STRUCTURES, Vol. 15, p. 901-921, 2004.

DOEBLING, S.W.; FARRAR, C.R.; PRIME, M.B.; SHEVITZ, D.W. DAMAGE IDENTIFICATION AND HEALTH MONITORING OF STRUCTURAL AND MECHANICAL SYSTEMS FROM CHANGES IN THEIR VIBRATION CHARACTERISTICS: A LITERATURE REVIEW. Technical Report LA-13070-MS, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, NM, 1996.

DOSH, J.J.; INMAN, D.J. A Self-Sensing Piezoelectric Actuator for Collocated Control. JOURNAL OF INTELLIGENT MATERIAL SYSTEMS AND STRUCTURES, vol. 3, p. 166-185, 1993.

DURBIN, J.; KOOPMAN, S.J. TIME SERIES ANALYSIS BY STATE SPACE METHODS. Oxford University Press, 2002.

ERKUS, B.; Lee, Y.J. LINEAR MATRIX INEQUALITIES AND MATLAB LMI TOOLBOX. University of Southern California Group Meeting Report, Los Angeles, California, 2004.

EWINS, D.J. Modal Testing. WILEY, New York, 1984.

FILHO, J.T.C.; NASCIMENTO, V.A. A New and Efficient Method for Linear Quadratic Regulator Problem without the Use a Traditional Approach via Equation Riccati Algebraic. 6° BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, Dincon, 21-25 de maio, São José do Rio Preto, SP, 2007.

FULLER, C.R.; ELLIOT, S.J.; NELSON, P.A. ACTIVE CONTROL OF VIBRATION. Academic Press Ltd, San Diego, CA, p332, 1996.

FURUYA, H.; HAFTKA, R.T. Locating Actuators for Vibration Supression on Space Trusses by Genetic Algorithms. STRUCTURES AND CONTROL OPTIMIZATION, ASME 1993, p. 1-11, 1993.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.J.; CHILIALI, M. LMI CONTROL TOOLBOX USER'S GUIDE. The Mathworks Inc., Natick, MA, EUA, 1995.

GAO, W.; CHEN, J.; ZHOU, Y.; CUI, M. Dynamic response analysis of closed-loop control system for random intelligent truss structure under random forces. MECHANICAL SYSTEM AND SIGNAL PROCESSING 18, p. 947-957, 2004.

GAWRONSKI, W. Actuator and Sensor Placement for Structural Testing and Control. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, 208(1), p. 101-109, 1997.

GAWRONSKI, W. DYNAMICS AND CONTROL OF STRUCTURES: A MODAL APPROACH. Springer Verlag, 1. Ed. New York, 1998.

GAWRONSKI, W.; JUANG, J.N. Model reduction for flexible structures. CONTROL AND DYNAMICS SYSTEMS SCIENCE, ed. C.T. Leondes, v. 36, Academic Press, San Diego, CA, p. 143-222, 1990.

GAWRONSKI, W.; MELLSTROM, J.A. Control and Dynamics of the Deep Space Network Antennas. CONTROL AND DYNAMICS SYSTEMS, ed. C. T. Leondes, vol. 63, Academic Press, Sand Diego, p. 289-412, 1994.

GAWRONSKI, W.; SAWICKI, J.T. Structural Damage Detection Using Modal Norms. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, (2000), 229(1), p. 194-198, 2000.

GHAOUI, L; NICULESCU, S. Advances in Linear Matrix Inequalities Methods in Control. ADVANCES IN DESIGN AND CONTROL, SIAM, EUA, 2000.

GHOSH, M.; MITTAL, K.L. POLYIMIDES, FUNDAMENTALS AND APPLICATIONS. Marcel Dekker, Inc.: New York, NY, 1996.

HAGOOD, N.W.; CHUNG, W.H.; VON FLOTOW, A. Modelling of Piezoelectric Actuator Dynamics for Active Structural Control. JOURNAL OF INTELLIGENT MATERIAL SYSTEMS AND STRUCTURES, vol. 1, p. 4-25, 1990.

HALL, H.R. GOVERNORS AND GOVERNING MECHANISMS. The Technical Publishing Co., 2<sup>a</sup> ed., Manchester, 1907.

HAN, J.H.; LEE, I. Optimal Placement of Piezoelectric Sensors and Actuators for Vibration Control of a Composite Plate Using Genetic Algorithms. SMART MATERIAL AND STRUCTURE, vol. 8 p. 257 – 267, 1999.

HANSEN, C.H.; SNYDER, S.D. ACTIVE CONTROL OF NOISE AND VIBRATIONS. E&FN Spon, London UK, 1997.

HARVEY, A. FORECASTING STRUCTURAL TIME SERIES MODELS AND THE KALMAN FILTER. Cambridge University Press, 554 p., ISBN 0-521-32196-4, 1989.

HASSAN, M.F. Solution of Linear Quadratic Constraint Problem via Coordinating Approach. INTERNATIONAL JOURNAL OF INNOVATIVE COMPUTING, INFORMATION AND CONTROL, vol. 2, nº. 3, p. 527-542, 2006.

HEVERLY II, D.E.; WANG, K.W.; SMITH, E.C. An Optimal Actuator Placement methodology for Active Control of Helicopter Airframe Vibration. JOURNAL OF THE AMERICAN HELICOPTER SOCIETY, 46 (4), p. 251-261, 2001.

IKEDA, T. FUNDAMENTALS OF PIEZOELECTRICITY. Oxford – Inglaterra: Oxford University Press, 1996.

JAZWINSKI, A.H. STOCHASTIC PROCESSES AND FILTERING THEORY. Academic Press, 1970.

JHA, A.K. VIBRATION ANALYSIS AND CONTROL OF AN INFLATABLE TOROIDAL SATELLITE COMPONENT USING PIEZOELECTRIC ACTUATORS AND SENSORS. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, EUA, 2002.

JHA, A.K.; INMAN, D.J. OPTIMAL SIZE AND PLACEMENT OF PIEZOELECTRIC ACTUATORS AND SENSORS FOR AN INFLATED TORUS. Center for Intelligent Material Systems and Structures, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2002.

JOHNSON, E.A.; ERKUS, B. Structural Control with Dissipative Damping Devices. AMERICAN CONTROL CONFERENCE, ACC, Anchorage, Alaska, 2002.

JOHNSON, M.E.; NASCIMENTO, L.P.; KASARDA, M.; FULLER, C.R. The Effect of Actuator and Sensor Placement on the Active Control of Rotor Unbalance. JOURNAL OF VIBRATION AND ACOUSTICS, Vol. 15, p. 365-373, 2003.

KALMAN, R.E. Contributions to the theory of optimal control. BOL. SOC. MAT. MEXICANA, vol.5, 1960, p. 102-119, 1960a.

KALMAN, R.E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. TRANSACTIONS OF THE ASME – JOURNAL OF BASIC ENGINEERING, 82 (series D), p. 35-45, 1960b.

KALMAN, R.E.; BERTRAM, J.E. Control system analysis and design via the “second method” of Lyapunov. I. Continuous-time systems. ASME J. BASIC ENG., 1960, p. 371-393, 1960.

KALMAN, R.E.; BUCY, R.S. New results in linear filtering and prediction theory. ASME J. BASIC ENG., vol.80, 1961, p. 193-196, 1961.

KARNOPP, D. Design Principles for Vibration Control Systems Using Semi-Active Dampers. TRANS. ASME JOURNAL OF DYNAMICS SYSTEMS, MEASUREMENTS AND CONTROL, v. 112, p. 448-455, 1990.

KIRBY III, G.C.; MATIC, P.; LINDNER, D.K. Optimal Actuator Size and Location Using Genetic Algorithms for Multivariable Control. AD-VOL. 45/MD-VOL. 54, ADAPTIVE STRUCTURES AND COMPOSITE MATERIALS: ANALYSIS AND APPLICATION, ASME, p. 325-335, 1994.

KUMAR, A.; WU, F.; LIN, M.; BEARD, S.J.; QING, X.; ZHANG, C.; HAMILTON, M.; IKEGAMI, R. POTENTIAL APPLICATIONS OF SMART LAYER<sup>®</sup> TECHNOLOGY FOR HOMELAND SECURITY. Acellent Technologies, Inc. 155 C-3 Moffett Park Drive, Sunnyvale, CA e National Institute of Standards and Technology, 2004.

KWON, Y.W.; BANG, H. THE FINITE ELEMENT METHOD USING MATLAB. CRC Press LLC, ISBN 0-8493-9653-0, 1997.

LAMMERING, R.; JIA, J.; ROGERS, C.A. Optimal Placement of Piezoelectric Actuators in Adaptive Truss Structures. JOURNAL OF SOUND AND VIBRATION, 171(1), p. 67-85, 1994.

LEE, I.; SUNG, H.J. Development of an Array of Pressure Sensors with PVDF Film. EXPERIMENTS IN FLUIDS, v. 26, p. 27-35, Springer-Verlag, 1999.

LEE, Y.S. ACTIVE CONTROL OF SMART STRUCTURES USING DISTRIBUTED PIEZOELECTRIC TRANSDUCERS. Ph. D. Thesis, University of Southampton, Faculty of Engineering and Applied Science, Institute of Sound and Vibration Research, 2000.

LELEU, S.; ABOU-KANDIL; BONNASSIEUX, Y. Piezoelectric Actuators and Sensors Location for Active Control of Piezoelectric Structures. IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT, v. 50, n. ° 6, 2001.

LI, M.; LIM, T.C.; GUAN, Y.H.; SHEPARD Jr., W.S. Actuator Design and Experimental Validation for Active Gearbox Vibration Control. SMART MATERIALS AND STRUCTURES, 15(2006), N1-N6, 2006.

LITZ, L. Ordnungsreduktion linearer Zustandsraummodelle durch Beibehaltung der dominanten Eigenbewegungen. REGELUNGSTECHNIK 27, 80-86, 1979.

LIU, F.; ZHANG, L. Modal-Space Control of Flexible Intelligent Truss Structures via Modal Filters. PROCEEDING OF IMAC - INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, p. 187-193, 2000.

LJUNG, L. SYSTEM IDENTIFICATION: THEORY FOR THE USER. Prentice Hall Information and System Sciences Series, 1987.

LJUNG, L. Prediction Errors Estimation Methods. CIRCUITS SYSTEM SIGNAL PROCESSING, vol. 21, N° 1, p. 11-21, 2002.

LOPES Jr., V.; STEFFEN Jr., V.; INMAN, D.J. Optimal Design of Smart Structures Using Bonded Piezoelectrics for Vibration Control. ISMA 25 – INTERNATIONAL CONFERENCE ON NOISE AND VIBRATION ENGINEERING, Leuven, Belgium, 2000a.

LOPES Jr., V.; PEREIRA, J.A.; INMAN, D.J. Structural FRF Acquisition via Electric Impedance Measurement Applied to Damage Location. INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE IMAC, 18, San Antonio, p. 1549-1555, 2000b.

LUENBERGER, D.G. Observers for Multivariable Systems. IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, vol. AC 11, p. 190-197, 1966.

LUENBERGER, D.G. An Introduction to Observers. IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, vol. AC 16 (6), p. 596-602, 1971.

LYAPUNOV, A.M. Problème général de la stabilité du mouvement. ANN. FAC. SCI. TOULOUSE, vol.9, 1907, p. 203-474, 1877.

MAHMOUD, H.; KABAMBA, P.T.; ULSOY, A.G.; BRUSHER, G.A. Target Reduction and Balancing Using System Norms. PROCEEDINGS OF ACC 2002, May, 2002.

MAIA, N.; SILVA, J. *et al.* THEORETICAL AND EXPERIMENTAL MODAL ANALYSIS. Research Studies Press Ltd., Baldock, Hertfordshire, England, 1996.

MALMONGE, L.F.; LOPES, G.A.; LANGIANO, S.C.; MALMONGE, J.A.; CORDEIRO, J.M.M.; MATTOSO, L.H.C. A new route to obtain PVDF/PANI conducting blends. EUROPEAN POLYMER JOURNAL, v. 42, p. 3108-3113, 2006.

MARANO, J.H. LOCALIZAÇÃO DE FALHAS VIA OBSERVADORES DE ESTADOS EM SISTEMAS COM VARIAÇÃO DE PARÂMETROS. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista – UNESP/Ilha Solteira, 2002.

MARQUI, C.R. MODELAGEM DE ESTRUTURAS PIEZELÉTRICAS PARA APLICAÇÕES EM LOCALIZAÇÃO DE FALHAS. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, 2007.

MARQUI, C.R.; BUENO, D.D.; LOPES Jr., V. Modelo de Placa com Sensores e Atuadores Piezelétricos Acoplados. VII SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, SIMMEC, Araxá, MG, 2006a.

MARQUI, C.R.; BUENO, D.D.; CORDEIRO, L.; SILVA, C.R.; LOPES Jr., V. Experimental Damage Detection Using System Norms. XXIV INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, IMAC 2006, St. Louis, Missouri, EUA, 2006b.

MARTINS, R.S. MODELAGEM DE TRANSPORTADOR VIBRATÓRIOS LINEAR COM EXCITAÇÃO ELETROMAGNÉTICA. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, 1997.

MATHEU, E.E. ACTIVE AND SEMI-ACTIVE CONTROL OF CIVIL STRUCTURES UNDER SEISMIC EXCITATION. Dissertation of doctor philosophy in Engineering Mechanics, Virginia Polytechnic Institute, Virginia, EUA, 1997.

MAXWELL, J.C. On governors. PROCEEDINGS OF ROYAL SOCIETY, London, vol.6, p. 270-283, 1868.

MAYR, O. THE ORIGINS OF FEEDBACK CONTROL. MIT Press, Cambridge, MA, 1970.

MEIROVITCH, L. Dynamics and Control of Structures. JOHN WILEY & SONS, ISBN 0-471-62858-1, 1990.

MESQUITA NETO, C.; TAVARES, M.A.; LOPES Jr., V. Identificação de Parâmetros de uma Estrutura Flexível de Dois Andares Utilizando o Método de Predição de Erros. SIMPÓSIO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA – POSMEC, UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA – UFU, Uberlândia, MG, 2006.

MIRZA, M.L.; NIEKERK, J.L.V. Optimal Actuator Placement of Active Vibration Control with Known Disturbances. JOURNAL OF VIBRATION AND CONTROL, 5: 709-724, 1999.

MOGHANI, T. CONTROLLER SWITCHING POLICY IN FLEXIBLE PLATES USING PZT ACTUATORS SUBJECT TO SPATIOTEMPORAL VARIATIONS OF DISTURBANCES. Thesis of Degree of Master of Science in Mechanical Engineering, Faculty of the Worcester Polytechnic Institute, 2004.

MOORE, B.C. Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction. IEEE TRANS. ON AUTOMAT. CONTR., AC-26, p. 17-31, 1981.

MORAIS, T.S.; MELO, G.P.; DANIEL, G.B. Technique of Parameters and Inputs Identification in Mechanical Systems. 18<sup>TH</sup> INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, COBEM, Ouro Preto, 2005.

MOREIRA, F.J.O. UM CONTROLADOR  $H_{\infty}$  DE BANDA LIMITADA PARA O CONTROLE ATIVO DE VIBRAÇÃO ESTRUTURAL. Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, 1998.

MOURA, W.A. DETERMINAÇÃO DA POLARIZAÇÃO FERROELÉTRICA DO PVDF ESTIRADO BIAIXIALMENTE UTILIZANDO A TÉCNICA DE CORRENTE CONSTANTE. Dissertação de Mestrado. Área Interunidades Ciência e Engenharia de Materiais da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), do Instituto de Física de São Carlos (IFSC) e do Instituto de Química de São Carlos (IQSC), São Carlos, SP, 1998.

NASCIMENTO, V.A.; FILHO, J.T.C. A Nice Method for Linear Quadratic Regulator Problem. 6º BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR APPLICATIONS, Dincon, 21-25 de maio, São José do Rio Preto, SP, 2007.

NUNES Jr., O.A. IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS UTILIZANDO APENAS AS RESPOSTAS DA ESTRUTURA – IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Departamento de Engenharia Mecânica, UNESP, 2006.

MUSTAFA, D.; GLOVER, K. Controller reduction by  $H_\infty$  balanced truncation. IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, AC-36(6), 668-682, 1991.

NYQUIST, H. Regeneration theory. BELL SYSTEMS TECHNICAL JOURNAL, 1932.

ODON, A. Probe with PVDF sensor for Energy Measurements of Optical Radiation. MEASUREMENT SCIENCE REVIEW, v. 3, seção 3, 2003.

OGATA, K. MODERN CONTROL ENGINEERING. Prentice Hall, New Jersey – EUA, 1997.

OLIVEIRA, M.C. Novos Testes de Estabilidade para Sistemas Lineares. REVISTA CONTROLE & AUTOMAÇÃO, vol. 15 nº. 1, 2004.

OLIVEIRA, M.C.; FARIAS, D.P.; GEROMEL, J.C. LMISOL, USER'S GUIDE. UNICAMP, Campinas-SP, Brasil, 1997.

OLIVEIRA, V.A.; ARRIFANO, N.S.D. Controle de Sistemas Incertos. ESCOLA BRASILEIRA DE APLICAÇÕES EM DINÂMICA E CONTROLE, APLICON. USP – São Carlos – SP, 2001.

PANOSSIAN, H.; GAWRONSKI, W.; OSSMAN, J. Balanced Shaker and Sensor Placement for Modal Testing of Large Flexible Structures. INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE, MAC-XVI, Santa Barbara, CA, 1998.

PAPATHEODOROU, M.; TAYLOR, C.A.; LIEVEN, N.A.J. Optimal Sensor Locations for Dynamic Verification. STRUCTURAL DYNAMICS – EURO DYN 99, p. 587-592, 1999.

PARK, C.; OUNAIES, Z.; WISE, K.E.; HARRISON, J.S. In situ Poling and imidization of amorphous piezoelectric polyimides. POLYMER, 45, p. 5417-5425, 2004.

PENG, F.; NG, A.; HU, Y.Y. Actuator Placement Optimization and Adaptive Vibration Control of Plate Smart Structures. JOURNAL OF INTELLIGENT MATERIAL SYSTEMS AND STRUCTURES, Vol. 6, p. 263-271, 2005.

PEREIRA, C.B. TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO DISCRETO-CONTINUAS APLICADAS AO CONTROLE DE VIBRAÇÕES DE ESTRUTURAS INTELIGENTES. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2003.

PERES, P.L.D. CONTROLE  $H_2$  E  $H_\infty$  : CARACTERIZAÇÃO POR DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES. Tese de Livre Docência, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, SP, 1997.

RAO, S.S.; PAN, T.S.; VENKAYYA, V.B. Optimal Placement of Actuators in Actively Controlled Structures Using Genetic Algorithms. AIAA JOURNAL, 29(6):942-943, 1991.

ROCHA, T.L. MODELAGEM DE ESTRUTURAS INTELIGENTES. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista – UNESP/Ilha Solteira, 2004.

ROCHA, T.L.; SILVA, S.; LOPES Jr., V. Optimal Location of Piezoelectric Sensor and Actuator for Flexible Structures. 11<sup>TH</sup> INTERNATIONAL CONGRESS ON SOUND AND VIBRATION, St. Petersburg, 11<sup>o</sup> ICSV, p. 1807-1814, 2004.

ROUTH, E.J. A TREATISE ON THE STABILITY OF A GIVEN STATE OF MOTION. MACMILLAN, London, 1877.

SAKAMOTO, V.K.; MALMONGE, J.A.; FERNANDES, S. Ferroelectric Ceramic/Polymer Composite for Soil-Humidity Detection. SENSORS & TRANSDUCERS MAGAZINE, v. 39, n.º 1, p. 112-120, 2004.

SANTOS, R.B.; BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES Jr., V. Controle de Vibração em uma Estrutura Flexível Baseado na Metodologia de Alocação de Pólos Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). 16º SIMPÓSIO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA, POSMEC-UFU, Uberlândia, MG, 2006.

SANTOS, R.B.; BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES Jr., V. Active Vibration Control of a Two-Floors Building Model Based on  $H_2$  and  $H_\infty$  Methodologies Using Linear Matrix Inequalities (LMIs). INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE – XXV IMAC, Orlando, EUA, 2007.

SARRACINI Jr., F. SÍNTESE DE CONTROLADORES  $H_\infty$  DE ORDEM REDUZIDA COM APLICAÇÃO NO CONTROLE ATIVO DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, 2006.

SARRACINI Jr., F.; SERPA, A.L. Reduced Model in H-infinite vibration control using linear matrix inequalities. SHOCK AND VIBRATION, v. 13, p. 469-484, 2006.

SCHÖNHOFF, U.; NORDMANN, R. Modelling, Simulation and Controller Design for the SOFIA Airborne Telescope with Regard to the Image Stability. 4TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON MOTION AND VIBRATION CONTROL, MOVIC'98, 25 a 28 de agosto de 1998, ETH Zurich, Switzerland, 1998.

SKELTON, R.E. DYNAMIC SYSTEM CONTROL: LINEAR SYSTEM ANALYSIS AND SYNTHESIS. Wiley, New York, 1988.

SILVA, S. PROJETO DE CONTROLADORES ROBUSTOS PARA APLICAÇÕES EM ESTRUTURAS INTELIGENTES UTILIZANDO DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Depto. de Eng. Mecânica, UNESP, 2005.

SILVA, S.; LOPES Jr., V. Técnicas de Controle Ótimo para Supressão de Vibração Utilizando Sensores e Atuadores Piezelétricos. II CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA - CONEM 2002, João Pessoa – PB, 2002.

SILVA, S.; LOPES Jr., V. Active Flutter Suppression in a 2-D Airfoil Using Linear Matrix Inequalities. JOURNAL OF THE BRAZILIAN SOCIETY OF MECHANICAL SCIENCES AND ENGINEERING, v. 28, n.º 1, p. 84-93, 2006.

SILVA, S., LOPES Jr., V.; BRENNAN, M.J. Design of a Control System using Linear Matrix Inequalities for the Active Vibration Control of a Plate. JOURNAL OF INTELLIGENT MATERIAL SYSTEMS AND STRUCTURES, v. 17, p. 81-93, 2006.

SMARTEC S/A. Structural Health Monitoring and Services. Disponível em: <<http://www.smartec.ch>>, Acesso em: jul, 2003.

SMARTFIBRES LTD, 2000. Structural Health Monitoring. Disponível em: <<http://www.smartfibres.com>>, Acesso: em jul, 2003.

SOUZA, A.J.M.; COSTA, P.J.C.G.; MOREIRA, A.P.G.M. SISTEMA DE LOCALIZAÇÃO DE ROBÔS MÓVEIS BASEADO EM FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO. Relatório Técnico. Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Portugal, S.d.

SOUZA, R.A. CONTROLE PASSIVO/ATIVO DAS OSCILAÇÕES DE ESTRUTURAS ESBELTAS POR MEIO DE DISPOSITIVOS FLUIDO-DINÂMICOS. Tese de doutorado em engenharia civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE/UFRJ, 2003.

STEFFEN Jr., V.; RADE, D.A. Fundamentos e Aplicações de Materiais Inteligentes. 3º CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA E CONTROLE DA SBMAC, 31 de maio a 3 de junho, UNESP/Ilha Solteira, SP, 2004.

STÖBENER, U.; GAUL, L. Active Vibration Control of a Car Body Based on Experimentally Evaluated Modal Parameters. MECHANICAL SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING 15(1) 173-188, 2001.

TEBALDI, A.; COELHO, L.S.; LOPES Jr., V. Detecção de Falhas em Estruturas Inteligentes Usando Otimização por Nuvens de Partículas: Fundamentos e Estudos de Casos. REVISTA CONTROLE & AUTOMAÇÃO. Vol. 17 n.º 3, p. 312-330, 2006.

THE INSTITUTE OF MATERIALS, MINERALS AND MINING - IOM3, 2003. Aerospace and Defense Applications - an overview of US military smart adaptive projects. Disponível em: <<http://www.instmat.co.uk/iom/divisions/mst/smasc/intro.htm>>, Acesso em: jul, 2003.

TRINDADE, M.A. CONTROLE HYBRIDE ACTIF-PASSIF DES VIBRATIONS DES STRUCTURES PAR DES MATERIAUX PIEZOELECTRIQUES ET VISCOELASTIQUES: POUTRES SANDWICH/MULTICOUCHES INTELLIGENTES. Thèse de Docteur, Conservatoire National des Arts et Métiers, France, 1999.

TROYK, P.R.; FRANKOVIC R.; ANDERSON, J.E. Experimental Techniques for Electrical Testing of Microelectronic Coatings. IEEE TRANS COMP., HYBRIDS, AND MAUF. TECH. vol.14, p. 428-435, 1991.

ULTRA ELECTRONICS LTD, 1999. Noise and Vibration Systems. Disponível em: <<http://www.ultraquiet.com>>, Acesso em: jul, 2003.

UNIVERSITY OF ALBERTA, 2001. Applications of Smart Materials. University of Alberta Smart Material and Micromachines Web Site: <<http://www.cs.ualberta.ca>>, Acesso em: fev, 2004.

UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES, 2006. Active Structures Laboratory, Bélgica. Web Site: <<http://www.ulb.ac.be/scmero>>, Acesso em julho, 2006.

VALER, C.E.I. UMA INTRODUÇÃO AO CONTROLE ROBUSTO COM APLICAÇÕES A ESTRUTURAS FLEXÍVEIS. Dissertação de Mestrado, PUC-RJ – Depto. de Engenharia Mecânica, 1999.

VAN ANTWERP, J.G.; BRAATZ, R.D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. JOURNAL OF PROCESS CONTROL, v. 10, p. 363-385, 2000.

VAN OVERSCHEE, P.; DE MOOR, B. N4SID: Subspace Algorithms for the Identification of Combined Deterministic-Stochastic Systems. AUTOMATICA, SPECIAL ISSUE ON STATISTICAL PROCESSING AND CONTROL, 1994.

VAN OVERSCHEE, P.; DE MOOR, B. SUBSPACE IDENTIFICATION FOR LINEAR SYSTEM – THEORY IMPLEMENTATION AND APPLICATION. Kluwer academic Publisher, ISBN 0-7923-9717-7, 1996.

WANG, Z.; CHEN, S.; HAN, W. Integrated Structural and Control Optimization of Intelligent Structures. ENGINEERING STRUCTURES – ELSEVIER, 21, p. 183-191, 1999.

WANG, Q.; WANG, C.M. Optimal Placement and Size of Piezoelectric Patches on Beams form Controllability Perspective. SMART MATERIAL AND STRUCTURE, vol. 09, p. 558 – 567, 2000.

WELCH, G.; BISHOP, G. AN INTRODUCTION TO KALMAN FILTER. Technical Report, University of North Carolina at Chapel Hill, 1995.

WILLEMS, J.C. Least Square Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation. IEEE TRANS. AUT. CONTROL, AC-16(6): 621-634, 1971.

YAN, Y.J.; YAM, L.H. Optimal design of number and locations of actuators in active vibration control of a space truss. SMART MATERIALS AND STRUCTURES – 496 – 503, 2002.

## ANEXO 1

Este anexo apresenta a forma dos modos de vibrar da treliça plana utilizada na aplicação 7.3 deste trabalho. Mais especificamente, são mostrados os modos 5 a 16. Ainda, é possível verificar os índices grammianos e posicionamento do atuador PZT quando colocado em cada barra da treliça, comparando seu desempenho com e sem a presença de um distúrbio externo. Neste anexo são mostrados os resultados para os modos 5 a 16, já que para os quatro primeiros modos são mostrados na aplicação 7.3.

### 5º Modo

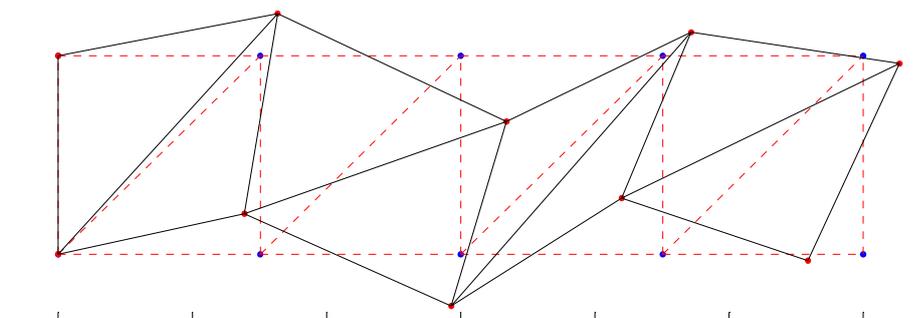


Figura A1.1 – Quinto modo de vibrar da treliça plana [1.657,95 Hz].

### 6º Modo

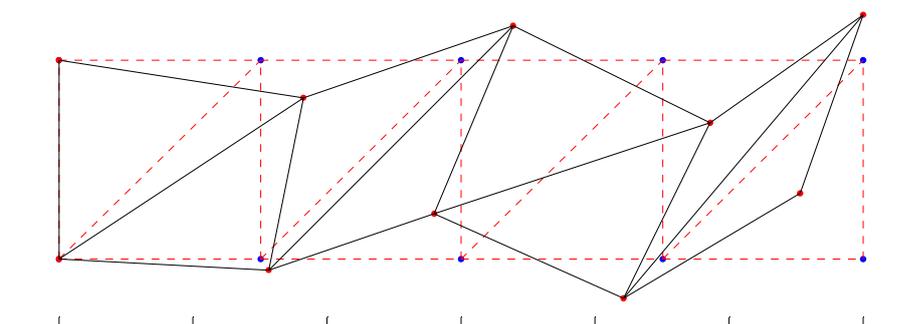


Figura A1.2 – Sexto modo de vibrar da treliça plana [1.884,42 Hz].

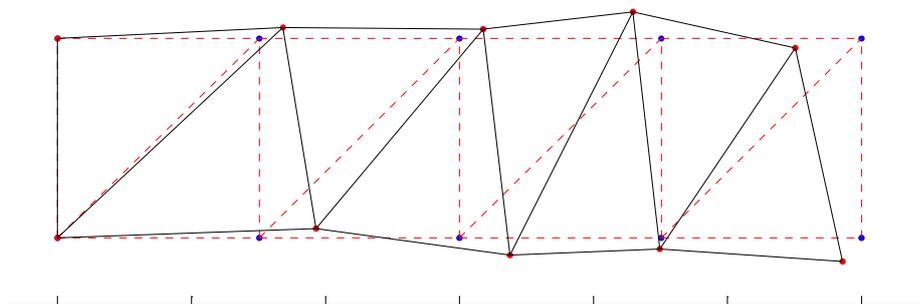
**7º Modo**

Figura A1.3 – Sétimo modo de vibrar da treliça plana [2.301,08 Hz].

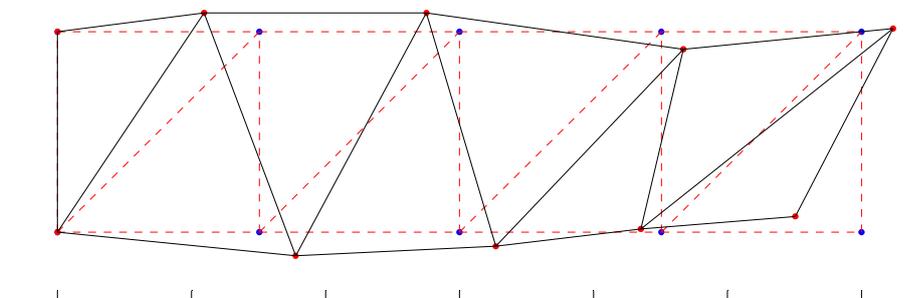
**8º Modo**

Figura A1.4 – Oitavo modo de vibrar da treliça plana [2.836,45 Hz].

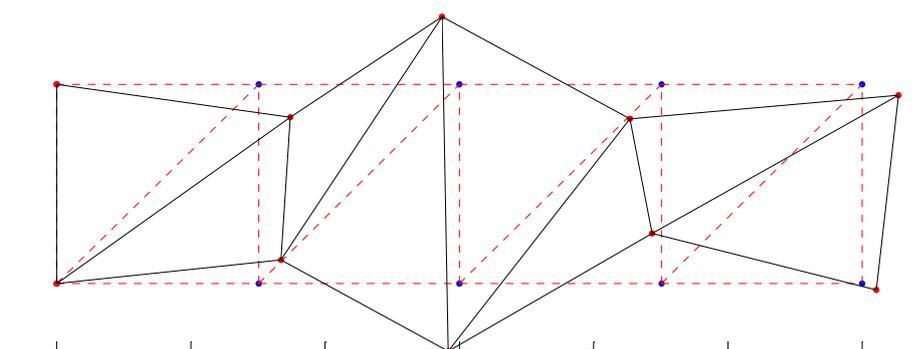
**9º Modo**

Figura A1.5 – Nono modo de vibrar da treliça plana [3.478,72 Hz].

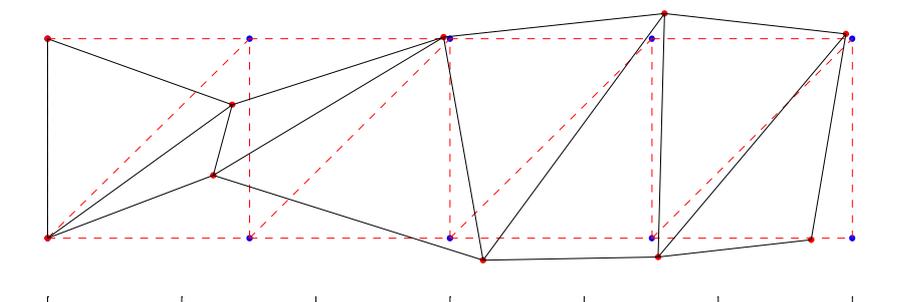
**10º Modo**

Figura A1.6 – Décimo modo de vibrar da treliça plana [3.628,35 Hz].

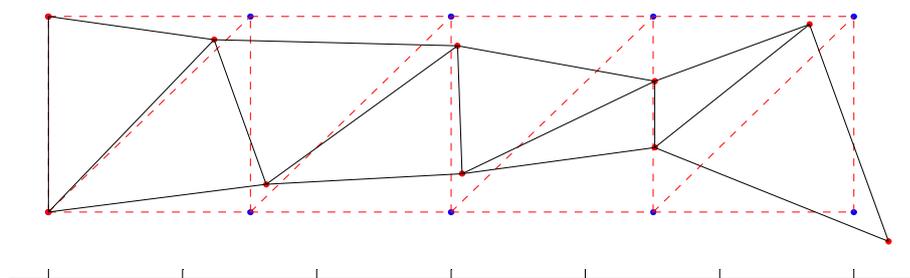
**11º Modo**

Figura A1.7 – Décimo primeiro modo de vibrar da treliça plana [3.864,81 Hz].

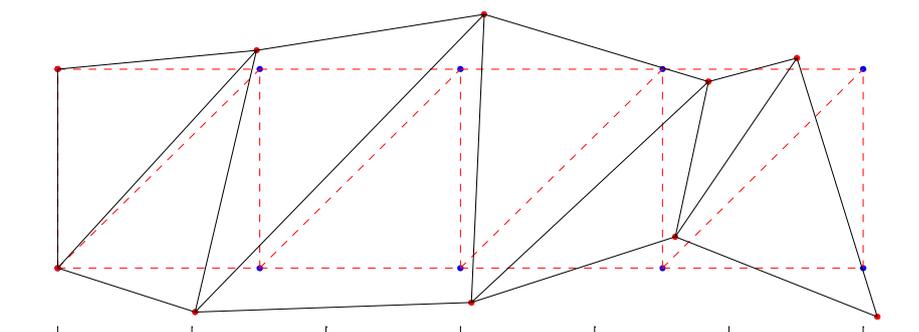
**12º Modo**

Figura A1.8 – Décimo segundo modo de vibrar da treliça plana [4.144,89 Hz].

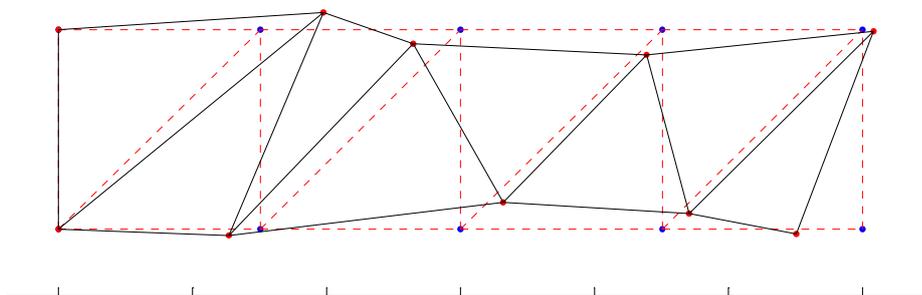
**13º Modo**

Figura A1.9 – Décimo terceiro modo de vibrar da treliça plana [4.256,82 Hz].

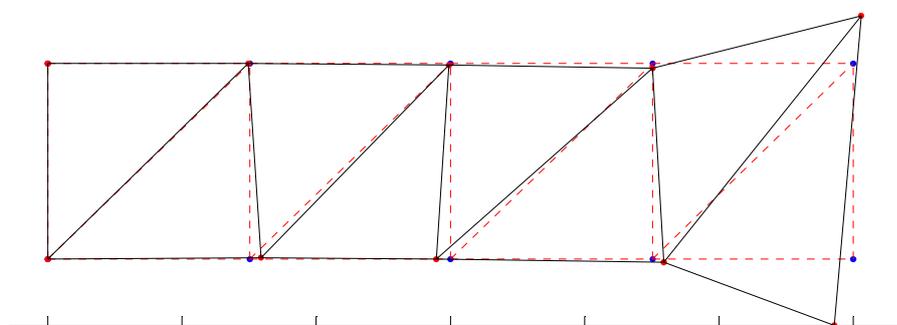
**14º Modo**

Figura A1.10 – Décimo quarto modo de vibrar da treliça plana [4.757,73 Hz].

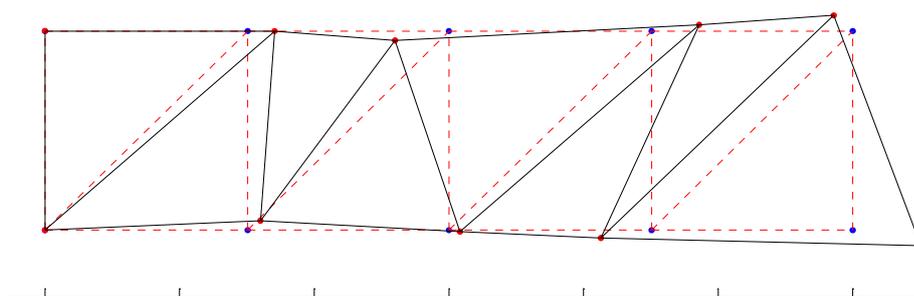
**15º Modo**

Figura A1.11 – Décimo quinto modo de vibrar da treliça plana [5.032,19 Hz].

## 16º Modo

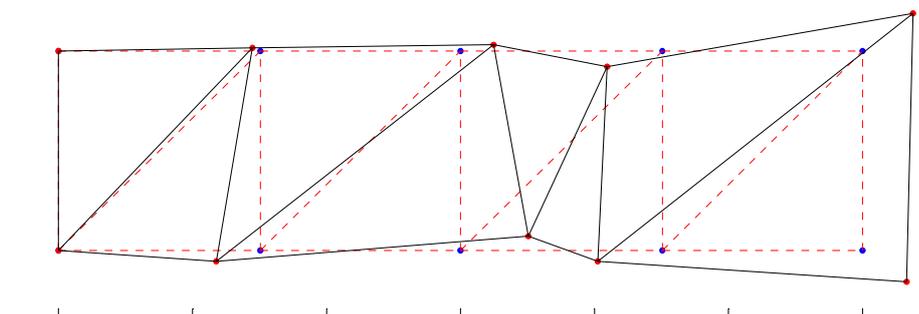


Figura A1.12 – Décimo sexto modo de vibrar da treliça plana [5.417,29 Hz].

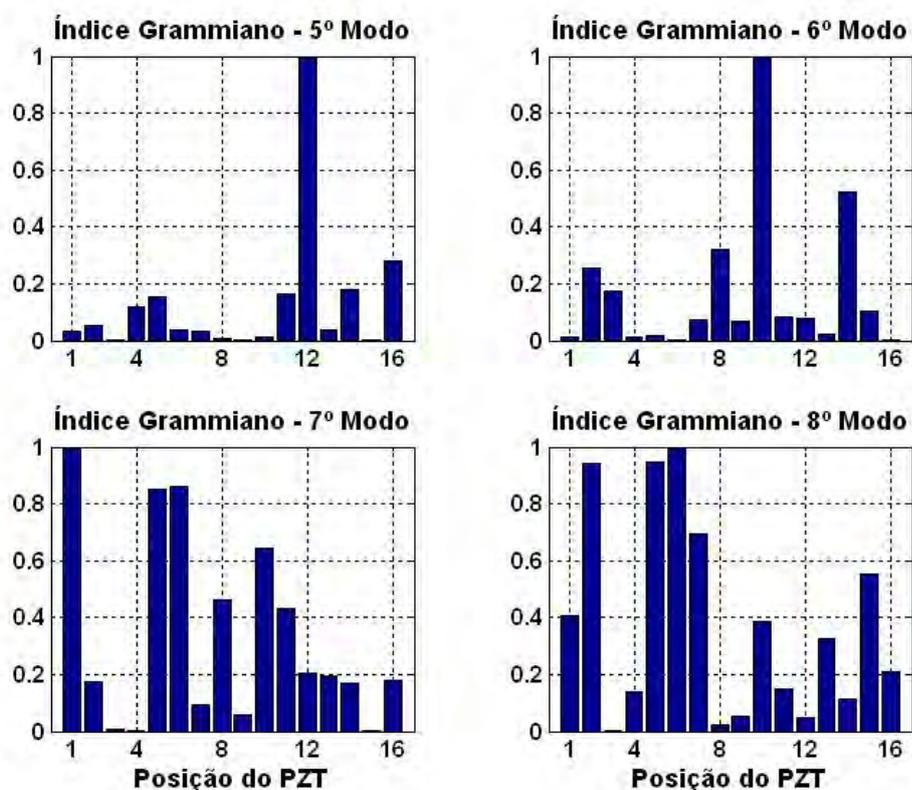


Figura A1.13 – Índice de posicionamento na ausência do distúrbio: 5º, 6º, 7º e 8º modos.

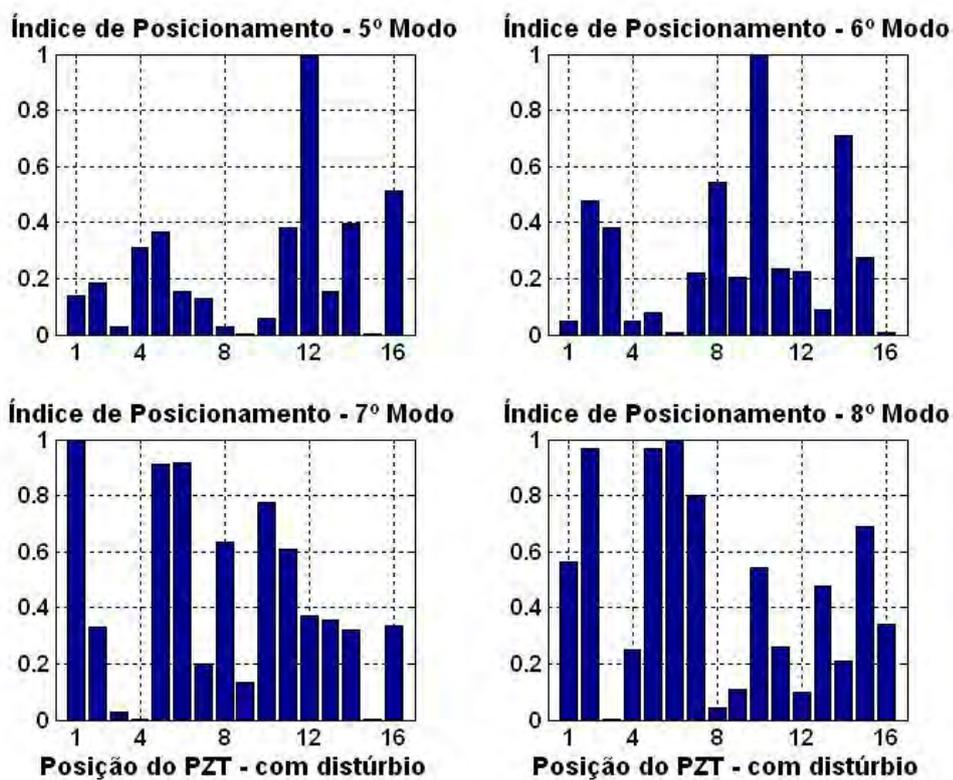


Figura A1.14 – Índice de posicionamento considerando o distúrbio: 5º, 6º, 7º e 8º modos.

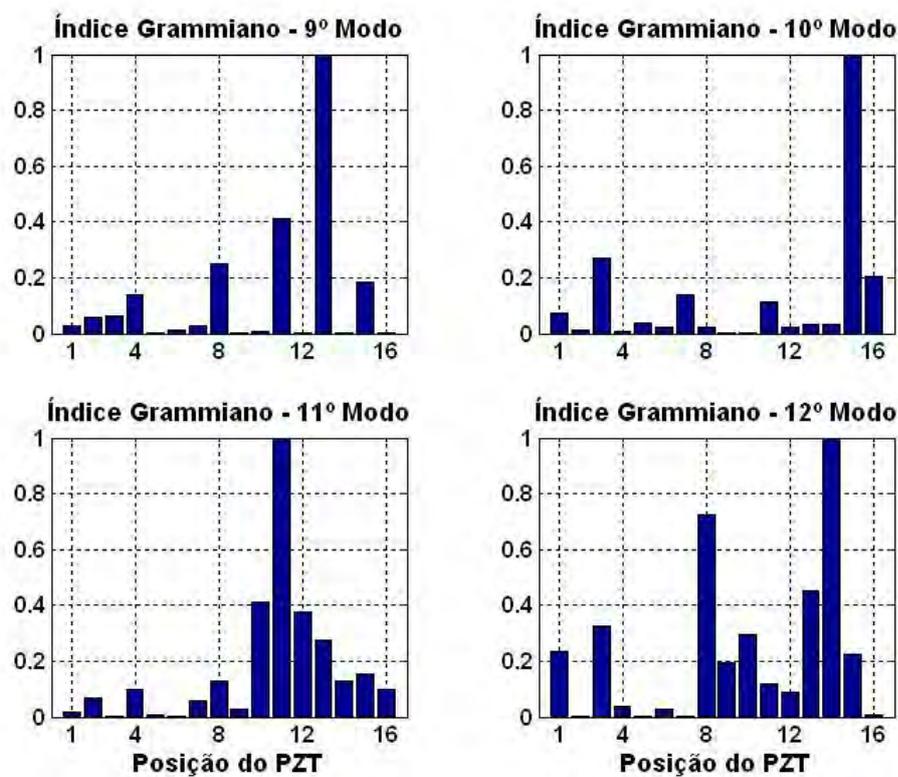


Figura A1.15 – Índice de posicionamento na ausência do distúrbio: 9º, 10º, 11º e 12º modos.

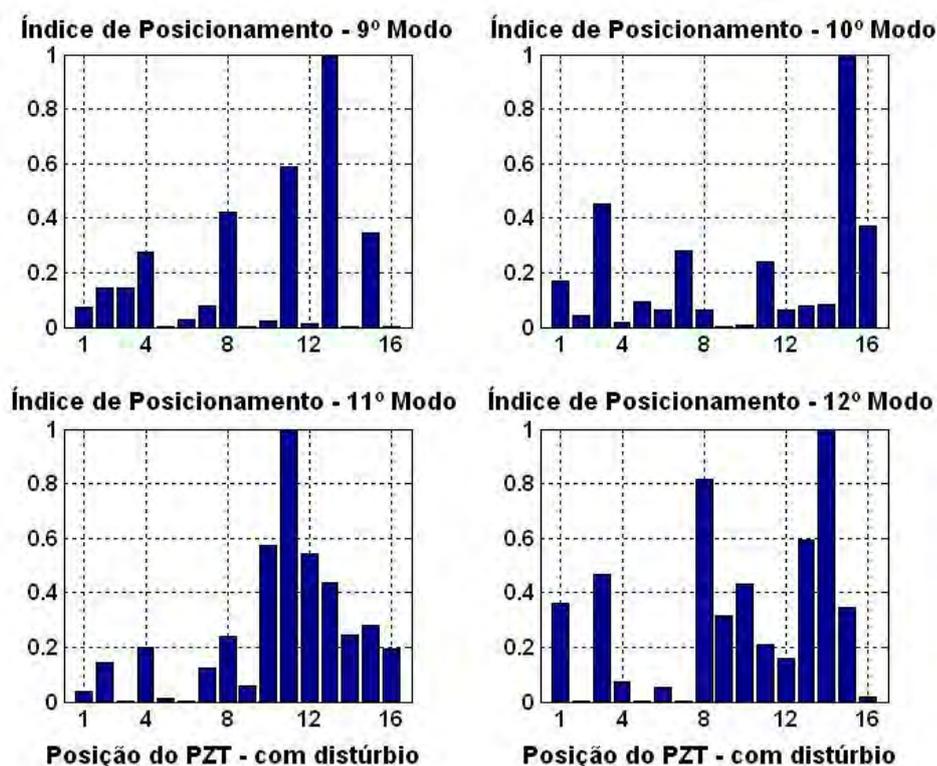


Figura A1.16 – Índice de posicionamento considerando o distúrbio: 9º, 10º, 11º e 12º modos.

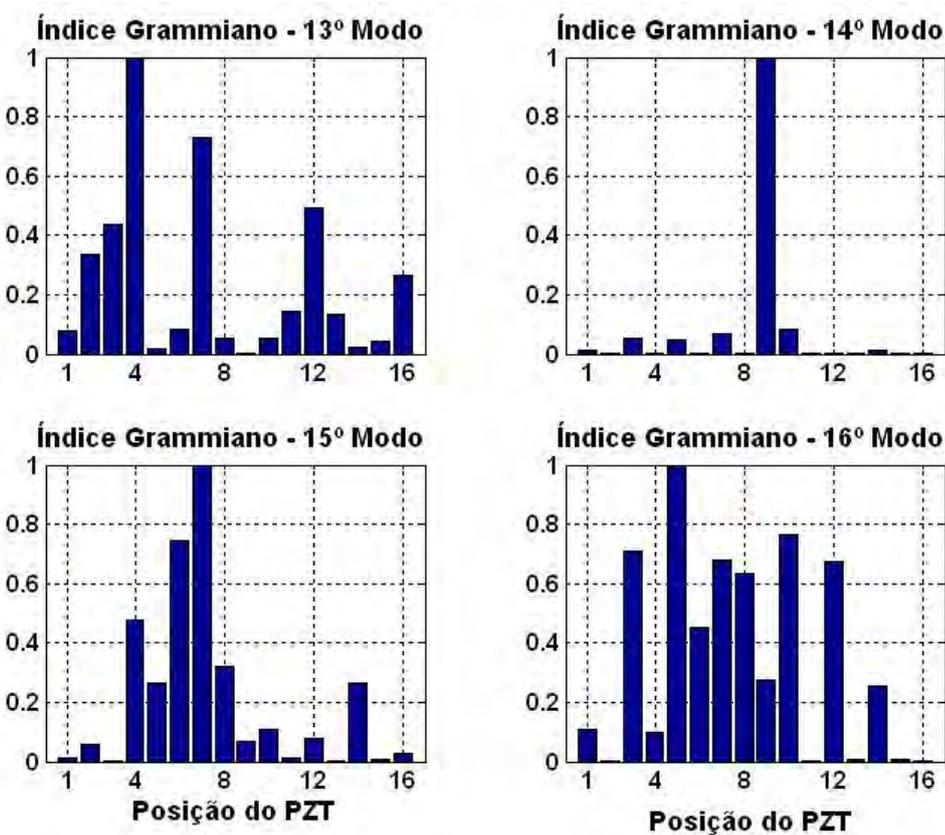


Figura A1.17 – Índice de posicionamento na ausência do distúrbio: 13º, 14º, 15º e 16º modos.

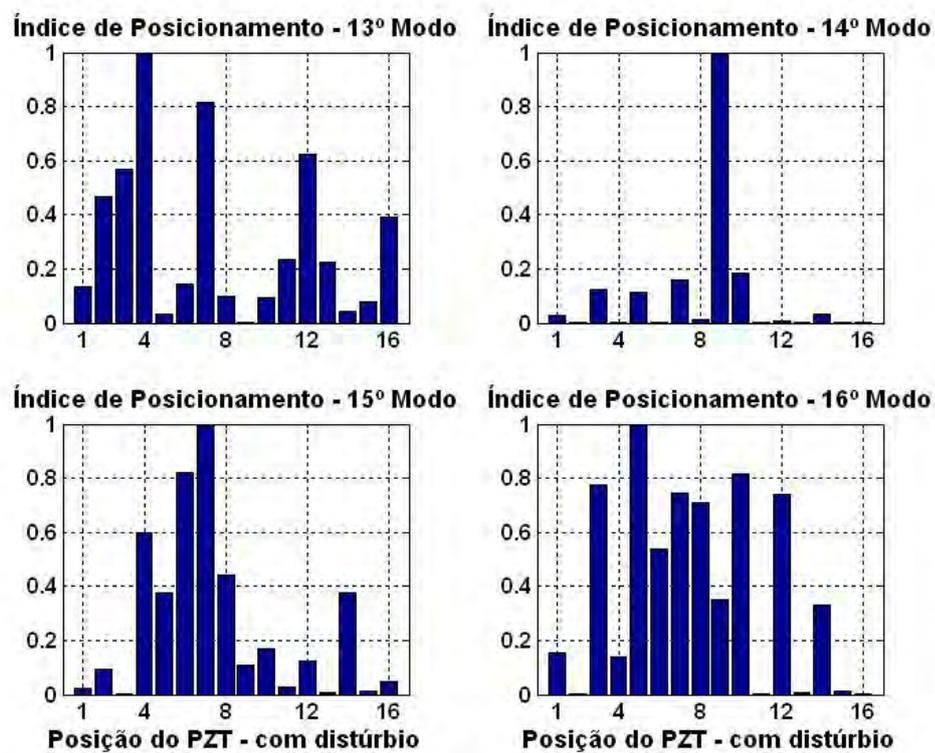


Figura A1.18 – Índice de posicionamento considerando o distúrbio: 13º, 14º, 15º e 16º modos.

## ANEXO 2

Neste anexo são apresentadas algumas considerações e detalhes das etapas realizadas para o projeto experimental de controle de vibrações na treliça 3D, mostrado na seção 7.5. Para isto, inicialmente é apresentada a identificação do modelo dinâmico estrutural e, então, em seguida o projeto do controlador.

### A2.1 Identificação do Modelo Dinâmico

Para a identificação do modelo estrutural utilizado na aplicação experimental de controle na treliça 3D foram executados os seguintes passos:

1 – foi aplicado três vezes um impulso em uma barra vertical da estrutura utilizando um martelo de impacto;

2 – foi aplicada a Transformada de Fourier (TF) na resposta ao impulso obtendo então a função de resposta em frequência;

3 – a partir da FRF resultante da média dos três sinais, obtidos com o passo 2, foram definidas as duas primeiras frequências naturais em 16Hz e 25,8Hz. É importante notar que, embora definidas as frequências naturais, estes sinais (resposta ao impulso) não devem ser utilizados na identificação das matrizes estruturais através do método de Subespaço, pois a matriz de entrada que seria obtida não representaria a posição dos atuadores de controle e nem de distúrbio, ou seja,  $\mathbf{B}_{\text{identificado}} \neq \mathbf{B}$  ou  $\mathbf{B}_w$ ;

4 – para a obtenção das matrizes de entrada, inicialmente, foi gerado um sinal aleatório para o PZT 1 e feita a aquisição da saída (sinal do acelerômetro). Utilizando estes sinais não foi possível obter as matrizes que representasse o sistema utilizando o método de Subespaço. A ordem do modelo foi atribuída como um vetor, assim, através de um gráfico dos autovalores da matriz de Hankel da resposta ao impulso é possível escolher da ordem do modelo (ver o comando “n4sid” do *software* Matlab). O teste de verificação do modelo identificado foi:

4.1 – após identificar o modelo utilizando os sinais experimentais de entrada e saída, a entrada experimental foi aplicada no modelo para comparar a saída do modelo com a saída experimental medida;

4.2 – verificando o passo 4.1 qualitativamente, foi aplicada a Transformada de Fourier no modelo (utilizando o comando “*bodemag*” do *software* Matlab) buscando verificar as frequências de ressonância presentes no modelo identificado;

4.3 – satisfeita a condição apresentada no passo 4.2 foram verificadas, quantitativamente, as frequências naturais e os fatores de amortecimento presentes no modelo identificado através do comando “*canon*” do *software* Matlab;

4.4 – Em particular, como o modelo foi escolhido com ordem 2, também foi avaliada a resposta ao impulso utilizando o comando “*impulse*” do *software* Matlab para verificar qualitativamente o modelo final.

Observação: estes testes de identificação foram repetidos para sinais de entrada do tipo *chirp* (seno com frequência variável), no entanto, nenhum modelo identificado satisfaz as condições apresentadas no passo 4. Isto foi atribuído ao tipo de estrutura, ou seja, eventualmente pode não ocorrer para estruturas do tipo vigas e placas, porém, esta verificação não foi realizada neste trabalho. Em particular para esta estrutura se verificou uma limitação de representatividade através do modelo dinâmico linear, indicando que a treliça pode ter um comportamento não linear. Com isto, sendo que o objetivo de projeto era atenuar vibrações nos modos de baixa frequência, foi adotado o seguinte procedimento:

5 – foi gerado um sinal senoidal com frequência de 16Hz para excitar o primeiro modo de vibrar. Com isto foram obtidos os sinais de entrada e saída, no entanto, estes sinais também satisfizeram as condições apresentadas no passo 4, então:

6 – foi aplicada a TF apenas no sinal de saída da estrutura;

7 – foi aplicada a Inversa da TF no sinal obtido com o passo 6 obtendo assim uma resposta ao impulso. Esta resposta ao impulso foi entendida como a resposta ao impulso modal, ou seja, a resposta ao impulso apenas do primeiro modo de vibração da treliça;

8 – visto que a identificação das matrizes através do método de Subespaço é baseada nos sinais de entrada e saída, foi criado um vetor de zeros com o mesmo comprimento que o vetor impulso modal obtido no passo 7 e atribuído o valor 1 para o tempo  $t_0$ , ou seja,  $\mathbf{u}(1) = 1$ ;

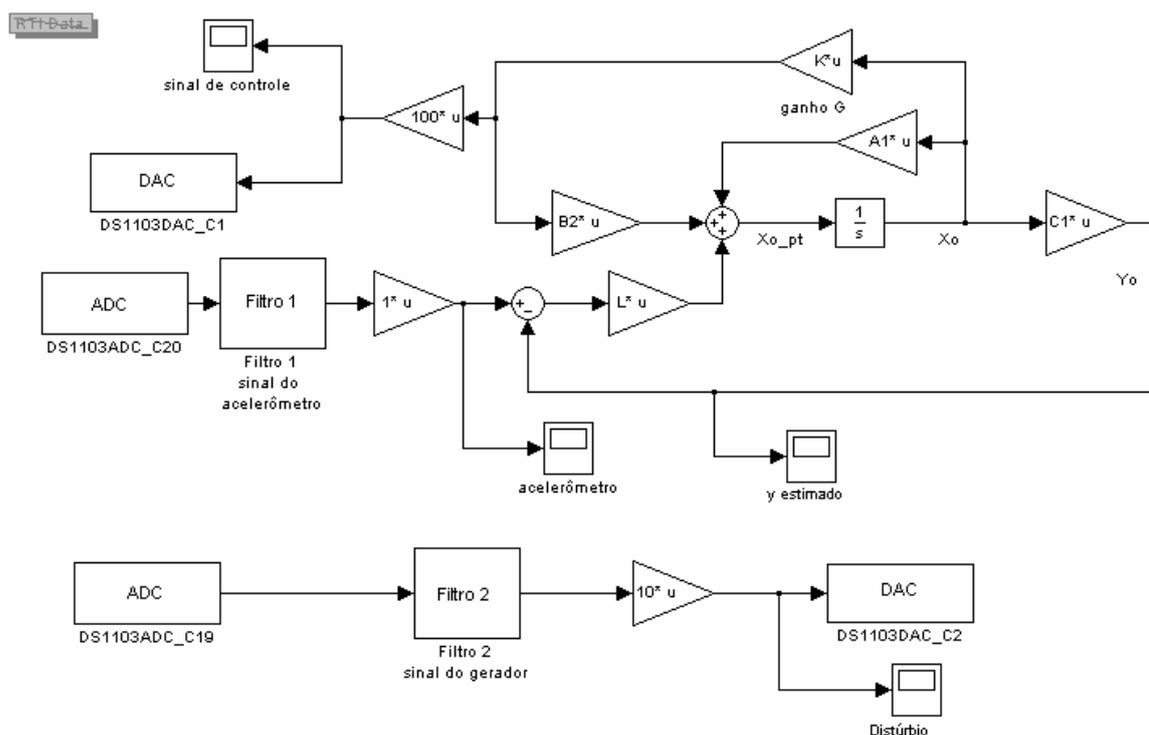
9 – utilizando os sinais obtidos nos passos 7 e 8 foi identificado um modelo dinâmico estrutural de ordem 1, ou seja, apenas para o primeiro modo de vibrar, para cada par de sinais de entrada e saída (três para o PZT 1 e três para o PZT 2);

10 – após ter sido projetado o ganho de controle e realizada a simulação através do *Simulink*/Matlab os modelos foram utilizados para os primeiros testes experimentais. No

entanto, em particular para esta aplicação, a função “integrador” utilizada no diagrama de controle para obter o vetor de estados estimados a partir da derivada  $\hat{\mathbf{x}}$  apresentou uma limitação quanto aos valores numéricos das matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_w$  e  $\mathbf{C}$ . Para clareza de entendimento, considere  $\mathbf{B} = [b_1 \ b_2]^T$ , logo, apenas foi possível processar o diagrama de controle em tempo real para  $0,009 < b_i < 900$ ,  $i = 1,2$ . Esta limitação se repetiu para as demais matrizes, então, as matrizes utilizadas foram alteradas da seguinte forma:  $\mathbf{B} = \alpha_1 \mathbf{B}$  e  $\mathbf{C} = \alpha_2 \mathbf{C}$ , sendo  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  escalares de conversão das matrizes para valores numéricos na faixa adequada (em particular, as matrizes  $\mathbf{A}_i$  foram identificadas com valores numéricos adequados para compilar e executar o diagrama de controle). Note que este procedimento em nada altera o sistema identificado (em termos de frequências naturais e formas dos modos de vibrar), mas apenas altera as amplitudes de respostas (no domínio do tempo e da frequência). Assim, para a execução bem sucedida da aplicação de controle experimental foi necessário ajustar o sinal de controle (emitida pela placa de controle) utilizando um amplificador de tensão elétrica.

## A2.2 Diagrama de Controle em *Simulink/Matlab*®

A figura A2.1 mostra o diagrama utilizado para a aplicação experimental de controle de vibrações na treliça 3D.



A2.1 – Diagrama de controle utilizado na placa dSpace 1103 para aplicação de controle experimental na treliça 3D.

É importante informar que, na simulação do controle utilizando o *Simulink*/Matlab, com quaisquer matrizes identificadas foi possível verificar a atenuação do sinal de vibrações. No entanto, foi preciso avaliar a combinação adequada das matrizes identificadas para a visualização do controle em tempo real. Note no diagrama que foram utilizadas as matrizes  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_2$  e  $\mathbf{C}_1$ , onde os subíndices indicam em qual identificação a matriz foi obtida. Note também que, além da amplificação do sinal após sair da placa de controle, uma amplificação no diagrama também foi utilizada. Em geral isto ocorreu por ter sido desejado enviar sinais para a placa com pequenas amplitudes em Volts, evitando assim ultrapassar o limite de 10 Volts em cada canal de entrada, pois, obviamente, danificaria a placa.

Os filtros digitais utilizados nesta aplicação experimental foram passa-banda, escolhidos com ordem mínima e frequências de corte iguais a 7Hz e 40Hz para valores mínimo e máximo, respectivamente. No entanto, nenhuma avaliação de resultados foi realizada mudando o tipo e os parâmetros do filtro, sendo assim, outros trabalhos podem ser desenvolvidos neste contexto. Também, no bloco “ganho de controle”, mostrado no diagrama A2.1 foi utilizada a realimentação negativa, ou seja,  $(-\mathbf{G})$ . Além disto, embora  $(\mathbf{A}_1-\mathbf{B}_2*\mathbf{G})$  tenha sido suficiente para visualizar o controle simulado via *Simulink*, foi necessário utilizar  $(\mathbf{A}_1-\mathbf{B}_2*\beta_1*\mathbf{G})$  para a visualização qualitativa do controle em tempo real. Note que  $\mathbf{G}$  foi obtido em função de  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{B}_{wi}$ ,  $\mathbf{Q}_{lqr}$  e  $\mathbf{R}_{lqr}$ , com  $i = 1, \dots, 6$ , no entanto, não necessariamente é possível obter  $\mathbf{G}$  sendo  $\beta_1*\mathbf{G}$  (onde  $\beta_1$  é um escalar de amplificação para aplicação experimental) devido as amplitudes originais das matrizes terem sido alteradas em razão da limitação do integrador do diagrama, como descrito anteriormente. Em particular, foram utilizados  $\beta_1 = 80$  para controlar o distúrbio senoidal de 16Hz e  $\beta_1 = 5$  para os casos de distúrbio impulsivo e de 26Hz, respectivamente. Também, após verificar experimentalmente que uma configuração adotada de matrizes estruturais e de ganho (do observador e do controlador) é preciso verificar a polaridade de ligação elétrica no PZT atuador. Na prática basta inverter o conector “jacaré” ligado ao PZT. Esta verificação pode ser automatizada apenas multiplicando por (-1) o sinal  $\mathbf{u}(t)$  de controle antes de sair da placa.

É necessário detalhar que para uma aplicação qualquer de engenharia o sinal de distúrbio pode não ser conhecido (e em geral não é). Assim, seria importante complementar o diagrama de controle adicionando condições de testes do “se”. Para clareza de entendimento são descritos os seguintes passos ilustrativos: ligado o controle, para  $\beta_1 = 1$ , avaliar “se” a saída  $\mathbf{y}$  (sinal do acelerômetro) está convergindo para uma amplitude aceitável, ou seja, se está ocorrendo a dissipação da energia de vibração; “senão”, alterar o valor de  $\beta_1$  e

repetir a verificação anterior. Este mesmo raciocínio pode ser seguido para combinar as matrizes identificadas, em tempo real, e assim obter a melhor configuração de controle para cada situação em particular.

Contudo, é importante mencionar que com os passos descritos neste anexo, tanto para identificar um modelo dinâmico no Espaço de Estados quanto para implementar o controle de vibrações em tempo real, é possível controlar estruturas que não são bem representadas por modelos lineares. Assim, estas explicações podem ser utilizadas para se evitar projetos de controle envolvendo formulações não-lineares, pois, até o momento, são restritas as informações para aplicações experimentais.

A seguir são apresentadas as matrizes utilizadas nesta aplicação experimental de controle. Note pela ordem das matrizes que apenas o primeiro modo de vibrar foi identificado.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -0,5325 & 101,2553 \\ -101,2553 & -0,5325 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0,0660 \\ 6,5216 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_1 = [0,2631 \quad 0,0358]$$

$$\mathbf{G} = [-1,5426 \quad 2,5514]$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{K}_1 = [463,9982 \quad 65,8124]^T$$

$$\mathbf{K} = -\beta_1 \mathbf{G}$$

A seguir são apresentadas algumas fotos dos equipamentos utilizados. A figura A2.2 mostra a placa de controle DSPACE 1103, a figura A2.3 mostra o condicionador de sinal utilizado para integrar o sinal de acelerômetro uma vez e, então, permitir que fosse feita a aquisição do sinal de velocidade. As figuras A2.4 e A2.5 mostram o sistema de aquisição de sinais e os demais equipamentos utilizados. Também, as figuras A2.6 e A2.7 mostram o PZT de pilha e o acelerômetro, respectivamente. Ainda, a figura A2.8 mostra a configuração de controle adotada para a realização do experimento com a treliça 3D.



Figura A2.2 – Placa de controle da DSPACE 1103.



Figura A2.3 – Condicionador de sinais da PCB Piezotronics®.



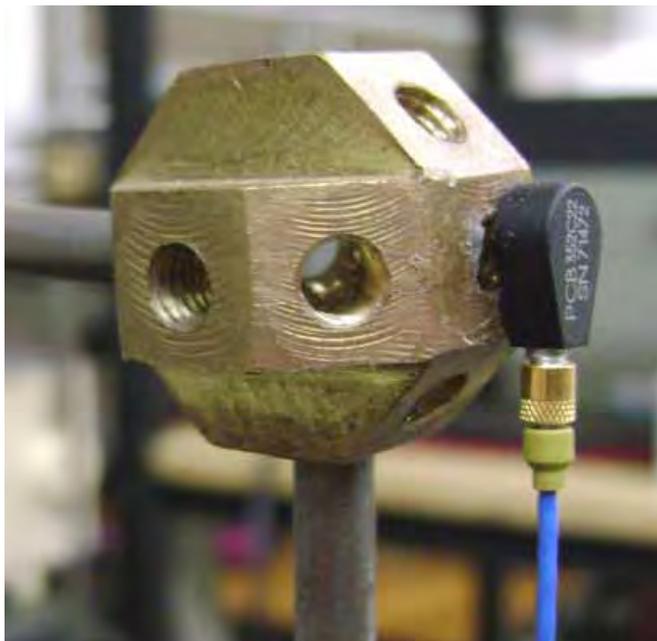
A2.4 – Sistema de aquisição utilizado na aplicação de controle.



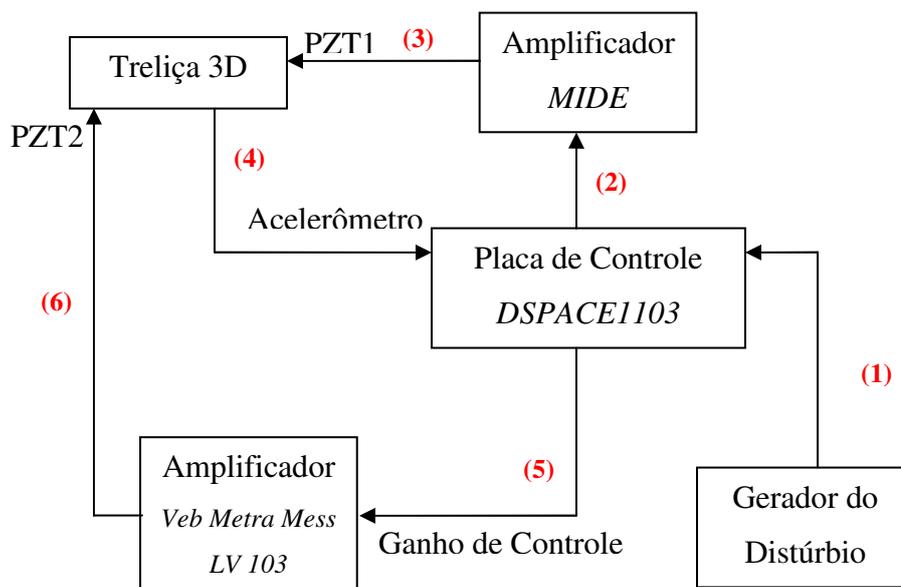
Figura A2.5 – Gerador de sinais de distúrbio e amplificador do sinal de controle.



A2.6 – Atuador PZT de pilha *CEDRAT* APA 60M.



A2.7 – Acelerômetro PCB Piezotronics® modelo 352C22.



A2.8 – Configuração do experimento de controle experimental na treliça 3D.