

Universidade Estadual Paulista"Júlio de Mesquita Filho"

CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

José Eduardo Rodrigues

Teoria de Representações de Raio e aplicações a grupos de Lie.

Guaratinguetá/Brasil

2025

José Eduardo Rodrigues

Teoria de Representações de Raio e aplicações a grupos de Lie.

Dissertação de Mestrado apresentada em 2024 ao Conselho da Pós Graduação da Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estatual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física e Astronomia.

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Programa de Pós Graduação em Física e Astronomia

Orientador: Profº Dr. Julio Marny Hoff da Silva

Guaratinguetá/Brasil

2025

Batista, José Eduardo Rodrigues
B333t Teoria de representações de raio e aplicações a grupos de Lie / José Eduardo Rodrigues Batista – Guaratinguetá, 2025.
103 f : il.

Bibliografia: f. 100-101

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva

1. Representações de grupos. 2. Teoria quântica. 3. Lie, Grupos de. I. Título.

CDU 530.145

Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

JOSE EDUARDO RODRIGUES BATISTA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA E ASTRONOMIA
CURSO: MESTRADO

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Orientador - UNESP

Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP

Prof. Dr. ROLDÃO DA ROCHA JÚNIOR
Universidade Federal do ABC

***FEVEREIRO* de 2025**

Eu dedico este trabalho a todos que estiveram presente durante o processo.

DADOS CURRICULARES

JOSÉ EDUARDO RODRIGUES BATISTA

NASCIMENTO	05/10/2000 - Itatiaia-RJ
FILIAÇÃO	Dulce Pereira Rodrigues
	José Maria Batista
2018 - 2022	Bachalerado em Física
	Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
2023 - 2025	Mestrado em Física e Astronomia
	Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Agradecimentos

Começo esta seção de agradecimentos pelo meu orientador Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva, sendo um grande mentor ao longo de todos os anos nos quais desenvolvemos este trabalho e nos aprofundamos no tema. Além de sua importância no meu desenvolvimento acadêmico, reascendeu minha chama pela ciência e me mostrou os caminhos para me tornar o profissional que desejo.

No que tange à família, dois nomes atribuem significado a esta palavra. Em primeiro lugar minha mãe, Dulce, que mesmo distante geograficamente em nenhum momento diminuiu a intensidade de seu apoio e de sua torcida. Mesmo de longe, sempre teve as palavras necessárias para que minha cabeça continuasse erguida em busca dos tantos sonhos que sonhamos juntos. Em segundo agradeço a minha vó, Gracinda, que é minha segunda mãe e também sempre teve as palavras necessárias, desta vez para me fazer entender que meu esforço era válido apesar dos resultados não serem os esperados. Graças a vocês duas consegui dar cada um dos passos que dei nos últimos anos, mesmo distante sempre irei trabalhar para realizar nossos sonhos.

Aos amigos que coletei nestes últimos dois anos Breno, Giovanna, Iris, Ismael, Pedro, Raí, Raíssa, Tiago, Thaís e Vinicius que me ajudaram a encontrar um lugar de conforto em relações que sempre me foram difíceis e custosas.

Aos irmãos que nunca me abandonaram, Vitor e Willian, que se mantiveram ao meu lado apesar dos dias e semanas de sumiço e da enorme dificuldade em responder suas mensagens.

Agradeço também aos professores Denis, Elias, Gustavo e Saulo por terem aceitado o convite de participar da banca avaliadora do meu exame de qualificação. Aos professores Elias e Gustavo, novamente, e aos professores Roldão da Rocha e Mario Cezar Bertin por terem aceitado participar da banca de defesa de mestrado. A disponibilidade de vocês e as lições que ouvi e ainda ouvirei de vocês são cruciais para que este trabalho exista.

Finalizo esta seção de agradecimentos com minha noiva Giovana Ramon, inspiração diária e eterna em relação a desempenho acadêmico e profissional. Parceira de todas as horas e conselheira precisa, obrigado por aguentar tantos altos e baixos ao meu lado. Agradeço mais ainda por me apoiar em minhas decisões referentes ao futuro e entender minha busca incessante.

Este trabalho contou com o apoio das seguintes entidades:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil -

UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

"Step by step. I can't see any other way of accomplishing anything."

Michael Jordan

Resumo

Motivado pelo crucial trabalho de Eugene Wigner acerca das representações do grupo de Poincaré, Valentine Bargmann em 1954 fundamenta a Teoria de Representações de Raio (ou projetivas) em "On Unitary Ray Representations of Continuos Groups". Esta dissertação de mestrado é a continuação do trabalho de graduação onde a teoria de Bargmann foi amplamente estudada a fim de detalhar todos os processos do autor. Dando sequência a esta abordagem, são explorados exemplos relacionados a grupos de grande relevância em física: grupos abelianos, pseudo-ortogonais homogêneos (grupo de Lorentz) e inomogêneos (grupo de Poincaré), grupos semi-simples. Em contraste com o formalismo principal, é também apresentada uma nova abordagem utilizando os grupos de cohomologia para análise da sobrevivência ou não das representações de raio. Sendo o principal objetivo do trabalho evidenciar em quais casos há sobrevivência, ou não, das fases e também mencionar alguns casos nos quais há atribuição de significado físico às mesmas.

Palavras-chave: representações de grupos; representações de raio; mecânica quântica.

Abstract

Motivated by the seminal work of Eugene Wigner on the representations of the Poincaré group, Valentine Bargmann in 1954 presents the Theory of Ray Representations (or projectives) in "On Unitary Ray Representations of Continuous Groups". This master's thesis is the continuation of the undergraduate work where Bargmann's theory was extensively studied in order to detail all of the author's processes. Continuing this approach, examples related to groups of great relevance in physics are explored: abelian groups, pseudo-orthogonal homogeneous (Lorentz group), inhomogeneous (Poincaré group) and semi-simple groups. In contrast to the main formalism, a new approach using cohomology groups to analyze the survival or not of ray representations is also presented. The main objective of the work is to highlight in which cases the phases survive or not and also to mention some cases in which there is attribution of physical meaning to them.

Keywords: group representations; ray representations; quantum mechanics.

Índice

1 INTRODUÇÃO 11

2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DE REPRESENTAÇÕES PROJETIVAS 14

2.1 Raios e Distâncias 14

2.1.1 Representações de Raio e Representativos Admissíveis 16

2.2 Fatores e Expoentes Locais 21

2.2.1 Fatores Locais 22

2.2.2 Expoentes Locais 24

2.2.3 Classes de Equivalência de Expoentes Locais 26

2.2.4 Grupo Local 26

3 EXTENSÃO DOS RESULTADOS LOCAIS E GRUPOS CONTÍNUOS 29

3.1 Representações Compatíveis 29

3.2 Representações de grupos conexos e simplesmente-conexos 31

3.2.1 Extensão de um representação local 32

3.2.2 Extensão de uma seleção local de representativos 35

3.2.3 Extensão de expoentes locais 36

3.3 Representações de Raio de Grupos de Lie 38

3.3.1 Noções Preliminares 38

3.3.2 Expoentes locais diferenciáveis 41

3.3.3 Expoentes locais diferenciáveis equivalentes 43

3.3.4 Expoentes locais de um grupo de um parâmetro 44

3.3.5 Expoentes locais canônicos 45

3.3.6 Expoentes locais canônicos equivalentes 46

3.3.7 Grupo Local e Expoentes Infinitesimais 48

3.3.8 Correspondência entre expoentes locais e infinitesimais 52

4 APLICAÇÕES 55

4.1 Grupos Abelianos 55

4.2 Grupos Pseudo-ortogonais (homogêneos e inomogêneos) 58

4.2.1 Noções preliminares 58

4.2.2 As álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ de G_p^m e I_p^m 60

4.2.3 Determinação dos expoentes infinitesimais de $\mathfrak{g}$ 63

4.2.3.1 Expoentes infinitesimais de G_p^m e I_p^m para $m > 2$. 63

4.3 Grupo de Galileu 68

4.3.1 A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G 70
4.3.2 Determinação dos expoentes infinitesimais 70
4.4 Sistematizando o procedimento de determinação de expoentes infinitesimais 75
4.5 Grupos Semi-Simples 76

5 A ANÁLISE DAS REPRESENTAÇÕES PROJETIVAS VIA CARGAS CENTRAIS 79
5.1 O Grupo de Poincaré 82
5.1.1 Conexão entre Expoentes Infinitesimais e Cargas Centrais 90

6 ABORDAGEM ATRAVÉS DOS GRUPOS DE COHOMOLOGIA . . 93
6.1 O espaço de fase quântico 95

7 CONCLUSÕES 98

Referências 100

A OBTENÇÃO DO COMUTADOR ATRAVÉS DA FÓRMULA DE BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF 102

1 Introdução

É de conhecimento geral que a descrição de estados físicos na mecânica quântica é dada em termos de vetores de estado pertencentes a um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, complexo e de dimensão definida pela natureza do fenômeno de estudo. Para dois vetores $\psi, \varphi \in \mathscr{H}$, a probabilidade de transição do estado ψ para o estado ϕ é dada por

$$P = |(\psi, \phi)|^2. \tag{1.1}$$

Entretanto, há a liberdade de realizar uma transformação $\psi' = \alpha\psi$, onde α é um número complexo unimodular, tais transformações são chamadas transformações de fase. Logo, a correspondência entre estados e vetores não é direta, um estado pode ser descrito por diversos vetores que diferem entre si por uma fase. Para dar cabo da correspondência, é necessária a introdução dos raios vetoriais, uma classe de equivalência de vetores de estado $\mathbf{\Psi} = \{\alpha\psi_0\}$, onde ψ_0 um vetor unitário fixo em $\mathscr{H}$. A correspondência entre raios vetoriais e estados quânticos, por sua vez, é um a um. Esta simples liberdade da origem ao problema explorado ao longo do trabalho.

Para caracterizarmos o problema, façamos uma breve análise em busca do efeito dos raios vetoriais em transformações de simetria. Uma transformação de simetria, no grau que nos interessa ao trabalho[1], é aquela cuja realização não interfere nos resultados dos experimentos, ou seja, não altera a probabilidade de transição. Sejam $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ dois observadores conectados por uma transformação de simetria. O estado observado pelo observador $\mathcal{O}$ será caracterizado por $\mathbf{\Psi}$, enquanto o estado observado pelo observador, do mesmo sistema, $\mathcal{O}'$ por $\mathbf{\Psi}'$, de modo que

$$P(\mathbf{\Psi} \to \psi_n) = P(\mathbf{\Psi}' \to \psi'_n), \tag{1.2}$$

ou seja, a probabilidade de um sistema inicialmente representado por um estado $\mathbf{\Psi}$ ser encontrado em um de seus n autoestados deve permanecer inalterada para ambos os referenciais. Isto é, independente do referencial adotado, a física deve permanecer a mesma.

Apesar de estabelecida a equivalência entre raios e estados quânticos, o problema inicial, ainda nos resta o problema de que transformações de simetria atuam sobre os estados e não sobre os raios. Esta questão foi resolvida por E. P. Wigner, em 1931[2], ao estabelecer que transformações de simetria podem ser representadas por operadores U em um espaço de Hilbert[3], sendo estes unitários e lineares ou antiunitários e antilineares.

[1] Iremos seguir o a caracterização exposta em Weinberg (1995).
[2] Wigner (1931).
[3] A prova deste teorema pode ser encontrada em Wigner (1931), Weinberg (1995), Hoff da Silva and da Rocha (2021).

Sejam duas transformações de simetria $T_1 : \mathbf{\Psi} \to \mathbf{\Psi}'$ e $T_2 : \mathbf{\Psi}' \to \mathbf{\Psi}''$, ao compor estas transformações temos $T_2T_1 : \mathbf{\Psi} \to \mathbf{\Psi}''$. Porém, os operadores relacionados a essas transformações não atuam diretamente sobre raios e sim sobre vetores. A atuação de $U(T_1)$ (operador unitário relacionado a transformação de simetria T_1) em um vetor $\psi_n \in \mathbf{\Psi}_n$ deve levar a um vetor $U(T_1)\psi_n \in \mathbf{\Psi}'_n$ e, consequentemente, a atuação de $U(T_2)$ deve levar a um vetor $U(T_2)U(T_1)\psi_n \in \mathbf{\Psi}''_n$. Mas, vetores que diferem entre si por uma fase complexa unimodular pertencem ao mesmo raio, além disso as transformações T_2 e T_2T_1 levam a vetores pertencentes ao mesmo raio, isto é $U(T_2, T_1)\psi_n \in \mathbf{\Psi}''$, portanto

$$U(T_2)U(T_1)\psi_n = \omega_n(T_2, T_1)U(T_2, T_1)\psi_n. \tag{1.3}$$

Estes vetores diferem entre si somente pela fase $\omega(T_2, T_1)$ que será definida e explorada durante todo o estudo. Podemos ainda demonstrar que a relação (1.3) é independente dos estados, sejam ψ_a e ψ_b estados linearmente independentes e apliquemos (1.3) em $\psi_{ab} = \psi_a + \psi_b$:

$$U(T_2)U(T_1)(\psi_a + \psi_b) = \omega_{ab}(T_2, T_1)U(T_2, T_1)(\psi_a + \psi_b), \tag{1.4}$$

ou ainda,

$$U(T_2)U(T_1)\psi_a + U(T_2)U(T_1)\psi_b = \omega_{ab}(T_2, T_1)U(T_2, T_1)(\psi_a + \psi_b), \tag{1.5}$$

logo

$$\omega_a U(T_2, T_1)\psi_a + \omega_b U(T_2, T_1)\psi_b = \omega_{ab}(T_2, T_1)U(T_2, T_1)(\psi_a + \psi_b). \tag{1.6}$$

Todo operador unitário ou antiunitário possui inversa, ou seu adjunto, também unitário e antiunitário. Ao multiplicar (1.6) por $U^{-1}(T_1, T_2)$ à esquerda,

$$\omega_{ab}(T_2, T_1)(\psi_a + \psi_b) = \omega_a(T_2, T_1)\psi_a + \omega_b(T_2, T_1)\psi_b. \tag{1.7}$$

Como ψ_a e ψ_b são linearmente independentes, a igualdade só é válida se

$$\omega_{ab}(T_2, T_1) = \omega_a(T_2, T_1) = \omega_b(T_2, T_1). \tag{1.8}$$

Conclui-se que ω em (1.3) é independente do vetor de estado, então tal equação pode ser reescrita como uma relação de operadores:

$$U(T_2)U(T_1) = \omega(T_2, T_1)U(T_2, T_1). \tag{1.9}$$

Esta relação define o que chamamos de uma representação do grupo de transformações de simetria a menos de uma constante. Representações nas quais $\omega \equiv 1$ são ditas representações genuínas, caso contrário temos as representações de raio (ou projetivas). Note que a fase ω depende diretamente dos elementos do grupo, sendo assim ao compor transformações sucessivas teríamos uma dependência cada vez maior, para isso faremos a busca pela remoção das fases.

Uma vez que o presente trabalho é a continuação de um trabalho anteriormente desenvolvido Batista (2023), no Capítulo 2 é realizada uma espécie de revisão para estabelecer os fundamentos necessários para obtenção dos resultados locais[4] da teoria, enquanto no Capítulo 3 tais resultados são generalizados para a globalidade, neste capítulo há também a aplicação da teoria aos grupos de Lie. Após a realização do estudo abstrato, no Capítulo 4 são estudadas as aplicações exploradas em Bargmann (1954), atentando apenas ao processo de determinação da sobrevivência, ou não, das fases. No Capítulo 5 é apresentado um novo método para análise das representações projetivas, através da manipulação das cargas centrais, de acordo com Weinberg (1995) e também é explorada a relação entre a teoria previamente apresentada e proposta por Bargmann com este outro método. Já no Capítulo 6, são introduzidos os conceitos necessários para abordar o problema através de ferramentas da topologia algébrica, motivado pelo trabalho Aldrovandi and Galleti (1990) em que os autores atribuem o significado de um espaço de fase quântico à fase sobrevivente para uma representação do grupo de Heinsenberg. Por fim, no Capítulo 7 estão reunidos os principais resultados do estudo e os passos futuros em desenvolvimento.

[4] É válido ressaltar que o conceito de local e global aqui mencionados estão associados a vizinhanças do grupo, a localidade diz respeito a objetos definidos em uma vizinhança da origem do grupo, enquanto a globalidade diz respeito a objetos definidos por todo o grupo.

2 Fundamentos da Teoria de Representações Projetivas

Esta seção tem como intuito apresentar de maneira sucinta os conceitos fundamentais para construção da abordagem ao problema já apresentado das representações de raio. Tal exposição, assim como toda a estrutura do trabalho, seguirá o trabalho de (Bargmann, 1954). Alguns detalhes mais trabalhosos serão omitidos, uma vez que este texto é uma continuação do texto já apresentado em (Batista, 2023).

No ano de 1939[1], E. P. Wigner publica um robusto trabalho explorando as representações do grupo de Poincaré, lançando mão de um rigor matemático não muito comum aos trabalhos da área na época. Subsequente a esta publicação, Bargmann fundamenta a teoria explorada por Wigner referente à liberdade das transformações de fase em vetores de estado na Mecânica Quântica, introduzindo os conceitos de raios vetoriais, operatoriais e das representações de raio (ou projetivas).

2.1 Raios e Distâncias

É de suma importância, para apreciação da construção do formalismo, ter em vista que a única exigência realizada é que haja invariância da física medida em referenciais conectados por transformações de simetria. Os passos iniciais da teoria serão todos construídos a partir de conceitos básicos de álgebra linear.

Vetores de estado são descritos por vetores em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, o produto interno definido nesse espaço é sesquilinear, isto é, linear na segunda entrada e anti-linear na primeira entrada. Sejam dois vetores $\psi, \phi \in \mathscr{H}$, a norma de um vetor será dada por $||\psi|| = (\psi, \psi)^{\frac{1}{2}}$ e no caso de vetores unitários teremos $||\psi|| = 1$. Desta forma, para estes dois vetores

$$||\psi - \phi||^2 = (\psi - \phi)^*(\psi - \phi) = |\psi|^2 - \psi^*\phi - \phi^*\psi + |\phi|^2, \tag{2.1}$$

utilizando a unitariedade dos vetores e o fato de que $z + z^* = 2Re(zz^*)$, onde $z \in \mathbb{C}$, esta relação se torna

$$||\psi - \phi||^2 = 2[1 - Re(\psi, \phi)], \tag{2.2}$$

podemos retomar o uso do produto interno, no lugar da parte real do mesmo, através da desigualdade, então

$$||\psi - \phi||^2 \leq 2[1 - |(\psi, \phi)|]. \tag{2.3}$$

[1] Wigner (1939).

Obtendo assim uma relação promissora para definição de uma função distância envolvendo os vetores de estado. Perceba que é possível introduzir uma relação de equivalência[2] $\sim$ no espaço de Hilbert, tal que ψ e ψ' são ditos equivalentes se

$$\psi = \alpha\psi', \tag{2.4}$$

onde α é uma fase complexa unimodular. A partir desta relação de equivalência temos a classe de equivalência, o conjunto de todos os elementos que se relacionam através de $\sim$, $\mathbf{\Psi} = \{\alpha\psi_0\}$. Os elementos deste conjunto são chamados de representativos, ψ_0 é um vetor de estado unitário. Esta classe recebe o nome de raio vetorial e é o objeto matemático que está em correspondência um a um com os estados quânticos.

De acordo com van der Schaaf (2017), a definição mais precisa para o espaço de estados quânticos é o espaço composto pelas classes de equivalência do espaço de Hilbert, sem a origem, este é o Espaço Projetivo de Hilbert denotado por $\mathbf{P}\left(\mathscr{H}\right) := \left(\mathscr{H} \setminus \{0\}\right)/\sim$. A ausência da origem advém do fato de que os raios vetoriais correspondem as classes de equivalência de vetores não nulos.

O produto interno entre dois raios é dado por

$$\mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Phi} = |(\psi, \phi)|, \tag{2.5}$$

de onde se pode concluir que $\mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Phi} = 1$ se, e somente se, $\psi = \phi$. A distância entre dois raios será a menor norma $||\psi - \phi||^2$, fazendo $\psi = \alpha\psi_0$ e $\phi = \tau\phi_0$ em (2.2), temos

$$||\psi - \phi||^2 = 2\{1 - Re[\alpha^*\tau(\psi_0, \phi_0)]\}, \tag{2.6}$$

note que podemos escrever $(\psi_0, \phi_0) = |\lambda|(\psi_0, \phi_0)$, desde que $|\lambda| = 1$, sendo $\lambda \in C$. Para o caso atual, teríamos $|(\psi_0, \phi_0)| = |\alpha||\tau||(\psi_0, \phi_0)|$ e como $|\alpha| = |\alpha^*|$

$$|(\psi_0, \phi_0)| = |\alpha^*||\tau||(\psi_0, \phi_0)| = |\alpha^*\tau(\psi_0, \phi_0)| = |(\alpha\psi_0, \tau\phi_0)| = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Phi}, \tag{2.7}$$

então a relação (2.6) pode ser reescrita como

$$||\psi - \phi||^2 = 2\{1 - Re(\alpha^*\tau\lambda)\mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Phi}\}, \tag{2.8}$$

a distância entre dois raios, denotada por $d(\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi})$, é dada pela menor norma $||\psi - \phi||^2$, sendo esta

$$d(\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi}) = [2(1 - \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Phi})]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.9}$$

Esta função só será nula se os raios coincidirem, o que se espera de uma função distância, além disso, será através desta função que exploraremos o conceito de continuidade para os operadores a seguir.

Ainda no âmbito das distâncias será enunciado o primeiro lema do trabalho, assim como já mencionado algumas provas serão omitidas, uma vez que o capítulo é uma revisão sucinta do formalismo, a prova está contida em Batista (2023).

[2] Uma relação de equivalência é aquela que possui as propriedades de: i) simetria, ii) reflexão e iii) transitividade.

Lema 1. *O produto escalar* $\mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Phi}$ *é contínuo em ambos fatores com respeito a métrica* $d(\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi})$*, isto é, tal distância possui um limite superior.*

Além dos raios vetoriais, podemos construir raios operatoriais de forma análoga, um raio operatorial $\mathbf{U}$ é o conjunto de todos os operadores τU_0, onde τ é uma fase complexa unimodular e U_0 é um operador unitário fixo. Seguindo esta definição, consequentemente, o produto entre dois raios operatoriais $\mathbf{UV}$ é o conjunto de todos os produtos UV, onde U e V são representativos dos raios operatoriais $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$, respectivamente. Além disso, o raio identidade é constituído do operador unitário $\mathbb{1}$. O raio inverso de $\mathbf{U}$, denotado por $\mathbf{U^{-1}}$, é o conjunto de operadores U^{-1}, onde $\mathbf{U^{-1}U} = \mathbb{1}$. Por fim, um raio vetorial $\mathbf{U\Psi}$ é o conjunto de todos os vetores $U\psi$ compostos pelos operadores, pertencentes a $\mathbf{U}$, atuando nos vetores que compõem o raio vetorial $\mathbf{\Psi}$.

2.1.1 Representações de Raio e Representativos Admissíveis

A definição de uma representação de raio é baseada em uma representação de grupo, sendo assim vejamos o conceito de grupo seguindo Barata (2023). Seja G um conjunto de elementos $\{r, s, t, \cdots\}$ e $\diamond : G \times G \to G$, uma operação binária definida sobre G. O par $(G, \diamond)$ é dito um grupo se cumprir as seguintes condições:

1. *Associatividade.* Para quaisquer r, s, $t \in G$, $(r \diamond s) \diamond t = r \diamond (s \diamond t)$;
2. *Elemento neutro.* Existir um único elemento $e \in G$, chamado elemento neutro, tal que $e \diamond r = r \diamond e = r$, para qualquer $r \in G$;
3. *Elemento simétrico.* Para todo $r \in G$ existe um único elemento $r^{-1} \in G$, tal que, $r \diamond r^{-1} = r^{-1} \diamond r = e$. Este elemento é denominado simétrico de r ou inverso de r.

Com isto estabelecido, uma representação deste grupo, novamente de acordo com Barata (2023), em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é uma aplicação que a cada elemento de G associa um operador linear inversível $\Pi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ que cumpra as seguintes propriedades:

1. $\Pi(r)\Pi(s) = \Pi(rs)$;
2. $\Pi(e) = \mathbb{1}$;
3. $\Pi(r^{-1}) = \Pi(r)^{-1}$,

para quaisquer $r, s \in G$. Podemos também entender uma representação como um homomorfismo entre G e o Grupo Linear Geral $GL(\mathbb{V})$[3], isto é, um mapeamento $\varphi : G \to GL(\mathbb{V})$, tal que $\varphi(r \diamond s) = \varphi(r) * \varphi(s)$.

[3] Grupo formado pelas matrizes inversíveis com a operação de matrizes usual $*$.

Podemos estender esse conceito para definir as representações de raio, de acordo com Bargmann (1954) uma representação de raio de um grupo G com elementos $r, s, \cdots$ e o elemento neutro e, é um mapeamento[4] $r \to \mathbf{U_r}$ do grupo em raios operatoriais unitários, tal que

$$\mathbf{U_r U_s} = \mathbf{U_{rs}}, \tag{2.10}$$

com r, $s \in G$. Temos ainda que

$$\mathbf{U_e} = \mathbb{1} \tag{2.11}$$

e

$$\mathbf{U_r^{-1}} = (\mathbf{U_r})^{-1}. \tag{2.12}$$

Os conceitos explorados no âmbito das distâncias na seção 2.1 serão utilizados para o estabelecimento de continuidade, esta continuidade é nomeada como continuidade forte, por ser definida a partir de uma função distância. Desta forma, uma representação de raio é dita contínua se:

Para um elemento qualquer $r \in G$ um raio qualquer $\mathbf{\Psi}$ e um $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança[5] *$\mathcal{V}$ de r em G tal que $d(\mathbf{U_s \Psi}, \mathbf{U_r \Psi}) < \epsilon$ se $s \in \mathcal{V}$.*

Motivado por essa definição, é válido explorar a continuidade dos representativos para uma dada representação, para isso iremos investigar um teorema demonstrado por Wigner (1939) seguindo os passos de Bargmann (1954) e do trabalho de Hoff da Silva and da Rocha (2021).

Teorema 1. *Dada uma representação de raio contínua, para todo elemento r de uma vizinhança $\mathcal{V}_0$ do elemento e de G, escolhida de forma adequada, pode ser escolhido um conjunto contínuo de representativos $U_r \in \mathbf{U_r}$.*

Em outras palavras, dado um vetor ψ arbitrário, um elemento $r \in \mathcal{V}_0$ e um $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de r tal que $||U_s\psi - U_r\psi|| < \epsilon$ se $s \in \mathcal{V}$. Os representativos que satisfazem esse teorema são chamados de representativos admissíveis.

Prova: Seja $\mathbf{\Psi}$ um raio fixo do espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ e $\psi \in \mathbf{\Psi}$. Vamos definir o representativo $g_r = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{U_r \Psi}$, de acordo com o Lema 1 o produto escalar é contínuo e assim a função g_r também é. Podemos escolher para um α fixo e positivo $(0 < \alpha < 1)$ uma vizinhança $\mathcal{V}_0$ do elemento unitário e de G tal que $\alpha < g_r \leq 1$ para todo $r \in \mathcal{V}_0$, isto é, limitamos o representativo.

Uma estratégia para a prova é selecionar um representativo determinado $U_r \in \mathbf{U_r}$, tal que

$$g_r = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{U_r \Psi} = (\psi, U_r\psi). \tag{2.13}$$

[4] Seguindo as definições de Bargmann (1954) lidaremos com grupos topológicos contínuos sem explicitar isso. Ainda, todo homomorfismo (ou isomorfismo) de um grupo em outro será assumido contínuo.

[5] Se $x \in X$, uma vizinhança $\mathcal{V}$ de x é um conjunto $\mathcal{V} \subset X$ que contém x e um conjunto aberto de x.

Como mencionado o conceito de continuidade será explorado a partir das distâncias, então a distância associada a ψ será dada por

$$d_{r,s}(\psi) = d(\mathbf{U_r\Psi}, \mathbf{U_s\Psi}). \tag{2.14}$$

Além disso, vamos denotar o produto escalar envolvendo os operadores associados aos elementos r e s como

$$\sigma_{r,s}(\psi) = (U_r\psi, U_s\psi), \tag{2.15}$$

e definir

$$Z_{r,s}(\psi) = U_s\psi - \sigma_{r,s}(\psi)U_r\psi, \tag{2.16}$$

onde r, s são elementos de $\mathcal{V}_0$. Notemos que ao calcular o produto interno entre $Z_{r,s}(\psi)$ e $U_r\psi$ obtemos

$$(U_r\psi, Z_{r,s}(\psi)) = (U_r\psi, U_s\psi) - \sigma_{r,s}(\psi)(U_r\psi, U_r\psi), \tag{2.17}$$

reconhecendo (2.15) e o fato de U_r ser unitário, temos

$$(U_r\psi, Z_{r,s}(\psi)) = 0. \tag{2.18}$$

Portanto, $Z_{r,s}(\psi)$ e $U_r\psi$ são ortogonais. Vejamos o que fornece o cálculo de $||Z_{r,s}(\psi)||^2$,

$$||Z_{r,s}(\psi)||^2 = (U_s\psi - \sigma_{r,s}(\psi)U_r\psi, U_s\psi - \sigma_{r,s}(\psi)U_r\psi), \tag{2.19}$$

$$||Z_{r,s}(\psi)||^2 = (U_s\psi, U_s\psi) - (U_s\psi, \sigma_{r,s}(\psi)U_r\psi) - (\sigma_{r,s}(\psi)U_r\psi, U_s\psi - \sigma_{r,s}(\psi)U_r\psi). \tag{2.20}$$

Como U_s é unitário, ao reescrever o último termo do lado direito como $(\sigma_{r,s}(\psi)U_r\psi, Z_{r,s})$, se tem

$$||Z_{r,s}(\psi)||^2 = 1 - \sigma_{r,s}(\psi)(U_s\psi, U_r\psi) - (\sigma_{r,s}(\psi)U_r\psi, Z_{r,s}(\psi)), \tag{2.21}$$

com 2.18 e notando que $\sigma_{r,s}(\psi)^* = (U_s\psi, U_r\psi)$ a expressão para $||Z_{r,s}(\psi)||^2$ se torna

$$||Z_{r,s}(\psi)||^2 = 1 - |\sigma_{r,s}(\psi)|^2. \tag{2.22}$$

Podemos elevar a relação (2.9) ao quadrado, isolar $\mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Phi}$ e elevar ao quadrado novamente, obtendo assim

$$1 - d^2(\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi}) + \frac{d^4(\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi})}{4} = (\mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Phi})^2. \tag{2.23}$$

Ao rearranjar, temos

$$1 - (\mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Phi})^2 = d^2\left(1 - \frac{1}{4}d^2\right) \leq d^2, \tag{2.24}$$

onde $d = d(\mathbf{\Psi}, \mathbf{\Phi})$. De volta a (2.22), notando que $|\sigma_{r,s}(\psi)|^2 = |(U_r\psi, U_s\psi)|^2 = (\mathbf{U_r\Psi} \cdot \mathbf{U_s\Psi})^2$, ou seja,

$$||Z_{r,s}(\psi)||^2 = 1 - |\sigma_{r,s}(\psi)|^2 \leq d(\mathbf{U_r\Psi}, \mathbf{U_s\Psi}), \tag{2.25}$$

com uso de (2.14), conclui-se que

$$||Z_{r,s}(\psi)||^2 \leq d^2_{r,s}(\psi). \tag{2.26}$$

Para encontrar relações que dependam de U_s façamos a mudança de ψ por ϕ e o cálculo de $(\phi, Z_{r,s}(\phi))$, isto é

$$(\phi, Z_{r,s}(\phi)) = (\phi, U_s\phi - \sigma_{r,s}(\phi)U_r\phi), \tag{2.27}$$

ou ainda

$$(\phi, Z_{r,s}(\phi)) = (\phi, U_s\phi) - \sigma_{r,s}(\phi)(\phi, U_r\phi). \tag{2.28}$$

De acordo com (2.13), temos $g_s = (\phi, U_s\phi)$ e $g_r = (\phi, U_r\phi)$, portanto

$$(\phi, Z_{r,s}(\phi)) = g_s - \sigma_{r,s}(\phi)g_r, \tag{2.29}$$

de modo que

$$-\sigma_{r,s}(\phi) = \frac{1}{g_r}[-g_s + (\phi, Z_{r,s}(\phi))], \tag{2.30}$$

podemos somar 1 em ambos os lados, o que fornece

$$1 - \sigma_{r,s}(\phi) = \frac{1}{g_r}[g_r - g_s + (\phi, Z_{r,s}(\phi))]. \tag{2.31}$$

De (2.6)

$$||\psi - \phi||^2 \leq 2|1 - (\psi, \phi)|. \tag{2.32}$$

Utilizando esta relação para o caso de interesse, temos que

$$||U_s\phi - U_r\phi||^2 \leq 2|1 - (U_r\phi, U_s\phi)| = 2|1 - \sigma_{r,s}(\phi)|, \tag{2.33}$$

desta forma, (2.31) se torna

$$||U_s\phi - U_r\phi||^2 \leq 2\left|\frac{1}{g_r}[g_r - g_s + (\phi, Z_{r,s}(\phi))]\right|. \tag{2.34}$$

Finalmente, temos uma relação envolvendo a distância entre dois vetores. Além disso, perceba que $g_r > \alpha$ e assim $\frac{1}{g_r} < \frac{1}{\alpha}$. Logo,

$$||U_s\phi - U_r\phi||^2 \leq \frac{2}{\alpha}[|g_r - g_s| + |(\phi, Z_{r,s}(\phi))|]. \tag{2.35}$$

Utilizando a desigualdade triangular para estudar o comportamento de $|g_r - g_s| = |(\phi, U_r\phi) - (\phi, U_s\phi)|$, temos

$$|(\phi, U_r\phi) - (\phi, U_s\phi)| \leq ||(\phi, U_r\phi)|| - ||(\phi, U_s\phi)||, \tag{2.36}$$

e a desigualdade de Cauchy-Schwarz[6], por sua vez, fornece

$$||(\phi, U_r\phi)|| - ||(\phi, U_s\phi)|| \leq ||\phi||||U_r\phi|| - ||\phi||||U_s\phi||, \tag{2.37}$$

como ϕ é unitário, então

$$|g_r - g_s| \leq ||U_r\phi - U_s\phi|| \leq d_{r,s}(\phi). \tag{2.38}$$

[6] Dados dois vetores u, v pertencentes a um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com produto interno $\cdot : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos fornece $||u \cdot v|| < ||u||.||v||$.

Já o termo restante, pela desigualdade de Schwarz, $|(\phi, Z_{r,s}(\phi)| \leq ||\phi||||Z_{r,s(\phi)}||$ ao utilizar a unitariedade de ϕ e (2.26), temos $|(\phi, Z_{r,s}(\phi)| \leq d_{r,s}(\phi)$. Então

$$||U_s\phi - U_r\phi||^2 \leq \frac{2}{\alpha}[d_{r,s}(\phi) + d_{r,s}(\phi)], \tag{2.39}$$

$$||U_s\phi - U_r\phi||^2 \leq \frac{4}{\alpha}d_{r,s}(\phi). \tag{2.40}$$

A relação (2.40), por si só, já estabelece a continuidade de $U_r\phi$, pois para todo $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de r tal que $\frac{4}{\alpha}d_{r,s}(\phi) < \epsilon$ se $s \in \mathcal{V}$, ou seja, $d_{r,s}(\phi)$ tem um valor máximo limitado. Porém, este procedimento é suficiente para provar que apenas $U_r\phi$, e qualquer vetor colinear ao mesmo, possui continuidade forte. Para abranger todo o espaço, Wigner prova a continuidade forte para um vetor ortogonal a este.

Seja $\chi = 2^{-\frac{1}{2}}(\phi + \varphi)$, onde ϕ e φ são ortogonais e χ é unitário. Desta forma

$$(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)) = (U_r\phi, U_s\chi) - \sigma_{r,s}(\chi)(U_r\phi, U_r\chi), \tag{2.41}$$

somando e subtraindo $(U_s\phi, U_s\chi)$ em ambos os lados teremos

$$(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)) = (U_r\phi, U_s\chi) - \sigma_{r,s}(\chi)(U_r\phi, U_r\chi) - (U_s\phi, U_s\chi) + (U_s\phi, U_s\chi). \tag{2.42}$$

Os termos $(U_r\phi, U_s\chi)$ e $-(U_s\phi, U_s\chi)$ podem ser rearranjados de tal forma a

$$(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)) = (U_r\phi - U_s\phi, U_s\chi) + (U_s\phi, U_s\chi) - \sigma_{r,s}(\chi)(U_r\phi, U_r\chi), \tag{2.43}$$

como U_s é unitário, $(U_s\phi, U_s\chi) = (\phi, U_{s^{-1}}U_s\chi) = (\phi, \chi) = 2^{-\frac{1}{2}}$, e o mesmo ocorre para $(U_r\phi, U_r\chi)$, portanto

$$(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)) = (U_r\phi - U_s\phi, U_s\chi) + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_{r,s}(\chi). \tag{2.44}$$

Ao escrever $(U_r\phi - U_s\phi, U_s\chi)$ como $-(U_s\phi - U_r\phi, U_s\chi)$, a relação anterior se torna

$$(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)) + (U_s\phi - U_r\phi, U_s\chi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sigma_{r,s}\chi), \tag{2.45}$$

$$1 - \sigma_{r,s}(\chi) = \sqrt{2}\Big[(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi) + (U_s\phi - U_r\phi, U_s\chi)\Big]. \tag{2.46}$$

Assim como anteriormente, utilizando (2.32)

$$||U_s\chi - U_r\chi||^2 \leq 2|1 - \sigma_{r,s}(\chi)|. \tag{2.47}$$

Logo,

$$2|1 - \sigma_{r,s}(\chi)| = 2^{\frac{3}{2}}\Big[|(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi))| + |(U_s\phi - U_r\phi, U_s\chi)|\Big], \tag{2.48}$$

pela desigualdade de Schwarz $|(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)| \leq d_{r,s}(\chi)$ e $|(U_s\phi - U_r\phi, U_s\chi)| \leq ||U_s\phi - U_r\phi||$. E, por fim, a distância obedece a seguinte relação

$$||U_s\chi - U_r\chi||^2 \leq 2^{\frac{3}{2}}\Big[d_{r,s}(\chi) + ||U_s\phi - U_r\phi||\Big]. \tag{2.49}$$

A equação (2.49) mostra que a continuidade de $U_r\phi$, provada anteriormente, implica a continuidade de $U_r\chi$ e também a continuidade de $U_r\varphi$. Para finalizar, se ψ é uma combinação linear de ϕ e φ ($\psi = \lambda_1\varphi + \lambda_2\phi$) é evidente que $U_r\psi$ é contínuo. □

No que tange a escolha de representativo[7] feita em (2.13), poderíamos trabalhar com $\tilde{g}_r = |(\psi, U_r\psi)|$ definido em $\mathcal{V}_0$, de acordo com a definição do produto entre raios de (2.5). Ao fazer isso, haveríamos uma única sutileza na relação (2.15), caso $|1-\sigma_{r,s}(\psi)| \geq |1-|\sigma_{r,s}(\psi)||$. Se $||1-\sigma_{r,s}(\psi)| > |1-|\sigma_{r,s}(\psi)||$, temos uma tautologia ao pode escolher os representativos de modo que $U_r\phi$ respeite (2.40). Por outro lado, se $|1-\sigma_{r,s}(\psi)| = |1-|\sigma_{r,s}(\psi)||$, caímos diretamente no caso trabalhado.

Os operadores em Mecânica Quântica funcionam como uma réplica matemática da medição realizada em laboratório. Para que isso esteja de acordo, não podem haver descontinuidades na atuação do objeto responsável por esta conexão. Este teorema nos garante que é possível, localmente, encontrar operadores aos quais a atuação em vetores de estado é contínua, corroborando a utilização de tais objetos como retrato da ação de medir na natureza. Mais adiante será demonstrado que, em certos tipos de grupo, é possível selecionar tais representativos por todo o grupo, o que elimina de vez a possibilidade de descontinuidade nas atuações dos operadores em Mecânica Quântica.

Além disso, para um dado conjunto de representativos U_r admissíveis, podemos adicionar mais uma fase aos representativos. Em uma vizinhança $\mathcal{V}_0$ de $e \in G$, se $\phi(r)$ é uma fase complexa unimodular contínua do elemento r na vizinhança $\mathcal{V}_0$, então podemos escrever

$$U'_r = \phi(r)U_r. \tag{2.50}$$

Esta relação define um conjunto de representativos admissíveis em $\mathcal{V}_0$. O inverso também é válido: uma equação da forma (2.50) deve conter uma vizinhança $\mathcal{V}_1$ contida na intersecção entre a vizinhança $\mathcal{V}_0$, onde o conjunto U_r é definido, e a vizinhança onde U'_r é definido $\mathcal{V}_1$.

2.2 Fatores e Expoentes Locais

Uma representação de raio, como definido na seção anterior, é o mapeamento dos elementos do grupo em raios operatoriais tal que

$$\mathbf{U_r U_s = U_{rs}}, \tag{2.51}$$

porém, do ponto de vista dos representativos temos

$$U_r U_s = \omega(r,s)U_{rs}, \tag{2.52}$$

onde $\omega(r,s)$ é uma fase complexa unimodular advinda do fato de U_rU_s e U_{rs} pertencerem ao mesmo raio. Esta fase recebe o nome de fator local, podemos ainda escrever a fase como

[7] Discussão feita em (Hoff da Silva and da Rocha, 2021).

uma função exponencial $\omega(r,s) = e^{i\xi(r,s)}$, onde $\xi(r,s)$ é o expoente local. As propriedades destas funções serão listadas e exploradas ao longo dessa seção, porém o estudo detalhado está contido em (Batista, 2023).

2.2.1 Fatores Locais

O fator local $\omega(r,s)$ é uma função complexa tal que:

1. *Se $\mathcal{V}_0$ é uma vizinhança do elemento unitário de G e assumindo $U_e = 1$, temos*

$$\omega(e,e) = 1; \tag{2.53}$$

2. *Para três elementos r, s e t pertencentes a vizinhança $\mathcal{V}_0$, adequadamente escolhida de modo que contenha os produtos rs, st e rst, a lei de associatividade $(U_rU_s)U_t = U_r(U_sU_t)$ implica*

$$\omega(r,s)\omega(rs,t) = \omega(s,t)\omega(r,st). \tag{2.54}$$

Estas propriedades decorrem diretamente de (2.52). Ainda explorando a continuidade forte demonstrada para os operadores, vejamos a seguinte proposição Hoff da Silva and da Rocha (2021):

Proposição 1. *Para uma dada representação de raio, a continuidade forte de um conjunto de representativos admissíveis implica a continuidade dos fatores locais.*

Prova: Comecemos a prova de maneira simples partindo da seguinte relação,

$$[\omega(r',s') - \omega(r,s)]U_{r's'}\psi = \omega(r',s')U_{r's'}\psi - \omega(r,s)U_{r's'}\psi, \tag{2.55}$$

onde $r,s,r',s' \in G$ e $\psi \in \mathscr{H}$. Como estratégia para rearranjar a relação anterior, vamos somar e subtrair $U_{r'}U_s\psi$ e $U_rU_s\psi$ de ambos os lados, assim

$$\begin{aligned}[\omega(r',s') - \omega(r,s)]U_{r's'}\psi = \\ = \omega(r',s')U_{r's'}\psi - \omega(r,s)U_{r's'}\psi + (U_{r'}U_s)\psi - (U_{r'}U_s)\psi + (U_rU_s)\psi - (U_rU_s)\psi.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Como $U_rU_s\psi = \omega(r,s)U_{r,s}$, temos

$$\begin{aligned}[\omega(r',s') - \omega(r,s)]U_{r's'}\psi = \\ = U_{r'}U_{s'}\psi - \omega(r,s)U_{r's'}\psi + \omega(r,s)U_{rs}\psi - U_rU_s\psi + U_{r'}U_s\psi - U_{r'}U_s\psi,\end{aligned} \tag{2.57}$$

podemos organizar os termos de tal forma que

$$[\omega(r',s') - \omega(r,s)]U_{r's'}\psi = \omega(r,s)(U_{rs} - U_{r's'})\psi + U_{r'}(U_{s'} - U_s)\psi + (U_{r'} - U_r)U_s\psi. \tag{2.58}$$

O interesse está na continuidade forte, para isso é necessário investigar a norma de (2.58). A desigualdade triangular fornece,

$$\begin{aligned} ||[\omega(r',s')-\omega(r,s)]U_{r's'}\psi|| \leq \\ \leq ||\omega(r,s)(U_{rs}-U_{r's'})\psi|| + ||U_{r'}(U_{s'}-U_s)\psi|| + ||U_s(U_{r'}-U_r)\psi||. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Note que para um $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\lambda Uf, \lambda Uf)^{\frac{1}{2}} = [\lambda\lambda^*(Uf,Uf)]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.60}$$

porém $\lambda\lambda^* = |\lambda|^2$, então $|\lambda|(Uf,Uf)^{\frac{1}{2}}$. Além disso, U é unitário, restando apenas $|\lambda|(f,U^{-1}Uf) = |\lambda|$. Desta forma, o lado esquerdo de (2.59) se torna

$$||[\omega(r',s')-\omega(r,s)]U_{r's'}\psi|| = |\omega(r',s')-\omega(r,s)|. \tag{2.61}$$

Como $\omega(r,s)$ é unimodular por definição e $U_{r'}$ é unitário, podemos simplificar o lado direito de (2.29) em dois passos (um para cada termo):
1. $||\omega(r,s)(U_{rs}-U_{r's'})\psi||$:

$$||\omega(r,s)(U_{rs}-U_{r's'})\psi|| = (\omega(r,s)U_{rs}\psi-\omega(r,s)U_{r's'}\psi, \omega(r,s)U_{rs}\psi-\omega(r,s)U_{r's'}\psi)^{\frac{1}{2}} \tag{2.62}$$

$$|\omega(r,s)|(U_{rs}\psi-U_{r's'}\psi, U_{rs}\psi-U_{r's'}\psi)^{\frac{1}{2}} = ||(U_{rs}-U_{r's'})\psi||. \tag{2.63}$$

2. $||U_{r'}(U_{s'}-U_s)\psi||$:

$$||U_{r'}(U_{s'}-U_s)\psi|| = (U_{r'}(U_{s'}-U_s)\psi, U_{r'}(U_{s'}-U_s)\psi)^{\frac{1}{2}} \tag{2.64}$$

$$(U_{r'}(U_{s'}-U_s)\psi, U_{r'}(U_{s'}-U_s)\psi)^{\frac{1}{2}} = ((U_{s'}-U_s)\psi, U_{r'^{-1}}U_{r'}(U_{s'}-U_s)\psi)^{\frac{1}{2}} \tag{2.65}$$

$$||U_{r'}(U_{s'}-U_s)\psi|| = ||(U_{s'}-U_s)\psi||. \tag{2.66}$$

Por fim, voltamos a expressão completa, agora simplificada

$$|\omega(r',s')-\omega(r,s)| \leq ||(U_{rs}-U_{r's'}\psi)|| + ||(U_{s'}-U_s)\psi|| + ||(U_{r'}-U_r)\psi||. \tag{2.67}$$

Podemos concluir que para um par de elementos r,s de G e um $\epsilon > 0$, deve existir uma vizinhança $\mathcal{V}_1$ tal que a distância $|\omega(r',s')-\omega(r,s)| < \epsilon$, sempre que os elementos r,s, e seus inversos pertencerem à $\mathcal{V}_1$. A continuidade dos representativos admissíveis fornece um limite superior para os fatores locais. □

De maneira geral, temos que qualquer função complexa unimodular $\omega(r,s)$ definida para os elementos $r,s \in \mathcal{V}$, sendo $\mathcal{V}$ uma vizinhança arbitrária de G, é um fator local se (2.53) e (2.54) são válidas sempre que os produtos $rs, st \in \mathcal{V}$. Se $\mathcal{V}$ coincide com G de forma que a relação (2.54) seja válida por todo o grupo, então $\omega(r,s)$ é dito um fator de G. Em uma linguagem menos abstrata, dizemos que a fase passa a ser global e não mais local.

Como mostrado na relação (2.50) podemos adicionar mais uma fase nos representativos, ao utilizá-los desta forma a equação (2.52) se torna

$$\phi(r)U_r\phi(s)U_s = \omega'(r,s)\phi(rs)U_{rs}, \tag{2.68}$$

com o uso da segunda propriedade dos fatores locais se tem

$$\omega'(r,s) = \frac{\omega(r,s)\phi(r)\phi(s)}{\phi(rs)}. \tag{2.69}$$

Dois fatores locais ω e ω' definidos em $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}'$, respectivamente, são ditos equivalentes se (2.69) se mantém válida em uma vizinhança $\mathcal{V}_1 \in (\mathcal{V} \cap \mathcal{V}')$. Como anteriormente, $\phi(r)$ é uma função complexa, e contínua de r, definida em ${\mathcal{V}_1}^2$ (vizinhança composta por todos os produtos [8] entre os elementos de $\mathcal{V}$). Além disso, seja $\mathcal{V}$ uma vizinhança onde ω é um fator local e $\phi(r)$ é definida em $\mathcal{V}^2$; uma função ω' obtida através da relação (2.69) é também um fator local definido em $\mathcal{V}$ desde que satisfaça as propriedades expostas em (2.53) e (2.54).

2.2.2 Expoentes Locais

É possível escrever $\omega(r,s) = e^{i\xi(r,s)}$ onde $\xi(r,s)$ é uma função real, esta função é o expoente local definido por (Bargmann, 1954) como:

Definição 1. *Um expoente local de um grupo G definido em uma vizinhança $\mathcal{V}$ é uma função real contínua $\xi(r,s)$ que é definida para todos os elementos r, s da vizinhança em questão e satisfaz as seguintes relações:*

$$\xi(e,e) = 0; \tag{2.70}$$

$$\xi(r,s) + \xi(rs,t) = \xi(s,t) + \xi(r,st), \qquad rs, st \in \mathcal{V}, \tag{2.71}$$

se $\mathcal{V}$ coincide com G, ξ é um expoente de G.

Estas relações são diretamente herdadas das propriedades satisfeitas pelos fatores locais, além disso, um expoente local deve satisfazer

$$\xi(r,e) = 0 = \xi(e,t), \tag{2.72}$$

$$\xi(r,r^{-1}) = \xi(r^{-1},r). \tag{2.73}$$

Ao escrevermos $\phi(r) = e^{x(r)}$, com $x(r)$ sendo uma função real e contínua definida em uma vizinhança ${\mathcal{V}_1}^2$, em (2.69) temos

$$\xi'(r,s) = \xi(r,s) + \Delta_{r,s}[x], \tag{2.74}$$

[8] A vizinhança ${\mathcal{V}_1}^2$ é sempre maior ou igual à vizinhança $\mathcal{V}_1$, uma vez que contém todos os produtos com o elemento neutro ($\mathcal{V}_1$) e os produtos entre todos os outros elementos.

com

$$\Delta_{r,s}[x] = x(r) + x(s) - x(rs). \tag{2.75}$$

A relação (2.74) é uma relação de equivalência, portanto expoentes locais definidos nas vizinhanças $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}'$ que satisfazem a relação (2.74) na vizinhança $\mathcal{V}_1 \subset (\mathcal{V} \cap \mathcal{V}')$ são ditos expoentes locais equivalentes. Ao estudarmos a extensão dos resultados para grupos específicos estaremos sempre trabalhando com a equivalência de expoentes locais, o objetivo principal é analisar quando temos $\xi \equiv 0$ e evidenciar quando não obtemos tal resultado.

Com a relação de equivalência (2.74) obtemos que se ξ' definido em $\mathcal{V}'$ é equivalente à ξ definido em $\mathcal{V}$, então ξ' é um expoente local em $\mathcal{V}$ também. Com essas ferramentas podemos analisar o primeiro resultado referente ao trabalho das fases:

Teorema 2. *Para uma representação de raio contínua de dimensão finita* $\mathbf{U_r}$ *de um grupo* G *todo fator local é equivalente a* 1.

Prova: Comecemos escrevendo $\omega(r,s) = e^{i\xi(r,s)}$ em (2.52), então $U_r U_s = e^{i\xi(r,s)} U_{rs}$. A dimensão do espaço da representação será denotada por n e o determinante de U_r será denotado por $D(r)$. A continuidade forte de U_r implica a continuidade de $D(r)$ e $|D(r)| = 1 = D(e)$. Tomando o determinante de $U_r U_s = e^{i\xi(r,s)} U_{rs}$, temos

$$D(r)D(s) = e^{in\xi(r,s)} D(rs). \tag{2.76}$$

Em uma vizinhança adequadamente escolhida é possível escrever $D(r) \equiv e^{i\gamma(r)}$ com funções reais e contínuas de tal modo que $\gamma(e) = 0$. Assim, (2.76) se torna

$$e^{i\gamma(r)} e^{i\gamma(s)} = e^{in\xi(r,s)} e^{i\gamma(rs)}, \tag{2.77}$$

de onde se tem

$$\xi(r,s) = \frac{\gamma(r)}{n} + \frac{\gamma(s)}{n} - \frac{\gamma(rs)}{n}. \tag{2.78}$$

Ao fazer $x(r) = -\frac{\gamma(r)}{n}$, temos para ξ'

$$\xi'(r,s) = \xi(r,s) + x(r) + x(s) - x(rs), \tag{2.79}$$

ou

$$\xi'(r,s) = \frac{\gamma(r)}{n} + \frac{\gamma(s)}{n} - \frac{\gamma(rs)}{n} - \frac{\gamma(r)}{n} - \frac{\gamma(s)}{n} + \frac{\gamma(rs)}{n}. \tag{2.80}$$

Desta forma,

$$\xi'(r,s) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \omega(r,s) \equiv 1. \tag{2.81}$$

Temos então que, localmente, para toda representação de raio contínua e de dimensão finita podemos remover a fase e trabalhar com atuações sucessivas dos operadores sem nenhum problema adicional. □

2.2.3 Classes de Equivalência de Expoentes Locais

É vantajoso se introduzir os expoentes locais, pois as relações de definição passam a ser lineares. Assim sendo, para dois expoentes locais ξ_1 e ξ_2 definidos em $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, respectivamente, qualquer combinação linear $\xi = \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2$ com coeficientes reais e constantes é também um expoente local em uma vizinhança $\mathcal{V}' \in (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)$. A partir da relação de equivalência entre expoentes locais e o fato de que se ξ é equivalente a ξ', então ξ é expoente na vizinhança que define o expoente ξ', podemos concluir que uma representação de raio de G determina uma única classe de equivalência de fatores (ou expoentes) locais cujos elementos dependem diretamente da seleção de representativos feita para representação em questão, já que a seleção determina a continuidade forte.

Podemos ainda, ao estudar uma combinação linear de expoentes locais, checar que a classe de equivalência desta combinação irá depender apenas da classe de equivalência dos expoentes locais. Seja a combinação linear,

$$\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2, \tag{2.82}$$

se o elemento ξ' é dado por $\xi'_i = \xi_i + \Delta[x_i]$ em uma vizinhança $\mathcal{V}_i$ com $i = 1, 2$, a relação de equivalência pode ser reescrita como

$$\alpha_1\xi'_1 + \alpha_2\xi'_2 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \Delta[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2]. \tag{2.83}$$

Logo, a equivalência da combinação linear depende apenas dos expoentes locais. Concluí-se, ainda, que as classes de equivalência de expoentes locais de um grupo G formam um espaço linear $\mathcal{V}$ sob o corpo das constantes reais α, os expoentes locais servem como base para um espaço vetorial em G.

2.2.4 Grupo Local

A importância e utilidade dos expoentes locais não está apenas associada a linearidade das relações que os definem, através de uma parametrização podemos construir um grupo unicamente determinado por um dado expoente local, tais grupos serão utilizados para o trabalho sutil de generalizar resultados válidos localmente.

Para uma dada representação de raio contínua, os representativos operatoriais formam um conjunto sob multiplicação. Seja U_r um conjunto de representativos admissíveis definidos em uma vizinhança $\mathcal{V}_0$ e $\mathcal{V}^2$ é uma vizinhança de produtos contida em $\mathcal{V}_0$, podemos expressar os operadores contidos em $\mathbf{U_r}$ na forma

$$e^{i\theta}U_r, \tag{2.84}$$

onde θ é um parâmetro real[9]. Se $r, s \in \mathcal{V}$, temos

$$(e^{i\theta_1}U_r)(e^{i\theta_2}U_s) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}\omega(r,s)U_{rs}, \tag{2.85}$$

ou ainda

$$(e^{i\theta_1}U_r)(e^{i\theta_2}U_s) = e^{i(\theta_1+\theta_2+\xi(r,s))}U_{rs}. \tag{2.86}$$

Esta parametrização para os operadores nos leva a seguinte definição, segundo Pontryagin and Lehmer (1946):

Definição 2. *Seja ξ um expoente local de um grupo G definido em uma vizinhança $\mathcal{V}$. O grupo local H consiste no conjunto dos pares $\{\theta, r\}$ onde θ é um número real e r um elemento de $\mathcal{V}^2$.*

A multiplicação ($\circ$) de dois elementos $\{\theta_1, r\}$ e $\{\theta_2, s\}$ de H, se r e s pertencem a $\mathcal{V}$, é

$$\{\theta_1, r\} \circ \{\theta_2, s\} = \{\theta_1 + \theta_2 + \xi(r,s), rs\}. \tag{2.87}$$

O grupo local H é construído pelo expoente local ξ, uma vez que seus elementos são unicamente determinados por um dado expoente. Além disso, ao tomar um subgrupo a um parâmetro T pertencente ao centro[10] de H, isto é, elementos na forma

$$t(\theta) = \{\theta, e\}. \tag{2.88}$$

podemos escrever qualquer elemento de H como

$$\{\theta, r\} = \{0, r\} \circ \{\theta, e\} = \{\theta, e\} \circ \{0, r\}. \tag{2.89}$$

Os grupos locais são inseridos na teoria fornecendo dois grandes resultados: *i*) o grupo quociente H/T é localmente isomorfo ao grupo G, podemos assim trabalhar com o grupo quociente em função dos expoentes locais sem perder generalidade em relação ao grupo G, de maneira local; *ii*) dois grupos locais H e H', gerados por dois expoentes locais equivalentes ξ e ξ', são localmente isomorfos[11]. De posse de todas as ferramentas necessárias acerca do estudo em uma simples vizinhança da origem do grupo, estamos aptos para progredir em busca da extensão destes resultados e destas ferramentas para o grupo todo. Em suma, finalizamos o trabalho local com os seguintes resultados: podemos selecionar um conjunto de representativos de continuidade forte; para representações de dimensão finita é possível remover a fase localmente; construímos um grupo unicamente determinado pelos expoentes locais.

[9] Este θ está associado as cargas centrais, objeto crucial para o trabalho da representações projetivas em uma outra abordagem. Esta abordagem é explorada na seção 2.7 de Weinberg (1995) e vem sendo trabalhada.

[10] Um subgrupo central é aquele em que todos os seus elementos comutam com os elementos do grupo.

[11] Estes resultados são demonstrados detalhadamente, assim como as definições necessárias para o entendimento das demonstrações, em (Batista, 2023).

De forma menos abstrata, com estes resultados, pode-se executar operações em Mecânica Quântica sem ao menos fazer menção a existência das representações de raio (ou projetivas) localmente, o que usualmente é feito em cursos no nível da Graduação. O objetivo agora é, com o rigor até aqui estabelecido, generalizar o que foi obtido.

3 Extensão dos resultados locais e grupos contínuos

No presente capítulo, estaremos interessados em generalizar a validade dos resultados previamente obtidos, isto é, demonstrar que as relações que definem uma representação, um expoente local e também um conjunto de representativos admissíveis possuem validade por todo o grupo e não somente em uma vizinhança da origem. Todos estes resultados são detalhadamente explorados em Batista (2023) neste trabalho iremos expor de maneira sucinta, sem perda de informação, o procedimento para obtê-los.

Em um primeiro momento iremos abordar os grupos compactos em busca da demonstração da existência de uma representação compatível, dado um fator local ω, esta representação será dita induzida por ω. Após tal resultado, partiremos para o estudo dos grupos conexos e simplesmente conexos, tais grupos possuem propriedades que, assegurado por um teorema de Pontryagin and Lehmer (1946), nos permitem a extensão das representações, dos representativos admissíveis e dos expoentes locais. E por fim, aplicaremos os fundamentos da teoria para grupos contínuos, o que nos fornecerá fortes relações de equivalência entre os expoentes locais e os, ainda a ser definidos, expoentes infinitesimais.

3.1 Representações Compatíveis

Para provar o teorema a seguir será necessário utilizar o conceito de integração de grupos, para isso faremos a exigência de que o grupo seja localmente compacto[1], isto é, localmente seus parâmetros variam em um intervalo fechado. Esta exigência versa sobre a garantia de que ao integrarmos um elemento do grupo, uma vez que o intervalo é fechado, o elemento integrado ainda pertencerá ao grupo. Além disso, o Teorema de Haar, abordado em Nachbin (1976), garante que para tais grupos podemos introduzir uma medida de integração invariante (Medida de Haar), garantindo a definição das integrais dentro do domínio do grupo. Esta condição também é satisfeita para todo grupo de Lie, como visto em Raczka and Barut (1986), estes que serão amplamente explorados ainda neste capítulo e representam boa parte dos grupos estudados em física.

Partiremos de uma representação de raio contínua de G, na qual podemos escolher um conjunto de representativos admissíveis por todo o grupo (este resultado ainda será demonstrado). De acordo com a Proposição 1, teremos ω definido por todo o grupo.

[1] A exigência é de que o grupo seja ao menos localmente compacto, para exemplos de grupos que são localmente compactos mas não são compactos ver Russo (2010).

Queremos demonstrar a inversa, isto é, dado um fator ω definido por todo o grupo é possível construir um conjunto de operadores U_r, de continuidade forte, que satisfaça (2.52), ou seja, uma representação de raio contínua compatível. Vejamos o seguinte teorema:

Teorema 3. *Para todo fator ω de um grupo localmente compacto G existe uma representação de raio contínua de G compatível com ω.*

Prova: Seja dt uma medida de integração invariante à esquerda em G e seja $\mathbb{H}$ o conjunto de todas as funções de quadrado integrável $f(t)$ em G. Temos

$$(f,g) = \int_G f(t)^* g(t) dt, \tag{3.1}$$

onde $f(t)^*$ representa o conjugado complexo de $f(t)$. Para um dado $\omega(r,s)$, define-se

$$g = U_r f, \tag{3.2}$$

através de $g(t) = \omega(r, r^{-1}t) f(r^{-1}t)$, ou ainda, após um reescalonamento,

$$g(rt) = \omega(r,t) f(t). \tag{3.3}$$

O procedimento realizado para a prova, consiste em checar as propriedades que os operadores U_r possuem, em busca de construir uma representação. Comecemos pela unitariedade, buscando a inversa de U_r, pois por (3.2) nota-se que determinar $f(t)$ é determinar a inversa de U_r. Ao multiplicar (3.3) por $\omega(r,t)^*$, obtemos

$$\omega(r,t)^* g(rt) = \omega(r,t)^* \omega(r,t) f(t). \tag{3.4}$$

Porém, $\omega(r,t)$ é uma função complexa e unimodular, logo $f(t) = \omega(r,t)^* g(rt)$. Utilizando (3.1), podemos encontrar o valor do módulo de $|g(t)|$,

$$(g,g) = \int_G g(t)^* g(t) dt = \int_G \Big[\omega(r, r^{-1}t) f(r^{-1}t)\Big]^* \Big[\omega(r, r^{-1}t) f(r^{-1}t)\Big] dt, \tag{3.5}$$

e novamente, como $|\omega| = 1$, teremos $(g,g) = \int_G |g(t)|^2 dt = \int_G |f(r^{-1}t)|^2 dt$. Ao fazer $k = r^{-1}t$, o módulo de g se torna

$$\int_G |f(r^{-1}t)|^2 dt = \int_G |f(k)|^2 dk, \tag{3.6}$$

devido a invariância da medida dt. Assim, $(g,g) = (U_r f, U_r f) = (f,f)$. E portanto, U_r é unitário.

Para que tenhamos uma representação é necessário obter as relações (2.10) e (2.11). Começando por $U_e = 1$ podemos escrever $\omega(e,t)$ utilizando o expoente local, assim $\omega(e,t) = e^{i\xi(e,t)}$. Porém, de (2.54) temos que $\xi(e,t) = 0$. Desta forma,

$$U_e U_t = U_{et} = U_t, \tag{3.7}$$

assim, $U_e = 1$.

Por fim, estes operadores devem satisfazer a relação que define uma representação, para isso vamos introduzir, de acordo com Bargmann (1954),

$$h = U_r g \qquad ; \qquad g = U_s f. \tag{3.8}$$

Através de (3.3), tem-se $g(st) = \omega(s,t)f(t)$. Logo,

$$h = U_r g = U_r U_s f = U_r g(st) = h(r(st)), \tag{3.9}$$

e novamente por (3.3),

$$h(r(st)) = \omega(r,st)g(st) = \omega(r,st)\omega(s,t)f(t) \tag{3.10}$$

ao fazer o uso da lei de associatividade (2.54), obtemos

$$h(r(st)) = \omega(r,st)\omega(s,t)f(t) = \omega(r,s)\omega(r,st)f(t). \tag{3.11}$$

Definindo agora $k = \omega(rs,t)f(t)$, a relação anterior se torna $h = U_r g = \omega(r,s)k$. Pela forma de h e (3.2),

$$U_r U_s f = \omega(r,s)U_{rs}f, \tag{3.12}$$

ou ainda, independente de f, $U_r U_s = \omega(r,s)U_{rs}$.

Tais operadores são responsáveis por construir uma representação, compatível com o fator local dado. Podemos alterar a equação (3.3) para $g(t) = \omega(r, r^{-1}t)f_1(t)$, onde $f_1(t) = V_r f(t)$ e os operadores V_r são responsáveis por definir a representação regular do grupo, sendo esta de continuidade forte por definição. O fator ω herda a forte continuidade dos representativos admissíveis (Proposição 1), de modo a não afetar a forte continuidade de V_r e implicar a forte continuidade dos operadores U_r.

Assim, o conjunto de operadores U_r cumpre os requisitos necessários para fornecer uma representação de raio contínua. A partir de um dado ω foi construída uma representação de raio contínua. Portanto, dizemos que a representação $\mathbf{U_r}$ é compatível com ω. □

3.2 Representações de grupos conexos e simplesmente-conexos

Desta seção em diante, o grupo G será assumido como localmente conexo, condição esta satisfeita para todo grupo de Lie. Um grupo é dito conexo se não for a união de dois subconjuntos vazios distintos. Além disso, um grupo em que todo caminho que conecta dois elementos possa ser continuamente contraído a um ponto é dito um grupo simplesmente conexo, de maneira pictórica dizemos que o grupo não possui buracos.

Para fundamentação desta abordagem, vamos trabalhar com representações ordinárias[2]. Seja então r um elemento do grupo G, uma propriedade dos grupos conexos é que todo elemento pode ser expresso como o produto finito[3]

$$r = r_1 r_2 \cdots r_n \qquad (r_i \in \mathcal{M}), \tag{3.13}$$

em que r_i são os elementos de uma vizinhança $\mathcal{M}$ do grupo, escolhida arbitrariamente, fixa. Isto é, podemos obter um dado elemento r por meio de transformações sucessivas r_i. A conexidade desempenha seu papel ao notarmos que caso o grupo não fosse conexo, não seria possível estabelecer esse caminho de transformações sucessivas.

3.2.1 Extensão de um representação local

Em busca da extensão das representações é necessário definir uma representação local, de acordo com Bargmann (1954), que será nosso ponto de partida.

Definição 3. *Uma representação local unitária de um grupo G, definida em uma vizinhança $\mathcal{V}$, é um mapeamento de $\mathcal{V}^2$ em operadores unitários V_r ($r \in \mathcal{V}^2$), tal que $V_r V_s = V_{rs}$ se r e s pertencem a $\mathcal{V}$.*

Se além de conexo, o grupo G for simplesmente conexo, uma representação local pode ser estendida para uma representação por todo o grupo, de acordo com Pontryagin and Lehmer (1946) pelo seguinte teorema[4]:

Teorema 4. *Sejam G e G' dois grupos conexos, com G localmente conexo e simplesmente conexo. Seja f um homomorfismo local $f : G \to G'$ definido em uma vizinhança $\mathcal{V}$ do elemento unitário de G, é possível estender unicamente o homomorfismo local f para um homomorfismo φ de todo o grupo G em todo o grupo G' se f e φ coincidem em uma vizinhança $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$. Se f é um isomorfismo local, então φ também o é.*

Como uma tentativa de simplificar a abstração do teorema, uma vez que a aplicação inicial $f : G \to G'$, definida localmente, coincide com a aplicação global φ, podemos trabalhar com φ por todo o grupo, já que o mesmo é conexo e simplesmente conexo.

Uma das formas de se entender as representações de grupo é através de sua definição como um homomorfismo, sendo assim temos que para toda representação local V_r de G, simplesmente conexo, existe uma vizinhança $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$ tal que:

$$V_{r_1} V_{r_2} \cdots V_{r_n} = V_{r'_1} V_{r'_2} \cdots V_{r'_m} \qquad (r_i \in \mathcal{V}^*, r'_i \in \mathcal{V}^*) \tag{3.14}$$

se $r_1 r_2 \cdots r_n = r'_1 r'_2 \cdots r'_m$. Isto é, existe uma vizinhança na qual as representações coincidem, assim temos o seguinte:

[2] Representações de um grupo finito sob o corpo dos números complexos.
[3] Ver teorema 15 de Pontryagin and Lehmer (1946).
[4] A prova deste teorema está nas páginas 228 - 231 de Pontryagin and Lehmer (1946).

Lema 2. *Para uma representação local e unitária V_r de um grupo conexo e simplesmente conexo G, definida em $\mathcal{V}$, existe uma representação unitária unicamente determinada W_r de todo o grupo G, que coincide com a representação local em alguma vizinhança $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$. Essa representação possui continuidade forte desde que a representação local possua.*

Prova: Seja W_r uma representação de G que coincide com V_r em alguma vizinhança $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$. Como G é conexo podemos expressar r como o produto finito mencionado, então a representação pode ser escrita na forma $W_r = W_{r_1} W_{r_2} \cdots W_{r_n}$. Na vizinhança $\mathcal{M}$, as representações coincidem, o que é expresso por $W_{r_i} = V_{r_i}$, nos permitindo escrever

$$W_r = V_{r_1} V_{r_2} \cdots V_{r_n} \qquad (r_i \in \mathcal{M}). \tag{3.15}$$

Para que W_r seja uma representação unicamente determinada de interesse, precisamos garantir três elementos: existência, unicidade e continuidade forte.

Começando pela garantia de que tal representação de fato existe, podemos utilizar (3.15) para definir W_r, com $\mathcal{V}^* = \mathcal{M}$. Se $r \in \mathcal{V}^*$, temos que $W_r = V_r$ e, além disso, sejam $r = r_1 \cdots r_n$ e $s = s_1 \cdots s_m$, então $rs = r_1 \cdots r_n s_1 \cdots s_m$, e, portanto

$$W_{rs} = V_{r_1} \cdots V_{r_n} V_{s_1} \cdots V_{s_m}. \tag{3.16}$$

A propriedade da representação $W_{rs} = W_r W_s$ é uma consequência imediata, logo, W_r existe.

Para verificação se existe uma única representação W_r, seja W'_r outra representação que também coincide com V_r numa vizinhança $\mathcal{M}' \subset \mathcal{V}$. Por (3.15), tal representação será dada por

$$W'_r = V_{r_1} V_{r_2} \cdots V_{r_n}, \tag{3.17}$$

podemos escolher uma vizinhança $\mathcal{M}_1 \subset (\mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$, uma vez que W'_r coincide com V_r em $\mathcal{M}'$ e W_r coincide com V_r em $\mathcal{M}$, ao aplicar (3.15) na vizinhança $\mathcal{M}_1$, obtemos

$$W'_r = V_{r_1} V_{r_2} \cdots V_{r_n} = W_r. \tag{3.18}$$

Isto é, existe uma única representação W_r.

Por último, para continuidade forte de W_r, vamos assumir V_r de continuidade forte e os elementos r e s próximos o suficiente tal que $r^{-1}s \in \mathcal{V}^*$ assim, para um vetor f arbitrário, temos que

$$||(W_s - W_r)f|| = ||(W_r(W_{r^{-1}s} - 1)f||, \tag{3.19}$$

como W_r é unitária e coincide com V_r, esta expressão pode ser reescrita por

$$||(W_{r^{-1}s} - 1)f|| = ||(V_{r^{-1}s} - 1)f||. \tag{3.20}$$

Podemos expressar a condição de continuidade forte da representação W_r em termos da representação local V_r, esta já possuindo forte continuidade. Logo, a continuidade forte de V_r implica a continuidade forte de W_r. □

Podemos, também, analisar as representações de G induzidas pelas representações ordinárias. Seja $\mathbf{U_r}$ uma representação ordinária de G, qualquer representação unitária de continuidade forte de G dá origem a uma representação de raio contínua unicamente determinada de G (esta é dita ser induzida por U_r). Uma vez que a representação é ordinária, isto é, de dimensão finita, temos o caso abordado no Teorema 2, para os representativos U_r o fator ω é igual à 1 e consequentemente, qualquer fator local da representação de raio induzida é também equivalente à 1. Como consequência do Lema 2, temos teorema a seguir:

Teorema 5. *Qualquer representação de raio contínua* $\mathbf{U_r}$ *de um grupo conexo e simplesmente conexo* G *com fator local equivalente a* 1 *é induzida por uma representação unitária e fortemente contínua* U_r *de* G*.*

Prova: Suponha que exista um conjunto de representativos admissíveis $U_r \in \mathbf{U_r}$ $(r \in \mathcal{V}^2)$ tal que $U_rU_s = U_{rs}$ com $(r, s \in \mathcal{V})$, logo U_r é uma representação local de G. Seja U'_r $(r \in G)$ a representação de G construída de acordo com (3.15), isto é, $U'_r = U_{r_1}U_{r_2}\cdots U_{r_n}$. Note que podemos reescrever tal representação como

$$U'_r = 1.U_{r_1}U_{r_2}\cdots U_{r_n} = e^{i(\alpha_1+\cdots+\alpha_n-\alpha_1-\cdots-\alpha_n)}U_{r_1}U_{r_2}\cdots U_{r_n} \tag{3.21}$$

ou ainda

$$U'_r = e^{i\alpha_1}U_{r_1}\cdots e^{i\alpha_n}U_{r_n}, \tag{3.22}$$

obtendo uma forma similar aos representativos (2.50), sendo assim

$$U'_r \in \mathbf{U_{r_1}}\cdots\mathbf{U_{r_n}} = \mathbf{U_r}, \tag{3.23}$$

concluindo que $\mathbf{U'_r}$ é induzida por $\mathbf{U_r}$. □

Este teorema, nos sugere o seguinte corolário:

Corolário 1. *Qualquer representação de raio de dimensão finita de um grupo conexo e simplesmente conexo* G *é induzida por uma representação contínua unitária de* G*.*

Portanto, para os grupos conexos e simplesmente conexo podemos estender uma dada representação local para uma representação por todo o grupo, isto assegurado pelo Teorema 4. E deste resultado, decorre-se a indução das representações de raio com forte continuidade a partir de representações unitárias do grupo (Teorema 5). Estes dois teoremas nos possibilitam generalizar toda a discussão, acerca das representações de raio, do âmbito local para o global. O próximo passo será, utilizando o mesmo procedimento (assegurado pelo Teorema 4), estudar a generalização dos representativos admissíveis.

3.2.2 Extensão de uma seleção local de representativos

A extensão de um conjunto de representativos admissíveis é baseada nos resultados obtidos para os grupos locais (seção 2.2.4) e é abordada no seguinte teorema:

Teorema 6. *Seja G um grupo conexo e simplesmente conexo, ω um fator definido em todo o grupo e $\mathbf{U_r}$ uma representação de raio contínua tal que o fator local definido por um conjunto de representativos admissíveis U_r, escolhido de forma adequada, coincida com ω em alguma vizinhança $\mathcal{V}$. Então existe um conjunto de representativos admissíveis, determinado unicamente, U'_r definido por todo o grupo, tal que $U'_rU'_s = \omega(r,s)U_{rs}$ para todo r, s e $U'_r = U_r$ em alguma vizinhança $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$.*

Prova: Seja ξ um expoente local de G definido em $\mathcal{V}$, como G é conexo e simplesmente conexo a equação

$$\omega(r,s) = e^{i\xi(r,s)} \tag{3.24}$$

possui uma única[5] solução contínua $\xi(r,s)$, para todo $r,s \in G$, que cumpre as relações que definem um expoente local de G. Como H é construído a partir dos expoentes locais de G, o mesmo é conexo e simplesmente conexo.

Ao aplicar o Lema 2 ao grupo local H teremos, para $\bar{r} = \{\theta, r\}$, que $V_{\bar{r}} = V(\theta,r) = e^{i\theta}U_r$ $(r \in \mathcal{V}^2)$. Através de (2.87) e utilizando a forma $e^{i\theta}U_r$ em (2.52),

$$(e^{i\theta}U_r)(e^{i\theta'}U_s) = e^{i(\theta+\theta')}\omega(r,s)U_{rs} = e^{i(\theta+\theta'+\xi(r,s))}U_{rs}, \tag{3.25}$$

podemos concluir que V_r é uma representação local unitária de H definida em uma vizinhança $\mathcal{M}$ $(-\infty < \theta < \infty, r \in \mathcal{V})$.

Ao utilizar (3.15), temos uma representação $W_r = W(\theta,r)$, unitária de continuidade forte em H. Esta coincide com V_r em alguma vizinhança $\mathcal{M}^*$, onde $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}$, o que garante a finitude de θ. Certamente, uma vizinhança $\mathcal{M}'$ da forma $(-c < \theta < c, r \in \mathcal{V}^*)$ também está contida em $\mathcal{M}^*$ para que seja possível escolher c e $\mathcal{V}^*(\subset \mathcal{V})$, o que confirma a unicidade de W_r como visto no Lema 2.

Podemos representar qualquer elemento $\{\theta, r\}$ de H, por (2.89), então para todo θ

$$\{\theta, e\} = \{\theta_1, e\}^n, \tag{3.26}$$

onde $\theta_1 = \frac{\theta}{n}$ e $|\theta| < c$. Desta forma, pela relação (3.15), temos

$$W(\theta,e) = (V(\theta_1,e))^n = (e^{i\theta_1}U_e)^n, \tag{3.27}$$

já que $U_e = 1$ e $\theta_1 = \frac{\theta}{n}$

$$W(\theta,e) = e^{i\frac{\theta}{n}n} = e^{i\theta}. \tag{3.28}$$

[5] O número de soluções aumentaria caso o grupo fosse, por exemplo, duplamente conexo.

Agora vamos definir um setor da representação que não depende de θ, $U'_r = W(0,r)$, de acordo com (2.87), assim $W(\theta,r)$ se torna

$$W(\theta,r) = W(\theta,e) \circ W(0,r). \tag{3.29}$$

Assim, para todo r,

$$W(\theta,r) = e^{i\theta}U'_r, \tag{3.30}$$

se $r \in \mathcal{V}^*$, então $U'_r = U_r$. Ao analisar o produto $\{0,r\} \circ \{0,s\}$, notamos que

$$\{0,r\} \circ \{0,s\} = \{0+0+\xi(r,s), rs\} = \{\xi(r,s), rs\}, \tag{3.31}$$

nos levando a

$$W(0,r)W(0,s) = U'_rU'_s = e^{i\xi(r,s)}U'_{rs} = \omega(r,s)U'_{rs}. \tag{3.32}$$

A propriedade da representação é obtida. Nos resta agora, verificar se os representativos U'_r pertencem à representação $\mathbf{U_r}$. Podemos escrever $r = r_1 \cdots r_n$ com $r_k \in \mathcal{V}^*$, e então $U'_{r_k} \in \mathbf{U_{r_k}}$. A relação (3.32) nos informa que se $U'_r \in \mathbf{U_r}$ e $U'_s \in \mathbf{U_s}$ então $U'_{rs} \in \mathbf{U_{rs}}$, já que $U'_{r_k} \in \mathbf{U_{r_k}}$, tem-se

$$U'_r \in \mathbf{U_{r_1}} \cdots \mathbf{U_{r_n}} = \mathbf{U_r}. \tag{3.33}$$

Portanto, qualquer conjunto U'_r, com as propriedades necessárias, define uma representação $W(\theta,r) = e^{i\theta}U'_r$ de H, de acordo com as relações (3.25), (3.30) e (3.32), esta é unicamente determinada. □

Com a prova deste teorema, temos que para o grupos conexos e simplesmente conexos a atuação de operadores se dá de maneira contínua em todo o grupo, e não apenas localmente. Por fim, veremos como estender os expoentes locais para estes grupos, finalizando a generalização dos resultados anteriormente obtidos.

3.2.3 Extensão de expoentes locais

Para trabalhar a extensão dos expoentes locais, teremos a seguinte definição, seguindo (Bargmann, 1954):

Definição 4. *Um expoente ξ_1 de G é chamado de extensão de um expoente local ξ de G se $\xi_1(r,s) = \xi(r,s)$ em alguma vizinhança.*

Assim como para extensão de um conjunto de representativos admissíveis, iremos utilizar as ferramentes referentes aos grupos locais para trabalhar os expoentes em busca de uma vizinhança na qual temos a coincidência entre o expoente local e o definido por todo grupo. Para este tópico, temos o teorema a seguir:

Teorema 7. *Sejam ξ e ξ' dois expoentes locais equivalentes de um grupo conexo e simplesmente conexo G, tal que $\xi' = \xi + \Delta(x)$ em alguma vizinhança, assuma os expoentes ξ_1 e ξ'_1 extensões de ξ e ξ', respectivamente. Então, para todo $r,s \in G$, temos que*

$\xi_1'(r,s) = \xi_1(r,s) + \Delta_{r,s}(x_1)$, *onde* $x_1(r)$ *é contínua em* r *e* $x_1 = x$ *em alguma vizinhança* $\mathcal{V}^*$.

Prova: Os expoentes ξ_1 e ξ_1' definem os grupos locais, conexos e simplesmente conexos, H_1 e H_1' com elementos $\bar{r}$ e $\bar{r}'$, respectivamente. Vamos parametrizar o grupo H_1, por

$$\theta' = \theta - x(r), \quad r' = r. \tag{3.34}$$

Esta parametrização define também um mapeamento local isomorfo $\bar{r}' = f(\bar{r})$ de H_1 em H_1', isto é

$$f(\bar{r}) = f(\theta, r) = \{\theta - x(r), r\} \qquad (r \in \mathcal{V}_1^2), \tag{3.35}$$

se $\mathcal{V}_1$ for adequadamente escolhida tal que tenhamos $\xi_1 = \xi$, $\xi_1' = \xi'$ e a relação de equivalência $\xi' = \xi + \Delta(x)$ satisfeitas. Assim como na extensão das representações, o isomorfismo (3.35) pode ser estendido para um isomorfismo $f_1(\bar{r}) = f_1(\theta, r) = \bar{r}'$ do grupo todo H_1 em H_1', em que $f_1(\bar{r})$ coincida com $f(r)$ em alguma vizinhança $\mathcal{M}^*$ $(-c < \theta < c, r \in \mathcal{V}^* \subset \mathcal{V})$ de H_1 (assegurado pelo Teorema 4). Pela relação (3.35), temos que

$$f_1(\theta, e) = f(\theta, e) = \{\theta - x(e), e\}, \tag{3.36}$$

com $x(e) = 0$, $f_1(\theta, e) = \{\theta, e\}$ para todo θ. Ao reescrever o elemento $f_1(0, r)$ como $f_1(0, r) = \{-x_1(r), g(r)\}$, com x_1 sendo uma função contínua em r e $g(r)$ um elemento do grupo G a ser determinado, a utilização de (2.89) nos fornece

$$f_1(\theta, r) = f_1(\theta, e) f_1(0, r) = \{\theta - x_1(r), r\}. \tag{3.37}$$

Realizando o cálculo de $f_1(0,r)f_1(0,s)$, teremos

$$f_1(0,r)f_1(0,s) = \{-x_1(r), g(r)\} \circ \{-x_1(s), g(s)\}, \tag{3.38}$$

$$f_1(0,r)f_1(0,s) = \{\xi_1' - x_1(r) - x_1(s), g(r)g(s)\}. \tag{3.39}$$

Uma vez que f_1 é um isomorfismo, tem-se que $f_1(0,r)f_1(0,s) = f_1[(0,r)\cdot(0,s)] = f_1(\xi_1, rs)$, portanto,

$$f_1(0,r)f_1(0.s) = \{\xi_1 - x_1(rs), rs\}. \tag{3.40}$$

Desta forma, $g(rs) = g(r)g(s)$, utilizando (3.35) podemos determinar $g(r)$ em (3.37) como $f(0,r) = f_1(0,r)$, logo

$$\{-x(r), r\} = \{-x_1(r), g(r)\} \quad \therefore \quad g(r) = r, \tag{3.41}$$

se $r \in \mathcal{V}^*$. Assim, as equações (3.39) e (3.40) nos fornecem $\{\xi_1' - x_1(r) - x_1(s), rs\} = \{\xi_1 - x_1(rs), rs\}$. A igualdade do primeiro termo resulta em

$$\xi_1' = \xi_1 + x_1(r) + x_1(s) - x_1(rs) \tag{3.42}$$

e por fim

$$\xi_1' = \xi_1 + \Delta_{r,s}(x_1). \tag{3.43}$$

Então temos $\xi_1' = \xi_1 + \Delta_{r,s}(x_1)$ por todo o grupo, uma vez que os isomorfismos $f(\bar{r})$ e $f_1(\bar{r})$ coincidam em alguma vizinhança $\mathcal{M}^*$. Por (3.35), $x_1(r) = x(r)$ em alguma vizinhança $\mathcal{V}^*$ tal que $r \in \mathcal{V}^*$. □

De maneira geral, todo o procedimento para obtenção da validade dos resultados globais é embasado pelo Teorema 4, através do qual podemos manipular as vizinhanças nas quais as aplicações são definidas, de modo a obter as extensões por todo o grupo. Para grupos conexos e simplesmente conexos, podemos estender os resultados obtidos no Capítulo 2 obtendo uma teoria mais robusta e completa. Como último passo na fundamentação do formalismo, iremos estudar os grupos de Lie em busca de novos recursos para abordar os exemplos de interesse e relevância física.

3.3 Representações de Raio de Grupos de Lie

A última seção referente a revisão do trabalho já realizado consiste na aplicação dos conceitos, já vistos para grupos arbitrários, em grupos de Lie. Tais grupos são àqueles que possuem parâmetros contínuos e infinitesimais. O estudo será divido em uma introdução dos conceitos acerca dos grupos de Lie[6] e na exploração dos expoentes para os mesmos. Note como, durante o progresso do tema, há um encadeamento entre os diferentes tipos de expoentes, culminando no teorema que abarca todos os resultados obtidos.

3.3.1 Noções Preliminares

O primeiro passo é definir um grupo de Lie local (Pontryagin and Lehmer, 1946):

Definição 5. *Um grupo de Lie local G' n-dimensional é um conjunto de elementos $r \in G'$ que possuem uma correspondência um a um com os pontos de uma esfera aberta $\mathcal{E}$ centrada na origem de um espaço euclidiano real n-dimensional.*

Podemos coordenatizar qualquer elemento $r \in G'$ pelas coordenadas $\rho^1 \cdots \rho^n$, desde que $|r| = \left[\sum_{i=1}^{n} (\rho^i)^2\right]^{\frac{1}{2}} < c$, isto é, desde que o módulo esteja limitado. O elemento unitário $e \in G'$ é aquele que possui todas as coordenadas ρ^i nulas, ou seja, a origem (pode também ser denotado por 0. A multiplicação de elementos de G', $t = rs$, definida para os elementos r, s em alguma vizinhança[7] $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{E}$, tem suas coordenadas dadas pelas n equações:

$$\tau^i = f^i(\rho^1, \cdots, \rho^n; \sigma^1, \cdots, \sigma^n) = f^i(r, s), \tag{3.44}$$

[6] Embasada pelos capítulos VI e IX de Pontryagin and Lehmer (1946).

[7] $\mathcal{V}_0$ é a vizinhança em que $|r| < \kappa_0 < c$.

tal que $rs \in \mathcal{E}$, onde ρ^i, σ^i e τ^i são as coordenadas de r, s e t, respectivamente. As coordenadas introduzidas em G' devem ser diferenciáveis de acordo com (Pontryagin and Lehmer, 1946), e também, se os elementos rs e st pertencerem a $\mathcal{V}_0$ vale a lei de associatividade $(rs)t = r(st)$.

A função associada ao produto pode fornecer algumas relações que serão ferramentas nas provas futuras. Podemos fazer $s \to e$ em (3.44), obtendo

$$re = f^i(r, e) = f^i(\rho^1, \cdots, \rho^n, 0, \cdots, 0) = r = er. \tag{3.45}$$

Ao derivar $f^i(r, s)$ com respeito a r e s, se obtém

$$\frac{\partial f^i(r,s)}{\partial r} = \frac{\partial(f^i(\rho^1, \cdots, \rho^n; \sigma^1, \cdots, \sigma^n))}{\partial(\rho^1, \cdots, \rho^n)} \tag{3.46}$$

e

$$\frac{\partial f^i(r,s)}{\partial s} = \frac{\partial(f^i(\rho^1, \cdots, \rho^n; \sigma^1, \cdots, \sigma^n))}{\partial(\sigma^1, \cdots, \sigma^n)}. \tag{3.47}$$

Por fim, tomando $r = s = e$,

$$\frac{\partial f^i(e,e)}{\partial \rho^j} = \frac{\partial f^i(e,e)}{\partial \sigma^j} = \delta^i_j. \tag{3.48}$$

Dentro dos grupos de Lie há a classe de grupos chamada grupo locais a um parâmetro, uma curva contínua definida em uma vizinhança do grupo, vejamos a definição formal para estes grupos:

Definição 6. *Seja $r \in G'$ um elemento que depende continuamente de um parâmetro real μ, tal que $|\mu| < \gamma$, se $r(\mu)$ é definido para todos os valores $|\mu| < \gamma$ e:*

- $r(0) = e$;
- $r(\mu_1)\ r(\mu_2) = r(\mu_1 + \mu_2)$, *se* $|\mu_1| < \gamma$, $|\mu_2| < \gamma$ *e* $|\mu_1 + \mu_2| < \gamma$,

então $r(\mu)$ é dito subgrupo local de um parâmetro.

Um exemplo de tal tipo de grupo é aquele formado por rotações em torno de um único eixo, o subgrupo depende apenas do parâmetro que é responsável por fornecer de quanto é feita esta rotação. A curva contínua $r(\tau)$ possui um elemento tangente a mesma, se $\frac{d\rho^i(0)}{d\mu} = \alpha^i$ existe, com isso podemos escrever um subgrupo a um parâmetro como

$$r(\mu) = \mu a, \tag{3.49}$$

onde a é um elemento tangente com coordenadas dadas por α^i.

Um sistema de coordenadas onde

$$\rho^k(\mu) = \mu\alpha^k, \tag{3.50}$$

é chamado de canônico, ou seja, coordenadas canônicas são aquelas que para cada ρ^k há um subgrupo local de um parâmetro ($r(\mu) = \mu a$ em $\mathcal{V}_0$) associado. Para tais coordenadas, as funções f^i de (3.44) são analíticas em uma vizinhança adequadamente escolhida do elemento unitário que contenha[8] $\mathcal{V}_0$, esta vizinhança é dita ser uma vizinhança canônica. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G', em termos das coordenadas canônicas, pode ser descrita por um espaço vetorial real n-dimensional formado pelos vetores a que geram os subgrupos locais de um parâmetro de G', como visto em (3.49). A operação binária definida nesse espaço vetorial é o colchete de Lie (ou comutador) $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, que associa um vetor de $\mathfrak{g}$ a um par ordenado $a, b \in \mathfrak{g}$. Essa operação é bilinear e antissimétrica, ou seja,

$$[a, b] = -[a, b] \tag{3.51}$$

e satisfaz a identidade de Jacobi:

$$\Big[[a, a'], a''\Big] + \Big[[a', a''], a\Big] + \Big[[a'', a], a'\Big] = 0, \tag{3.52}$$

para quaisquer três elementos a, a' e a'' em $\mathfrak{g}$. Ao fazer $b \to a$ em (3.51), temos que $[a, a] = 0$ para $\forall a \in \mathfrak{g}$. Para dois elementos a e b fixos pertencentes a $\mathfrak{g}$, definimos dois subgrupos locais a um parâmetro $r(\mu) = \mu a$ e $s(\mu) = \mu b$, note que $r^{-1} = -r$, já que são subgrupos a um parâmetro, desta forma o comutador pode ser escrito como $q(r, s) = rs - sr = rsr^{-1}s^{-1}$. Para um μ não nulo e suficientemente pequeno o comutador $q(\mu a, \mu b)$ é definido e pertence a $\mathcal{V}_0$, sendo assim é possível escrever[9]

$$[a, b] = \lim_{\mu \to 0} \mu^{-2} q(\mu a, \mu b), \tag{3.53}$$

a i-ésima componente do comutador é dada pelo limite da i-ésima componente de $\mu^{-2}q(\mu a, \mu b)$.

O colchete $[a_i, a_j]$, é dado por

$$[a_i, a_j] = \sum_{m=1}^{n} c^m{}_{ij} a_m, \tag{3.54}$$

onde a_i e a_j são dois elementos quaisquer de um conjunto de n vetores linearmente independentes a_i $(1 \leq i \leq n)$ que formam uma base em $\mathfrak{g}$ e $c^m{}_{ij}$ são as constantes de estrutura do grupo de Lie G'. Através de (3.51), temos

$$[a_i, a_j] = -[a_j, a_i] \Rightarrow \sum_{m=1}^{n} c^m{}_{ij} a_m = -\sum_{m=1}^{n} c^m{}_{ji} a_m, \tag{3.55}$$

portanto, $c^m{}_{ij} = -c^m{}_{ji}$. Ao aplicar a identidade de Jacobi em a_i, a_j e a_k, temos

$$\Big[[a_i, a_j], a_k\Big] = \sum_{m=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c^m{}_{ij} c^l{}_{mk} a_l, \tag{3.56}$$

[8] Definição 38 de Pontryagin and Lehmer (1946), página 181.
[9] Esta demonstração está contida no Apêndice A.

e as demais permutações de a, a' e a'', ao realizar a soma de todas as permutações, teremos

$$J^l_{kij} = \sum_{m=1}^{n} (c^l{}_{mk} c^m{}_{ij} + c^l{}_{mi} c^m{}_{jk} + c^l{}_{mj} c^m{}_{ki}) = 0. \tag{3.57}$$

Para uma base padrão, isto é, dado um conjunto de coordenadas canônicas o vetor a_i é o vetor com a i-ésima componente 1 e a j-ésima componente 0, com $j \neq i$, as constantes de estrutura serão dadas por

$$c^m{}_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f^m}{\partial \rho^i \partial \sigma^i} - \frac{\partial^2 f^m}{\partial \rho^j \partial \sigma^i} \right)_{[\rho^k = \sigma^k = 0]}. \tag{3.58}$$

Esta relação permanece válida se as coordenadas canônicas forem trocadas por coordenadas arbitrárias $p'^i = \phi^i(\rho^1, \cdots, \rho^n)$, desde que as funções ϕ^i tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\frac{\partial \phi^i}{\partial \rho^j} = \delta^i_j$ ao avaliar na origem.

Para constantes de estrutura dadas, que sejam antissimétricas e satisfaçam (3.57), um grupo de Lie local G' pode ser construído com constantes de estrutura que se referem à base padrão de um sistema de coordenadas canônicas.

3.3.2 Expoentes locais diferenciáveis

Uma das características dos grupos de Lie é a diferenciabilidade de seus elementos, então queremos demonstrar que os expoentes locais anteriormente definidos são equivalentes a expoentes locais diferenciáveis, para isso iremos utilizar o método de Iwasawa, abordado em Iwasawa (1949). A partir desta seção, G irá denotar um grupo de Lie fixo e $\mathcal{V}_0$ uma vizinhança canônica fixa em G. Investiguemos o lema a seguir:

Lema 3. *Em um grupo de Lie todo expoente local é equivalente a um expoente local diferenciável.*

Prova: Por função diferenciável, estamos nos referindo a uma função que, em alguma vizinhança $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}_0$, possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens com respeito às coordenadas canônicas dos elementos do grupo aos quais a função depende.

Sejam ξ um expoente local definido e limitado em $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$, duas vizinhanças, tais que $\mathcal{V}_1^2 \subset \mathcal{V}$ e $\mathcal{V}_2^2 \subset \mathcal{V}_1$. Denotemos dois elementos de integração invariante em G, à esquerda por dr e à direita por dr^* (assim como dt foi introduzida para prova do[10] Teorema 3.). Vamos também introduzir duas funções reais $\nu(r)$ e $\nu^*(r)$ em G com as seguintes propriedades:

1. ν e ν^* são diferenciáveis em $\mathcal{V}$;

2. ν e ν^* são nulas fora de uma vizinhança esférica $\mathcal{V}_3$ ($|r| < \alpha$) contida em $\mathcal{V}_2$;

[10] A existência de uma medida de Haar em grupos localmente compactos implica a existência de tal medida invariante em grupos de Lie, Raczka and Barut (1986), p. 111.

3. $\int_G \nu(r)dr = \int_G \nu^*(r)d^*r = 1.$

Note que as integrais na propriedade 3 são válidas apenas em $\mathcal{V}_3$, uma vez que $\nu = \nu^* = 0$ fora deste domínio. Uma possível forma para estas funções reais é $\nu(r) = \gamma\phi(r)$ e $\nu^*(r) = \gamma^*\phi(r)$, com

$$\phi(r) = \begin{cases} exp(-(\alpha^2 - |r|^2)^{-1}, & r \in \mathcal{V}_3 \\ 0, & r \notin \mathcal{V}_3. \end{cases} \tag{3.59}$$

As constantes γ e γ^* são escolhidas adequadamente, de forma que a propriedade 3 seja válida. Serão definidos agora, como em Iwasawa (1949):

$$\begin{aligned} \xi'(r,s) &= \xi(r,s) + \Delta_{r,s}(x), && (r,s \in \mathcal{V}_1) \\ x(r) &= -\int_G \xi(r,t)\nu(t)dt, && (r \in \mathcal{V}_1^2) \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} \xi''(r,s) &= \xi'(r,s) + \Delta_{r,s}(x'), && (r,s \in \mathcal{V}_2) \\ x'(r) &= -\int_G \xi'(u,r)\nu^*(u)d^*u. && (r \in \mathcal{V}_2^2) \end{aligned} \tag{3.61}$$

e como $\xi(e,t) = 0$, temos $x(e) = -\int_G \xi(e,t)\nu(t)dt = 0$ e pelo mesmo argumento $x'(e) = -\int_G \xi'(u,e)\nu^*(u)d^*u = 0$. Logo, $x(e) = x'(e) = 0$, como exigido das funções $x(r)$.

Utilizando a forma de $x(r)$ de (3.60) em $\Delta_{r,s}$, obtemos

$$\Delta_{r,s}(x) = -\int_G \xi(r,t)\nu(t)dt - \int_G \xi(s,t)\nu(t)dt + \int_G \xi(rs,t)\nu(t)dt, \tag{3.62}$$

então

$$\xi'(r,s) = \xi(r,s) + \left\{ \int_G \xi(rs,t)\nu(t)dt - \int_G \xi(r,t)\nu(t)dt - \int_G \xi(s,t)\nu(t)dt \right\}. \tag{3.63}$$

Pela propriedade 3 de ν e como $\xi(r,s)$ não é função de t, podemos escrevê-lo como $\xi(r,s) = \int_G \xi(r,s)\nu(t)dt$, logo

$$\xi'(r,s) = \int_G \big\{\xi(r,s) - \xi(r,t) - \xi(s,t) + \xi(rs,t)\big\}\nu(t)dt. \tag{3.64}$$

Notemos que ξ é definido em $\mathcal{V}$. Então nesta integral $rs \in \mathcal{V}$ e também $st \in \mathcal{V}$, por (2.71)

$$\xi'(r,s) = \int_G \{\xi(rs,t) - \xi(r,t)\}\nu(t)dt. \tag{3.65}$$

Fazendo um reescalonamento $t \to s^{-1}t$, temos

$$\xi'(r,s) = \int_G \xi(r,t)\{\nu(s^{-1}t) - \nu(t)\}dt \qquad (r,s \in \mathcal{V}_1). \tag{3.66}$$

Realizando o mesmo processo para $\xi''(r,s)$ pela forma de $x'(r)$ dada (3.61), de forma análoga

$$\xi''(r,s) = \xi'(r,s) + \int_G \Big\{\xi'(u,rs) - \xi'(u,r) - \xi'(u,s)\Big\}\nu^*(u)d^*u. \tag{3.67}$$

Novamente utilizando a propriedade 3 das funções ν e ν^*, ficamos com

$$\xi''(r,s) = \int_G \Big\{\xi'(r,s) - \xi'(u,r) - \xi'(u,s) + \xi'(u,rs)\Big\}\nu^*(u)d^*u. \tag{3.68}$$

Por (2.71) e fazendo o reescalonamento $u \to ur^{-1}$, obtemos

$$\xi''(r,s) = \int_G \xi'(u,t)\Big\{\nu^*(ur^{-1}) - \nu^*(u)\Big\}d^*u \qquad (r,s \in \mathcal{V}_2). \tag{3.69}$$

Inserindo (3.66) em (3.69), temos finalmente

$$\xi''(r,s) = \int_G \left[\int_G \xi(u,t)\{\nu(s^{-1}t) - \nu(t)\}dt\right]\Big\{\nu^*(ur^{-1}) - \nu^*(u)\Big\}d^*u. \tag{3.70}$$

Através das construções feitas por Iwasawa para as funções $x'(r)$ e $x(r)$ e a comparação com a equação (3.70), temos o seguinte conjunto de relações:

$$\begin{aligned} \xi''(r,s) &= \xi(r,s) + \Delta_{r,s}(x''), && (r,s \in \mathcal{V}_2) \\ x''(r) &= x(r) + x'(r), && (r \in \mathcal{V}_2^2) \\ \xi''(r,s) &= \int_G\int_G \xi(u,t)\{\nu(s^{-1}t) - \nu(t)\}\Big\{\nu^*(ur^{-1}) - \nu^*(u)\Big\}dtd^*u. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Nesta última integral notemos que apenas ν e ν^* dependem dos elementos r e s, logo a diferenciabilidade de ξ'' com respeito as coordenadas de r e s segue da diferenciabilidade, por definição, de ν e ν^* e da analiticidade da multiplicação de grupo na vizinhança $\mathcal{V}_0$. □

A construção de Iwasawa consiste na determinação de uma forma para as funções $x(r)$ e $x'(r)$ que, por sua vez, leva a equivalência entre expoentes locais e expoentes diferenciáveis.

3.3.3 Expoentes locais diferenciáveis equivalentes

Assim como os expoentes locais herdavam a equivalência, inicialmente estabelecida para os fatores locais, os expoentes locais diferenciáveis (e todos apresentados a seguir) irão ter essa propriedade. Vamos trabalhar com ξ_1 e ξ_2, dois expoentes diferenciáveis equivalentes e seja $\mathcal{V}(\mathcal{V}^2 \subset \mathcal{V}_0)$ uma vizinhança adequadamente escolhida tal que a função $\chi = \xi_2 - \xi_1 = \Delta(x)$ seja diferenciável em $\mathcal{V}$ e a função $x(r)$ seja contínua e limitada na vizinhança dos produtos. Então,

$$\eta(r) = \int_G \chi(r,t)\nu(t)dt, \tag{3.72}$$

onde $\nu(r)$ é definida como anteriormente e $x_1(r) = \eta(r) - x(r)$. A função $\eta(r)$ depende de ν e de χ, a função ν é diferenciável, por definição. Uma vez que os expoentes constituintes de χ são diferenciáveis por si só, χ também o é, já que a subtração não altera a diferenciabilidade. Portanto, ao escrever $\eta(r) = x_1(r) + x(r)$ temos que x é diferenciável em $\mathcal{V}$. Para qualquer vizinhança $\mathcal{V}_1(\mathcal{V}_1^2 \subset \mathcal{V})$, essa análise prova o lema:

Lema 4. *Se dois expoentes diferenciáveis ξ_1 e ξ_2 de um grupo de Lie são equivalentes, então, em alguma vizinhança $\mathcal{V}_1$, $\xi_2 = \xi_1 + \Delta(x)$ com a função $x(r)$ diferenciável.*

3.3.4 Expoentes locais de um grupo de um parâmetro

Ao particularizar G como um grupo de um parâmetro, a vizinhança esférica aberta $\mathcal{V}$ passa a ser um intervalo aberto ($|\rho| < \gamma$), e a operação que define o grupo se torna adição ordinária, uma vez que um grupo a um parâmetro é uma reta. Desta forma, um expoente local ξ_0 definido em $\mathcal{V}$ é uma função contínua $\xi_0(\rho, \sigma)$ ($-\gamma < \rho, \sigma < \gamma$) que, de acordo com (2.70) e (2.71), satisfaz

$$\xi_0(0,0) = 0 \tag{3.73}$$

e

$$\xi_0(\mu_1, \mu_2) + \xi_0(\mu_1 + \mu_2, \mu_3) = \xi_0(\mu_2, \mu_3) + \xi(\mu_1, \mu_2 + \mu_3), \tag{3.74}$$

onde μ_1, μ_2, μ_3 corresponde a r, s, t e $-\gamma < \mu_i, \mu_1 + \mu_2, \mu_2 + \mu_3 < \gamma$. Utilizando a equação (2.72) e considerando que o elemento unitário e possui coordenadas nulas temos diretamente que $\xi_0(\mu, 0) = 0$. Vejamos o lema a seguir:

Lema 5. *Todo expoente local de um grupo a um parâmetro é equivalente a zero.*

Prova: Pelo Lema 3, podemos assumir o expoente ξ_0 diferenciável, sendo assim, vamos escrever

$$\psi(\mu, \sigma) = \frac{\partial \xi_0(\mu, \sigma)}{\partial \sigma}. \tag{3.75}$$

Derivando a equação (3.74) com relação a μ_3 e avaliando o resultado em $\mu_3 = 0$ teremos quatro termos, um deles será nulo já que não há dependência em μ_3, então teremos

$$\psi(\mu_1 + \mu_2, 0) = \psi(\mu_2, 0) + \psi(\mu_1, \mu_2) \qquad (-\gamma < \mu_1, \mu_2, \mu_1 + \mu_2 < \gamma). \tag{3.76}$$

Vamos definir x_0, por

$$x_0(\mu) = \int_0^{\mu} \psi(\sigma, 0) d\sigma = \int_0^1 \mu \psi(\sigma\mu, 0) d\sigma \qquad (|\mu| < \gamma), \tag{3.77}$$

onde notamos que $x_0(0) = 0$. Para $|\mu_i| < \frac{1}{2}\gamma$ temos $\Delta_{\mu_1,\mu_2}(x_0) = x_0(\mu_1) + x_0(\mu_2) - x_0(\mu_1 + \mu_2)$, e após utilizar a (3.77), a função Δ assume a forma

$$\Delta_{\mu_1,\mu_2}(x_0) = \int_0^{\mu_1} \psi(\sigma, 0) d\sigma + \int_0^{\mu_2} \psi(\sigma, 0) d\sigma - \int_0^{\mu_1+\mu_2} \psi(\sigma, 0) d\sigma. \tag{3.78}$$

Para que tenhamos duas integrais com limites independentes, podemos escrever a primeira integral como

$$\int_0^{\mu_1} \psi(\sigma, 0) d\sigma = -\int_{\mu_1}^0 \psi(\sigma, 0) d\sigma, \tag{3.79}$$

assim,

$$-\Delta_{\mu_1,\mu_2}(x_0) = \int_{\mu_1}^{\mu_1+\mu_2} \psi(\sigma, 0) d\sigma - \int_0^{\mu_2} \psi(\sigma, 0) d\sigma. \tag{3.80}$$

Note que apenas a primeira integral depende de μ_1 e podemos contabilizar esta contribuição ao transladar o argumento de ψ por $\psi(\mu_1 + \sigma, 0)$. Logo,

$$-\Delta_{\mu_1,\mu_2}(x_0) = \int_0^{\mu_2} \Big\{\psi(\mu_1 + \sigma, 0) - \psi(\sigma, 0)\Big\} d\sigma, \tag{3.81}$$

ou ainda

$$-\Delta_{\mu_1,\mu_2}(x_0) = \int_0^{\mu_2} \psi(\mu_1,\sigma)d\sigma = \int_0^{\mu_2} \left(\frac{\partial \xi_0(\mu_1,\sigma)}{\partial \sigma}\right) d\sigma = \xi_0(\mu_1,\mu_2) - \xi_0(\mu_1,0). \quad (3.82)$$

Por (2.72), $\xi_0(\mu_1,0) = 0$, então $\xi_0(\mu_1,\mu_2) + \Delta_{\mu_1,\mu_2}(x_0) = 0$ e, portanto, $\xi_0 \equiv 0$. □

Um exemplo de grupo a um parâmetro mencionado foi um grupo de rotação em torno de um eixo, para tais transformações não há dependência da fase, o que está de acordo com a prova anterior.

Elencando os resultados obtidos, temos a equivalência entre expoentes locais e diferenciáveis, resulto que nos permite utilizar a diferenciabilidade para manipular as relações de definição dos expoentes. Temos também o mais recente resultado, acerca dos grupos a um parâmetro, faremos a introdução das coordenadas e vizinhanças canônicas no estudo dos expoentes.

3.3.5 Expoentes locais canônicos

Para coordenadas canônicas a função associada ao produto entre dois elementos do grupo é analítica em uma vizinhança adequada, sendo esta uma vizinhança dita canônica. Vejamos a seguinte definição:

Definição 7. *Um expoente local ξ de um grupo de Lie G definido em uma vizinhança canônica $\mathcal{V}$ é dito canônico se:*

1. *ξ é diferenciável em $\mathcal{V}$;*
2. *$\xi(r,s) = 0$ se r e s são elementos do mesmo subgrupo local de um parâmetro em $\mathcal{V}$.*

Neste âmbito, temos o lema que associa expoentes locais e expoentes canônicos:

Lema 6. *Todo expoente local ξ de um grupo de Lie é equivalente a um expoente local canônico.*

Prova: Seja ξ um expoente local definido em uma vizinhança $\mathcal{V}'$ $|r| < \kappa_1$, de acordo com o Lema 3 podemos assumir ξ como um expoente diferenciável em $\mathcal{V}'$. Fazendo a escolha de outra vizinhança $\mathcal{V}_1(|r| < \kappa_1)$, tal que $\mathcal{V}_1^2 \subset \mathcal{V}$, se $r \in \mathcal{V}_1$, o produto $r \cdot r \in \mathcal{V}_1$. Para as coordenadas canônicas o produto de dois elementos se torna $r \cdot r = 2r$, então o limite da vizinhança passa a ser $\kappa_1 \leq \frac{1}{2}\kappa$.

Assim como na prova anterior, façamos a definição de uma função de r e r' com coordenadas ρ^k e ρ'^k, respectivamente, que é a derivada do expoente ξ, como

$$\chi_k(r,r') = \frac{\partial \xi(r,r')}{\partial \rho'^k} \qquad (r, r' \in \mathcal{V}) \quad (3.83)$$

e também

$$x(r) = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} \rho^k \chi_k(\omega r, 0) d\omega \qquad (r \in \mathcal{V}), \tag{3.84}$$

$$\xi'(r,s) = \xi(r,s) + \Delta_{r,s}(x) \qquad (r,s \in \mathcal{V}_1). \tag{3.85}$$

A função $x(r)$ é diferenciável e $x(e) = 0$ por definição, como já visto. Logo, ξ' é diferenciável na vizinhança $\mathcal{V}_1$. Seja então $r(\mu) = \mu a$ um subgrupo local a um parâmetro fixo na vizinhança $\mathcal{V}_1$, para provar que ξ' é um expoente local canônico, precisamos mostrar que

$$\xi'(\mu_1 a, \mu_2 a) = 0 \qquad (\mu_i a \in \mathcal{V}_1). \tag{3.86}$$

Para $a = 0$ isto é trivial, então vamos assumir $a \neq 0$. Se o parâmetro μ é limitado por γ, ou seja, $|\mu| < \gamma = \frac{\kappa}{|a|}$, então $r(\mu) \in \mathcal{V}$ e se o subgrupo pertence à vizinhança $\mathcal{V}_1$, teremos $|\mu| < \frac{\kappa_1}{|a|} \leq \frac{1}{2}\gamma$.

Seja $\xi(\mu_1 a, \mu_2 a) = \xi_0(\mu_1, \mu_2)$ com $(|\mu_i| < \gamma)$, ao denotar as coordenadas do vetor a por α^k, a função (3.75), definida na prova anterior, se torna

$$\psi(\mu,\sigma) = \frac{\partial \xi_0(\mu,\sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \xi(\mu a, \sigma a)}{\partial \sigma} = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \chi_k(\mu a, \sigma a). \tag{3.87}$$

Pelas relações (3.77) e (3.84), temos

$$\psi(\mu,\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \chi_k(\mu a, \sigma a), \tag{3.88}$$

então $\psi(\sigma\mu, 0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \chi_k(\sigma\mu a, 0)$. De (3.77), $x_0(\mu) = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{n} \mu \alpha^k \chi_k(\sigma\mu a, 0)\right] d\sigma$, portanto, $x_0(\mu) = x(\mu a)$. Se $\mu_i a \in \mathcal{V}_1$, então o parâmetro é limitado por $|\mu_i| \leq \frac{1}{2}\gamma$, e tem-se que

$$\xi'(\mu_1 a, \mu_2 a) = \xi(\mu_1 a, \mu_2 a) + x(\mu_1 a) + x(\mu_2 a) - x[(\mu_1 + \mu_2)a], \tag{3.89}$$

ou ainda,

$$\xi'(\mu_1 a, \mu_2 a) = \xi_0(\mu_1, \mu_2) + \Delta_{\mu_1,\mu_2}(x_0). \tag{3.90}$$

Pelo resultado no Lema 5, temos diretamente que $\xi'(\mu_1 a, \mu_2 a) = 0$, o que estabelece 3.86 e finaliza a prova. □

3.3.6 Expoentes locais canônicos equivalentes

Para explorar a equivalência para esta nova classe de expoentes, vejamos o lema abaixo:

Lema 7. *Sejam ξ_1 e ξ_2 dois expoentes locais equivalentes de um grupo de Lie G e assuma ξ_1 canônico. Então ξ_2 é canônico se, e somente se, em alguma vizinhança $\xi_2 = \xi_1 + \Delta[\Lambda]$, onde $\Lambda(r)$ é uma forma linear nas coordenadas canônicas de r.*

Prova: A prova será realizada analisando, como primeiro passo, a necessidade desta condição que envolve a forma linear e, em um segundo momento, checando se tal condição é suficiente.

1. **Necessidade da Condição.** O Lema garante a existência de uma vizinhança $\mathcal{V}(|r| < \kappa)$ na qual ξ_2 e ξ_1 são canônicos e

$$\xi_2(r,s) = \xi_1(r,s) + \Delta_{r,s}(x) \qquad (r,s \in \mathcal{V}), \tag{3.91}$$

com a função $x(r)$ diferenciável definida para $r \in \mathcal{V}^2$. Assumindo $r = \mu_1 a$ e $s = \mu_2 a$, temos a relação o resultado já obtido $\xi(\mu_1 a, \mu_2 a) = 0$, então $\xi_2 = \xi_1 = 0$, o que nos leva a

$$\Delta_{r,s}(x) = x(\mu_1 a) + x(\mu_2 a) - x[(\mu_1 + \mu_2)a] = 0 \qquad (\mu_i a \in \mathcal{V}). \tag{3.92}$$

Ao assumir $|a| < \kappa$, a relação anterior vale se $|\mu_i \leq 1|$ e $|\mu_1 + \mu_2| \leq 1$. Desta forma, (3.92) nos sugere duas possibilidades, a primeira caso $x(\mu a) = \mu x(a)$, para esta teremos

$$x(\mu_1 a) + x(\mu_2 a) = x[(\mu_1 + \mu_2)a] = (\mu_1 + \mu_2)x(a). \tag{3.93}$$

Já a segunda possibilidade, advém do caminho inverso, se $x(\mu_1 a) + x(\mu_2 a) = x[(\mu_1 + \mu_2)a]$, então

$$x(\mu_1 a) + x(\mu_2 a) = (\mu_1 + \mu_2)x(a). \tag{3.94}$$

Para checar este argumento, seja $\mu = N$ um número inteiro,

$$x(a) = x\left(N\frac{a}{n}\right) = x\left(\frac{a}{N} + \frac{a}{N} + \cdots + \frac{a}{N}\right), \tag{3.95}$$

uma vez que $x(a)$ é uma função real diferenciável,

$$x\left(N\frac{a}{n}\right) = x\left(\frac{a}{N}\right) + x\left(\frac{a}{N}\right) + \cdots + x\left(\frac{a}{N}\right), \tag{3.96}$$

que pode ser reescrito como

$$x(a) = Nx\left(\frac{a}{N}\right) \quad \therefore \quad x\left(\frac{a}{N}\right) = \frac{1}{N}x(a). \tag{3.97}$$

Rebatizando $\frac{1}{N} = m = \mu$, temos $x(\mu a) = \mu x(a)$, com $N \neq 0$. Para generalizar este resultado para números reais são necessários tópicos de análise que não serão abordados. Ao derivar $s(\mu a) = \mu x(a)$, com respeito a μ em $\mu = 0$, tem-se

$$\left.\frac{\partial x(\mu a)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = \left\{\mu\left.\frac{\partial x(a)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} + \left.\frac{\partial \mu}{\partial \mu}x(a)\right|_{\mu=0}\right\}. \tag{3.98}$$

A regra da cadeia nos fornece

$$x(a) = \left.\frac{\partial x(\mu a)}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = \left.\left[\frac{\partial x(\mu a)}{\partial(\mu a)}.\frac{\partial(\mu a)}{\partial \mu}\right]\right|_{\mu=0} = a\left.\frac{\partial x(\mu a)}{\partial(\mu a)}\right|_{\mu=0}. \tag{3.99}$$

Já linearidade da derivada, a relação $x(\mu a) = \mu x(a)$ e a forma coordenatizada de a, dada por α^k, nos permite escrever a função $x(a)$ como

$$x(a) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \lambda_k, \tag{3.100}$$

onde $\lambda_k \equiv \frac{\partial x}{\partial \alpha^k}$. Como $x(a)$ e α^k são lineares e λ_k é um coeficiente, então

$$x(a) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^k \lambda_k = \Lambda(a). \tag{3.101}$$

2. **Suficiência da Condição.** Se $x(r) = \Lambda(r)$ para $r \in \mathcal{V}_1^2 \subset \mathcal{V}$, como ξ_1 e $\Delta[\Lambda]$ são diferenciáveis então $\xi_2 = \xi_1 + \Delta[\Lambda]$ é diferenciável na vizinhança $\mathcal{V}_1$. A relação (3.92) vale se $\mu_i a \in \mathcal{V}_1$ e $\xi_1(\mu_1 a, \mu_2 a) = 0$ implica $\xi_2(\mu_1 a, \mu_2 a) = 0$. Portanto, ξ_2 é canônico. □

3.3.7 Grupo Local e Expoentes Infinitesimais

Após introdução dos grupos de Lie e trabalho sistemático encadeando cada uma das classes de expoentes, iremos aplicar o conceito de grupo local, exibido na seção 2.2.4, aos grupos contínuos. Esta aplicação irá culminar em um novo objeto associado aos comutadores e equivalente aos expoentes locais.

Seja ξ um expoente local de um grupo de Lie de dimensão n, G, este expoente gera um grupo local H cujos elementos são $\bar{r} = \{\theta, r\}$, com θ sendo um número real e r um elemento de G. A multiplicação de grupo é definida pela relação (2.87). Diferente de antes, os elementos $\bar{r}$ são descritos por $n+1$ coordenadas $\rho^0, \rho^1, \cdots, \rho^n$ onde $\rho^0 = \theta$ e $\rho^1, \rho^2, \cdots, \rho^n$ são as coordenadas de r em G. Como anteriormente, podemos introduzir vizinhanças esféricas em H, limitadas por

$$|\bar{r}| = \left(\sum_{k=0}^{n} (\rho^k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left[(\rho^0)^2 + |r|^2\right]^{\frac{1}{2}} < \kappa. \tag{3.102}$$

Ao assumir $\xi(r,s)$ canônico para $|r| < \kappa$, $|s| < \kappa$ em uma vizinhança $\mathcal{M}(|\bar{r}| < \kappa)$, pode-se escolher uma vizinhança $\mathcal{M}_1(|\bar{r}| < \kappa_1)$ tal que $\bar{r}\bar{s} \in \mathcal{M}$ se $\bar{r}$, $\bar{s} \in \mathcal{M}_1$. Se ρ^i, σ^i, τ^i $(0 \leq i \leq n)$ são as coordenadas dos elementos $\bar{r}$, $\bar{s}$ e $\bar{t} = \bar{r}\bar{s}$, respectivamente, a relação de definição (2.87) nos leva a

$$\tau^i = \bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s}) \qquad (0 \leq i \leq n; \bar{r}, \bar{s} \in \mathcal{M}_1), \tag{3.103}$$

sendo

$$\begin{aligned}\tau^0 &= \bar{f}^0(\bar{r},\bar{s}) = \rho^0 + \sigma^0 + \xi(r,s),\\ \tau^i &= \bar{f}^i(\bar{r},\bar{s}) = f^i(r,s), \qquad\qquad 1 \leq i \leq n.\end{aligned} \tag{3.104}$$

As funções $\bar{f}^i(\bar{r},\bar{s})$ herdam a diferenciabilidade de $\xi(r,s)$ e $f^i(r,s)$ na vizinhança $\mathcal{M}_1(0 \leq i \leq n)$. Portanto, H é um grupo de Lie local de dimensão $(n+1)$.

A partir da definição de coordenadas canônicas podemos checar que as coordenadas ρ^i são canônicas em $\mathcal{M}_1$. Partindo de $\bar{r}(\mu) = \mu\bar{a}$ com $\bar{a} = \{\alpha^0, a\}$, tem-se $\bar{r}(\mu) = \{\mu\alpha^0, \mu a\} = \{\mu\alpha^0, r(\mu)\}$. Como ξ é canônico, da relação (2.87) tem-se

$$\bar{r}(\mu_1)\bar{r}(\mu_2) = \{(\mu_1+\mu_2)\alpha^0 + \xi(\mu_1 a, \mu_2 a), r(\mu_1)r(\mu_2)\} = \bar{r}(\mu_1+\mu_2), \tag{3.105}$$

se $|\mu_i a| < \kappa$ (ou seja, se pertence à vizinhança $\mathcal{M}_1$). Portanto $\rho^i = \mu\alpha^i$, ou seja, ρ^i são coordenadas canônicas em $\mathcal{M}_1$.

Por outro lado, ao assumir as coordenadas definidas por (2.87) canônicas, para um dado expoente diferenciável ξ, nos conduz a afirmação de que ξ é um expoente local canônico. Para um sistema de coordenadas canônicas a função $\bar{f}^i(r,s)$ é analítica em alguma vizinhança $\mathcal{M}'$, o que implica ξ analítico em alguma vizinhança $\mathcal{V}'$ de G. Estes argumentos são responsáveis pela prova do lema a seguir:

Lema 8. *Um expoente local canônico $\xi(r,s)$ de um grupo de Lie G é, em alguma vizinhança $\mathcal{V}'$, uma função analítica das coordenadas canônicas de r e s.*

Como o grupo H é um subgrupo de G, sendo este um grupo de Lie, H é então um grupo de Lie local, sua álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ será formada pelos $(n+1)$-dimensional vetores $\bar{a}$ com componentes as $\alpha^k(0 \leq \kappa \leq n)$, estes expressos por $\bar{a} = \{\alpha^0, a\}$, onde $a = (\alpha^1, \cdots, \alpha^n)$ é um elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

O comutador $[\bar{a},\bar{b}] = [\{\alpha^0, a\}, \{\beta^0, b\}]$ entre dois elementos da álgebra $\mathfrak{h}$ é dado pelo limite $\lim_{\mu\to 0}\mu^{-2}\bar{q}(\mu\bar{a}, \mu\bar{b})$, de acordo com a definição feita anteriormente, assim por (2.87),

$$(\mu\bar{a})(\mu\bar{b}) = \{\mu(\alpha^0+\beta^0) + \xi(\mu a, \mu b), (\mu a)(\mu b)\} \tag{3.106}$$

e como em um subgrupo a um parâmetro $r^{-1} = -r$, temos

$$(\mu\bar{a})^{-1}(\mu\bar{b})^{-1} = (-\mu\bar{a})(-\mu\bar{b}) = \{-\mu(\alpha^0+\beta^0) + \xi(-\mu a, -\mu b), (\mu a)^{-1}(\mu b)^{-1}\}. \tag{3.107}$$

Assim, $[\bar{a},\bar{b}]$ se torna

$$[\bar{a},\bar{b}] = \lim_{\mu\to 0}\mu^{-2}\{\mu(\alpha^0+\beta^0)+\xi(\mu a,\mu b),(\mu a)(\mu b)\}\{-\mu(\alpha^0+\beta^0)+\xi(-\mu a,-\mu b),(\mu a)^{-1}(\mu b)^{-1}\}, \tag{3.108}$$

ou ainda, o primeiro termo é

$$\Xi(a,b) = \lim_{\mu\to 0}\mu^{-2}\left[\xi\Big((\mu a,\mu b),(\mu a)^{-1}(\mu b)^{-1}\Big) + \xi(\mu a,\xi b) + \xi(-\mu a,-\mu b)\right], \tag{3.109}$$

enquanto o segundo termo é

$$\lim_{\mu\to 0}\mu^{-2}(\mu a)(\mu b)(\mu a)^{-1}(\mu b)^{-1} = [a,b], \tag{3.110}$$

como já visto é o comutador usual da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Portanto,

$$[\bar{a},\bar{b}] = \Big\{\Xi(a,b),[a,b]\Big\}. \tag{3.111}$$

O novo objeto, Ξ, é definido em termos do comutador entre os elementos do grupo local, como tal operação binária é bilinear e antissimétrica, este objeto herda estas propriedades[11]. Logo, $\Xi(a,b)$ é uma forma bilinear e antissimétrica de valor real definida na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Além disso, outra condição se segue da identidade de Jacobi $\bar{j} = \Big[[\bar{a},\bar{a}']\bar{a}''\Big] + \Big[[\bar{a}',\bar{a}''],\bar{a}\Big] + \Big[[\bar{a}'',\bar{a}],\bar{a}'\Big] = 0$, para quaisquer três elementos de $\mathfrak{h}$. Através de (3.111) tem-se, por exemplo,

$$\Big[[\bar{a}',\bar{a}''],\bar{a}\Big] = \Big[\{\Xi(a',a''),[a',a'']\}\{\alpha^0,a\}\Big] = \{\Xi([a',a''],a),\Big[[a',a''],a\Big]\} \tag{3.112}$$

e similarmente para os outros dois elementos. Definindo, para qualquer forma bilinear antissimétrica Ξ,

$$d\Xi(a,a',a'') = \Xi([a,a'],a'') + \Xi([a',a''],a) + \Xi([a'',a],a'), \tag{3.113}$$

temos que $d\Xi$ é linear nos três argumentos e antissimétrica em quaisquer dois. Desta forma, tomando $\bar{j} = \{d\Xi(a,a',a''),j)\}$, com $j = \Big[[a,a']a''\Big] + \Big[[a',a''],a\Big] + \Big[[a'',a],a'\Big] = 0$ em $\mathfrak{g}$, $\bar{j} = 0$ é equivalente a

$$d\Xi(a,a',a'') = 0. \qquad (a,a',a''\in\mathfrak{g}) \tag{3.114}$$

Este novo objeto nos conduz a seguinte definição:

Definição 8. *Qualquer forma bilinear antissimétrica de valor real Ξ, definida na álgebra de Lie, $\mathfrak{g}$ para a qual $d\Xi(a,a',a'') = 0$ será chamada expoente infinitesimal de $\mathfrak{g}$. Se o expoente infinitesimal for dado por (3.109) o mesmo é dito corresponder ao expoente local canônico ξ de G.*

Para uma base da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, dada pelo conjunto de vetores $a_1,\cdots,a_n$, vamos definir $\beta_{ij} = \Xi(a_i,a_j)$. Desta forma, para dois vetores quaisquer de $\mathfrak{g}$ $a = \sum_{i=1}^n \gamma^i a_i$ e $a' = \sum_{i=1}^n \gamma'^i a_i$, podemos escrever

$$\Xi(a,a') = \sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}\gamma^i\gamma'^j \tag{3.115}$$

e β_{ij} carrega a antissimetria da forma bilinear. Assim, ao substituir a,a',a'' por a_i,a_j,a_k respectivamente em (3.114) e utilizando (4.115) temos,

$$\Xi([a_i,a_j],a_k) = \sum_{m=1}^{n} c^m{}_{ij}\Xi(a_m,a_k) = \sum_{m=1}^{n}\beta_{mk}c^m{}_{ij}. \tag{3.116}$$

[11] A satisfação destas propriedades é demonstrada detalhadamente em Batista (2023).

Logo, a relação (3.114) implica

$$I_{kij} = \sum_{m=1}^{n} (\beta_{mk} c^m{}_{ij} + \beta_{mi} c^m{}_{jk} + \beta_{mj} c^m{}_{ik}) = 0 \qquad (i \leq k, i, j \leq n). \tag{3.117}$$

É válido ressaltar que para qualquer expoente infinitesimal de $\mathfrak{g}$ a equação (3.111) define uma álgebra de Lie de dimensão $(n+1)$.

Para uma base padrão em $\mathfrak{h}$ podemos associar as constantes de estrutura aos expoentes infinitesimais, a base padrão na álgebra de Lie$\mathfrak{h}$, escrita em coordenadas canônicas $\rho^0, \rho^1, \cdots, \rho^n$ em H, é $\bar{a}_0 = \{1, 0\}; \bar{a}_i = \{0, a_i\}$. Assim, as constantes de estrutura $\bar{c}^m_{ij}$ de H são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{c}^0{}_{ij} &= \beta_{ij} = \Xi(a_i, a_j) && (1 \leq i, j \leq n), \\ \bar{c}^m{}_{ij} &= c^m{}_{ij} && (1 \leq m, i, j \leq n), \\ \bar{c}^m{}_{i0} &= \bar{c}^m{}_{0j} = 0 && (0 \leq m, i \leq n). \end{aligned} \tag{3.118}$$

Ao aplicar as equações que foram obtidas durante o processo análogo realizado com a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, isto é (3.58), em H temos

$$\bar{c}^0{}_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \bar{f}^0}{\partial \rho^i \partial \sigma^i} - \frac{\partial^2 \bar{f}^0}{\partial \rho^j \partial \sigma^i} \right)_{[\rho^k = \sigma^k = 0]} \qquad (1 \leq i, j \leq n). \tag{3.119}$$

Escrevendo as funções $\bar{f}^0$ como na equação (3.104), obtemos a seguinte relação para os expoentes infinitesimais com ξ canônico

$$\beta_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \rho^i \partial \sigma^i} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \rho^j \partial \sigma^i} \right)_{[\rho^k = \sigma^k = 0]} \qquad (1 \leq i, j \leq n). \tag{3.120}$$

Vejamos como se dá a equivalência entre expoentes infinitesimais, seja um expoente local canônico da forma $\xi = \Delta[\Lambda]$, ao utilizar a linearidade de Λ e calcular (3.109) para tal expoente, teremos

$$\Xi(a, b) = -\lim \mu^{-2} \Lambda(q(\mu a, \mu b)) = -\Lambda(\lim \mu^{-2} q(\mu a, \mu b)) = -\Lambda([a, b]). \tag{3.121}$$

Assim como a referência principal Bargmann (1954), iremos escrever $\Xi = -d[\Lambda]$, onde para dois vetores a e b, $d[\Lambda] = \Lambda([a, b])$. Para vetores a_i de uma base em $\mathfrak{g}$, vamos definir $\Lambda(a_i) = \lambda_i$, assim

$$\Xi(a_i, a_j) = \sum_{m_1}^{n} c^m_{ji} \Lambda(a_m) = \sum_{m_1}^{n} c^m_{ji} \lambda_m = \beta_{ij}. \tag{3.122}$$

Toda forma bilinear antissimétrica Ξ da forma (3.121) é um expoente infinitesimal de $\mathfrak{g}$, uma vez que é bilinear, antissimétrico e a linearidade de Λ não altera a identidade (3.114). A relação (3.121) e o Lema 7 nos levam a definição a seguir:

Definição 9. *Dois expoentes infinitesimais Ξ e Ξ' de $\mathfrak{g}$ são ditos equivalentes se $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$ e podemos escrever $\Xi' \equiv \Xi$, onde $\Lambda(a)$ é uma forma linear real, definida em $\mathfrak{g}$.*

3.3.8 Correspondência entre expoentes locais e infinitesimais

Como fechamento de toda a teoria exposta vejamos qual a correspondência entre os expoentes locais e os expoentes infinitesimais. Para todo expoente local canônico ξ de G corresponde, de acordo com (3.109), um expoente infinitesimal Ξ de $\mathfrak{g}$ unicamente determinado. Essa correspondência é expressa por

$$\xi \to \Xi, \tag{3.123}$$

que herda a linearidade dos objetos. Além disso, dados dois expoentes locais canônicos, se o expoente infinitesimal correspondente coincidir, isto implica a coincidência entre os próprios expoentes locais em alguma vizinhança $\mathcal{V}$. Como visto em (3.118), os expoentes infinitesimais são responsáveis por determinar unicamente as constantes de estrutura do grupo local e determinam, consequentemente, as funções $\bar{f}^i$ vistas em (3.104), que, por sua vez, determinam ξ em uma vizinhança suficientemente pequena.

A correspondência definida em (3.123) nos sugere o seguinte lema:

Lema 9. *Dois expoentes locais canônicos ξ e ξ' são equivalentes se, e somente se, os correspondentes expoentes infinitesimais Ξ e Ξ' são equivalentes.*

Prova: Comecemos assumindo $\xi' \equiv \xi$. Como visto no Lema 7, $\xi' = \xi + \Delta[\Lambda]$ em alguma vizinhança $\mathcal{V}$. Ao substituir ξ por ξ' em (3.109) e utilizar $\Xi = -d[\Lambda]$ tem-se $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$, portanto $\Xi' \equiv \Xi$.

Agora assumindo a equivalência entre os expoentes infinitesimais, isto é, $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$. A correspondência (3.123) para ξ' nos fornece $\xi + \Delta[\Lambda] \to \Xi'$ e a unicidade da correspondência, advinda de (3.109), nos leva a $\xi' = \xi + \Delta[\Lambda]$, em alguma vizinhança $\mathcal{V}$, portanto $\xi' \equiv \xi$. □

Os resultados obtidos pelo Lema 1 e pelo Lema 9 combinados nos levam a

Corolário 2. *Se para um grupo G todos os expoentes infinitesimais são equivalentes a zero, então todos os expoentes locais canônicos, e, portanto, todos os expoentes locais, são equivalentes a zero.*

Vejamos a relação entre os expoentes locais e infinitesimais, temos:

Lema 10. *Para todo expoente infinitesimal Ξ de $\mathfrak{g}$ existe um expoente local canônico ξ de G tal que $\xi \to \Xi$.*

Prova: Um expoente infinitesimal define uma álgebra de Lie de dimensão $(n+1)$, $\mathfrak{h}$, com constantes de estrutura da forma (3.118) e, portanto, define também um grupo de Lie local H de dimensão $(n+1)$.

Para as coordenadas canônicas, as funções analíticas $\bar{f}^i(\bar{r},\bar{s})$ definidas em alguma vizinhança de H tem a forma necessária de (3.104). Isso nos garante que o expoente associado ξ é canônico e, portanto, é um expoente local de G uma vez que a lei de associatividade para a multiplicação (2.87) é equivalente a (2.71), que define expoentes locais.

Isto é, partindo das consequências de um expoente infinitesimal, é possível obter as relações que definem os expoentes locais canônicos. □

Do ponto de vista das classes de equivalência dos expoentes, temos o

Lema 11. *Existe uma correspondência linear um-a-um entre as classes de equivalência de expoentes locais de um grupo de Lie G e as classes de equivalência de expoentes infinitesimais da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.*

Prova: De acordo com o Lema 1 podemos considerar os expoentes locais, canônicos. Como exibido nos lemas com os Lemas 9 e 10 a correspondência entre os expoentes é fornecida por (3.123). Assim, além de cada classe de equivalência de ξ determinar unicamente uma classe de equivalência de Ξ, temos também que cada classe de equivalência de Ξ determina unicamente uma classe de equivalência de ξ.

Essa correspondência pode ser estabelecida formalmente através de uma aplicação que conecta o espaço linear gerado pelos expoentes locais no espaço linear gerado pelos expoentes infinitesimais. O espaço gerado pelos expoentes locais é denotado por v, então a correspondência é dada por:

$$\varphi : v \to \mathcal{B}^*. \tag{3.124}$$

Por consequência, a dimensão de v para um grupo de Lie é h^*. □

Todos os resultados obtidos nesta seção são condensados em um teorema central que conclui o trabalho com grupos de Lie arbitrários:

Teorema 8. *1. Em um grupo de Lie G, todo expoente local $\xi(r,s)$ é equivalente a um expoente local canônico $\xi'(r,s)$ que, em alguma vizinhança canônica $\mathcal{V}$, é analítico nas coordenadas canônicas de r e s e desaparece se r e s pertencem ao mesmo subgrupo de um parâmetro. Dois expoentes locais canônicos são equivalentes se e somente se $\xi' = \xi + \Delta[\Lambda]$ em alguma vizinhança canônica, onde $\Lambda(r)$ é uma forma linear nas coordenadas canônicas de r.*

2. A todo expoente local canônico de G corresponde unicamente um expoente infinitesimal $\Xi(a,b)$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, ou seja, uma forma bilinear antissimétrica que satisfaz a identidade de Jacobi. A correspondência é linear.

3. Dois expoentes locais canônicos ξ e ξ' são equivalentes se, e somente se, os correspondentes Ξ e Ξ' forem equivalentes.

4. *Existe uma correspondência linear um-a-um entre as classes de equivalência dos expoentes locais de G e as classes de equivalência dos expoentes infinitesimais de $\mathfrak{g}$.*

Assim como feito para grupos conexos e simplesmente conexos, é possível estender os expoentes locais diferenciáveis de um grupo de Lie de modo que sejam definidos por todo o grupo. A extensão é realizada a partir de uma adaptação do método de Iwasawa (1949), feita por Bargmann (1954), e é embasada por dois teoremas referentes aos grupos locais demonstrados por Pontryagin and Lehmer (1946). Como as aplicações utilizam os expoentes infinitesimais e suas operações, tal extensão será omitida para que não haja quebra de continuidade, porém está detalhada em Batista (2023).

4 Aplicações

Fundamentada toda a teoria das representações de raio, iremos percorrer as aplicações apresentadas por Bargmann (1954). Diferentemente da proposta do autor nosso objetivo é apenas demonstrar com clareza quando há (ou não) sobrevivência das fases para os grupos em questão. No trabalho citado, há também a construção dos expoentes e a análise dos mesmos para os casos de sobrevivência. Os exemplos explorados serão: grupos abelianos, grupos pseudo-ortogonais (homogêneos e inohomogêneos), o grupo de Galileu e grupos semi-simples.

Aliado ao interesse em demonstrar a sobrevivência está também a clareza no modus operandi para determinação, dentro do formalismo de Bargmann, mais explorado para os dois últimos casos citados. Comecemos então pelos grupos abelianos.

4.1 Grupos Abelianos

Um grupo abeliano G é aquele em que, dados $a, b \in G$, temos

$$[a, b] = 0, \tag{4.1}$$

ou ainda, podemos dizer que todas as constantes de estrutura $c^m{}_{ij}$ são nulas. Seja G, além de abeliano, um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo de dimensão n. Ao introduzir as coordenadas canônicas ρ^k, tal que $(-\infty < \rho^k < \infty)$ a função associada ao produto de dois elementos $f^k(r, s) = f^k(\rho^1, \cdots, \rho^n; \sigma^1, \cdots, \sigma^n)$ passará por algumas mudanças. Podemos expandir tal função em uma série de potências, obtendo assim (até segunda ordem)

$$\begin{aligned} f^k(\rho^1, \cdots, \rho^n; \sigma^1, \cdots, \sigma^n) \ &= f^k(0,0) + \left.\frac{\partial f^k}{\partial \rho^i}\right|_{\rho=0=\sigma} \rho^i + \left.\frac{\partial f^k}{\partial \sigma^i}\right|_{\rho=0=\sigma} \sigma^i \\ &+ \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f^k}{\partial \rho^i \partial \rho^j}\right|_{\rho=0=\sigma} \rho^i\rho^j + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f^k}{\partial \rho^i \partial \sigma^j}\right|_{\rho=0=\sigma} \rho^i\sigma^j + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f^k}{\partial \sigma^i \partial \sigma^j}\right|_{\rho=0=\sigma} \sigma^i\sigma^j + \cdots \end{aligned} . \tag{4.2}$$

Tal função já foi trabalhada na seção 3.3.1; reutilizando os resultados obtidos temos que $f^k(0,0) = 0$ e também que $f^k(\rho^i, 0) = f^k(0, \rho^i) = \rho^i$. As derivadas de primeira ordem são as mesmas obtidas em (3.48) e por conta desta mesma relação as de segunda ordem, com respeito à uma mesma coordenada, se anulam. Assim (4.2) se torna

$$f^k(\rho^1, \cdots, \rho^n; \sigma^1, \cdots, \sigma^n) = \delta^k_i \rho^i + \delta^k_i \sigma^i + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f^k}{\partial \rho^i \partial \sigma^j}\right|_{\rho=0=\sigma} \rho^i\sigma^j. \tag{4.3}$$

É possível reconhecer[1] a derivada sobrevivente como as constantes de estrutura do grupo, porém para o grupo em questão as mesmas são nulas, resultando em

$$f^k(\rho^1, \cdots, \rho^n; \sigma^1, \cdots, \sigma^n) = \rho^k + \sigma^k, \tag{4.4}$$

isto é, a composição de dois elementos consiste na adição vetorial entre os mesmos.

De acordo com a definição 8, uma forma bilinear antissimétrica Ξ, definida na álgebra de Lie do grupo, é um expoente infinitesimal se $d\Xi = 0$. Uma vez que o grupo é abeliano, todos os comutadores entre seus elementos são nulos, logo essa identidade é automaticamente satisfeita. Concluí-se que toda forma bilinear antissimétrica definida na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G será um expoente infinitesimal do mesmo.

A relação de equivalência entre dois expoentes infinitesimais é $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$, onde Λ é uma forma linear definida em $\mathfrak{g}$ e para dois elementos $r, s \in G$ $d[\Lambda] = \Lambda([a, b])$. Para o grupo estudado a relação de equivalência se reduz à igualdade, ou seja, $\Xi' = \Xi$.

Dando início a análise dos expoentes, como visto, um expoente local canônico é aquele que satisfaz

$$\xi(\mu_1 a, \mu_2 a) = 0, \tag{4.5}$$

em conjunto das relações que definem um expoente local que assumem a forma

$$\begin{gathered} \xi(0,0) = 0, \\ \xi(r,s) + \xi(r+s,t) = \xi(s,t) + \xi(r,s+t), \end{gathered} \tag{4.6}$$

para o caso de estudo. Lembremos que ξ é uma função real e, em uma vizinhança adequadamente escolhida, analítica nos permitindo expandir a mesma em uma série de potências

$$\xi(r,s) = \sum_{m=0}^{\infty} \xi^{(m)}(r,s), \tag{4.7}$$

onde $\xi^{(m)}$ é um polinômio homogêneo de ordem m nas coordenadas dos elementos r e s. As relações (4.5) e (4.6) só serão satisfeitas por $\xi(r,s)$ se forem satisfeitas separadamente para cada $\xi^{(m)}$, logo todo polinômio será um expoente local canônico. A equação (3.120) que está associada aos expoentes infinitesimais será sempre nula, com a possível exceção de $\xi^{(2)}$, isto é $\xi(r,s)$ é

$$\begin{aligned} \xi(r,s) = \xi(0,0) &+ \left.\frac{\partial \xi(\rho,\sigma)}{\partial \rho^i}\right|_{\rho=0=\sigma} \rho^i + \left.\frac{\partial \xi(\rho,\sigma)}{\partial \sigma^i}\right|_{\rho=0=\sigma} \sigma^i + \\ &+ \left.\frac{\partial^2 \xi(\rho,\sigma)}{\partial \rho^i \partial \rho^j}\right|_{\rho=0=\sigma} \rho^i\rho^j + \left.\frac{\partial^2 \xi(\rho,\sigma)}{\partial \sigma^i \partial \sigma^j}\right|_{\rho=0=\sigma} \sigma^i\sigma^j + \left.\frac{\partial^2 \xi(\rho,\sigma)}{\partial \rho^i \partial \sigma^j}\right|_{\rho=0=\sigma} \rho^i\sigma^j + \cdots, \end{aligned} \tag{4.8}$$

os polinômios $\xi^{(0)}$ e $\xi^{(1)}$ são nulos para que as relações de definição sejam válidas, dentre os termos de ordem 2 apenas o que possuí o produto $\rho^i\sigma^j$ sobrevive, os outros se anulam

[1] Weinberg (1995) páginas 53-53.

ao serem avaliados em $\rho = 0 = \sigma$. Os termos de ordem superior se anulam por conta dos produtos e por possuírem derivadas de ordem superior, a relação (3.120) contém apenas derivadas de segunda ordem de ξ.

Ao trabalhar a relação, para o nosso caso,

$$\Xi(a,b), = \lim_{\mu\to 0} \mu^{-2}\left[\xi\Big((\mu a,\mu b),(\mu a)^{-1}(\mu b)^{-1}\Big) + \xi(\mu a,\mu b) + \xi(-\mu a,-\mu b)\right], \tag{4.9}$$

temos o primeiro termo nulo já que ξ é um expoente local canônico e ao expandir em uma série de potências os termos sobreviventes

$$\xi(\mu a,\mu b) = (\mu a)(\mu b)\frac{\partial^2\xi}{\partial(\mu a)\partial(\mu b)} \tag{4.10}$$

e

$$\xi(-\mu a,-\mu b) = (-\mu a)(-\mu b)\frac{\partial^2\xi}{\partial(-\mu a)\partial(-\mu b)}, \tag{4.11}$$

logo (4.9) é

$$\Xi(a,b) = \lim_{\mu\to 0}\frac{1}{\mu^2}\left[2\mu^2\xi(a,b)\right], \tag{4.12}$$

o limite é trivial e obtemos uma relação entre o expoente infinitesimal e o expoente local para um grupo de Lie abeliano

$$\Xi(a,b) = 2\xi(a,b). \tag{4.13}$$

O expoente local ξ é canônico, então podemos utilizar as coordenadas canônicas para escrever os elementos da forma $a = a_i\rho^i$ e $b = b_j\sigma^j$ como foi feito em (3.115), assim

$$\xi(r,s) = \sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}\rho^i\sigma^j \tag{4.14}$$

e utilizando o resultado obtido em (4.13), temos por fim

$$\xi(r,s) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}\rho^i\sigma^j. \tag{4.15}$$

Como foi mencionado anteriormente, devido ao comportamento dos comutadores de G, a equivalência se traduz em uma igualdade direta entre os expoentes. Sendo assim, as funções ξ resultantes da análise, equação (4.15), representam um conjunto completo de expoentes inequivalentes de G.

Vejamos agora como tal resultado afeta as representações dos grupos abelianos, estes grupos foram amplamente estudados em Weyl (1950) e já havia a evidência de que a composição dos operadores dependeria de uma fase. Seja U_r um conjunto de representativos de uma representação de raio compatível com o conjunto de expoentes obtidos. O comutador pode ser reescrito da seguinte maneira

$$[U_r,U_s] = U_rU_s - U_sU_r = U_rU_s(U_r)^{-1}(U_s)^{-1}, \tag{4.16}$$

mas lembremos que $U_rU_s = e^{i\xi(r,s)}U_{rs}$, então teremos

$$U_rU_s(U_r)^{-1}(U_s)^{-1} = e^{i\xi(r,s)}e^{i\xi(r^{-1},s^{-1})}U_{rs}(U_{rs})^{-1}. \tag{4.17}$$

Temos de (4.10) e (4.11) que $\xi(r,s) = \xi(r^{-1},s^{-1})$, sendo assim (4.17) é

$$U_rU_s(U_r)^{-1}(U_s)^{-1} = e^{i2\xi(r,s)} \cdot 1, \tag{4.18}$$

como o grupo é abeliano $U_rU_s(U_r)^{-1}(U_s)^{-1} = 1$, então

$$\xi(r,s) = n\pi. \tag{4.19}$$

Sendo assim, o expoente local não é sempre equivalente a zero para grupos Abelianos. Apesar do resultado matemático nos mostrar que é possível uma dependência de fase para transformações pertencentes a estes grupos, o único grupo desta classe que possui relevância em física é o grupo $U(1)$, grupo associado as transformações de calibre no Eletromagnetismo. Possuindo apenas um gerador é evidente que não haverá dependência de fase.

4.2 Grupos Pseudo-ortogonais (homogêneos e inomogêneos)

Nesta seção trabalharemos com grupos pseudo-ortogonais gerais, porém é válido ter em mente que os exemplos para tais grupos são: grupo de Lorentz (homogêneo) e grupo de Poincaré (inomogêneo). Como de praxe, ao trabalhar com tais grupos iremos utilizar a notação tensorial e assumir a convenção do somatório de Einstein.

Antes de abordar de fato os expoentes para estes grupos, veremos algumas das noções preliminares acerca dos mesmos, com enfoque em apenas introduzir os conceitos necessários para o procedimento realizado por Bargmann.

4.2.1 Noções preliminares

Comecemos assumindo uma forma quadrática real $g_{ik}x^ix^k$ não singular em m variáveis reais x^i. Utilizaremos os tensores simétricos g_{ik} e g^{ik} para manipulação dos índices. Uma transformação linear

$$x'^i = \omega^i{}_k x^k, \tag{4.20}$$

é dita ser pseudo-ortogonal se deixa a forma quadrática $x^ix_i = g_{ik}x^ix^k$ invariante. Podemos escrever essa transformação da maneira $x' = Wx$. Tal transformação é real e homogênea. Ao nos voltarmos para os exemplos conhecidos (grupo de Lorentz), teríamos que g_{ik} faz as vezes da métrica $\eta_{\mu\nu}$ e a transformação dada pela matriz W seria uma transformação de Lorentz, usualmente denotada por Λ. Na forma exibida em (4.20), $\omega^i{}_k$ é o elemento da matriz de transformação.

Podemos rapidamente entender o motivo de tal transformação ser dita pseudo-ortogonal, a relação de invariância da forma quadrática pode ser escrita como $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$. Se $\eta = \mathbb{1}$, teríamos $\Lambda^T \Lambda = \mathbb{1}$, propriedade que define as transformações ortogonais. Porém, η usualmente assume uma forma diferente de $\mathbb{1}$ (uma forma pseudo-euclideana), dizemos então que Λ satisfaz uma relação de pseudo-ortogonalidade.

Para um certo conjunto de coordenadas adequadas, a forma quadrática g_{ik} é diagonal com elementos ± 1, sendo assim, podemos escrever o produto como

$$x_i x^i = \sum_{i=1}^{p} (x_i)^2 - \sum_{i=p+1}^{m} (x_i)^2, \tag{4.21}$$

note que p representa o número total de índices positivos. Denotaremos o grupo constituído pelas transformações ortogonais por G_p^m, além disso, de acordo com o mencionado, g e $-g$ dão origem a mesma transformação, logo $G_p^m = G_{m-p}^m$. A componente identidade do grupo será denotada por $G_p'^m$, esta componente é a maior conexa que contém o elemento neutro. Para que um elemento W pertença a tal componente, este deve possuir determinante igual à 1 e a primeira componente da matriz positiva, logo este grupo restringe as transformações W as transformações ortogonais próprias, onde $p = m$. Realizando novamente o exercício de associação ao grupo de Lorentz, o grupo $G_p'^m$ seria o ortócrono próprio denotado por $L_+^\uparrow$.

Iremos considerar também as transformações pseudo-ortogonais inomogêneas, dadas por

$$x'^i = \omega^i{}_k x^k + u^i, \tag{4.22}$$

ou ainda $x' = Wx + u$, onde $W \in G_p^m$ e u é um vetor arbitrário responsável por uma translação. Tais transformações formam um grupo, aqui denotado por I_p^m e a componente identidade deste grupo é obtida ao restringir as transformações W ao grupo $G_p'^m$. Para este caso, temos como exemplo o grupo de Poincaré, formado pelas transformações de Lorentz e translações espaço-temporais.

Sendo (4.22) uma transformação inicial, um segundo vetor transformado x'' dado por

$$x'' = W'x' + u', \tag{4.23}$$

se torna

$$x'' = W'Wx + W'u + u'. \tag{4.24}$$

Ao denotar uma transformação pelo par (W, u), temos a seguinte regra de composição

$$(W', u')(W, u) = (W'W, Wu' + u), \tag{4.25}$$

onde a primeira entrada está associada aos elementos que acompanham o vetor x e a segunda aos restantes. A relação (4.25) é a multiplicação de grupo, ou lei de composição,

de I_p^m. Ainda trabalhando essa relação, ao escrever a transformação (4.22) como a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} W & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.26}$$

a lei de composição se torna

$$\begin{pmatrix} W' & u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W'W & W'u + u' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.27}$$

A multiplicação do grupo pode ser interpretada como uma multiplicação de matrizes de ordem $m+1$. As translações são caracterizadas apenas pelos vetores u^i, sendo assim denotadas por $(\mathbb{1}, u)$, seja então outra translação caracterizada por um vetor v^i, temos então

$$(\mathbb{1}, v)(\mathbb{1}, u) = (\mathbb{1}, v + u) \tag{4.28}$$

e também

$$(\mathbb{1}, u)(\mathbb{1}, v) = (\mathbb{1}, u + v). \tag{4.29}$$

As translações formam um grupo, subgrupo invariante de I_p^m, abeliano de acordo com (4.28) e (4.29). Recuperando a discussão anterior, já temos para o grupo de translações o resultado dado por (4.19). Finalizando os conceitos iniciais referentes aos grupos G_p^m e I_p^m, suas dimensões são $\frac{1}{2}m(m-1)$ e $\frac{1}{2}m(m+1)$, respectivamente. Cabe-nos agora explorar a obtenção das álgebras de Lie dos grupos de interesse. A partir destas iremos estabelecer um procedimento para manipulação dos comutadores e investigação da existência (ou não) de representações projetivas, lembrando que os expoentes infinitesimais são definidos a partir de um comutador, incentivando o processo a partir dos mesmos.

4.2.2 As álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ de G_p^m e I_p^m

O processo de obtenção das álgebras de Lie aqui exposto segue Bargmann (1954), porém existem outros procedimentos realizados para obtenção das mesmas para os grupos de interesse físico da classe trabalhada, Lorentz e Poincaré, a partir da manipulação de transformações de similaridade na forma infinitesimal. Esta manipulação se torna clara ao estudarmos o efeito das transformações de simetria do espaço-tempo na Mecânica Quântica.

Para um grupo de Lie de dimensão n com representação matricial real ou complexa de ordem l, isto é, seus elementos r e s são associados à matrizes $Z(r)$ reais ou complexas que satisfazem

$$\begin{aligned} &Z(r)Z(s) = Z(rs), \\ &Z(e) = \mathbb{1} \end{aligned} \tag{4.30}$$

e os elementos de matriz possuem derivadas parciais contínuas com respeito as coordenadas ρ^k de r. A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G é mapeada linearmente em um conjunto de combinações lineares $\sum_{h=1}^{n} \gamma^h K_h$, onde[2]

$$K_h = \frac{\partial Z(e)}{\partial \rho^k}, \tag{4.31}$$

são os geradores infinitesimais de $Z(r)$. Ao trabalhar com a base padrão $a_1, \cdots, a_n$ de $\mathfrak{g}$, adaptada as coordenadas ρ^k, teremos a correspondência $a_h \to K_h$ e, de forma geral,

$$a = \sum_{h=1}^{n} \gamma^h K_h \to \sum_{h=1}^{n} \gamma^h K_h = K_a. \tag{4.32}$$

Assim, o comutador de dois elementos $a, b \in \mathfrak{g}$ se torna

$$[a, b] \to K_{[a,b]} = K_a K_b - K_b K_a. \tag{4.33}$$

Para um conjunto de matrizes K_h linearmente independentes (com respeito aos coeficientes), o mapeamento de (4.33) é unívoco e a relação $K_a K_b - K_b K_a$ determina diretamente $[a, b]$ e as constantes de estrutura, uma vez que tal operação é dada por (3.71). Para o grupo G_p^m as matrizes $Z(r)$ são as matrizes W de ordem $l = m$ e para I_p^m são as matrizes dadas por (4.26) de ordem $l = m + 1$.

Em uma vizinhança $\mathcal{V}$ podemos introduzir coordenadas adequadas nos grupos G_p^m e I_p^m tal que toda matriz W, próxima o suficiente da identidade, pode ser unicamente representada como uma função exponencial do tipo

$$W = \exp P = 1 + P + \frac{1}{2!} P^2 + \cdots, \tag{4.34}$$

em que P é uma matriz com elementos reais ρ_k^i de módulo suficientemente pequeno. A matriz W pertence a G_p^m se, e somente se

$$\rho^{ij} + \rho^{ji} = 0, \tag{4.35}$$

onde $\rho^{ij} = g^{jk} \rho^i{}_k$. W precisa ser uma matriz antissimétrica. Para o grupo G_p^m as $\frac{1}{2} m(m-1)$ variáveis $\rho^{ij} (i < j)$ podem ser tomadas como as variáveis da vizinhança $\mathcal{V}$, já para o grupo I_p^m apenas adicionais a estas variáveis as m componentes das translações u.

Com isso, podemos determinar as matrizes K que serão os geradores dos grupos, para o grupo G_p^m

$$K = M, \tag{4.36}$$

e para o grupo I_p^m

$$K = \begin{pmatrix} M & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.37}$$

[2] Este reconhecimento é análogo ao mencionado no estudo dos grupos abelianos, pode ser visitado em Weinberg (1995) páginas 53-55.

sendo M uma matriz antissimétrica com os elementos $\mu^i{}_k = g_{kj}\mu^{ij}$ e k é um vetor arbitrário. Denotaremos por M_{ij}, com $i \neq j$, a matriz para a qual todos os elementos $\mu^{ij} = -\mu^{ji} = 1$ (enquanto os outros elementos são nulos), denotaremos também por k^i o vetor com componentes $\kappa^j \to \delta^j_i$.

A base padrão na álgebra $\mathfrak{g}$, para o grupo G^m_p, consiste em $\frac{1}{2}m(m-1)$ vetores a_{ij} correspondendo as coordenadas ρ^{ij} e a álgebra $\mathfrak{i}$, para o grupo I^m_p ,contém estes e os vetores adicionais b_i correspondentes as coordenadas u^i. Para que os vetores a herdem as propriedades das matrizes de transformação, definimos como antissimétricos e, portanto, com diagonal nula. Teremos, para qualquer combinação de índices

$$a_{ij} + a_{ji} = 0, \tag{4.38}$$

e a correspondência entre os vetores e as matrizes ficará da seguinte forma, primeiro para G^m_p

$$a_{ij} \to M_{ij} \tag{4.39}$$

e para I^m_p

$$a_{ij} \to \begin{pmatrix} M_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad b_i \to \begin{pmatrix} 0 & k_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

Com a correspondência entre os vetores e as matrizes e a relação (4.33) obtemos as álgebras de Lie

$$[a_{ij}, a_{kl}] = g_{jk}a_{il} - g_{ik}a_{jl} + g_{il}a_{jk} - g_{jl}a_{ik}; \tag{4.41}$$

para os grupos pseudo-ortogonais homogêneos e em adição a esta temos

$$[a_{ij}, b_k] = g_{jk}b_i - g_{ik}b_j; \qquad [b_i, b_j] = 0, \tag{4.42}$$

para os grupos pseudo-ortogonais inomogêneos. Lembremos que m denota a dimensão do espaço em que as transformações do grupo se dão, sendo assim é interessante obter uma relação na qual tenhamos acesso a tal valor, para isso vamos introduzir $a_i{}^j = g^{jk}a_{ik}$ nas relações da álgebra. Começando por (4.41), temos para o lado direito

$$g^{jk}(g_{jk}a_{il} - g_{ik}a_{jl} + g_{il}a_{jk} - g_{jl}a_{ik}). \tag{4.43}$$

Como os vetores a_{ij} são antissimétricos, teremos que $g^{jk}a_{jk} = 0$, já $g^{jk}g_{jk} = m$ fornecendo a dimensão do espaço, assim

$$[a_i{}^j, a_{jl}] = (m-2)a_{il}. \tag{4.44}$$

Ao realizar o mesmo procedimento para (4.42), obtemos

$$[a_i{}^j, b_j] = (m-1)b_i. \tag{4.45}$$

Com a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ obtida, e as relações que dependem da dimensão do espaço, estamos aptos para realizar o mecanismo de Bargmann a fim de investigar a sobrevivência dos expoentes infinitesimais dos grupos de interesse.

4.2.3 Determinação dos expoentes infinitesimais de $\mathfrak{g}$

O procedimento para determinação dos expoentes infinitesimais é diretamente realizado com as relação da álgebra de Lie dos grupos. Como obtemos as relações que dependem de m iremos realizar o processo para determinados intervalos de valores.

Note que por (4.44) ao trabalhar com os expoentes do grupo homogêneo, não temos informação para $m < 2$ e para $m = 2$ temos a solução trivial que será justificada. Sendo assim iremos trabalhar primeiro no caso $m > 2$.

4.2.3.1 Expoentes infinitesimais de G_p^m e I_p^m para $m > 2$.

Seja Ξ um expoente infinitesimal definido na álgebra de Lie dos grupos G_p^m e I_p^m, vamos associar a este expoente o seguinte objeto

$$\Omega_{ij,kl} = \Xi(a_{ij}, a_{kl}), \tag{4.46}$$

onde Ω é apenas um objeto de quatro índices responsável por intermediar a manipulação matemática dos expoentes infinitesimais. Este possui as seguintes propriedades, advindas da antissimetria dos vetores e do expoente infinitesimal

$$\Omega_{kl,ij} = -\Omega_{ij,kl}; \qquad \Omega_{ji,kl} = \Omega_{ij,lk} = -\Omega_{ij,kl}. \tag{4.47}$$

Multipliquemos a relação (4.44) por a_{kl} pela direita e ao fazer o ajuste dos índices teremos

$$[a_i{}^h, a_{hj}]a_{kl} = (m-2)a_{ij}a_{kl}. \tag{4.48}$$

Vamos estabelecer uma correspondência entre o expoente infinitesimal e os produtos dos vetores, da seguinte forma

$$a_{ij}a_{kl} \to \Xi(a_{ij}, a_{kl}), \tag{4.49}$$

sendo assim (4.48) se torna

$$\Xi([a_i{}^h, a_{hj}], a_{kl}) = (m-2)\Xi(a_{ij}, a_{kl}), \tag{4.50}$$

por (4.46)

$$(m-2)\Omega_{ij,kl} = \Xi([a_i{}^h, a_{hj}], a_{kl}) \tag{4.51}$$

e a forma bilinear antissimétrica Ξ está sendo assumida como expoente infinitesimal, logo deve satisfazer $d\Xi = 0$ (Identidade de Jacobi), com isso podemos manipular o lado direito de (4.51),

$$\Xi([a_i{}^h, a_{hj}], a_{kl}) = -\Xi([a_{hj}, a_{kl}], a_i{}^h) - \Xi([a_{kl}, a_i{}^h], a_{hj}), \tag{4.52}$$

utilizando a antissimetria de Ξ para ajustar os sinais, temos então

$$(m-2)\Omega_{ij,kl} = \Xi(a_i{}^h, [a_{hj}, a_{kl}]) + \Xi(a_{hj}, [a_{kl}, a_i{}^h]). \tag{4.53}$$

Queremos ainda remanejar os elementos de Ξ para que possamos utilizar a relação (4.41). Para isso, iremos manipular o segundo termo do lado direito de (4.53). Primeiro, vejamos que

$$\Xi(a_{hj}, [a_{kl}, a_i{}^h]) = \Xi(a_{jh}, [a_i{}^h, a_{kl}]) \tag{4.54}$$

e utilizando g^{hm} para manipular os índices, a bilinearidade de Ξ fornece

$$\Xi(g^{hm}a_{jm}, g_{hm}[a_i{}^m, a_{kl}]) = -\Xi(a_j{}^h, [a_{hi}, a_{kl}]) \tag{4.55}$$

e ao retornar à (4.53)

$$(m-2)\Omega_{ij,kl} = \Xi(a_i{}^h, [a_{hj}, a_{kl}]) - \Xi(a_j{}^h, [a_{hi}, a_{kl}]). \tag{4.56}$$

Obtemos uma relação ideal para introdução dos brackets fornecidos pela álgebra do grupo, então por (4.41) (com os índices correspondentes), o primeiro expoente infinitesimal do lado direito de (4.56) se torna

$$\Xi(a_i{}^h, [a_{hj}, a_{kl}]) = \Xi(a_i{}^h, g_{jk}a_{hl} - g_{hk}a_{jl} + g_{hl}a_{jk} - g_{jl}a_{hk}). \tag{4.57}$$

A linearidade de Ξ nos permite fatorar g e obter

$$\Xi(a_i{}^h, [a_{hj}, a_{kl}]) = g_{jk}\Xi(a_i{}^h, a_{hl}) - g_{hk}\Xi(a_i{}^h, a_{jl}) + g_{hl}\Xi(a_i{}^h, a_{jk}) - g_{jl}\Xi(a_i{}^h, a_{hk}), \tag{4.58}$$

utilizando novamente (4.46) tal expoente é dado por

$$\Xi(a_i{}^h, [a_{hj}, a_{kl}]) = g_{jk}\Omega_i{}^h{}_{,hl} - \Omega_{ik,jl} + \Omega_{il,jk} - g_{jl}\Omega_i{}^h{}_{,hk}. \tag{4.59}$$

O segundo expoente de (4.56), após a utilização de (4.41) é

$$\Xi(a_j{}^h, [a_{hi}, a_{kl}]) = \Omega_{jk,il} - g_{ik}\Omega_j{}^h{}_{,hl} + g_{il}\Omega_j{}^h{}_{,hk} - \Omega_{jl,ik}. \tag{4.60}$$

Ao introduzir estes resultados em (4.56) nota-se que, após utilizar a antissimetria dos índices, os termos sobreviventes são

$$(m-2)\Omega_{ij,kl} = g_{jk}\Omega_i{}^h{}_{,hl} - g_{ik}\Omega_j{}^h{}_{,hl} + g_{il}\Omega_j{}^h{}_{,hk} - g_{jl}\Omega_i{}^h{}_{,hk}. \tag{4.61}$$

Ao definir $\tau_{ik} = -\tau_{ki} = (m-2)^{-1}\Omega_i{}^h{}_{,hk}$ e retornar a forma $\Xi(a_{ij}, a_{kl})$ para Ω, temos

$$\Xi(a_{ij}, a_{kl}) = g_{ik}\tau_{il} - g_{ik}\tau_{jl} + g_{il}\tau_{jk} - g_{jl}\tau_{ik}. \tag{4.62}$$

Como último passo do procedimento, lembremos que a relação de equivalência entre dois expoentes infinitesimais é $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$, ou seja, para demonstrar que um expoente infinitesimal é equivalente a 0 (fase removível) é necessário demonstrar que $\Xi = d[\Lambda]$. Vamos definir na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ uma forma linear Λ, tal que

$$\Lambda(a_{ij}) = \tau_{ij}. \tag{4.63}$$

Assim, de (4.41)

$$\Lambda([a_{ij}, a_{kl}]) = \Lambda(g_{jk}a_{il} - g_{ik}a_{jl} + g_{il}a_{jk} - g_{jl}a_{ik}) \tag{4.64}$$

e, devido à linearidade de Λ

$$\Lambda([a_{ij}, a_{kl}]) = g_{jk}\Lambda(a_{il}) - g_{ik}\Lambda(a_{jl}) + g_{il}\Lambda(a_{jk}) - g_{jl}\Lambda(a_{ik}). \tag{4.65}$$

Por meio da definição de Λ, (4.65) se torna (4.62) e, portanto

$$\Xi = d[\Lambda] \equiv 0. \tag{4.66}$$

Apenas retornando ao resultado mencionado, se $m = 2$, a relação que define o expoente infinitesimal para tais grupos não seria definida, portanto é necessário que $\Xi \equiv 0$. De acordo com o item 3 do Teorema 8, temos a seguinte conclusão:

$$\text{Todo expoente local de } G_p^m (m \geq 2) \text{ é equivalente à zero.} \tag{4.67}$$

Ao pensarmos no grupo de Lorentz, temos que para qualquer dimensão temos o expoente local nulo e, portanto, a fase é equivalente à 1. Não há problemas com as atuações sucessivas e podemos operar da maneira usual sem a preocupação de estarmos negligenciando algo que não poderia ser negligenciado. Para abarcarmos todo o grupo I_p^m precisamos analisar os expoentes associados aos geradores b_i que obedecem (4.42) e (4.45).

Temos que determinar $\Xi(a_{ij}, b_k)$ e $\Xi(b_i, b_k)$, vamos então definir um objeto de três índices η, tal que

$$\eta_{ij,k} = \Xi(a_{ij}, b_k), \tag{4.68}$$

onde $\eta_{ij,k} = -\eta_{ji,k}$. Realizando o mesmo procedimento, vamos multiplicar (4.45) por a_{ij}, à esquerda e ao ajustar os índices teremos

$$(m-1)a_{ij}b_k = a_{ij}[a_k{}^h, b_h]. \tag{4.69}$$

Então por (4.68)

$$(m-1)\eta_{ij,k} = \Xi(a_{ij}, [a_k{}^h, b_h]), \tag{4.70}$$

manipulando o lado direito, de acordo com $d\Xi = 0$, teremos

$$\Xi(a_{ij}, [a_k{}^h, b_h]) = -\Xi(b_h, [a_{ij}, a_k{}^h]) - \Xi(a_k{}^h, [b_h, a_{ij}]). \tag{4.71}$$

Queremos obter brackets que possam ser substituídos diretamente pelas relações da álgebra, notemos que

$$\Xi(a_{ij}, [a_k{}^h, b_h]) = \Xi(a_{ij}, [b_h, a_k{}^h]) + \Xi(a_k{}^h, [a_{ij}, b_h]), \tag{4.72}$$

logo

$$(m-1)\eta_{ij,k} = \Xi([a_{ij}, a_k{}^h], b_h) + \Xi(a_k{}^h, [a_{ij}, b_h]). \tag{4.73}$$

Utilizando (4.41) e (4.42)

$$\Xi([a_{ij}, a_k{}^h], b_h) = g_{jk}\Xi(a_i{}^h, b_h) - g_{ik}\Xi(a_j{}^h, b_h) + g_i{}^h\Xi(a_{jk}, b_h) - g_j{}^h\Xi(a_{ik}, b_h) \tag{4.74}$$

e

$$\Xi(a_k{}^h, [a_{ij}, b_h]) = g_{jh}\Xi(a_k{}^h, b_i) - g_{ih}\Xi(a_k{}^h, b_j). \tag{4.75}$$

De acordo com a definição inicial (4.68), teremos

$$(m-1)\eta_{ij,k} = g_{jk}\eta_i{}^h{}_{,h} - g_{ik}\eta_j{}^h{}_{,h} + g_i{}^h\eta_{jk,h} - g_j{}^h\eta_{ik,h} + g_{jh}\eta_k{}^h{}_{,i} - g_{ih}\eta_k{}^h{}_{,j}, \tag{4.76}$$

ou abaixar os índices e utilizar a antissimetria de η para eliminar os termos

$$(m-1)\eta_{ij,k} = g_{jk}\eta_i{}^h{}_{,h} - g_{ik}\eta_j{}^h{}_{,}. \tag{4.77}$$

Definindo $\theta_i = (m-1)^{-1}\eta_i{}^h{}_{,h}$, ao retornar a forma Ξ para η, obtemos

$$\Xi(a_{ij}, b_k) = g_{jk}\theta_i - g_{ik}\theta_j. \tag{4.78}$$

Para o expoente que contém apenas os geradores b vamos multiplicar a relação (4.45) por b_j à direita, obtendo

$$(m-1)b_ib_j = [a_i{}^h, b_h]b_j \tag{4.79}$$

e ao realizar a mesma associação já feita, do produto com os expoentes,

$$(m-1)\Xi(b_i, b_j) = \Xi([a_i{}^h, b_h], b_j). \tag{4.80}$$

Como já feito anteriormente, utilizaremos $d\Xi = 0$ para manipular o lado direito de (4.80)

$$\Xi([a_i{}^h, b_h], b_j) = -\Xi([b_j, a_i{}^h], b_h - \Xi([b_h, b_j], a_h{}^h) \tag{4.81}$$

onde o termo que contém $[b_i, b_j]$ é nulo de acordo com a relação da álgebra (4.42). Assim

$$(m-1)\Xi(b_i, b_j) = \Xi([a_i{}^h, b_j], b_h) \tag{4.82}$$

e de (4.42)

$$(m-1)\Xi(b_i, b_j) = g^h{}_j\Xi(b_i, b_h) - g_{ij}\Xi(b^h, b_h). \tag{4.83}$$

Uma vez que Ξ é antissimétrico $\Xi(b^h, b_h) = -\Xi(b_h, b^h)$, logo $\Xi(b^h, b_h) = 0$; já o termo sobrevivente só e não nulo se $h = j$, então

$$(m-1)\Xi(b_i, b_j) = \Xi(b_i, b_j), \tag{4.84}$$

ou seja

$$(m-2)\Xi(b_i, b_j) = 0. \tag{4.85}$$

Estamos estudando o caso $m > 2$, dessa forma concluí-se que

$$\Xi(b_i, b_j) = 0. \tag{4.86}$$

Já o expoente que envolve a e b, será trabalhado como anteriormente. Definimos uma forma linear Λ na álgebra de Lie de I_p^m tal que

$$\Lambda(a_{ij}) = \tau_{ij}; \qquad \Lambda(b_i) = \theta_i. \tag{4.87}$$

Ao calcular $\Lambda([a_{ij}, a_{kl}])$, teremos

$$\Lambda([a_{ij}, a_{kl}]) = g_{jk}\Lambda(a_{il}) - g_{ik}\Lambda(a_{jl}) + g_{il}\Lambda(a_{jk}) - g_{jl}\Lambda(a_{ik}), \tag{4.88}$$

o mesmo resultado de (4.62). Para $\Lambda([a_{ij}, b_k])$

$$\Lambda([a_{ij}, b_k]) = \Lambda(g_{jk}b_i - g_{ik}b_j), \tag{4.89}$$

pela linearidade de Λ,

$$\Lambda([a_{ij}, b_k]) = g_{jk}\Lambda(b_i) - g_{ik}\Lambda(b_j). \tag{4.90}$$

Pela definição da forma linear Λ, teremos

$$\Lambda([a_{ij}, b_k]) = g_{jk}\tau_i - g_{ik}\tau_j, \tag{4.91}$$

isto é

$$\Xi = d[\Lambda]. \tag{4.92}$$

Dos resultados expostos em (4.88) e (4.90), concluí-se que

$$\text{Todo expoente local de } I_p^m (m > 2) \text{ é equivalente à zero.} \tag{4.93}$$

Este resultado não é válido para $m = 2$. Para analisar tal caso vamos assumir g_{ik} diagonal. Assim pela relação (4.42)

$$[a_{12}, b_1] = -g_{11}b_2, \tag{4.94}$$

$$[a_{12}, b_2] = g_{22}b_1, \tag{4.95}$$

$$[b_1, b_2] = 0. \tag{4.96}$$

Ao utilizar a_{12}, b_1 e b_2 no cálculo de $d\Xi$ obtemos

$$\Xi([a_{12}, b_1], b_2) + \Xi([b_2, a_{12}], b_1) + \Xi([b_1, b_2], a_{12}). \tag{4.97}$$

Por (4.42) o segundo termo é nulo e ao fazer a substituição dos brackets pelos obtidos em (4.94) e (4.95) ficamos com

$$-g_{11}\Xi(b_2, b_2) + g_{22}\Xi(b_1, b_1). \tag{4.98}$$

Assim como feito anteriormente, como Ξ é antissimétrico $\Xi(b_i, b_j) = -\Xi(b_j, b_i)$, logo se $i = j$ temos $\Xi(b_i, b_i) = 0$. Deste modo

$$d\Xi(a_{12}, b_1, b_2) = 0, \tag{4.99}$$

portanto toda forma bilinear antissimétrica Ξ é um expoente infinitesimal. Para remover as fases é necessário que $\Xi = d[\Lambda]$; ao fazer esta exigência

$$\Xi(a_{12}, b_1) = -g_{11}\Lambda(b_2), \tag{4.100}$$

$$\Xi(a_{12}, b_2) = g_{22}\Lambda(b_1), \tag{4.101}$$

e

$$\Xi(b_1, b_2) = 0. \tag{4.102}$$

Uma vez que $\Lambda(b_i)$ pode ser escolhida arbitrariamente, segue que $\Xi \equiv 0$ se, e somente se, $\Xi(b_1, b_2) = 0$. Isto é, para grupos pseudo-ortogonais de dimensão 2 é possível que o expoente infinitesimal seja não-nulo e as relações de composição dependam da fase. Esta sobrevivência acarreta a necessidade de se reportar a fase em todas operações e, como a mesma depende dos elementos do grupo, haveria uma grande complicação ao se trabalhar atuações sucessivas de transformações.

A referência principal do trabalho, Bargmann (1954), explora ainda a construção dos expoentes nesse caso. Não abordaremos tal construção, uma vez que o objetivo principal do trabalho é encontrar os casos para os quais não se pode remover os expoentes locais.

4.3 Grupo de Galileu

Iremos abordar o grupo de Galileu G, formado pelas transformações não-relativísticas que conectam dois referenciais inerciais. Denotaremos por x o vetor de coordenadas e por t o tempo. As transformações de Galileu são

$$x' = Wx + tv + u \tag{4.103}$$

e

$$t' = t + \tau, \tag{4.104}$$

onde W é uma transformações ortogonal ($W \in G_3^3$), v é um vetor arbitrário referente à velocidade relativa entre os referenciais, u um vetor arbitrário associado à translação espacial e τ um número real responsável pela translação temporal. Ao contabilizar as dimensões de W, u e v, temos 9 dimensões e como τ é um número real a dimensão total de G é 10. Para os grupos pseudo-ortogonais inomogêneos denotávamos as transformações pela dupla (W, u), para o grupo de Galileu iremos denotar as transformações pela quadrupla (W, τ, v, u).

Para obtermos a regra de composição do grupo, façamos uma segunda transformação

$$x'' = W'x' + t'v' + u' \tag{4.105}$$

e

$$t'' = t' + \tau'. \tag{4.106}$$

Ao substituir (4.103) e (4.104), obtemos

$$x'' = W'Wx + t(W'v + v') + W'u + u' + \tau v' \tag{4.107}$$

e

$$t'' = t + \tau + \tau'. \tag{4.108}$$

Ao denotar ambas as transformações pela quádrupla (W, τ, v, u), a regra de composição assume a forma

$$(W, \tau, v, u) \cdot (W', \tau', v', u') = (WW', \tau + \tau', Wv' + v, Wu' + u + \tau' v). \tag{4.109}$$

O elemento unitário de G é $(\mathbb{1}, 0, 0, 0)$. Para obtermos a inversa r^{-1} façamos a composição de $r = (W, \tau, v, u)$ com um elemento arbitrário (A, b, c, d) com a imposição de que

$$(W, \tau, v, u) \cdot (A, b, c, d) = (\mathbb{1}, 0, 0, 0). \tag{4.110}$$

De acordo com (4.109) teremos as seguintes condições

$$\begin{aligned} &WA = \mathbb{1}, \\ &\tau + b = 0, \\ &Wc + v = 0, \\ &Wd + u + bv = 0. \end{aligned} \tag{4.111}$$

As três primeiras equações são imediatas, fornecendo $A = W^{-1}$ e $b = -\tau$ e $c = -W^{-1}v$. Para a última utilizamos o resultado obtido para b e obtemos $d = -W^{-1}(u - \tau v)$ e desta forma o elemento inverso r^{-1} é dado por

$$r^{-1} = \left(W^{-1}, -\tau, -W^{-1}v, -W^{-1}(u - \tau v)\right). \tag{4.112}$$

Podemos também particionar qualquer elemento de G da forma

$$(W, \tau, v, u) = (\mathbb{1}, 0, v, 0) \cdot (W, \tau, 0, u), \tag{4.113}$$

diretamente de (4.109). O primeiro fator do lado direito é conhecido como uma transformação de Galileu pura já que envolve apenas a velocidade entre os referenciais.

Assim como foi feito para os grupos pseudo-ortogonais podemos escolher, em uma vizinhança da origem, um conjunto de coordenadas ρ^k. Para o grupo de Galileu, escolheremos as três coordenadas ρ_{ij} (com $i < j$), as componentes u^i e v^i $(i = 1, 2, 3)$, dos respectivos vetores, e τ. Podemos então explorar a correspondência entre os geradores e as matrizes a fim de obter a álgebra de Lie de G.

4.3.1 A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G

Para o grupo de Galileu as transformações K tem a forma

$$K = (M, \phi, k', k) = \begin{pmatrix} M & k' & k \\ 0 & 0 & \phi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.114}$$

onde M é definida como anteriormente, k e k' são vetores arbitrários associados a v e u, respectivamente, e ϕ um número real. Os vetores da base padrão de G serão denotados por: $a_{ij}(i < j)$, b_i, d_i, f (os vetores $a_{ij}(i \geq j)$ são definidos por (4.38)). A correspondência entre vetor e matriz de transformação será dada por

$$\begin{aligned} &a_{ij} \to (M_{ij}, 0, 0, 0); \\ &b_i \to (0, 0, 0, k_i); \\ &d_i \to (0, 0, k_i, 0); \\ &f \to (0, 1, 0, 0), \end{aligned} \tag{4.115}$$

em que o vetor k_i é o vetor com as componentes $\kappa^j \to \delta^j_i$. Os geradores b_i e d_i são responsáveis pelas translações e transformações de Galileu puras, respectivamente. Desta forma, obtemos a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ para o grupo de Galileu G:

$$[a_{ij}, a_{kl}] = \delta_{jk}a_{il} - \delta_{ik}a_{jl} + \delta_{il}a_{jk} - \delta_{jl}a_{ik}; \tag{4.116}$$

$$[a_{ij}, b_k] = \delta_{jk}b_i - \delta_{ik}b_j; \qquad [b_i, b_j] = 0; \tag{4.117}$$

$$[a_{ij}, d_k] = \delta_{jk}d_i - \delta_{ik}d_j; \quad [d_i, d_j] = 0; \quad [d_i, b_j] = 0; \tag{4.118}$$

$$[a_{ij}, f] = 0; \quad [b_k, f] = 0; \quad [d_k, f] = b_k. \tag{4.119}$$

Seguindo exatamente o mesmo procedimento feito para os grupos pseudo-ortogonais homogêneos e inomogêneos, de posse da álgebra podemos determinar os expoentes infinitesimais do grupo.

4.3.2 Determinação dos expoentes infinitesimais

Comecemos assumindo a existência de um expoente infinitesimal Ξ de $\mathfrak{g}$. Notemos que os elementos $(W, 0, v, 0)$ e $(W, 0, v, 0)$ pertencentes a G formam subgrupos isomorfos ao grupo pseudo-ortogonal inomogêneo I^3_3, isto é, o grupo de transformações pseudo-ortogonais de dimensão 3 com diagonal $(+, +, +)$. Por consequência desse isomorfismo, os vetores a_{ij}, b_k e a_{ij}, d_k geram subálgebras $\mathfrak{g}$ isomorfas a álgebra de Lie do grupo I^3_3.

Esse isomorfismo implica a herança dos resultados obtidos no estudo dos grupos pseudo-ortogonais, apenas com o ajuste de $m = 3$ e $g_{ik} = \delta_{ik}$. Sendo assim, já temos estabelecido para G

$$\Xi(a_{ij}, a_{kl}) = \delta_{ik}\tau_{il} - \delta_{ik}\tau_{jl} + \delta_{il}\tau_{jk} - \delta_{jl}\tau_{ik}, \tag{4.120}$$

em que τ_{ik} é dado por

$$\tau_{ik} = \Omega_i{}^h{}_{,hk}. \tag{4.121}$$

Então

$$\Xi(a_{ij}, b_k) = \delta_{jk}\theta_i - \delta_{ik}\theta_j, \tag{4.122}$$

com

$$\theta_i = 2\eta_i{}^h{}_{,h}. \tag{4.123}$$

Podemos obter uma relação envolvendo a dimensão ($m = 3$) para os geradores d, processo análogo ao feito para os geradores a. Então ao introduzir $a_i{}^j = \delta^{jk}a_{ik}$ na primeira das equações de (4.118), obtemos

$$[a_i{}^j, d_j] = 2d_i. \tag{4.124}$$

Resta-nos obter relações que nos permitam analisar os expoentes que envolvem os geradores d e também os expoentes que contém f. Para os geradores de transformações galileanas, comecemos associando o expoente infinitesimal a um objeto de três índices

$$\Xi(a_{ij}, d_k) = \Gamma_{ij,k}. \tag{4.125}$$

Ao multiplicar (4.124 por $a_{a_{kl}}$ a esquerda, temos

$$a_{kl}[a_i{}^j, d_j] = 2a_{kl}d_i. \tag{4.126}$$

Associando o expoente infinitesimal aos produtos obtemos

$$2\Xi(a_{kl}, d_j) = \Xi(a_{kl}, [a_i{}^j, d_j]). \tag{4.127}$$

Ao manipular o lado direito, de acordo com $d\Xi = 0$,

$$\Xi(a_{kl}, [a_i{}^j, d_j]) = -\Xi(d_j, [a_{kl}, a_i{}^j]) - \Xi(a_i{}^j, [d_j, a_{kl}]). \tag{4.128}$$

Utilizando a antissimetria de Ξ, dos brackets e (4.125),

$$2\Gamma_{ij,k} = \Xi([a_{kl}, a_i{}^j], d_j) + \Xi(a_i{}^j, [a_{kl}, d_j]) \tag{4.129}$$

e temos uma relação para Γ onde os expoentes infinitesimais estão em um ordenamento suficiente para utilizar as relações da álgebra. Vamos trabalhar separadamente os expoentes infinitesimais, começando com o que envolve o bracket $[a_{kl}, a_i{}^j]$. Ao introduzir (4.116) com os devidos ajustes nos índices, temos

$$\Xi([a_{kl}, a_i{}^j], d_j) = \delta_{li}\Xi(a_i{}^j, d_j) - \delta_{ki}\Xi(a_h{}^j, d_j) + \delta_k{}^j\Xi(a_{li}, d_j) - \delta_h{}^j\Xi(a_{ki}, d_j). \tag{4.130}$$

Já ao introduzir a primeira relação de (4.118) no expoente restante

$$\Xi(a_i{}^j, [a_{kl}, d_j]) = \delta_{lj}\Xi(a_i{}^j, d_k) - \delta_{lk}\Xi(a_i{}^j, d_l). \tag{4.131}$$

Realizando as somas nos índices mudos e eliminando os termos que se repetem, através da antissimetria de Ξ, tem-se

$$\Gamma_{kl,j} = \delta_{li}\frac{1}{2}\Xi(a_k{}^j, d_j) - \delta_{ki}\frac{1}{2}\Xi(a_l{}^j, d_j). \tag{4.132}$$

Ao definir $\theta'_i = \frac{1}{2}\Xi(a_i{}^j, d_j)$, reutilizando (4.125) e ajustando todos os índices, temos uma relação para o primeiro expoente que envolve o gerador d:

$$\Xi(a_{ij}, d_k) = \delta_{jk}\theta'_i - \delta_{ik}\theta'_j. \tag{4.133}$$

Agora, multipliquemos (4.124) por d_k à direita

$$[a_i{}^j, d_j]d_k = 2d_i d_k, \tag{4.134}$$

associando os expoentes infinitesimais

$$2\Xi(d_i, d_k) = \Xi([a_i{}^j, d_j], d_k). \tag{4.135}$$

Ao calcular a identidade da Jacobi teremos um expoente infinitesimal com o bracket $[d_i, d_k]$, portanto teremos

$$2\Xi(d_i, d_k) = \Xi([a_i{}^j, d_k, d_j]) \tag{4.136}$$

e podemos utilizar a primeira relação de (4.118), obtendo

$$2\Xi(d_i, d_k) = \delta^j_k\Xi(d_i, d_j) - \delta_{ik}\Xi(d^j, d_j). \tag{4.137}$$

Como Ξ é antissimétrica, temos $\Xi(d^j, d_j) = -\Xi(d_j, d^j)$, logo $\Xi(d^j, d_j) = 0$. O primeiro termo só será não nulo se $j = k$, então

$$\Xi(d_i, d_k) = 0. \tag{4.138}$$

Os expoentes infinitesimais do grupo de Galileu estão determinados nas relações (4.120), (4.122) e (4.138). Podemos investigar a equivalência a partir da relação $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$ definindo a forma linear Λ como

$$\begin{aligned} \Lambda(a_{ij}) &= \tau_{ij} \\ \Lambda(b_i) &= \theta_i \\ \Lambda(d_i) &= \theta'_i \\ \Lambda(f) &= 0. \end{aligned} \tag{4.139}$$

Note que ao calcular $d[\Lambda]$, a única diferença do caso explorado nos grupos pseudo-ortogonais é que $g_{ik} \to \delta_{ik}$, pois Λ é linear e atua diretamente nos geradores. Então para $\Xi'(a_{ij}, a_{kl}), \Xi'(a_{ij}, b_i), \Xi'(b_i, b_j)$ teremos os mesmos resultados já obtidos, isto é

$$\Xi'(a_{ij}, a_{kl}) = \Xi'(a_{ij}, b_i) = \Xi'(b_i, b_j) = 0. \tag{4.140}$$

Pela relação (4.133), teremos para o expoente equivalente

$$\Xi'(a_{ij}, d_k) = \delta_{jk}\theta'_i - \delta_{ik}\theta'_j - \delta_{jk}\Lambda(d_i) - \delta_{ik}\Lambda(d_k). \tag{4.141}$$

De acordo com a definição de Λ, obtemos

$$\Xi'(a_{ij}, d_k) = 0 \tag{4.142}$$

e por fim, diretamente de (4.138), tem-se

$$\Xi'(d_i, d_j) = 0. \tag{4.143}$$

Resta-nos agora analisar o expoente $\Xi(b_i, d_k)$ e os que dizem respeito a f. Para estes últimos expoentes vamos calcular $d\Xi$ para três combinações possíveis. Primeiro

$$d\Xi'({a_i}^h, a_{hj}, f) = \Xi'([{a_i}^h, a_{hj}], f) + \Xi'([f, {a_i}^h], a_{hj}) + \Xi'([a_{hj}, f], {a_i}^h) = 0. \tag{4.144}$$

A primeira relação de (4.119) nos permite eliminar os dois últimos termos do lado direito, de modo que

$$\Xi'([{a_i}^h, a_{hj}], f) = 0. \tag{4.145}$$

Ao adaptar a equação (4.44) para o caso atual, temos $[{a_i}^h, a_{hj}] = a_{ij}$, então

$$\Xi'(a_{ij}, f) = 0. \tag{4.146}$$

Trabalhando a segunda combinação envolvendo f,

$$d\Xi'({a_i}^j, b_j, f) = \Xi'([{a_i}^j, b_j], f) + \Xi'([f, {a_i}^j], b_j) + \Xi'([b_j, f], {a_i}^j) = 0. \tag{4.147}$$

Utilizando a primeira e a segunda relação de (4.119), temos que os dois últimos termos do lado direito são nulos, sendo assim

$$\Xi'([{a_i}^j, b_j], f) = 0. \tag{4.148}$$

Adaptando agora (4.45), teremos $[{a_i}^j, b_j] = 2b_i$ e

$$\Xi'(b_i, f) = 0. \tag{4.149}$$

Por fim, para o expoente que envolve d e f, trabalharemos

$$d\Xi'({a_i}^j, d_j, f) = \Xi'([{a_i}^j, d_j], f) + \Xi'([f, {a_i}^j], d_j) + \Xi'([d_j, f], {a_i}^j) = 0. \tag{4.150}$$

Desta vez os dois últimos termos do lado direito são eliminados pela primeira e pela terceira relação presente em (4.119), logo

$$\Xi'([{a_i}^j, d_j], f) = 0. \tag{4.151}$$

Por (4.124), encontramos

$$\Xi'(d_i, f) = 0. \tag{4.152}$$

Resta apenas uma única relação presente na álgebra do grupo a ser trabalhada. Para esta última análise, façamos a multiplicação por d_k à direta em $[a_i{}^j, b_j] = 2b_i$

$$[a_i{}^j, b_j]d_k = 2b_i d_k. \tag{4.153}$$

Ao associar os expoentes infinitesimais aos produtos, teremos

$$2\Xi'(b_i, d_k) = \Xi'([a_i{}^j, b_j], d_k). \tag{4.154}$$

Notemos que ao abordar a manipulação usual para o lado direito haverá um termo que contém $[b_j, d_k] = 0$, sendo assim

$$2\Xi'(b_i, d_k) = \Xi'([a_i{}^j, d_k], b_j). \tag{4.155}$$

Por (4.118)

$$2\Xi'(b_i, d_k) = \delta^j_k \Xi'(d_i, b_j) - \delta_{ik}\Xi'(d^j, b_j), \tag{4.156}$$

ao realizar a soma no índice j, tem-se

$$2\Xi'(b_i, d_k) = -\Xi'(b_k, d_i) + \delta_{ik}\Xi'(b^j, d_j). \tag{4.157}$$

Note que podemos fazer $i \to k$ e $k \to i$ nesta relação para obter o expoente que envolve b_k e d_i, isto é

$$\Xi'(b_k, d_i) = -\frac{1}{2}\Xi'(b_i, d_k) + \frac{1}{2}\delta_{ik}\Xi'(b^j, d_j). \tag{4.158}$$

Utilizando este resultado em (4.157), temos então

$$2\Xi'(b_i, d_k) = \frac{1}{2}\Xi'(b_i, d_k) + \frac{1}{2}\delta_{ik}\Xi'(b^j, d_j), \tag{4.159}$$

ou ainda

$$\Xi'(b_i, d_k) = \delta_{ik}\frac{1}{3}\Xi'(b^j, d_j), \tag{4.160}$$

e, ao definir $\gamma = \frac{1}{3}\Xi'(b^j, d_j)$, ficamos com

$$\Xi'(b_i, d_k) = -\Xi'(d_k, b_i) = \gamma\delta_{ik}. \tag{4.161}$$

Isto é, Ξ' é nulo para todos os pares de geradores com a possível exceção de (4.161). Além disso, para qualquer γ, todo Ξ' é um expoente infinitesimal já que a identidade $d\Xi'$ é satisfeita para todas as combinações de vetores, o expoente Ξ' só é não nulo se $\gamma \neq 0$.

4.4 Sistematizando o procedimento de determinação de expoentes infinitesimais

Ao trabalhar com os grupos pseudo-ortogonais homogêneos, inomogêneos e com o grupo de Galileu houve diversas repetições de um procedimento estritamente análogo. Nesta seção o objetivo é sistematizar essas etapas a fim de obter um processo padrão para abordar tais grupos.

Uma etapa preliminar na obtenção dos expoentes infinitesimais é a obtenção da álgebra do grupo, a partir desta podemos trabalhar cada um dos brackets entre os geradores. Seja G um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo com um conjunto de geradores dado por $\{a, a', a''\}$, haverá relações de comutações entre estes três elementos. Para estabelecer as etapas de obtenção de Ξ, iremos trabalhar com as relações que envolvem o gerador arbitrário a:

1. Como primeiro passo, define-se um objeto que fará as vezes do expoente infinitesimal, como em (4.46).

2. Em seguida, ocorre a busca por uma relação na forma (4.44) onde há dependência da dimensão do espaço e também a relação de comutação é dada em função de um único gerador.

3. De posse desta relação, multiplica-se ambos os lados por um gerador rotulado por um novo índice e associa-se aos produtos um expoente infinitesimal Ξ, fornecendo uma estrutura do tipo
$$\Omega \propto \Xi([a, a'], a''). \tag{4.162}$$

4. Como G é um grupo de Lie todos seus elementos satisfazem a identidade de Jacobi. Uma vez que Ξ é um expoente infinitesimal de G, temos $d\Xi = 0$. Utiliza-se esta relação para manipular o lado direito de (4.162) a fim de obter, nos argumentos de Ξ, os brackets que compõe a álgebra de G.

5. Após a inserção da álgebra e demais cálculos, será obtida uma relação análoga a (4.62). Isto é, uma forma para o expoente infinitesimal destes dois elementos.

6. Como última etapa, busca-se demonstrar se tal expoente é equivalente a 0, ou seja, demonstrar que é possível remover a fase. Para isso é necessário que $\Xi = d[\Lambda]$, onde Λ é uma forma linear definida na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G e $d[\Lambda] = \Lambda([a, a'])$, para dois elementos a e a'.

7. A forma linear Λ é definida de tal forma que ao calcular $d[\Lambda]$ se tenha a mesma relação obtida para Ξ, demonstrando assim que $\Xi \equiv 0$. Caso não seja possível tal definição,

temos que o expoente infinitesimal sobrevive. Ao recorrer ao item 3 do Teorema 8, passamos o resultado referente ao expoente infinitesimal para os expoentes locais.

4.5 Grupos Semi-Simples

Finalizando as aplicações de Bargmann (1954), iremos abordar os grupos semi-simples, redundando em um teorema amplamente citado na literatura.

Seja G um grupo de Lie semi-simples, isto é, um grupo de Lie que não possui nenhum subgrupo invariante abeliano. Temos como exemplo para tais grupos. Os grupos pseudo-ortogonais homogêneos. A base para a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ para o grupo G é dada por $a_1, \cdots, a_n$, com constantes de estrutura c_{ik}^m referentes à base. Vamos denotar por A_i a matriz que possui as constantes de estrutura como elementos, isto é, com elementos $\alpha^m{}_k = c_{ik}^m$. Assim a identidade de Jacobi (3.75) $c^l{}_{mk}c^m{}_{ij} + c^l{}_{mi}c^m{}_{jk} + c^l{}_{mj}c^m{}_{ki}$ se torna

$$c^m{}_{ij}A_m - c^l{}_{im}c^m{}_{jk} + c^l{}_{jm}c^m{}_{ik} = 0, \tag{4.163}$$

onde utilizamos a antissimetria nos índices inferiores para as constantes de estrutura e o reconhecimento da matriz A. Realizando novamente o reconhecimento, temos

$$A_iA_j - A_jA_i = c^m{}_{ij}A_m. \tag{4.164}$$

Podemos utilizar o tensor $\gamma_{ij} = \mathrm{Tr}(A_iA_j) = c^m{}_{ik}c^k{}_{jm}$ para subir e abaixar índices, assim

$$c_{lij} = \gamma_{lm}c^m{}_{ij} = \mathrm{Tr}(A_lA_m)c^m{}_{ij} \tag{4.165}$$

e como o traço é uma operação linear, podemos escrever

$$c_{lij} = \mathrm{Tr}(A_lc^m{}_{ij}A_m). \tag{4.166}$$

Por (4.164), ficamos com

$$c_{lij} = \mathrm{Tr}\left(A_l(A_iA_j - A_jA_i)\right) = \mathrm{Tr}(A_lA_iA_j) - \mathrm{Tr}(A_lA_jA_i). \tag{4.167}$$

Note que ao calcular $\gamma^{if}\gamma_{ij}$, temos

$$\gamma^{if}\gamma_{ij} = \delta_j^f = \gamma^{if}c^m{}_{ik}c^k{}_{jm} \tag{4.168}$$

e ao realizar a soma em i no lado direito e ajustar os índices

$$\delta_j^i = c^m{}_{ik}c^k{}_{jm} = c^i{}_{km}c_j{}^m{}_k. \tag{4.169}$$

Com este resultado podemos revisitar o bracket $[a_i, a_j] = c^m{}_{ik}a_m$ multiplicando ambos os lados por $c_l{}^{ji}$:

$$c_l{}^{ji}[a_i, a_j] = c_l{}^{ji}c^m{}_{ik}a_m. \tag{4.170}$$

Com a identidade obtida em (4.169)

$$a_l = c_l{}^{ji}[a_i, a_j]. \tag{4.171}$$

Seja Ξ um expoente infinitesimal definido em $\mathfrak{g}$, relembrando a equação (3.117)

$$\beta_{mj}c^m{}_{kl} + \beta_{mk}c^m{}_{lj} + \beta_{ml}c^m{}_{jk} = 0, \tag{4.172}$$

isto é, $d\Xi = 0$ escrito em função de $\beta_{ij} = \Xi(a_i, a_j)$ e das constantes de estrutura, podemos rearranjar (4.172), obtendo

$$\beta_{mj}c^m{}_{kl} = \beta_{km}c^m{}_{lj} + \beta_{lm}c^m{}_{jk}. \tag{4.173}$$

Multiplicando esta relação por $c_i{}^{lk}$, obtemos

$$\beta_{mj}c^m{}_{kl} = \beta_{km}c^m{}_{lj}c_i{}^{lk} + \beta_{lm}c^m{}_{jk}c_i{}^{lk}. \tag{4.174}$$

No lado esquerdo de (4.174) temos a identidade (4.169), logo

$$\beta_{ij} = \beta_{km}c^m{}_{lj}c_i{}^{lk} - \beta_{lm}c^m{}_{kj}c_i{}^{lk}. \tag{4.175}$$

Note que em ambos os termos do lado direito os índices l e k são mudos, podemos então fazer $l \to k$ e $k \to l$ no segundo termo a fim de ordená-los

$$\beta_{ij} = \beta_{km}c^m{}_{lj}c_i{}^{lk} - \beta_{km}c^m{}_{lj}c_i{}^{kl}, \tag{4.176}$$

ou ainda

$$\beta_{ij} = 2\beta_{km}c^m{}_{lj}c_i{}^{lk}. \tag{4.177}$$

Por fim, temos β_{ij} dado por

$$\beta_{ij} = 2\beta^k{}_m c^m{}_{lj}c_i{}^{lk}. \tag{4.178}$$

Reconhecendo $\beta^k{}_m$ como elemento de uma matriz B esta relação se torna

$$\beta_{ij} = 2\,\mathrm{Tr}(BA_jA_i). \tag{4.179}$$

Como β_{ij} é antissimétrico a equação (4.179) passa a ser

$$\beta_{ij} = \mathrm{Tr}(BA_iA_j) - \mathrm{Tr}(BA_iA_j) = \mathrm{Tr}\left(B(A_jA_i - A_iA_j)\right). \tag{4.180}$$

Diretamente de (4.164)

$$\beta_{ij} = \mathrm{Tr}(Bc^m{}_{ji}A_m), \tag{4.181}$$

ao definir $\lambda_m = \mathrm{Tr}(BA_m)$, obtemos por fim

$$\beta_{ij} = c^m{}_{ji}\lambda_m. \tag{4.182}$$

Ao relembrar que $\beta_{ij} = \Xi(a_i, a_j)$, unindo as relações (4.164) e (4.182), temos

$$\Xi(a_i, a_j) = [A_j, A_i]. \tag{4.183}$$

Ao definir na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, uma forma linear Λ tal que

$$\Lambda(a_i) = \lambda_i, \tag{4.184}$$

onde a_i é um vetor associado à matriz A_i, temos

$$\Lambda([a_j, a_i]) = [\Lambda(a_j), \Lambda(a_i)] = \Lambda(a_m) = \lambda_m. \tag{4.185}$$

Concluindo assim que $\Xi = d[\Lambda]$, logo $\Xi \equiv 0$, o que prova o teorema abaixo:

Teorema 9. *Todo expoente local de um grupo de Lie semi-simples é equivalente à zero.*

Como mencionado, um exemplo de grupos de Lie semi-simples são os grupos de Lie pseudo-ortogonais homogêneos e para estes obtemos o resultado (4.67). Sendo assim, por este teorema, poderíamos partir apenas para o estudo de I_p^m.

5 A análise das representações projetivas via Cargas Centrais

O presente capítulo é baseado na seção 2.7 de Weinberg (1995) onde, a partir da análise do produto entre dois elementos do grupo dependendo de uma fase complexa unimodular, obtém-se uma ferramenta para analisar a existência ou não de representações de raio (ou projetivas). E também motivado por da Rocha (2021) devida aplicação do método para os grupos $SIM(2)$ e $ISIM(2)$. Neste capítulo iremos utilizar a notação já presente no trabalho, portanto será uma adaptação da notação utilizada no livro de referência. Esta nova ferramenta é obtida através de uma análise diferente da realizada na teoria de Bargmann, soando como um ferramental alternativo para a resolução do problema das representações de raio. Os operadores associados às transformações do grupo serão denotados por $U(r)$ diferente de como era denotado anteriormente U_r, para que a notação fique mais clara.

Sejam r e s elementos de um grupo G, U_r e U_s os operadores que representam estes elementos. A relação de representação nos fornece

$$U(r)U(s) = e^{i\xi(r,s)}U(rs), \tag{5.1}$$

sendo $\xi(r,s)$ uma fase real. Como condição do grupo, é necessário que a associatividade seja satisfeita, o que nos leva a seguinte condição

$$\xi(s,r) + \xi(t,sr) = \xi(t,s) + \xi(ts,r), \tag{5.2}$$

onde $t, rs, st \in G$, condição esta uma das definidoras para os expoentes locais no formalismo de Bargmann.

Ao utilizarmos uma fase da forma

$$\xi(r,s) = x(rs) - x(r) - x(s), \tag{5.3}$$

teremos em (5.2)

$$\begin{aligned} x(sr) - x(s) - x(r) + x(rst) - x(t) - x(sr) = \\ x(ts) - x(t) - x(s) + x(tsr) - x(ts) - x(r), \end{aligned} \tag{5.4}$$

o que satisfaz a identidade automaticamente. Porém, uma representação deste tipo pode ser substituída por uma representação ordinária ao fazermos a redefinição

$$\bar{U}(r) = e^{ix(r)}U(r), \tag{5.5}$$

obtendo

$$\bar{U}(r)\bar{U}(r) = \bar{U}(rs). \tag{5.6}$$

O conjunto de funções ξ que satisfazem (5.2) e diferem entre si apenas pela função Δ_{rs} dada em (5.3) é chamado de 2-cociclos, assim como será apresentado e abordado no capítulo seguinte. Tais funções são uma ferramenta advinda da topologia algébrica utilizada para trabalhar a questão das representações projetivas deste ponto de vista. Um cociclo dito trivial é aquele que contém a função $\xi = 0$ e, portanto, consiste em funções da forma Δ_{rs} que podem ser eliminadas apenas pela redefinição dos operadores. Sendo assim, iremos abordar as representações que são intrinsecamente projetivas, isto é, a fase não pode ser removida através desse procedimento.

Para abordar tal tipo de representação vamos analisar o efeito da fase ξ nas relações de comutação de transformações infinitesimais expandindo a relação de representação em uma série de potências e considerando até termos de segunda ordem como é de praxe nesse procedimento. Comecemos investigando o comportamento da fase quando r ou s são a identidade,

$$U(r)U(s) = e^{i\xi(r,e)}U(r), \tag{5.7}$$

e o mesmo para $U(e)U(r)$, implicando

$$\xi(r,e) = \xi(e,r) = 0. \tag{5.8}$$

Além disso, se $r = s = e$,

$$U(e)U(e) = e^{i\xi(e,e)}U(e), \tag{5.9}$$

levando nos a

$$\xi(e,e) = 0. \tag{5.10}$$

Desta forma, ao parametrizar os elementos do grupo pelo parâmetro real θ^a e expandir a fase $\xi(r(\theta), s(\bar{\theta}))$ não teremos os termos de ordem 0 e ordem 1, logo

$$\xi(r(\theta), s(\bar{\theta})) = f_{ab}\theta^a\bar{\theta}^a + \cdots, \tag{5.11}$$

onde f_{ab} são constantes numéricas. O produto de dois elementos será parametrizado pela função f como em (4.2), portanto a relação de representação será

$$U(r(\theta))U(s(\bar{\theta})) = e^{i\xi(r(\theta),s(\bar{\theta}))}U(rs(f(\theta,\bar{\theta})). \tag{5.12}$$

A função produto, como visto anteriormente em função das coordenadas, tem sua expansão dada por

$$f^a(\theta,\bar{\theta}) = \theta^a + \bar{\theta}^a + f^a_{bc}\theta^b\bar{\theta}^c + \cdots. \tag{5.13}$$

Já a expansão dos operadores é

$$U(r(\theta)) = 1 + i\theta^a t_a + \frac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc} + \cdots, \tag{5.14}$$

onde t é o gerador da transformação. A função exponencial tem sua expansão conhecida

$$e^{i\xi(r(\theta),s(\bar{\theta}))} = 1 + i\xi - \frac{\xi^2}{2} + \cdots . \tag{5.15}$$

Ao inserir estes resultados na relação de representação vamos obter[1] uma relação para o comutador entre os geradores, mas diferente do resultado usual teremos

$$[t_b, t_c] = iC^a_{bc}t_a + iC_{bc}\mathbb{1}, \tag{5.16}$$

com os coeficientes C_{bc} dados por $C_{bc} = -f_{bc} + f_{cb}$. Notemos que ao trabalhar, do ponto de vista das transformações infinitesimais, a representação com adição da dependência de fase, surge nas relações de comutação do grupo um termo adicional. Esse termo antissimétrico é nomeado como Carga Central, pertence ao centro do grupo e, portanto, comuta com todos os outros elementos do mesmo. Uma vez que o peso da representação de raio (ou projetiva) é esse termo adicional, será através de manipulações do mesmo que iremos estudar a existência ou não de tais representações.

O grupo trabalhado é um grupo de Lie, sendo assim todos os elementos satisfazem a Identidade de Jacobi, procedimento já utilizando para a manipulação dos expoentes infinitesimais no formalismo de Bargmann. Com tal identidade obtemos duas relações para os coeficientes de (5.16),

$$C^a_{bc}C^e_{ad} + C^a_{cd}C^e_{ab} + C^a_{db}C^e_{ac} = 0 \tag{5.17}$$

e

$$C^a_{bc}C_{ad} + C^a_{cd}C_{ab} + C^a_{db}C_{ac} = 0. \tag{5.18}$$

A equação (5.18) possui uma solução não nula dada por

$$C_{ab} = C^e_{ab}\phi_e, \tag{5.19}$$

em que ϕ_e é um conjunto arbitrário de constantes reais. Para esta classe de soluções podemos eliminar as cargas centrais através de uma redefinição nos geradores

$$t_a \to \bar{t_a} \equiv t_a + \phi_a. \tag{5.20}$$

Estes novos geradores, agora redefinidos dando conta da carga central, satisfazem as relações de comutação sem as cargas centrais

$$[\bar{t}_b, \bar{t}_c] = iC^a_{bc}\bar{t}_a. \tag{5.21}$$

Nem sempre uma álgebra de Lie irá permitir soluções do tipo (5.19). Podemos agora estabelecer um teorema responsável por comandar a ocorrência de representações ditas intrinsecamente projetivas (Weinberg, 1995)

[1] Procedimento realizado na seção 2 de Weinberg (1995).

Teorema 10. *A fase em qualquer representação $U(r)$ de um dado grupo pode ser escolhida tal que $\xi = 0$ em (5.1) se duas condições forem satisfeitas:*

- *Os geradores do grupo nessa representação podem ser redefinidos, de modo a abarcar todas as cargas centrais presentes na álgebra de Lie.*
- *O grupo é simplesmente conexo, ou seja, quaisquer dois elementos do grupo podem ser conectados por um caminho no grupo, e quaisquer dois caminhos podem ser continuamente transformados um no outro.*

De posse deste teorema conclui-se que existem duas maneiras para o surgimento das representações projetivas: algébrica, porque o grupo é representado projetivamente até mesmo localmente; topológica, porque o grupo não é simplesmente conexo. Note que essas duas maneiras não são excludentes, um grupo pode possuir representação projetiva pela razão algébrica, topológica ou ambas.

Por fim, iremos investigar um exemplo de tal procedimento estudando o grupo de Poincaré, será nesse momento em que serão abordadas as origens algébricas e topológicas. Mais adiante será feita a comparação entre o resultado obtido via expoentes infinitesimais e cargas centrais nos permitindo estabelecer a conexão entre esses dois objetos.

5.1 O Grupo de Poincaré

A álgebra do grupo de Poincaré usual, adotando a notação padrão onde os geradores de transformações Lorentz são $J^{\mu\nu}$ e os geradores de translação P^{μ}, é dada por

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + C^{\mu\nu,\rho\sigma}, \tag{5.22}$$

$$i[J^{\mu\nu}, P^{\rho}] = \eta^{\nu\rho} P^{\mu} - \eta^{\mu\rho} P^{\nu} + C^{\mu\nu,\rho}, \tag{5.23}$$

$$i[P^{\mu}, P^{\nu}] = C^{\mu,\nu}, \tag{5.24}$$

como já foi visto. Em uma representação projetiva a álgebra será corrigida pela adição das cargas centrais em cada comutador, obtendo

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - \eta^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + C^{\mu\nu,\rho\sigma}, \tag{5.25}$$

$$[J^{\mu\nu}, P^{\rho}] = \eta^{\nu\rho} P^{\mu} - \eta^{\mu\rho} P^{\nu} + C^{\mu\nu,\rho}, \tag{5.26}$$

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = C^{\mu,\nu}. \tag{5.27}$$

As cargas centrais vão herdar as relações de antissimetria dos geradores, então

$$\begin{aligned} C^{\rho\sigma,\mu\nu} &= -C^{\mu\nu,\rho\sigma}, \\ C^{\rho\sigma,\mu} &= -C^{\mu,\rho\sigma}, \\ C^{\rho,\mu} &= -C^{\mu,\rho}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Para obter relações para as cargas centrais vamos trabalhar as identidades de Jacobi. Para esse conjunto de geradores teremos três relações:

$$[J^{\mu\nu},[P^{\rho},P^{\sigma}]]+[P^{\sigma},[J^{\mu\nu},P^{\rho}]]+[P^{\rho},[P^{\sigma},J^{\mu\nu}]]=0, \tag{5.29}$$

$$\left[J^{\lambda\eta},[J^{\mu\nu},P^{\rho}]\right]+\left[P^{\rho},[J^{\lambda\eta},J^{\mu\nu}]\right]+\left[J^{\mu\nu},[P^{\rho},J^{\lambda\eta}]\right]=0, \tag{5.30}$$

$$\left[J^{\lambda\eta},[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]\right]+\left[J^{\rho\sigma},[J^{\lambda\eta},J^{\mu\nu}]\right]+\left[J^{\mu\nu},[J^{\rho\sigma},J^{\lambda\eta}]\right]=0. \tag{5.31}$$

Como o comutador dos geradores de translação tem como resultado as cargas centrais, a identidade de Jacobi envolvendo três $P's$ é automaticamente satisfeita e não fornece informação. Agora vamos utilizar as relações usuais da álgebra em busca de simplificações para as cargas centrais, ao inserir (5.22), (5.23) e (5.24) em (5.29), temos

$$\eta^{\nu\rho}C^{\mu,\sigma}-\eta^{\mu\rho}C^{\nu,\sigma}-\eta^{\nu\sigma}C^{\mu,\rho}+\eta^{\mu\sigma}C^{\nu,\rho}=0. \tag{5.32}$$

A utilização de (5.22) e (5.23) em (5.30) fornece

$$\begin{aligned}&\eta^{\nu\rho}C^{\mu,\lambda\eta}-\eta^{\mu\rho}C^{\nu,\lambda\eta}-\eta^{\mu\eta}C^{\rho,\lambda\nu}+\eta^{\lambda\mu}C^{\rho,\eta\nu}\\&+\eta^{\lambda\nu}C^{\rho,\mu\eta}-\eta^{\eta\nu}C^{\rho,\mu\lambda}+\eta^{\rho\lambda}C^{\eta,\mu\nu}-\eta^{\rho\eta}C^{\lambda,\mu\nu}=0.\end{aligned} \tag{5.33}$$

e por fim, inserindo (5.22) em (5.31)

$$\begin{aligned}&\eta^{\nu\rho}C^{\mu\sigma,\lambda\eta}-\eta^{\mu\rho}C^{\nu\sigma,\lambda\eta}-\eta^{\sigma\mu}C^{\rho\mu,\lambda\eta}+\eta^{\sigma\nu}C^{\rho\mu,\lambda\eta}\\&+\eta^{\eta\mu}C^{\lambda\nu,\rho\sigma}-\eta^{\lambda\mu}C^{\eta\nu,\rho\sigma}-\eta^{\nu\lambda}C^{\mu\eta,\rho\sigma}+\eta^{\mu\eta}C^{\mu\eta,\rho\sigma}\\&+\eta^{\sigma\lambda}C^{\rho\eta,\mu\nu}-\eta^{\rho\lambda}C^{\sigma\eta,\mu\nu}-\eta^{\eta\rho}C^{\lambda\sigma,\mu\nu}+\eta^{\eta\sigma}C^{\lambda\rho,\mu\nu}=0.\end{aligned} \tag{5.34}$$

Vamos contrair cada uma das expressões com $\eta_{\nu\rho}$. Fazendo isso para (5.32), teremos

$$\eta_{\nu\rho}(\eta^{\nu\rho}C^{\mu,\sigma}-\eta^{\mu\rho}C^{\nu,\sigma}-\eta^{\nu\sigma}C^{\mu,\rho}+\eta^{\mu\sigma}C^{\nu,\rho})=0, \tag{5.35}$$

o primeiro termo nos fornecerá o traço da métrica (estamos trabalhando com a assinatura $(-,+,+,+)$), já a contração na qual temos dois índices livres fornece $\eta_{\nu\rho}\eta^{\rho\mu}=\delta^{\nu}_{\mu}$, propriedade já conhecida da métrica, de forma que essa contração nos resulta em

$$C^{\mu,}=0. \tag{5.36}$$

Repetindo a contração para (5.33),

$$\begin{aligned}&\eta_{\rho\nu}(\eta^{\nu\rho}C^{\mu,\lambda\eta}-\eta^{\mu\rho}C^{\nu,\lambda\eta}-\eta^{\mu\eta}C^{\rho,\lambda\nu}+\eta^{\lambda\mu}C^{\rho,\eta\nu}\\&+\eta^{\lambda\nu}C^{\rho,\mu\eta}-\eta^{\eta\nu}C^{\rho,\mu\lambda}+\eta^{\rho\lambda}C^{\eta,\mu\nu}-\eta^{\rho\eta}C^{\lambda,\mu\nu})=0.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Com as mesmas identidades mencionadas anteriormente e as devidas manipulações obtemos para a carga central a relação

$$C^{\mu,\lambda\eta}=\frac{1}{3}\eta^{\mu\eta}\eta_{\nu\rho}C^{\rho,\lambda\nu}-\frac{1}{3}\eta^{\lambda\nu}\eta_{\nu\rho}C^{\rho,\eta\nu} \tag{5.38}$$

e como os índices ν e ρ são mudos, podemos definir

$$C^{\lambda} \equiv \frac{1}{3}\eta_{\nu\rho}C^{\rho,\lambda\nu}, \tag{5.39}$$

de modo a obter

$$C^{\mu,\lambda\eta} = \eta^{\mu\eta}C^{\lambda} - \eta^{\mu\lambda}C^{\eta}. \tag{5.40}$$

Note que as cargas centrais respeitam uma relação similar a relação da álgebra. A última manipulação a ser feita é a contração com (5.34)

$$\begin{aligned}
&\eta_{\nu\rho}(\eta^{\nu\rho}C^{\mu\sigma,\lambda\eta} - \eta^{\mu\rho}C^{\nu\sigma,\lambda\eta} - \eta^{\sigma\mu}C^{\rho\mu,\lambda\eta} + \eta^{\sigma\nu}C^{\rho\mu,\lambda\eta} \\
&+ \eta^{\eta\mu}C^{\lambda\nu,\rho\sigma} - \eta^{\lambda\mu}C^{\eta\nu,\rho\sigma} - \eta^{\nu\lambda}C^{\mu\eta,\rho\sigma} + \eta^{\mu\eta}C^{\mu\eta,\rho\sigma} \\
&+ \eta^{\sigma\lambda}C^{\rho\eta,\mu\nu} - \eta^{\rho\lambda}C^{\sigma\eta,\mu\nu} - \eta^{\eta\rho}C^{\lambda\sigma,\mu\nu} + \eta^{\eta\sigma}C^{\lambda\rho,\mu\nu}) = 0,
\end{aligned} \tag{5.41}$$

fornecendo

$$C^{\mu\sigma,\lambda\eta} = \frac{1}{2}\eta_{\nu\rho}(\eta^{\eta\mu}C^{\lambda\nu,\sigma\rho} - \eta^{\lambda\mu}C^{\eta\nu,\sigma\rho} + \eta^{\sigma\lambda}C^{\mu\nu,\eta\rho} - \eta^{\eta\sigma}C^{\mu\nu,\lambda\rho}). \tag{5.42}$$

Como temos os índices mudos ν e ρ novamente, façamos a seguinte definição

$$C^{\lambda\sigma} \equiv \frac{1}{2}\eta_{\nu\rho}C^{\lambda\nu,\sigma\rho} \tag{5.43}$$

obtendo então outra relação similar a álgebra

$$C^{\mu\sigma,\lambda\eta} = \eta^{\eta\mu}C^{\lambda\sigma} - \eta^{\lambda\mu}C^{\eta\sigma} + \eta^{\sigma\lambda}C^{\eta\mu} - \eta^{\eta\sigma}C^{\lambda\mu}. \tag{5.44}$$

De posse destas definições podemos redefinir os geradores da álgebra de modo que as cargas centrais sejam absorvidas nas relações de comutação, cumprindo assim com a primeira possibilidade do teorema anterior. Como proposta de redefinição vejamos

$$\tilde{P}^{\mu} \equiv P^{\mu} + C^{\mu} \tag{5.45}$$

e

$$\tilde{J}^{\mu\sigma} \equiv J^{\mu\sigma} + C^{\mu\sigma}. \tag{5.46}$$

Para que seja possível a remoção das cargas centrais via redefinição é necessário que os comutadores sejam os mesmos para os novos geradores. Comecemos pela comutação entre $P's$

$$[\tilde{P}^{\mu}, \tilde{P}^{\nu}] = [P^{\mu} + C^{\mu}, P^{\nu} + C^{\nu}], \tag{5.47}$$

lembremos que $[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0$ e C^{μ} é um objeto que comuta com todos os outros elementos do grupo, dessa forma temos automaticamente

$$[\tilde{P}^{\mu}, \tilde{P}^{\nu}] = 0. \tag{5.48}$$

Já o comutador entre $J^{\mu\nu}$ e P^{ρ} se torna

$$[\tilde{J}^{\mu\sigma}, \tilde{P}^{\rho}] = [J^{\mu\sigma} + C^{\mu\sigma}, P^{\rho} + C^{\rho}] = [J^{\mu\sigma}, P^{\rho}] + [J^{\mu\sigma}, C^{\rho}] + [C^{\mu\sigma}, P^{\rho}] + [C^{\mu\sigma}, C^{\rho}] \tag{5.49}$$

e utilizando (5.26)

$$[\tilde{J}^{\mu\sigma}, \tilde{P}^{\rho}] = -i(\eta^{\nu\rho}P^{\mu} - \eta^{\mu\rho}P^{\nu} + C^{\rho,\mu\nu}). \tag{5.50}$$

Da definição (5.45)

$$[\tilde{J}^{\mu\sigma}, \tilde{P}^{\rho}] = \eta^{\nu\rho}(P^{\mu} + C^{\mu}) - \eta^{\mu\rho}(P^{\nu} - C^{\nu}), \tag{5.51}$$

onde reconhecemos $\tilde{P}^{\mu}$. Assim

$$i[\tilde{J}^{\mu\sigma}, \tilde{P}^{\rho}] = \eta^{\nu\rho}\tilde{P}^{\mu} - \eta^{\mu\rho}\tilde{P}^{\nu} \tag{5.52}$$

e obtemos uma relação equivalente à álgebra usual. Por fim, verifiquemos a relação de comutação entre os geradores $J^{\mu\nu}$:

$$[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{J}^{\rho\sigma}] = [J^{\mu\nu}+C^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}+C^{\rho\sigma}] = [J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]+[J^{\mu\nu}, C^{\rho\sigma}]+[C^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}]+[C^{\mu\nu}, C^{\rho\sigma}]. \tag{5.53}$$

Utilizando (5.22)

$$[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{J}^{\rho\sigma}] = -i(\eta^{\nu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}) + C^{\rho\sigma,\mu\nu}. \tag{5.54}$$

Com a definição (5.46)

$$i[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}(J^{\mu\sigma} + C^{\mu\sigma}) - \eta^{\mu\rho}(J^{\nu\sigma} + C^{\nu\sigma}) - \eta^{\sigma\mu}(J^{\rho\nu} + C^{\rho\nu}) + \eta^{\sigma\mu}(J^{\rho\mu} - C^{\rho\mu}) \tag{5.55}$$

e temos uma relação equivalente à álgebra usual para os geradores que faltavam

$$i[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\tilde{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\tilde{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}\tilde{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}\tilde{J}^{\rho\mu}. \tag{5.56}$$

Assim, nota-se que com a redefinição proposta as cargas centrais são englobadas pela álgebra, removendo assim a representação projetiva localmente do ponto de vista algébrico.

Resta agora fazer a análise da topologia do grupo de Poincaré e checar que, por razões topológicas, não há dependência de fase ou até mesmo uma espécie de eco global da eliminação, apenas local, das cargas centrais.

Comecemos utilizando um vetor real V^{μ} para construir uma matriz hermitiana 2×2,

$$v \equiv V^{\mu}\sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix}, \tag{5.57}$$

onde

$$\sigma_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.58}$$

e σ_1, σ_2, σ_3 são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5.59}$$

Notemos que a hermiticidade de v é preservada sob transformações do tipo

$$v \to \lambda v \lambda^\dagger \equiv v', \tag{5.60}$$

isto é

$$v' = \lambda \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix} \lambda^\dagger. \tag{5.61}$$

Lembremos que ao tomar o transposto conjugado de um produto AB, temos $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$, desta forma

$$v'^\dagger = \lambda \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix} \lambda^\dagger. \tag{5.62}$$

Tomando o determinante de v obtém-se

$$Det(v) = (V^0+V^3)(V^0-V^3)-(V^1+iV^2)(V^1-iV^2) = (V^0)^2-(V^1)^2-(V^2)^2-(V^3)^2, \tag{5.63}$$

mas o produto $V_\mu V^\mu = (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 - (V^0)^2$, nos permitindo concluir que

$$V_\mu V^\mu = -Det(v). \tag{5.64}$$

Estamos interessados em transformações de simetria, então vamos investigar as necessidades que λ deve satisfazer. Podemos reescrever o determinante de v' como

$$Det(v') = Det(\lambda v \lambda^\dagger) = Det(\lambda) Det(v) Det(\lambda^\dagger) = Det(\lambda) Det(\lambda^\dagger) Det(v). \tag{5.65}$$

Para que λ seja uma transformação de simetria é necessário que $Det(v') = Det(v)$, assim

$$Det(\lambda) Det(\lambda^\dagger) = 1. \tag{5.66}$$

Tal condição será satisfeita se

$$\lambda = \lambda^\dagger, \tag{5.67}$$

o que implica a unitariedade de λ, e também se

$$|Det(\lambda)| = 1. \tag{5.68}$$

Como a unitariedade de λ pode não ser verdade para todas as matrizes com determinante igual a 1, assumiremos a segunda condição. Então, qualquer matriz, λ, 2×2, complexa que satisfaz a relação anterior define uma transformação linear que preserva a quantidade $V_\mu V^\mu$, ou seja, uma transformação linear homogênea $\Lambda(\lambda)$. Obtemos então uma nova relação para as transformações

$$\lambda V^\mu \sigma_\mu \lambda^\dagger = \Lambda(\lambda) V^\mu \sigma_\mu = (\Lambda^\mu{}_\nu(\lambda) V^\nu) \sigma_\mu. \tag{5.69}$$

Sejam agora duas matrizes λ e $\bar{\lambda}$, teremos

$$(\lambda\bar{\lambda}) V^\mu \sigma_\mu (\lambda\bar{\lambda})^\dagger = \lambda\bar{\lambda} V^\mu \sigma_\mu \bar{\lambda}^\dagger \lambda^\dagger, \tag{5.70}$$

em termos de Λ

$$\lambda\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\bar{\lambda})V^{\nu}\sigma_{\mu}\lambda^{\dagger} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\lambda)\Lambda^{\rho}{}_{\nu}(\bar{\lambda})V^{\nu}\sigma_{\mu}. \tag{5.71}$$

Mas ao trabalharmos com $\Lambda(\lambda\bar{\lambda})$, temos

$$(\lambda\bar{\lambda})V^{\mu}\sigma_{\mu}(\lambda\bar{\lambda}) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\lambda\bar{\lambda})V^{\nu}\sigma_{\mu}, \tag{5.72}$$

sendo assim

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(\lambda\bar{\lambda}) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}(\lambda)\Lambda^{\rho}{}_{\nu}(\bar{\lambda}), \tag{5.73}$$

ou de forma mais geral

$$\Lambda(\lambda\bar{\lambda}) = \Lambda(\lambda)\Lambda(\bar{\lambda}). \tag{5.74}$$

Porém, dois λ que diferem entre si apenas por uma fase realizam o mesmo efeito em v: se $\bar{\lambda} = \alpha\lambda$ com $|\alpha| = 1$, assim

$$v'' = \bar{\lambda}v\bar{\lambda}^{\dagger} = (\alpha\lambda)v(\alpha^{*}\lambda^{\dagger}) = |\alpha|\lambda v\lambda^{\dagger} = v'. \tag{5.75}$$

Então ambos λ correspondem à mesma transformação. Sendo assim, é conveniente ajustar a fase de tal modo que

$$Det(\lambda) = 1, \tag{5.76}$$

que é consistente com (5.74). Esse conjunto de matrizes complexas 2×2 com determinante igual à 1 forma o grupo $SL(2, C)$. Os elementos deste grupo dependem de três parâmetros complexos (ou seis reais), assim como o grupo de Lorentz.

Entretanto, no grupo em questão $-\lambda$ e λ dão origem a mesma transformação, o que não ocorre para o grupo de Lorentz. Seja

$$\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}, \tag{5.77}$$

assim v' será dado por

$$v' = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}. \tag{5.78}$$

Realizando o produto entre as matrizes, obtemos

$$v' = \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & e^{i\theta}(V^1 - iV^2) \\ e^{-i\theta}(V^1 + iV^2) & V^0 - V^3 \end{pmatrix}. \tag{5.79}$$

Já para $-\lambda$,

$$\bar{\lambda}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}, \tag{5.80}$$

e $\bar{v}'$, após realizar as multiplicações matriciais, é

$$\bar{v}' = \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & e^{-i\theta}(V^1 - iV^2) \\ e^{i\theta}(V^1 + iV^2) & V^0 - V^3 \end{pmatrix}, \tag{5.81}$$

permitindo-nos observar que $v' \neq \bar{v}'$. Portanto, λ e $-\lambda$ não são identificados para o grupo de Lorentz, o que ocorre para o grupo $SL(2,C)$. A identificação de λ e $-\lambda$ ocorre para o grupo $SL(2,C)/Z_2$, sendo este grupo isomorfo ao grupo de Lorentz $SO^+(1,3)$, o ortócrono próprio $\mathcal{L}_+^\uparrow$.

Até o momento vínhamos construindo uma representação do grupo de Lorentz. A fim de obter a topologia correspondente, deparamos nos agora com um comportamento não trivial para tal grupo. Veremos agora uma construção para os elementos λ, tais elementos podem ser escritos como

$$\lambda = ue^h, \tag{5.82}$$

sendo u a matriz unitária responsável por realizar uma rotação de θ em torno dos três eixos espaciais, dependendo então de três parâmetros reais. Já h é uma combinação linear dos geradores, herdando assim a hermiticidade dos mesmos. O determinante de λ é então

$$Det(\lambda) = 1 = Det(u)Det(e^h), \tag{5.83}$$

mas u é apenas um fator de fase (podemos escrever como $e^{i\theta}$) e $Det(e^h) = e^{Tr(h)}$. Desta forma

$$Det(u)Det(e^{Tr(h)}) = 1, \tag{5.84}$$

nos fornecendo

$$Det(u) = 1 \tag{5.85}$$

e, portanto $Tr(h) = 0$, para que

$$Det(e^0) = 1. \tag{5.86}$$

Essa decomposição é única, então $SL(2,C)$ é apenas o produto direto entre o espaço dos elementos u e o espaço dos elementos h, iremos investigar tais espaços.

Qualquer matriz 2×2 hermitiana de traço nulo pode ser escrita na forma

$$h = \begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{pmatrix}, \tag{5.87}$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$ mas sem vínculos. Assim, o espaço de todos os h é topologicamente o mesmo que o espaço plano tridimensional $\mathbb{R}^3$ Por outro lado, qualquer matriz unitária 2×2 com determinante igual a 1 pode ser expressa como

$$u = \begin{pmatrix} d + ie & f + ig \\ -f + ig & d - ie \end{pmatrix}, \tag{5.88}$$

com d, e, f, g sujeitos ao seguinte vínculo

$$d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 1, \tag{5.89}$$

devido ao determinante igual a 1. Logo, o espaço de todos os u, $SU(2)$, é topologicamente o mesmo da superfície de uma esfera no espaço $4D$ plano, S_3, desta forma

$$SL(2,C) \simeq R_3 \times S_3, \tag{5.90}$$

tal espaço é simplesmente conexo, mas estamos interessados no quociente $SL(2,C)/Z_2$. Da forma que definimos λ vemos que para identificar $-\lambda$ e λ, uma vez que $e^h > 0$ sempre, precisamos que u e $-u$ sejam identificados, portanto a topologia do grupo de Lorentz é

$$L \simeq R_3 \times S_3/Z_2, \tag{5.91}$$

onde S_3/Z_2 é a superfície de uma esfera tridimensional com pontos antipodais, isto é pontos opostos identificados. Tal grupo não é simplesmente conexo: um caminho em S_3 de u a u' não pode ser continuamente deformado em um caminho em S_3 de u a $-u'$, embora esses caminhos conectem os mesmos pontos do espaço. Isso ocorre porque o espaço em questão é duplamente conexo, os caminhos entre dois pontos caem em duas classes dependendo, ou não, de inversões de $u \to -u$ e qualquer caminho de uma classe pode ser continuamente deformado em outro caminho dessa classe. Em outras palavras, um loop duplo pode ser continuamente contraído a um ponto.

Vejamos a influência da topologia ao atuarmos com transformações do grupo em estados. Da relação de representação temos

$$U(\Lambda)U(\bar{\Lambda}) = e^{i\phi(\Lambda,\bar{\Lambda})}U(\Lambda\bar{\Lambda}), \tag{5.92}$$

mas como o grupo de Lorentz é duplamente conexo

$$U(\Lambda)U(\bar{\Lambda})U^{-1}(\Lambda\bar{\Lambda}) = e^{i\phi(\Lambda,\bar{\Lambda})}e^{-i\phi(\Lambda,\bar{\Lambda})} = 1, \tag{5.93}$$

ou seja

$$U(\Lambda)U(\bar{\Lambda}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}) \tag{5.94}$$

e, portanto

$$e^{i\phi(\Lambda,\bar{\Lambda})} = \pm 1. \tag{5.95}$$

Já para o grupo de Poincaré teremos a adição das translações, então as transformações passam a depender de a, logo

$$U(\Lambda,a)U(\bar{\Lambda},\bar{a}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}, \Lambda\bar{a}+a) \tag{5.96}$$

e

$$e^{i\phi(\Lambda,a;\bar{\Lambda},\bar{a})} = \pm 1. \tag{5.97}$$

A interpretação física para este sinal $\pm$ está associada aos estados de spin de uma partícula, para o sinal $+$ temos estados de spin inteiro e para $\pm$ temos estados de spin semi-inteiro, de acordo com o caminho ser contrátil ou não. Tal sinal vem do efeito de

uma rotação nos estados de spin inteiro e semi-inteiro. Esses dois casos correspondem às duas representações irredutíveis do grupo Z_2 e nos fornecem a conclusão física de que não podemos misturar estados de spin inteiro e semi-inteiro.

Por fim, notemos que inicialmente as cargas centrais parecem ter pouca conexão com todos os objetos estudados através do formalismo estabelecido por Bargmann. A subseção a seguir terá como objetivo demonstrar com um exemplo e firmar a conexão entre as abordagens mostradas até aqui.

5.1.1 Conexão entre Expoentes Infinitesimais e Cargas Centrais

A aplicação das cargas centrais para o grupo de Poincaré nos levou a um resultado esperado, todas as cargas centrais podem ser eliminadas ao serem englobadas em uma nova definição para o geradores, sendo assim não existe representação projetiva para tal grupo. Notemos que nesse caso estamos trabalhando com o grupo de Poincaré em $3+1$ dimensões, obtendo o mesmo resultado demonstrado através do formalismo dos expoentes infintesimais na seção anterior. Parece conveniente analisar como as cargas centrais se comportam ao serem submetidas ao grupo de Poincaré em $1+1$ dimensões, caso para o qual há possibilidade de representação projetiva.

Tal grupo será denotado por P_{1+1} e seus elementos serão as translações P_0 e P_1, translação temporal e translação na direção existente respectivamente, e um boost na mesma direção K_1. A álgebra de P_{1+1} será

$$\begin{aligned} &[P_0, P_1] = 0, \\ &[K_1, P_0] = P_1, \\ &[K_1, P_1] = P_0. \end{aligned} \tag{5.98}$$

De acordo com o procedimento apresentado a primeira etapa para o estudo das cargas centrais é escrever os comutadores com a adição das mesmas, então a álgebra do grupo P_{1+1} em uma representação projetiva será

$$\begin{aligned} &[P_0, P_1] = C(P_0, P_1), \\ &[K_1, P_0] = P_1 + C(K_1, P_0), \\ &[K_1, P_1] = P_0 + C(K_1, P_1). \end{aligned} \tag{5.99}$$

Vejamos agora o que a identidade de Jacobi entre os geradores do grupo fornece. Como existem apenas três geradores temos apenas uma possibilidade:

$$[K_1, [P_0, P_1]] + [P_1, [K_1, P_0]] + [P_0, [P_1, K_1]] = 0. \tag{5.100}$$

Utilizando as relações da álgebra obtemos

$$[P_1, P_1] + [P_0, P_0] = 0, \tag{5.101}$$

que é automaticamente satisfeita e não fornece nenhuma informação. Porém, podemos diretamente da álgebra realizar a seguinte redefinição

$$\begin{aligned}\tilde{P_0} &= P_0 + C(K_1, P_1),\\ \tilde{P_1} &= P_1 + C(K_1, P_0)\end{aligned} \tag{5.102}$$

e a nova álgebra é

$$\begin{aligned}&[\tilde{P_0}, \tilde{P_1}] = [P_0, P_1] = C(P_0, P_1),\\ &[K_1, \tilde{P_0}] = \tilde{P_1},\\ &[K_1, \tilde{P_1}] = \tilde{P_0}.\end{aligned} \tag{5.103}$$

Então é possível englobar duas, das três, cargas centrais existentes e a carga central $C(P_0, P_1)$ sobrevive. Não há uma maneira de removê-la, evidenciando assim uma possível representação projetiva (se a carga central for nula não há representação projetiva, caso contrário há). Ao retornamos ao resultado obtido via manipulação dos expoentes infinitesimais para o grupo P_{1+1} vemos que o expoente responsável pela possível representação projetiva é $\Xi(b_i, b_j)$, onde b_i é outra notação para os geradores de translação, ou seja, o resultado que obtemos anteriormente é de que a possibilidade de existência de tal representação advém de $\Xi(P_0, P_1)$). Quando este expoente é nulo não há representação projetiva, caso contrário há. Há então um forte indício de que os expoentes infinitesimais e as cargas centrais são o mesmo objeto, obtidos de diferentes maneiras, onde os expoentes infinitesimais surgem de um estudo muito mais formal das características algébricas do grupo, enquanto as cargas centrais surgem da analise da lei de comutação do grupo do ponto de vista das transformações infinitesimais em uma representação que depende de fase.

Entretanto, há ainda uma questão em aberto: as cargas centrais são objetos que pertencem ao centro do grupo, por isso comutam com todos os outros elementos. Porém, lembremos que os expoentes infinitesimais surgem da análise da álgebra de Lie local, nesta álgebra os elementos são coordenatizados por $n+1$ coordenadas, onde a coordenada 0 está associada a um elemento real anteriormente denotado por θ. A relação obtida anteriormente foi

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \{\Xi(a, b), [a, b]\}, \tag{5.104}$$

isto é, o novo comutador possui uma entrada 0 dada pelo expoente infinitesimal e as outras entradas que estão associadas ao elemento do grupo são o comutador usual. Lembremos também que todo elemento do grupo local pode ser desmembrado da seguinte forma

$$\{\theta, r\} = \{\theta, e\} \cdot \{0, r\}, \tag{5.105}$$

onde $\{\theta, e\}$ é um elemento do centro do grupo. Uma vez que $[\bar{a}, \bar{b}]$ é um elemento do grupo local, podemos escrever

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \{\Xi(a, b), e\} \cdot \{0, [a, b]\}, \tag{5.106}$$

podendo assim notar que $\{\Xi(a,b),e\}$ é um elemento do centro do grupo em questão, além de estar acompanhando da identidade assim como obtido através na equação que define o novo comutador de um grupo de Lie em uma representação projetiva na abordagem das cargas centrais.

Sendo assim, temos que para análise dos expoentes infinitesimais e das cargas centrais manipulamos a álgebra do grupo através das identidades de Jacobi, para encontrar relações entre os objetos em suas respectivas abordagens. Ambos procedimentos fornecem o mesmo resultado. Logo, evidenciou-se que os expoentes infinitesimais, assim como era esperado dadas as pistas anteriores, pertencem ao centro do grupo em questão. Assim apesar de surgirem de métodos diferentes, os expoentes infinitesimais e as cargas centrais são o mesmo objeto, responsável por permitir (ou não) a existência de representações projetivas do ponto de vista algébrico.

6 Abordagem através dos grupos de cohomologia

Apesar de bem-sucedido, o formalismo de Bargmann (1954) é válido apenas para o caso de grupos contínuos. Além disso, é um ferramental baseado em física-matemática e análise. Nesta seção iremos abordar os grupos de cohomologia, conceito advindo da topologia algébrica e sendo a maneira moderna de se abordar as representações de raio (ou projetivas). O objetivo é: através dos grupos de cohomologia, obter as mesmas relações que Bargmann (1954) obtém para os expoentes locais, estabelecendo a conexão entre as duas abordagens.

Durante a exposição será notado que apesar de mais abstrato, o formalismo moderno é mais simples no que tange aos cálculos. As definições iniciais serão feitas de acordo com Kirillov (1976) e Nakahara (2003); após estabelecidas, faremos uma breve conclusão acerca do estudo apresentado em Aldrovandi and Galleti (1990), onde há uma interpretação para fase ali sobrevivente.

Para introduzir o conceito dos grupos de cohomologia, vamos definir uma $n-$ *cochain*:

Definição 10. *Seja G um grupo e M um grupo abeliano. Uma cochain de dimensão n ($n-$cochain) é uma função $\xi(g_0,\cdots,g_n)$ definida em $G\times G\times\cdots\times G$ que assume valores em M.*

O conjunto de todas $(n+1)-$ *cochains* forma o grupo $C^{n+1}(G,M)$ e é possível definir um operador responsável por aumentar o grau de uma *cochain*:

$$\delta : C^n(G,M)\to C^{n+1}(G,M), \tag{6.1}$$

$$\delta\xi_n(g_0,\cdots,g_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\xi_n(g_0,\cdots,\hat{g}_i,g_ig_{i+1},\cdots,g_{n+1}), \tag{6.2}$$

onde $\hat{g}_i$ denota a supressão do elemento correspondente. Uma *cochain* ξ' é dita ser uma coborda de uma *cochain* ξ, se $\xi'=\delta\xi$. Se $\delta\xi'=0$, a *cochain* ξ' é dita ser um cociclo. Nosso objetivo ao abordar as representações projetivas será encontrar $2-$cociclos triviais, isto é, fases removíveis[1]. O operador δ deve satisfazer a propriedade fundamental de niilpotência

$$\delta\circ\delta = 0. \tag{6.3}$$

[1] Tal nomenclatura é mencionada em Weinberg (1995), porém não é explorada.

Para que possamos verificar tal propriedade, vejamos alguns exemplos de como operar com δ. Sejam $r, s, t, u \in G$, para $n = 0$, temos

$$\delta\xi(r, s) = \xi(rs) - \xi(r); \tag{6.4}$$

para $n = 1$,

$$\delta\xi(r, s, t) = \xi(rs, t) - \xi(r, st) + \xi(r, s). \tag{6.5}$$

Esta última relação já se comporta de maneira estritamente análoga à obtida através da associatividade para os expoentes locais. Por fim, para $n = 2$,

$$\delta\xi(r, s, t, u) = \xi(rs, t, u) - \xi(r, st, u) + \xi(r, s, tu) - \xi(r, s, t). \tag{6.6}$$

Ao computar a segunda atuação do operador δ em (6.5), teremos $\delta(\delta\xi(r, s, t)) = \delta\xi(rs, t) - \delta\xi(r, st) + \delta\xi(r, s)$, isto é,

$$\delta(\delta\xi(r, s, t)) = \xi(rst) - \xi(rs) - \xi(rst) + \xi(r) + \xi(rs) - \xi(r) \tag{6.7}$$

e então

$$\delta(\delta\xi(r, s, t)) = 0, \tag{6.8}$$

satisfazendo (6.3). Para obter a generalização da niilpotência, note que o primeiro termo de (6.7), advindo de $\delta\xi(rs, t)$, é cancelado pelo primeiro termo advindo da atuação $\delta\xi(r, st)$ e os termos seguintes seguirão esta regra. Desta forma, teremos

$$\begin{aligned}\delta(\delta\xi_n(g_0, \cdots, g_{n+1})) = \delta\xi_n(\hat{g}_0, g_0g_1, \cdots, g_{n+1}) - \delta\xi_n(g_0, \hat{g}_1, g_1g_2, \cdots, g_{n+1}) \\ + \cdots + (-1)^{n+1}\delta\xi_n(g_0, g_1, \cdots, g_n, \hat{g}_{n+1})\end{aligned} \tag{6.9}$$

e, de acordo com a regra mencionada anteriormente,

$$\delta(\delta\xi_n(g_0, \cdots, g_{n+1})) = 0. \tag{6.10}$$

Dando continuidade à construção, o conjunto de todos $n-$cociclos e o conjunto de todas $n-$cobordas formam os grupos $Z^n(G, M)$ e $B^n(G, M)$, respectivamente Nakahara (2003), motivando a seguinte definição:

Definição 11. *O n-ésimo grupo de cohomologia de Čech é definido como*

$$\check{H}^n(G, M) = Z^n(G, M)/B^n(G, M). \tag{6.11}$$

É mais comum lidarmos com os grupos de cohomologia de De Rham e com as formas diferenciáveis. Para estes grupos, temos as formas fechadas e exatas como equivalentes aos cociclos e cobordas, respectivamente. Para tais formas, temos que toda forma exata é fechada, mas o inverso não é uma garantia global. Localmente, podemos trabalhar com um domínio simplesmente conexo, onde a propriedade (6.3) é válida. Isto nos permite concluir que, caso tenhamos uma topologia não trivial, há uma obstrução do resultado.

Pelo Teorema de De Rham Schwartz (1955), os grupos de cohomologia de Čech podem ser diretamente relacionados aos grupos de cohomologia de De Rham, sendo isomorfos para o caso em que a variedade em que o grupo é definido é uma variedade diferenciável. Desta forma, podemos herdar a conclusão anterior sobre a não trivialidade da topologia.

Uma vez que a analogia entre as relações obtidas e as relações dos expoentes locais é clara, entende-se a utilidade dos grupos de cohomologia de Čech para o estudo das representações de raio. Vamos agora estruturar esta análise do ponto de vista dos grupos de cohomologia. Considerando uma representação de raio,

$$U_r U_s = e^{i\xi(r,s)} U_{rs}, \tag{6.12}$$

já havíamos visto que a associatividade implica

$$\xi(r,s) + \xi(rs,t) = \xi(s,t) + \xi(r,st). \tag{6.13}$$

Da equação (6.5), conclui-se que $\delta\xi(r,s,t) = \xi(s,t)$ ou, ainda,

$$\xi(r,s) = \delta\xi(t,r,s). \tag{6.14}$$

Então, a associatividade dos operadores em uma representação projetiva induz um fator de fase na representação, sendo esta uma coborda de uma $1-cochain$. Portanto, a fase pode ser removida se $\xi(t,r,s)$ for uma coborda, pois teríamos $\delta \circ \delta\xi = 0$. Caso contrário, $\xi(r,s)$ é uma coborda que não é um cociclo, ocasionando $\check{H}^2(G,M)$ não trivial, havendo uma obstrução topológica na remoção da fase o que resulta em uma representação de raio.

A abordagem desta nova ferramenta teve como objetivo evidenciar as sutilezas dos resultados locais e globais em abordagens diferentes. Enfatizando que o formalismo de Bargmann é robusto e útil para quando trabalhamos com grupos contínuos (de Lie) e quando este não for o caso, temos a ferramenta advinda da topologia algébrica que, apesar de abstrata, reduz o trabalho para o cálculo do segundo grupo de cohomologia. Tal contraste foi explorado no trabalho Hoff da Silva and Rodrigues (2023).

6.1 O espaço de fase quântico

A presente seção tem como objetivo exibir a construção presente em Aldrovandi and Galleti (1990) a fim de evidenciar a existência da fase para o caso abordado pelos autores. Esta é interpretada como uma estrutura análoga ao espaço de fase clássico.

Os elementos do grupo de Heisenberg podem ser representados pela tripla (a,b,r) que satisfaz a seguinte lei de composição:

$$(a,b,r) * (c,d,s) = (a+c, b+d, r+s, \frac{1}{2}[ad-bc]). \tag{6.15}$$

Para descrever um sistema quântico é necessário um conjunto completo de observáveis, estes construídos a partir de um conjunto completo de operadores. Em Weyl (1950), temos que dois operadores unitários $U(a)$ e $V(b)$, satisfazendo

$$U(a)(a') = U(a + a'), \tag{6.16}$$

$$V(b)V(b') = V(b + b') \tag{6.17}$$

e

$$U(a)V(b) = V(b)U(a)e^{i\mu ab}, \tag{6.18}$$

fornecem uma representação para o grupo de Heisenberg. Seja $\{\psi_k\}$ uma base em um espaço de $\mathscr{H}$. Os operadores U e V geram uma base completa que permite construir qualquer operador unitário (Schwinger, 1960) ao serem definidos como responsáveis por permutar ciclicamente o conjunto $\{\psi_k\}$. Isto é

$$U\psi_k = \psi_{k+1}, \tag{6.19}$$

com $\psi_{k+N} \equiv \psi_k$. Assim, ao atuar repetidamente com operadores linearmente independentes U^m, teremos

$$U^m\psi_k = \psi_{k+m}. \tag{6.20}$$

Devido à condição de periodicidade, $U^N = 1$ e os autovalores de U são $u_k = e^{i\frac{2\pi}{N}k}$ que correspondem a um outro conjunto de vetores fixos no espaço, satisfazendo a relação

$$U\phi_k = u_k\phi_k. \tag{6.21}$$

Da mesma forma, podemos definir V tal que

$$V\phi_k =_{k-1} \tag{6.22}$$

e também $V^n\phi_k = \phi_{k-n}$ com $\phi_{k-N} \equiv \phi_k$. Assim como anteriormente, teremos $V^n = 1$ e os autovalores serão $v_k = e^{i\frac{2\pi}{N}k}$. Com estes operadores podemos construir o conjunto

$$S_{mn} = e^{i\frac{\pi}{N}mn}U^mV^n, \tag{6.23}$$

que constitui uma base ortogonal completa com a qual qualquer operador dinâmico pode ser construído. Os rótulos destes operadores assumem valores em uma carta toroidal que constitui o espaço de fase quântico. Este conjunto de operadores irá constituir um grupo com a lei de composição

$$S_{rs}S_{mn} = e^{i(\frac{\pi}{N})(ms-nr)}S_{(m+r)(n+s)}, \tag{6.24}$$

portanto fornecem uma representação de raio para o grupo em questão.

Além da relação de composição, a atuação do operador S_{mn} em ψ_k é dada por

$$S_{mn}\psi_k = e^{i(\frac{\pi}{N})(2k+m)n}\psi_{k+m}. \tag{6.25}$$

Uma transformação arbitrária de um grupo pode ser escrita como $U(r)\psi = e^{i(\xi_1(r))}\psi_r$, isto é, uma transformação de fase. A fase ξ_1 é uma *cochain* definida no grupo e o índice 1 está associado ao grau da mesma. Através deste raciocínio, podemos abordar a representação projetiva e teremos

$$\xi_1(k, S_{mn}) = \left(\frac{\pi}{N}\right)[(2k+m)n]. \tag{6.26}$$

Pela atuação de S_{mn}, podemos calcular

$$\xi_1(kS_{mn}, S_{rs}) = \left(\frac{\pi}{N}\right)[2(k+m)+r]s \tag{6.27}$$

e

$$\xi_1(k, S_{mn}S_{rs}) = \left(\frac{\pi}{N}\right)[(2k+m+r)(n+s)]. \tag{6.28}$$

Temos então os elementos necessários para calcular $\delta\xi_1$ como em (6.5), assim

$$\delta\xi_1(k, S_{mn}, S_{rs}) = \xi_1(kS_{mn}, S_{rs}) - \xi_1(k, S_{mn}S_{rs}) + \xi_1(k, S_{mn}), \tag{6.29}$$

isto é,

$$\delta\xi_1(k, S_{mn}, S_{rs}) = \left(\frac{\pi}{N}\right)(ms - nr). \tag{6.30}$$

Portanto temos que ξ_1 não é removível, indicando a existência global de uma representação de raio (ou projetiva). A partir de (6.24), temos diretamente que

$$\xi_2(k, S_{mn}, S_{rs}) = \left(\frac{\pi}{N}\right)(ms - nr), \tag{6.31}$$

então ξ_2 é uma coborda, uma vez que

$$\xi_2(k, S_{mn}, S_{rs}) = \delta\xi_1(k, S_{mn}, S_{rs}) \tag{6.32}$$

e é responsável pela obstrução no processo de remoção da fase. O espaço de fase clássico é uma 2−forma diferencial fechada e não degenerada, conhecida como estrutura simplética (Arnold, 1989). Esta $2-$*cochain* é interpretada como uma estrutura pré-simplética, pois no límite do contínuo, se comporta como a estrutura anteriormente mencionada que é responsável por definir o espaço de fase clássico (Aldrovandi and Galleti, 1990).

7 Conclusões

O impacto do trabalho de E. P. Wigner permeia a ciência desde a década de 1920. Motivado pelo seu trabalho acerca dos grupos de Poincaré, V. Bargmann sistematiza a teoria de representações de raio previamente exibida por Wigner. A formulação da teoria e as noções necessárias para operação foram todas exploradas no trabalho de graduação que antecede o presente estudo (Batista, 2023); após uma revisão sucinta do mesmo feita nos capítulos 2 e 3 partimos para a aplicação das ferramentas previamente definidas.

Além de aprimorar as definições e a clareza do trabalho anterior, neste trabalho tivemos como objetivo principal tornar claros os procedimentos realizados em Bargmann (1954) para análise das representações de raio. Durante o Capítulo 2, após sistematizar os primeiro passos para o formalismo, temos como resultado principal a possibilidade de selecionar um conjunto de representativos de continuidade forte, definida a partir das distâncias no Espaço de Hilbert. Em seguida, demonstra-se que, para grupos de dimensão finita, a fase sempre é removível. Como exemplo podemos pensar nos grupos de rotação. Porém, estes resultados são válidos localmente, isto é, definidos em uma vizinhança da origem.

O Capítulo 3 dá cabo da extensão destes resultados para âmbito global, ou seja, para todo o grupo. Para os grupos compactos, podemos construir uma representação de raio contínua a partir de um dado fator ω e para os grupos conexos e simplesmente conexos podemos estender as representações locais, a seleção de representativos e os expoentes locais. Note que há uma relação direta entre a generalização dos resultados e a topologia do grupo em questão.

Ao aplicar a teoria aos grupos de Lie, após um encadeamento de Lemas acerca das novas classes de expoentes, temos que os expoentes locais são diferenciáveis e surge um novo objeto, o expoente infinitesimal, associado ao comutador que está em correspondência com os expoentes locais.

As aplicações do formalismo a grupos de relevância física, feitas no Capítulo 4, fornecem nos resultados para os grupos abelianos: matematicamente existe a possibilidade de sobrevivência das fases, mas o grupo abeliano de forte utilização em física $U(1)$, referente as transformações de calibre no eletromagnetismo, não possui dependência por ser formado por apenas um gerador. Para os grupos pseudo-ortogonais homogêneos temos que os expoentes infinitesimais referentes aos geradores são sempre nulos, isto é, a fase é sempre removível. Já para os grupos pseudo-ortogonais inomogêneos, ao trabalhar com espaços de dimensão total igual à 2, há a possibilidade de sobrevivência da fase.

Os grupos pseudo-ortogonais homogêneos e inomogêneos que conhecemos são o

grupo de Lorentz e de Poincaré, respectivamente. O resultado obtido nos mostra que se a física fosse feita nas dimensões $1+1$, descrever uma simples composição de transformações seria um grande impeditivo na formulação matemática da natureza, uma vez que as fases dependem dos elementos do grupo.

Para o grupo de Galileu, há também a possibilidade de sobrevivência da fase, devido a comutação entre os geradores de transformações galileanas puras e os geradores de translação. A aplicação deste resultado é explorada em Bargmann (1954). Por fim, ao explorar os grupos semi-simples obtemos um resultado amplamente referenciado de que para tais grupos as fases podem ser sempre removidas. Este resultado conversa diretamente com o obtido para os grupos pseudo-ortogonais homogêneos (uma vez que estes são grupos semi-simples)

O Capítulo 5 apresenta um método bastante conhecido para o estudo das representações de raio explorado em Weinberg (1995). São demonstrados os passos que possibilitam a utilização do método, em seguida é feita a aplicação para o grupo de Poincaré e, por fim, é explorada a relação entre expoentes infinitesimais, os objetos estudados no formalismo de Bargmann, e as cargas centrais, onde ambos os objetos pertencem ao centro do grupo e são responsáveis pela análise, do ponto de vista algébrico, da existência ou não de representações projetivas.

Por fim, no Capítulo 6 apresentamos uma nova abordagem para o problema das representações de raio. Em contraste com a teoria de Bargmann, a análise através dos grupos de cohomologia não se restringe apenas aos grupos contínuos e, devido à relação entre as cohomologias de Čech e De Rham, a sobrevivência da fase é diretamente associada à topologia do grupo. Em uma breve aplicação do formalismo, temos de Aldrovandi and Galleti (1990) que para o grupo de Heisenberg a fase sobrevivente advinda da representação de raio possui comportamento análogo ao espaço de fase clássico, porém para um sistema quântico, sendo interpretada então como a estrutura de um espaço de fase quântico.

Referências

R. Aldrovandi and D. Galleti. On structure of quantum phase space. *Journal of Mathematical Physics*, 31(12):2987–2995, 1990. URL http://acervodigital.unesp.br/handle/11449/64036.

V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2 edition, 1989. ISBN 978-0387968902. doi: 10.1007/978-1-4757-2063-1.

J. C. A. Barata. Notas para um curso de física-matemática, 2023. URL http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html.

V. Bargmann. On unitary ray representations of continuous groups. *Annals of Mathematics*, 59(1):1–46, 1954. URL http://www.jstor.org/stable/1969831.

J. E. R. Batista. Teoria de representações projetivas, 2023. URL https://repositorio.unesp.br/items/540450d1-846d-4d17-bb5e-fd48378d8673.

G. M. C. da Rocha. Estados de uma partícula e representações na relatividade muito especial, 2021. URL https://repositorio.unesp.br/items/eff95f7d-2c91-434d-b28f-dff2b9da0b04.

B. C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Springer, 2015.

J. M. Hoff da Silva and G. M. C. da Rocha. Strongly continuous representations in the hilbert space: A far-reaching concept. *Universe*, 7(8):285, aug 2021. doi: 10.3390/universe7080285. URL https://doi.org/10.3390%2Funiverse7080285.

J. M. Hoff da Silva and J. E. Rodrigues. Local versus global subtleties of projective representations, 2023. URL https://arxiv.org/abs/2309.07069.

K. Iwasawa. On some types of topological groups. *Annals of Mathematics*, 50(3):507–558, 1949. URL http://www.jstor.org/stable/1969548.

A. Kirillov. *Elements of the Theory of Representations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1976.

L. Nachbin. *The Haar Integral*. University series in higher mathematics. R. E. Krieger Publishing Company, 1976.

M. Nakahara. *Geometry, Topology, and Physics*. CRC Press, 2003.

L. Pontryagin and E. Lehmer. *Topological Groups*. Princeton Mathematical Series. vol. 2. Princeton University Press, 1946.

R. Raczka and A. Barut. *Theory Of Group Representations And Applications*. World Scientific Publishing Company, 1986.

F. G. Russo. Locally compact groups which are just not compact. 2010. URL https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121710425.

J. Schwartz. De rham's theorem for arbitrary spaces. *American Journal of Mathematics*, 77(1):29–44, 1955. ISSN 00029327, 10806377. URL http://www.jstor.org/stable/2372421.

J. Schwinger. Unitary operator basis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 46(4), 1960.

N. van der Schaaf. Classical and quantum particles in galilean and poincaré spacetime, 2017. URL https://www.math.ru.nl/~landsman/Nesta.pdf.

S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1. Cambridge University Press, 1995. doi: 10.1017/CBO9781139644167.

H. Weyl. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. Dover Books of Mathematics. Dover Publication, 1950.

E. P. Wigner. *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*. Braunschweig, 1931.

E. P. Wigner. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. *Annals of Mathematics*, 40(1):149–204, 1939. URL http://www.jstor.org/stable/1968551.

A Obtenção do comutador através da Fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff

Sejam a e b dois vetores fixos pertencentes à álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e também $r(\mu) = \mu a$ e $s(\mu) = \mu b$ dois subgrupos locais a um parâmetro. Podemos denotar por $q(r, s)$ o comutador $rsr^{-1}s^{-1}$. Queremos demonstrar que para $\mu \neq 0$ suficientemente pequeno, $q(\mu a, \mu b)$ é definido na vizinhança $\mathcal{V}_0$ e

$$[a, b] = \lim_{\mu \to 0} \mu^{-2} q(\mu a, \mu b), \tag{A.1}$$

ou ainda

$$[a, b] = \lim_{\mu \to 0} \mu^{-2} \left((\mu a)(\mu b)(\mu a)^{-1}(\mu b)^{-1} \right). \tag{A.2}$$

Como se trata de uma álgebra de Lie, podemos utilizar o mapeamento exponencial dos elementos da álgebra e obter

$$[a, b] = \lim_{\mu \to 0} \mu^{-2} e^{\mu a} e^{\mu b} e^{-\mu a} e^{-\mu b}. \tag{A.3}$$

Agora vamos analisar cada par de termos utilizando a fórmula de Baker-Campbell-Hausdoff[1]

$$e^A e^B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{3!}([A[A, B] + [B[B, A]) \cdots \right). \tag{A.4}$$

Para o nosso caso, teremos para o primeiro par de termos

$$e^{\mu a} e^{\mu b} = \exp\left(\mu a + \mu b + \frac{\mu^2}{2}[a, b] + \frac{\mu^3}{12}([a, [a, b]] + [b, [b, a]) + \cdots \right) \tag{A.5}$$

e para o segundo par

$$e^{-\mu a} e^{-\mu b} = \exp\left(-\mu a - \mu b + \frac{\mu^2}{2}[a, b] - \frac{\mu^3}{12}([a, [a, b]] + [b, [b, a]) + \cdots \right). \tag{A.6}$$

Ao reunir estas duas relações, teremos

$$e^{\mu a} e^{\mu b} e^{-\mu a} e^{-\mu b} = exp\left(\mu a + \mu b + \frac{\mu^2}{2}[a, b] + \cdots + (-\mu a) + (-\mu b) + \frac{\mu^2}{2}[a, b] + \cdots \right), \tag{A.7}$$

então

$$e^{\mu a} e^{\mu b} e^{-\mu a} e^{-\mu b} = exp\left(\mu^2 [a, b] + \mathcal{O}(\mu^{3+}) \right), \tag{A.8}$$

onde $\mathcal{O}(\mu^{3+})$ representa os termos que possuem μ em terceira ordem e ordens superiores.

Ao retornar ao mapeamento exponencial do comutador, restringindo nos a μ suficientemente pequeno, teremos

$$e^{\mu a} e^{\mu b} e^{-\mu a} e^{-\mu b} = \left((\mu a)(\mu b)(\mu a)^{-1}(\mu b)^{-1} \right) \to \mu^2 [a, b]. \tag{A.9}$$

[1] Conferir capítulo 3 de (Hall, 2015).

Então,

$$[a,b] = \lim_{\mu\to 0} \mu^{-2}\mu^2[a,b], \tag{A.10}$$

e, portanto, obtemos a relação (3.70).