



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.001/14

**Eletrodinâmica Quântica Escalar via Teoria de Perturbação  
Causal: um estudo.**

Jhosep Victorino Beltrán Ramírez

Orientador

Prof. Bruto Max Pimentel Escobar

Febreo de 2014



*Dedicado a Johel y Mili.*



## Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia y en especial a mi hermano Johel por convencerme y ayudarme en continuar la carrera de investigación. Recuerdo que tal ayuda comenzó desde muy pequeños sentándonos en una pizarrita con él enseñándome las matemáticas que había aprendido leyendo el libro de Baldor. También agradecer a Milagros, mi compañera en estos 5 años, que me dió el soporte emocional para vivir feliz.

Agradecer a CAPES por el apoyo financiero y al Instituto de Física Teórica por dejarme ser parte del programa de maestría. En especial al profesor Pimentel, por ayudarme y aceptarme en el grupo de investigación que él lidera, por las charlas, cafés y orientación acertadas. También agradecer a Daniel Soto, por las tarde de discusiones y charlas académicas sobre el tema. A todo el colectivo del instituto que hicieron posible la convivencia en estos dos años.



## Resumo

Estudamos a Eletrodinâmica Quântica Escalar (sQED) via Teoria de Perturbação Causal (TPC). Em nível de árvore calculamos a amplitude de espalhamento fóton-bóson e bóson-bóson, bem como a polarização do vácuo.

**Palavras Chaves:** Teoria de Perturbação Causal; Eletrodinâmica Quântica Escalar; Simetria de gauge; Correções radiativas.

**Áreas do conhecimento:**1.05.02.01-7; 1.05.01.03-7; 1.01.04.01-1; 1.05.03.01-3



# Abstract

We will study the scalar quantum electrodynamics (sQED) by using Causal Perturbation Theory (TPC). In tree level we calculate the photon-boson and boson-boson scattering amplitude as well as vacuum polarization.



# Conteúdo

|                                                                                               |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>Introduction</b>                                                                           | <b>1</b> |
| <b>1 Espaço de Fock</b>                                                                       | <b>3</b> |
| 1.1 Espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de uma partícula . . . . .                                | 3        |
| 1.2 Espaço de Hilbert para $n$ partículas indistinguíveis. . . . .                            | 5        |
| 1.2.1 Operador Permutação $\hat{P}$ . . . . .                                                 | 5        |
| 1.2.2 Indistinguibilidade de $n$ partículas. . . . .                                          | 6        |
| 1.2.3 O postulado de Simetrização. . . . .                                                    | 7        |
| 1.2.4 Operadores de simetrização $\hat{S}_{\pm}$ . . . . .                                    | 8        |
| 1.2.5 Bases para os espaços $\mathcal{H}_{\pm}^{\otimes n}$ . . . . .                         | 8        |
| 1.3 Espaço de Fock $\mathcal{F}_{\pm}$ . . . . .                                              | 10       |
| 1.3.1 Estado vácuo $ 0\rangle$ . . . . .                                                      | 10       |
| 1.3.2 Definição e propriedades do espaço de Fock $\mathcal{F}$ . . . . .                      | 10       |
| 1.3.3 Operadores estendidos para o espaço de Fock. . . . .                                    | 12       |
| 1.4 Novos operadores no espaço de Fock. . . . .                                               | 12       |
| 1.4.1 Operador número de ocupação $\hat{N}$ . . . . .                                         | 13       |
| 1.4.2 Operador de emissão ou criação $\hat{a}^{\dagger}$ . . . . .                            | 13       |
| 1.4.3 Operador de absorção ou aniquilação $\hat{a}$ . . . . .                                 | 15       |
| 1.4.4 Operador $\hat{N}$ como função dos operadores $\hat{a}^{\dagger}$ e $\hat{a}$ . . . . . | 16       |
| 1.4.5 Comutação entre os operadores $\hat{a}^{\dagger}$ e $\hat{a}$ . . . . .                 | 17       |
| 1.5 Operadores de criação e aniquilação como distribuições a valor de operadores. . . . .     | 20       |

|          |                                                                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 1.5.1    | Função $f(x)$ como uma distribuição. . . . .                                                          | 20        |
| 1.5.2    | Operadores de campo $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{x})$ e $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{p})$ . . . . . | 20        |
| <b>2</b> | <b>Quantização no espaço de Minkowski.</b>                                                            | <b>23</b> |
| 2.1      | A medida invariante de Lorentz $d\mu$ . . . . .                                                       | 24        |
| 2.2      | Espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}^+, d\mu(p))$ . . . . .                               | 26        |
| 2.2.1    | Propriedades da base $ p\rangle$ . . . . .                                                            | 27        |
| 2.3      | Operadores de campo $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(p)$ y $\hat{\mathbf{a}}(p)$ . . . . .                   | 28        |
| 2.4      | Quantização do campo escalar real. . . . .                                                            | 29        |
| 2.4.1    | Relações de comutação. . . . .                                                                        | 30        |
| 2.5      | Quantização do campo escalar complexo. . . . .                                                        | 31        |
| 2.6      | Quantização do campo eletromagnético. . . . .                                                         | 32        |
| 2.6.1    | Condição de Lorenz. . . . .                                                                           | 34        |
| <b>3</b> | <b>Método de Epstein e Glaser.</b>                                                                    | <b>37</b> |
| 3.1      | Matriz $S$ como uma série de Dyson de uma partícula num campo externo. . . . .                        | 38        |
| 3.2      | Origem das divergências ultravioletas. . . . .                                                        | 42        |
| 3.3      | Matriz $S$ na Teoria de Perturbação Causal. . . . .                                                   | 43        |
| 3.3.1    | Propriedades da matriz $S$ . . . . .                                                                  | 44        |
| 3.4      | Causalidade das distribuições $T_n$ . . . . .                                                         | 48        |
| 3.5      | Construção de $T_2$ . . . . .                                                                         | 49        |
| 3.6      | Suportes de $R_2$ e $A_2$ . . . . .                                                                   | 50        |
| 3.7      | Divisão de distribuições com suporte causal. . . . .                                                  | 52        |
| 3.7.1    | Distribuições numéricas $d_2$ . . . . .                                                               | 53        |
| 3.7.2    | Grau de singularidade de uma distribuição. . . . .                                                    | 54        |
| 3.7.3    | Construção de $r_2(x)$ e $a(x)$ . . . . .                                                             | 57        |
| 3.7.4    | Processo de divisão no espaço dos momentos. . . . .                                                   | 63        |
| 3.7.5    | Regularização UV. . . . .                                                                             | 65        |
| 3.7.6    | $\hat{r}_q(p)$ como relação de dispersão. . . . .                                                     | 66        |

|                                                                      |            |
|----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>4 Eletrodinâmica quântica escalar (sQED).</b>                     | <b>69</b>  |
| 4.1 Definição de primeira ordem $T_1$ . . . . .                      | 69         |
| 4.2 Distribuição diferença $D_2(x, y)$ . . . . .                     | 70         |
| 4.3 Divisão da distribuição $D_2(x, y)$ em nível de árvore. . . . .  | 77         |
| 4.4 $T_2(x, y)$ em nível de árvore. . . . .                          | 79         |
| 4.4.1 Espalhamento Compton $\mathbf{T}_2^{(1)}$ . . . . .            | 79         |
| 4.4.2 Processo com 4 bósons externos $\mathbf{T}_2^{(2)}$ . . . . .  | 84         |
| 4.5 Determinação das seções de choque. . . . .                       | 86         |
| 4.5.1 Dispersão Bóson-Fóton (Espalhamento Compton). . . . .          | 86         |
| 4.5.2 Espalhamento bóson-bóson. . . . .                              | 96         |
| <b>5 Correções Radiativas</b>                                        | <b>101</b> |
| 5.1 Polarização do vácuo . . . . .                                   | 101        |
| 5.1.1 Inserções próprias da polarização do vácuo. . . . .            | 106        |
| 5.1.2 Determinação de $C_0$ , $C_\alpha$ e $C_2$ . . . . .           | 108        |
| <b>6 Conclusões e perspectivas.</b>                                  | <b>111</b> |
| <b>A Grau de singularidade de <math>d(x) = D^a \delta(x)</math>.</b> | <b>113</b> |
| <b>B Campo escalar complexo.</b>                                     | <b>115</b> |
| B.1 Derivadas. . . . .                                               | 115        |
| B.2 Contrações. . . . .                                              | 116        |
| <b>C Distribuição de Jordan-Pauli.</b>                               | <b>117</b> |
| C.1 Definição. . . . .                                               | 117        |
| C.2 Soluções de frequência positiva e negativa. . . . .              | 117        |
| C.3 Derivadas da distribuição de Jordan-Pauli. . . . .               | 118        |
| C.4 Transformadas de Fourier. . . . .                                | 118        |
| C.5 Grau de singularidade $\omega$ . . . . .                         | 119        |
| <b>D Resultados úteis.</b>                                           | <b>121</b> |
| D.1 Contrações. . . . .                                              | 121        |

|          |                                                                  |            |
|----------|------------------------------------------------------------------|------------|
| D.2      | Integrais. . . . .                                               | 122        |
| <b>E</b> | <b>Transformada de Fourier <math>\hat{D}_{\mu\nu}(p)</math>.</b> | <b>127</b> |
| E.1      | $\hat{F}_{\mu\nu}(p)$ . . . . .                                  | 127        |
| E.2      | $\hat{F}_{\mu\nu}(-p)$ . . . . .                                 | 132        |
| E.3      | $\mathbf{G}_{\mu\nu}(p)$ . . . . .                               | 134        |
| E.4      | $\hat{G}_{\mu\nu}(-p)$ . . . . .                                 | 136        |
|          | <b>Referências</b>                                               | <b>139</b> |

# Introdução

I think that the renormalization theory is simply a way to sweep the difficulties of the divergences of quantum electrodynamics under the rug

(RICHARD P. FEYNMAN)

A matemática não é apenas um conjunto de idéias abstratas cuja base material, no início, é determinada pelos fenômenos naturais. Assim como as sociedades antigas que costumavam enumerar os materiais para o seu sustento, para a teoria das cordas e seus derivações, a matemática tem sido a ferramenta utilizada para entender o universo ao qual pertencemos. Quando não existe uma base matemática adequada para o uso pelos físicos, esses são obrigados a criar novas estruturas. Como exemplo, podemos citar a criação do cálculo diferencial e integral para teorizar a mecânica clássica e o eletromagnetismo.

Durante o século *XX* a mecânica quântica e a teoria quântica de campos foram os tópicos que obrigaram muitos físicos a criar nova matemática. No caso específico da teoria quântica de campos, o problema das divergências ultravioletas e infravermelhas têm sido explicadas com o método ad-hoc de regularização que elimina tais divergências introduzindo-as nos termos de massa e carga no caso de  $\text{QED}_4$  [1]. Paralelamente, a *teoria de distribuições* foi introduzida independentemente por S. Sóbolev em 1935 e L. Schwartz no final da década de 1940 com a finalidade de dar uma definição adequada a muitos objetos matemáticos que os físicos da TQC utilizaram. Entre tais objetos temos a distribuição delta de Dirac e de Heaviside que ainda hoje são mal chamadas de funções.

Por algum motivo a teoria de distribuições não tem sido ainda adotada pela comunidade de física para o estudo da TQC. Os primeiros em usar elementos da

teoria de distribuição na construção da matriz de espalhamento foram H. Epstein e V. Glaser em 1973 [13]. Nessa construção o *princípio de causalidade* torna-se o princípio fundamental e por esse motivo essa abordagem denomina-se *causal*. Na década de 1980 Michael Dütsch e Günter Scharf estendem a proposta agregando a equivalência entre o espaço de momentos e de configurações do qual padecia o trabalho original. A partir de dito estudo, a proposta passa a ser conhecida como *Teoria de Perturbação Causal* (TPC).

A TPC retrocede à idéia de Heisenberg [2] de tomar a matriz de espalhamento  $S$  como a quantidade básica a construir mediante o princípio de causalidade. Da teoria de perturbações sabemos que a matriz  $S$  pode ser escrita como uma série perturbativa. Em TPC, a matriz  $S$  é calculada ordem por ordem definindo rigorosa e matematicamente cada termo em função no contexto da teoria de distribuições. O passo que evita as divergências consiste na divisão de distribuições com suporte causal em partes avançada e retardada.

No presente trabalho apresentaremos o método de TPC aplicando ao estudo da eletrodinâmica quântica escalar (sQED). No primeiro capítulo, faremos uma revisão do formalismo do espaço de Fock em  $\mathbb{R}^3$ . No segundo capítulo, estenderemos as definições do espaço de Fock em  $\mathbb{R}^3$  ao espaço de Minkowski mediante a teoria da medida invariante com a finalidade de quantizar os campos livres. No terceiro capítulo, abordaremos as idéias da TPC em linhas gerais. No quarto capítulo, aplicaremos a TPC ao caso particular da sQED em nível de árvore e faremos o cálculo das seções de choque diferencial dos espalhamentos bóson-fóton e bóson-bóson. No quinto capítulo, veremos como a TPC aborda as correções radiativas e no último teceremos nossas considerações finais e perspectivas.

# Capítulo 1

## Espaço de Fock

O uso da ferramenta matemática na descrição de fenômenos físicos é conhecido como cinemática. A matemática, com suas definições, permite-nos fazer a descrição da natureza e os cálculos necessários para a experimentação.

Em teoria quântica de campos (QFT por suas siglas em inglês) o formalismo matemático é conhecido como espaço de Fock em homenagem ao russo Vladimir Aleksandrovich Fock que introduziu tal representação [3]. O espaço de Fock modela o fenômeno físico de criação e a aniquilação de partículas, bem como os diferentes processos de espalhamento após sua interação.

Neste capítulo, estudaremos esse formalismo para usá-lo depois nos seguintes capítulos. Limitaremos nosso estudo a um espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  que estenderemos para o espaço de Minkowski com o fim de quantizar de forma natural os campos livres. Ademais, introduziremos o conceito de distribuição a valor de operadores (OVD por suas siglas em inglês) que é um ponto importante no enfoque e espírito do presente trabalho sobre QFT.

### 1.1 Espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de uma partícula

A importância de definir corretamente o espaço de Hilbert está no fato que os estados possíveis de um sistema físico conformam um espaço desses. Como exemplo, podemos nomear o de uma partícula livre ou do oscilador harmônico.

Um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  é um espaço vetorial com elementos denotados da forma  $|\phi\rangle$  onde definimos o produto escalar  $\langle\phi|\psi\rangle$  tal que

$$\| |\phi\rangle \| = \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle} \geq 0. \quad (1.1)$$

Essa definição é usada pela teoria da Mecânica Quântica para arrolar uma série de postulados que formam a base dessa teoria. Alguns desses postulados para um sistema formado por uma partícula são:

1. Existe um espaço  $\mathcal{H}$  em que os elementos normalizados  $|\psi\rangle$ , representam os estados possíveis para uma partícula.
2. Dois estados normalizados  $|\psi\rangle$  e  $|\psi'\rangle$  que se diferenciem apenas por um elemento de fase (i.e.  $|\psi\rangle = e^{i\theta}|\psi'\rangle$ ) representam o mesmo estado físico.
3. Toda quantidade mensurável  $Q$  é representada como um operador hermitiano  $\hat{Q} = \hat{Q}^\dagger$  tal que

$$\hat{Q}|q_i\rangle = q_i|q_i\rangle. \quad (1.2)$$

Um estudo desses e mais postulados pode ser visto na referencia [4]. Um fator a se tomar em conta é que o operador  $\hat{Q}$  na equação (1.2) representa um conjunto completo de operadores que comutam (CCOC).

Agora, introduziremos a construção de uma base vetorial para facilitar os cálculos adiante. Pela teoria de espaços vetoriais, sempre é possível usar os autovetores  $\{|q_i\rangle\}$  de (1.2) no espaço  $\mathcal{H}$  para expressar qualquer estado  $|\psi\rangle$  da forma:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1} a_i |q_i\rangle, \quad (1.3)$$

onde  $i = 1, 2, \dots$  é o número quântico que representa os estados possíveis em que se pode encontrar a partícula em estudo.

## 1.2 Espaço de Hilbert para $n$ partículas indistinguíveis.

Fenômenos físicos, tais como o estudo da matéria condensada, exigem uma extensão dos postulados da mecânica quântica para um sistema com mais de uma partícula. Pela teoria de espaços vetoriais, essa extensão pode-se obter facilmente fazendo o produto tensorial

$$\mathcal{H}^{\otimes n} \equiv \mathcal{H}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}^{(n)}, \quad (1.4)$$

onde os super-índices do lado direito da definição (1.4) são colocados para identificar a qual partícula lhe corresponde cada  $\mathcal{H}^{(i)}$ . A base correspondente nesse espaço vetorial pode ser construída com as bases correspondentes a cada espaço de Hilbert individual  $\mathcal{H}^{(i)}$ . A base para o espaço  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  é o conjunto

$$\{|q_{j_1}^{(1)}\rangle \otimes \dots \otimes |q_{j_n}^{(n)}\rangle\} \equiv \{|q_{j_1}^{(1)}, \dots, q_{j_n}^{(n)}\rangle\}, \quad (1.5)$$

onde os sub-índices indicam o estado físico correspondente e o super-índice a partícula correspondente. Para facilitar a anotação e os cálculos, vamos tomar a convenção de tirar as etiquetas da cada partícula e supor que estarão sempre em ordem crescente da esquerda para a direita.

A extensão matemática apresentada não permite modelar a física de um sistema quântico por que os fenômenos associados se caracterizam pela propriedade de indistinguibilidade. Para mais detalhe sugere-se a leitura do capítulo 2 da referência [5].

Então, a tarefa neste ponto é introduzir a indistinguibilidade para construir um espaço de Hilbert de acordo com essa propriedade.

### 1.2.1 Operador Permutação $\hat{P}$ .

A introdução desse novo operador obedece à definição (1.4). Um estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes n}$  pode ser escrito na forma

$$|\psi\rangle = \sum_{j_1, \dots, j_n} c_{j_1, \dots, j_n} |q_{j_1}, \dots, q_{j_n}\rangle. \quad (1.6)$$

O operador  $\hat{P}$  atua sobre as etiquetas que diferenciam as partículas em diferentes estados  $|q_j\rangle$ . Dependendo do número de partículas  $n$ , os operadores de permutação formam grupos denotados  $S_n$ , por exemplo

$$\begin{cases} S_1 = \{\mathbf{1}\} \\ S_2 = \{\mathbf{1}, \hat{P}_{21}\} \\ S_3 = \{\mathbf{1}, \hat{P}_{132}, \hat{P}_{213}, \hat{P}_{321}, \hat{P}_{231}, \hat{P}_{312}\} \end{cases} \quad (1.7)$$

onde os sub-índices informam como atua cada operador. Por exemplo, o estado  $|q_4, q_7, q_5\rangle$  para três partículas nos diz que a partícula 1 encontra-se no estado  $|q_4\rangle$ , a partícula 2 no estado  $|q_7\rangle$  e a partícula 3 no estado  $|q_5\rangle$ . O operador permutação  $\hat{P}_{231}$ , atuando nesse estado faz o seguinte

$$\hat{P}_{231}|q_4, q_7, q_5\rangle = |q_7, q_5, q_4\rangle, \quad (1.8)$$

onde observa-se que o estado que pertencia a partícula 2 agora é de 1, da 3 corresponde-lhe à 2 e o da 1 corresponde-lhe a 3.

### 1.2.2 Indistinguíbilidade de $n$ partículas.

O operador  $\hat{P}$ , visto na seção anterior, permite-nos introduzir a propriedade de indistinguíbilidade. Seja  $|\psi\rangle$  um estado de  $n$  partículas indistinguíveis. Dos postulados da mecânica quântica, podemos afirmar que ao aplicar um operador de permutação sobre esse estado, o resultado deverá ser o mesmo estado multiplicado por uma fase, já que a informação física é a mesma,

$$P_\alpha|\psi\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle. \quad (1.9)$$

O estudo dos operadores de permutação  $\hat{P}_\alpha$  é equivalente ao estudo de teoria de grupo de permutações. Uma propriedade que usaremos para construir os espaços

| $P_\alpha$                                     | $\pi_\alpha$ |
|------------------------------------------------|--------------|
| $\mathbb{1} = P_{123} = P_{213}^2 = P_{132}^2$ | 2            |
| $P_{312} = P_{213}P_{132}$                     | 2            |
| $P_{231} = P_{132}P_{213}$                     | 2            |
| $P_{213}$                                      | 1            |
| $P_{132}$                                      | 1            |
| $P_{321} = P_{213}P_{132}P_{213}$              | 3            |
| $P_{321} = P_{132}P_{213}P_{132}$              | 3            |

Tabela 1.1: Paridade  $\pi_\alpha$  de cada elemento do grupo de permutações  $S_3$ .

vetoriais com elementos que cumpram a condição (1.9) é a paridade  $\pi$ . Todos os operadores de permutação podem ser decompostos em operadores de permutação simples. Por exemplo, para  $S_3$  a tabela (1.1) mostra algumas decomposições. A decomposição não é única, mas pode-se mostrar que a menor quantidade de componentes  $\pi_\alpha$  é sempre a mesma. O número  $\pi_\alpha$  define a paridade da permutação.

### 1.2.3 O postulado de Simetrização.

Usando a paridade  $\pi$  podemos definir os estados completamente simétricos  $|\phi\rangle_+$  e completamente anti-simétricos  $|\phi\rangle_-$ , os quais formam os espaços de Hilbert do mesmo nome e indicados por  $\mathcal{H}_\pm^{\otimes n}$ ,

$$\begin{cases} \mathcal{H}_+^{\otimes n} = \{|\psi\rangle_+ / P_\alpha |\psi\rangle_+ = |\psi\rangle_+, & P \in S_n\} \\ \mathcal{H}_-^{\otimes n} = \{|\psi\rangle_- / P_\alpha |\psi\rangle_- = (-1)^{\pi_\alpha} |\psi\rangle_+, & P \in S_n\} \end{cases} \quad (1.10)$$

Em face à grande quantidade de experimentos levados a cabo até a data de hoje no estudo das partículas elementares que constituem a matéria, conhece-se que só os estados que cumprem (1.10) representam estados físicos. Por este motivo é que aos postulados da mecânica quântica se agrega o chamado postulado de simetrização.

*Os estados simétricos e antisimétricos são os únicos estados possíveis para um sistema de partículas indistinguíveis. As partículas chama-se-lhes **Bósons** se seu estado é simétrico e **Férmions** se é anti-simétrico.*

### 1.2.4 Operadores de simetrização $\hat{S}_\pm$ .

A forma de selecionar os estados  $|\phi\rangle_\pm$  pode ser sistematizada construindo os operadores de projeção  $\hat{S}_\pm$ . A ideia é que esses operadores atuando sobre qualquer estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes n}$  deem como resultado um estado proporcional a  $|\psi\rangle_\pm$ .

$$\hat{S}_\pm |\psi\rangle \propto |\psi\rangle_\pm. \quad (1.11)$$

Trabalhando indutivamente a partir do sistema de duas partículas, pode-se obter os operadores  $\hat{S}_\pm$ :

$$\hat{S}_\pm \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\alpha} (\pm 1)^{\pi_{\alpha}} \hat{P}_{\alpha}, \quad (1.12)$$

onde a soma é de todos os operadores de permutação pertencentes ao grupo  $S_n$ .

### 1.2.5 Bases para os espaços $\mathcal{H}_\pm^{\otimes n}$ .

Agora, usaremos os operadores de simetrização para construir as bases dos espaços  $\mathcal{H}_\pm^{\otimes n}$ . Já que todo o estado  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^{\otimes n}$  é uma combinação linear dos elementos de base  $|q_{j_1}, \dots, q_{j_n}\rangle$ , simetrizar o estado  $|\psi\rangle$  é equivalente a simetrizar a cada um dos elementos de sua expansão, portanto as bases para os espaços  $\mathcal{H}_\pm^{\otimes n}$  seriam proporcionais às projeções da base  $|q_{j_1}, \dots, q_{j_n}\rangle$ . A projeção dos elementos  $|q_{j_1}, \dots, q_{j_n}\rangle$ , são

$$\hat{S}_- |q_{j_1}, q_{j_2}, \dots, q_{j_n}\rangle = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} |q_{j_1}^{(1)}\rangle & |q_{j_2}^{(1)}\rangle & \cdots & |q_{j_n}^{(1)}\rangle \\ |q_{j_1}^{(2)}\rangle & |q_{j_2}^{(2)}\rangle & \cdots & |q_{j_n}^{(2)}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |q_{j_1}^{(n)}\rangle & |q_{j_2}^{(n)}\rangle & \cdots & |q_{j_n}^{(n)}\rangle \end{vmatrix}, \quad (1.13)$$

$$\hat{S}_+ |q_{j_1}, q_{j_2}, \dots, q_{j_n}\rangle = \frac{1}{n!} perm \begin{vmatrix} |q_{j_1}^{(1)}\rangle & |q_{j_2}^{(1)}\rangle & \dots & |q_{j_n}^{(1)}\rangle \\ |q_{j_1}^{(2)}\rangle & |q_{j_2}^{(2)}\rangle & \dots & |q_{j_n}^{(2)}\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |q_{j_1}^{(n)}\rangle & |q_{j_2}^{(n)}\rangle & \dots & |q_{j_n}^{(n)}\rangle \end{vmatrix}, \quad (1.14)$$

onde na equação (1.14) a expressão *perm* significa permanente e é um determinante com somas.

Por outro lado, não temos feito nenhuma restrição sobre os estados que cada partícula do sistema pode ocupar, no entanto é fácil notar na equação (1.13), que se dois estados fossem iguais, ter-se-ia duas colunas idênticas nesse determinante e, portanto, a anulação do mesmo. A interpretação disso é o **princípio de exclusão de Pauli** que nos diz que num sistema de  $n$  férmions é impossível que duas partículas se encontrem no mesmo estado quântico. De (1.14) vemos que para bósons a quantidade de partículas num estado não está limitada.

Agora vamos representar os elementos das bases para os estados  $\mathcal{H}_\pm^{\otimes n}$  da forma  $\{|q_1^{n_1}, q_2^{n_2}, \dots, q_v^{n_v}\rangle_\pm\}$ , onde o índice  $j$  que se referia ao estado quântico foi absorvido por  $q$  que está associado à magnitude  $Q$ . O expoente representa o número de vezes que se repete cada estado, também pode-se interpretar como o número de partículas no estado respectivo, e por tanto  $n_1 + \dots + n_v = n$ .

Então pela proporcionalidade (1.11)

$$|q_1^{n_1}, \dots, q_v^{n_v}\rangle_\pm = \lambda \mathcal{S}_\pm |q_1^{n_1}, \dots, q_v^{n_v}\rangle, \quad (1.15)$$

onde a constante de proporcionalidade  $\lambda$  pode ser calculad sob a condição de ortogonalidade da base  $\{|q_1^{n_1}, q_2^{n_2}, \dots, q_v^{n_v}\rangle_\pm\}$ . Sob essa condição

$$\lambda = \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n_1!} \dots \sqrt{n_v!}}, \quad (1.16)$$

onde para o caso de férmions  $n_i = \{0, 1\}$ .

Na construção da base (1.15), entende-se que nas etiquetas das partículas as primeiras  $n_1$  se encontram no estado  $|q_1\rangle$ , as seguintes  $n_2$  no estado  $|q_2\rangle$ , etc. No momento de simetrizar, o ordenamento original nas etiquetas das partículas não

é mais importante, mas sim agora o número de partículas que se encontra num determinado estado. Então, ordenando de forma crescente os números quânticos  $q_i$ , a seqüência de números  $|n_1, \dots, n_v\rangle$  é outra representação para o elemento de base  $|q_1^{n_1}, \dots, q_v^{n_v}\rangle_{\pm}$ .

$$|n_1, \dots, n_v\rangle \equiv |q_1^{n_1}, \dots, q_v^{n_v}\rangle_{\pm}. \quad (1.17)$$

A representação (1.17) é conhecida como *número de ocupação*.

### 1.3 Espaço de Fock $\mathcal{F}_{\pm}$ .

A criação e aniquilação de partículas elementares é um fenômeno recorrente em física nuclear e de partículas. Esse tipo de fenômeno não pode ser modelado por um espaço de Hilbert com o número de partículas  $n$  fixo. Por isso, temos a necessidade de construir um espaço de Hilbert em que os estados, que indicamos por  $|\Phi\rangle$ , incluam os estados  $|\Phi_{(n)}\rangle \in \mathcal{H}_{\pm}^{\otimes n}$  com diferentes números de partículas  $n$ . Este espaço de Hilbert é conhecido como *espaço de Fock* e nesta seção passamos a defini-lo.

#### 1.3.1 Estado vácuo $|0\rangle$

Para definir o espaço de Fock, temos que definir primeiro o espaço de Hilbert sem partículas  $\mathcal{H}^{\otimes 0}$  do seguinte modo:

$$\mathcal{H}^{\otimes 0} = \{\lambda|\Phi_{(0)}\rangle = \lambda|0\rangle; \lambda \in \mathbb{C}\}. \quad (1.18)$$

Por definição o estado  $|\Phi_{(0)}\rangle$  é um estado com comportamento simétrico y anti-simétrico simultaneamente

$$\hat{S}_{\pm}|0\rangle = |0\rangle.$$

#### 1.3.2 Definição e propriedades do espaço de Fock $\mathcal{F}$ .

O espaço  $\mathcal{F}$  define-se diretamente como a *soma direta* dos espaços de Hilbert para bósons e férmions definidos em (1.10)

$$\mathcal{F}_\pm \equiv \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_\pm \mathcal{H}^{\otimes n}, \quad (1.19)$$

onde os símbolos  $+$  e  $-$  são usados para definir o espaço de Fock para bósons ou férmions respectivamente. Essa definição obedece à necessidade de que todos os estados com diferentes números de partículas  $n$  devem estar incluídos nesse espaço.

Assim também, todo o estado  $|\Phi\rangle \in \mathcal{F}_\pm$  pode ser escrito da forma

$$|\Phi\rangle = \begin{pmatrix} |0\rangle \\ |\Phi_{(1)}\rangle \\ \vdots \\ |\Phi_{(n)}\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

onde cada estado  $|\Phi_{(n)}\rangle$  pertence ao espaço de Hilbert de  $n$  partículas fixas  $\mathcal{H}_\pm^{\otimes n}$ . Esta anotação permite definir o bra

$$\langle\Phi| = \left( \langle 0| \quad \langle\Phi_{(1)}| \quad \cdots \quad \langle\Phi_{(n)}| \quad \cdots \right) \quad (1.21)$$

e também permite definir o produto escalar

$$\langle\Phi|\Psi\rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \langle\Phi_{(n)}|\Psi_{(n)}\rangle \quad (1.22)$$

e, portanto, também obtemos uma norma positiva definida

$$\| |\Phi\rangle \|^2 = \left[ \sum_n \| |\Phi_{(n)}\rangle \|^2 \right]^{1/2} \geq 0. \quad (1.23)$$

Como o espaço de Fock constitui um espaço de Hilbert, estritamente falando, exclui-se dele aqueles elementos cuja norma seja infinita, portanto para aqueles elementos  $|\Phi\rangle$  temos que:

$$\| |\Phi\rangle \|^2 = \sum_n \| |\Phi_{(n)}\rangle \|^2 < \infty. \quad (1.24)$$

### 1.3.3 Operadores estendidos para o espaço de Fock.

Um operador  $\hat{Q}$  que atua em elementos de um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de uma partícula, pode ser estendido para um sistema de  $n$  partículas usando a matemática de produtos tensoriais. Essa extensão é:

$$\hat{Q}_{(n)} = \sum_{i=1}^n \hat{Q}_i, \quad (1.25)$$

onde  $\hat{Q}_i$  é o operador que atua sobre o espaço de Hilbert da  $i$ -ésima partícula, o que significa que  $\hat{Q}_i$  é

$$\hat{Q}_i = \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \hat{Q} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}, \quad (1.26)$$

onde o operador  $\hat{Q}$  encontra-se na  $i$ -ésima posição do produto tensorial (1.26).

Definimos a extensão para o espaço de Fock da seguinte forma:

$$\hat{Q}|\Phi\rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Q}_{(n)}|\Phi_{(n)}\rangle. \quad (1.27)$$

## 1.4 Novos operadores no espaço de Fock.

Basicamente pode-se identificar três novos operadores em  $\mathcal{F}_{\pm}$ . Esses operadores são:

1. Operador número de ocupação  $\hat{N}$ .
2. Operador de criação  $\hat{a}^{\dagger}$  de partículas.
3. Operador de aniquilação  $\hat{a}$  de partículas.

O operador  $\hat{N}$  obedece ao fato de que sendo o número de partículas  $n$  uma quantidade variável, automaticamente converte-se num observável e, portanto, aliado a esse observável obtemos esse operador.

Os operadores de criação  $\hat{a}^{\dagger}$  e aniquilação  $\hat{a}$  de partículas obedecem a mesma necessidade da definição do espaço de Fock, aos fenômenos de criação e da aniquilação de partículas.

A seguir, passaremos a definir esses operadores e suas propriedades.

### 1.4.1 Operador número de ocupação $\hat{N}$ .

Para construir esse operador, partimos da definição de como opera sobre os estados  $|\Phi_{(n)}\rangle$ :

$$\hat{N}_{(n)}|\Phi_{(n)}\rangle \equiv n|\Phi_{(n)}\rangle. \quad (1.28)$$

Com esta definição, o operador número de ocupação  $\hat{N}$  que atua em  $\mathcal{F}_{\pm}$  define-se

$$\hat{N}|\Phi\rangle \equiv \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \hat{N}_{(\mathbf{n})}|\Phi_{(\mathbf{n})}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n|\Phi_{(n)}\rangle. \quad (1.29)$$

Se consideramos o estado  $|\Phi\rangle$  normalizado, podemos dar uma interpretação bastante simples ao valor médio do operador  $\hat{N}$

$$\langle\Phi|\hat{N}|\Phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n\langle\Phi_{(n)}|\Phi_{(n)}\rangle \quad (1.30)$$

Como  $\langle\Phi|\Phi\rangle = 1$ , então  $\langle\Phi_{(n)}|\Phi_{(n)}\rangle < 1$  representa a probabilidade de que o número de partículas do sistema seja  $n$ . Portanto, a soma (1.30) corresponde à soma do produto da cada número de partículas  $n$  com sua respectiva probabilidade.

### 1.4.2 Operador de emissão ou criação $\hat{a}^{\dagger}$ .

Seja  $|\Phi_{(n)}\rangle \in \mathcal{H}_{\pm}^{\otimes n}$  o estado de um sistema de  $n$  partículas. A criação de uma partícula em tal sistema coloca-o num estado  $|\Phi_{(n+1)}\rangle \in \mathcal{H}_{\pm}^{\otimes(n+1)}$ . Essa ação sobre o estado  $|\Phi_{(n)}\rangle$  é realizada pelo operador  $\hat{a}^{\dagger}$  e portanto é válida a seguinte proporcionalidade

$$\hat{a}^{\dagger}|\Phi_{(n)}\rangle \propto |\Phi_{(n+1)}\rangle. \quad (1.31)$$

Como todo estado  $|\Phi_{(n)}\rangle$  pode ser estendido na base  $|n_1, \dots, n_v\rangle$ , é suficiente analisar como atua o operador de criação  $\hat{a}^{\dagger}$  sobre um elemento daquela base. Então, analogamente à proporcionalidade (1.31), podemos escrever

$$\hat{a}^{\dagger}(q_j)|n_1, \dots, n_v\rangle \propto |n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_v\rangle, \quad (1.32)$$

onde o operador de criação escreve-se  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_j)$  indicando que se criou uma partícula no estado  $|q_j\rangle$ .

Usando a definição da representação do número de ocupação (1.17) e da base simetrizada (1.15), podemos notar que o lado direito de (1.32) é proporcional à simetrização do produto tensorial  $\mathcal{S}_\pm^{(n+1)}(|q_l\rangle \otimes |n_1, \dots, n_l, \dots, n_v\rangle)$ . Trabalhando com esse produto obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_j)|n_1, \dots, n_j, \dots, n_v\rangle &\propto \mathcal{S}_\pm^{(n+1)}\left(|q_j\rangle \otimes |n_1, \dots, n_j, \dots, n_v\rangle\right) \\
 &\propto \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n_1! \dots n_j! \dots}} \mathcal{S}_\pm^{(n+1)}\left(|q_j\rangle \otimes \right. \\
 &\quad \left. \otimes \mathcal{S}_\pm^{(n)}|q_1\rangle^{n_1} \dots |q_j\rangle^{n_j} \dots |q_v\rangle^{n_v}\right) \\
 &\propto \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n_1! \dots n_j! \dots}} (\pm)^{n_1 + \dots + n_{j-1}} \times \\
 &\quad \times \mathcal{S}_\pm^{(n+1)}(|q_1\rangle^{n_1} \dots |q_j\rangle^{n_j+1} \dots |q_v\rangle^{n_v}) \\
 &\propto (\pm)^{n_1 + \dots + n_{j-1}} \frac{\sqrt{n_j + 1}}{\sqrt{n + 1}} |n_1, \dots, n_j + 1, \dots, n_v\rangle.
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

O resultado (1.33) faz-nos lembrar o resultado de um operador de subida na perspectiva do oscilador harmônico quântico. Por esse motivo nota-se que é conveniente definir a ação do operador de criação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_j)|n_1, \dots, n_v\rangle &\equiv \sqrt{n+1} \mathcal{S}_\pm^{(n+1)}\left(|q_j\rangle \otimes |n_1, \dots, n_v\rangle\right) \\
 &\equiv (\pm)^{n_1 + \dots + n_{j-1}} \sqrt{n_j + 1} |\dots, n_j + 1, \dots\rangle.
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Um fator importante da definição (1.34) é que não temos dependência com respeito ao número total de partículas.

A definição (1.34) pode ser estendida aos estados  $|\Phi_{(n)}\rangle \in \mathcal{H}_\pm^{\otimes n}$  fazendo uso da linearidade [5] do operador  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_j)$ .

Seja  $|f\rangle \in \mathcal{H}$  o estado em que uma partícula é criada num sistema de  $n - 1$  partículas com estado  $|\Phi_{(n-1)}\rangle \in \mathcal{H}_{\pm}^{\otimes(n-1)}$ . Essa criação é definida por

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{\dagger}(f)|0\rangle \equiv |f\rangle \\ \mathbf{a}^{\dagger}(f)|\Phi_{(n-1)}\rangle \equiv \sqrt{n}\mathcal{S}_{\pm}^{(n)}(|f\rangle \otimes |\Phi_{(n-1)}\rangle) \end{cases} \quad (1.35)$$

### 1.4.3 Operador de absorção ou aniquilação $\hat{\mathbf{a}}$ .

A operação de aniquilação transforma um sistema de  $n$  partículas num de  $n - 1$ . Analogamente ao operador  $\hat{\mathbf{a}}^{\dagger}$ , a ação do operador  $\hat{\mathbf{a}}$  sobre um estado base  $|n_1, \dots, n_v\rangle$  cumpre a seguinte proporcionalidade:

$$\hat{\mathbf{a}}(q_l)|n_1, \dots, n_l, \dots, n_v\rangle \propto |n_1, \dots, n_l - 1, \dots, n_v\rangle. \quad (1.36)$$

Para obter o elemento  $|n_1, \dots, n_l - 1, \dots, n_v\rangle$  a partir de  $|n_1, \dots, n_l, \dots, n_v\rangle$  vamos definir o produto

$$\langle f|G\rangle \equiv (\langle f|g_1\rangle)|g_2\rangle \otimes \dots \otimes |g_n\rangle \quad (1.37)$$

onde o bra  $\langle f|$  pertence ao espaço dual de  $\mathcal{H}$  e  $|G\rangle = |g_1, \dots, g_n\rangle$  é o ket que pertence ao espaço  $\mathcal{H}^{\otimes n}$ . Como pode ser observado, o produto (1.37) resulta ser um ket do espaço  $\mathcal{H}^{\otimes(n-1)}$ .

Usando o produto (1.37) podemos determinar  $|n_1, \dots, n_l - 1, \dots, n_v\rangle$  a partir de  $|n_1, \dots, n_l, \dots, n_v\rangle$ . Desenvolvemos o produto  $\langle q_l|n_1, \dots, n_l - 1, \dots, n_v\rangle$

$$\begin{aligned} \langle q_l|n_1, \dots, n_l, \dots, n_v\rangle &= \langle q_l|n_1, \dots, n_l, \dots\rangle \\ &= \langle q_l| \left( \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n_1!} \dots \sqrt{n_l!} \dots} \right) \mathcal{S}_{\pm}^{(n)}(|q_1\rangle^{n_1} \dots |q_l\rangle^{n_l} \dots) \\ &= \left( \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n_1!} \dots \sqrt{n_l!} \dots} \right) (\pm)^{n_1 + \dots + n_{l-1}} \left( \frac{n_l}{n} \right) \times \\ &\quad \times \mathcal{S}_{\pm}^{(n-1)}|q_1\rangle^{n_1} \dots |q_l\rangle^{n_l-1} \dots \\ &= \left( \frac{\sqrt{n_l}}{\sqrt{n}} \right) (\pm)^{n_1 + \dots + n_{l-1}} |n_1, \dots, n_l - 1, \dots, n_v\rangle. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Nota-se que o resultado (1.38) é similar ao que obtivemos para o operador  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$ . Com a mesma ideia de eliminar a dependência com respeito ao número total de partículas  $n$ , escolhemos uma constante de proporcionalidade adequada para (1.36) e passamos a definir o operador de aniquilação.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{a}}(q_l)|n_1, \dots, n_v\rangle &\equiv \sqrt{n}\langle q_l|n_1, \dots, n_l, \dots, n_v\rangle \\ &\equiv (\pm)^{n_1+\dots+n_{l-1}}\sqrt{n_l}|n_1, \dots, n_l-1, \dots, n_v\rangle.\end{aligned}\tag{1.39}$$

Podemos generalizar essa definição para os estados  $|\Phi_{(n)}\rangle$  fazendo uso da anti-linearidade [5] do operador de aniquilação  $\hat{\mathbf{a}}$ .

Seja  $|f\rangle \in \mathcal{H}$  o estado em que uma partícula é aniquilada num sistema de  $n$  partículas com estado  $|\Phi_n\rangle \in \mathcal{H}_\pm^{\otimes n}$ . Essa aniquilação é definida por

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{a}}(f)|0\rangle \equiv 0 \\ \hat{\mathbf{a}}(f)|\Phi_{(n)}\rangle \equiv \sqrt{n}\langle f|\Phi_{(n)}\rangle \end{cases}\tag{1.40}$$

Mediante as definições gerais (1.35) e (1.40) para os operadores de criação  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$  e aniquilação  $\hat{\mathbf{a}}$  respectivamente, podemos mostrar que esses operadores são adjuntos, por essa razão a decisão de usar a notação  $a^\dagger$  do início.

#### 1.4.4 Operador $\hat{\mathbf{N}}$ como função dos operadores $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$ e $\hat{\mathbf{a}}$

Agora vamos mostrar que o operador  $\hat{\mathbf{N}}$  pode ser escrito em função dos operadores de criação e aniquilação.

Seja  $|f_j\rangle$  uma base completa do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de uma partícula. Usando a definição (1.29)

$$\begin{aligned}
\langle \Phi | \mathbf{N} | \Phi \rangle &= \sum_n \langle \Phi_{(n)} | n | \Phi_n \rangle \\
&= \sum_n \left[ \langle \Phi_{(n)} | n \left( \sum_j |f_j\rangle \langle f_j| \right) | \Phi_n \rangle \right] \\
&= \sum_n \left[ \sum_j \left( \langle \Phi_{(n)} | f_j \rangle \sqrt{n} \right) \left( \sqrt{n} \langle f_j | \Phi_n \rangle \right) \right] \\
&= \sum_n \left[ \sum_j \left( \langle \Phi_{(n)} | \hat{\mathbf{a}}^\dagger(|f_j\rangle) \right) \left( \hat{\mathbf{a}}(|f_j\rangle) | \Phi_n \rangle \right) \right] \\
&= \sum_n \left[ \langle \Phi_{(n)} | \sum_j \hat{\mathbf{a}}^\dagger(|f_j\rangle) \hat{\mathbf{a}}(|f_j\rangle) | \Phi_n \rangle \right].
\end{aligned} \tag{1.41}$$

Está claro que do resultado (1.41)  $\hat{\mathbf{N}}$  pode ser escrito

$$\hat{\mathbf{N}} = \sum_j \hat{\mathbf{a}}^\dagger(|f_j\rangle) \hat{\mathbf{a}}(|f_j\rangle). \tag{1.42}$$

Outros tipos de operadores existentes, os quais não nos aprofundaremos neste trabalho, são os chamados operadores de um e dois corpos que são muito usados em outras áreas de física, para seu estudo se recomenda a referência [5].

### 1.4.5 Comutação entre os operadores $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$ e $\hat{\mathbf{a}}$

As comutações a que os operadores  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$  e  $\hat{\mathbf{a}}$  estão sujeitos são:

1.  $[\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f), \hat{\mathbf{a}}^\dagger(g)]$
2.  $[\hat{\mathbf{a}}(f), \hat{\mathbf{a}}(g)]$
3.  $[\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f), \hat{\mathbf{a}}(g)] = -[\hat{\mathbf{a}}(g), \hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)]$
4.  $\{\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f), \hat{\mathbf{a}}^\dagger(g)\}$
5.  $\{\hat{\mathbf{a}}(f), \hat{\mathbf{a}}(g)\}$
6.  $\{\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f), \hat{\mathbf{a}}(g)\} = \{\hat{\mathbf{a}}(g), \hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)\}$

onde  $[A, B] = AB - BA$  e  $\{A, B\} = AB + BA$  são as operações de comutação e anti-comutação, respectivamente. Para determinar essas operações desenvolveremos primeiro alguns resultados. Primeiro a operação  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(g)|\Psi_{(n)}\rangle$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(g)|\Psi_{(n)}\rangle &= \sqrt{n+1}\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)\hat{S}_\pm^{(n+1)}|g\rangle \otimes |\Psi_{(n)}\rangle \\
 &= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\hat{S}_\pm^{(n+2)}|f\rangle\hat{S}_\pm^{(n+1)}|g\rangle \otimes |\Psi_{(n)}\rangle \\
 &= (\pm)\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\hat{S}_\pm^{(n+2)}|g\rangle\hat{S}_\pm^{(n+1)}|f\rangle \otimes |\Psi_{(n)}\rangle \\
 &= (\pm)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(g)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)|\Psi_{(n)}\rangle,
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

onde notamos que as sinais associam-se ao processo de simetrização (bósons) ou ao de anti-simetrização (férmions). Do resultado (1.43), podemos notar que qualquer comutação (bósons) ou anti-comutação (férmions) entre dois operadores de criação ou aniquilação é nula.

Agora, aproveitando a linearidade e anti-linearidade dos operadores  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$  e  $\hat{\mathbf{a}}$  respectivamente, desenvolveremos sua aplicação consecutiva sobre um estado  $|\Psi_{(n)}\rangle$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)\hat{\mathbf{a}}(g)|\Psi_{(n)}\rangle &= \left(\sum_i \lambda_i \hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_i)\right) \left(\sum_j \xi_j^* \hat{\mathbf{a}}(q_j)\right) \left(\sum_{n_1, \dots, n_v} C_{n_1, \dots, n_v} |n_1, \dots, n_v\rangle\right) \\
 &= \sum_{\substack{i=j=k \\ n_1, \dots, n_v}} n_k \lambda_k \xi_k^* C_{n_1, \dots, n_v} |n_1, \dots, n_v\rangle + \\
 &\quad + \sum_{\substack{i \neq j \\ n_1, \dots, n_v}} (\pm)^\alpha \sqrt{n_i+1} \sqrt{n_j} \lambda_i \xi_j^* C_{\dots, n_v} |\dots, n_i+1, \dots, n_j-1, \dots\rangle,
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{a}}(g)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)|\Psi_{(n)}\rangle &= \left(\sum_j \xi_j^* \hat{\mathbf{a}}(q_j)\right) \left(\sum_i \lambda_i \hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_i)\right) \left(\sum_{n_1, \dots, n_v} C_{n_1, \dots, n_v} |n_1, \dots, n_v\rangle\right) \\
&= \sum_{\substack{i=j=k \\ n_1, \dots, n_v}} (n_k + 1) \lambda_k \xi_k^* C_{n_1, \dots, n_v} |n_1, \dots, n_v\rangle + \\
&\quad + \sum_{\substack{i \neq j \\ n_1, \dots, n_v}} (\pm)^\alpha \sqrt{n_i + 1} \sqrt{n_j} \lambda_i \xi_j^* C_{n_1, \dots, n_v} |\dots, n_i + 1, \dots, n_j - 1, \dots\rangle \\
&= \sum_{\substack{i=j=k \\ n_1, \dots, n_v}} n_k \lambda_k \xi_k^* C_{n_1, \dots, n_v} |n_1, \dots, n_v\rangle + \langle g|f\rangle |\Psi_{(n)}\rangle + \\
&\quad + \sum_{\substack{i \neq j \\ n_1, \dots, n_v}} (\pm)^\alpha \sqrt{n_i + 1} \sqrt{n_j} \lambda_i \xi_j^* C_{n_1, \dots, n_v} |\dots, n_i + 1, \dots, n_j - 1, \dots\rangle.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Para o caso de bósons ( $n_i \geq 0$ ), os resultados (1.44) e (1.45) podem ser combinados obtendo como resultado

$$\hat{\mathbf{a}}(g)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)|\Psi_{(n)}\rangle = \hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)\hat{\mathbf{a}}(g)|\Psi_{(n)}\rangle + \langle g|f\rangle |\Psi_{(n)}\rangle \tag{1.46}$$

No caso de férmions ( $n_i = 0, 1$ ), os resultados (1.44) e (1.45) transformam-se em:

$$n_k = 0 \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)\hat{\mathbf{a}}(g)|\Psi_{(n)}\rangle = 0 + (\sum)|\Psi_{(n)}\rangle \\ \hat{\mathbf{a}}(g)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)|\Psi_{(n)}\rangle = \langle g|f\rangle |\Psi_{(n)}\rangle - (\sum)|\Psi_{(n)}\rangle \end{cases} \tag{1.47}$$

$$n_k = 1 \begin{cases} \hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)\hat{\mathbf{a}}(g)|\Psi_{(n)}\rangle = \langle g|f\rangle |\Psi_{(n)}\rangle + (\sum)|\Psi_{(n)}\rangle \\ \hat{\mathbf{a}}(g)\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)|\Psi_{(n)}\rangle = 0 - (\sum)|\Psi_{(n)}\rangle \end{cases} \tag{1.48}$$

Dos resultados (1.46), (1.47) e (1.48), a conclusão é a seguinte:

Só os comutadores ou anti-comutadores entre um operador de criação com outro de aniquilação não são nulos.

$$\begin{cases} [\hat{\mathbf{a}}(g), \hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)] = \langle g|f\rangle \mathbb{1} & \text{(Bósons)} \\ \{\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f), \hat{\mathbf{a}}(g)\} = \langle g|f\rangle \mathbb{1} & \text{(Férmions)} \end{cases} \tag{1.49}$$

## 1.5 Operadores de criação e aniquilação como distribuições a valor de operadores.

### 1.5.1 Função $f(x)$ como uma distribuição.

Define-se uma distribuição  $T$  como um mapeamento de um espaço de funções  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  (chamado funções de prova) para o conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ . Por exemplo, a distribuição delta de Dirac define-se como:

$$\begin{aligned}\delta : \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow f(0),\end{aligned}\tag{1.50}$$

a operação (1.50) pode ser escrita da forma compacta

$$\langle \delta, f \rangle = f(0).\tag{1.51}$$

No caso de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  localmente integrável, pode ser definida a distribuição:

$$T_f(\phi) = \langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx^n,\tag{1.52}$$

onde o resultado  $T_f(\phi)$  continua pertencendo aos complexos  $\mathbb{C}$ .

### 1.5.2 Operadores de campo $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{x})$ e $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{p})$ .

A partir da interpretação do operador  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_1)$  de se criar uma partícula no estado  $|q_1\rangle$ , podemos interpretar agora o operador na base de configurações  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{x})$  como a criação de uma partícula na coordenada  $\mathbf{x}$  e  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{p})$  como a criação de uma partícula com momentum linear  $\mathbf{p}$ .

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{x})|0\rangle = |\mathbf{x}\rangle \\ \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = |\mathbf{p}\rangle \end{cases}\tag{1.53}$$

A esses operadores chamaremos de *operadores de campo*. O operador de criação  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f)$  (aniquilação  $\hat{\mathbf{a}}(f)$ ) pode ser obtido a partir desses operadores de campo. Para a sua obtenção vamos fazer o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{x}_1 | \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{x}) | 0 \rangle &= \langle \mathbf{x}_1 | \mathbf{x} \rangle \\
 &= \sum_j \langle \mathbf{x}_1 | q_j \rangle \langle q_j | \mathbf{x} \rangle \\
 &= \sum_j \langle \mathbf{x}_1 | \hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_j) | 0 \rangle \langle q_j | \mathbf{x} \rangle \\
 &= \sum_j \langle q_j | \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}_1 | \hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_j) | 0 \rangle \\
 &= \langle \mathbf{x}_1 | \left( \sum_j \langle q_j | \mathbf{x} \rangle \hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_j) \right) | 0 \rangle,
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

segue-se

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_j \langle q_j | \mathbf{x} \rangle \hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_j) \\ \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{p}) = \sum_j \langle q_j | \mathbf{p} \rangle \hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_j) \end{cases} \tag{1.55}$$

As expressões (1.55) são as expansões dos operadores  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{x})$  e  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{p})$  sobre a base de funções  $q_j^*(\mathbf{x})$  e  $\hat{q}_j^*(\mathbf{p})$ , respectivamente. Portanto é correto:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_j) = \int d^3x q_j(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{x}) \\ \hat{\mathbf{a}}^\dagger(q_j) = \int d^3p q_j(\mathbf{p}) \hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{p}) \end{cases} \tag{1.56}$$

Fazendo a comparação entre o resultado (1.56) com (1.52), podemos notar que  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{p})$  e  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(\mathbf{x})$  podem ser interpretados como distribuições que fazem o mapeamento das funções de prova  $q_i \in \mathcal{H}$  para o conjunto de operadores que atuam nesse espaço de Hilbert. É por isso que são chamados *distribuições a valor de operadores*.



## Capítulo 2

# Quantização no espaço de Minkowski.

No ano de 1929 Paul A. M. Dirac publica *Quantum mechanics of many-electron system* [6]. Nesse artigo Dirac manifesta a importância de por em concordância a Mecânica Quântica, desenvolvida até então, com as ideias relativistas baseando-se no fato de que as partículas que a mecânica quântica trata de modelar, têm velocidades aproximadamente da ordem da velocidade da luz.

Esse processo levou-se a cabo, historicamente falando, construindo primeiro a teoria clássica de campos relativista. Essa teoria incorpora a invariância de Lorentz no formalismo da mecânica clássica. Em seguida, identifica as coordenadas clássicas  $\mathbf{x}(t)$  com os campos  $\phi(\mathbf{x}, t)$  para depois determinar os momentos conjugados e usar as relações de comutação quântica para obter-se uma teoria quântica de campos. A esse caminho para quantizar os campos denomina-se *método canônico*.

Neste trabalho não seguiremos o método canônico. No capítulo 1 construímos o espaço de Fock sem introduzir o parâmetro de tempo. Nele, introduziremos o parâmetro temporário  $t$  como outra coordenada do espaço  $\mathbb{R}^4$ , nesse espaço adicionaremos a medida invariante de Lorentz  $d\mu$  que introduz as condições necessárias para se construir o espaço de Fock em concordância com a teoria especial da relatividade. Depois, quantizaremos o campo eletromagnético e o campo escalar (real e complexo) livre de interações.

## 2.1 A medida invariante de Lorentz $d\mu$ .

Na teoria da relatividade especial, o espaço de configurações é de 4-dimensões. As coordenadas definem-se com os 4-vetores  $x^\nu$

$$x^\nu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

A métrica nesse espaço é definida assim:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Com essa métrica, o produto escalar  $a_\nu a^\nu = a^\nu a_\nu = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$  é invariante pelas transformações de Lorentz  $a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$  onde  $\Lambda^\mu{}_\nu$  é o tensor de transformação com a seguinte propriedade:

$$\Lambda^{\lambda\mu} \Lambda_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.3)$$

Assim como o espaço euclidiano tridimensional possui seu espaço recíproco de momentos, podemos construir o espaço recíproco para o espaço de configurações Minkowski. Para fazer tal construção vamos impor a condição de que esse espaço recíproco tenha a mesma métrica  $g^{\mu\nu}$  do espaço de configurações, garantindo que o produto escalar nesse espaço seja também invariante de Lorentz. Na literatura essa construção se dá de várias formas e neste trabalho usaremos as definições da referência [7]. Com essas definições o momento no espaço de Minkowski define-se

$$p^\nu = \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

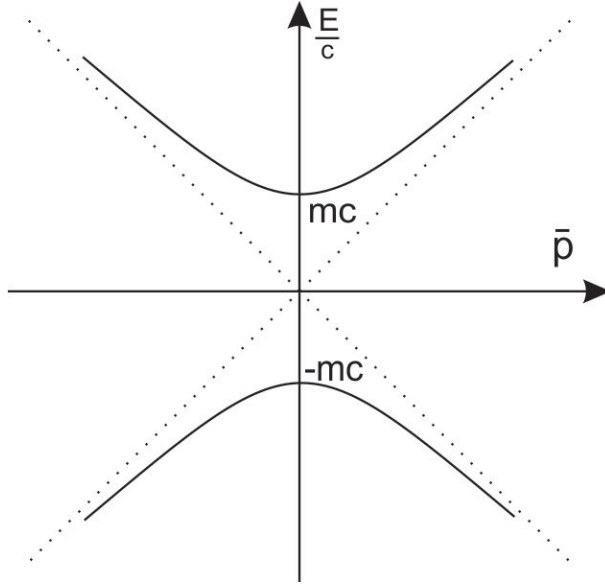


Figura 2.1: Parabolóides em que se distribuem as componentes dos 4-momentos

Nesse espaço recíproco, define-se a relação de dispersão de Einstein

$$p_\nu p^\nu \equiv m^2 c^2. \quad (2.5)$$

A definição (2.5) é uma condição forte para o espaço de momentos já que restringe as possíveis coordenadas de energia  $E$  e de tri-momento  $\mathbf{p}$  para uma partícula de massa  $m$ . Na figura (2.1) vê-se como as coordenadas do espaço de momentos estão distribuídas sobre os hiperbolóides de energia positiva e de energia negativa.

Do ponto de vista da matemática, essa distribuição implica que a medida de integração no espaço de momentos não pode ser  $d^4p$ ; já a integração deve ser distribuída sobre os dois hiperbolóides. Do ponto de vista da física, podemos escolher trabalhar com o caso de energia positiva, e portanto, a distribuição deve ser feita sobre o hiperbolóide superior indicado como  $\mathcal{M}^+$ . Isso leva a definir a medida de integração no espaço de momentos de Minkowski do seguinte modo:

$$d\mu(p^\nu) \equiv d^4p \delta(p_\nu p^\nu - m^2 c^2) \Theta(p^0). \quad (2.6)$$

onde a distribuição delta de Dirac anula a integração naquelas coordenadas de momentos  $p_\nu p^\nu \neq m^2 c^2$ , e a distribuição de Heaviside  $\Theta(x)$  proíbe as energias negativas  $E < 0$ . Para mais detalhes sobre a medida invariante de Lorentz, recomenda-se a referência [9].

## 2.2 Espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}^+, d\mu(p))$ .

O espaço de Fock que construímos no Capítulo 1, foi baseado num espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)^*$ . Então, como vimos na seção anterior, a medida de integração no espaço de momentos de Minkowski não é mais  $d^3p$ . Por essa razão introduziremos o espaço  $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}^+, d\mu(p))$  para a construção de um espaço de Fock de acordo com a teoria da relatividade especial. Com a finalidade de facilitar a notação, redefiniremos o seguinte:

$$p \equiv p^\nu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (p^0, \mathbf{p}),$$

$$x \equiv x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}).$$

Agora, o espaço  $L^2(\mathcal{M}^+, d\mu(p))$  define-se como o conjunto

$$L^2(\mathcal{M}^+, d\mu(p)) = \left\{ \hat{f}(p) / \left( \int_{\mathcal{M}^+} d\mu(p) \hat{f}(p)^* \hat{f}(p) \right)^{1/2} < \infty \right\}, \quad (2.7)$$

onde  $\hat{f}(p)$  é a transformada de Fourier em  $\mathbb{R}^4$  da função  $f(x)$

$$\hat{f}(p) = (2\pi\hbar)^{-2} \int d^4x f(x) e^{-ipx/\hbar}. \quad (2.8)$$

---

\*O espaço  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)$  é

$$L^2(\mathbb{R}^3, d^3p) = \left\{ \tilde{f}(p) / \left( \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \tilde{f}(p)^* \tilde{f}(p) \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

Usando a notação de Dirac, essa transformada de Fourier pode ser escrita do seguinte modo

$$\hat{f}(p) = \langle p|f\rangle, \quad (2.9)$$

onde  $|p\rangle$  é a base de momentos no espaço de Minkowski.

### 2.2.1 Propriedades da base $|p\rangle$ .

Usando a medida invariante de Lorentz (2.6), podemos determinar as propriedades da base  $|p\rangle$ . Como tal base é contínua, a relação de completeza exige o seguinte

$$\mathbb{1} = \int d\mu(p) |p\rangle\langle p|. \quad (2.10)$$

Desenvolvendo a relação (2.10), conseguimos o resultado

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \int d\mu(p) |p\rangle\langle p| \\ &= \int d^4p \delta(p^2 - m^2c^2) \Theta(p^0) |p\rangle\langle p| \\ &= \int d^4p \delta(p^{02} - (E/c)^2) \Theta(p^0) |p\rangle\langle p| \\ &= \int \frac{d^4p}{2(E/c)} [\delta(p^0 - (E/c)) + \delta(p^0 + (E/c))] \Theta(p^0) |p\rangle\langle p| \\ &= \int \frac{d^3p}{2(E/c)} |p\rangle\langle p|. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Com a última igualdade no cálculo (2.11), podemos determinar a relação que existe entre os elementos de base  $|\mathbf{p}\rangle$  e  $|p\rangle$

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \int \frac{d^3p}{2(E/c)} |p\rangle\langle p| \\ \int d^3p |\mathbf{p}\rangle\langle \mathbf{p}| &= \int \frac{d^3p}{2(E/c)} |p\rangle\langle p| \\ \Rightarrow \sqrt{2(E/c)} |\mathbf{p}\rangle &= |p\rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Por outro lado, definimos a representação da base  $|p\rangle$  no espaço de configurações do seguinte modo:

$$\langle x|p\rangle = (2\pi\hbar)^{-2} e^{\frac{i}{\hbar}px}. \quad (2.13)$$

Pode-se comprovar que a definição (2.13) é compatível com a que se usa para a mecânica quântica não relativista e que para o caso do espaço de configurações e de momentos de Minkowski aparece de forma natural o termo que relaciona a energia e o tempo. Agora, vamos comprovar a ortonormalidade da base

$$\begin{aligned} \langle p|p'\rangle &= \int d^4x \langle p|x\rangle \langle x|p'\rangle \\ &= \int \frac{d^4x}{(\sqrt{2\pi\hbar})^4} e^{\frac{-i}{\hbar}(p-p')x} \\ &= \delta(p-p'). \end{aligned} \quad (2.14)$$

## 2.3 Operadores de campo $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(p)$ y $\hat{\mathbf{a}}(p)$ .

O mais importante sobre os operadores de criação e aniquilação são suas relações de comutação (ou anti-comutação). Para estados de bósons, no espaço de momentos  $\hat{f}(\mathbf{p}) \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3p)$ , a relação de comutação corresponde ao produto escalar nesse espaço (1.49). Essa relação é estendida para o espaço  $\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}^+, d\mu(p))$ . Sendo assim, exigimos que a relação seguinte seja correta

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{a}}(f), \hat{\mathbf{a}}^\dagger(g)] &= \langle f|g\rangle \mathbf{1} \\ &= \int_{\mathcal{M}^+} d\mu(p) \hat{f}^*(p) \hat{g}(p), \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde a segunda linha resulta ser o produto escalar no espaço de momentos  $L^2(\mathcal{M}^+, d\mu(p))$ .

Da relação de comutação (2.15) podemos obter os operadores de criação e aniquilação da seguinte forma

$$\hat{\mathbf{a}}^\dagger(f) = \int d\mu(p) \langle p|f\rangle \hat{\mathbf{a}}^\dagger(p), \quad (2.16)$$

$$\hat{\mathbf{a}}(f) = \int d\mu(p) \langle f|p \rangle \hat{\mathbf{a}}(p), \quad (2.17)$$

onde as distribuições a valor de operadores  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(p)$  e  $\hat{\mathbf{a}}(p)$  cumprem a seguinte relação de comutação

$$[\hat{\mathbf{a}}(p), \hat{\mathbf{a}}^\dagger(p')] = (2E/c) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (2.18)$$

## 2.4 Quantização do campo escalar real.

O campo escalar real clássico define-se como a solução  $\phi(x) = \phi^*(x)$  da equação de Klein-Gordon-Fock (KGF).

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0, \quad (2.19)$$

onde  $\square \equiv \partial_\nu \partial^\nu$  e  $\hbar = 1 = c$ . A solução geral para essa equação é da forma

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p) [a(p)e^{ipx} + a^*(p)e^{-ipx}]. \quad (2.20)$$

Em teoria quântica de campos  $a^*(p)$  e  $a(p)$  mudam a distribuições a valor de operadores  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger(p)$  e  $\hat{\mathbf{a}}(p)$ . O campo escalar quantizado resulta uma distribuição a valor de operadores.

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathcal{M}^+} d\mu(p) (\hat{\mathbf{a}}(p)e^{-ipx} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger(p)e^{ipx}), \quad (2.21)$$

onde a integral pode ser separada em duas partes, uma contendo o operador de criação e a outra contendo o operador de aniquilação

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x), \quad (2.22)$$

donde

$$\phi^{(+)}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathcal{M}^+} d\mu(p) \hat{\mathbf{a}}^\dagger(p) e^{ipx}, \quad (2.23)$$

$$\phi^{(-)}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathcal{M}^+} d\mu(p) \hat{\mathbf{a}}(p) e^{-ipx}. \quad (2.24)$$

O operador  $\phi^{(+)}(x)$  é chamado de criação e  $\phi^{(-)}(x)$  de aniquilação. Essa separação é útil no cálculo das relações de comutação para o campo  $\phi(x)$ .

### 2.4.1 Relações de comutação.

Sejam dois operadores de campo em diferentes pontos do espaço de Minkowski  $\phi(x)$  e  $\phi(y)$ , sua comutação é

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= [\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)] \\ &= [\phi^{(+)}(x), \phi^{(+)}(y)] + [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] + \\ &\quad + [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] + [\phi^{(-)}(x), \phi^{(-)}(y)] \\ &= [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] + [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)], \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde é preciso obter as comutações  $[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)]$  e  $[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)]$ . Em seguida calcularemos  $[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)]$ :

$$\begin{aligned} [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) \int d\mu(p') [\hat{\mathbf{a}}(p) e^{-ipx}, \hat{\mathbf{a}}^\dagger(p') e^{ip'y}] \\ &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ipx} \int d\mu(p') [\hat{\mathbf{a}}(p), \hat{\mathbf{a}}^\dagger(p')] e^{ip'y} \\ &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ipx} \int d\mu(p') \delta^4(p - p') e^{ip'y} \\ &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip(x-y)} \\ &\equiv -iD_m^{(+)}(x - y), \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde definimos  $D_m^{(+)}(x)$ , assim

$$D_m^{(+)}(x) \equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\mu(p) e^{-ipx}. \quad (2.27)$$

Também definimos  $D_m^{(-)}(x)$

$$D_m^{(-)}(x) \equiv -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d\mu(p) e^{ipx}. \quad (2.28)$$

Calculemos agora o comutador  $[\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)]$ :

$$\begin{aligned} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] &= -[\phi^{(-)}(y), \phi^{(+)}(x)] \\ &= -(2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-ip(y-x)} \\ &= iD_m^{(+)}(y-x) = -iD_m^{(-)}(x-y). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Substituindo (2.29) e (2.26) no resultado (2.25).

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= -i[D_m^{(+)}(x-y) + D_m^{(-)}(x-y)] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - \mu^2) (\Theta(p^0) - \Theta(-p^0)) e^{-ip(x-y)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - \mu^2) \text{sgn}(p^0) e^{-ip(x-y)} \\ &\equiv -iD_m(x-y), \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde  $D_m(x)$  é conhecida como a distribuição de Jordan-Pauli definida do seguinte modo:

$$D_m(x) \equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - \mu^2) \text{sgn}(p^0) e^{-ipx}. \quad (2.31)$$

## 2.5 Quantização do campo escalar complexo.

O campo escalar complexo  $\phi(x) \neq \phi(x)^\dagger$  é usado para modelar partículas com carga elétrica. A partir de (2.21), o campo escalar complexo é definido como

$$\phi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathcal{M}^+} d\mu(p) \left( \hat{\mathbf{a}}(p) e^{-ipx} + \hat{\mathbf{b}}^\dagger(p) e^{ipx} \right), \quad (2.32)$$

onde o operador  $\hat{\mathbf{b}}^\dagger$  faz a criação da anti-partícula da partícula criada por  $\hat{\mathbf{a}}^\dagger$ . Tais operadores cumprem as seguintes regras de comutação.

$$[\hat{\mathbf{a}}(p), \hat{\mathbf{a}}^\dagger(p')] = (2E)\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = [\hat{\mathbf{b}}(p), \hat{\mathbf{b}}^\dagger(p')], \quad (2.33)$$

onde todas as demais comutações são nulas. Dessas relações de comutação podemos obter o seguinte resultado para o campo escalar complexo

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0. \quad (2.34)$$

Mas o comutador  $[\phi(x), \phi^\dagger(y)]$  não é nulo

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)^\dagger] &= [\phi_{\mathbf{b}}^{(+)}(x) + \phi_{\mathbf{a}}^{(-)}(x), \phi_{\mathbf{a}}^{\dagger(+)}(y) + \phi_{\mathbf{b}}^{\dagger(-)}(y)] \\ &= [\phi_{\mathbf{b}}^{(+)}(x), \phi_{\mathbf{b}}^{\dagger(-)}(y)] + [\phi_{\mathbf{a}}^{(-)}(x), \phi_{\mathbf{a}}^{\dagger(+)}(y)] \\ &= -iD_m^{(-)}(x - y) + -iD_m^{(+)}(x - y) \\ &\equiv -iD_m(x - y). \end{aligned} \quad (2.35)$$

## 2.6 Quantização do campo eletromagnético.

A teoria covariante clássica do campo eletromagnético é construída sobre o quadri-vetor  $A^\nu(x) = (\phi(x), \mathbf{A}(x))$  como campo fundamental. Tal campo obedece a equação

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \square A^\mu = 0, \quad (2.36)$$

sobre a condição de Lorenz  $\partial_\nu A^\nu = 0$ .

Comparando (2.36) com a equação de Klein-Gordon-Fock (2.19), podemos observar a razão para chamar aos fótons de campos vetoriais de massa nula  $m = 0$ .

Tendo isso como ponto de partida, podemos começar o processo de quantização de cada campo  $A^\nu$  como o de um campo escalar real, mas com a seguinte variação na componente  $A^0$

$$A^0(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(k) (\hat{\mathbf{a}}^0(k)e^{-ikx} - \hat{\mathbf{a}}^0(k)^\dagger e^{ikx}), \quad (2.37)$$

$$A^i(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(k) (\hat{\mathbf{a}}^i(k)e^{-ikx} + \hat{\mathbf{a}}^i(k)^\dagger e^{ikx}), \quad (2.38)$$

onde as distribuições a valor de operadores  $\hat{\mathbf{a}}^\mu(k)$  e  $\hat{\mathbf{a}}^\mu(k)^\dagger$  cumprem a seguinte relação de comutação

$$[\hat{\mathbf{a}}^\mu(k), \hat{\mathbf{a}}^\beta(k)^\dagger] = (2\omega)\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_\beta^\mu. \quad (2.39)$$

A definição (2.37) concorda com a topologia de Krein para espaços de Hilbert (também conhecida como espaço com métrica indefinida) [8]. Determinemos a comutação dos campos eletromagnéticos. Calculando primeiro  $[A^0(x), A^0(y)]$

$$\begin{aligned} [A^0(x), A^0(y)] &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(k) \int d\mu(k') \times \\ &\quad \times [a^0(k)e^{-ikx} - a^0(k)^\dagger e^{ikx}, a^0(k')e^{-ik'y} - a^0(k')^\dagger e^{ik'y}] \\ &= (2\pi)^{-3} \int d\mu(k) \int d\mu(k') ([a^0(k)e^{-ikx}, a^0(k')e^{-ik'y}] - \\ &\quad - [a^0(k)e^{-ikx}, a^0(k')^\dagger e^{ik'y}] - [a^0(k)^\dagger e^{ikx}, a^0(k')e^{-ik'y}] + \\ &\quad + [a^0(k)^\dagger e^{ikx}, a^0(k')^\dagger e^{ik'y}]) \\ &= -(2\pi)^{-3} \int d\mu(k) e^{-ik(x-y)} + (2\pi)^{-3} \int d\mu(k) e^{ik(x+y)} \\ &= iD_0^{(+)}(x-y) + iD_0^{(-)}(x-y) \\ &= g^{00}iD_0(x-y). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dos resultados (2.40) e (2.35), obtemos:

$$[A^\alpha(x), A^\beta(y)] = g^{\alpha\beta}iD_0(x-y). \quad (2.41)$$

Se tivéssemos usado a forma clássica para a componente escalar  $A^0$  em (2.37), teríamos obtido  $[A^\alpha(x), A^\beta(y)] = \delta_\beta^\alpha iD_0(x-y)$ , onde claramente se observaria o problema de igualdade entre um tensor de Lorentz de segunda ordem e a função de distribuição de Jordan-Pauli que seria uma distribuição numérica.

Um termo importante para calcular é a comutação das soluções de frequência positiva  $A_{(+)}^\alpha$  e negativa  $A_{(-)}^\alpha$

$$A_{(-)}^{\alpha}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(k) \hat{\mathbf{a}}^{\alpha}(k) e^{-ikx}, \quad (2.42)$$

$$A_{(+)}^0(x) = -(2\pi)^{-3/2} \int d\mu(k) \hat{\mathbf{a}}^0(k)^{\dagger} e^{ikx}, \quad (2.43)$$

$$A_{(+)}^j(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(k) \hat{\mathbf{a}}^j(k)^{\dagger} e^{ikx}. \quad (2.44)$$

Suas comutações são

$$\left[ A_{(-)}^{\alpha}(x), A_{(+)}^{\beta}(y) \right] = g^{\alpha\beta} i D_0^{(+)}(x - y), \quad (2.45)$$

$$\left[ A_{(+)}^{\alpha}(x), A_{(-)}^{\beta}(y) \right] = g^{\alpha\beta} i D_0^{(-)}(x - y). \quad (2.46)$$

### 2.6.1 Condição de Lorenz.

É conhecido que os fótons só têm dois graus de liberdade, é por isso que só duas das quatro componentes de  $A^{\nu}$  podem ser linearmente independentes. Portanto, é necessário agregar alguma relação adicional na equação de onda (2.36). Vamos pesquisar, por esse motivo, a condição de Lorenz que na forma clássica é escrita assim:

$$\partial_{\nu} A^{\nu} = 0. \quad (2.47)$$

Em teoria quântica de campos, a operação  $\partial_{\nu} A^{\nu}$  resulta ser uma distribuição a valor de operadores e, portanto, o mais importante resulta ser o valor médio de tal operador. Então, se a condição de Lorenz é estendida à teoria quântica de campos, esta nos serve para selecionar aqueles estados  $|\Phi\rangle \in \mathcal{F}$  que cumprem

$$\langle \Phi | \partial_{\nu} A^{\nu} | \Phi \rangle = 0. \quad (2.48)$$

Comprovemos que da condição (2.48), podemos chegar a condição física da não existência de fótons escalares nem longitudinais. Desenvolvendo  $\partial_{\nu} A^{\nu}$  obtemos

$$\begin{aligned}
\partial_\nu A^\nu &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} [-i (\omega \hat{\mathbf{a}}^0(\mathbf{k}) + k_j \hat{\mathbf{a}}^j(\mathbf{k})) e^{-ikx} + \\
&\quad + i (-\omega \hat{\mathbf{a}}^0(\mathbf{k})^\dagger + k_j \hat{\mathbf{a}}^j(\mathbf{k})^\dagger) e^{ikx}] \\
&= (2\pi)^{-3} \int d^3k \sqrt{\frac{\omega}{2}} [-i \left( \hat{\mathbf{a}}^0(\mathbf{k}) + \frac{k_j}{\omega} \hat{\mathbf{a}}^j(\mathbf{k}) \right) e^{-ikx} + \\
&\quad + i \left( -\hat{\mathbf{a}}^0(\mathbf{k})^\dagger + \frac{k_j}{\omega} \hat{\mathbf{a}}^j(\mathbf{k})^\dagger \right) e^{ikx}] \\
&= (2\pi)^{-3} \int d^3k \sqrt{\frac{\omega}{2}} [-i \left( \hat{\mathbf{a}}^0(\mathbf{k}) + \hat{\mathbf{a}}_{||}^j(\mathbf{k}) \right) e^{-ikx} + \\
&\quad + i \left( -\hat{\mathbf{a}}^0(\mathbf{k})^\dagger + \hat{\mathbf{a}}_{||}^j(\mathbf{k})^\dagger \right) e^{ikx}],
\end{aligned} \tag{2.49}$$

onde  $\hat{\mathbf{a}}_{||}^j = \frac{k_j}{\omega} \hat{\mathbf{a}}^j$  representa a criação de fótons longitudinalmente polarizados. Então, a condição de Lorenz é interpretada como um projetor dos estados gerais  $|\Phi\rangle$  nos estados que não levam em conta fótons escalares nem longitudinais.

$$\hat{\mathbf{a}}^0|\Phi\rangle = 0 \quad , \quad \hat{\mathbf{a}}_{||}|\Phi\rangle = 0. \tag{2.50}$$



## Capítulo 3

# Método de Epstein e Glaser.

A teoria quântica de campos (QFT) é posta à prova nos experimentos sobre colisões de partículas. Em tais experimentos, as partículas em colisão são modeladas como pacotes de ondas distribuídos em campos assintoticamente livres com relação à coordenada do espaço-tempo em que se produz a colisão. As partículas detectadas são modeladas de igual forma. No sentido abstrato do modelo, o processo de dispersão consiste na transformação de um espaço de Fock  $\mathcal{F}_{in}$  em outro  $\mathcal{F}_{out}$  com a matriz de transformação  $S$ .

Existem dois formalismos para a obtenção da matriz  $S$ . O formalismo mais aceito é aquele em que a matriz  $S$  é obtida a partir das equações de movimento, não sendo a causalidade o ponto principal em sua construção. Nessa linha de trabalho temos os trabalhos de S. Tomonaga\*, J. Schwinger† e R. P. Feynman‡.

No segundo formalismo, a matriz  $S$  converte-se no objeto principal de estudo. Nessa linha de trabalho temos primeiro o desenvolvimento de Stückelberg em 1934 [11]. Stückelberg impôs a condição de causalidade global e unitariedade para  $S$ . Em 1959 N. N. Bogoliubov e D. V. Shirkov [12] simplificaram a construção usando funções de prova  $g$  com um comportamento assintótico adequado e que atuam como interruptores da interação.

---

\* (Progr. Theoret. Phys. Kyoto 2, 101 (1947))

† (Phys. Rev. 74, 1493 (1948), 75, 651 (1949))

‡ (Phys. Rev. 76, 769 (1949))

Ambos os formalismos coincidiram nos resultados e no problema das divergências ultravioleta e infravermelha. A única forma de tratar tais divergências foi o método ad-hoc de regularização/renormalização introduzido por F. J. Dyson (Phys. Rev. 75, 1736 (1949)). Até a data, pode-se notar na literatura a preferência da comunidade de física pela primeira linha de pesquisa.

Em 1973 H. Epstein e V. Glaser [13] definiram  $S$  excluindo a condição de unitariedade e adicionando a invariância por translação. Construíram a matriz  $S$  dando um passo adiante ao definí-la como um produto ordenado temporalmente de *distribuições a valor de operadores* (OPVD) e não como uma função de operadores. A proposta consiste em ir construindo a matriz  $S$  ordem por ordem sem sair das definições da teoria de distribuições, evitando assim, desde o início, as divergências. Esta teoria é conhecida como *Teoria de Perturbação Causal* (TPC).

Nas primeiras seções deste capítulo, veremos a definição da matriz  $S$  como uma série de Dyson e os problemas de divergências a que somos levados. Depois, apresentaremos a definição da matriz  $S$  ao abordar a TPC e o seu método de construção.

### 3.1 Matriz $S$ como uma série de Dyson de uma partícula num campo externo.

Nesta seção, veremos o tratamento usual para a matriz  $S$  na teoria de dispersão de uma partícula com um hamiltoniano independente do tempo da forma

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (3.1)$$

onde duas condições são impostas. Primeiro, o hamiltoniano  $H_0$  é o hamiltoniano para a partícula livre, portanto é independente do tempo. Segundo, o potencial  $V$  é um potencial de curto alcance e independente do tempo, o que significa que bem longe da zona onde se concentra esse potencial, a partícula pode ser considerada *assintoticamente livre*.

Usando a descrição de Schrödinger, a dinâmica para o estado dessa partícula está governada mediante a equação

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi(t)\rangle, \quad (3.2)$$

onde  $H$  é independente do tempo.

A equação (3.2) tem como solução estados quânticos da forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\psi\rangle, \quad (3.3)$$

onde  $|\psi\rangle = |\psi(0)\rangle$  é o estado da partícula no instante  $t = 0$  e  $\hbar = 1$ . No caso livre, as soluções para a equação de Schrödinger serão indicadas como  $|\varphi_a(t)\rangle$ , onde o sub-índice  $a$  representa a distribuição inicial arbitrária do momento  $\mathbf{p}$  no pacote de onda.

Agora, trabalhando com a condição de curto alcance sobre o potencial  $V$ , podemos escrever tal condição como

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \| |\psi_a(t)\rangle - |\varphi_a(t)\rangle \| = \lim_{t \rightarrow -\infty} \| e^{-iHt}|\psi(0)\rangle - e^{-iH_0t}|\varphi_a(0)\rangle \| = 0. \quad (3.4)$$

Esse limite expressa que muito longe no passado do instante  $t = 0$ , no início do processo de dispersão, o estado  $|\psi(t)\rangle$  se comporta assintoticamente igual ao pacote de onda livre  $|\varphi_a(t)\rangle$ .

Já que a descrição de Heisenberg resulta mais natural para trabalhar o cálculo, vamos reescrever a condição (3.4) mediante às funções de estado independentes do tempo  $|\psi_a(0)\rangle = |\psi_a\rangle$  e  $|\varphi_a(0)\rangle = |\varphi_a\rangle$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \| |\psi_a\rangle - e^{iHt}e^{-iH_0t}|\varphi_a\rangle \| = 0. \quad (3.5)$$

Mostrando a existência do limite (3.5), mostra-se a existência dos operadores

$$\begin{cases} W_{in} \equiv s - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t} \\ W_{out} \equiv s - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t} \end{cases} \quad (3.6)$$

onde a notação  $s - \lim$  representa o *limite forte*. O sub-índice *in* remete ao comportamento assintótico muito no passado, e o sub-índice *out* remete no futuro com

respeito ao instante em que se dá a interação. Os operadores  $W$  atuam sobre o pacote de onda livre e o transformam em pacote de onda real

$$\begin{cases} |\psi_{in}\rangle = W_{in}|\varphi_{in}\rangle \\ |\psi_{out}\rangle = W_{out}|\varphi_{out}\rangle \end{cases} \quad (3.7)$$

O que nos interessa calcular no fenômeno de dispersão é a probabilidade de transição de um estado *in* a outro *out*. A probabilidade de transição resulta proporcional ao quadrado da amplitude de transição  $\langle\psi_{out}|\psi_{in}\rangle$ . Usando (3.7), podemos obter uma forma de escrever a amplitude de transição como função dos pacotes de onda livre

$$\langle\psi_{out}|\psi_{out}\rangle = \langle\varphi_{out}|W_{out}^\dagger W_{in}|\varphi_{in}\rangle. \quad (3.8)$$

No lado direito da equação (3.8) podemos observar que o processo de dispersão pode ser interpretado e calculado a partir dos estados livres já que todo o processo de dispersão encontra-se definido pelo operador  $S \equiv W_{out}^\dagger W_{in}$  chamado de Matriz- $S$ .

A partir das definições (3.6), podemos reescrever a matriz  $S$  da seguinte forma

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ s \rightarrow +\infty}} e^{iH_0 s} e^{-iH s} e^{iH t} e^{-iH_0 t} \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ s \rightarrow +\infty}} e^{iH_0 s} U(s, t) e^{-iH_0 t} \\ &\equiv U_0(0, +\infty) U(+\infty, -\infty) U_0(-\infty, 0), \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde podemos observar que a matriz  $S$  é o limite forte do operador evolução  $U(s, t)$  na descrição de interação. Para determinar uma equação que nos permita calcular os elementos da matriz  $S$ , podemos usar a equação de Schrödinger fazendo a substituição  $|\psi(t)\rangle = e^{-iH_0 t} |\xi(t)\rangle$

$$i \frac{d}{dt} (e^{-iH_0 t} |\xi(t)\rangle) = H e^{-iH_0 t} |\xi(t)\rangle$$

$$i \left[ -iH_0 e^{-iH_0 t} |\xi(t)\rangle + e^{-iH_0 t} \frac{d}{dt} |\xi(t)\rangle \right] = (H_0 + V) e^{-iH_0 t} |\xi(t)\rangle$$

$$ie^{-iH_0t} \frac{d}{dt} |\xi(t)\rangle = V e^{-iH_0t} |\xi(t)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} |\xi(t)\rangle = \tilde{V} |\xi(t)\rangle. \quad (3.10)$$

Para resolver a equação (3.10) é suficiente determinar a forma do operador evolução na representação de interação  $U_I(s, t)$  que cumpre por definição a relação

$$|\xi(\tau)\rangle = U_I(\tau, \tau_0) |\xi(\tau_0)\rangle. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.10)

$$i \frac{d}{dt} (U_I(\tau, \tau_0) |\xi(\tau_0)\rangle) = \tilde{V} U_I(\tau, \tau_0) |\xi(\tau_0)\rangle,$$

$$i \frac{d}{dt} U_I(\tau, \tau_0) = \tilde{V} U_I(\tau, \tau_0). \quad (3.12)$$

Usando a condição  $U_I(\tau_0, \tau_0) = \mathbb{1}$ , podemos reescrever a equação (3.12) numa forma integral

$$U_I(t, t_0) = \mathbb{1} + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 \tilde{V}(t_1) U_I(t_1, t_0). \quad (3.13)$$

Iterando a equação (3.13) obtemos a série de Dyson

$$U_I(t, t_0) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^{t_1} dt_1 \int_{t_0}^{t_2} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_n} dt_n T[\tilde{V}(t_1) \dots \tilde{V}(t_n)], \quad (3.14)$$

onde  $T$  é o operador de ordenamento temporal. Pelo mencionado nas linhas anteriores, é suficiente tomar o limite da equação (3.14) para obter uma expressão para a matriz  $S$ , tal expressão é

$$S = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n T[\tilde{V}(t_1) \dots \tilde{V}(t_n)]$$

$$\equiv T \exp \left[ i \int_{-\infty}^{+\infty} dt \tilde{V}(t) \right]. \quad (3.15)$$

É importante chamar a atenção para o tratamento feito para a matriz  $S$  que é não relativista. Em teoria quântica de campos, a extensão natural da equação (3.15) é

$$S \equiv T \exp \left[ i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x^\nu) \right], \quad (3.16)$$

se não temos acoplamento derivativo.

## 3.2 Origem das divergências ultravioletas.

A equação (3.16) é uma definição da matriz  $S$  a partir das equações de movimento. Mas essa definição apresenta o problema das divergências ultravioletas e infravermelhas. Do ponto de vista da matemática, esse problema arraiga-se no produto da distribuição de Heaviside  $\Theta(x)$  e nas distribuições singulares a valor de operadores  $\mathcal{L}_{\text{int}}(x^\nu)$ . Por exemplo

$$\begin{aligned} T [\mathcal{L}_{\text{int}}(x_1^\nu) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_2^\nu)] &= \Theta(x_1^0 - x_2^0) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_1^\nu) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_2^\nu) + \\ &+ \Theta(x_2^0 - x_1^0) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_2^\nu) \mathcal{L}_{\text{int}}(x_1^\nu). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para termos uma ideia simples deste cálculo, consideremos o produto num espaço de dimensão 1. Primeiro calculemos as transformadas de fourier de  $\Theta(x)$  e  $\delta(x)$  separadamente

$$\mathcal{F}\{\delta\}(k) = \hat{\delta}(k) = \int dx \delta(x) e^{-ikx} = 1, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}(k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx \Theta(x) e^{-ikx - \varepsilon x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{i e^{-ikx - \varepsilon x}}{k - i\varepsilon} \Big|_0^\infty \right] \\ &= -\frac{i}{k - i0}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Agora calculemos a transformada de fourier do produto  $\Theta(x)\delta(x)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\Theta\delta\} &= \int dx \Theta(x) \delta(x) e^{-ikx} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int dx e^{-ikx} \int dk' \hat{\Theta}(k') e^{ik'x} \int dk'' \hat{\delta}(k'') e^{ik''x} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int dk' \hat{\Theta}(k') \int dk'' \hat{\delta}(k'') \int dx e^{-i(k-k'-k'')x} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dk' \hat{\Theta}(k') \int dk'' \hat{\delta}(k'') \delta(k' + k'' - k) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dk' \hat{\Theta}(k') \hat{\delta}(k - k') \\
&= -\frac{i}{2\pi} \int \frac{dk'}{k' - i0}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde o cálculo pode ser feito diretamente com o teorema de convolução [9]. O resultado (3.20) é uma integral divergente no espaço de momentos devido ao produto  $\Theta(x)\delta(x)$  no espaço de configurações.

### 3.3 Matriz $S$ na Teoria de Perturbação Causal.

Em TPC, a matriz  $S$  é definida como a série perturbativa formal na forma forma:

$$\begin{aligned}
S(g) &\equiv \mathbf{1} + \int d^4x_1 T_1(x_1) g(x_1) + \frac{1}{2!} \int d^4x_2 d^4x_1 T_2(x_1, x_2) g(x_1) g(x_2) + \dots \\
&\equiv \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n) \\
&\equiv \mathbf{1} + T,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde para simplificar usaremos a anotação  $x_j = (x_j^0, x_j^1, x_j^2, x_j^3)$ . A função  $g(x)$ , que pertence ao espaço de Schwartz  $S(\mathbb{R}^4)$ <sup>§</sup>, é desenhada de tal forma que atua como um interruptor para ligar e desligar a interação que se encontra no termo  $T_n$ .

---

<sup>§</sup>O espaço de Schwartz  $S(\mathbb{R}^m)$ , é o espaço constituído pelas funções reais  $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  que decrescem no infinito, juntamente com todas as suas derivadas parciais, mais rapidamente do que qualquer potência de  $1/|x|$ .

Para obtê-lo,  $g(x)$  desaparece rapidamente quando a variável tempo  $t$  tende a  $\pm\infty$ , portanto, controla as interações de longo alcance, evitando assim as divergências infravermelhas. Como consequência da definição (3.21), as distribuições de  $n$  pontos  $T_n$  são simétricas com relação às permutações das coordenadas  $x_i$ .

### 3.3.1 Propriedades da matriz $S$ .

Na construção da matriz  $S$ , é necessário levar em conta as condições físicas para comprovar que estamos num bom caminho [15]. Tais condições são

#### Invariância de Poincaré.

Usando  $U(a, \Lambda)$  como a forma usual de representar o grupo de Poincaré  $P_+^\uparrow$ , a invariância de Poincaré da matriz  $S$  implica o seguinte:

$$U(a, 1)S(g)U(a, 1)^{-1} = S(g_a), \quad (3.22)$$

onde

$$g_a(x) = g(x - a) \quad (\text{Invariância de translação}), \quad (3.23)$$

además

$$U(0, \Lambda)S(g)U(0, \Lambda)^{-1} = S(g_\Lambda) \quad \forall \Lambda \in L_+^\uparrow \cong SO^+(1, 3), \quad (3.24)$$

em que

$$S(g_\Lambda)(x) = g(\Lambda^{-1}x) \quad (\text{Invariância de Lorentz}). \quad (3.25)$$

#### Causalidade.

Para introduzir a condição de causalidade, usaremos duas funções interruptoras  $g_1$  e  $g_2$  com suportes disjuntos na linha de tempo da forma

$$\begin{cases} \text{supp}[g_1] = (-\infty, s) \\ \text{supp}[g_2] = (s, +\infty) \\ \text{supp}[g = g_1 + g_2] = (-\infty, +\infty) \end{cases} \quad (3.26)$$

onde  $g$  representa a união de  $g_1$  y  $g_2$  que tem suporte em toda a linha de tempo, e que além disso, tem a propriedade de ser uma função interruptora por construção. Usando também o fato de que a matriz  $S$  é o limite forte da representação do operador de evolução na descrição de interação, temos

$$S(g_1 + g_2) = S(g) = U_0(0, +\infty)U(+\infty, -\infty)U_0(-\infty, 0),$$

$$S(g_1 + g_2) = U_0(0, +\infty)U(+\infty, s)U_0(s, 0)U_0(0, s)U(s, -\infty)U_0(-\infty, 0),$$

$$S(g_1 + g_2) = S(g_2)S(g_1), \quad (3.27)$$

onde a causalidade expressa-se no fato de que  $S$  se aplica primeiro em  $t < s$  e logo  $t > s$ .

### Interação.

A matriz  $S$  fica completamente definida e determinada a partir da estrutura causal, uma vez definido o acoplamento mínimo  $T_1(x)$ . Por exemplo, para o caso da eletrodinâmica quântica escalar (sQED) temos

$$T_1(x) = eA^\nu(x) : \phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_\nu \phi(x) : . \quad (3.28)$$

### Inversa.

A inversa da matriz  $S$  é obtida mediante a inversão formal da definição (3.21)

$$S^{-1} = (\mathbb{1} + T)^{-1} = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} (-T)^r. \quad (3.29)$$

Podemos definir a inversa  $S^{-1}$  com a seguinte estrutura formal:

$$S^{-1} = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \tilde{T}_n(x_1, \dots, x_n) g(x_1) \dots g(x_n), \quad (3.30)$$

onde  $\tilde{T}_n(x_1, \dots, x_n)$  é uma distribuição de  $n$  pontos simétrica com relação às variáveis  $x_i$ ; desenvolvendo (3.29) para comparar com (3.30), podemos escrever  $\tilde{T}_n(x_1, \dots, x_n)$  em função de  $T_n(x_1, \dots, x_n)$

$$\tilde{T}_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \sum_{P_r} T_{n_1}(X_1) \dots T_{n_r}(X_r), \quad (3.31)$$

onde os subconjuntos  $X_i$  são disjuntos de  $X$  e a soma sobre  $P_r$  representa a soma sobre todas as partições possíveis em  $r$  subconjuntos disjuntos.

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_r \quad , \quad X_j \neq \emptyset \quad , \quad |X_j| = n_j. \quad (3.32)$$

Como exemplo, para os termos  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  teríamos:

$$\tilde{T}_1(x_1) = -T_1(x_1), \quad (3.33)$$

$$\tilde{T}_2(x_1, x_2) = T_2(x_1, x_2) - T_1(x_1)T_1(x_2) - T_1(x_2)T_1(x_1), \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_3(x_1, x_2, x_3) = & -T_3(x_1, x_2, x_3) + T_1(x_1)T_2(x_2, x_3) + T_1(x_2)T_2(x_1, x_3) \\ & + T_1(x_3)T_2(x_2, x_1) + T_2(x_2, x_3)T_1(x_1) + T_2(x_1, x_3)T_1(x_2) \\ & + T_2(x_2, x_1)T_1(x_3) - T_1(x_1)T_1(x_2)T_1(x_3) - T_1(x_2)T_1(x_1)T_1(x_3) \\ & - T_1(x_1)T_1(x_3)T_1(x_2) - T_1(x_3)T_1(x_1)T_1(x_2) - T_1(x_3)T_1(x_2)T_1(x_1) \\ & - T_1(x_2)T_1(x_3)T_1(x_1). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Outra relação importante, com relação às distribuições de  $n$  pontos  $T_n$  e  $\tilde{T}_n$ , pode ser obtida substituindo  $S$  e  $S^{-1}$  em

$$\mathbb{1} = SS^{-1};$$

o resultado é

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{1}{n_1!n_2!} \int T_{n_1}(x_1, \dots, x_{n_1}) \tilde{T}_{n_2}(y_1, \dots, y_{n_2}) \\ &\quad \times g(x_1) \dots g(x_{n_1}) g(y_1) \dots g(y_{n_2}), \end{aligned}$$

simetrizando a última igualdade com relação às variáveis  $x_i$  e  $y_j$ , obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p_2^0} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T_{n_1}(X) \tilde{T}_{n_2}(Y) g(x_1) \dots g(x_n), \\ 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p_2^0} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T_{n_1}(X) \tilde{T}_{n_2}(Y) g(x_1) \dots g(x_n), \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde  $P_2^0$  são as partições em dois subconjuntos disjuntos  $X$  e  $Y$  do seguinte modo

$$P_2^0 : \{x_1, \dots, x_n\} = X \cup Y, \quad |X| = n_1, \quad |Y| = n_2, \quad (3.37)$$

onde o super-índice 0 em  $P_2^0$  nos diz que nessa partição é permitido  $X, Y = \emptyset$  com a seguinte definição

$$T_0\{\emptyset\} \equiv 1, \quad \tilde{T}_0\{\emptyset\} \equiv 1. \quad (3.38)$$

Então, para que a somatória do lado direito de (3.36) seja nula, é necessário que cada somando por cada integral seja identicamente nula

$$\sum_{p_2^0} T_{n_1}(X) \tilde{T}_{n-n_1}(Z \setminus X) = 0, \quad (3.39)$$

para todos os conjuntos  $Z$  fixos com  $|Z| \geq 1$ .

Se em nosso cálculo permutamos de posição  $S$  e  $S^{-1}$ , conseguimos

$$\sum_{p_2^0} \tilde{T}_{n-n_1}(X) T_{n_1}(Z \setminus X) = 0. \quad (3.40)$$

### 3.4 Causalidade das distribuições $T_n$ .

A principal propriedade a ser estudada nas distribuições  $T_n$  é a extensão do princípio de causalidade da matriz  $S$ . Como neste trabalho estudaremos a obtenção do termo  $T_2$ , trabalharemos só com os três primeiros termos da expansão (3.21). Substituindo tal expansão na equação de causalidade para a matriz  $S$  (3.27), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
1 + \int d^4x_1 T_1(x_1)(g_1(x_1) + g_2(x_1)) + \\
+ \frac{1}{2!} \int d^4x_2 d^4x_1 T_2(x_1, x_2)(g_1(x_1) + g_2(x_1))(g_1(x_2) + g_2(x_2)) = \\
= \left[ 1 + \int d^4x_1 T_1(x_1)g_1(x_1) + \frac{1}{2!} \int d^4x_2 d^4x_1 T_2(x_1, x_2)g_1(x_1)g_1(x_2) \right] \times \\
\times \left[ 1 + \int d^4x_3 T_1(x_3)g_2(x_3) + \frac{1}{2!} \int d^4x_4 d^4x_3 T_2(x_3, x_4)g_2(x_3)g_2(x_4) \right].
\end{aligned}$$

Igualando os termos de primeira e segunda ordem, obtemos a equação

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T_2(x_1, x_2)g_1(x_1)g_2(x_2) + \\
+ \frac{1}{2!} \int d^4x_1 d^4x_2 T_2(x_1, x_2)g_1(x_2)g_2(x_1) = \int d^4x'_1 d^4x'_2 T_1(x'_1)T_1(x'_2)g_1(x'_1)g_2(x'_2),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

onde na última igualdade (3.41) vamos simetrizar o lado direito relativo às variáveis  $x'_1$  e  $x'_2$  obtendo

$$T_2(x_1, x_2) = T_1(x_1)T_1(x_2) \quad , \quad \text{se } x_1^0 > x_2^0. \tag{3.42}$$

Se agora trabalhamos com  $S^{-1}$  e  $\tilde{T}$ , obtemos a seguinte igualdade

$$\tilde{T}_2(x_1, x_2) = \tilde{T}_1(x_1)\tilde{T}_1(x_2) \quad , \quad \text{se } x_1^0 < x_2^0. \tag{3.43}$$

As duas igualdades (3.42) e (3.43) refletem que o princípio de causalidade para as distribuições  $T_n$  implica produtos ordenados temporalmente. Pode ser também comprovado em ordens  $n > 2$ .

No formalismo usual, a causalidade das distribuições de  $n$  pontos é modelada mediante distribuições de Heaviside. Por exemplo,  $T_2$  é escrito da seguinte forma

$$T_2(x_1, x_2) = \Theta(x_1^0 - x_2^0)T_1(x_1)T_1(x_2) - \Theta(x_2^0 - x_1^0)T_1(x_2)T_1(x_1). \quad (3.44)$$

Mas o problema de fazê-lo assim é que em muitas situações aparecem as divergências UV e IR.

### 3.5 Construção de $T_2$

Primeiro construímos as distribuições  $A'_2(x_1, x_2)$  e  $R'_2(x_1, x_2)$  do seguinte modo

$$R'_2(x_1, x_2) \equiv T_1(x_2)\tilde{T}_1(x_1), \quad (3.45)$$

$$A'_2(x_1, x_2) \equiv \tilde{T}_1(x_1)T_1(x_2). \quad (3.46)$$

Agora, definimos a distribuição diferença  $D_2(x_1, x_2)$ .

$$D_2(x_1, x_2) \equiv R'_2(x_1, x_2) - A'_2(x_1, x_2). \quad (3.47)$$

Também definimos as distribuições avançada  $A_2(x_1, x_2)$  e retardada  $R_2(x_1, x_2)$ .

$$R_2(x_1, x_2) \equiv T_1(x_2)\tilde{T}_1(x_1) + T_2(x_1, x_2) = R'_2(x_1, x_2) + T_2(x_1, x_2), \quad (3.48)$$

$$A_2(x_1, x_2) \equiv \tilde{T}_1(x_1)T_1(x_2) + T_2(x_1, x_2) = A'_2(x_1, x_2) + T_2(x_1, x_2). \quad (3.49)$$

A partir das definições (3.45-3.49) pode ser observado que a distribuição  $D_2$  é a diferença de  $R_2$  e  $A_2$ . Analisando os suportes dessas três distribuições, é possível demonstrar que  $A_2$  e  $R_2$  são distribuições com suportes bem definidos e, portanto, seu cálculo é possível a partir do conhecimento de  $D_2$ .

Com o cálculo de  $R_2$  ou  $A_2$ , pode ser realizado o cálculo de  $T_2$  mediante as seguintes igualdades

$$T_2 = R_2 - R'_2 = A_2 - A'_2. \quad (3.50)$$

### 3.6 Suportes de $R_2$ e $A_2$ .

A obtenção das distribuições  $A_2$  e  $R_2$  é o passo crucial em TPC. É o que o faz diferente do formalismo usual pois seu cálculo baseia-se nas propriedades de seus suportes que passaremos a estudar.

Definamos o *cone fechado de luz futuro* com vértice em  $x$  da forma:

$$\overline{V}^+(x) \equiv \{y/(y-x)^2 \geq 0, \quad y^0 \geq x^0\}, \quad (3.51)$$

do mesmo modo, definamos o *cone fechado de luz passado*.

$$\overline{V}^-(x) \equiv \{y/(y-x)^2 \geq 0, \quad y^0 \leq x^0\}. \quad (3.52)$$

As definições (3.51) e (3.52) podem ser generalizadas para espaços de  $4n$  dimensões.

$$\Gamma_n^\pm(x) = \{(x_1, \dots, x_n)/x_j \in \overline{V}^\pm(x), \forall j = 1, \dots, n\}. \quad (3.53)$$

Analisemos agora o suporte da distribuição retardada  $R_2(x_1, x)$ . De (3.48) podemos escrever:

$$\begin{aligned} R_2(x_1, x) &= R'_2(x_1, x) + T_2(x_1, x) \\ &= -T_1(x)T_1(x_1) + T_2(x_1, x), \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde, se por acaso  $x^0 > x_1^0$ , em algum referencial de Lorentz, a igualdade (3.54) é nula pela decomposição causal de  $T_2(x_1, x)$

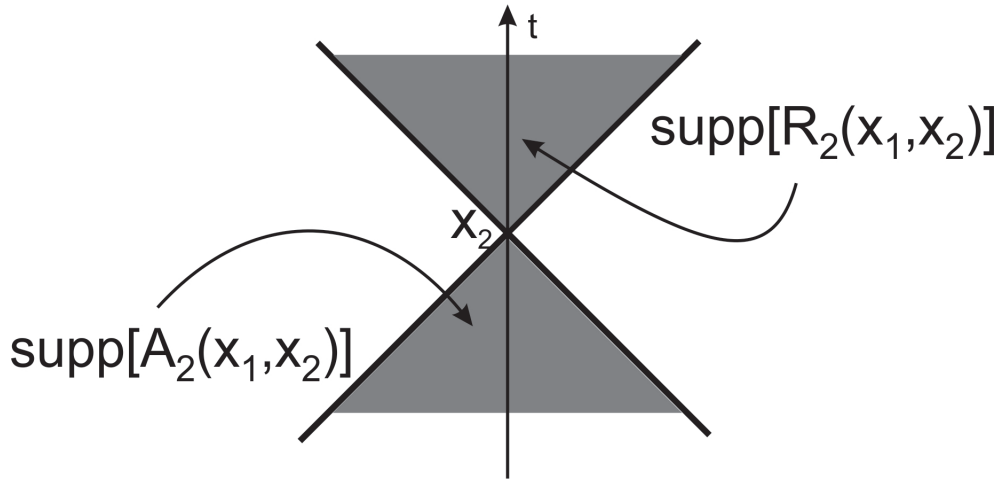


Figura 3.1: Suportes das distribuições avançada  $A_2(x_1, x_2)$  e retardada  $R_2(x_1, x_2)$ .

$$\begin{aligned}
 R_2(x_1, x) &= -T_1(x)T_1(x_1) + T_2(x_1, x) \\
 &= -T_1(x)T_1(x_1) + T_1(x)T_1(x_1) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Esse resultado mostra que com relação ao cone fechado com vértice no ponto  $x$ , a distribuição  $R_2(x_1, x)$  apresenta suporte no cone de luz futuro  $\Gamma_2^+(x)$  como se mostra na figura (3.1). Com a mesma técnica podemos provar que  $A_2(x_1, x)$  apresenta como suporte  $\Gamma_2^-(x)$ .

Portanto, para a distribuição  $D_2$ , temos o seguinte suporte causal:

$$supp D_2(x_1, x) \subseteq \Gamma_2^+(x) \cup \Gamma_2^-(x), \quad (3.55)$$

levando em conta esses resultados, podemos pensar em tomar o caminho oposto para obter  $T_2$  e  $R_2$  com o conhecimento de  $D_2$ .

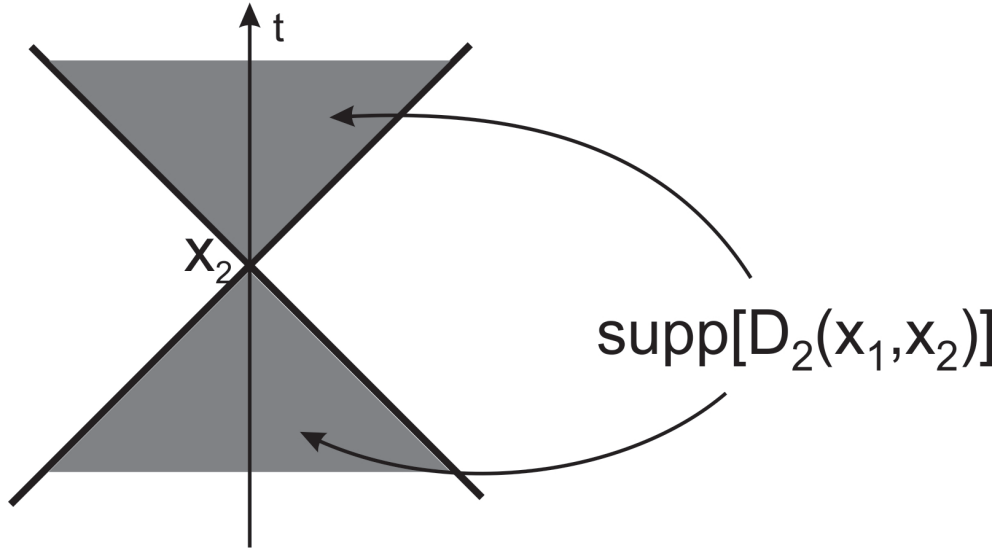


Figura 3.2: Suporte da distribuição causal  $D_2(x_1, x_2)$ .

Se conhecemos a distribuição  $D_2(x_1, x_2)$  com suporte causal

$$\text{supp} D_2(x_1, x_2) \subseteq \Gamma_2^+(x_2) \cup \Gamma_2^-(x_2), \quad (3.56)$$

é possível dividir o suporte de  $D_2$  em  $\Gamma_2^+(x_2)$  e  $\Gamma_2^-(x_2)$ , obtendo dessa divisão duas distribuições  $R_2(x_1, x_2)$  e  $A_2(x_1, x_2)$  com as seguintes características

$$\begin{cases} D_2(x_1, x_2) = R_2(x_1, x_2) - A_2(x_1, x_2) \\ \text{supp} R_2(x_1, x_2) \subseteq \Gamma_2^+(x_2) \\ \text{supp} A_2(x_1, x_2) \subseteq \Gamma_2^-(x_2) \end{cases} \quad (3.57)$$

A seguir, mostraremos como se faz a divisão de uma distribuição causal.

### 3.7 Divisão de distribuições com suporte causal.

A divisão de  $D_2$  em  $R_2$  e  $A_2$  não é trivial. Uma divisão incorreta leva-nos a divergências ultravioletas. Em TPC o processo de divisão substitui o produto usual

ordenado temporalmente com a subsequente renormalização, desde que aquela divisão esteja bem definida na teoria de distribuições.

Uma teoria sobre como dividir distribuições em outras distribuições com suportes prescritos existe e pode ser estudada na referência [19]. Nesta seção, estudaremos o caso particular da teoria quântica de campos.

### 3.7.1 Distribuições numéricas $d_2$ .

A distribuição a valor de operadores  $D_2(x_1, x_2)$  pode ser expressa em função de campos livres e contrações  $d_2^k(x_1, x_2)$  do seguinte modo

$$D_2(x_1, x_2) = \sum_k : \left[ \prod_j \phi^\dagger(x_j) \right] d_2^k(x_1, x_2) \left[ \prod_l \phi^\dagger(x_l) \right] :: \left[ \prod_m A(x_m) \right] :, \quad (3.58)$$

onde o índice  $k$  representa diferentes contribuições. As contrações  $d_2^k$  são distribuições numéricas que apresentam suporte causal (3.57) e, em sQED, são distribuições temperadas que pertencem ao espaço dual  $S'(\mathbb{R}^8)$  (em relação ao espaço de Schwartz  $S(\mathbb{R}^8)$ ). Então, a divisão de  $D_2$  é feita dividindo  $d_2^k$ .

Sejam  $r_2$  e  $a_2$  as distribuições que resultam em dividir  $d_2^k$  com as seguintes condições.

$$d_2^k(x) = r_2(x) - a_2(x), \quad \text{supp}[r_2] \subseteq \Gamma_1^+(x_2), \quad \text{supp}[a_2] \subseteq \Gamma_1^-(x_2), \quad (3.59)$$

onde  $x = (x_1, x_2)$ .

Usando a invariância de translação, vamos fixar  $x_2 = 0$ . Com essa condição, definimos

$$d(x_1) \equiv d_2^k(x_1, 0) \in S'(\mathbb{R}^4). \quad (3.60)$$

A forma usual de realizar a divisão de  $d(x_1)$  é mediante a multiplicação pela distribuição de Heaviside.

$$r(x_1) = \Theta(x_1^0) d(x_1). \quad (3.61)$$

Tal multiplicação não é sempre bem definida na teoria de distribuições por duas razões:

1.  $d(x_1)$  é singular em  $x_1 = 0$ ,
2.  $\Theta(x_1^0)$  é descontínua em  $x_1 = 0$ .

No caso de QED estas dificuldades não geram divergências UV em nível de árvore [14] coincidindo ademais com o fato que  $r(x_1)$  resulta ser uma distribuição temperada<sup>¶</sup> assim como  $d(x_1)$ . Mas em nível de loops  $r_2$  deixa de ser temperada e é onde os infinitos aparecem. Seguindo estes fatos, em nosso processo de divisão geral, tomaremos cuidado para que  $r_2(x_1)$  seja sempre uma distribuição temperada e que mantenha as propriedades de  $d(x_1)$  na vizinhança de  $x_1 = 0$ .

### 3.7.2 Grau de singularidade de uma distribuição.

Para estudar o comportamento das distribuições  $d(x_1)$  e  $r(x_1)$  na vizinhança do ponto singular  $x_1 = 0$ , vamos introduzir algumas definições.

*Definição 3.1* A distribuição  $d(x) \in S'(\mathbb{R}^4)$  possui a distribuição quasi-assintótica  $d_0(x)$  sobre  $x = 0$ , se para alguma função positiva continua  $\rho(\eta)$  ( $\eta > 0$ ) o limite

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(\eta) \eta^4 d(\eta x) = d_0(x) \neq 0 \quad (3.62)$$

existe em  $S'(\mathbb{R}^4)$

Como  $d(x)$  é uma distribuição temperada, podemos realizar sua transformada de Fourier<sup>||</sup> para obter o equivalente da definição (3.1) no espaço de momentos.

---

<sup>¶</sup>Chama-se de temperada as distribuições com funções de teste que pertencem ao espaço de Schwartz  $S$ .

<sup>||</sup>Define-se a transformada de Fourier de uma distribuição  $T$  assim

$$\langle \hat{T}, f \rangle \equiv \langle T, \hat{f} \rangle$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(\eta) \eta^4 \langle d(\eta x), f(x) \rangle &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(\eta) \left\langle d(x), f\left(\frac{x}{\eta}\right) \right\rangle \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(\eta) \left\langle \hat{d}(p), \left[ \widehat{f\left(\frac{x}{\eta}\right)} \right](p) \right\rangle \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(\eta) \left\langle \hat{d}(p), \eta^4 \check{f}(\eta p) \right\rangle \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(\eta) \eta^4 \left\langle \hat{d}(p), \check{f}(\eta p) \right\rangle \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(\eta) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{\eta}\right), \check{f}(p) \right\rangle
\end{aligned} \tag{3.63}$$

*Definição 3.2* A distribuição  $\hat{d}(p) \in S'(\mathbb{R}^4)$  possui a distribuição quasi-assintótica  $\hat{d}_0(p)$  sobre  $p = \infty$ , se para alguma função positiva continua  $\rho(\eta)$  ( $\eta > 0$ ) o limite

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(\eta) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{\eta}\right), \check{f}(p) \right\rangle = \left\langle \hat{d}_0(p), \check{f}(p) \right\rangle \neq 0 \tag{3.64}$$

existe para todo  $\check{f}(p) \in S(\mathbb{R}^4)$

No espaço de momentos, a distribuição  $\hat{d}_0$  controla o comportamento singular da distribuição  $\hat{d}$ . Consideremos, por exemplo, a transformação de escala  $\check{f}(x) \rightarrow \check{f}(ax)$  no limite (3.64)

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(\eta) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{\eta}\right), \check{f}(ap) \right\rangle &= \left\langle \hat{d}_0(p), \check{f}(ap) \right\rangle \\
&= a^{-4} \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(\eta) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{a\eta}\right), \check{f}(p) \right\rangle \\
&= a^{-4} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\rho(\eta)}{\rho(a\eta)} \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(a\eta) \left\langle \hat{d}\left(\frac{p}{a\eta}\right), \check{f}(p) \right\rangle \\
&= a^{-4} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\rho(\eta)}{\rho(a\eta)} \left\langle \hat{d}_0(p), \check{f}(p) \right\rangle,
\end{aligned} \tag{3.65}$$

onde da ultima igualdade de (3.65), podemos definir  $\rho_0(a)$

$$\rho_0(a) \equiv \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\rho(a\eta)}{\rho(\eta)} = a^{-4} \frac{\langle \hat{d}_0(p), \check{f}(p) \rangle}{\langle \hat{d}_0(p), \check{f}(ap) \rangle}, \quad (3.66)$$

tal que a função  $\rho(\eta)$  é conhecida como *função de contagem de potências*. Calculemos agora  $\rho_0(ab)$ .

$$\begin{aligned} \rho_0(ab) &= (ab)^{-4} \frac{\langle \hat{d}_0(p), \check{f}(p) \rangle}{\langle \hat{d}_0(p), \check{f}(abp) \rangle} \\ &= a^{-4} \frac{\langle \hat{d}_0(p), \check{f}(p) \rangle}{\langle \hat{d}_0(p), \check{f}(ap) \rangle} b^{-4} \frac{\langle \hat{d}_0(p), \check{f}(ap) \rangle}{\langle \hat{d}_0(p), \check{f}(abp) \rangle} \\ &= \rho_0(a) \rho_0(b). \end{aligned} \quad (3.67)$$

O resultado (3.67) implica que  $\rho_0(a)$  apresenta a seguinte forma

$$\rho_0(a) = a^\omega, \quad (3.68)$$

onde  $\omega$  é real. No caso da QED ou sQED  $\omega \in \mathbb{Z}$ . O parâmetro  $\omega$  é indicador do grau de singularidade da distribuição  $d(x)$  na vizinhança de  $x = 0$ . No Apêndice A fazemos o cálculo do grau de singularidade da distribuição delta de Dirac

*Definição 3.3* A distribuição  $d(x) \in S'(\mathbb{R}^4)$  é chamada de singular com ordem  $\omega$ , se possui uma distribuição  $d_0(x)$  quasi-assintótica em  $x = 0$ , ou se sua transformada de Fourier  $\hat{d}(p)$  apresenta uma distribuição  $\hat{d}_0(p)$  quasi-assintótica sobre  $p = \infty$ , respectivamente, com uma função de contagem de potências  $\rho(\eta)$  que satisfaz

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\rho(a\eta)}{\rho(\eta)} = a^\omega \quad (3.69)$$

para cada  $a > 0$

As equações (3.65-3.68) provam que  $\hat{d}_0$  é homogênea de grau  $\omega$ :

$$\begin{cases} \hat{d}_0(\frac{p}{a}) = a^{-\omega} \hat{d}_0(p) \\ d_0(ax) = a^{-(4+\omega)} \end{cases} \quad (3.70)$$

Se aplicamos a relação de homogeneidade sobre o espaço de configurações na definição (3.2), mostra-se que  $\hat{d}_0$  também apresenta a ordem singular  $\omega$ .

Uma propriedade das funções  $\rho(\eta)$ , a ser usada a frente, é a seguinte desigualdade: para todo  $\epsilon_0$  tal que  $1 > \epsilon_0 > 0$ , existem as constantes  $C$ ,  $C'$  e  $\delta_0$  tal que

$$C\eta^{\omega+\epsilon_0} \geq \rho(\eta) \geq C'\eta^{\omega-\epsilon_0} \quad \text{para } \eta < \delta_0. \quad (3.71)$$

### 3.7.3 Construção de $r_2(x)$ e $a(x)$ .

Para dividir  $d_2(x)$  construiremos  $r_2(x)$  (ou  $a_2(x)$ ). Primeiro, escolheremos um quadri-vetor fixo  $v \in \Gamma_1^+(0)$  com o que construímos o seguinte hiperplano.

$$v \cdot x = 0, \quad (3.72)$$

que divide o suporte causal como é mostrado na figura (3.3). O produto  $v \cdot x$  é positivo para todo  $x \in \Gamma_1^+(0)$ , ou negativo para todo  $x \in \Gamma_1^-(0)$ .

Também adicionaremos uma função  $\chi(t)$  infinitamente diferenciável (i.e.  $\chi \in C^\infty$ ) tal que:

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ < 1 & \text{para } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{para } t \geq 1 \end{cases} \quad (3.73)$$

Com isso definimos formalmente a seguinte multiplicação de distribuições

$$r_2(x) \equiv \Theta(v \cdot x) d(x) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \chi\left(\frac{v \cdot x}{\eta}\right) d(x). \quad (3.74)$$

Em teoria de distribuições, a multiplicação entre uma distribuição  $T$  qualquer em  $S'(\mathbb{R}^m)$  e uma função  $f(x)$  está bem definida se a função  $f(x)$  (e suas derivadas) cumprem duas condições

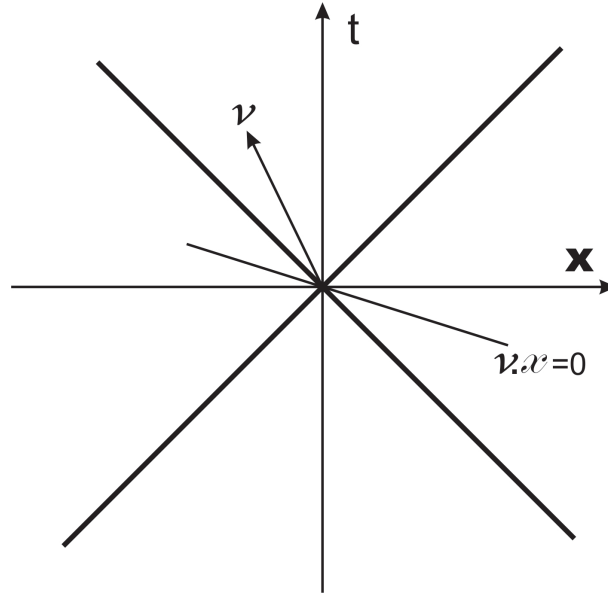


Figura 3.3: Esquema de divisão do suporte causal de  $d(x)$

1. Crescimento lento no infinito.
2. Invariância do espaço das funções de prova.

É claro que as funções  $\chi(t)$  cumprem a primeira condição. A condição sobre as funções de prova exige que o seguinte limite exista

$$\langle \Theta(v.x)d(x), f(x) \rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\langle \chi \left( \frac{v.x}{\eta} \right) d(x), f(x) \right\rangle. \quad (3.75)$$

Provar a existência do limite (3.75) é equivalente a provar que existe o limite

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left\langle \left[ \chi \left( a \frac{v.x}{\eta} \right) - \chi \left( \frac{v.x}{\eta} \right) \right] d(x), f(x) \right\rangle. \quad (3.76)$$

Escrevendo  $a = b^n$ , onde  $b > 1$  e  $n \in \mathbb{N}$ , definiremos a função  $g_0(x)$  da seguinte forma:

$$g_0(x) \equiv \chi(bv.x) - \chi(v.x). \quad (3.77)$$

A função  $g_0(x)$  permite-nos escrever o limite (3.76) da seguinte forma:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle g_0 \left( b^j \frac{x}{\eta} \right) d(x), f(x) \right\rangle. \quad (3.78)$$

Agora, introduziremos a função auxiliar  $g_1(x) \in C^\infty$  que seja igual a 1 sobre o suporte causal de  $d(x)$  e nula fora de uma vizinhança desse suporte. Com ajuda de  $g_1$  o limite (3.78) pode ser escrito como

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle f(x) d(x), g_0 \left( b^j \frac{x}{\eta} \right) g_1 \left( b^j \frac{x}{\eta} \right) \right\rangle. \quad (3.79)$$

Nesse ponto, é importante estudar o comportamento da distribuição  $f(x)d(x)$  nas vizinhanças de  $x = 0$ . Usando  $G \left( \frac{x}{\eta} \right) = g_0 \left( b^j \frac{x}{\eta} \right) g_1 \left( b^j \frac{x}{\eta} \right)$  podemos escrever:

$$\left\langle f(x) d(x), G \left( \frac{x}{\eta} \right) \right\rangle = \eta^4 \langle d(\eta x), f(\eta x) G(x) \rangle. \quad (3.80)$$

Seja  $\rho'(\eta)$  a função de contagem de potências da distribuição  $f(x)d(x)$ , e seja  $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$  o primeiro termo não nulo na expansão de Taylor de  $f(x)$ . Em (3.80), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho'(\eta) \left\langle f(x) d(x), G \left( \frac{x}{\eta} \right) \right\rangle &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho'(\eta) \eta^4 \langle d(\eta x), f(\eta x) G(x) \rangle \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \rho'(\eta) \eta^4 \left( \frac{\eta^k f^{(k)}(0)}{k!} \right) \langle d(\eta x), x^k G(x) \rangle \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\rho'(\eta)}{\rho(\eta)} \left( \frac{\eta^k f^{(k)}(0)}{k!} \right) \rho(\eta) \eta^4 \langle d(\eta x), x^k G(x) \rangle \\ &= \left( \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right) \left[ \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\rho'(\eta) \eta^k}{\rho(\eta)} \right] \langle d_0(x), x^k G(x) \rangle. \end{aligned} \quad (3.81)$$

No resultado (3.81) podemos observar que a existência da função  $\rho'(x)$  implica

$$0 < \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\rho'(\eta) \eta^k}{\rho(\eta)} < \infty \quad (3.82)$$

e dessa condição, obtemos o grau de singularidade  $\omega'$  do produto  $d(x)f(x)$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\rho'(a\eta)}{\rho'(\eta)} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\frac{\rho(a\eta)}{(a\eta)^k}}{\frac{\rho(\eta)}{(\eta)^k}} = a^{\omega-k} \Rightarrow \omega' = \omega - k. \quad (3.83)$$

Seja  $d'_0(x)$  a distribuição quasi-assintótica do produto  $d(x)f(x)$ . Usando  $(\frac{\eta}{b^j})$  em lugar de  $\eta$ , a partir de (3.62) podemos escrever

$$\left\langle f(x)d(x), g_0 \left( b^j \frac{x}{\eta} \right) g_1 \left( b^j \frac{x}{\eta} \right) \right\rangle = \frac{1}{\rho' \left( \frac{\eta}{b^j} \right)} \left[ \langle d'_0(x), g_0(x) g_1(x) \rangle + \alpha \left( \frac{\eta}{b^j} \right) \right], \quad (3.84)$$

onde

$$\lim_{\left( \frac{\eta}{b^j} \right) \rightarrow 0} \alpha \left( \frac{\eta}{b^j} \right) = 0. \quad (3.85)$$

O limite (3.85) implica que a função  $\alpha \left( \frac{\eta}{b^j} \right)$  é uniformemente convergente a 0 com relação a  $b^j > 1$ , em outras palavras, para todo  $\epsilon_1 > 0$  existe um  $\delta_1 > 0$  tal que

$$\left| \alpha \left( \frac{\eta}{b^j} \right) \right| < \epsilon_1 \quad \text{si} \quad \frac{\eta}{b^j} < \delta_1. \quad (3.86)$$

Se substituimos (3.84) na somatória (3.79), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle f(x)d(x), g_0 \left( b^j \frac{x}{\eta} \right) g_1 \left( b^j \frac{x}{\eta} \right) \right\rangle = \langle d'_0(x), g_0(x) g_1(x) \rangle S^A + S^B, \quad (3.87)$$

onde

$$S^A = \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{\rho' \left( \frac{\eta}{b^j} \right)} \right], \quad S^B = \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{\alpha \left( \frac{\eta}{b^j} \right)}{\rho' \left( \frac{\eta}{b^j} \right)} \right]. \quad (3.88)$$

Então, provar que o limite (3.75) existe, é equivalente a provar que os limites (3.88) são convergentes. Essa prova depende dos valores que possa tomar  $\omega$ .

Consideremos primeiro o caso em que  $\omega < 0$ . De (3.83) observemos que também  $\omega' < 0$ , substituindo em (3.71) chegamos ao seguinte resultado:

$$\frac{1}{\rho' \left( \frac{\eta}{b^j} \right)} \leq \frac{1}{C' \left( \frac{\eta}{b^j} \right)^{\omega' - \epsilon_0}} \Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{\rho' \left( \frac{\eta}{b^j} \right)} \right] \leq \frac{1}{C' \eta^{\omega' - \epsilon_0}} \sum_{j=0}^{n-1} [b^j]^{\omega' - \epsilon_0}, \quad (3.89)$$

onde na segunda desigualdade a série geométrica  $\sum_{j=0}^{n-1} [b^j]^{\omega' - \epsilon_0}$  é convergente para  $n \rightarrow \infty$ , o que garante a convergência de  $S^A$  para o mesmo limite.

Ademais, de (3.86) podemos escolher  $l = 1$ , e portanto, existe um  $\delta$  tal que

$$\left| \alpha \left( \frac{\eta}{b^j} \right) \right| < 1 \quad \text{para todo} \quad \frac{\eta}{b^j} < \delta \quad (3.90)$$

e dessa forma podemos escrever a seguinte desigualdade:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{\left| \alpha \left( \frac{\eta}{b^j} \right) \right|}{\rho' \left( \frac{\eta}{b^j} \right)} \right] \leq \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{\rho' \left( \frac{\eta}{b^j} \right)} \right] \Rightarrow S^B \leq S^A, \quad (3.91)$$

onde se garante a convergência de  $S^B$  no mesmo limite.

Então, a existência da multiplicação de distribuições (3.95) e, por conseguinte, a existência da distribuição retardada  $r_2(x)$  está comprovada.

Para o caso em que  $\omega \geq 0$ , a diferença está em que  $\omega' = \omega - k$  não é negativo para as funções de prova  $f(x)$  cujo primeiro componente em sua expansão de Taylor é de ordem  $k \leq \omega$ . Então, para que nesse caso o limite (3.75) exista, é necessário excluir essa classe de funções de prova. É por isso que introduziremos um operador  $W$  que realizará o seguinte mapeamento:

$$W : S(\mathbb{R}^m) \rightarrow S^\omega(\mathbb{R}^m), \quad (3.92)$$

onde  $S^\omega(\mathbb{R}^m)$  é o espaço de funções que desaparecem para ordens  $k \leq \omega$ . O operador  $W$  é definido da seguinte forma

$$(Wf)(x) = f(x) - c(x) \sum_{|a|=0}^{\omega} x^a \frac{[D^{(a)}f](0)}{a!}, \quad (3.93)$$

onde  $c(x) \in S(\mathbb{R}^m)$  é uma função qualquer tal que:

$$c(0) = 1, \quad [D^{(a)}c](0) = 0, \quad \text{para } |a| \leq \omega. \quad (3.94)$$

A construção do operador  $W$  (3.93) nos permite redefinir a distribuição retardada  $r_2(x)$  para quando  $\omega \geq 0$  da seguinte forma

$$\langle r(x), f(x) \rangle \equiv \langle \Theta(v.x)d(x), (Wf)(x) \rangle. \quad (3.95)$$

Em resumo:

A distribuição  $d(x) \in S'(\mathbb{R}^4)$  com suporte causal é corretamente dividida nas distribuições  $r_2(x)$  e  $a_2(x)$  do seguinte modo

$$\omega < 0 \begin{cases} \langle r_2(x), f(x) \rangle \equiv \langle \Theta(v.x)d(x), f(x) \rangle \\ \langle a_2(x), f(x) \rangle \equiv \langle [\Theta(v.x) - 1] d(x), f(x) \rangle \end{cases} \quad (3.96)$$

$$\omega \geq 0 \begin{cases} \langle r_2(x), f(x) \rangle \equiv \langle \Theta(v.x)d(x), (Wf)(x) \rangle \\ \langle a_2(x), f(x) \rangle \equiv \langle [\Theta(v.x) - 1] d(x), (Wf)(x) \rangle \end{cases} \quad (3.97)$$

### Unicidade.

A divisão feita para o caso (3.96) em que  $\omega < 0$ , é única. Para o caso (3.97), em que  $\omega \geq 0$ , não é única.

Por exemplo, se usamos a função  $\tilde{\chi}_0(t) = 1 - \chi_0(-t)$  em lugar de  $\chi_0(t)$  encontramos outra distribuição retardada  $\tilde{r}(x)$ . As distribuições  $r_2(x)$  e  $\tilde{r}(x)$  concordam com  $d$  sobre  $\Gamma_1^+(0)/\{0\}$ . Então,  $\tilde{r}(x) - r_2(x)$  é uma distribuição temperada com suporte pontual  $\{0\}$  e pode ser expandida da seguinte forma.

$$\tilde{r}(x) - r_2(x) = \sum_a C_a D^a \delta(x). \quad (3.98)$$

No Apêndice A pode ser observado que a ordem de singularidade de uma distribuição  $D^a \delta(x)$  é  $\omega = a$ . Por ser (3.98) uma diferença de distribuições temperadas, deve-se cumprir que  $a \leq \omega[r_2(x)]$ , o que significa que para  $\omega[r_2(x)] < 0$  é necessário que as constantes  $C_a$  sejam nulas. Portanto

$$\tilde{r}(x) = r_2(x) \quad (3.99)$$

o que implica a unicidade do processo de divisão nesse caso.

Mas para o caso em que  $\omega \geq 0$ , a solução mais geral na divisão causal implica a adição de termos  $C_a D^a \delta(x)$  até o ordem  $\omega$

$$\tilde{r}(x) = r_2(x) + \sum_a^\omega C_a D^a \delta(x). \quad (3.100)$$

As constantes  $C_a$  não podem ser calculadas com a condição de causalidade e outras condições (como, por exemplo, simetrias ou invariância de gauge) têm que ser levadas em conta para seu cálculo.

### 3.7.4 Processo de divisão no espaço dos momentos.

Os cálculos explícitos em sQED são desenvolvidos melhor no espaço de momentos e, por esse motivo, estudaremos o processo de divisão de distribuições causais nesse espaço.

Usando a teoria de distribuições podemos escrever a definição (3.97) para  $r_2(x)$  da seguinte forma

$$\langle \hat{r}, \check{f} \rangle = \langle \widehat{\Theta} d, \widetilde{W} f \rangle, \quad (3.101)$$

onde a transformada  $\widehat{\Theta} d$  pode ser obtida pelo teorema de convolução

$$\widehat{\Theta} d(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \widehat{\Theta}(p) * \widehat{d}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 p' \widehat{\Theta}(p') \widehat{d}(p - p'). \quad (3.102)$$

Agora, calculemos a transformada inversa  $\widetilde{W} f$

$$\begin{aligned} \widetilde{W} f &= \left[ f(x) - \sum_{|a|=0}^\omega \frac{x^a c(x)}{a!} [D^{(a)} f](0) \right]^\vee \\ &= \check{f}(p) - \sum_{|a|=0}^\omega \frac{(iD_p)^a \check{c}(p)}{a!} [D^{(a)} f](0), \end{aligned} \quad (3.103)$$

onde o termo  $[D^{(a)} f](0)$  pode ser obtido a partir da distribuição delta de Dirac

$$\begin{aligned}
(D^a f)(0) &= \langle (-)^a D^a \delta, f \rangle = (-)^a \langle D^a \delta, f \rangle = (-)^a \langle \widehat{D^a \delta}, \check{f} \rangle \\
&= (-)^a \langle (2\pi)^{-2} (-ip)^a, \check{f} \rangle = (2\pi)^{-2} \langle (-)^a (-ip)^a, \check{f} \rangle \\
&= (2\pi)^{-2} \langle (ip)^a, \check{f} \rangle.
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Substituindo (3.104) em (3.103), obtemos

$$\widetilde{W}f = \check{f}(p) - \sum_{|a|=0}^{\omega} (-)^a \frac{(D_p)^a \check{c}(p)}{a!} (2\pi)^{-2} \langle (p)^a, \check{f} \rangle. \tag{3.105}$$

Usando os resultados (3.102) e (3.105) em (3.101), resulta em

$$\begin{aligned}
\langle \hat{r}, \check{f} \rangle &= \left\langle \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k \hat{\Theta}(k) \hat{d}(p-k), \check{f}(p) - \sum_{|a|=0}^{\omega} (-)^a \frac{(D_p)^a \check{c}(p)}{a!} (2\pi)^{-2} \langle (p')^a, \check{f} \rangle \right\rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k \hat{\Theta}(k) \\
&\quad \left[ \langle \hat{d}(p-k), \check{f}(p) \rangle - \left\langle \hat{d}(p-k), \sum_{|a|=0}^{\omega} (-)^a \frac{(D_p)^a \check{c}(p)}{a!} (2\pi)^{-2} \langle (p')^a, \check{f} \rangle \right\rangle \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k \hat{\Theta}(k) \\
&\quad \left[ \langle \hat{d}(p-k), \check{f}(p) \rangle - \left\langle \hat{d}(p'-k), \sum_{|a|=0}^{\omega} (-)^a \frac{(D_{p'})^a \check{c}(p')}{a!} (2\pi)^{-2} \langle (p)^a, \check{f} \rangle \right\rangle \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k \hat{\Theta}(k) \\
&\quad \left[ \langle \hat{d}(p-k), \check{f}(p) \rangle - \left\langle (2\pi)^{-2} \sum_{|a|=0}^{\omega} (p)^a \frac{(-)^a}{a!} \int d^4 p' \hat{d}(p'-k) (D_{p'})^a \check{c}(p'), \check{f}(p) \right\rangle \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k \hat{\Theta}(k) \left\langle \hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-2} \sum_{|a|=0}^{\omega} (p)^a \frac{(-)^a}{a!} \int d^4 p' \hat{d}(p'-k) (D_{p'})^a \check{c}(p'), \check{f}(p) \right\rangle.
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Da última igualdade de (3.101), podemos determinar  $\hat{r}(p)$

$$\begin{aligned}
\hat{r}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \hat{\Theta}(k) \left[ \hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-2} \sum_{|a|=0}^{\omega} (p)^a \frac{(-)^a}{a!} \int d^4p' \hat{d}(p'-k) (D_{p'})^a \check{c}(p') \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \hat{\Theta}(k) \left[ \hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-2} \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{p^a}{a!} \int d^4p' (D_{p'}^a \hat{d})(p'-k) \check{c}(p') \right].
\end{aligned} \tag{3.107}$$

Sabemos que no caso de  $\omega \geq 0$ , a solução (3.107) não é a mais geral. Fazendo a transformação de Fourier da solução (3.100), encontramos a solução geral  $\tilde{r}(p)$

$$\tilde{r}(p) = \hat{r}(p) + \sum_{|a|=0}^{\omega} C_a p^a. \tag{3.108}$$

### 3.7.5 Regularização UV.

A teoria de divisão de distribuições causais nos diz que é possível construir mais de uma solução  $\hat{r}(p)$ . Por exemplo, consideremos a existência de um ponto  $q \in \mathbb{R}^4$  em que existe a derivada  $D_p^b \hat{r}(q)$  para todo  $b \leq \omega$ . Nesse ponto podemos construir a distribuição  $\hat{r}_q(p)$

$$\hat{r}_q(p) = \hat{r}(p) - \sum_{|b|=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} D_p^b \hat{r}(q). \tag{3.109}$$

Devido à distribuição retardada  $\hat{r}(p)$  que é somada com o polinômio de grau  $\omega$  para obter  $\hat{r}_q(p)$ , então  $\hat{r}_q(p)$  é outra distribuição retardada. Para que  $\hat{r}_q(p)$  fique bem definida, é necessário que se cumpra a seguinte condição de normalização

$$D_p^b \hat{r}_q(q) = 0, \quad |b| \leq \omega. \tag{3.110}$$

Calculemos  $D_p^b \hat{r}_q(q)$  a partir de (3.107)

$$\begin{aligned}
D_p^b \hat{r}_q(q) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \hat{\Theta}(k) \left[ (D_p^b \hat{d})(q-k) \right. \\
&\quad \left. - (2\pi)^{-2} \sum_{b \leq a} \frac{a! q^{a-b}}{(a-b)! a!} \int d^4p' (D_{p'}^a \hat{d})(p'-k) \check{c}(p') \right].
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Agora, substituiremos (3.111) em (3.109)

$$\begin{aligned}
\hat{r}_q(p) &= \hat{r}(p) \\
&- \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \hat{\Theta}(k) \left[ \sum_{|b|=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} (D_p^b \hat{d})(q-k) \right. \\
&- (2\pi)^{-2} \sum_{|b|=0}^{\omega} \sum_{b \leq a} \frac{(p-q)^b}{b!} \frac{q^{a-b}}{(a-b)!} \int d^4p' (D_{p'}^a \hat{d})(p'-k) \check{c}(p') \left. \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \hat{\Theta}(k) \left[ \hat{d}(p-k) - (2\pi)^{-2} \sum_{|a|=0}^{\omega} \frac{p^a}{a!} \int d^4p' (D_{p'}^a \hat{d})(p'-k) \check{c}(p') \right] \\
&- \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \hat{\Theta}(k) \left[ \sum_{|b|=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} (D_p^b \hat{d})(q-k) \right. \\
&- (2\pi)^{-2} \sum_{|b|=0}^{\omega} \frac{p^a}{a!} \int d^4p' (D_{p'}^a \hat{d})(p'-k) \check{c}(p') \left. \right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \hat{\Theta}(k) \left[ \hat{d}(p-k) - \sum_{|b|=0}^{\omega} \frac{(p-q)^b}{b!} (D_p^b \hat{d})(q-k) \right]
\end{aligned} \tag{3.112}$$

O resultado (3.112) é conhecido na literatura como *regularização ultravioleta* na terminologia usual, no entanto, chegamos a ela como consequência do processo de divisão de distribuições causais.

### 3.7.6 $\hat{r}_q(p)$ como relação de dispersão.

É possível expressar a solução (3.112) como uma relação de dispersão. Para obter isso, tomaremos  $q = 0$  e um  $p \in \Gamma^+$  tipo tempo. Fazendo uma transformação ortogonal do espaço  $\mathbb{R}^4$ , podemos escolher um sistema de coordenadas tal que  $p = (p^0, \mathbf{0})$ . Além disso, tomaremos o vetor  $v$  paralelo a  $p$ , i.e.  $v = (1, \mathbf{0})$ . Com esse vetor  $v$ , teríamos  $\Theta(v.x) = \Theta(x^0)$  com a seguinte transformada de Fourier

$$\hat{\Theta}(k) = (2\pi)\delta(\mathbf{k}) \frac{i}{k^0 + i0}. \tag{3.113}$$

Substituiremos todas essas considerações em (3.112), obtendo

$$\begin{aligned}
\hat{r}_0(p) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k (2\pi) \delta(\mathbf{k}) \frac{i}{k^0 + i0} \left[ \hat{d}(p^0 - k^0) - \sum_{|b|=0}^{\omega} \frac{(p^0 - 0)^b}{b!} (D_p^b \hat{d})(0 - k^0) \right] \\
&= \frac{i}{(2\pi)} \int dk^0 \frac{1}{k^0 + i0} \left[ \hat{d}(p^0 - k^0) - \sum_{|b|=0}^{\omega} \frac{(p^0 - 0)^b (-)^b}{b!} (D_{k^0}^b \hat{d})(0 - k^0) \right] \\
&= \frac{i}{(2\pi)} \int dk^0 \frac{1}{k^0 + i0} \hat{d}(p^0 - k^0) \\
&\quad - \frac{i}{(2\pi)} \int dk^0 \frac{1}{k^0 + i0} \sum_{|b|=0}^{\omega} \frac{(p^0)^b (-)^b}{b!} (D_{k^0}^b \hat{d})(0 - k^0).
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Em (3.114), faremos a mudança de variável  $k^0 - p^0 = k'^0$  no primeiro termo e no segundo termo, faremos a mudança  $k^0 = k'^0$  para logo integrar por partes

$$\hat{r}_0(p^0) = \frac{i}{(2\pi)} \int dk'^0 \left[ \frac{1}{k'^0 + p^0 + i0} - \sum_{|b|=0}^{\omega} \frac{(p^0)^b}{b!} \frac{\partial^b}{\partial k'^0{}^b} \frac{1}{k'^0 + i0} \right] \hat{d}(-k'^0). \tag{3.115}$$

A expressão entre colchetes pode ser determinada pela aritmética

$$\left[ \dots \right] = \left( \frac{p^0}{k'^0 + i0} \right)^{\omega+1} \frac{1}{k'^0 + p^0 + i0}. \tag{3.116}$$

Substituindo (3.116) em (3.115), obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{r}_0(p^0) &= \frac{i}{(2\pi)} (p^0)^{\omega+1} \int dk'^0 \left[ \frac{1}{(k'^0 + i0)^{\omega+1} (k'^0 + p^0 + i0)} \right] \hat{d}(-k'^0) \\
&= \frac{i}{(2\pi)} (p^0)^{\omega+1} \int dk'^0 \left[ \frac{1}{(k'^0 - i0)^{\omega+1} (p^0 - k'^0 + i0)} \right] \hat{d}(k'^0).
\end{aligned} \tag{3.117}$$

Na igualdade (3.117) faremos a mudança de variável  $t = k'^0/p^0$

$$\hat{r}_0(p) = \frac{i}{(2\pi)} \int dt \frac{\hat{d}(tp)}{(t - i0)^{\omega+1} (1 - t + i0)}, \tag{3.118}$$

onde fizemos a generalização para um momento  $p \in \Gamma^+$  qualquer.

Daqui em diante, a solução (3.118) será chamada como *solução central* normalizada na origem.

## Capítulo 4

# Eletrodinâmica quântica escalar (sQED).

Neste capítulo, aplicaremos a TPC na construção da matriz  $S$  correspondente ao acoplamento entre o campo escalar complexo e o campo eletromagnético. A quantização de tais campos foi feita no cap.2. Essa construção só será feita até a segunda ordem, isto é, calcularemos só o termo  $T_2(x, y)$ . Em contraste com o método usual, a TPC não impõe o vértice  $e^2$ , pois tal vértice é conseguido ao se impor a invariância de Gauge.

### 4.1 Definição de primeira ordem $T_1$

De acordo com o estudo que realizamos no cap.3, o primeiro passo a se fazer é definir a distribuição  $T_1(x)$  seguindo o princípio de acoplamento mínimo. Na referência [10] podemos observar que na abordagem usual da sQED, substitui-se a derivada  $\partial_\nu$  pela derivada covariante  $\partial_\nu + ieA_\nu$  para que no futuro a invariância de Gauge não seja quebrada. Essa substituição leva à definição da lagrangiana de interação com o seguinte termo de segundo ordem

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}}^{(\text{usual})} &\equiv -ie \left[ \phi^\dagger(x) \partial_\nu \phi(x) - \partial_\nu \phi^\dagger(x) \phi(x) \right] A^\nu + e^2 \phi^\dagger(x) \phi(x) A^\nu(x) A_\nu(x) \\
&= -ie \phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_\nu \phi(x) A^\nu + e^2 \phi^\dagger(x) \phi(x) A^\nu(x) A_\nu(x).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Do ponto de vista formal, a definição (4.1) possui o defeito de introduzir um termo de segundo ordem desde o início. Em contraste, a TPC não usa propriedade de invariância de Gauge ao definir o acoplamento mínimo. Tal propriedade é usada na construção de segundo ordem, sempre que, no processo de divisão, a ordem de singularidade não seja negativa. Em conclusão, usaremos o termo proporcional a  $e$  de (4.1) como acoplamento entre o campo escalar complexo e o eletromagnético. Então, definimos  $\mathcal{L}_{\text{int}}^{(TPC)}$  assim

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{int}}^{(TPC)} &= -ie \left[ \phi^\dagger(x) \partial_\nu \phi(x) - \partial_\nu \phi^\dagger(x) \phi(x) \right] A^\nu \\
&= -ie \phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_\nu \phi(x) A^\nu.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

A definição geral para  $T_1$  é:

$$T_1 \equiv i : \mathcal{L}_{\text{int}} : \tag{4.3}$$

e, portanto, substituindo (4.2), obtemos para nossa aplicação

$$T_1 = e : \phi^\dagger(x) \overleftrightarrow{\partial}_\nu \phi(x) : A^\nu. \tag{4.4}$$

## 4.2 Distribuição diferença $D_2(x, y)$ .

O seguinte passo é obter a distribuição diferença  $D_2(x, y)$  mediante (4.4). Do capítulo anterior, conhecemos que  $D_2(x, y)$  é calculada a partir da definição (3.47):

$$D_2(x, y) \equiv R'_2(x, y) - A'_2(x_1, x_2).$$

em seguida, procederemos ao cálculo de  $A'_2(x, y)$ . Usando (3.46)

$$\begin{aligned}
A'_2(x, y) &= \tilde{T}_1(x)T_1(y) = -T_1(x)T_1(y) \\
&= -e^2 \left[ : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) - \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) : \right] \left[ : \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) - \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : \right] \times \\
&\quad \times A^\mu(x) A^\nu(y) \\
&= -e^2 \left[ \underbrace{: \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) :: \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) :}_A - \underbrace{: \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) :: \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) :}_B \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{: \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) :: \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) :}_C + \underbrace{: \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) :: \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) :}_D \right] \times \\
&\quad \times [A^\mu(x) A^\nu(y)].
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Mediante o uso do teorema de Wick, podemos estender os produtos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  como a soma de produtos entre contrações e campos livres ordenados normalmente. No apêndice B.2 colocamos as expressões de tais contrações. Com isso, obtemos para cada termo  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  o seguinte:

$$\begin{aligned}
A &= : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : + : \overbrace{\phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y)} : \\
&\quad + : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \overbrace{\phi(x) \phi^\dagger(y)} \partial_\nu \phi(y) : + : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \overbrace{\phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y)} : \\
&= : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : + i : \partial_\mu \phi(x) \phi^\dagger(y) : (\partial_\nu D_m^{(+)})(x - y) \\
&\quad - i : \phi^\dagger(x) \partial_\nu \phi(y) : (\partial_\mu D_m^{(+)})(x - y) + (\partial_\mu D_m^{(+)})(x - y) (\partial_\nu D_m^{(+)})(x - y),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
B &= - : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : - : \overbrace{\phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y)} : \\
&\quad - : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \overbrace{\phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y)} \phi(y) : - : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \overbrace{\partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y)} : \\
&= - : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : + i : \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) : D_m^{(+)}(x - y) \\
&\quad - i : \phi^\dagger(x) \phi(y) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x - y) - D_m^{(+)}(x - y) (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x - y),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
C &= - : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : - : \overbrace{\partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \phi^\dagger(y)} \partial_\nu \phi(y) : \\
&\quad - : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \overbrace{\phi(x) \phi^\dagger(y)} \partial_\nu \phi(y) : - : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \overbrace{\phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y)} : \\
&= - : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : - i : \phi(x) \phi^\dagger(y) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) \\
&\quad + i : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial_\nu \phi(y) : D_m^{(+)}(x-y) - D_m^{(+)}(x-y) (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x-y),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
D &=: \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : + : \overbrace{\partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y)} \phi(y) : \\
&\quad + : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : + : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \overbrace{\phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y)} \phi(y) : \\
&=: \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : - i : \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) : (\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y) \\
&\quad + i \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(y) (\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) + (\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y) (\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Substituindo as igualdades (4.6)-(4.9) em (4.5) e abrindo o produto  $A^\nu(y)A^\mu(x)$  com o teorema de Wick, obtemos para  $A'_2(x, y)$

$$\begin{aligned}
A'_2(x, y) &= -e^2 [ : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : - : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : \\
&\quad - : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : + : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : \\
&\quad + i : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial_\nu \phi(y) : D_m^{(+)}(x-y) + i : \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) : D_m^{(+)}(x-y) \\
&\quad - i : \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) : (\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y) + i : \partial_\mu \phi(x) \phi^\dagger(y) : (\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) \\
&\quad - i : \phi^\dagger(x) \partial_\nu \phi(y) : (\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y) + i \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(y) (\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) \\
&\quad - i : \phi^\dagger(x) \phi(y) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) - i : \phi(x) \phi^\dagger(y) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) \\
&\quad + (\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y) (\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) - D_m^{(+)}(x-y) (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) \\
&\quad - D_m^{(+)}(x-y) (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) + (\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y) (\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) ] \\
&\quad \times [ : A^\mu(x) A^\nu(y) : + i g^{\mu\nu} D(+)_0(x-y) ].
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Agora, calcularemos  $R'_2(x, y)$ . Usando a definição (3.45)

$$\begin{aligned}
R'_2(x, y) &= T_1(y)\tilde{T}_1(x) = -T_1(y)T_1(x) \\
&= -e^2 \left[ : \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) - \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : \right] \left[ : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) - \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) : \right] \times \\
&\quad \times A^\nu(y) A^\mu(x) \\
&= -e^2 \left[ \underbrace{: \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) :: \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) :}_A - \underbrace{: \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) :: \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) :}_B \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{: \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) :: \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) :}_C + \underbrace{: \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) :: \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) :}_D \right] \times \\
&\quad \times [A^\nu(y) A^\mu(x)].
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Comparando (4.11) com (4.5), pode ser observado que há permutação entre as variáveis  $x \leftrightarrow y$  e os índices  $\mu \leftrightarrow \nu$ . Então, a expressão para  $R'_2(x, y)$ , depois de usar o teorema de Wick, ficará igual a (4.10), mas com as permutações indicadas.

$$\begin{aligned}
R'_2(x, y) &= -e^2 \left[ : \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) : - : \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) : \right. \\
&\quad - : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) : + : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) : \\
&\quad + i : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : D_m^{(+)}(y-x) + i : \partial_\nu \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : D_m^{(+)}(y-x) \\
&\quad - i : \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : (\partial_\nu D_m^{(+)})(y-x) + i : \partial_\nu \phi(y) \phi^\dagger(x) : (\partial_\mu D_m^{(+)})(y-x) \\
&\quad - i : \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : (\partial_\nu D_m^{(+)})(y-x) + i \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(x) (\partial_\mu D_m^{(+)})(y-x) \\
&\quad - i : \phi^\dagger(y) \phi(x) : (\partial_\nu \partial_\mu D_m^{(+)})(y-x) - i : \phi(y) \phi^\dagger(x) : (\partial_\nu \partial_\mu D_m^{(+)})(y-x) \\
&\quad + (\partial_\nu D_m^{(+)})(y-x) (\partial_\mu D_m^{(+)})(y-x) - D_m^{(+)}(y-x) (\partial_\nu \partial_\mu D_m^{(+)})(y-x) \\
&\quad \left. - D_m^{(+)}(y-x) (\partial_\nu \partial_\mu D_m^{(+)})(y-x) + (\partial_\nu D_m^{(+)})(y-x) (\partial_\mu D_m^{(+)})(y-x) \right] \\
&\quad \times [ : A^\nu(y) A^\mu(x) : + i g^{\nu\mu} D(+)_0(y-x) ].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

As expressões (4.10) e (4.12) serão substituídas para se obter  $D_2(x, y)$ . Nessa substituição, serão agrupados elementos que podem ser relacionados com os diagramas na figura (4.1). Tais agrupamentos são:

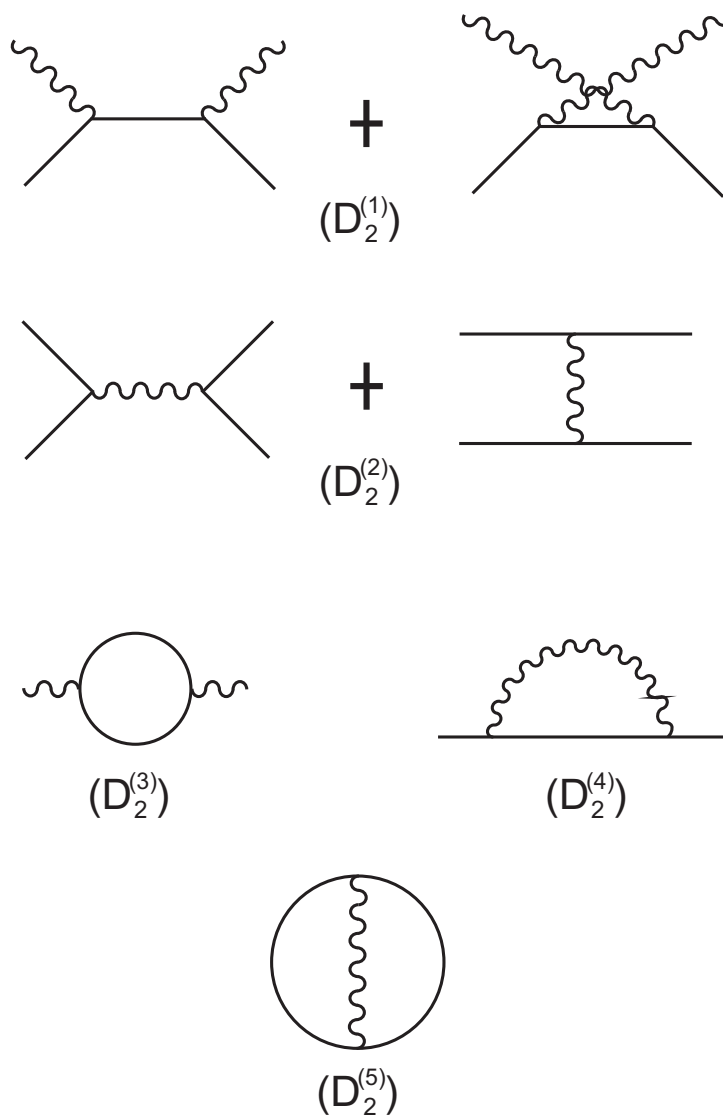
$$D_2 = D_2^{(1)} + D_2^{(2)} + D_2^{(3)} + D_2^{(4)} + D_2^{(5)}, \tag{4.13}$$

onde

$$\begin{aligned}
D_2^{(1)}(x-y) = & ie^2 : A^\mu(x)A^\nu(y) : [- : \phi(x)\phi^\dagger(y) : \partial_\mu\partial_\nu D_m(x-y) \\
& + : \partial_\mu\phi(x)\phi^\dagger(y) : \partial_\nu D_m(x-y) \\
& - : \phi(x)\partial_\nu\phi^\dagger(y) : \partial_\mu D_m(x-y) \\
& + : \partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi^\dagger(y) : D_m(x-y) \\
& - : \phi^\dagger(x)\phi(y) : \partial_\mu\partial_\nu D_m(x-y) \\
& + : \partial_\mu\phi^\dagger(x)\phi(y) : \partial_\nu D_m(x-y) \\
& - : \phi^\dagger(x)\partial_\nu\phi(y) : \partial_\mu D_m(x-y) \\
& + : \partial_\mu\phi^\dagger(x)\partial_\nu\phi(y) : D_m(x-y)],
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
D_2^{(2)}(x-y) = & e^2 ig^{\mu\nu} D_0(x-y) [ : \phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x)\phi^\dagger(y)\partial_\nu\phi(y) : \\
& - : \partial_\mu\phi^\dagger(x)\phi(x)\phi^\dagger(y)\partial_\nu\phi(y) : \\
& - : \phi^\dagger(x)\partial_\mu\phi(x)\partial_\nu\phi^\dagger(y)\phi(y) : \\
& + : \partial_\mu\phi^\dagger(x)\phi(x)\partial_\nu\phi^\dagger(y)\phi(y) : ],
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
D_2^{(3)}(x-y) = & 2e^2 : A^\mu(x)A^\nu(y) : [ -(\partial_\nu D_m^{(-)})(x-y)(\partial_\mu D_m^{(-)})(x-y) \\
& + (\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y)(\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y) \\
& - D_m^{(+)}(x-y)(\partial_\mu\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) \\
& + D_m^{(-)}(x-y)(\partial_\mu\partial_\nu D_m^{(-)})(x-y) ],
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Figura 4.1: Gráficos gerais dos processos em  $D_2(x, y)$

$$\begin{aligned}
D_2^{(4)} = & i : \partial_\nu \phi(x) \partial_\mu \phi^\dagger(y) : [D_m^{(-)}(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x-y) \\
& - D_m^{(+)}(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(+)}(x-y)] \\
& + i : \partial_\nu \phi^\dagger(x) \phi(y) : [(\partial_\mu D_m^{(-)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x-y) \\
& - (\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(+)}(x-y)] \\
& + i : \partial_\nu \phi(x) \phi^\dagger(y) : [(\partial_\mu D_m^{(-)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x-y) \\
& - (\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(+)}(x-y)] \\
& - i : \phi(x) \phi^\dagger(y) : [(\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(-)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x-y) \\
& - (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(+)}(x-y)] \\
& - i : \partial_\nu \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(y) : [D_m^{(+)}(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(+)}(x-y) \\
& - D_m^{(-)}(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x-y)] \\
& + i : \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) : [(\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(+)}(x-y) \\
& - (\partial_\mu D_m^{(-)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x-y)] \\
& + i : \phi^\dagger(x) \partial_\nu \phi(y) : [(\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(+)}(x-y) \\
& - (\partial_\mu D_m^{(-)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x-y)] \\
& + i : \phi^\dagger(x) \phi(y) : [(\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(+)}(x-y) \\
& - (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(-)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x-y)],
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
D_2^{(5)} = & -2(\partial_\mu D_m^{(-)})(x-y)(\partial_\nu D_m^{(-)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x-y) \\
& - 2(\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y)(\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(+)}(x-y) \\
& + 2D_m^{(-)}(x-y)(\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(-)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x-y) \\
& + 2D_m^{(+)}(x-y)(\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) i g^{\mu\nu} D_0^{(+)}(x-y).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Nesse ponto, é bom aclarar que os gráficos na figura (4.1) não representam gráficos de Feynman, em outras palavras, as regras de Feynman não têm que ser cumpridas necessariamente.

### 4.3 Divisão da distribuição $D_2(x, y)$ em nível de árvore.

Em nível de árvore temos os gráficos relacionados com os termos  $D^{(1)}$  e  $D^{(2)}$ . Comparando tais termos com a equação (3.58), podemos observar que as distribuições numéricas  $d_2^k$  para dividir são distribuições de Jordan-Pauli  $D_m$  e suas derivadas, tanto no caso massivo como no caso de massa nula.

A divisão das distribuições depende de sua ordem de singularidade  $\omega$ . Nas referências [14] e [16] pode-se ver a demonstração da fórmula que nos proporciona o grau de singularidade em nível de árvore. Tal fórmula é

$$\omega = 4 - b - 2s - d, \quad (4.19)$$

onde  $b$  é o número de fótons externos,  $2s$  é o número de partículas escalares externas, e  $d$  é o número de derivadas nessas  $2s$  partículas. Além disso, no apêndice C.5 fazemos o cálculo no espaço de momentos.

Para os processos com dois bósons externos, como os que temos no termo  $D^{(2)}(x, y)$  (4.15), sempre temos duas derivadas externas, e portanto

$$\omega [D_0(x - y)] = -2, \quad (4.20)$$

sendo que a divisão da distribuição fica

$$D_0(x - y) = D_0^{\text{ret}} - D_0^{\text{adv}}. \quad (4.21)$$

No caso do espalhamento Compton, embutidos no termo  $D^{(1)}(x, y)$ , o anterior nem sempre ocorre. Todos os processos Compton são mostrados na figura (4.2). Nessas figuras, as indicadas como (4.2.d) e (4.2.g) não apresentam derivadas nos bósons externos concluindo que

$$\omega [\partial_\nu \partial_\mu D_m] = 0, \quad (4.22)$$

o que significa que tais distribuições apresentam um termo indeterminado localmente em sua divisão de acordo com (3.100).

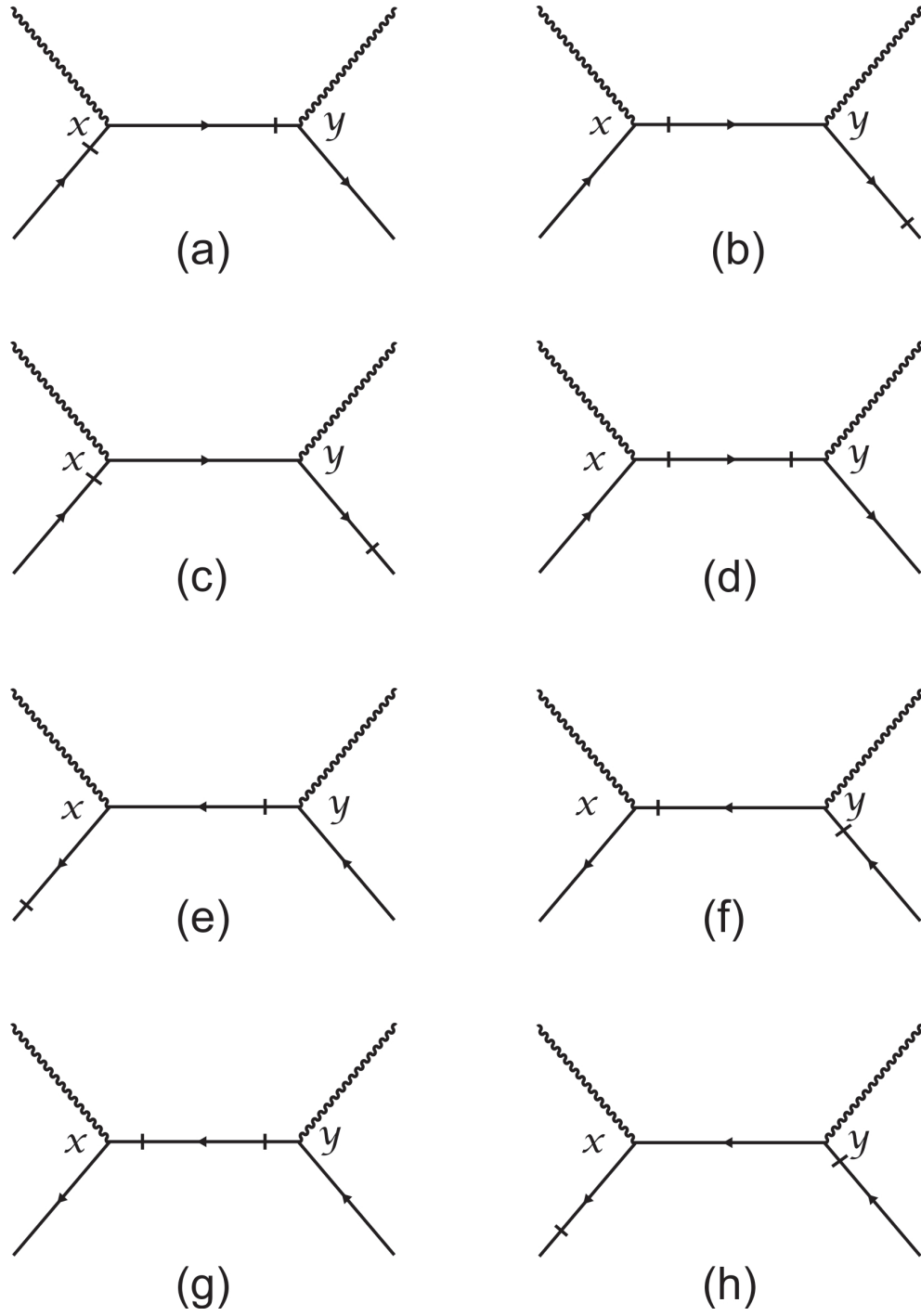


Figura 4.2: Espalhamento Compton. Os cortes em cada linha correspondem a uma derivada.

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu D_m(x-y) = & \left[ \partial_\mu \partial_\nu D_m^{\text{ret}}(x-y) + C_{\text{comp}} g_{\mu\nu} \delta(x-y) \right] \\ & - \left[ \partial_\mu \partial_\nu D_m^{\text{adv}}(x-y) + C_{\text{comp}} g_{\mu\nu} \delta(x-y) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Os demais termos têm a ordem de singularidade negativa  $\omega < 0$ , e por conseguinte, a divisão de cada distribuição, nesses casos, é trivial:

$$D_m(x-y) = D_m^{\text{ret}} - D_m^{\text{adv}}, \quad (4.24)$$

$$\partial_\nu D_m(x-y) = \partial_\nu D_m^{\text{ret}} - \partial_\nu D_m^{\text{adv}}. \quad (4.25)$$

Na construção de  $T_2(x, y)$ , os termos indeterminados serão levados em conta no cálculo a partir deste ponto. Na seguinte seção, veremos como esses termos formam o vértice  $e^2$ .

## 4.4 $T_2(x, y)$ em nível de árvore.

Sejam  $T_2^{(1)}$  e  $T_2^{(2)}$  os termos de  $T_2$  calculados a partir de  $D_2^{(1)}$  e  $D_2^{(2)}$ , respectivamente, então:

$$T_2^{(\text{arvore})}(x, y) = T_2^{(1)}(x, y) + T_2^{(2)}(x, y). \quad (4.26)$$

Agora, procederemos ao cálculo em separado de  $T_2^{(1)}$  e  $T_2^{(2)}$ .

### 4.4.1 Espalhamento Compton $T_2^{(1)}$ .

Substituindo (4.23-4.25) em (4.14), obtemos  $R_2^{(1)}(x, y)$

$$\begin{aligned}
R_2^{(1)}(x, y) = ie^2 : A^\mu(x) A^\nu(y) : [ & - : \phi^\dagger(y) \phi(x) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{\text{ret}}(x - y) + C_{\text{comp}} g_{\mu\nu} \delta(x - y)) \\
& + : \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : \partial_\nu D_m^{\text{ret}}(x - y) \\
& - : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(x) : \partial_\mu D_m^{\text{ret}}(x - y) \\
& + : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : D_m^{\text{ret}}(x - y) \\
& - : \phi(y) \phi^\dagger(x) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^{\text{ret}}(x - y) + C_{\text{comp}} g_{\mu\nu} \delta(x - y)) \\
& + : \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : \partial_\nu D_m^{\text{ret}}(x - y) \\
& - : \partial_\nu \phi(y) \phi^\dagger(x) : \partial_\mu D_m^{\text{ret}}(x - y) \\
& + : \partial_\nu \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : D_m^{\text{ret}}(x - y) ].
\end{aligned} \tag{4.27}$$

De (4.12), obtemos  $R_2'^{(1)}(x, y)$ .

$$\begin{aligned}
R_2'^{(1)}(x, y) = ie^2 : A^\nu(y) A^\mu(x) : [ & - : \phi^\dagger(y) \phi(x) : (\partial_\nu \partial_\mu D_m^{(-)}(x - y) \\
& + : \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : (\partial_\nu D_m^{(-)}(x - y) \\
& - \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(x) (\partial_\mu D_m^{(-)}(x - y) \\
& + : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : D_m^{(-)}(x - y) \\
& - : \phi(y) \phi^\dagger(x) : (\partial_\nu \partial_\mu D_m^{(-)}(x - y) \\
& + : \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : (\partial_\nu D_m^{(-)}(x - y) \\
& - : \partial_\nu \phi(y) \phi^\dagger(x) : (\partial_\mu D_m^{(-)}(x - y) \\
& + : \partial_\nu \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : D_m^{(-)}(x - y) ].
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Com a ajuda de:

$$D_m^F = D_m^{\text{ret}} - D_m^{(-)}, \tag{4.29}$$

calculamos  $T_2^{(1)}(x, y) = R_2^{(1)} - R_2'^{(1)}$ .

$$\begin{aligned}
T_2^{(1)}(x, y) = & ie^2 : A^\mu(x) A^\nu(y) : [ - : \phi^\dagger(y) \phi(x) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) + C'_{\text{comp}} g_{\mu\nu} \delta(x - y)) \\
& + : \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
& - : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(x) : \partial_\mu D_m^F(x - y) \\
& + : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : D_m^F(x - y) \\
& - : \phi(y) \phi^\dagger(x) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) + C_{\text{comp}} g_{\mu\nu} \delta(x - y)) \\
& + : \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
& - : \partial_\nu \phi(y) \phi^\dagger(x) : \partial_\mu D_m^F(x - y) \\
& + : \partial_\nu \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : D_m^F(x - y) ].
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Agora, determinaremos as constantes  $C_{\text{comp}}$  e  $C'_{\text{comp}}$ . Como foi dito no capítulo anterior, tais constantes não podem ser obtidas por causalidade, porém, podem ser obtidas por outras condições físicas.

A primeira propriedade física, além da causalidade, a ser usada será a invariância de carga da matriz  $S$ , que implica as transformações

$$\begin{cases} \phi(x) \rightarrow \phi^\dagger(x) \\ \phi^\dagger(x) \rightarrow \phi(x) \\ A^\mu(x) \rightarrow -A^\mu(x) \end{cases} \tag{4.31}$$

não alterarem a matriz  $S$  e, portanto, o elemento  $T_2^{(1)}(x - y)$  tampouco deve ser alterado.

Aplicando as transformações (4.31) em (4.40), obtemos a seguinte condição

$$C_{\text{comp}} = C'_{\text{comp}}. \tag{4.32}$$

Daí, introduziremos a invariância de Gauge que está representada pelas transformações

$$\begin{cases} \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\Lambda(x)} \phi(x) \\ A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x) \end{cases} \tag{4.33}$$

Aplicando essas transformações no termo  $S^{(1)}$  obtemos:

$$\begin{aligned}
S'^{(1)} &= S^{(1)} + \frac{e^2}{2!} \int d^4x d^4y : [A^\mu(x) \partial^\nu \Lambda(y) + A^\nu(y) \partial^\mu \Lambda(x) + \partial^\nu \Lambda(y) \partial^\mu \Lambda(x)] : \times \\
&\quad \times \{ \dots \}_{\mu\nu} g(x) g(y) \\
&= S^{(1)} \\
&\quad + \frac{e^2}{2!} \int d^4x : A^\mu(x) : g(x) \int d^4y \partial^\nu \Lambda(y) \{ \dots \}_{\mu\nu} g(y) \\
&\quad + \frac{e^2}{2!} \int d^4y : A^\nu(y) : g(y) \int d^4x \partial^\mu \Lambda(x) \{ \dots \}_{\mu\nu} g(x) \\
&\quad + \frac{e^2}{2!} \int d^4x \partial^\mu \Lambda(x) \int d^4y \partial^\nu \Lambda(y) \{ \dots \}_{\mu\nu} g(y),
\end{aligned} \tag{4.34}$$

onde

$$\begin{aligned}
\{ \}_{\mu\nu} &= - : \phi^\dagger(y) \phi(x) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x-y) + C'_{\text{comp}} g_{\mu\nu} \delta(x-y)) \\
&\quad + : \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : \partial_\nu D_m^F(x-y) \\
&\quad - : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(x) : \partial_\mu D_m^F(x-y) \\
&\quad + : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : D_m^F(x-y) \\
&\quad - : \phi(y) \phi^\dagger(x) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x-y) + C_{\text{comp}} g_{\mu\nu} \delta(x-y)) \\
&\quad + : \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : \partial_\nu D_m^F(x-y) \\
&\quad - : \partial_\nu \phi(y) \phi^\dagger(x) : \partial_\mu D_m^F(x-y) \\
&\quad + : \partial_\nu \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : D_m^F(x-y).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Se integramos por partes o resultado (4.34), pode ser comprovado que a igualdade  $S'^{(1)} = S^{(1)}$  exige que a derivada parcial, com relação ao par  $(x, \mu)$  ou ao par  $(y, \nu)$ , da expressão entre chaves  $\{ \}_{\mu\nu}$ , deve ser nula. Derivando com relação ao par  $(x, \mu)$  obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \partial^\mu \{ \}_{\mu\nu} \\
0 &= - : \phi(y) \partial_\nu^x \phi^\dagger(x) : C_{\text{comp}} \delta(x-y) - : \phi(y) \phi^\dagger(x) : \partial_\nu^x \delta(x-y) (1 + C_{\text{comp}}) \\
&\quad - : \phi^\dagger(y) \partial_\nu^x \phi(x) : C_{\text{comp}} \delta(x-y) - : \phi^\dagger(y) \phi(x) : \partial_\nu^x \delta(x-y) (1 + C_{\text{comp}}) \\
&\quad - : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(x) : \delta(x-y) - : \partial_\nu \phi(y) \phi^\dagger(x) : \delta(x-y).
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Por outro lado, as distribuições delta de Dirac cumprem a seguinte propriedade

$$: \phi(y) \phi^\dagger(x) : \partial_\nu \delta(x-y) = - : \phi(y) \partial_\nu \phi^\dagger(y) : \delta(x-y) + \partial_\nu \delta(x-y) : \phi(y) \phi^\dagger(y) :, \tag{4.37}$$

aplicando (4.37) no resultado (4.36), obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= - : \phi(y) \partial_\nu \phi^\dagger(x) : \delta(x-y) C_{\text{comp}} \\
&\quad - : \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(x) : \delta(x-y) C_{\text{comp}} \\
&\quad - : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(x) : \delta(x-y) \\
&\quad - : \partial_\nu \phi(y) \phi^\dagger(x) : \delta(x-y) \\
&\quad + : \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : \delta(x-y) (1 + C_{\text{comp}}) \\
&\quad + : \phi(y) \partial_\nu \phi^\dagger(y) : \delta(x-y) (1 + C_{\text{comp}}) \\
&\quad - : \phi(y) \phi^\dagger(y) : \partial_\nu \delta(x-y) (1 + C_{\text{comp}} + 1 + C_{\text{comp}}).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Nessa última igualdade (4.38), os termos com  $\delta(x-y)$  anulam-se. Com isso, podemos observar que a invariância de Gauge exige:

$$C_{\text{comp}} = -1, \tag{4.39}$$

com o que finalmente obtemos  $T_2^{(1)}(x, y)$ .

$$\begin{aligned}
T_2^{(1)}(x, y) = & ie^2 : A^\mu(x) A^\nu(y) : [- : \phi^\dagger(y) \phi(x) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) - g_{\mu\nu} \delta(x - y)) \\
& + : \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
& - : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(x) : \partial_\mu D_m^F(x - y) \\
& + : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : D_m^F(x - y) \\
& - : \phi(y) \phi^\dagger(x) : (\partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) - g_{\mu\nu} \delta(x - y)) \\
& + : \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
& - : \partial_\nu \phi(y) \phi^\dagger(x) : \partial_\mu D_m^F(x - y) \\
& + : \partial_\nu \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : D_m^F(x - y)].
\end{aligned} \tag{4.40}$$

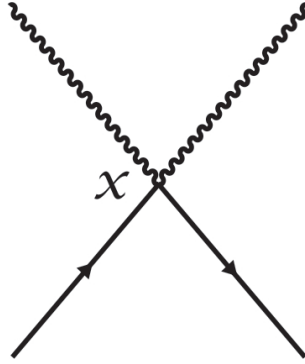
Na substituição do termo  $T_2^{(1)}(x, y)$  na expansão da matriz  $S$ , podemos obter o vértice  $e^2$  a partir dos termos proporcionais a  $\delta(x - y)$

$$\begin{aligned}
S(g) = & \dots + \frac{1}{2!} \int d^4 y d^4 x T_2^{(1)}(x, y) g(x) g(y) + \dots \\
S(g) = & \dots + \frac{1}{2!} \int d^4 y d^4 x [ie^2 : A^\mu(x) A^\nu(y) :: \phi^\dagger(y) \phi(x) : (g_{\mu\nu} \delta(x - y))] g(x) g(y) \\
& + \frac{1}{2!} \int d^4 y d^4 x [ie^2 : A^\mu(x) A^\nu(y) :: \phi^\dagger(x) \phi(y) : (g_{\mu\nu} \delta(x - y))] g(x) g(y) + \dots \\
= & \dots + ie^2 \int d^4 x : A^\mu(x) A_\mu(x) : \phi^\dagger(x) \phi(x) : g^2(x) + \dots \quad .
\end{aligned} \tag{4.41}$$

O resultado (4.41) está em concordância com o lagrangiano usado na abordagem usual de sQED (4.1) em que o vértice proporcional a  $e^2$  nasce do acoplamento mínimo. Na figura (4.3) é mostrado o vértice contraído  $e^2$ .

#### 4.4.2 Processo com 4 bósons externos $T_2^{(2)}$ .

Substituindo (4.24) em (4.15), obtemos  $R_2^{(2)}(x, y)$

Figura 4.3: vértice  $e^2$ 

$$\begin{aligned}
 R_2^{(2)}(x, y) = e^2 i g^{\mu\nu} D_0^{\text{ret}}(x - y) [ &: \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : \\
 &- : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : \\
 &- : \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : \\
 &+ : \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : ].
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

De (4.12), obtemos  $R_2'^{(2)}$ .

$$\begin{aligned}
 R_2'^{(2)}(x, y) = e^2 i g^{\mu\nu} D_0^{(-)}(x - y) [ &: \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : \\
 &- \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) : \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : \\
 &- \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : \\
 &+ \partial_\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : ].
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Por conseguinte,  $T_2^{(2)} = R_2^{(2)} - R_2'^{(2)}$  fica:

$$\begin{aligned}
 T_2^{(2)}(x, y) = e^2 i D_0^F(x - y) [ &: \phi^\dagger(x) \partial^\nu \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : \\
 &- : \partial^\nu \phi^\dagger(x) \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : \\
 &- : \phi^\dagger(x) \partial^\nu \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : \\
 &+ : \partial^\nu \phi^\dagger(x) \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : ].
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Nesse caso, não há diferença com a abordagem usual.

## 4.5 Determinação das seções de choque.

### 4.5.1 Dispersão Bóson-Fóton (Espalhamento Compton).

Faremos o cálculo da seção de choque diferencial  $d\sigma/d\Omega$  do espalhamento:

$$b + \gamma \rightarrow b + \gamma, \quad (4.45)$$

onde  $b$  representa un bóson e  $\gamma$  representa un fóton.

Usando o formalismo dos operadores de criação e aniquilação, os estados inicial e final são

$$\begin{aligned} |i_{\text{comp}}\rangle &= |\Psi_i\rangle \otimes |\Phi_i\rangle \\ &= a^\dagger(\mathbf{p}_i) \varepsilon_{i\nu}(\mathbf{k}_i) a_{i\nu}^\dagger(\mathbf{k}_i) |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} |f_{\text{comp}}\rangle &= |\Psi_f\rangle \otimes |\Phi_f\rangle \\ &= a^\dagger(\mathbf{p}_f) \varepsilon_{f\mu}(\mathbf{k}_f) a_{f\mu}^\dagger(\mathbf{k}_f) |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.47)$$

onde  $|\Psi_i\rangle = a^\dagger(\mathbf{p}_i)|0\rangle$  é o estado inicial do bóson com momentum  $\mathbf{p}_i$  e  $|\Phi_i\rangle = \varepsilon_{i\nu}(\mathbf{k}_i) a_{i\nu}^\dagger(\mathbf{k}_i) |0\rangle$  representa o estado inicial de un fóton com momentum  $\mathbf{k}_i$  e vetor de polarização  $\varepsilon_{i\nu}(\mathbf{k}_i)$ . A forma dos estados finais são similares.

Primeiro, calcularemos os elementos de matriz  $S_{fi} = \langle f_{\text{comp}} | S | i_{\text{comp}} \rangle$ . Segundo (4.46) e (4.47) só o termo  $S^{(1)}(x, y)$  não é nulo.

$$S^{(1)}(g) = \frac{1}{2!} \int d^4y d^4x T_2^{(1)}(x, y) g(x) g(y), \quad (4.48)$$

onde  $T_2^{(1)}$  foi calculado anteriormente com o resultado (4.40).

A integral (4.48) pode ser separada em duas partes. Uma parte com os termos com deltas de Dirac de  $T_2^{(1)}$  (tais termos geram o vértice  $e^2$ ) e a outra parte com o resto. A segunda parte será indicada como  $T_2'^{(1)}$ .

Então, tal separação é

$$\begin{aligned}
 S^{(1)}(g) &= \frac{1}{2!} \int d^4y d^4x T'^{(1)}_2(x, y) g(x) g(y) \\
 &\quad + ie^2 \int d^4x : A^\mu(x) A_\mu(x) :: \phi^\dagger(x) \phi(x) : g^2(x) \\
 &\equiv S'^{(1)}(g) + ie^2 \int d^4x : A^\mu(x) A_\mu(x) :: \phi^\dagger(x) \phi(x) : g^2(x).
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Agora, calcularemos a contribuição de  $S'^{(1)}(g)$  no cálculo da amplitude de espalhamento  $S'^{(1)}_{if}$  do espalhamento de Compton

$$\begin{aligned}
 S'^{(1)}_{if}(g) &= \langle f | S'^{(1)}(g) | i \rangle \\
 &= \frac{ie^2}{2} \int d^4x d^4y \langle \Phi_f | : A^\mu(x) A^\nu(y) : | \Phi_i \rangle \times \\
 &\quad \times [ - \langle \Psi_f | : \phi^\dagger(y) \phi(x) : | \Psi_i \rangle \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
 &\quad + \langle \Psi_f | : \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : | \Psi_i \rangle \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
 &\quad - \langle \Psi_f | : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(x) : | \Psi_i \rangle \partial_\mu D_m^F(x - y) \\
 &\quad + \langle \Psi_f | : \partial_\nu \phi^\dagger(y) \partial_\mu \phi(x) : | \Psi_i \rangle D_m^F(x - y) \\
 &\quad - \langle \Psi_f | : \phi(y) \phi^\dagger(x) : | \Psi_i \rangle \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
 &\quad + \langle \Psi_f | : \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : | \Psi_i \rangle \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
 &\quad - \langle \Psi_f | : \partial_\nu \phi(y) \phi^\dagger(x) : | \Psi_i \rangle \partial_\mu D_m^F(x - y) \\
 &\quad + \langle \Psi_f | : \partial_\nu \phi(y) \partial_\mu \phi^\dagger(x) : | \Psi_i \rangle D_m^F(x - y) ].
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Substituindo em (4.50), os elementos de criação e aniquilação segundo (2.22) e (2.42-2.44) e usando os resultados do Apêndice (D.1), obtemos o resultado parcial

$$\begin{aligned}
S_{if}^{(1)}(g) = & \frac{ie^2}{2(2\pi)^3} \int d^4x d^4y \times \\
& \times \left[ \frac{\varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f)}{\sqrt{2\omega_f}} \frac{\varepsilon_i^\nu(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega_i}} e^{-ik_i y} e^{ik_f x} + \frac{\varepsilon_f^\nu(\mathbf{k}_f)}{\sqrt{2\omega_f}} \frac{\varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega_i}} e^{-ik_i x} e^{ik_f y} \right] \times \\
& \times \left[ -\frac{e^{-ip_i x}}{\sqrt{2E_i}} \frac{e^{ip_f y}}{\sqrt{2E_f}} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x-y) - ip_{i\mu} \frac{e^{ip_f y}}{\sqrt{2E_f}} \frac{e^{-ip_i x}}{\sqrt{2E_i}} \partial_\nu D_m^F(x-y) \right. \\
& - ip_{f\nu} \frac{e^{ip_f y}}{\sqrt{2E_f}} \frac{e^{-ip_i x}}{\sqrt{2E_i}} \partial_\mu D_m^F(x-y) + p_{f\nu} p_{i\mu} \frac{e^{ip_f y}}{\sqrt{2E_f}} \frac{e^{-ip_i x}}{\sqrt{2E_i}} D_m^F(x-y) \\
& - \frac{e^{-ip_i y}}{\sqrt{2E_i}} \frac{e^{ip_f x}}{\sqrt{2E_f}} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x-y) + ip_{f\mu} \frac{e^{ip_f x}}{\sqrt{2E_f}} \frac{e^{-ip_i y}}{\sqrt{2E_i}} \partial_\nu D_m^F(x-y) \\
& \left. + ip_{i\nu} \frac{e^{ip_f x}}{\sqrt{2E_f}} \frac{e^{-ip_i y}}{\sqrt{2E_i}} \partial_\mu D_m^F(x-y) + p_{f\mu} p_{i\nu} \frac{e^{ip_f x}}{\sqrt{2E_f}} \frac{e^{-ip_i y}}{\sqrt{2E_i}} D_m^F(x-y) \right]. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Agora, vamos impor duas condições físicas. Usando a invariância do grupo de Lorentz, escolhemos um referencial onde

$$p_i \varepsilon_i = 0, \quad p_i \varepsilon_f = 0, \tag{4.52}$$

também, levando em conta que os fótons têm polarização transversal, y por tanto

$$\varepsilon_i k_i = 0, \quad \varepsilon_f k_f = 0. \tag{4.53}$$

Desenvolvendo o resultado (4.51) com as condições (4.52) e (4.53), obtemos:

$$\begin{aligned}
S_{if}^{\prime(1)}(g) = & \frac{ie^2}{2(2\pi)^6} \times \\
& \left[ -\frac{\varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\nu(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_i}\sqrt{2E_f}\sqrt{2\omega_f}\sqrt{2\omega_i}} \int d^4x d^4y e^{i(k_f-p_i)x} e^{i(p_f-k_i)y} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x-y) \right. \\
& -\frac{\varepsilon_f^\nu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_i}\sqrt{2E_f}\sqrt{2\omega_f}\sqrt{2\omega_i}} \int d^4x d^4y e^{i(p_f-k_i)x} e^{i(k_f-p_i)y} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x-y) \\
& -\frac{\varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\nu(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_i}\sqrt{2E_f}\sqrt{2\omega_f}\sqrt{2\omega_i}} \int d^4x d^4y e^{i(k_f+p_f)x} e^{i(-k_i-p_i)y} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x-y) \\
& -\frac{\varepsilon_f^\nu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_i}\sqrt{2E_f}\sqrt{2\omega_f}\sqrt{2\omega_i}} \int d^4x d^4y e^{i(-k_i-p_i)x} e^{i(k_f+p_f)y} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x-y) \quad (4.54) \\
& -\frac{ip_{f\nu}\varepsilon_i^\nu(\mathbf{k}_i)\varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f)}{\sqrt{2E_f}\sqrt{2E_i}\sqrt{2\omega_f}\sqrt{2\omega_i}} \int d^4x d^4y e^{i(k_f-p_i)x} e^{i(-k_i+p_f)y} \partial_\mu D_m^F(x-y) \\
& +\frac{ip_{f\mu}\varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}_i)\varepsilon_f^\nu(\mathbf{k}_f)}{\sqrt{2E_f}\sqrt{2E_i}\sqrt{2\omega_f}\sqrt{2\omega_i}} \int d^4x d^4y e^{i(-k_i+p_f)x} e^{i(+k_f-p_i)y} \partial_\nu D_m^F(x-y) \\
& +\frac{ip_{f\mu}\varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\nu(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_f}\sqrt{2E_i}\sqrt{2\omega_f}\sqrt{2\omega_i}} \int d^4x d^4y e^{i(k_f+p_f)x} e^{i(-k_i-p_i)y} \partial_\nu D_m^F(x-y) \\
& \left. -\frac{ip_{f\nu}\varepsilon_f^\nu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2E_f}\sqrt{2E_i}\sqrt{2\omega_f}\sqrt{2\omega_i}} \int d^4x d^4y e^{i(-k_i-p_i)x} e^{i(k_f+p_f)y} \partial_\mu D_m^F(x-y) \right].
\end{aligned}$$

Nas integrais (4.54) faremos a seguinte mudança de variáveis

$$x = r + \frac{u}{2} \quad y = r - \frac{u}{2} \quad r = \frac{x+y}{2} \quad u = x-y. \quad (4.55)$$

O resultado desse cálculo está no Apêndice (D.2). Substituindo esses resultados em (4.54), obtemos:

$$\begin{aligned}
S_{if}^{\prime(1)}(g) = & -\frac{ie^2(2\pi)^4}{2(2\pi)^6\sqrt{2E_i}\sqrt{2E_f}\sqrt{2\omega_f}\sqrt{2\omega_i}} \times [ \\
& \varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\nu(\mathbf{k}_i)(k_f - p_i)_\mu(k_f - p_i)_\nu \frac{\delta(k_f - p_i - (-p_f + k_i))}{m^2 - (\frac{k_f - p_i - p_f + k_i}{2})^2 - i0} \\
& + \varepsilon_f^\nu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}_i)(-k_f + p_i)_\mu(-k_f + p_i)_\nu \frac{\delta(p_f - k_i - (-k_f + p_i))}{m^2 - (\frac{p_f - k_i - k_f + p_i}{2})^2 - i0} \\
& + \varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\nu(\mathbf{k}_i)(k_i + p_i)_\mu(k_i + p_i)_\nu \frac{\delta(k_f + p_f - (+k_i + p_i))}{m^2 - (\frac{k_f + p_f + k_i + p_i}{2})^2 - i0} \\
& + \varepsilon_f^\nu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}_i)(-k_i - p_i)_\mu(-k_i - p_i)_\nu \frac{\delta(-k_i - p_i - (-k_f - p_f))}{m^2 - (\frac{-k_i - p_i - k_f - p_f}{2})^2 - i0} \\
& + p_{f\nu}\varepsilon_i^\nu(\mathbf{k}_i)\varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f)(k_f - p_i)_\mu \frac{\delta(k_f - p_i - (k_i - p_f))}{m^2 - (\frac{k_f - p_i + k_i - p_f}{2})^2 - i0} \\
& + p_{f\mu}\varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}_i)\varepsilon_f^\nu(\mathbf{k}_f)(-k_f + p_i)_\nu \frac{\delta(-k_i + p_f - (-k_f + p_i))}{m^2 - (\frac{-k_i + p_f - k_f + p_i}{2})^2 - i0} \\
& + p_{f\mu}\varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\nu(\mathbf{k}_i)(k_i + p_i)_\nu \frac{\delta(k_f + p_f - (k_i + p_i))}{m^2 - (\frac{k_f + p_f + k_i + p_i}{2})^2 - i0} \\
& + p_{f\nu}\varepsilon_f^\nu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_i^\mu(\mathbf{k}_i)(-k_i - p_i)_\mu \frac{\delta(-k_i - p_i - (-k_f - p_f))}{m^2 - (\frac{-k_i - p_i - k_f - p_f}{2})^2 - i0} ].
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Usando novamente as condições (4.52) e (4.53) em (4.56), obtemos a anulação de todos os termos e, portanto, sua contribuição é nula. Substituindo em (4.49), obtemos

$$S_{fi}^{(1)}(g) = ie^2 \int d^4x \langle \Phi_f | : A^\mu(x) A_\mu(x) : | \Phi_i \rangle \langle \Psi_f | : \phi^\dagger(x) \phi(x) : | \Psi_i \rangle g^2(x). \tag{4.57}$$

Novamente com ajuda dos resultados no Apêndice (D), obtemos

$$\begin{aligned}
S_{fi}^{(1)}(g) = & ie^2(2\pi)^{-2} \left[ \frac{2\varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_{i\mu}(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega_f}\sqrt{2\omega_i}\sqrt{2E_i}\sqrt{2E_f}} \right] [\delta(k_f - k_i + p_f - p_i)] \\
& \equiv M\delta(k_f - k_i + p_f - p_i),
\end{aligned} \tag{4.58}$$

onde

$$M = \frac{ie^2}{8\pi^2} \frac{\varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f)\varepsilon_{i\mu}(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{\omega_f}\sqrt{\omega_i}\sqrt{E_i}\sqrt{E_f}}. \quad (4.59)$$

O elemento de matriz  $S_{fi}^{(1)}(g)$  em (4.58) é uma distribuição e, por esse motivo, não é possível calcular  $|S_{fi}^{(1)}(g)|^2$  diretamente. Para obter tal cálculo temos que aplicar essa distribuição nos pacotes de onda como funções de prova. Ese processo é

$$S_{fi} = \int d^3p_1 d^3k_1 d^3p_2 d^3k_2 \psi_f(p_2, k_2) S_{if}(p_1, k_1, p_2, k_2) \varphi_1(p_1) \varphi_2(k_1). \quad (4.60)$$

A definição da probabilidade de transição  $P_{if}$  é

$$P_{if} \equiv |S_{if}|^2. \quad (4.61)$$

Substituindo (4.60) em (4.61)

$$P_{if} = \int d^3p_1 d^3k_1 d^3p_2 d^3k_2 \psi_f(p_2, k_2) S_{if}(p_1, k_1, p_2, k_2) \varphi_1(p_1) \varphi_2(k_1) \times \\ \int d^3p'_1 d^3k'_1 d^3p'_2 d^3k'_2 \psi_f^*(p'_2, k'_2) S_{if}^*(p'_1, k'_1, p'_2, k'_2) \varphi_1^*(p'_1) \varphi_2^*(k'_1) \quad (4.62)$$

e somando em todos os estados finais possíveis

$$\begin{aligned} \sum_f P_{if} &= \int d^3p'_1 d^3k'_1 d^3p_1 d^3k_1 d^3p_2 d^3k_2 S_{if}(p_1, k_1, p_2, k_2) \varphi_1(p_1) \varphi_2(k_1) \times \\ &\quad \int d^3p'_2 d^3k'_2 \sum_f \psi_f^*(p'_2, k'_2) \psi_f(p_2, k_2) S_{if}^*(p'_1, k'_1, p'_2, k'_2) \varphi_1^*(p'_1) \varphi_2^*(k'_1) \\ &= \int d^3p'_1 d^3k'_1 d^3p_1 d^3k_1 d^3p_2 d^3k_2 S_{if}(p_1, k_1, p_2, k_2) \varphi_1^*(p'_1) \varphi_2^*(k'_1) \varphi_1(p_1) \varphi_2(k_1) \times \\ &\quad \int d^3p'_2 d^3k'_2 \delta(p_2 - p'_2) \delta(k_2 - k'_2) S_{if}^*(p'_1, k'_1, p'_2, k'_2) \\ &= \int d^3p'_1 d^3k'_1 d^3p_1 d^3k_1 d^3p_2 d^3k_2 S_{if}(p_1, k_1, p_2, k_2) S_{if}^*(p'_1, k'_1, p_2, k_2) \times \\ &\quad \varphi_1^*(p'_1) \varphi_2^*(k'_1) \varphi_1(p_1) \varphi_2(k_1), \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned}
\sum_f P_{if} = & \int d^3 p'_1 d^3 k'_1 d^3 p_1 d^3 k_1 d^3 p_2 d^3 k_2 \times \\
& \times \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) M(p_1, k_1, p_2, k_2) \times \\
& \times \delta(p'_1 + k'_1 - p_2 - k_2) M^*(p'_1, k'_1, p_2, k_2) \times \\
& \times \varphi_1^*(p'_1) \varphi_2^*(k'_1) \varphi_1(p_1) \varphi_2(k_1).
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Levando em conta que as funções de onda  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  se concentram em  $\mathbf{p}_i$  e  $\mathbf{k}_i$ , respectivamente, em comparação ao valor da variação de  $M$ , a equação (4.64) é reduzida em

$$\begin{aligned}
\sum_f P_{if} = & \int d^3 p_2 d^3 k_2 |M(p_i, k_i, p_2, k_2)|^2 \times \\
& \times \int d^3 p_1 d^3 k_1 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \varphi_1(p_1) \varphi_2(k_1) \times \\
& \times \int d^3 p'_1 d^3 k'_1 \delta(p'_1 + k'_1 - p_2 - k_2) \varphi_1^*(p'_1) \varphi_2^*(k'_1),
\end{aligned} \tag{4.65}$$

onde as integrais nas variables  $p_1$ ,  $p'_1$ ,  $k_1$  y  $k'_1$  dependem dos estados iniciais. Agora, substituindo as funções delta por a representação integral

$$\delta(p) = (2\pi)^{-4} \int d^4 x e^{\pm i p x}, \tag{4.66}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_f P_{if} = & \int d^3 p_2 d^3 k_2 |M(p_i, k_i, p_2, k_2)|^2 \times \\
& \times [(2\pi)^{-8} \int d^3 p_1 d^3 k_1 \varphi_1(p_1) \varphi_2(k_1) \int d^4 x_1 e^{-i(p_1 + k_1 - (p_2 + k_2))x_1} \times \\
& \times \int d^3 p'_1 d^3 k'_1 \varphi_1^*(p'_1) \varphi_2^*(k'_1) \int d^4 x_2 e^{i(p'_1 + k'_1 - (p_2 + k_2))x_2}] \\
& \equiv \int d^3 p_2 d^3 k_2 |M(p_i, k_i, p_2, k_2)|^2 F(p_2 + k_2),
\end{aligned} \tag{4.67}$$

onde

$$F(p) = (2\pi)^{-8} \int d^3p_1 d^3k_1 \varphi_1(p_1) \varphi_2(k_1) \int d^4x_1 e^{-i(p_1+k_1-p)x_1} \times \\ \times \int d^3p'_1 d^3k'_1 \varphi_1^*(p'_1) \varphi_2^*(k'_1) \int d^4x_2 e^{i(p'_1+k'_1-p)x_2}. \quad (4.68)$$

Reduziremos a igualdade (4.68). Seja

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p e^{-ipx} \varphi(\mathbf{p}), \quad (4.69)$$

a função de onda livre no espaço de configurações. Substituindo (4.69) em (4.68)

$$F(p) = (2\pi)^{-2} \int d^4x_1 d^4x_2 \tilde{\varphi}_1(x_1) \tilde{\varphi}_2(x_1) \tilde{\varphi}_1^*(x_2) \tilde{\varphi}_2^*(x_2) e^{ip(x_1-x_2)}. \quad (4.70)$$

A função positiva  $F(p)$  se concentra nas vizinhanças de  $p = p_2 + k_2 = p_1 + k_1 \approx p_i + k_i$  e é normalizada segundo:

$$\int d^4x F(p) = (2\pi)^2 \int d^4x |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2. \quad (4.71)$$

Na experimentação, o mais importante é concentrar os pacotes em momentums  $p_i$  e  $k_i$ . Por esse motivo (4.70) pode ser escrito do seguinte modo

$$F(p) = \delta(p - p_i - k_i) (2\pi)^2 \int d^4x |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2. \quad (4.72)$$

Substituindo (4.72) em (4.67), obtemos

$$\sum_f P_{if} = \int d^3p_2 d^3k_2 |M(p_i, k_i, p_2, k_2)|^2 \delta(p_2 + k_2 - p_i - k_i) (2\pi)^2 \int d^4x |\tilde{\varphi}_1(x)|^2 |\tilde{\varphi}_2(x)|^2. \quad (4.73)$$

Tomando em consideração o sistema de referência de alvo fixo, a função de onda  $\tilde{\varphi}_1(x)$  é deslocada a velocidade  $\mathbf{v}$  e a função  $\tilde{\varphi}_2(x)$  é mantida em repouso

$$\tilde{\varphi}_1(t, \mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}t), \quad (4.74)$$

$$\tilde{\varphi}_2(t, \mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}). \quad (4.75)$$

Além disso, no processo de espalhamento não temos só uma partícula incidente, pelo contrário, temos um feixe cilíndrico de raio  $R$  paralelo a  $\mathbf{v}$ . Por esse motivo, tomaremos uma média nesse cilindro

$$\begin{aligned} \overline{\sum_f P_{if}(R)} &= \frac{(2\pi)^2}{\pi R^2} \int d^3 p_2 d^3 k_2 |M(p_i, k_i, p_2, k_2)|^2 \delta(p_2 + k_2 - p_i - k_i) \\ &\quad \int_{|\mathbf{x}_{1\perp}| \leq R} d^2 x_{1\perp} \int d^4 x |f_1(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}t)|^2 |f_2(\mathbf{x})|^2. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Na igualdade (4.76) deslocaremos a variável  $t$  da terceira à segunda integral

$$\begin{aligned} \overline{\sum_f P_{if}(R)} &= \frac{(2\pi)^2}{\pi R^2} \int d^3 p_2 d^3 k_2 |M(p_i, k_i, p_2, k_2)|^2 \delta(p_2 + k_2 - p_i - k_i) \\ &\quad \int_{|\mathbf{x}_{1\perp}| \leq R} d^2 x_{1\perp} \int dt \int d^3 x |f_1(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}t)|^2 |f_2(\mathbf{x})|^2 \\ &= \frac{(2\pi)^2}{\pi R^2} \int d^3 p_2 d^3 k_2 |M(p_i, k_i, p_2, k_2)|^2 \delta(p_2 + k_2 - p_i - k_i) \\ &\quad \frac{1}{|\mathbf{v}|} \int d^3 x_1 \int d^3 x |f_1(\mathbf{x} + \mathbf{x}_1)|^2 |f_2(\mathbf{x})|^2 \\ \overline{\sum_f P_{if}(R)} &= \frac{(2\pi)^2}{\pi R^2 |\mathbf{v}|} \int d^3 p_2 d^3 k_2 |M(p_i, k_i, p_2, k_2)|^2 \delta(p_2 + k_2 - p_i - k_i). \end{aligned} \quad (4.77)$$

No caso particular do espalhamento Compton, a partícula incidente é um fóton com velocidade  $v = c = 1$ . As variáveis  $p_2$  e  $k_2$  pertencem aos estados finais. Com isso obtemos

$$\overline{\sum_f P_{if}(R)} = \frac{(2\pi)^2}{\pi R^2} \int d^3 p_f d^3 k_f |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2 \delta(p_f + k_f - p_i - k_i). \quad (4.78)$$

A definição da seção de choque é

$$\sigma_{\text{lab}} \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \pi R^2 \overline{\sum_f P_{if}(R)}. \quad (4.79)$$

Substituindo (4.78) em (4.79)

$$\sigma_{\text{lab}} = (2\pi)^2 \int d^3p_f d^3k_f |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2 \delta(p_f + k_f - p_i - k_i). \quad (4.80)$$

Depois do cálculo

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{lab}} &= (2\pi)^2 \int d^3p_f d^3k_f |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2 \delta(p_f + k_f - p_i - k_i) \\ &= (2\pi)^2 \int d^3p_f d^3k_f \delta(p_f + k_f - p_i - k_i) |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2 \\ &= (2\pi)^2 \int d^3p_f d^3k_f \delta(E_f + \omega_f - E_i - \omega_i) \delta^3(\mathbf{p}_f + \mathbf{k}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{k}_i) |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2 \\ &= (2\pi)^2 \int d^3k_f \delta(E_f + \omega_f - E_i - \omega_i) |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2 \\ &= (2\pi)^2 \int \mathbf{k}_f^2 d\mathbf{k}_f d\Omega \delta(g(\omega_f)) |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2 \\ &= (2\pi)^2 \int \omega_f^2 d\omega_f d\Omega \delta(g(\omega_f)) |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Da última igualdade em (4.81), obtemos a seção de choque diferencial  $d\sigma_{\text{lab}}/d\Omega$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{lab}}}{d\Omega} &= (2\pi)^2 \int \omega_f^2 d\omega_f \delta(g(\omega_f)) |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2 \\ &= (2\pi)^2 \frac{\omega_f^2}{|g'(\omega_f)|} |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2 \\ &= (2\pi)^2 \frac{\omega_f^2}{\left[ \frac{m\omega_i}{E_f \omega_f} \right]} |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2 \\ &= (2\pi)^2 \frac{\omega_f^3 E_f}{m\omega_i} |M(p_i, k_i, p_f, k_f)|^2. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Substituindo (4.59) em (4.82)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{lab}}}{d\Omega} &= \frac{e^4}{16\pi^2} \frac{\omega_f^2}{m^2 \omega_i^2} [\varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f) \varepsilon_{i\mu}(\mathbf{k}_i)]^2 \\ &= \frac{\alpha^2 \omega_f^2}{m^2 \omega_i^2} [\varepsilon_f^\mu(\mathbf{k}_f) \varepsilon_{i\mu}(\mathbf{k}_i)]^2. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Comparando com a referencia [10], o resultado coincide.

### 4.5.2 Espalhamento bóson-bóson.

O espalhamento a estudar é da forma

$$b(p_i) + b(q_i) \rightarrow b(p_f) + b(q_f). \quad (4.84)$$

Os estados iniciais e finais são

$$\begin{aligned} |i_{\text{moe}}\rangle &= |\Psi_i\rangle \otimes |\Phi_i\rangle \\ &= a^\dagger(\mathbf{p}_i) a^\dagger(\mathbf{q}_i) |0\rangle \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} |f_{\text{moe}}\rangle &= |\Psi_f\rangle \otimes |\Phi_f\rangle \\ &= a^\dagger(\mathbf{p}_f) a^\dagger(\mathbf{q}_f) |0\rangle \end{aligned} \quad (4.86)$$

Os elementos de matriz  $S_{fi}$  não nulos são os calculados com o termo  $T_2^{(2)}(x, y)$  (4.44)

$$S^{(2)}(g) = \frac{1}{2!} \int d^4y d^4x T_2^{(2)}(x, y) g(x) g(y). \quad (4.87)$$

Com (4.87) o elemento de matriz resulta

$$\begin{aligned} S'^{(2)}(g)_{if} &= \langle f | S'^{(2)}(g) | i \rangle \\ &= \frac{ie^2}{2} \int d^4x d^4y D_0^F(x - y) \times \\ &\quad [\langle 0 | a(\mathbf{p}_f) a(\mathbf{q}_f) : \phi^\dagger(x) \partial^\nu \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : a^\dagger(\mathbf{p}_i) a^\dagger(\mathbf{q}_i) | 0 \rangle \\ &\quad - \langle 0 | a(\mathbf{p}_f) a(\mathbf{q}_f) : \partial^\nu \phi^\dagger(x) \phi(x) \phi^\dagger(y) \partial_\nu \phi(y) : a^\dagger(\mathbf{p}_i) a^\dagger(\mathbf{q}_i) | 0 \rangle \\ &\quad - \langle 0 | a(\mathbf{p}_f) a(\mathbf{q}_f) : \phi^\dagger(x) \partial^\nu \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : a^\dagger(\mathbf{p}_i) a^\dagger(\mathbf{q}_i) | 0 \rangle \\ &\quad + \langle 0 | a(\mathbf{p}_f) a(\mathbf{q}_f) : \partial^\nu \phi^\dagger(x) \phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y) \phi(y) : a^\dagger(\mathbf{p}_i) a^\dagger(\mathbf{q}_i) | 0 \rangle]. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Novamente com ajuda do Apêndice (D), obtemos

$$\begin{aligned}
S'^{(2)}(g)_{if} &= \langle f | S'^{(2)}(g) | i \rangle \\
&= \frac{-ie^2}{2(2\pi)^6 4\sqrt{E_{p_i} E_{q_i} E_{p_f} E_{q_f}}} \int d^4x d^4y D_0^F(x-y) \times \\
&\quad [(p_i q_i) e^{ip_f x - iq_i x} e^{iq_f y - ip_i y} + (q_i p_i) e^{ip_f x - ip_i x} e^{iq_f y - iq_i y} \\
&\quad + (p_i q_i) e^{iq_f x - iq_i x} e^{ip_f y - ip_i y} + (q_i p_i) e^{iq_f x - ip_i x} e^{ip_f y - iq_i y} \\
&\quad + (p_f p_i) e^{ip_f x - iq_i x} e^{iq_f y - ip_i y} + (p_f q_i) e^{ip_f x - ip_i x} e^{iq_f y - iq_i y} \\
&\quad + (q_f p_i) e^{iq_f x - iq_i x} e^{ip_f y - ip_i y} + (q_f q_i) e^{iq_f x - ip_i x} e^{ip_f y - iq_i y} \\
&\quad + (q_i q_f) e^{ip_f x - iq_i x} e^{iq_f y - ip_i y} + (q_f p_i) e^{ip_f x - ip_i x} e^{iq_f y - iq_i y} \\
&\quad + (p_f q_i) e^{iq_f x - iq_i x} e^{ip_f y - ip_i y} + (p_f p_i) e^{iq_f x - ip_i x} e^{ip_f y - iq_i y} \\
&\quad + (p_f q_f) e^{ip_f x - iq_i x} e^{iq_f y - ip_i y} + (p_f q_f) e^{ip_f x - ip_i x} e^{iq_f y - iq_i y} \\
&\quad + (q_f p_f) e^{iq_f x - iq_i x} e^{ip_f y - ip_i y} + (q_f p_f) e^{iq_f x - ip_i x} e^{ip_f y - iq_i y}].
\end{aligned} \tag{4.89}$$

As integrais em (4.89) são calculadas com o método do Apêndice (D.2). Substituindo as integrais e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}
S'_{if}{}^{(2)}(g) &= \delta(p_f - q_i + q_f - p_i) \frac{-ie^2}{16\pi^2 \sqrt{E_{p_i} E_{q_i} E_{p_f} E_{q_f}}} \times \\
&\quad \times \left| \frac{(p_i q_i) + (q_f q_i) + (p_f q_f) + (p_f p_i)}{(q_f - p_i)^2} + \frac{(q_i p_i) + (p_f q_i) + (q_f p_i) + (p_f q_f)}{(p_f - p_i)^2} \right|^2 \\
&\equiv \delta(p_f - q_i + q_f - p_i) M,
\end{aligned} \tag{4.90}$$

onde

$$\begin{aligned}
M &= \frac{-ie^2}{16\pi^2 \sqrt{E_{p_i} E_{q_i} E_{p_f} E_{q_f}}} \times \\
&\quad \times \left| \frac{(p_i q_i) + (q_f q_i) + (p_f q_f) + (p_f p_i)}{(q_f - p_i)^2} + \frac{(q_i p_i) + (p_f q_i) + (q_f p_i) + (p_f q_f)}{(p_f - p_i)^2} \right|^2.
\end{aligned}$$

O cálculo da probabilidade de transição, no referencial de alvo fixo, é o mesmo que no espalhamento Compton. Substituindo o resultado (4.77) na definição da seção de choque (4.79), obtemos

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{lab}} &= \frac{(2\pi)^2}{|\mathbf{v}|} \int d^3p_f d^3q_f |M(p_i, q_i, p_f, q_f)|^2 \delta(p_f + q_f - p_i - q_i) \\
&= (2\pi)^2 \frac{E_{q_i}}{|q_i|} \int d^3p_f d^3q_f |M(p_i, q_i, p_f, q_f)|^2 \delta(p_f + q_f - p_i - q_i).
\end{aligned} \tag{4.91}$$

O resultado (4.91) pode ser escrito como invariante de Lorentz

$$\sigma = (2\pi)^2 \frac{E_{q_i} E_{p_i}}{\sqrt{(p_i q_i)^2 - m^4}} \int d^3p_f d^3q_f |M(p_i, q_i, p_f, q_f)|^2 \delta(p_f + q_f - p_i - q_i). \tag{4.92}$$

Para mudar ao sistema de centro de massa substituímos  $\mathbf{q}_i = -\mathbf{p}_i$  e  $\mathbf{q}_f = -\mathbf{p}_f$

$$\begin{aligned}
\sigma_{c.m.} &= (2\pi)^2 \frac{E}{2\sqrt{E^2 - m^2}} \int d^3p_f d^3q_f |M(p_i, q_i, p_f, q_f)|^2 \delta^3(\mathbf{p}_f + \mathbf{q}_f - \mathbf{p}_i - \mathbf{q}_i) \times \\
&\quad \times \delta(2E_f - 2E) \\
&= (2\pi)^2 \frac{E}{2\sqrt{E^2 - m^2}} \int d^3q_f |M(p_i, q_i, p_f, q_f)|^2 \delta(2E_f - 2E) \\
&= (2\pi)^2 \frac{E}{4\sqrt{E^2 - m^2}} \int |\mathbf{q}_f|^2 d|\mathbf{q}_f| d\Omega |M(p_i, q_i, p_f, q_f)|^2 \delta(E_f - E) \\
&= (2\pi)^2 \frac{E(4\pi)}{4\sqrt{E^2 - m^2}} \int |\mathbf{q}_f| E_f dE_f d\Omega |M(p_i, q_i, p_f, q_f)|^2 \delta(E_f - E).
\end{aligned} \tag{4.93}$$

Da última igualdade de (4.93), obtemos a seção de choque diferencial

$$\frac{d\sigma_{c.m.}}{d\Omega} = (2\pi)^2 \frac{E^2}{4} |M|^2 = \frac{\alpha^2}{16E^2} |M'|^2, \tag{4.94}$$

onde

$$|M'|^2 = 4 \left| \frac{(p_i q_i) + (q_f q_i)}{(q_f - p_i)^2} + \frac{(q_i p_i) + (p_f q_i)}{(p_f - p_i)^2} \right|^2.$$

Podemos usar as variáveis de Mandelstan para reescrever (4.94).

$$s = (p_i + q_i)^2 = (p_f + q_f)^2, \quad \frac{s}{2} - m^2 = p_i q_i = p_f q_f, \tag{4.95}$$

$$t = (p_i - p_f)^2 = (q_i - q_f)^2, \quad m^2 - \frac{t}{2} = p_i p_f = q_i q_f, \quad (4.96)$$

$$u = (p_i - q_f)^2 = (q_i - p_f)^2, \quad m^2 - \frac{u}{2} = p_i q_f = q_i p_f, \quad (4.97)$$

Substituindo em  $|M|^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} |M|^2 &= 4 \left| \frac{(p_i q_i) + (q_f q_i)}{(q_f - p_i)^2} + \frac{(q_i p_i) + (p_f q_i)}{(p_f - p_i)^2} \right|^2, \\ |M|^2 &= 4 \left| \frac{(\frac{s}{2} - m^2) + (m^2 - \frac{t}{2})}{u} + \frac{(\frac{s}{2} - m^2) + (m^2 - \frac{u}{2})}{t} \right|^2, \\ |M|^2 &= \left| \frac{s-t}{u} + \frac{s-u}{t} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Substituindo (4.98) em (4.94), obtemos

$$\frac{d\sigma_{c.m.}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} \left| \frac{s-t}{u} + \frac{s-u}{t} \right|^2, \quad (4.99)$$

como o espalhamento é de 4 bósons idênticos, temos

$$p_i = (E, \mathbf{p}), \quad q_i = (E, -\mathbf{p}), \quad p_f = (E, \mathbf{q}), \quad q_f = (E, -\mathbf{q}). \quad (4.100)$$

Substituindo (4.100) em (4.99), obtemos

$$\frac{d\sigma_{c.m.}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(2E^2 - m^2)^2}{4E^2(E^2 - m^2)^2} \left| \frac{2}{\sin^2(\theta)} - \frac{E^2 - m^2}{2E^2 - m^2} \right|^2, \quad (4.101)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de espalhamento. No limite ultra-relativista  $m/E \rightarrow 0$  a seção de choque é

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{c.m.}}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2(2 - m^2/E^2)^2}{4E^2(1 - m^2/E^2)^2} \left| \frac{2}{\sin^2(\theta)} - \frac{E^2 - m^2}{2E^2 - m^2} \right|^2, \\ \frac{d\sigma_{c.m.}}{d\Omega} \Big|_{UR} &= \frac{\alpha^2}{E^2} \left| \frac{2}{\sin^2(\theta)} - \frac{1}{2} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.102)$$

No limite não relativista  $E^2 \approx m^2$ ,  $v^2 = (E^2 - m^2)/E^2$  o resultado é

$$\frac{d\sigma_{c.m.}}{d\Omega} = \frac{\alpha^2(2 - m^2/E^2)^2}{4E^2(1 - m^2/E^2)^2} \left| \frac{2}{\sin^2(\theta)} - \frac{E^2 - m^2}{2E^2 - m^2} \right|^2,$$

$$\left. \frac{d\sigma_{c.m.}}{d\Omega} \right|_{NR} = \left( \frac{\alpha}{m} \right)^2 \frac{1}{v^4 \sin^4(\theta)}. \quad (4.103)$$

O resultado (4.102) é o mesmo resultado que se obtém para férmions. No caso de (4.103) temos um termo a menos comparado com o caso de férmions, tal termo representa a contribuição dos spines dos férmions.

# Capítulo 5

## Correções Radiativas

A polarização do vácuo em sQED é calculada usualmente mediante as regras de Feynman. Tais regras exigem que seja adicionado, desde o início, o segundo termo contraído, para depois de um processo de regularização ser obtido o resultado final finito.

Na abordagem TPC, as regras de Feynman não são usadas no processo de divisão de distribuições causais. Portanto, o resultado final finito se obtém diretamente da teoria sem usar grafos. Neste capítulo, aplicaremos a abordagem TPC no cálculo da polarização do vácuo.

### 5.1 Polarização do vácuo

A polarização do vácuo é descrita pelo termo  $D_2^{(3)}$  em (4.16). Tal termo pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} D_2^{(3)}(x, y) &= 2e^2 : A^\mu(x) A^\nu(y) : \times \\ &\quad [F_{\mu\nu}(z) - F_{\mu\nu}(-z) + G_{\mu\nu}(-z) - G_{\mu\nu}(z)] \\ &\equiv: A^\mu(x) A^\nu(y) : D_{\mu\nu}(z), \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde

$$z = x - y, \tag{5.2}$$

$$F_{\mu\nu}(x-y) = (\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y)(\partial_\mu D_m^{(+)})(x-y), \quad (5.3)$$

$$G_{\mu\nu}(x-y) = D_m^{(+)}(x-y)(\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x-y), \quad (5.4)$$

$$D_{\mu\nu}(z) = 2e^2[F_{\mu\nu}(z) - F_{\mu\nu}(-z) + G_{\mu\nu}(-z) - G_{\mu\nu}(z)]. \quad (5.5)$$

O processo de divisão será feito no espaço de momentos e, por conseguinte, é necessário calcular as transformadas de fourier dos termos  $F_{\mu\nu}(x)$  e  $G_{\mu\nu}(x)$  para logo calcular  $\hat{D}_{\mu\nu}(p)$ . Tais transformadas são feitas no Apêndice E num referencial de Lorentz onde  $p = (E, \mathbf{0})$ .

Num referencial geral, temos que  $\hat{D}_{\mu\nu}(p)$  resulta no seguinte

$$\hat{D}_{\mu\nu}(p) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \left( \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - g_{\mu\nu} \right) \hat{d}(p), \quad (5.6)$$

onde

$$\hat{d}(p) = \frac{\pi p^2}{6} \left( 1 - \frac{4m^2}{p^2} \right)^{3/2} \Theta(p^2 - 4m^2) \text{sgn}(p^0). \quad (5.7)$$

No processo de divisão é suficiente particionar  $\hat{d}(p)$  devido à natureza tensorial de  $\hat{D}_{\mu\nu}(p)$ .

Calculemos, então, o grau de singularidade  $\omega$  para  $\hat{d}(p)$  a ser usado na construção de  $\hat{r}_0(p)$  segundo (3.118). De (5.7), obtemos que  $\hat{d}(\frac{p}{\eta})$  é:

$$\hat{d}\left(\frac{p}{\eta}\right) = \frac{\pi p^2}{\eta^2 6} \left( 1 - \frac{4m^2 \eta^2}{p^2} \right)^{3/2} \Theta\left(\frac{p^2}{\eta^2} - 4m^2\right) \text{sgn}(p^0). \quad (5.8)$$

Agora, multiplicando (5.8) por  $\rho(\eta) = \eta^2$  e fazendo o limite para  $\eta \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \rho(\eta) \hat{d}\left(\frac{p}{\eta}\right) = \frac{\pi p^2}{6} \Theta(p^2) \text{sgn}(p^0). \quad (5.9)$$

A expressão, não nula, (5.9) implica que a função de contagem de potência  $\rho(\eta)$  é a correta para obter o grau de singularidade  $\omega$ . Usando (3.69), notamos que o grau de singularidade resulta em

$$\omega \left[ \hat{d}(p) \right] = 2 \quad (5.10)$$

Agora, trabalhando com a solução central (3.117) num referencial de Lorentz onde  $p = (p^0, \mathbf{0})$

$$\begin{aligned} \hat{r}(p^0) &= \frac{i}{(2\pi)} (p^0)^3 \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \left[ \frac{1}{(k^0 - i0)^3 (p^0 - k^0 + i0)} \right] \times \\ &\quad \left[ \frac{\pi k^{02}}{6} \left( 1 - \frac{4m^2}{k^{02}} \right)^{3/2} \Theta(k^{02} - 4m^2) \text{sgn}(k^0) \right] \\ &= \frac{i}{(2\pi)} (p^0)^3 \int_0^{+\infty} dk^0 \left[ \frac{1}{(k^0 - i0)^3 (p^0 - k^0 + i0)} \right] \times \\ &\quad \left[ \frac{\pi k^{02}}{6} \left( 1 - \frac{4m^2}{k^{02}} \right)^{3/2} \Theta(k^{02} - 4m^2) \right] \\ &\quad - \frac{i}{(2\pi)} (p^0)^3 \int_{-\infty}^0 dk^0 \left[ \frac{1}{(k^0 - i0)^3 (p^0 - k^0 + i0)} \right] \times \\ &\quad \left[ \frac{\pi k^{02}}{6} \left( 1 - \frac{4m^2}{k^{02}} \right)^{3/2} \Theta(k^{02} - 4m^2) \right] \\ &= \frac{i}{12} (p^0)^3 \int_0^{+\infty} dk^0 \left[ \frac{1}{(k^0 - i0)^3 (p^0 - k^0 + i0)} \right] \times \\ &\quad \left[ k^{02} \left( 1 - \frac{4m^2}{k^{02}} \right)^{3/2} \Theta(k^{02} - 4m^2) \right] \\ &\quad - \frac{i}{12} (p^0)^3 \int_0^{+\infty} dk^0 \left[ \frac{1}{(-k^0 - i0)^3 (p^0 + k^0 + i0)} \right] \times \\ &\quad \left[ k^{02} \left( 1 - \frac{4m^2}{k^{02}} \right)^{3/2} \Theta(k^{02} - 4m^2) \right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

introduzindo a mudança de variáveis  $k^{02} \rightarrow s$

$$\begin{aligned}
\hat{r}(p^0) &= \frac{i}{12}(p^0)^3 \int_0^{+\infty} dk^0 \left[ \frac{1}{k^0(p^0 - k^0 + i0)} \right] \times \\
&\quad \left[ \left( 1 - \frac{4m^2}{k^{02}} \right)^{3/2} \Theta(k^{02} - 4m^2) \right] \\
&\quad - \frac{i}{12}(p^0)^3 \int_0^{+\infty} dk^0 \left[ \frac{1}{-k^0(p^0 + k^0 + i0)} \right] \times \\
&\quad \left[ \left( 1 - \frac{4m^2}{k^{02}} \right)^{3/2} \Theta(k^{02} - 4m^2) \right] \\
&= \frac{i}{24}(p^0)^3 \int_{4m^2}^{+\infty} ds \left[ \frac{1}{s(p^0 - k^0 + i0)} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} \\
&\quad + \frac{i}{24}(p^0)^3 \int_{4m^2}^{+\infty} ds \left[ \frac{1}{s(p^0 + k^0 + i0)} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} \\
&= \frac{i}{12}(p^0)^3 \int_{4m^2}^{+\infty} ds \left[ \frac{p^0}{s(p^{02} - s)} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} \\
&= \frac{i}{12}(p^0)^4 \int_{4m^2}^{+\infty} ds \left[ \frac{1}{s(p^{02} - s)} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Notemos que a solução (5.12) não é a mais geral. Então, usando (3.108) escrevemos a solução geral  $\tilde{r}(p)$

$$\tilde{r}(p^0) = \frac{i}{12}(p^0)^4 \int_{4m^2}^{+\infty} ds \left[ \frac{1}{s(p^{02} - s)} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} + C_0 + C_\alpha p^\alpha + C_2 p^2. \tag{5.13}$$

Usando a teoria de resíduos, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{r}(p^0) = \frac{i}{12}(p^0)^4 & \left[ P.V \int_{4m^2}^{+\infty} ds \left[ \frac{1}{s(p^{02} - s)} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} \right. \\ & \left. - i\pi \left[ \frac{1}{p^{02}} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{p^{02}} \right)^{3/2} \Theta(k^{02} - 4m^2) \text{sgn}(k^0) \right] + C_0 + C_\alpha p^\alpha + C_2 p^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

O termo  $\hat{r}'(p^0)$  pode ser obtido de (5.7)

$$\hat{r}'(p^0) = -\frac{\pi p^{02}}{6} \left( 1 - \frac{4m^2}{p^{02}} \right)^{3/2} \Theta(p^{02} - 4m^2) \Theta(-p^0). \quad (5.15)$$

A distribuição numérica  $\hat{t}(p^0)$  a ser usada no cálculo da distribuição de dois pontos  $T_2^{(3)}(x, y)$  é

$$\hat{t}(p^0) = \tilde{r}(p^0) - \hat{r}'(p^0). \quad (5.16)$$

Substituindo (5.15) e (5.14) em (5.16), obtemos

$$\begin{aligned} \hat{t}(p^0) &= \frac{i}{12}(p^0)^4 \left[ P.V \int_{4m^2}^{+\infty} ds \left[ \frac{1}{s(p^{02} - s)} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} \right. \\ &\quad \left. - i\pi \left[ \frac{1}{p^{02}} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{p^{02}} \right)^{3/2} \Theta(k^{02} - 4m^2) \right] \\ &\quad + C_0 + C_\alpha p^\alpha + C_2 p^2 \\ &= \frac{i}{12}(p^0)^4 \int_{4m^2}^{+\infty} ds \left[ \frac{1}{s(p^{02} - s)} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} + C_0 + C_\alpha p^\alpha + C_2 p^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Agora, voltando a (5.1), mas substituindo  $\hat{t}(p^0)$  em lugar de  $\hat{d}(p^0)$ , obtemos a distribuição de dois pontos  $T_2^{(3)}(x, y)$  que escreveremos da seguinte forma

$$T_2^{(3)}(x, y) = -i : A^\mu(x) \Pi_{\mu\nu}(x - y) A^\nu(y) :, \quad (5.18)$$

onde

$$\begin{aligned} -i\hat{\Pi}_{\mu\nu}(p) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \left( \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - g_{\mu\nu} \right) \hat{t}(p), \\ \hat{\Pi}_{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \left( \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - g_{\mu\nu} \right) \hat{\Pi}(p), \end{aligned} \quad (5.19)$$

por conseguinte

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(p) &= -ie^2 \hat{t}(p) \\ &= \frac{e^2 p^4}{12} \int_{4m^2}^{+\infty} ds \left[ \frac{1}{s(p^2 - s)} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} + C_0 + C_\alpha p^\alpha + C_2 p^2, \end{aligned} \quad (5.20)$$

em que as constantes  $C$  absorvem as demais constantes.

### 5.1.1 Inserções próprias da polarização do vácuo.

Com a finalidade de obter as constantes  $C_0$ ,  $C_\alpha$  e  $C_2$ ; determinaremos as inserções próprias da polarização do vácuo  $D_{\mu\nu}^{\text{Ins}}$  representado na figura (5.1).

$$D_{\mu\nu}^{\text{Ins}} = \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{circle} \text{---} \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{circle} \text{---} \text{circle} \text{---} \text{wavy line} + \dots$$

Figura 5.1: Inserções próprias da polarização do vácuo.

Segundo (4.44), o propagador de Feynman  $D_0^F(x_1 - x_2)$  modela um fóton interno em nível de árvore. Usando (5.18), a soma de loops na figura (5.1) é equivalente ao seguinte termo

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}^{Ins}(x_1 - x_2) &= g_{\mu\nu} D_0^F(x_1 - x_2) + \int dx'_1 dx'_2 D_0^F(x_1 - x'_1) \Pi_{\mu\nu}(x'_1 - x'_2) D_0^F(x'_2 - x_2) \\
&+ \int dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 D_0^F(x_1 - x'_1) \Pi_{\mu\nu}(x'_1 - x'_2) D_0^F(x'_2 - x'_3) \Pi_{\mu\nu}(x'_3 - x'_4) D_0^F(x'_4 - x_2) \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Na transformada de Fourier de  $D_{\mu\nu}^{tot}(x_1 - x_2)$ , as convoluções convertem-se em produtos

$$\begin{aligned}
\hat{D}_{\mu\nu}^{Ins}(p) &= g_{\mu\nu} \hat{D}_0^F(p) + \hat{D}_0^F(p) \tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) D_0^F(p) \\
&+ \hat{D}_0^F(p) \tilde{\Pi}_{\mu\alpha}(p) \hat{D}_0^F(p) \tilde{\Pi}_{\alpha\nu}(p) \hat{D}_0^F(p) + \dots \\
&\equiv \hat{D}_0^F(p) (g_{\mu\nu} + \tilde{\Pi}_\mu{}^\alpha \hat{D}_{\alpha\nu}),
\end{aligned} \tag{5.22}$$

onde

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = (2\pi)^4 \hat{\Pi}_{\mu\nu}(p). \tag{5.23}$$

De (5.22), podemos escrever

$$(g_\mu{}^\alpha - D_0^F \tilde{\Pi}_\mu{}^\alpha) \hat{D}_{\alpha\nu}^{tot} = g_{\mu\nu} D_0^F, \tag{5.24}$$

e também

$$\begin{aligned}
(\hat{D}_{tot}^{-1})_{\mu\nu} &= (\hat{D}_0^F)^{-1} g_{\mu\nu} - \tilde{\Pi}_{\mu\nu} \\
&= (2\pi)^2 \left[ \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) (\Pi(p) - p^2) - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} p^2 \right],
\end{aligned} \tag{5.25}$$

onde

$$\Pi(p) = (2\pi)^2 \hat{\Pi}(p). \tag{5.26}$$

Os dois fatores

$$P_1 = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad P_2 = \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \tag{5.27}$$

são operadores de projeção ortogonais que satisfazem a seguinte propriedade

$$P_j P_i = \delta_{ji} P_i, \quad j, k = 1, 2. \quad (5.28)$$

Invertendo a equação (5.25), obtemos

$$(2\pi)^2 \hat{D}_{\mu\nu}^{Ins}(p) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{\Pi - p^2 - i0} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \frac{1}{p^2 + i0}, \quad (5.29)$$

onde o segundo termo é longitudinal e, por conseguinte, anular-se-á frente a operadores de fótons transversais.

### 5.1.2 Determinação de $C_0$ , $C_\alpha$ e $C_2$ .

As constantes  $C_0$ ,  $C_\alpha$  e  $C_2$  que aparecem no processo de divisão não podem ser obtidas mediante causalidade. Nesta seção, calcularemos tais constantes usando outras condições.

#### Invariância por paridade

A invariância por paridade implica a invariância pela transformação de  $P : p \rightarrow -p$ . Aplicando tal transformação ao propagador completo do fóton (5.29) obtemos

$$(2\pi)^2 P \hat{D}_{\mu\nu}^{Ins}(p) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{\Pi' - p^2 - i0} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \frac{1}{p^2 + i0}, \quad (5.30)$$

onde

$$\Pi'(p) = \frac{e^2 p^4}{12} \int_{4m^2}^{+\infty} ds \left[ \frac{1}{s(p^2 - s)} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} + C_0 - C_\alpha p^\alpha + C_2 p^2. \quad (5.31)$$

Então, impondo a invariância de paridade ao propagador, é claro que

$$C_\alpha = 0. \quad (5.32)$$

### Massa do Fóton

A constante  $C_0$  introduz um pólo diferente de zero no propagador. Portanto, representa uma massa  $m^2 = C_0$  para o fóton:

$$(2\pi)^2 \hat{D}_{\mu\nu}^{Ins}(p) = \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{\Pi' + C_0 - p^2 - i0} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \frac{1}{p^2 + i0}, \quad (5.33)$$

onde

$$\Pi'(p) = \frac{e^2 p^4}{12} \int_{4m^2}^{+\infty} ds \left[ \frac{1}{s(p^2 - s)} \right] \left( 1 - \frac{4m^2}{s} \right)^{3/2} + C_2 p^2. \quad (5.34)$$

Impondo que tal massa seja nula, obtemos

$$C_0 = 0. \quad (5.35)$$

### Carga elétrica física.

Com a constante  $C_2$  o propagador completo do fóton pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} (2\pi)^2 \hat{D}_{\mu\nu}^{Ins}(p) &= \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{\Pi + C_2 p^2 - p^2 - i0} - \dots \\ &= \left( g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{Z}{\Pi'(p) - p^2 - i0} - \dots, \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde

$$Z = \frac{1}{1 - C_2}, \quad \Pi'(p) = Z^{-1} \Pi(p). \quad (5.37)$$

A constante  $Z$  é interpretada como uma renormalização da carga física. Impondo que a carga elétrica em TPC represente a carga física, obtemos

$$C_2 = 0. \quad (5.38)$$

Com as constantes  $C_0$ ,  $C_\alpha$  e  $C_2$  obtidas, normalizamos a distribuição de polarização do vácuo com as seguintes condições

$$\hat{\Pi}(0) = 0, \quad \left. \frac{\hat{\Pi}(p)}{p^2} \right|_{p^2=0} = 0. \quad (5.39)$$

# Capítulo 6

## Conclusões e perspectivas.

No trabalho apresentado, estudamos sQED via TPC para evitar as divergências UV que aparecem na teoria usual. Dessa forma procuramos mostrar as vantagens que a abordagem TPC apresenta em comparação ao programa de regularização/renormalização.

Em primeiro lugar, mostramos como a abordagem TPC põe em prática a teoria de distribuições ao definir corretamente a operação de multiplicação entre distribuições. Tal definição é usada no processo de divisão de uma distribuição causal, evitando assim a regularização/renormalização, uma vez que as divergências não aparecem.

A equivalência entre TPC e a abordagem usual é posta a prova determinando as seções de choque diferencial dos espalhamentos fóton-bóson e bóson-bóson. Nesse caminho, o ponto de partida foi definir o acoplamento entre o campo escalar complexo e o campo eletromagnético mediante a distribuição  $T_1(x)$ . Na abordagem usual, tal acoplamento está definido no grafo conhecido como “vértice”, o qual, por teoria não deveria ter termos de segunda ordem. No entanto, para o desenvolvimento de sQED é necessário impor um termo contraído de segunda ordem.

Em nível de árvore, o método TPC não precisa impor, desde o início, o vértice contraído  $e^2$ . Tal vértice aparece ao se impor a invariância de Gauge, de carga e de paridade na solução final do processo de divisão. Portanto, tal vértice é obtido naturalmente da própria teoria.

A maior diferença para com o método perturbativo usual, manifesta-se ao se analisar os processos com loops, e por esse motivo que ao final estudamos a polarização do vácuo. O método usual é somar o grafo usual e o grafo contraído para depois usar as regras de Feynman. Depois, o processo de regularização/renormalização elimina as divergências UV. Nesse processo, o termo contraído é novamente imposto. O método TPC substitui a grafologia e a regularização/renormalização mediante o processo de divisão de distribuições causais, conseguindo desse modo, e indiretamente, a polarização contraída.

Como perspectivas futuras, consideraremos o cálculo de auto-energia do campo bosónico, do vértice e as identidades de Ward-Takahashi-Fradkin.

Além disso, pretendemos de dar continuidade dentro da abordagem de TPC, mas com a equação de Duffin-Kemmer-Petiau [21] e o estudo da (re)normalizabilidade.

Finalmente, estenderemos o estudo para teoria generalizada do setor escalar DKP quando acoplada à Eletrodinâmica Quântica de Podolsky [22] [23] [24] [25].

# Apêndice A

## Grau de singularidade de $d(x) = D^a \delta(x)$ .

Seja a distribuição  $d(x) = D^a \delta(x)$  onde

$$D^a = \frac{\partial^{a_1+\dots+a_m}}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_m^{a_m}}, \quad |a| = a_1 + \dots + a_m. \quad (\text{A.1})$$

Vamos determinar o grau de singularidade  $\omega$  dessa distribuição. Para fazer isso, trabalharemos no espaço dos momentos. Então, a transformação de Fourier para  $d(x)$  é

$$\hat{d}(p) = (2\pi)^{-m/2} (ip)^a. \quad (\text{A.2})$$

Agora, calculemos  $\hat{d}(\frac{p}{\eta})$

$$\hat{d}(\frac{p}{\eta}) = (2\pi)^{-m/2} (ip)^a \eta^{-a}. \quad (\text{A.3})$$

Para que o limite (3.64) seja cumprido, é necessário que a função de contagem de potências  $\rho(\eta)$  seja

$$\rho(\eta) = \eta^a, \quad (\text{A.4})$$

e, Portanto

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\rho(\lambda\eta)}{\rho(\eta)} = \lambda^a. \quad (\text{A.5})$$

Segue-se desse limite

$$\omega [D^a \delta(x)] = a. \quad (\text{A.6})$$

# Apêndice B

## Campo escalar complexo.

### B.1 Derivadas.

$$\phi^{(+)} = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p^\nu) \mathbf{b}^\dagger(p^\nu) e^{ip_\nu x^\nu} \quad (\text{B.1})$$

$$\phi^{(-)} = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p^\nu) \mathbf{a}(p^\nu) e^{-ip_\nu x^\nu} \quad (\text{B.2})$$

$$\phi^{\dagger(+)} = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p^\nu) \mathbf{a}^\dagger(p^\nu) e^{ip_\nu x^\nu} \quad (\text{B.3})$$

$$\phi^{\dagger(-)} = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p^\nu) \mathbf{b}(p^\nu) e^{-ip_\nu x^\nu} \quad (\text{B.4})$$

$$\partial_\nu \phi^{(+)} = i(2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p^\nu) p^\nu \mathbf{b}^\dagger(p^\nu) e^{ip_\nu x^\nu} \quad (\text{B.5})$$

$$\partial_\nu \phi^{(-)} = -i(2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p^\nu) p^\nu \mathbf{a}(p^\nu) e^{-ip_\nu x^\nu} \quad (\text{B.6})$$

$$\partial_\nu \phi^{\dagger(+)} = i(2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p^\nu) p^\nu \mathbf{a}^\dagger(p^\nu) e^{ip_\nu x^\nu} \quad (\text{B.7})$$

$$\partial_\nu \phi^{\dagger(-)} = -i(2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p^\nu) p^\nu \mathbf{b}(p^\nu) e^{-ip_\nu x^\nu} \quad (\text{B.8})$$

## B.2 Contrações.

$$\overline{\phi(x)^\dagger \phi(y)} = \overline{\phi(x) \phi^\dagger(y)} = -iD_m^{(+)}(x-y) \quad (\text{B.9})$$

$$\overline{\phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y)} = \overline{\phi^\dagger(x) \partial_\nu \phi(y)} = i(\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) \quad (\text{B.10})$$

$$\partial_\nu \overline{\phi^\dagger(x) \phi(y)} = \partial_\nu \overline{\phi(x) \phi^\dagger(y)} = -i(\partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) \quad (\text{B.11})$$

$$\partial_\mu \overline{\phi(x) \partial_\nu \phi^\dagger(y)} = \partial_\mu \overline{\phi^\dagger(x) \partial_\nu \phi(y)} = i(\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(x-y) \quad (\text{B.12})$$

# Apêndice C

## Distribuição de Jordan-Pauli.

### C.1 Definição.

$$\begin{aligned} D_m(x) &\equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - \mu^2) \text{sgn}(p^0) e^{-ipx} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} (e^{-ipx} - e^{ipx}) \\ &= D_m^{(+)}(x) + D_m^{(-)}(x) \end{aligned} \tag{C.1}$$

### C.2 Soluções de frequência positiva e negativa.

$$\begin{aligned} D_m^{(+)}(x) &\equiv \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\mu(p) e^{-ipx} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} e^{-ipx} \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned} D_m^{(-)}(x) &\equiv \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d\mu(p) e^{ipx} \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} e^{ipx} \end{aligned} \tag{C.3}$$

### C.3 Derivadas da distribuição de Jordan-Pauli.

$$D_m^{(+)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} e^{-ip_\alpha x^\alpha}; \quad D_m^{(-)}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} e^{ip_\alpha x^\alpha}$$

$$\partial_\nu D_m^{(+)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} p_\nu e^{-ip_\alpha x^\alpha}; \quad \partial_\nu D_m^{(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} p_\nu e^{ip_\alpha x^\alpha}$$

$$\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)}(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} p_\mu p_\nu e^{-ip_\alpha x^\alpha}; \quad \partial_\mu \partial_\nu D_m^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} p_\mu p_\nu e^{ip_\alpha x^\alpha}$$

$$D_m(x) = D_m^{(+)}(x) + D_m^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} (e^{-ip_\alpha x^\alpha} - e^{ip_\alpha x^\alpha})$$

$$\partial_\nu D_m(x) = \partial_\nu [D_m^{(+)}(x) + D_m^{(-)}(x)] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} p_\nu (e^{-ip_\alpha x^\alpha} + e^{ip_\alpha x^\alpha})$$

$$\partial_\mu \partial_\nu D_m(x) = \partial_\mu \partial_\nu [D_m^{(+)}(x) + D_m^{(-)}(x)] = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} p_\mu p_\nu (-e^{-ip_\alpha x^\alpha} + e^{ip_\alpha x^\alpha})$$

### C.4 Transformadas de Fourier.

A transformada de fourier é definida

$$\hat{f}(p) = (2\pi)^{-2} \int d^4x f(x) e^{-ipx} \quad (\text{C.4})$$

portanto de (C.1), (C.2) e (C.3)

$$\hat{D}_m(p) = \frac{i}{2\pi} \delta(p^2 - \mu^2) \text{sgn}(p^0) \quad (\text{C.5})$$

$$\hat{D}_m^{(+)}(p) = \frac{i}{2\pi} \delta(p^2 - \mu^2) \Theta(p^0) \quad (\text{C.6})$$

$$\hat{D}_m^{(-)}(p) = \frac{-i}{2\pi} \delta(p^2 - \mu^2) \Theta(-p^0) \quad (\text{C.7})$$

## C.5 Grau de singularidade $\omega$ .

Com a ajuda de (C.5), calcularemos  $\hat{D}_m(p/\eta)$ :

$$\begin{aligned}\hat{D}_m\left(\frac{p}{\eta}\right) &= \frac{i}{2\pi} \delta(p^2 \eta^{-2} - \mu^2) \operatorname{sgn}(p^0 \eta^{-1}) \\ &= \frac{i\eta^2}{2\pi} \delta(p^2 - \eta^2 \mu^2) \operatorname{sgn}(p^0).\end{aligned}\tag{C.8}$$

Do resultado (C.8) e da definição (3.2), podemos notar que a função de contagem de potências é  $\rho(\eta) = \eta^{-2}$ , devido a que

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \rho(\eta) \hat{D}_m\left(\frac{p}{\eta}\right) = \hat{D}_0(p),\tag{C.9}$$

onde  $\hat{D}_0(p)$  é a distribuição de Jordan-Pauli com massa nula no espaço de momentos. De (3.69) encontramos, para esse caso, o grau de singularidade.

$$\omega \left[ \hat{D}_m(p) \right] = -2.\tag{C.10}$$

Com o mesmo caminho, obtemos

$$\omega \left[ \hat{D}_m^{(\pm)}(p) \right] = -2.\tag{C.11}$$

No espaço de momentos as derivadas  $\partial_\mu$  são equivalentes a  $-ip_\mu$ . Então, para  $\widehat{\partial_\mu D_m^{(\pm)}}(p)$  a derivada agrega um termo  $\eta^{-1}$  no cálculo (C.8). Isso justifica

$$\omega \left[ \widehat{\partial_\mu D_m^{(\pm)}}(p) \right] = -1 = \omega \left[ \widehat{\partial_\mu D_m^{(\pm)}}(p) \right],\tag{C.12}$$

$$\omega \left[ \widehat{\partial_\nu \partial_\mu D_m^{(\pm)}}(p) \right] = 0 = \omega \left[ \widehat{\partial_\nu \partial_\mu D_m^{(\pm)}}(p) \right].\tag{C.13}$$



# Apêndice D

## Resultados úteis.

### D.1 Contrações.

$$\begin{aligned} a(\mathbf{p}_f)\phi^{\dagger(+)}(x) &= a(\mathbf{p}_f)(2\pi)^{-3/2} \int d\lambda(p) a^\dagger(p) e^{ipx} \\ &= a(\mathbf{p}_f)(2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E}} a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E}} [a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}_f) + \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_f)] e^{ipx} \\ &= \phi^{\dagger(+)}(x)a(\mathbf{p}_f) + (2\pi)^{-3/2} \frac{e^{ip_f x}}{\sqrt{2E}}. \end{aligned} \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned} \phi^{(-)}(x)a^\dagger(\mathbf{p}_i) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E}} a(\mathbf{p}) e^{-ipx} a^\dagger(\mathbf{p}_i) \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E}} [a^\dagger(\mathbf{p}_i)a(\mathbf{p}) + \delta(\mathbf{p}_i - \mathbf{p})] e^{-ipx} \\ &= (2\pi)^{-3/2} \frac{e^{-ip_i x}}{\sqrt{2E}} + a^\dagger(\mathbf{p}_i)\phi^{(-)}(x). \end{aligned} \tag{D.2}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{f\nu}(\mathbf{k}_f) a_{f\nu}(\mathbf{k}_f) A_\mu^{(+)}(x) &= \varepsilon_{f\nu}(\mathbf{k}_f) a_{f\nu}(\mathbf{k}_f) (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} a_\mu^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \\
&= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \varepsilon_{f\nu}(\mathbf{k}_f) [a_\mu^\dagger(\mathbf{k}) a_{f\nu}(\mathbf{k}_f) + \delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_f)] e^{ikx} \\
&= (2\pi)^{-3/2} \frac{\varepsilon_{f\mu}(\mathbf{k}_f)}{\sqrt{2\omega_f}} e^{ik_f x} + A_\mu^{(+)}(x) \varepsilon_{f\nu}(\mathbf{k}_f) a_{f\nu}(\mathbf{k}_f).
\end{aligned} \tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}
A_\mu^{(-)}(x) \varepsilon_{i\nu}(\mathbf{k}_i) a_{i\nu}^\dagger(\mathbf{k}_i) &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} a_\mu(\mathbf{k}) e^{-ikx} \varepsilon_{i\nu}(\mathbf{k}_i) a_{i\nu}^\dagger(\mathbf{k}_i) \\
&= \varepsilon_{i\nu}(\mathbf{k}_i) a_{i\nu}^\dagger(\mathbf{k}_i) A_\mu^{(-)}(x) + (2\pi)^{-3/2} \frac{\varepsilon_{i\mu}(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega}} e^{-ik_i x}.
\end{aligned} \tag{D.4}$$

## D.2 Integrais.

$$x = r + \frac{u}{2} \quad y = r - \frac{u}{2} \quad r = \frac{x+y}{2} \quad u = x - y$$

$$\begin{aligned}
&\int d^4x d^4y e^{i(k_f - p_i)x} e^{i(p_f - k_i)y} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \partial_\mu \partial_\nu \left[ \int d^4p (2\pi)^{-4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{m^2 - p^2 - i0} \right] \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \left[ \int d^4p (2\pi)^{-4} \frac{p_\mu p_\nu}{m^2 - p^2 - i0} e^{-ip(x-y)} \right] \\
&= \int d^4r d^4u e^{iA(r + \frac{u}{2})} e^{iB(r - \frac{u}{2})} \left[ \int d^4p (2\pi)^{-4} \frac{p_\mu p_\nu}{m^2 - p^2 - i0} e^{-ip(u)} \right] \\
&= \int d^4r e^{(A+B)r} \int d^4u e^{(\frac{A-B}{2})u} \left[ \int d^4p (2\pi)^{-4} \frac{p_\mu p_\nu}{m^2 - p^2 - i0} e^{-ip(u)} \right] \\
&= (2\pi)^4 \delta(A + B) \frac{p_\mu p_\nu}{m^2 - (\frac{A-B}{2})^2 - i0} \\
&= (2\pi)^4 \delta(k_f - p_i - (-p_f + k_i)) \frac{p_\mu p_\nu}{m^2 - (\frac{k_f - p_i - p_f + k_i}{2})^2 - i0}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4x d^4y e^{i(p_f - k_i)x} e^{i(k_f - p_i)y} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) &= \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
&= (2\pi)^4 \delta(A + B) \frac{p_\mu p_\nu}{m^2 - (\frac{A+B}{2})^2 - i0} \\
&= (2\pi)^4 \delta(p_f - k_i - (-k_f + p_i)) \frac{p_\mu p_\nu}{m^2 - (\frac{p_f - k_i - k_f + p_i}{2})^2 - i0}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4x d^4y e^{i(k_f + p_f)x} e^{i(-k_i - p_i)y} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) &= \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
&= (2\pi)^4 \delta(A + B) \frac{p_\mu p_\nu}{m^2 - (\frac{A+B}{2})^2 - i0} \\
&= (2\pi)^4 \delta(k_f + p_f - (+k_i + p_i)) \frac{p_\mu p_\nu}{m^2 - (\frac{k_f + p_f + k_i + p_i}{2})^2 - i0}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4x d^4y e^{i(-k_i - p_i)x} e^{i(k_f + p_f)y} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) &= \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \partial_\mu \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
&= (2\pi)^4 \delta(A + B) \frac{p_\mu p_\nu}{m^2 - (\frac{A+B}{2})^2 - i0} \\
&= (2\pi)^4 \delta(-k_i - p_i - (-k_f - p_f)) \frac{p_\mu p_\nu}{m^2 - (\frac{-k_i - p_i - k_f - p_f}{2})^2 - i0}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4x d^4y e^{i(k_f - p_i)x} e^{i(-k_i + p_f)y} \partial_\mu D_m^F(x - y) = \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \partial_\mu D_m^F(x - y) \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \partial_\mu \left[ \int d^4p (2\pi)^{-4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{m^2 - p^2 - i0} \right] \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \left[ \int d^4p (2\pi)^{-4} \frac{-ip_\mu e^{-ip(x-y)}}{m^2 - p^2 - i0} \right] \\
&= \int d^4r d^4u e^{iA(r + \frac{u}{2})} e^{iB(r - \frac{u}{2})} \left[ \int d^4p (2\pi)^{-4} \frac{-ip_\mu e^{-ipu}}{m^2 - p^2 - i0} \right] \\
&= -i \int d^4r e^{i(A+B)r} \int d^4u e^{i(\frac{A-B}{2})u} [(2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{p_\mu}{m^2 - p^2 - i0} e^{-ipu}] \\
&= -i(2\pi)^4 \delta(A + B) \frac{p_\mu}{m^2 - (\frac{A-B}{2})^2 - i0} \\
&= -i(2\pi)^4 \delta(k_f - p_i - (k_i - p_f)) \frac{p_\mu}{m^2 - (\frac{k_f - p_i + k_i - p_f}{2})^2 - i0}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4x d^4y e^{i(-k_i + p_f)x} e^{i(+k_f - p_i)y} \partial_\nu D_m^F(x - y) = \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \partial_\nu D_m^F(x - y) \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \partial_\nu \left[ \int d^4p (2\pi)^{-4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{m^2 - p^2 - i0} \right] \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \left[ \int d^4p (2\pi)^{-4} \frac{ip_\nu e^{-ip(x-y)}}{m^2 - p^2 - i0} \right] \\
&= \int d^4r d^4u e^{iA(r + \frac{u}{2})} e^{iB(r - \frac{u}{2})} \left[ \int d^4p (2\pi)^{-4} \frac{ip_\nu e^{-ipu}}{m^2 - p^2 - i0} \right] \\
&= i \int d^4r e^{i(A+B)r} \int d^4u e^{i(\frac{A-B}{2})u} [(2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{p_\nu}{m^2 - p^2 - i0} e^{-ipu}] \\
&= i(2\pi)^4 \delta(A + B) \frac{p_\nu}{m^2 - (\frac{A-B}{2})^2 - i0} \\
&= i(2\pi)^4 \delta(-k_i + p_f - (-k_f + p_i)) \frac{p_\nu}{m^2 - (\frac{-k_i + p_f - k_f + p_i}{2})^2 - i0}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4x d^4y e^{i(k_f+p_f)x} e^{i(-k_i-p_i)y} \partial_\nu D_m^F(x-y) &= \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \partial_\nu D_m^F(x-y) \\
&= i(2\pi)^4 \delta(A+B) \frac{p_\nu}{m^2 - (\frac{A+B}{2})^2 - i0} \\
&= i(2\pi)^4 \delta(k_f + p_f - (k_i + p_i)) \frac{p_\nu}{m^2 - (\frac{k_f+p_f+k_i+p_i}{2})^2 - i0}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4x d^4y e^{i(-k_i-p_i)x} e^{i(k_f+p_f)y} \partial_\mu D_m^F(x-y) &= \\
&= \int d^4x d^4y e^{iAx} e^{iBy} \partial_\mu D_m^F(x-y) \\
&= -i(2\pi)^4 \delta(A+B) \frac{p_\mu}{m^2 - (\frac{A+B}{2})^2 - i0} \\
&= -i(2\pi)^4 \delta(-k_i - p_i - (-k_f - p_f)) \frac{p_\mu}{m^2 - (\frac{-k_i-p_i-k_f-p_f}{2})^2 - i0}.
\end{aligned}$$



# Apêndice E

## Transformada de Fourier $\hat{D}_{\mu\nu}(p)$ .

Seja

$$D_{\mu\nu}(z) = 2e^2[F_{\mu\nu}(z) - F_{\mu\nu}(-z) + G_{\mu\nu}(-z) - G_{\mu\nu}(z)], \quad (\text{E.1})$$

onde

$$F_{\mu\nu}(z) = (\partial_\nu D_m^{(+)})(z)(\partial_\mu D_m^{(+)})(z), \quad (\text{E.2})$$

$$G_{\mu\nu}(z) = D_m^{(+)}(z)(\partial_\mu \partial_\nu D_m^{(+)})(z). \quad (\text{E.3})$$

Determinaremos a transformada de Fourier  $\hat{D}_{\mu\nu}(p)$ . Para obter tal objetivo, calcularemos primeiro em separado  $\hat{F}_{\mu\nu}(p)$  e  $\hat{G}_{\mu\nu}(p)$ .

### E.1 $\hat{F}_{\mu\nu}(p)$

Usando o teorema de convolução

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu}(p) &= (2\pi)^{-2} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) e^{ipx} \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) \Theta(q^0) \delta((q-p)^2 - m^2) \Theta(p^0 - q^0) (q_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu). \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

A integral (E.8) pode ser feita num referencial de Lorentz onde  $p = (p^0, \mathbf{0})$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{\mu\nu}(p) &= (2\pi)^{-4} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) \Theta(q^0) \delta((q^0 - p^0)^2 - \mathbf{q}^2 - m^2) \Theta(p^0 - q^0) (q_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu) \\
&= (2\pi)^{-4} \int d^3q (q_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu) \int dq^0 \delta(q^{02} - E_q^2) \Theta(q^0) \delta(p^{02} - 2p^0 E_q) \Theta(p^0 - q^0) \\
&= (2\pi)^{-4} \int d^3q (q_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu) \int \frac{dq^0}{2E_q} \delta(q^0 - E_q) \frac{\delta(E_q - \frac{p^0}{2})}{2|p^0|} \Theta(p^0 - q^0) \\
&= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(q_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q).
\end{aligned} \tag{E.5}$$

As distribuições  $\delta(p^{02} - 2p^0 E_q)$  e  $\Theta(p^0 - E_q)$  na última igualdade de (E.5) implicam

$$p^0 = 2E_q, \quad p^0 > 0, \quad p^{02} - 4m^2 > 0. \tag{E.6}$$

A seguir, os elementos tensoriais de  $\hat{F}_{\mu\nu}(p)$  serão calculados:

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{00}(p) &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(E_q p^0 - E_q^2)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(p^0 - E_q)}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{(p^0 - E_q)}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} (4\pi) \int dE_q \frac{\mathbf{q} E_q (p^0 - E_q)}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} (4\pi) \frac{\sqrt{(\frac{p^0}{2})^2 - m^2} \frac{p^0}{2} (p^0 - \frac{p^0}{2})}{4|p^0|} \Theta(p^0 - \frac{p^0}{2}) \\
&= (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) \frac{\pi p^{02}}{8} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^{02}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{01}(p) &= -(2\pi)^{-4} \int \frac{d^3 q}{4E_q |p^0|} E_q q_1 \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| \sin(\theta) d\theta d\phi \frac{|\mathbf{q}| \sin(\theta) \cos(\phi)}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int d\theta \sin(\theta) \sin(\theta) \int d\phi \cos(\phi) \int d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^3}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{02}(p) &= -(2\pi)^{-4} \int \frac{d^3 q}{4|p^0|} q_2 \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| \sin(\theta) d\theta d\phi \frac{|\mathbf{q}| \sin(\theta) \sin(\phi)}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int \sin^2(\theta) d\theta \int d\phi \sin(\phi) \int d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^3}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\hat{F}_{03}(p) = -(2\pi)^{-4} \int \frac{d^3 q}{4|p^0|} q_3 \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) = \hat{F}_{02}(p) = 0,$$

$$\implies \hat{F}_{0i}(p) = 0.$$

Similarmente temos:

$$\implies \hat{F}_{i0}(p) = 0,$$

$$\hat{F}_{ij}(p) = -(2\pi)^{-4} \int \frac{d^3 q}{2E_q} \frac{q_i q_j}{2p^0} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}),$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{12}(p) &= -(2\pi)^{-4} \int d^3 q \frac{q_1 q_2}{4E_q p^0} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| \sin(\theta) d\theta d\phi \frac{(|\mathbf{q}| \sin(\theta) \cos(\phi)) (|\mathbf{q}| \sin(\theta) \sin(\phi))}{4E_q p^0} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int d\theta \sin^3(\theta) \int d\phi \cos(\phi) \sin(\phi) \int d|\mathbf{q}| \frac{\mathbf{q}^4}{4E_q p^0} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{13}(p) &= -(2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{q_1 q_3}{4E_q p^0} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| \sin(\theta) d\theta d\phi \frac{(|\mathbf{q}| \sin(\theta) \cos(\phi))(|\mathbf{q}| \cos(\theta))}{4E_q p^0} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int d\theta \sin^2(\theta) \cos(\theta) \int d\phi \cos(\phi) \int d|\mathbf{q}| \frac{\mathbf{q}^4}{4E_q p^0} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{23}(p) &= -(2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{q_2 q_3}{4E_q p^0} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| \sin(\theta) d\theta d\phi \frac{(|\mathbf{q}| \sin(\theta) \sin(\phi))(|\mathbf{q}| \cos(\theta))}{4E_q p^0} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int d\theta \sin^2(\theta) \cos(\theta) \int d\phi \sin(\phi) \int d|\mathbf{q}| \frac{\mathbf{q}^4}{4E_q p^0} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{11}(p) &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(q_1 p_1 - q_1 q_1)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| \sin(\theta) d\theta d\phi \frac{|\mathbf{q}|^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int d\theta \sin^3(\theta) \int d\phi \cos^2(\phi) \int d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^4}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} (\frac{4}{3})(\pi) \int dE_q \frac{|\mathbf{q}|^3}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \Theta(p^0) (\frac{\pi p^{02}}{24}) (1 - \frac{4m^2}{p^{02}})^{3/2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{22}(p) &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(q_2 p_2 - q_2 q_2)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| \sin(\theta) d\theta d\phi \frac{|\mathbf{q}|^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\phi)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int d\theta \sin^3(\theta) \int d\phi \sin^2(\phi) \int d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^4}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \left(\frac{4}{3}\right)(\pi) \int dE_q \frac{|\mathbf{q}|^3}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \Theta(p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{33}(p) &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(q_3 p_3 - q_3 q_3)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| \sin(\theta) d\theta d\phi \frac{|\mathbf{q}|^2 \cos^2(\theta)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int d\theta \sin(\theta) \cos^2(\theta) \int d\phi \int d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^4}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \left(\frac{2}{3}\right)(2\pi) \int dE_q \frac{|\mathbf{q}|^3}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \Theta(p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}.
\end{aligned}$$

Em resumo:

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{00}(p) &= (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) \frac{\pi p^{02}}{8} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^{02}}}, \\
\hat{F}_{11}(p) &= -(2\pi)^{-4} \Theta(p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}, \\
\hat{F}_{22}(p) &= -(2\pi)^{-4} \Theta(p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}, \\
\hat{F}_{33}(p) &= -(2\pi)^{-4} \Theta(p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2},
\end{aligned} \tag{E.7}$$

sendo as demais componentes nulas.

## E.2 $\hat{F}_{\mu\nu}(-p)$ .

$$\begin{aligned}\widehat{F_{\mu\nu}(-x)}(p) &= (2\pi)^{-2} \int d^4x F_{\mu\nu}(-x) e^{ip(x)} = (2\pi)^{-2} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) e^{i(-p)x} \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) (-q_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu) \times \\ &\quad \times \Theta(q^0) \delta((-q - p)^2 - m^2) \Theta(-p^0 - q^0).\end{aligned}\tag{E.8}$$

Usando os resultados da seção anterior num referencial de Lorentz onde  $p = (p^0, \mathbf{0})$

$$\begin{aligned}\hat{F}_{\mu\nu}(-p) &= (2\pi)^{-4} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) (-q_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu) \times \\ &\quad \times \Theta(q^0) \delta((-q^0 - p^0)^2 - \mathbf{q}^2 - m^2) \Theta(-p^0 - q^0) \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(-q_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q).\end{aligned}\tag{E.9}$$

As distribuições  $\delta(p^{02} + 2p^0 E_q)$  e  $\Theta(-p^0 - E_q)$  na última igualdade de (E.9) implicam

$$p^0 = -2E_q, \quad p^0 < 0, \quad p^{02} - 4m^2 > 0,\tag{E.10}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_{00}(-p) &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(-E_q p^0 - E_q^2)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\ &= -(2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{(p_0 + E_q)}{4|p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\ &= -(2\pi)^{-4} (4\pi) \int dE_q \frac{\mathbf{q} E_q (p^0 + E_q)}{4|p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\ &= -(2\pi)^{-4} (4\pi) \frac{\sqrt{(-\frac{p^0}{2})^2 - m^2} (-\frac{p^0}{2}) (p_0 - \frac{p^0}{2})}{4|p^0|} \Theta(-p^0 + \frac{p^0}{2}) \\ &= (2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \frac{\pi p^{02}}{8} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^{02}}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{11}(-p) &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(-q_1 p_1 - q_1 q_1)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| \sin(\theta) d\theta d\phi \frac{|\mathbf{q}|^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \left(\frac{4}{3}\right) (\pi) \int dE_q \frac{|\mathbf{q}|^3}{4|p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \left(\frac{\pi}{3}\right) \int dE_q \frac{(\sqrt{E_q^2 - m^2})^3}{|p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
&= -(2\pi)^{-4} \left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{\left(\sqrt{(-\frac{p^0}{2})^2 - m^2}\right)^3}{|p^0|} \Theta(-p^0 + \frac{p^0}{2}) \\
&= -(2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2},
\end{aligned}$$

$$\hat{F}_{22}(-p) = -(2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2},$$

$$\hat{F}_{33}(-p) = -(2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}.$$

Em resumo:

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{00}(-p) &= (2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \frac{\pi p^{02}}{8} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^{02}}}, \\
\hat{F}_{11}(-p) &= -(2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}, \\
\hat{F}_{22}(-p) &= -(2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}, \\
\hat{F}_{33}(-p) &= -(2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}.
\end{aligned} \tag{E.11}$$

### E.3 $\mathbf{G}_{\mu\nu}(p)$ .

$$\begin{aligned}\hat{G}_{\mu\nu}(p) &= (2\pi)^{-2} \int d^4x G_{\mu\nu}(x) e^{ipx} \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) \Theta(q^0) \delta((q-p)^2 - m^2) \Theta(p^0 - q^0) (p_\mu - q_\mu) (p_\nu - q_\nu).\end{aligned}\tag{E.12}$$

Usando  $p = (p^0, \mathbf{0})$

$$\begin{aligned}\hat{G}_{\mu\nu}(p) &= (2\pi)^{-4} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) \Theta(q^0) \delta((q^0 - p^0)^2 - \mathbf{q}^2 - m^2) \times \\ &\quad \times \Theta(p^0 - q^0) (p_\mu - q_\mu) (p_\nu - q_\nu) \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(p_\mu - q_\mu)(p_\nu - q_\nu)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q).\end{aligned}\tag{E.13}$$

As distribuições  $\delta(E_q - \frac{p^0}{2})$  e  $\Theta(p^0 - E_q)$  implicam

$$p^0 = 2E_q, \quad p^0 > 0, \quad p^{02} - 4m^2 > 0.\tag{E.14}$$

A seguir, os elementos de  $\hat{G}_{\mu\nu}(p)$ :

$$\begin{aligned}\hat{G}_{00}(p) &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(p_0 - q_0)(p_0 - q_0)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\ &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(p_0 - E_q)^2}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\ &= (2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{(p_0 - E_q)^2}{4|p^0| E_q} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\ &= (2\pi)^{-4} 4\pi \int dE_q \frac{(p_0 - E_q)^2 \sqrt{E_q^2 - m^2}}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\ &= (2\pi)^{-4} \pi \frac{(p_0 - \frac{p^0}{2})^2 \sqrt{(\frac{p^0}{2})^2 + m^2}}{|p^0|} \Theta(p^0 - \frac{p^0}{2}) \\ &= (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) \frac{\pi p^{02}}{8} \sqrt{1 - \left(\frac{2m}{p^0}\right)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{11}(p) &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(p_1 - q_1)(p_1 - q_1)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| \sin(\theta) d\theta d\phi \frac{|\mathbf{q}|^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} \int d\theta \sin^3(\theta) \int d\phi \cos^2(\phi) \int d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^4}{4E_q |p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} (\frac{4}{3})(\pi) \int dE_q \frac{|\mathbf{q}|^3}{4|p^0|} \delta(E_q - \frac{p^0}{2}) \Theta(p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) (\frac{\pi}{3}) \frac{((\frac{p^0}{2})^2 - m^2)^{3/2}}{|p^0|} \\
&= (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) (\frac{\pi}{3|p^0|}) (\frac{p^{02} - 4m^2}{4})^{3/2} \\
&= (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) (\frac{\pi p^{02}}{24}) (1 - \frac{4m^2}{p^{02}})^{3/2},
\end{aligned}$$

$$\hat{G}_{22}(p) = (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) (\frac{\pi p^{02}}{24}) (1 - \frac{4m^2}{p^{02}})^{3/2},$$

$$\hat{G}_{33}(p) = (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) (\frac{\pi p^{02}}{24}) (1 - \frac{4m^2}{p^{02}})^{3/2}.$$

Em resumo

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{00}(p) &= (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) \frac{\pi p^{02}}{8} \sqrt{1 - \left(\frac{2m}{p^0}\right)^2}, \\
\hat{G}_{11}(p) &= (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) (\frac{\pi p^{02}}{24}) (1 - \frac{4m^2}{p^{02}})^{3/2}, \\
\hat{G}_{22}(p) &= (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) (\frac{\pi p^{02}}{24}) (1 - \frac{4m^2}{p^{02}})^{3/2}, \\
\hat{G}_{33}(p) &= (2\pi)^{-4} \Theta(p^0) (\frac{\pi p^{02}}{24}) (1 - \frac{4m^2}{p^{02}})^{3/2}.
\end{aligned} \tag{E.15}$$

### E.4 $\hat{G}_{\mu\nu}(-p)$ .

$$\begin{aligned}
 \widehat{G_{\mu\nu}(-x)}(p) &= (2\pi)^{-2} \int d^4x F_{\mu\nu}(-x) e^{ip(x)} = (2\pi)^{-2} \int d^4x F_{\mu\nu}(x) e^{i(-p)x} = \hat{G}_{\mu\nu}(-p) \\
 &= (2\pi)^{-4} \int d^4q \delta(q^2 - m^2) \Theta(q^0) \delta((-q - p)^2 - m^2) \Theta(-p^0 - q^0) \times \\
 &\quad \times (p_\mu + q_\mu)(p_\nu + q_\nu).
 \end{aligned} \tag{E.16}$$

Usando  $p = (p^0, \mathbf{0})$

$$\hat{G}_{\mu\nu}(-p) = (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(p_\mu + q_\mu)(p_\nu + q_\nu)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q). \tag{E.17}$$

As distribuições  $\delta(E_q + \frac{p^0}{2})$  e  $\Theta(-p^0 - E_q)$  implicam

$$p^0 = -2E_q, \quad p^0 < 0, \quad p^0 - 4m^2 > 0, \tag{E.18}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{G}_{00}(-p) &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(p_0 + q_0)(p_0 + q_0)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
 &= (2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| d\Omega \frac{(p_0 + E_q)^2}{4|p^0| E_q} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
 &= (2\pi)^{-4} (4\pi) \int dE_q \frac{(p_0 + E_q)^2 \sqrt{E_q^2 - m^2}}{4|p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
 &= (2\pi)^{-4} (\pi) \frac{(p_0 - \frac{p^0}{2})^2 \sqrt{(-\frac{p^0}{2})^2 - m^2}}{|p^0|} \Theta(-p^0 + \frac{p^0}{2}) \\
 &= (2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \frac{\pi p^{02}}{8} \sqrt{1 - \left(\frac{2m}{p^0}\right)^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{11}(-p) &= (2\pi)^{-4} \int d^3q \frac{(p_1 + q_1)(p_1 + q_1)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} \int \frac{d^3q}{2E_q} \frac{q_1 q_1}{2|p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} \int \mathbf{q}^2 d|\mathbf{q}| \sin(\theta) d\theta d\phi \frac{|\mathbf{q}|^2 \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)}{4E_q |p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} \int d\theta \sin^3(\theta) \int d\phi \cos^2(\phi) \int d|\mathbf{q}| \frac{|\mathbf{q}|^4}{4E_q |p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} \left(\frac{4}{3}\right) (\pi) \int dE_q \frac{|\mathbf{q}|^3}{4|p^0|} \delta(E_q + \frac{p^0}{2}) \Theta(-p^0 - E_q) \\
&= (2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{(p^{02} - 4m^2)^{3/2}}{8|p^0|} \\
&= (2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2},
\end{aligned}$$

$$\hat{G}_{22}(-p) = (2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2},$$

$$\hat{G}_{33}(-p) = (2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}.$$

Em resumo:

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{00}(-p) &= (2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \frac{\pi p^{02}}{8} \sqrt{1 - \left(\frac{2m}{p^0}\right)^2}, \\
\hat{G}_{11}(-p) &= (2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}, \\
\hat{G}_{22}(-p) &= (2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}, \\
\hat{G}_{33}(-p) &= (2\pi)^{-4} \Theta(-p^0) \left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right) \left(1 - \frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}.
\end{aligned} \tag{E.19}$$

Finalmente, substituindo (E.7), (E.11), (E.15) e (E.19) em (E.1), obtemos os elementos do tensor  $\hat{D}_{\mu\nu}(p)$

$$\begin{aligned}
\hat{D}_{00}(p) &= 2e^2[(2\pi)^{-4}\Theta(p^0)\frac{\pi p^{02}}{8}\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^{02}}} \\
&\quad - (2\pi)^{-4}\Theta(-p^0)\frac{\pi p^{02}}{8}\sqrt{1-\frac{4m^2}{p^{02}}} \\
&\quad + (2\pi)^{-4}\Theta(-p^0)\frac{\pi p^{02}}{8}\sqrt{1-\left(\frac{2m}{p^0}\right)^2} \\
&\quad - (2\pi)^{-4}\Theta(p^0)\frac{\pi p^{02}}{8}\sqrt{1-\left(\frac{2m}{p^0}\right)^2}] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{E.20}$$

$$\begin{aligned}
\hat{D}_{ii}(p) &= 2e^2[-(2\pi)^{-4}\Theta(p^0)\left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right)\left(1-\frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2} \\
&\quad + (2\pi)^{-4}\Theta(-p^0)\left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right)\left(1-\frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2} \\
&\quad + (2\pi)^{-4}\Theta(-p^0)\left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right)\left(1-\frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2} \\
&\quad - (2\pi)^{-4}\Theta(p^0)\left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right)\left(1-\frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}] \\
&= -4e^2[(2\pi)^{-4}\text{sgn}(p^0)\left(\frac{\pi p^{02}}{24}\right)\left(1-\frac{4m^2}{p^{02}}\right)^{3/2}].
\end{aligned} \tag{E.21}$$

# Bibliografia

- [1] F. J. Dyson, Phys. Rev. 75, 1736 (1949).
- [2] Heisenberg, Z. Phys. 120, 513 (1943).
- [3] V. Fock, Z. Phys. 75 (1932), 622-647.
- [4] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Lalöe, *Quantum Mechanics V.1* (Hermann, 1977).
- [5] Philippe A. Martin and François Rothen, *Many-Body Problems and Quantum Field Theory* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Berlin, 2002).
- [6] Paul A. M. Dirac, *Quantum mechanics of many-electron system*. Proc. R. Soc. Lond. A (1929) 123.
- [7] David Griffiths, *Introduction to elementary particles* (Wiley-VCH, Weinheim, 2008).
- [8] K. L. Nagy, *Indefinite metric in quantum field theory*, Nuovo Cimento A 17 (1960), 92.
- [9] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics V.1* (Academic Press, California, 1975).
- [10] C. Itzykson, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, 1980).
- [11] E. C. G. Stueckelberg, Relativistisch invariante Störungstheorie des Diracschen Elektrons, Ann. d. Phys., vol. 21(1934).

- [12] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Wiley Interscience, New York, 1959).
- [13] H. Epstein and V. Glaser, *Ann. Inst. Poincare A* 29 (1973), 211.
- [14] G. Scharf, *Finite Quantum Electrodinamica* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Berlin, 1995) (2<sup>nd</sup> edition).
- [15] L. A. Vieira, *Teoría de Perturbação Causal para o Modelo de Thirring como uma Teoría de "Gauge"*. Tese de doutoramento IFT-UNESP, (1999).
- [16] M. Dütsch, F. Krahe and G. Scharf, *Scalar QED Revisited*, *Nuovo Cimento A* 106 (1993), 277.
- [17] G. Scharf, *Quantum Gauge Theories: A True Ghost Story* (John Wiley & Sons, USA, 2001).
- [18] A. Aste, *Finite Field Theories and Causality*, PoS(LC2008)001.
- [19] B. Malgrange, *Séminaire Schwartz* (1959-60).
- [20] A. Aste, *Two-Loop Diagrams in Causal Perturbation Theory*, *Annals of Physics* 257, (1997) 158-204.
- [21] J. T. Lunardi, *O Campo Escalar no Formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau*. Tese de doutoramento IFT-UNESP, (2001).
- [22] B. Podolsky, *Phys. Rev.* 62, 68 (1942); B. Podolsky and C. Kikuchy, 65, 228 (1944); B. Podolsky and P. Schwed, *Rev. Mod. Phys.* 20, 40 (1948).
- [23] R. Bufalo, B. M. Pimentel, and G. E. R. Zambrano, *Phys. Rev. D* 83, 045007 (2011).
- [24] R. Bufalo, B. M. Pimentel, and G. E. R. Zambrano, *Phys. Rev. D* 86, 125023 (2012).
- [25] R. Bufalo, B. M. Pimentel, *Phys. Rev. D* 88, 065013 (2013).