Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Um estudo sobre sequências e séries

Ana Cecília Sanches Cerqueira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

2013

510.07 Cerqueira, Ana Cecília Sanches
C416e Um estudo sobre sequências e séries/ Ana Cecília Sanches Cerqueira- Rio Claro: [s.n.], 2013.
63 f., il., gráfs., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Suzete Maria Silva Afonso

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Limite. 3. Progressões. 4. Funções. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Ana Cecília Sanches Cerqueira

Um estudo sobre sequências e séries

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Orientadora

Profa. Dra. Ligia Laís Fêmina
Faculdade de Matemática / UFU - Uberlândia/MG

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
IGCE/ Unesp -Rio Claro/ SP

Rio Claro, 26 de agosto de 2013

Dedico aos meus pais,
Luiz José Cerqueira e Maria Inês Sanches Cerqueira,
e às minhas irmãs,
Ana Paula Sanches Cerqueira e Ana Luiza Sanches Cerqueira.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, sem o qual nada em minha vida seria possível.

Agradeço a toda minha família, em especial meus pais, Luiz José e Maria Inês, pelo apoio e compreensão não somente durante a elaboração dessa dissertação, mas por sempre terem sido minha base e acreditarem em mim mesmo nos momentos em que não acreditei; e minhas irmãs, Ana Paula e Ana Luiza, pela torcida e pela ajuda quando precisei.

Agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Suzete pela paciência, confiança e orientação, sem os quais este trabalho não teria sido desenvolvido. Também agradeço por sua amizade e pelas palavras de ânimo ao longo desta jornada.

Agradeço aos amigos que fiz no decorrer do Mestrado, especialmente Luciano, Gláucia, Mariana, Sibeli, Patrícia, Calixto, Ricardo, Rogério e Ari. Vocês tornaram essa tarefa menos pesada e mais divertida, mesmo nos momentos de tensão e de cansaço físico e mental.

Agradeço aos meus amigos de longa data, que entenderam minha ausência durante esse período de estudos e foram indispensáveis para que eu encontrasse força e ânimo.

Agradeço a SBM pela iniciativa do Profmat e a CAPES pelo suporte financeiro.

Finalmente, agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro, em especial a nossa coordenadora Profa. Dra. Suzinei, que se empenhou ao máximo para que o Profmat fosse o sucesso que é; e aos professores que fizeram parte da minha formação durante o curso.

"Seria possível dizer o que é a Matemática se esta fosse uma ciência morta.
Mas a Matemática é, pelo contrário, uma ciência viva, que se encontra hoje,
mais do que nunca, em rápido desenvolvimento,
proliferando cada vez mais em novos ramos,
que mudam não só a sua fisionomia,
como até a sua essência."
José Sebastião e Silva.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos a teoria de sequências e séries numéricas. Uma introdução ao estudo de sequências e séries de funções reais também é apresentada, a fim de explorar as séries de potências e as séries de Taylor. Usando a teoria desenvolvida, abordamos temas presentes no Currículo de Matemática da Educação Básica. Além disso, algumas sugestões de propostas didáticas são dadas aos professores de Matemática que lecionam no Ensino Médio.

Palavras-chave: Matemática - Estudo e ensino, Limite, Progressões, Funções.

Abstract

In this work, we present the theory of numerical sequences and series. An introduction to the study of sequences and series of real functions is also presented in order to explore the power series and Taylor series. By using the theory developed, we approach topics present in the Mathematics Curriculum of Basic Education. Furthermore, some suggestions of didactic proposals are given to mathematics teachers who teach in High School.

Keywords: Mathematics - study and teaching, Limit, Progressions, Functions.

Sumário

Introdução

Arquimedes de Siracusa (287 a.C - 212 a.C) é considerado um dos maiores cientistas da Antiguidade Clássica, tendo contribuído para o desenvolvimento do conhecimento matemático, físico, astronômico. Em Matemática, uma de suas mais notáveis contribuições foi o cálculo da área de um círculo, através de sucessivas aproximações desta área por polígonos cujas áreas eram conhecidas; o método desenvolvido por Arquimedes para encontrar a área de um círculo é conhecido como **Método da Exaustão**.

A ideia empregada por Arquimedes pode ser visualizada na sequência de polígonos inscritos num círculo de raio r, apresentada na figura abaixo:

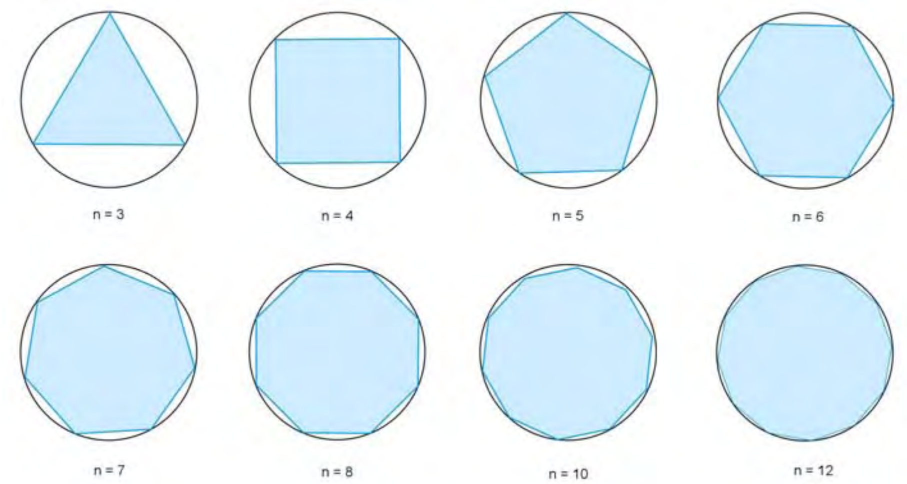

Figura 1: Método da Exaustão

Parece que quanto maior for o número de lados do polígono inscrito na circunferência, mais a área deste e do círculo se aproximam, de maneira que, se n crescer sem limite, a diferença entre as duas áreas deverá se tornar insignificante e, assim, poderemos considerar as duas áreas como sendo iguais.

Apesar de intuitivas as afirmações feitas no parágrafo anterior, usamos aqui duas ideias que precisam ser exploradas de maneira precisa e rigorosa: a ideia de que o lado do polígono inscrito está crescendo sem limite (ou na linguagem usual, n está tendendo ao infinito) e a ideia de que a diferença entre as áreas está se tornando nula (ou seja, um valor está sendo "aproximado" por uma sucessão de outros).

Leonardo de Pisa (1170-1250) foi um matemático italiano, também conhecido por

Fibonacci (por muitos considerado o primeiro grande matemático europeu e um dos mais talentosos da Idade Média). Em seu livro *Liber Abaci* (traduzido para o português como Livro do Ábaco ou Livro do Cálculo), um dos problemas abordados refere-se à reprodução de coelhos em condições pré-determinadas. Na linguagem atual, este problema pode ser enunciado da seguinte forma:

Num pátio fechado, coloca-se um casal de coelhos. Supondo que, em cada mês, a partir do segundo mês de vida, cada casal dá origem a um novo casal de coelhos, ao final de um ano, quantos casais de coelhos haverão no pátio?.

A resolução deste problema é bastante simples. O tempo $t = 1$ indica o momento em que o primeiro casal de coelhos nasceu e foi colocado no pátio fechado.

Um mês depois ($t = 2$) o casal ainda não é fértil, de modo que ainda existirá apenas um casal; contudo, decorrido mais um mês ($t = 3$), este casal já estará fértil e haverão agora dois casais de coelhos.

No mês seguinte ($t = 4$), o casal nascido no mês anterior ainda não é fértil, mas o casal original gerará um novo casal de filhotes; portanto agora haverão três casais.

Decorrido mais um mês ($t = 5$), os dois primeiros casais gerarão dois novos casais e, então, haverá um total de cinco casais de coelhos. É fácil perceber que, cada ele-

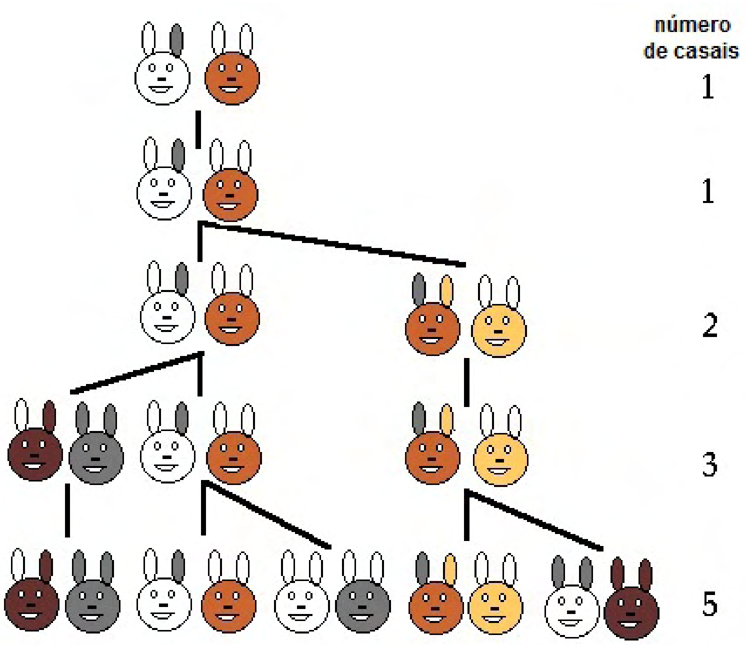

Figura 2: Reprodução de Coelhos e Sequência de Fibonacci

mento desta sequência, a partir do terceiro, é igual a soma dos dois anteriores. Assim, prosseguindo na construção da sequência encontramos como solução do problema 144 casais de coelhos:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots \tag{1}$$

A sequência (1) é conhecida como **sequência de Fibonacci** e o que a torna tão especial é o fato de que ela aparece não só no estudo da reprodução dos coelhos, mas também em inúmeros fenômenos naturais.

Por exemplo, algumas plantas (como a *Achillea Ptarmica*) mostram esta sequência no crescimento de seus galhos. Observe abaixo:

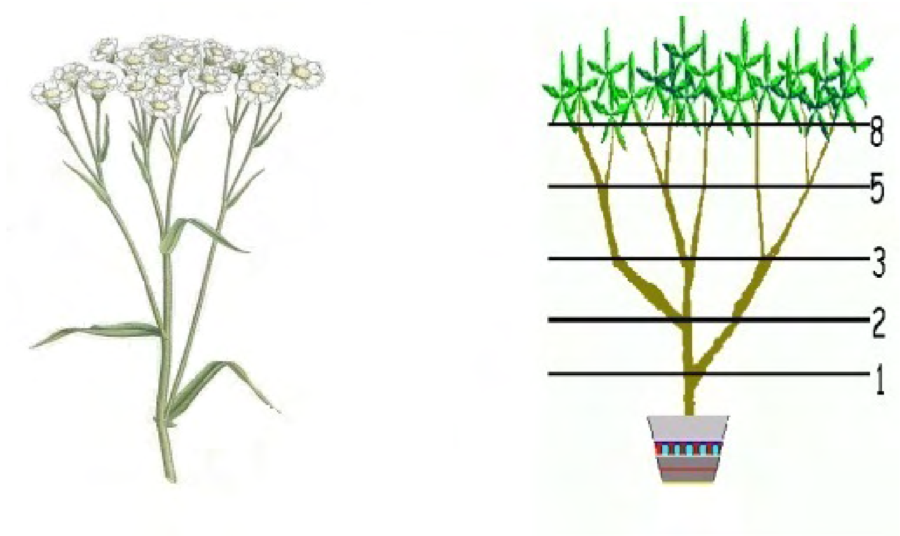

Figura 3: Sequência de Fibonacci nos galhos de *Achillea Ptarmica*

Discutimos acima dois exemplos de sequências: a primeira delas, gerada pela aproximação da área do círculo pelas áreas de polígonos regulares de lado n, e a segunda originada em um problema de reprodução de coelhos.

Uma sequência (ou sucessão) é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cujo domínio é o conjunto dos números naturais e que associa a cada um destes números naturais um número real a_n.

Alguns tipos de sequências costumam ser estudadas no Ensino Básico, especialmente no Ensino Médio: são as chamadas **progressões aritméticas e geométricas**.

Uma sequência (a_n) será denominada progressão aritmética se cada termo, a partir do segundo, for obtido pela soma do termo anterior com uma constante $r \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$a_{n+1} = a_n + r, \quad n \geq 1.$$

Uma sequência (a_n) será denominada progressão geométrica se cada termo, a partir do segundo, for obtido pelo produto do termo anterior com uma constante $q \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$a_{n+1} = qa_n, \quad n \geq 1.$$

Também no Ensino Básico, são estudadas as **dízimas periódicas** que podem ser interpretadas como **somas infinitas**.

Por exemplo, considere a representação decimal da fração $\dfrac{2}{3}$:

$$\frac{2}{3} = 0,6666\ldots$$

e observe que

$$0,6666\cdots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1.000} + \frac{6}{10.000} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n}.$$

Uma vez que não faz sentido somar uma quantidade infinita de termos, é necessário estabelecer uma teoria capaz de tornar aceitável a igualdade acima.

Sempre que tentarmos somar os termos de uma sequência de números reais (a_n), obteremos uma expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots.$$

À esta soma infinita chamamos de **série**. Portanto, a dízima periódica acima pode ser interpretada como uma série numérica.

Neste trabalho, apresentamos a teoria de sequências e séries numéricas e introduzimos a teoria de sequências e séries de funções. Além disso, apresentamos propostas didáticas aos professores de matemática do Ensino Médio, para o ensino de temas relacionados às teorias apresentadas.

O trabalho está dividido da seguinte forma: No primeiro capítulo, exibimos a teoria de sequências e séries numéricas. No segundo capítulo, introduzimos as séries e as sequências de funções e estudamos, em especial, as séries de potências e as séries de Taylor. No terceiro capítulo, abordamos as progressões aritméticas e geométricas (casos particulares de sequências numéricas), conteúdo desenvolvido no Ensino Médio, e apresentamos propostas didáticas para os professores que trabalham com estes tópicos. Além disso, fazemos um estudo de funções elementares (exponencial, seno e cosseno) como somas infinitas, apresentando também sugestões de trabalho com estas somas.

1 Sequências e séries numéricas

Este capítulo destinar-se-á ao estudo de sequências e séries numéricas. Aqui, veremos o importante conceito de limite de sequência, bem como suas propriedades, o que nos ajudará a estipular o valor de uma soma infinita de números reais (também denominada série numérica).

1.1 Sequências

Definição 1.1. *Uma* ***sequência de números reais*** *é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa cada número natural n a um número real $x(n)$. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e denominado* ***n-ésimo termo*** *da sequência.*

Por simplicidade, escrevemos apenas **sequência** neste trabalho, devendo ficar subentendido que se trata de números reais; além disso, adotaremos que o primeiro elemento do conjunto dos naturais é o número 1, o que tornará mais cômoda a notação.

Escreveremos $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n), para indicar a sequência x.

É de grande valia ressaltar que não se pode confundir a sequência x com o conjunto $x(\mathbb{N})$ dos seus termos. Para esse conjunto, usaremos a notação $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. A função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não é necessariamente injetora, pode-se ter $x_m = x_n$ com $m \neq n$. O conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ (apesar da notação) pode ser finito, ou até mesmo reduzir-se a um único elemento, como é o caso de uma sequência constante, em que $x_n = a \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1. Consideremos a sequência cujo n-ésimo termo é $x_n = \dfrac{1}{n}$. Explicitamente podemos escrevê-la como $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \cdots\right)$.

Qualquer termo desta sequência está localizado no intervalo $(0, 1]$. Com efeito, como $n \geq 1 \geq 0$, então $x_n = \dfrac{1}{n} \geq 0$. Por outro lado, $x_n = \dfrac{1}{n} \leq 1$, para todo $n \geq 1$.

Observe que os termos desta sequência estão decrescendo; isso é fácil de se provar: como $n + 1 > n$, segue que $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$, ou seja, $x_{n+1} < x_n$.

As observações feitas nos dois parágrafos anteriores permite-nos afirmar que a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ é *limitada e decrescente.*

Exemplo 1.2. Consideremos a sequência cujo n-ésimo termo é $x_n = n^2$, onde $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 9, \ldots$, ou seja, a sequência dos quadrados perfeitos. É claro que esta sequência é crescente, pois $x_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq n^2 = x_n$ e note que ela não possui limitante.

Assim, podemos afirmar que esta sequência é *ilimitada e crescente.*

Os Exemplos 1.1 e 1.2 motivam as definições que seguem.

Definição 1.2. *Uma sequência (x_n) será dita* ***limitada*** *quando o conjunto dos seus termos for limitado, isto é, quando existirem números reais a e b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Quando uma sequência não for limitada, diremos que ela é **ilimitada**. Além disso, uma sequência será dita **limitada superiormente** quando existir um número real b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, geometricamente, a sequência (x_n) estará localizada na semirreta $(-\infty, b]$. De maneira análoga, a sequência será **limitada inferiormente** quando existir um real a tal que $a \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, a sequência (x_n) estará localizada na semirreta $[a, +\infty)$. Evidentemente, uma sequência será limitada se, e somente se, for limitada inferior e superiormente. Não é difícil verificar que se (x_n) é limitada $\exists c > 0$ tal que $|x_n| < c$, $\forall n \in \mathbb{N}$

No Exemplo 1.1, a sequência apresentada é limitada inferiormente por 0 e superiormente por 1. Já no Exemplo 1.2, a sequência é apenas limitada inferiormente por 1.

Definição 1.3. *Uma sequência (x_n) será dita* ***crescente*** *quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Quando $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência será dita* ***não-decrescente****.*

Analogamente, quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência será dita ***decrescente****. Ela será dita* ***não-crescente*** *quando $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

As sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes são denominadas ***sequências monótonas****.*

Quando restringirmos o domínio de uma sequência (x_n) a qualquer subconjunto $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ obteremos uma nova sequência (x'_n) e diremos que (x'_n) é uma **subsequência** de (x_n).

Exemplo 1.3. No Exemplo 1.2, consideramos a sequência $(x_n) = (n^2)$ dos quadrados perfeitos. Tomando $\mathbb{N}' = \{n' | n' = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$, podemos considerar a restrição de (x_n) ao conjunto $\mathbb{N}'$ e escrever a sequência dos quadrados perfeitos ímpares cujo n-ésimo termo é $x'_n = (2n-1)^2$. É claro que (x'_n) é uma subsequência de (x_n). De modo semelhante podemos obter a sequência dos quadrados perfeitos pares tomando $\mathbb{N}'' = \{n'' | n'' = 2n, n \in \mathbb{N}\}$.

Uma questão que se coloca naturalmente é a de saber se os termos de uma sequência (para índices suficientemente grandes) se aproximam de um número real a e permanecem próximos deste. Para abordar essa questão, estudaremos *limites de sequências* na próxima seção.

1.2 Limites de sequências

Nessa seção, será conveniente pensar em uma sequência (x_n) de números reais como uma sequência de pontos na reta (já que existe uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta) e no seu limite (que vamos definir abaixo) como um ponto do qual os pontos x_n tornam-se e permanecem arbitrariamente próximos, desde que o índice n seja grande o suficiente. A intuição geométrica, apesar de não ser suficiente para estabelecer de maneira rigorosa os resultados, pode ser muito útil para entendê-los.

Definição 1.4. *O número real a será dito **limite da sequência** (x_n) de números reais se, para cada $\epsilon > 0$, for possível encontrar um natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ sempre que $n > n_0$. Simbolicamente:*

$$\lim x_n = a. \equiv .\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.$$

Escreveremos $\lim x_n = a$. As notações $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ também são encontradas na literatura.

O símbolo $. \equiv .$ significa que o que vem depois é definição do que vem antes;
$\forall$ significa *para todo*;
$\exists$ significa *existe*;
; significa *tal que*;
$\Rightarrow$ significa *implica*.

É importante observar que: $\lim x_n = a$ se, e somente se, $\lim x_n - a = 0$. Esta afirmação segue diretamente da Definição 1.4.

De acordo com a definição acima, se $\lim x_n = a$, então todo intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ conterá todos os termos da sequência (x_n) com exceção de um número finito deles. Quando existir o limite de uma sequência e for igual a um número real a, diremos que ela é **convergente** e escreveremos $x_n \to a$. Podemos dizer também que (x_n) converge para a ou que (x_n) tende para a. Caso contrário, diremos que a sequência é **divergente**.

Exemplo 1.4. Novamente, consideremos a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$. Vimos, no Exemplo 1.1, que esta sequência é limitada e decrescente. Nossa intuição nos diz que esta sequência tende a zero, uma vez que os termos vão se tornando cada vez mais próximos do zero, sem contudo ultrapassá-lo. Provemos, pois, através da definição, que $\lim x_n = 0$.

De fato, dado $\epsilon > 0$ qualquer, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$. Então $n > n_0 \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} < \epsilon$, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$.

Considere agora que uma sequência (x_n) seja convergente. Então, ela não pode convergir para dois limites distintos e, além disso, toda subsequência (x'_n) de (x_n)

converge para o mesmo limite que (x_n). Estes dois resultados estarão presentes nos próximos teoremas.

Teorema 1.1 (Unicidade do Limite)**.** *Seja (x_n) uma sequência convergente. Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então $a = b$.*

Demonstração. Seja $\lim x_n = a$. Dado qualquer número real $b \neq a$, mostraremos que não se tem $\lim x_n = b$. Para isso, tomemos $\epsilon = \dfrac{|b-a|}{2} > 0$. Para este ϵ, afirmamos que os intervalos $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ e $(b-\epsilon, b+\epsilon)$ são disjuntos. De fato, se existisse $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \cap (b-\epsilon, b+\epsilon)$, teríamos $|x-a| < \epsilon$ e $|x-b| < \epsilon$, donde $|a-b| \leq |a-x| + |x-b| < 2\epsilon = |a-b|$, um absurdo. Como $\lim x_n = a$, existe n_0 tal que, para $n > n_0$, $x_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ e, portanto, $x_n \notin (b-\epsilon, b+\epsilon)$, para todo $n > n_0$. Logo, $\lim x_n \neq b$. □

Teorema 1.2. *Se $\lim x_n = a$ então toda subsequência de (x_n) convergirá para o limite a.*

Demonstração. Seja (x'_n) uma subsequência de (x_n). Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$. Como os índices da subsequência formam um conjunto infinito, existe entre eles um $n_{i_0} > n_0$. Então, dado $n_i > n_{i_0}$ segue que $n_i > n_0$, que implica $|x_{n_i} - a| < \epsilon$. Logo, $\lim x_{n_i} = a$. □

Como base no teorema anterior, note que: se $\lim x_n = a$ então, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\lim x_{n+k} = a$. De fato, $(x_{1+k}, x_{2+k}, x_{3+k}, \ldots, x_{n+k}, \ldots)$ é uma subsequência de (x_n).

O teorema a seguir nos fornece condições suficientes para a convergência de uma sequência, mesmo que o seu limite seja desconhecido.

Teorema 1.3. *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Para fixar ideias, tomemos (x_n) uma sequência não-decrescente limitada. Consideremos $a =$ [1] $\sup\{x_n; n = 1, 2, 3, \ldots\}$. Devemos ter $a = \lim x_n$. De fato, dado qualquer $\epsilon > 0$, como $a - \epsilon < a$, o número $a - \epsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n. Portanto, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0}$. Como a sequência (x_n) é monótona não-decrescente, se $n > n_0$ então $x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, $a - \epsilon < x_n$. Como $x_n \leq a$, vemos que $n > n_0 \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$. Por conseguinte, $\lim x_n = a$, como queríamos demonstrar.

A demonstração nos casos de sequências decrescentes, crescentes e não-crescentes é feita de modo análogo. □

[1] Um elemento $a \in \mathbb{R}$ é denominado **supremo** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é a menor das cotas superiores de X em $\mathbb{R}$. À propósito, uma cota superior de X é um elemento $c \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$. Todo conjunto limitado possui um supremo. Para maiores detalhes, veja [6], Capítulo III.

Os Teoremas 1.1 e 1.2 podem ser bastante úteis se aplicados simultaneamente. Se desejarmos provar que uma sequência diverge, basta exibir duas subsequências que convergem para limites diferentes. Mais ainda, se quisermos determinar o limite de uma sequência que sabemos *a priori* convergir, basta determinarmos o limite de qualquer uma de suas subsequências.

Apesar de o Teorema 1.3 nos dar um critério para convergência de sequências, ele não é o mais geral possível, pois muitas sequências são convergentes sem serem monótonas. Existe um resultado conhecido como *Critério de Cauchy* que fornece condições necessárias e suficientes para a convergência de uma sequência.

Definição 1.5. *Uma sequência (x_n) de números reais será dita* ***sequência de Cauchy*** *se, dado $\epsilon > 0$, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implicarão $|x_m - x_n| < \epsilon$.*

Observe que, a fim de que uma sequência (x_n) de números reais seja de Cauchy, é necessário e suficiente que seus termos x_m, x_n se aproximem arbitrariamente uns dos outros para índices suficientemente grandes. Note a diferença entre esta definição e a definição de limite de uma sequência na qual se exige que os termos x_n se aproximem arbitrariamente de um valor a. Nessa nova definição se impõe uma condição apenas sobre os próprios termos da sequência.

Exemplo 1.5. A sequência $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ é de Cauchy. De fato, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Portanto, para $m, n \geq n_0$ e supondo, sem perda de generalidade, que $n \geq m$, temos $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}$, de onde concluímos que

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \left|\frac{1}{n_0} - 0\right| = \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

O próximo teorema caracteriza todas as sequências convergentes de números reais e é conhecido como **Critério de Cauchy** para sequências.

Teorema 1.4. *Uma sequência de números reais será convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.*

Para a demonstração deste teorema precisaremos dos resultados enunciados a seguir, cujas demonstrações podem ser encontradas em [6], Capítulo IV.

Lema 1.1. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Lema 1.2. *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Lema 1.3. *Se uma sequência de Cauchy (x_n) possuir uma subsequência que converge para um valor $a \in \mathbb{R}$, então (x_n) também convergirá para a.*

Demonstração do Teorema 1.4. Seja $\lim x_n = a$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0 \Rightarrow |x_m - a| < \frac{\epsilon}{2}$ e $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Logo, $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, o que mostra ser (x_n) uma sequência de Cauchy.

Reciprocamente, se (x_n) for uma sequência de Cauchy, pelo Lema 1.1, ela será limitada e, pelo Lema 1.2, possuirá uma subsequência convergente. Finalmente, pelo Lema 1.3, (x_n) será convergente. $\square$

Observe que, intuitivamente, o teorema acima afirma que se uma sequência converge para $a \in \mathbb{R}$ então seus termos ao se aproximarem do número real a necessariamente aproximam-se uns dos outros.

Vamos finalizar esta seção com mais um teorema, que pode ser obtido diretamente da discussão acima acerca das sequências de Cauchy; contudo, optamos por apresentar uma demonstração alternativa.

Teorema 1.5. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Consideremos $\lim x_n = a$. Então, tomando $\epsilon = 1$, é possível afirmar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a-1, a+1)$, para $n > n_0$. Consideremos o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Sejam c e d o menor e o maior elemento de F, respectivamente. Sendo assim, todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[c, d]$ e, por conseguinte, a sequência (x_n) é limitada. $\square$

Observação 1.1. A recíproca deste teorema é falsa. A sequência $(0, 7, 0, 7, \dots)$ é limitada e divergente. Para constatar que ela diverge, basta tomar as subsequências constantes $(x'_n) = (x_{2n-1}) = (0)$ e $(x''_n) = (x_{2n}) = (7)$ e observar que $x'_n \to 0$ e $x''_n \to 7$.

Pelo Teorema 1.5, podemos concluir que, se uma sequência for ilimitada, então ela será divergente.

Entre as sequências divergentes, vamos, agora, destacar aquelas cujos valores se tornam e se mantêm arbitrariamente grandes positivamente ou arbitrariamente grandes negativamente.

Seja (x_n) uma sequência de números reais. Diremos que "x_n tende para mais infinito", e escrevemos $\lim x_n = +\infty$ quando, para todo número real A dado arbitrariamente, for possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n > A$, ou seja, para qualquer $A > 0$ dado, existirá apenas um número finito de índices n tais que $x_n \leq A$. Analogamente, diremos que "x_n tende para menos infinito", e escrevemos $\lim x_n = -\infty$ quando, para todo número real A dado arbitrariamente, for possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n < -A$, ou seja, para qualquer $A > 0$ dado, existirá apenas um número finito de índices n tais que $x_n \leq -A$.

Verifica-se facilmente que $\lim n = +\infty$ e $\lim -n = -\infty$.

Observe que $\lim x_n = -\infty$ se, e somente se, $\lim(-x_n) = +\infty$. Quando $\lim x_n = +\infty$, a sequência (x_n) é ilimitada superiormente, porém limitada inferiormente. Quando $\lim x_n = -\infty$, a sequência (x_n) é ilimitada inferiormente, mas limitada superiormente.

Assim, por exemplo, a sequência cujo termo geral é $x_n = (-1)^n n$ não tem $+\infty$ nem $-\infty$ pois é ilimitada nos dois sentidos. Por outro lado, a sequência $(1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, \dots)$ é limitada inferiormente, ilimitada superiormente, mas não tem limite igual a $+\infty$ porque possui uma subsequência constante.

1.3 Aritmética dos limites de sequências

Na seção anterior, estabelecemos condições suficientes (ser monótona e limitada) para que o limite de uma sequência exista. Nesta seção, investigaremos o comportamento destes limites com relação às operações usuais de soma, subtração, multiplicação e divisão. Os dois teoremas aqui apresentados serão ilustrados com exemplos para facilitar o entendimento.

Teorema 1.6. *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *for uma sequência limitada (mesmo que divergente) então* $\lim x_n y_n = 0$.

Demonstração. Como a sequência (y_n) é limitada, existe $c > 0$ tal que $|y_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim x_n = 0$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \dfrac{\epsilon}{c}$. Deste modo, para $n > n_0$, temos:

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \frac{\epsilon}{c} c = \epsilon$$

, ou seja, $\lim x_n y_n = 0$, como queríamos demonstrar. □

Exemplo 1.6. Dado $x \in \mathbb{R}$, seja $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ e $(y_n) = (sen(nx))$. Note que $x_n \to 0$ (conforme o Exemplo 1.4) e $|y_n| \leq 1$; portanto, pelo Teorema 1.6, segue que

$$\lim \frac{sen(nx)}{n} = 0.$$

O teorema a seguir é responsável por validar toda a manipulação aritmética que podemos fazemos com duas ou mais sequências. Em linhas gerais, ele nos mostra que as operações aritméticas usuais são preservadas pelos limites de sequências.

Teorema 1.7. *Sejam* (x_n) *e* (y_n) *duas sequências convergentes, com* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b \neq 0$. *Então:*

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$;
2. $\lim(x_n - y_n) = a - b$;
3. $\lim(x_n y_n) = ab$;
4. $\lim(cx_n) = ca, \forall c \in \mathbb{R}$;
5. $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Demonstração. (1) Dado $\epsilon > 0$, como $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $n > n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então, para $n > n_0$, temos:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

(2) A prova desta propriedade é análoga à anterior.

(3) Observe que

$$x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b.$$

Note que (x_n) é limitada porque é convergente (conforme o Teorema 1.5) e $\lim(y_n - b) = 0$. Logo, pelo Teorema 1.6, $\lim[x_n(y_n - b)] = 0$. De modo análogo, $\lim[(x_n - a)b] = 0$ e, pelo item (1), já demonstrado acima, segue o resultado, pois

$$\begin{aligned} \lim[x_n y_n - ab] &= \lim[x_n(y_n - b) + (x_n - a)b] \\ &= \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[(x_n - a)b] \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(4) É consequência do item anterior, tomando $y_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(5) Notemos que, como $\lim y_n b = b^2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n b > \dfrac{b^2}{2}$. De fato, tomando $\epsilon = \dfrac{b^2}{2}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |y_n b - b^2| < \dfrac{b^2}{2}$, donde $b^2 - \dfrac{b^2}{2} < y_n b < b^2 + \dfrac{b^2}{2}$, para $n > n_0$ e, portanto, $y_n b > \dfrac{b^2}{2}$ para $n > n_0$. Então, para $n > n_0$, $\dfrac{1}{y_n b}$ é um número positivo inferior a $\dfrac{b^2}{2}$. Note que

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{b x_n - a y_n}{y_n b} = (b x_n - a y_n)\frac{1}{y_n b}.$$

Como $\lim(b x_n - a y_n) = ba - ab = 0$, segue do Teorema 1.6 que

$$\lim \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = 0 \quad \text{e, consequentemente,} \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

□

Exemplo 1.7. Consideremos a sequência cujo n-ésimo termo é $x_n = 6 + \dfrac{e^{-n}}{n}$. Pelo Teorema 1.7, itens (1) e (3), e pelo Teorema 1.6, temos:

$$\lim(x_n) = \lim\left(6 + \frac{e^{-n}}{n}\right) = \lim 6 + \lim\left(\frac{e^{-n}}{n}\right) = \lim 6 + \lim e^{-n} \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 6 + 0 = 6,$$

já que $0 < e^{-n} < 1$ para todo $n \geq 1$.

Salientamos que deve-se tomar o cuidado de não tentar aplicar o teorema anterior para certas somas (ou produtos) em que o número de parcelas (ou fatores) é variável e cresce acima de qualquer limite. O próximo exemplo ilustra essa situação.

Exemplo 1.8. Considere $s_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$ uma soma com n parcelas. Então $s_n = 1$ e, portanto, $\lim s_n = 1$. Por outro lado, cada parcela $\frac{1}{n}$ tem limite zero. Uma aplicação descuidada do item (1) do Teorema 1.7 nos conduziria ao absurdo de concluir que

$$\lim s_n = \lim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.$$

1.4 Séries

Se tentarmos somar os termos de uma sequência de números reais (a_n), obteremos uma expressão da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots \tag{1.1}$$

que é denominada **série infinita** ou simplesmente **série**.

No que segue, representaremos uma série também por $\sum a_n$ e chamaremos a_n de **termo geral** da série.

Qual é o significado da soma infinita (1.1)? Não faz sentido somar convencionalmente infinitos termos; a fundamentação teórica para tornar aceitável uma soma infinita é o conceito de limite de uma sequência, o qual já discutimos na seção anterior.

Vamos considerar a sequência formada pelas **somas parciais** ou **reduzidas**, que é definida da seguinte forma:

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = a_1 + a_2,$$

$$s_3 = s_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$

$$\vdots$$

$$s_n = s_{n-1} + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Estas somas parciais formam uma nova sequência, denotada por (s_n), que pode ou não convergir.

Se existir o limite

$$s = \lim s_n = \lim[a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n],$$

a série $\sum a_n$ será convergente e o limite s será denominado soma da série.

Para entendermos a discussão acima e o significado que devemos dar a uma série, consideremos o exemplo a seguir:

Exemplo 1.9. Consideremos a série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Vamos investigar, na sequência de ideias apresentadas acima, qual a soma desta série (se é que ela, de fato, existe). Vamos considerar a soma infinita $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$, de onde temos:

$$s_1 = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \\ s_3 &= \frac{2}{3} + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}, \\ &\vdots \\ s_n &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Para determinar a expressão de s_n, usamos o Princípio de Indução Matemática (veja [6], Capítulo II).

Assim, somos levados a considerar a sequência $(s_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)$, que converge para o número real 1. Escrevemos, portanto, $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

1.5 Convergência e divergência de séries

Formalizando a discussão acima, temos a seguinte definição:

Definição 1.6. *Dada uma série* $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \dots$, *denotemos por* s_n *sua n-ésima soma parcial:*

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Se a sequência (s_n) *for convergente e* $\lim s_n = s$, *então a série* $\sum a_n$ *será dita* ***convergente*** *e escreveremos* $\sum a_n = s$. *O número* s *é denominado* ***soma*** *da série. Caso contrário, a série será dita* ***divergente***.

Observe, pela definição acima, que a soma de uma série é o limite da sequência de suas somas parciais. Desde modo, quando escrevemos $\sum a_n = s$ queremos dizer que, somando uma quantidade suficiente de termos da série, podemos chegar tão perto quanto quisermos do número s.

Das propriedades aritméticas do limite de sequências, concluímos que se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ forem séries convergentes, então a série $\sum(a_n + b_n)$ será convergente, com $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$. Além disso, se $\sum a_n$ convergir então, para todo número real M, ter-se-á $\sum M a_n$ convergente, com $\sum M a_n = M \sum a_n$.

Observação 1.2. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será convergente se, e somente se, a série $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ for convergente, onde n_0 é um número natural arbitrário. De fato, se as reduzidas da primeira série forem s_n, as da segunda serão $t_{n+1} = s_{n+n_0} - s_{n_0-1}$, com $t_1 = a_{n_0}$. Com isso, o comportamento de convergência de uma série não se altera se dela omitimos (ou a ela acrescentamos) um número finito de termos.

A questão que naturalmente se apresenta, assim como no caso das sequências, é a de entender quando uma série converge. Existem testes para verificar a convergência ou não de uma série e nós os apresentaremos na próxima seção. Antes, observamos que a primeira condição necessária para a convergência de uma série é que o seu termo geral convirja para zero.

Teorema 1.8. *Se $\sum a_n$ for uma série convergente, então* $\lim a_n = 0$.

Demonstração. Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a n-ésima soma parcial da série $\sum a_n$. Por hipótese, existe $\lim s_n$. Digamos que $\lim s_n = s$. É claro que também devemos ter $\lim s_{n-1} = s$ uma vez que a convergência de uma sequência não é afetada quando retiramos um número finito de termos dela. Portanto,

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

$\square$

A recíproca do Teorema 1.8 é falsa. O contra-exemplo clássico é dado pela *série harmônica* $\sum \frac{1}{n}$. Seu termo geral $x_n = \frac{1}{n}$ tende para zero (veja Exemplo 1.4), mas a série diverge. De fato, temos

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Então, a sequência (s_{2^n}) é ilimitada e, portanto, a série $\sum \frac{1}{n}$ é divergente.

Convém notar que uma série $\sum a_n$ pode divergir por dois motivos. Ou porque a sequência das reduzidas s_n não é limitada ou porque elas oscilam em torno de alguns valores. Quando os termos da série têm todos o mesmo sinal, esta última possibilidade não acontece, pois neste caso, as reduzidas formam uma sequência monótona. Segue imediatamente do Teorema 1.3 o seguinte resultado:

Teorema 1.9. *Seja (a_n) uma sequência tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A série $\sum a_n$ convergirá se, e somente se, as reduzidas s_n formarem uma sequência limitada, isto é, se, e somente se, existir $k > 0$ tal que $a_1 + \cdots + a_n < k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 1.10. Uma série particularmente importante é a **série geométrica** definida por

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0.$$

Observe que cada termo é obtido a partir do anterior pela multiplicação dele por um real r, chamado de **razão**. Se $|r| \geq 1$, o termo geral ar^{n-1} não convergirá para 0 e, assim, a série geométrica divergirá. Agora, note que:

$$s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1}$$

e

$$rs_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, encontramos $s_n - rs_n = a - ar^n$, de onde

$$s_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Se $-1 < r < 1$ então $\lim r^n = 0$; assim $\lim s_n = \lim \left(\frac{a(1-r^n)}{1-r} \right) = \frac{1}{1-r}$. Então, se $|r| < 1$, a série geométrica convergirá e sua soma será $\frac{a}{1-r}$.

Para futuras referências neste texto, vamos considerar o que foi constatado no exemplo acima como um teorema:

Teorema 1.10. *A série geométrica* $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, a \neq 0$*, será convergente se* $|r| < 1$ *e sua soma será*

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Se $|r| \geq 1$*, a série geométrica será divergente.*

1.6 Testes de Convergência

Determinar o valor da soma de uma série não é uma questão fácil de ser respondida e, em casos bem interessantes, pode ser até mesmo impossível de ser feito de maneira exata.

Por conta destas dificuldades, vamos mudar o foco de nossos esforços e passar agora a analisar as hipóteses que garantem a convergência (ou divergência) de uma série, mesmo sem se determinar o valor da soma no caso da convergência. Para isso, veremos os principais **testes de convergência**.

O primeiro teste a ser visto, denominado *Teste de Divergência*, é apenas a contrapositiva do Teorema 1.8.

Teorema 1.11 (Teste de Divergência). *Se* $\lim a_n$ *não existir ou se* $\lim a_n \neq 0$ *então a série* $\sum a_n$ *será divergente.*

Exemplo 1.11. Usando o teorema acima, é possível mostrar que a série $\sum \dfrac{n^3-6}{10n^3}$ é divergente, pois

$$\lim \left(\frac{n^3-6}{10n^3}\right) = \lim \left(\frac{1-\dfrac{6}{n^3}}{10}\right) = \frac{1}{10} \neq 0.$$

Uma vez estabelecida a convergência (ou divergência) de uma série, podemos utilizá-la para provar a convergência (ou divergência) de outra série mediante uma simples comparação dos termos gerais, desde que hipóteses convenientes sejam satisfeitas. Este é o conteúdo do próximo teorema.

Teorema 1.12 (Teste de Comparação). *Suponhamos que* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *sejam séries de termos positivos. Se existirem* $c > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $a_n \leq cb_n$ *para todo* $n > n_0$*, então a convergência de* $\sum b_n$ *implicará a de* $\sum a_n$ *enquanto a divergência de* $\sum a_n$ *implicará a de* $\sum b_n$*.*

Demonstração. Sem perda de generalidade (veja Observação 1.2), podemos supor que $a_n \leq cb_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, as somas parciais s_n e t_n de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente, formam sequências não-decrescentes tais que $s_n \leq ct_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $c > 0$, se (t_n) for limitada, então (s_n) também será limitada. Pelo Teorema 1.3, temos a convergência da sequência (s_n) e, portanto, a convergência da série $\sum a_n$. Por outro lado, se (s_n) for ilimitada, (t_n) será ilimitada, pois $t_n \geq \frac{s_n}{c}$. Pelo Teorema 1.5, obtemos a divergência da sequência (t_n) e, por conseguinte, a divergência da série $\sum b_n$. □

O próximo exemplo ilustra uma aplicação do Teste de Comparação:

Exemplo 1.12. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n+2}$ é convergente. De fato, note que, para todo $n \geq 1$,

$$3^n + 2 > 3^n \Rightarrow \frac{5}{3^n+2} < \frac{5}{3^n}.$$

Mas, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ é uma série geométrica convergente. Portanto, pelo Teste de Comparação, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3^n+2}$ é convergente.

Uma versão mais forte do Teste de Comparação é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1.13 (Teste da Comparação por Limite). *Suponhamos que* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *sejam séries de termos positivos. Se*

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = c > 0,$$

então ambas as séries convergem ou divergem.

Demonstração. Como $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = c$, dado $\epsilon = \frac{c}{2}$, existe n_0 tal que, para $n \geq n_0$,

$$c - \frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < c + \frac{c}{2},$$

ou seja,

$$\frac{c}{2}b_n < a_n < \frac{3c}{2}b_n.$$

Deste modo, se $\sum b_n$ convergir, $\sum \frac{3c}{2}b_n$ também convergirá e, pelo Teste de Comparação, $\sum a_n$ será convergente. Se $\sum b_n$ divergir, $\sum \frac{c}{2}b_n$ também divergirá e, pelo Teste de Comparação, $\sum a_n$ será divergente. □

Exemplo 1.13. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente. Com efeito, tomemos

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Note que

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}}\right) = \lim\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right) = \lim\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right) = 1 > 0.$$

Ora, vimos, no Exemplo 1.9, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é convergente. Portanto, pelo Teste de Comparação por Limite, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ também é convergente.

Finalizaremos esta seção com o Critério de Cauchy para séries.

Teorema 1.14. *A fim de que a série $\sum a_n$ seja convergente, é necessário e suficiente que, para cada $\epsilon > 0$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$ para quaisquer $n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Basta observar que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$, onde (s_n) é a sequência das somas parciais de $\sum a_n$, e aplicar o Critério de Cauchy para sequências (Teorema 1.4). □

1.7 Séries alternadas e absolutamente convergentes

Os testes apresentados na seção anterior exigiram como hipótese que os termos das séries envolvidos fossem positivos. Nesta seção, vamos estudar as séries cujos termos não são necessariamente positivos, mas que ainda podem ter sua convergência garantida por testes apropriados. Veremos, agora, algumas definições pertinentes.

Definição 1.7. *Uma série* $\sum a_n$ *será* ***absolutamente convergente*** *quando* $\sum |a_n|$ *for convergente.*

Definição 1.8. *Uma série* $\sum a_n$ *será dita* ***alternada*** *se os seus termos forem alternadamente positivos e negativos. A forma geral de uma série alternada é* $\sum(-1)^{n+1}a_n$ *ou* $\sum(-1)^n a_n$*, com* $a_n > 0$.

Definição 1.9. *Uma série* $\sum a_n$ *será dita* ***condicionalmente convergente*** *quando for convergente, mas não absolutamente convergente.*

Teorema 1.15. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Suponhamos que $\sum |a_n|$ seja convergente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos números p_n e q_n, colocando $p_n = a_n$ se $a_n \geq 0$ e $p_n = 0$ se $a_n < 0$; $q_n = -a_n$ se $a_n \leq 0$ e $q_n = 0$ se $a_n > 0$. Os números p_n e q_n são denominados, respectivamente, *parte positiva* e *parte negativa* de a_n. Então $p_n \geq 0$, $q_n \geq 0$ e $p_n + q_n = |a_n|$. Daí, $p_n \leq |a_n|$ e $q_n \leq |a_n|$ e $p_n - q_n = a_n$. Pelo Teste de Comparação, as séries $\sum p_n$ e $\sum q_n$ são convergentes. Logo, é também convergente a série $\sum a_n = \sum(p_n - q_n) = \sum p_n - \sum q_n$. □

O teorema abaixo fornece condições necessárias para que uma série alternada convirja.

Teorema 1.16 (Teste de Leibniz)**.** *Se* (a_n) *for uma sequência de termos positivos, não-crescente (*$a_{n+1} \leq a_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*), com* $\lim a_n = 0$*, então a série alternada* $\sum(-1)^{n+1}a_n$ *será convergente.*

Demonstração. Seja $s_n = a_1 - a_2 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n$. Então, $s_{2n} = s_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n}$ e $s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$. Portanto, as somas parciais de ordem par formam uma sequência não-decrescente (pois $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$) e as de ordem ímpar uma sequência não-crescente (pois $-a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0$). Além disso, como $s_{2n} = s_{2n+1} - a_{2n+1}$, temos $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0$. Isto mostra que

$$s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1.$$

Sendo, pois, as sequências (s_{2n}) e (s_{2n+1}) limitadas e monótonas, existem $\lim s_{2n}$ e $\lim s_{2n+1}$. Mas, $\lim s_{2n+1} - \lim s_{2n} = \lim s_{2n+1} - s_{2n} = \lim a_{2n+1} = 0$. Daí, $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n}$ e, portanto, a sequência (s_n) é convergente. Isto conclui a prova.

□

Exemplo 1.14. Pelo Teste de Leibniz, a série $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ é convergente. De fato, $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ é uma sequência de termos positivos, decrescente e $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

A recíproca do Teorema 1.15 não é verdadeira. Com efeito, a série $\sum(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ é convergente, conforme vimos acima e, no entanto, a série $\displaystyle\sum \left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ é divergente, como também já foi visto.

O próximo resultado é consequência do Teste de Comparação.

Corolário 1.1. *Seja* $\sum b_n$ *uma série convergente, com* $b_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se existirem* $k > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $|a_n| \leq kb_n$ *para todo* $n > n_0$, *então a série* $\sum a_n$ *será absolutamente convergente.*

Pelo Teorema 1.10 e pelo Teste de Comparação, podemos dizer que:

Corolário 1.2. *Se* $|a_n| \leq kc^n$, *para todo* $n > n_0$, *onde* $0 < c < 1$ *e* $k > 0$, *então a série* $\sum a_n$ *será absolutamente convergente.*

Os dois testes abaixo são muito aplicados para testar a convergência absoluta de uma série. O principal inconveniente deles decorre do fato de que, se um dos dois falhar (num sentido a ser explicado no enunciado de cada um), o outro também, consequentemente, falha.

Teorema 1.17 (Teste da Razão)**.** *Seja* $\sum a_n$ *uma série numérica.*

1. *Se* $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, *então a série* $\sum a_n$ *será absolutamente convergente;*

2. *Se* $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ *(ou* $L = +\infty$*), então a série* $\sum a_n$ *será divergente.*

Demonstração. 1. A ideia da demonstração é comparar a série dada com uma série geométrica convergente. Como $L < 1$, podemos escolher um número real r tal que $L < r < 1$. Como

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

e $L < r$, o quociente $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ eventualmente será menor que r, isto é, existe um número inteiro N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r,$$

sempre que $n \geq N$, ou equivalentemente $|a_{n+1}| < |a_n|r$ sempre que $n \geq N$.

Fazendo n sucessivamente igual a $N, N+1, N+2, \ldots, N+k, \ldots$ na última desigualdade, obtemos

$$|a_{N+1}| < |a_N|r$$

$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|r < |a_N|r^2$$

$$|a_{N+3}| < |a_{N+1}|r^2 < |a_N|r^3$$

e, em geral,

$$|a_{N+k}| < |a_N|r^k,$$

para todo $k \geq 1$. Agora, a série $\sum |a_n|r^k$ é convergente por ser uma série geométrica com $0 < r < 1$. Assim, o Teste de Comparação afirma que a série

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots$$

também é convergente. Pela Observação 1.2, a série $\sum |a_n|$ é convergente e, por conseguinte, a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

(2) Se $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$, então o quociente $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ eventualmente será maior do que 1; isto é, existirá um número inteiro N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1,$$

sempre que $n \geq N$. Isto significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ quando $n \geq N$. Assim, $\lim a_n \neq 0$ e, portanto, $\sum a_n$ é divergente, pelo Teste de Divergência. □

Observação 1.3. Se $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, então o teste será inconclusivo, ou seja, falhará.

Por exemplo, para a série convergente $\sum \dfrac{1}{n^2}$ temos:

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1.$$

Enquanto para a série divergente $\sum \dfrac{1}{n}$ temos:

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = 1.$$

Vemos portanto que, se $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, a série $\sum a_n$ poderá convergir ou divergir. Sendo assim, devemos usar outro teste.

Exemplo 1.15. A série $\sum (-1)^n \dfrac{n^3}{3^n}$ é absolutamente convergente. De fato, a convergência absoluta da série em questão segue do Teste da Razão, pois:

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \lim \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n^3} = \lim \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3} < 1.$$

É conveniente aplicar o teste a seguir quando ocorrem potências de n.

Teorema 1.18 (Teste da Raiz). *Seja $\sum a_n$ uma série numérica.*

1. *Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, a série $\sum a_n$ será absolutamente convergente;*
2. *Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ (ou $L = \infty$), a série $\sum a_n$ será divergente.*

A demonstração do Teste da Raiz é parecida com a demonstração do Teste da Razão. Por esta razão, não a exibiremos aqui. Contudo, indicamos a referência [6] (Capítulo IV) para a verificação da mesma.

Novamente, se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o teste será inconclusivo, pois a série $\sum a_n$ poderá convergir ou divergir.

Exemplo 1.16. A série $\sum \left(\dfrac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ é absolutamente convergente. Com efeito, a convergência absoluta da série em questão segue do Teste da Razão, pois:

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right) = \lim \frac{2+\dfrac{3}{n}}{3+\dfrac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1.$$

2 Introdução às séries de funções

Neste capítulo, apresentaremos um pequeno estudo acerca das sequências e das séries de funções; neste caso, diferentemente das sequências e séries numéricas onde cada termo é um número real, os termos são dados por funções que possuem o mesmo domínio de definição.

Também estudaremos aqui a representação de funções não polinomiais, como a exponencial e as trigonométricas, como séries de funções cujos elementos são funções polinomiais e, portanto, facilmente manipuláveis; trata-se da Série de Taylor, assunto da última seção.

2.1 Sequências de funções

Considere X um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ o conjunto das funções definidas em X a valores em $\mathbb{R}$.

Definição 2.1. *Uma* ***sequência de funções*** *é uma correspondência $f : \mathbb{N} \to \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ que associa a cada número natural n uma função $f_n : X \to \mathbb{R}$. Denotaremos esta sequência de funções por (f_n).*

Observe na definição acima que, ao lidarmos com uma sequência (f_n), estaremos lidando com infinitas funções cujo domínio de definição sempre coincide.

Exemplo 2.1. Considere a sequência de funções

$$f_n(x) = \frac{x^2 + nx + 3}{n}.$$

Fazendo n variar no conjunto dos números naturais, determinamos a sequência

$$f_1(x) = x^2 + x + 3, f_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{2}, \ldots, f_{10}(x) = \frac{x^2 + 10x + 3}{10}, \ldots,$$

onde cada elemento f_n está definido em todo $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.2. A sequência de funções

$$f_n(x) = \cos(nx)$$

também está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo n variar no conjunto dos números naturais, obtemos

$$f_1(x) = \cos(x), f_2(x) = \cos(2x), \ldots, f_{20}(x) = \cos(20x), \ldots, f_{50}(x) = \cos(50x), \ldots$$

Fixando $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário, podemos considerar a sequência numérica $(f_n(x_0))$ chamada de **sequência pontual** de (f_n) em $x = x_0$. O exemplo a seguir ilustra este conceito.

Exemplo 2.3. Considere a sequência de funções

$$f_n(x) = \frac{1}{nx} \tag{2.1}$$

definida em $X = [1, 2]$ e observe na tabela abaixo algumas de suas sequências pontuais, que parecem sempre convergir para $f = 0$:

x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2x}$	$\frac{1}{3x}$	...	$\frac{1}{25x}$	...
1	1	0,5	0,33333...	...	0,04	...
1,2	0,83333...	0,41666...	0,27777...	....	0,03333...	...
1,3	0,76923...	0,38461...	0,25641...	...	0,03076...	...
1,5	0,66666...	0,33333...	0,22222...	...	0,02666...	...
2	0,5	0,25	0,16666...	...	0,02	...

Tabela 2.1: Algumas sequências pontuais de $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$.

Diremos que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge **simplesmente** para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a sequência de números $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ convergir para o número $f(x)$. A convergência simples também é denominada convergência **pontual**.

Diremos que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge **uniformemente** para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, para qualquer $x \in X$.

Exemplo 2.4. Seja a sequência de funções $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = x^n$, para $x \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, f_n converge simplesmente para a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$. De fato, para cada $x \in [0, 1)$, $\lim x^n = 0$, enquanto $\lim 1 = 1$.

Exemplo 2.5. A sequência de funções $f_n : [1, 2] \to \mathbb{R}$, dadas por (2.1), para $x \in [0, 2]$ e $n \in \mathbb{N}$, converge uniformemente para a função $f = 0$. De fato, como $1 \leq x \leq 2$, então $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{x} \leq 1$. Podemos dizer que $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leq 1$. Sabemos que a sequência numérica $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge para 0. Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon.$$

Logo,

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{nx} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right|\left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon 1 = \epsilon, \text{ para todo } x \in [1,2].$$

Diremos que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma **sequência de Cauchy** quando, para todo $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$, para qualquer $x \in X$.

Temos o seguinte Critério de Cauchy para sequências de funções.

Teorema 2.1. *Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ será uniformemente convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.*

Em virtude do Critério de Cauchy para séries numéricas já ter sido provado, optamos por omitir a demonstração do teorema anterior. No entanto, indicamos a referência [6], para a verificação da mesma.

2.2 Séries de funções

Dada uma sequência (f_n) de funções, vamos considerar agora a soma de seus infinitos termos, isto é, vamos considerar a soma

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n + \cdots$$

que, por analogia ao estudo feito no capítulo anterior, é denominada série de funções.

Definição 2.2. *Considere (f_n) uma sequência de funções definida num subconjunto X de $\mathbb{R}$. À soma dos infinitos termos de (f_n) daremos o nome de **série de funções**. Simbolicamente:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n + \cdots \tag{2.2}$$

Para cada $x \in X$, a série (2.2) se torna uma série numérica, de modo que todos os resultados do capítulo anterior podem ser aplicados.

Exemplo 2.6. Considere a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} + \cdots + \frac{1}{nx} + \cdots \tag{2.3}$$

definida para todo real não nulo.

Fixando $x = 1$, a série (2.3) se reescreve como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

ou seja, a série (2.3) se torna a série harmônica, que diverge.

Observamos que uma série de funções pode convergir para alguns valores e divergir para outros, ainda que no mesmo domínio de definição. O exemplo a seguir ilustra esta afirmação.

Exemplo 2.7. Considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \tag{2.4}$$

definida para todo x real.

Fixando $x_1 = \dfrac{1}{4}$ e $x_2 = 10$, da série de funções (2.4) podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \cdots \tag{2.5}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 10^n = 10 + 100 + 1000 + \cdots + 10^n + \cdots \tag{2.6}$$

Sabemos que a série (2.5) é convergente por ser uma série geométrica com $0 < r = \dfrac{1}{4} < 1$, enquanto a série (2.6) é divergente por ser uma série geométrica com $r = 10 > 1$.

Diremos que uma série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge **simplesmente** (**ou uniformemente**) no conjunto X se a sequência de suas somas parciais $s_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ convergir simplesmente (ou uniformemente) em X.

Diremos que uma série de funções $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge **absolutamente** no conjunto X se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ for absolutamente convergente.

Diante da possibilidade de uma série de funções convergir ou divergir conforme o ponto que consideramos do seu domínio de definição, torna-se importante saber quando existe a convergência uniforme de uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ para uma função f. Vejamos o próximo resultado.

Teorema 2.2 (Teste de Weierstrass). *Considere $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e para cada $x \in X$ pertencente ao domínio de f_n, existe uma constante $M_n > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$. Então, se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ for convergente, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ convergirá uniformemente X.*

Demonstração. Por hipótese, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente. Então, pelo Teste de Comparação, para cada $x \in X$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ também é convergente.

Portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente, para cada $x \in X$. Seja $\epsilon > 0$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, segue do Teorema 1.14 que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, m > n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{j=n+1}^{m} M_j < \epsilon.$$

Assim, para todo $x \in X$ e para quaisquer $m > n \geq n_0$, temos

$$\begin{aligned}|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) \cdots + f_m(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_m(x)| \\ &\leq M_{n+1} + M_{n+2} + \cdots + M_m = \sum_{j=n+1}^{m} M_j < \epsilon.\end{aligned}$$

Segue do Critério de Cauchy para séries de funções que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em X, como queríamos demonstrar.

□

Exemplo 2.8. Considere a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \tag{2.7}$$

definida no intervalo $X = [-1, 1]$. Observe que, para todo $x \in X$,

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente (pois é uma série geométrica de razão $1/2$), segue do Teste de Weierstrass que a série de funções (2.7) converge uniformemente para uma função f definida em X.

Neste caso, podemos até obter esta função explicitamente, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{2 - x}. \tag{2.8}$$

Exemplo 2.9. A série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.9}$$

converge em qualquer intervalo da forma $[-a, a]$. De fato, observe que

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \frac{a^n}{n!}, \quad \forall x \in [-a, a].$$

Como a série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge[2], segue do Teste de Weierstrass que a série (2.9) converge em $[-a, a]$.

[2]Para verificar essa convergência, basta aplicar o Teste da Razão.

2.3 Séries de potências e séries de Taylor

Discutiremos nesta seção a representação de algumas funções elementares como séries de potências. As séries de potências são as séries de funções mais importantes da Análise.

A **série de potências centrada em** a é a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

onde x representa a variável, c_n é uma constante real denominada coeficiente, para cada $n \in \mathbb{N}$, e a é um número real fixado.

Assim como na seção precedente, observe que, ao fixarmos x, uma série de potências passa a ser uma série numérica e os testes de convergência vistos no Capítulo 1, podem ser aplicados; portanto, pode existir convergência para alguns valores e divergência para outros.

Exemplo 2.10. Fazendo $c_n = 1$ para todo índice $n \in \mathbb{N}$ e $a = 0$ em $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ obtemos a soma infinita $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots$, que é uma série geométrica, a qual converge no intervalo $(-1, 1)$ e diverge nos intervalos $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$.

Os testes de convergência são usados para determinar o intervalo real no qual uma série de potências converge. Vejamos o próximo exemplo.

Exemplo 2.11. A série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ converge apenas para $x = 0$. De fato, como $a_n = n!x^n$, pelo Teste da Razão (Teorema 1.16), temos

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{(n+1)!(x+1)^n}{n!x^n}\right| = \lim(n+1)|x| = \infty.$$

Deste modo, a série diverge quando $x \neq 0$. Logo, a série converge somente se $x = 0$.

Dada uma série de potências centrada em a, somente três situações são possíveis no que diz respeito à convergência de sua soma:

1. A série converge apenas quando $x = a$ ou,
2. A serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$ ou,
3. Existe $R > 0$ (denominado raio de convergência) tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| \geq R$.

Exemplo 2.12. Considere a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$. Como $a_n = \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ temos

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}}\frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right| = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} = \frac{|x+2|}{3}.$$

Pelo Teste da Razão, a série dada converge se $\frac{|x+2|}{3} < 1$, ou equivalementemente, se $|x+2| < 3$; deste modo, o raio de convergência desta série é $R = 3$. Para determinar o intervalo de convergência, note que $|x+2| < 3$ equivale ao intervalo $-5 < x < 1$, onde os extremos devem ser testados separadamente.

Quando $x = -5$, temos a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}n(-1)^n$ que é divergente, uma vez que o seu termo geral não tende a zero.

Quando $x = 1$, temos a série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}n$ também divergente, uma vez que o seu termo geral também não tende a zero.

Deste modo, a série dada converge apenas no intervalo aberto $(-5, 1)$.

Neste momento, vamos admitir que o leitor, professor de Matemática do Ensino Médio tenha domínio sobre a teoria de Cálculo Diferencial, ao explorarmos conceitos e técnicas de forma natural.

Dentro do seu intervalo de convergência, uma série de potências define uma função real f que pode ser derivada (e também integrada) termo a termo, de modo que a nova série convirja para a derivada (ou integral) de f, permanecendo o raio de convergência mas, eventualmente, alterando-se o intervalo em que a convergência acontece.

Assim, supondo que a série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ tenha um raio de convergência $R > 0$ então a função

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

é diferenciável (e portanto contínua) em $(a-R, a+R)$ e

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

O Teorema a seguir mostra que, supondo ser possível representar uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ como uma série de potências centrada em a, os coeficientes c_n são dados pelo quociente $\frac{f^n(a)}{n!}$.

Teorema 2.3. *Se f for uma função real que possui expansão em série de potências em torno de $a \in \mathbb{R}$ em seu intervalo de convergência de raio R, ou seja, se f for tal que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

com $|x-a| < R$, então os coeficientes c_n serão determinados de maneira única por

$$c_n = \frac{f^n(a)}{n!}.$$

Demonstração. Como f tem raio de convergência R e admite uma representação em série de potências em torno de $a \in \mathbb{R}$, para $|x-a| < R$ podemos escrever que

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots .$$

Note agora que, se $x = a$, todos os termos se anulam com exceção do primeiro, constante e igual a c_0, de modo que

$$f(a) = c_0.$$

Derivando termo a termo a expansão de f (sempre em $|x-a| < R$), obtemos

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

e novamente fazendo $x = a$ é fácil notar que

$$f'(a) = c_1.$$

Analogamente, derivando a expressão $f'(x)$, vemos que

$$f''(x) = 2c_2 + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \cdots ,$$

e se $x = a$ então

$$f''(a) = 2c_2.$$

Seguindo de maneira iterativa e isolando o n-ésimo coeficiente c_n, obtemos

$$f^n(a) = n!c_n$$

e o resultado segue. □

A determinação dos coeficientes c_n sugere a seguinte definição:

Definição 2.3. *Sendo f uma função real que admite uma expansão em série de potências em torno de $a \in \mathbb{R}$, então*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

*é a **Série de Taylor da função f em torno de** a.*

Observação 2.1. A série de Taylor de uma função f pode ser convergente ou divergente. Para as funções elementares que abordamos neste trabalho (trigonométricas e exponenciais), a convergência da série de Taylor para a função f está assegurada, pois todas elas são *funções analíticas.*

Observação 2.2. A Série de Taylor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$ quando $a = 0$ é também denominada **Série de Maclaurin**.

Na sequência vamos obter a representação de funções elementares, que serão objetos de estudo no próximo capítulo deste trabalho, quando apresentaremos algumas propostas de trabalho com o tema para alunos do Ensino Médio.

Exemplo 2.13. A série de Maclaurin da função trigonométrica real $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \operatorname{sen} x$ é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Para obter a expressão acima, basta notar que

$$f(x) = \operatorname{sen} x \Longrightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \Longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \Longrightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \Longrightarrow f'''(0) = -1$$

e, a partir daí, os valores $f^j(0)$ voltam a se repetir. Assim, a Série de Maclaurin da função seno é dada por

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} + \cdots$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Exemplo 2.14. A série de Maclaurin da função trigonométrica cosseno também pode ser encontrada pelo método acima, ou então por derivação da série de Maclaurin da função seno, uma vez que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$:

$$\cos x = (\operatorname{sen} x)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x)^{2n}}{(2n)!}.$$

Exemplo 2.15. A série de Maclaurin da função exponencial e^x é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!},$$

para todo x real.

Calculando as derivadas sucessivas temos:

$$f(x) = e^x \Longrightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \Longrightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \Longrightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \Longrightarrow f'''(0) = 1$$

de modo que

$$\begin{aligned} &f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} + \dots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

3 Sequências e séries para o Ensino Médio

Neste capítulo apresentaremos a teoria de sequências e séries que geralmente aparecem nos currículos de matemática na Educação Básica. As sequências costumam ser exploradas no contexto das progressões aritméticas e geométricas e as séries aparecem quando se estudam as dízimas periódicas e a soma dos "infinitos" termos de uma progressão geométrica.

Toda esta discussão no Ensino Médio aparece de maneira pouco precisa e intuitiva, pois, nesta etapa de escolarização, os alunos ainda não dispõem da teoria de limites para um estudo aprofundado do tema.

Além disso, na última seção, vamos apresentar algumas propostas de trabalho com somas infinitas e as séries de Maclaurin das funções seno, cosseno e exponencial que se adequam ao trabalho do professor no Ensino Médio. Não se tratam de propostas onde o processo de aprendizagem acontece nos moldes tradicionais com o professor explicando e exemplificando os resultados para em seguida desenvolver exercícios com a classe. Pelo contrário: procuramos propostas de trabalho onde a descoberta por parte dos alunos, o trabalho em grupo e o desenvolvimento de posturas ativas na busca pelo aprendizado são privilegiados e destacados dentro do processo de ensino e aprendizagem.

3.1 Progressões aritméticas

Definição 3.1. *Uma sequência de números reais (a_n) é denominada **progressão aritmética** (ou simplesmente PA) quando cada termo, a partir do segundo, é obtido pela soma do anterior com uma constante $r \in \mathbb{R}$. Simbolicamente, uma PA é caracterizada pela relação*

$$a_{n+1} = a_n + r, \quad n \geq 1. \tag{3.1}$$

A nomenclatura "progressão aritmética" para sequências que satisfazem (3.1) se justifica pois, em todas estas sequências, cada termo, a partir do segundo, é a média aritmética entre seu antecessor e seu sucessor.

Proposição 3.1. *Cada termo, a partir do segundo, de uma sequência caracterizada pela lei de recorrência* (3.1) *é a média aritmética entre seu antecessor e seu sucessor.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência que satisfaz (3.1). Fixe um termo a_k, com $k \geq 2$, considerando também o termo antecessor a a_k e o termo sucessor a a_k:

$$a_{k-1}, a_k, a_{k+1}. \tag{3.2}$$

Notando que

$$a_{k-1} = a_k - r$$

e

$$a_{k+1} = a_k + r,$$

a sequência (3.2) se reescreve como

$$a_k - r, a_k, a_k + r$$

e, portanto, $a_k = \dfrac{(a_k - r) + (a_k + r)}{2} = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$. □

Uma PA é classificada em **crescente**, **decrescente** ou **constante** conforme a constante $r \in \mathbb{R}$ seja positiva, negativa ou nula, respectivamente.

Exemplo 3.1. As sequências

$$10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots$$

$$16, 14, 12, 10, 8, \ldots$$

e

$$2, 2, 2, 2, 2, \ldots$$

são exemplos de PA's com razão $r = 5$, $r = -2$ e $r = 0$, respectivamente; nesta ordem ainda, são classificadas em crescente, decrescente e constante.

Todo termo de uma PA pode ser determinado em função do primeiro deles; de maneira precisa: cada termo x_n de uma PA fica completamente determinado pelo termo a_1 e pela razão r. Usando a relação (3.1), temos:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

$$\vdots$$

e, indutivamente,

$$a_n = a_1 + (n-1)r. \tag{3.3}$$

A expressão (3.3) é denominada **termo geral** da PA.

Exemplo 3.2. Considerando a PA

$$15, 23, 31, 39, \ldots,$$

vamos determinar seu milésimo termo, ou seja, vamos determinar $a_{1.000}$.

Para isso, observe que a PA dada tem $a_1 = 15$ e $r = 8$ e, portanto, de (3.3) escrevemos

$$a_n = 15 + (n-1) * 8. \tag{3.4}$$

Fazendo agora $n = 1.000$ em (3.4), encontramos $a_{1.000}$:

$$a_{1.000} = 15 + (1000 - 1) * 8$$

$$a_{1.000} = 15 + 999 * 8$$

$$a_{1.000} = 15 + 7.992$$

e, portanto,

$$a_{1.000} = 8.007.$$

Sendo uma PA uma sequência infinita que cresce (ou decresce) indefinidamente, não faz sentido falar em soma de todos os termos de uma PA; usando a linguagem do Capítulo 1, dizemos que toda PA de razão não nula é uma sequência divergente e, portanto, a soma de seus termos é também divergente. Contudo, é possível e faz sentido falar na soma dos n primeiros termos de uma PA qualquer. A proposição abaixo permite que obtenhamos facilmente o valor desta soma.

Proposição 3.2. *Seja (a_n) uma progressão aritmética qualquer. A soma dos n primeiros termos da sequência (a_n), denotada por S_n, é dada por*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração. Considere a soma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots. + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \tag{3.5}$$

dos n primeiros termos da sequência (a_n) que, por hipótese, é uma progressão aritmética.

Note agora que, por (3.3), a soma dos extremos é sempre constante, pois:

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r,$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_1 + (n-2)r = 2a_1 + (n-1)r,$$

$$\vdots$$

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)r + a_1 + (n-k)r = 2a_1 + (n-1)r. \tag{3.6}$$

Reordenando os termos de (3.5) e usando (3.6), temos

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_k + a_{n-k+1}) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n). \quad (3.7) \end{aligned}$$

e notando que na última igualdade aparecem $\frac{n}{2}$ parcelas iguais a $(a_1 + a_n)$, o resultado segue. □

3.1.1 Proposta de atividade didática

Apresentamos agora uma proposta didática utilizando progressões aritméticas em um problema de matemática financeira; especificadamente serão abordados juros simples.

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio.

Recursos Pedagógicos: Lousa.

Objetivo Geral: Discutir com os alunos o conceito de juros simples, empregando os conhecimentos prévios sobre progressões aritméticas.

Objetivos Específicos:

1. Ensinar a linguagem básica de matemática financeira aos alunos do Ensino Médio;

2. Desenvolver a teoria de juros simples através da aplicação do conceito de progressão aritmética;

3. Aplicar o conceito de juros simples na resolução de problemas.

Conteúdo: Progressões aritméticas, matemática financeira (juros simples).

Desenvolvimento: Esta proposta será realizada em duas aulas. Na primeira das aulas, após introduzir a linguagem comum de matemática financeira e definir os conceitos de juros, tempo, taxa, montante e outros pertinentes, o professor poderá motivar os alunos com o seguinte problema:

Uma pessoa faz um empréstimo de $R\$2.000,00$ *a ser pago segundo uma capitalização de juros simples em* 24 *parcelas iguais e a uma taxa de* $1,8\%$ *ao mês. Qual o valor de cada uma das parcelas?*

Em grupos, os alunos trabalharão na resolução do problema. O professor supervisionará os grupos verificando as estratégias que os grupos estão considerando. Após esta etapa, o professor mediará um debate onde cada grupo socializará as soluções e estratégias. Fechando a discussão, o professor abordará o problema com o uso das progressões, fazendo depois algumas considerações teóricas acerca do tema, como as feitas abaixo:

Sendo C o capital emprestado, decorrido o primeiro mês, o saldo devedor será igual a $C + iC = C(1 + i)$.

No segundo mês, como o sistema é de juros simples, o saldo devedor será igual a $C + iC + iC = C + 2iC$.

De modo indutivo, percebe-se que a sequência formada pelo saldo devedor mês a mês forma uma progressão aritmética de primeiro termo $a_1 = C$ e razão $r = iC$, onde i é a taxa de juros e C é o capital inicial.

Assim, para determinar o saldo devedor no tempo t é necessário que se determine o $t-$ésimo elemento desta sequência.

No problema apresentado, como $C = 2.000$, $i = 0,018$ e o tempo de pagamento é de 24 meses, é necessário que se determine o elemento a_{24} na PA. Sabemos que

$$a_n = 2.000 + (n-1) * 2.000 * 0,018 = 2.000 + (n-1) * 36$$

e, assim,

$$a_{24} = 2.000 + 23 * 36 = 2.000 + 828 = 2.828.$$

Como as parcelas devem ser todas iguais, a prestação mensal é aproximadamente igual a R$117,83.

Na segunda das aulas desta proposta, o professor apresentará uma lista de problemas que deve ser resolvida pelos alunos em grupos com o uso de progressões aritméticas. Ao final da aula, o professor deduzirá as fórmulas que geralmente são encontradas nos livros didáticos que tratam do tema.

Avaliação: A avaliação é um processo contínuo e terá início na primeira aula, com a verificação da participação, interesse e envolvimento com todas as etapas aqui propostas. Os registros produzidos pelos alunos em grupo serão importantes elementos para o acompanhamento de todo o processo.

3.2 Progressões geométricas

Definição 3.2. *Uma sequência de números a_n é chamada de **progressão geométrica** (ou simplesmente PG) quando cada termo, a partir do segundo, é obtido pelo produto do anterior com uma constante $q \in \mathbb{R}$. Simbolicamente, uma PG é caracterizada pela relação*

$$a_{n+1} = a_n q, \quad n \geq 1. \tag{3.8}$$

A nomenclatura "progressão geométrica" para sequências que satisfazem (3.8) se justifica pois, em todas estas sequências, cada termo, a partir do segundo, é a média geométrica entre seu antecessor e seu sucessor.

Proposição 3.3. *Cada termo, a partir do segundo, de uma sequência caracterizada pela lei de recorrência* (3.8) *é a média geométrica entre seu antecessor e seu sucessor.*

Demonstração. Seja (a_n) uma sequência que satisfaz (3.8) e fixe um termo a_k, com $k \geq 2$, considerando também o termo antecessor a a_k e o termo sucessor a a_k:

$$a_{k-1}, a_k, a_{k+1}. \tag{3.9}$$

Notando que

$$a_{k-1} = a_k q^{-1} \tag{3.10}$$

e

$$a_{k+1} = a_k q, \tag{3.11}$$

a sequência (3.9) se reescreve como

$$a_k q^{-1}, a_k, a_k q.$$

De (3.10) e (3.11), obtemos $a_k = \sqrt{a_k q^{-1} a_k q} = \sqrt{a_{k-1} a_{k+1}}$ □

Uma PG é classificada em **crescente**, **decrescente**, **alternada** ou **constante**:

Definição 3.3. *Uma PG (a_n) será dita:*

1. *Crescente, se $a_1 > 0$, $q > 0$ e $q \neq 1$;*
2. *Decrescente, se $a_1 < 0$, $q > 0$ e $q \neq 1$;*
3. *Alternada, se $q < 0$;*
4. *Constante, se $q = 1$.*

Exemplo 3.3. As sequências

$$5, 10, 20, 40, 80, \ldots$$

$$-2, -6, -18, -54, \ldots$$

$$2, -10, 50, -250, \ldots$$

e

$$5, 5, 5, 5, 5, \ldots$$

são exemplos de PG's com razão $q = 2$, $q = 3$, $q = -5$ e $q = 1$ respectivamente; nesta ordem ainda, são classificadas em crescente, decrescente, alternada e constante.

Todo termo de uma PG pode ser determinado em função do primeiro deles; de maneira precisa: cada termo a_n de uma PG fica completamente determinado pelo termo a_1 e pela razão q. De fato, usando (3.8), temos:

$$a_2 = a_1 q,$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 q = a_1 q^2 q = a_1 q^3$$
$$\vdots$$

e, indutivamente,

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \tag{3.12}$$

A expressão (3.12) é denominada **termo geral** da PG.

Exemplo 3.4. Considerando a PG

$$2, 6, 18, 54 \ldots,$$

vamos determinar seu vigésimo termo, ou seja, vamos determinar a_{20}.

Para isso, observe que a PG dada tem $a_1 = 2$ e $r = 3$. Portanto, de (3.12), escrevemos

$$a_n = 2 * 3^{n-1}. \tag{3.13}$$

Fazendo agora $n = 20$ em (3.13), encontramos a_{20}:

$$a_{20} = 2 * 3^{20-1}$$

$$a_{20} = 2 * 3^{19}$$

$$a_{20} = 2 * 1.162.261.467$$

e, portanto,

$$a_{20} = 2.324.522.934.$$

Observe o crescimento rápido de uma PG. Em geral, uma PG cresce ou decresce muito mais rapidamente que uma PA, pela presença do fator exponencial em (3.8).

Um fato notável sobre as progressões geométricas e que decorre de (3.12) é o fato de que o produto dos extremos é sempre constante, pois:

$$a_1 a_n = a_1 a_1 q^{n-1} = a_1^2 q^{n-1},$$

$$a_2 a_{n-1} = a_1 q a_1 q^{n-2} = a_1^2 q^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$a_k a_{n-k+1} = a_1 q^{k-1} a_1 q^{n-k} = a_1^2 q^{n-1} \tag{3.14}$$

De modo análogo ao que já fizemos para as PA's, é possível deduzir uma expressão para calcular a soma de um número finito de termos de uma PG. A próxima proposição indica como fazer isso.

Proposição 3.4. *Seja (a_n) uma progressão geométrica qualquer. A soma dos n primeiros termos da sequência (a_n), denotada por S_n, é dada por*

$$S_n = \frac{a_1 q^{n-1} - a_1}{q - 1}.$$

Demonstração. Considere a soma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \tag{3.15}$$

dos n primeiros termos da sequência (a_n) que, por hipótese, é uma progressão geométrica.

Notando que os termos de (3.15) podem ser reescritos em função do termo a_1, o problema se reduz a efetuar a soma

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}. \tag{3.16}$$

Multiplicando (3.16) pela razão q, segue que

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^n \tag{3.17}$$

e, subtraindo (3.16) de (3.17), temos

$$qS_n - S_n = a_1 q^{n-1} - a_1$$

de onde, finalmente,

$$S_n = \frac{a_1 q^{n-1} - a_1}{q - 1}. \tag{3.18}$$

□

Decorre do Teorema 1.10 que a "soma infinita" de termos da PG cujo termo geral é $a_n = a_1 q^{n-1}$ converge e, portanto faz sentido, se $|q| < 1$. Neste caso, temos um limite de uma série. Vale, pois, o resultado seguinte:

Proposição 3.5. *A soma S_∞ dos infinitos termos da PG de termo geral $a_n = a_1 q^{n-1}$ onde $|q| < 1$ converge para*

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Exemplo 3.5. A soma dos infinitos termos da PG cujo termo geral é

$$a_n = 2 * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

está bem definida, pois $q = \dfrac{1}{2}$, e tem valor

$$S_\infty = \frac{2}{1 - \dfrac{1}{2}} = 4$$

de acordo com a proposição anterior.

Observação 3.1. Apesar de não ser explicitamente sistematizado no Ensino Médio o conceito de série, a "soma infinita" dos termos de uma PG está diretamente relacionada com a questão da convergência de uma série (a série geométrica). Mesmo quando se desenvolve o estudo das dízimas periódicas e sua respectiva representação racional, o conceito de convergência de uma série novamente aparece e está garantida pelo Teorema 1.10 e pela Proposição 3.5. O próximo exemplo ilustrará este fato.

Exemplo 3.6. Considere a dízima periódica $0,4444\ldots$ que pode alternativamente escrita como

$$0,4444\cdots = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \cdots + \frac{4}{10^n} + \cdots$$

e que pode ser interpretada como a soma dos infinitos termos da progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = \frac{4}{10}$ e razão $q = \frac{1}{10}$, que é convergente. Assim, temos:

$$S_\infty = \frac{\frac{4}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{4}{9}.$$

Nas propostas didáticas apresentadas na sequência, um trabalho com a ideia intuitiva do limite de uma sequência é apresentada.

3.2.1 Propostas de atividades didáticas

Proposta 1: O paradoxo de Aquiles e a tartaruga

A primeira das propostas que apresentamos é um trabalho com o famoso paradoxo de Zenão sobre a corrida fantasiosa entre Aquiles e uma tartaruga.

Para mostrar aos seus adversários no que consistia a unidade ou repouso do ser, evidenciando que o movimento ou pluralidade é impossível, Zenão inventou os paradoxos (para = contra; doxa = opinião).

Segundo Zenão, numa disputa entre Aquiles e uma simples tartaruga, se fosse dada uma pequena vantagem à tartaruga, Aquiles jamais a alcançaria. Isso porque se o espaço fosse divisível ao infinito (observe os divisores de uma régua, por exemplo), Aquiles sempre deveria passar por um ponto dividido entre o infinito e o ponto de partida, ou seja, o espaço seria sempre dividido pela metade, impossibilitando o movimento. Isso significa que, em tempo finito, jamais alguém poderia percorrer uma distância infinita.

A solução clássica para esse paradoxo envolve a utilização do conceito de limite e convergência de séries numéricas e pode ser satisfatoriamente trabalhada com alunos do Ensino Médio. O paradoxo surge ao supor intuitivamente que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita, de tal forma que seria necessário passar um tempo infinito para Aquiles alcançar a tartaruga. No entanto, os infinitos intervalos de tempo descritos no paradoxo formam uma progressão geométrica e sua soma converge para um valor finito, em que Aquiles encontra a tartaruga.

A proposta a ser desenvolvida com os alunos encontra-se detalhada no plano de aula abaixo:

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio.

Recursos Pedagógicos: Laboratório de informática, Lousa.

Objetivo Geral: Desenvolver com os alunos a noção intuitiva de limite de uma sequência.

Objetivos Específicos:

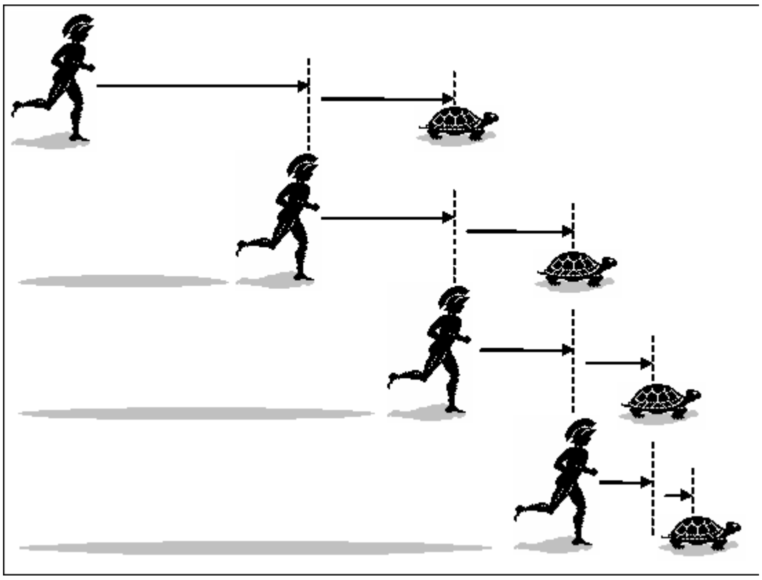

Figura 3.1: Aquiles e a tartaruga

1. Apresentar aos alunos os paradoxos de Zenão enfocando especialmente o problema da corrida entre Aquiles e a tartaruga.

2. Explicar a aparente incapacidade de Aquiles em alcançar a tartaruga usando a noção intuitiva de limite e a ideia de soma de infinitos termos de uma progressão geométrica

Conteúdo: Soma de infinitos termos de uma progressão geométrica; Noção intuitiva de limite.

Desenvolvimento A sequência proposta desenvolver-se-á durante três aulas. Para melhor exposição do trabalho a ser feito, abaixo estão descritos detalhadamente os tópicos cobertos em cada uma das aulas e a dinâmica das aulas.

Na primeira aula, os alunos pesquisarão no laboratório de informática sobre Zenão e seus paradoxos. Em grupos, farão a exposição, ao final da aula, do resultado da pesquisa feita e, num debate mediado pelo professor, os alunos entenderão a importância do pensamento de Zenão e seus famosos problemas (Corrida de Aquiles, Arco e Flecha, Fileiras em Movimento, entre outros).

Na segunda aula, o professor trará para a classe uma variante do problema de Aquiles e da tartaruga pedindo aos alunos que, em grupo, elaborem estratégias matemáticas para explicar a aparente contradição existente. Sugere-se a seguinte variante:

"Aquiles, famoso corredor grego era conhecido por ser invencível. Os melhores corredores gregos o desafiavam na corrida e foram incapazes de vencê-lo. Ao ser desafiado por uma tartaruga, Aquiles riu e disse que daria uma vantagem grande à tartaruga e que mesmo assim, ganharia fácil a corrida. Suponha que Aquiles seja cem vezes mais rápido que a tartaruga e que só comece a correr após a tartaruga estar exatos 10.000 *metros a sua frente."*

Em grupo, os alunos tentarão explicar a contradição aparente. Por que a lógica nos sugere que a tartaruga sempre estará a frente de Aquiles, quando na prática isso não acontece? Após a discussão nos grupos, os alunos apresentarão as justificativas encontradas para a contradição. Após ouvir todos os grupos, o professor argumentará que a aparente contradição se explica porque a distância entre Aquiles e a tartaruga vai sempre diminuindo e que, apesar de serem considerados infinitos intervalos de espaços percorridos, a soma destes infinitos intervalos é finita!

Na terceira aula, o problema será abordado de maneira matemática com os alunos. Quando Aquiles vencer os 10.000 metros que o separa da tartaruga, esta terá avançado mais 100 metros; quando Aquiles avançar os próximos 100 metros que o separa da nova posição da tartaruga, esta terá avançado mais 1 metro e assim sucessivamente. Por mais que sejamos capazes de medir infinitamente a distância entre Aquiles e a tartaruga, a sensação de que ela está sempre na frente se desfaz quando se consideram as somas dos espaços percorridos por Aquiles e pela tartaruga.

Seja (a_n) a sequência dos espaços percorridos por Aquiles. Então,

$$a_1 = 0, a_2 = 10.000, a_3 = 100, a_4 = 1, \ldots.$$

No caso da tartaruga, temos a seguinte sequência (t_n) de espaços percorridos:

$$t_1 = 10.000, t_2 = 100, t_3 = 1, t_4 = 0,01, \ldots$$

Basta agora observar que as duas sequências são idênticas, a menos do primeiro termo; portanto devem convergir para o mesmo valor. Esse valor comum de convergência é dado pela posição em que Aquiles efetivamente passa a tartaruga.

Avaliação: A avaliação é um processo contínuo e terá início na primeira aula, com a verificação da participação, interesse e envolvimento com todas as etapas aqui propostas.

Proposta 2: A Lenda da Criação do Jogo de Xadrez

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio.

Recursos Pedagógicos: Lousa.

Objetivo Geral: Apresentar aos alunos o crescimento exponencial de uma progressão geométrica.

Objetivos Específicos:

1. Discutir com os alunos a lenda acerca da criação do jogo de xadrez;
2. Apresentar o crescimento exponencial das progressões geométricas;
3. Incentivar o interesse dos alunos por jogos de raciocínio como o xadrez.

Conteúdo: Soma (finita) dos termos de uma PG.

Desenvolvimento: Esta é uma atividade para ser aplicada em uma única aula. Os alunos deverão ser agrupados para esta atividade. O professor iniciará a aula apresentando para os alunos a lenda acerca da criação do jogo de xadrez:

"Conta-se que o criador do jogo de xadrez, ao ser chamado por seu rei desejoso de recompensá-lo, fez o seguinte pedido: 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro,

2 grãos de trigo pela segunda e assim sucessivamente, sempre dobrando, até a última das 64 casas."

E após a leitura, questões serão lançadas para a classe. Como sugestão, apresentamos algumas das questões que podem ser feitas:

1. Você acha que o criador do jogo pediu pouco por sua invenção?
2. Será que o trigo pedido caberia todo nesta sala de aula?
3. Como calcular o número de grãos de trigo a ser pago ao inventor do xadrez?

Diante destas questões, é provável que os alunos relacionem o problema com a progressão geométrica

$$2, 4, 8, 16, \ldots$$

de termo geral $a_n = 2^n$. Caso não façam a associação, o professor deve canalizar a discussão para tal, de modo que os alunos percebam a relação entre o problema e a soma dos termos da PG acima. Assim, a quantidade de grãos de trigo devida ao inventor é dada pela soma

$$S_{64} = 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots. + 2^{63} + 2^{64} \tag{3.19}$$

cujo valor é absurdamente alto. De fato, de (3.19) e da Proposição 4.4, segue que

$$S_{64} = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18.446.744.073.709.551.615$$

ou seja, 18 quintilhões, 446 quatrilhões, 744 trilhões, 73 bilhões, 709 milhões, 551 mil e 615 grãos de trigo!

Após a resolução da questão, o professor pode discutir com os alunos a propriedade de uma PG crescer acima de qualquer limite atingindo valores imensuráveis em poucos termos desde que sua razão seja positiva.

Avaliação: A avaliação é um processo contínuo e acontecerá durante toda a aula, com a verificação da participação, interesse e envolvimento com todas as etapas aqui propostas.

3.3 Funções vistas como somas infinitas

De acordo com a teoria desenvolvida no capítulo anterior e com os Exemplos 2.13, 2.14 e 2.15, as funções seno, cosseno e exponencial podem ser interpretadas como somas infinitas, que convergem para todo x real:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x)^{2n}}{(2n)!}$$

e

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Apesar de não serem apresentados desta forma no Currículo de Matemática da Educação Básica, propomos nesta seção duas atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, de modo que os alunos possam identificar as funções elementares seno, cosseno e exponencial com suas respectivas séries.

Proposta 1: Tabelas de senos e cossenos

Esta proposta objetiva apresentar aos alunos procedimentos para se calcular os valores das funções trigonométricas seno e cosseno com o auxílio de uma calculadora comum, de modo que eles entendam o processo pelo qual tabelas com estes valores são construídas.

Parte da atividade a ser desenvolvida será com o auxílio de planilhas eletrônicas e os alunos serão incentivados a identificar as funções seno e cosseno com suas séries de Maclaurin.

Vimos no capítulo anterior que as séries de Maclaurin das funções seno e cosseno são idênticas à essas funções para todo x real. Portanto, utilizando medidas em radianos é possível aproximar os valores exatos pelas séries correspondentes. Este será o argumento principal da atividade a ser desenvolvida.

A atividade se desenvolverá de maneira intuitiva, de modo que os alunos concluam a vantagem da representação de tais funções através das somas infinitas. Detalhadamente temos:

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio.

Recursos Pedagógicos: Laboratório de informática.

Objetivo Geral: Apresentar as funções seno e cosseno como limites de certas somas infinitas.

Objetivos Específicos:

1. Ensinar a manipulação de planilhas eletrônicas;

2. Apresentar as funções seno e cosseno como limites de somas infinitas e o processo que pode ser usado para a construção de tabelas de valores para tais funções;

3. Retomar a resolução de problemas de aplicação de trigonometria.

Conteúdo: Funções seno e cosseno; tabelas trigonométricas.

Desenvolvimento: Esta é uma proposta para ser realizada em quatro aulas. Na primeira aula, os alunos aprenderão a usar planilhas eletrônicas. O professor ensinará o uso de fórmulas, o cálculo de funções matemáticas e as ferramentas básicas para que o aluno use a planilha eletrônica corretamente.

Nas duas aulas seguintes desta proposta de trabalho, os alunos, em grupos, receberão uma tabela trigonométrica e uma tabela para ser preenchida com uso da planilha eletrônica cujo modelo está dado abaixo:

x **(Graus)**	x **(Radianos)**	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x)^{2n}}{(2n)!}$
10					
30					
45					
60					
80					
90					
120					
250					

As duas últimas colunas poderão causar dificuldades aos alunos, cabendo ao professor explicar, previamente, o significado de cada uma delas e sugerindo que os alunos calculem a soma de cinco ou seis parcelas apenas em cada uma. Ao ser questionado pela classe sobre o porquê de somar poucos termos quando a soma na verdade é infinita, o professor retomará o argumento do paradoxo de Zenão; trata-se de uma soma que se aproxima de um certo valor fixo e cujos acréscimos de novas parcelas cada vez contribuem menos com o valor da soma. Uma vez preenchida a tabela, os alunos serão convidados a responder algumas questões:

a) O que se percebe nessa tabela?

b) Quais as regularidades?

c) Modifique os valores dados na primeira coluna. A regularidade observada se mantém?

Após as questões, o professor finalizará a atividade concluindo com os alunos que as funções seno e cosseno podem ter seus valores calculados através das somas das duas últimas colunas.

Na quarta aula desta proposta, o professor solicitará um trabalho manual aos alunos. Cada grupo de alunos receberá um problema de aplicação de trigonometria e deverá solucioná-lo sem dispor de um tabela de valores das funções trigonométricas, usando quando necessário uma calculadora comum para encontrar os valores de seno e cosseno necessários. Trata-se de uma oportunidade de retomar problemas de trigonometria com os alunos, além de convencê-los da utilidade da representação das funções seno e cosseno como somas infinitas.

Avaliação: A avaliação é um processo contínuo e terá início na primeira aula, com a verificação da participação, interesse e envolvimento com todas as etapas aqui propostas. As planilhas produzidas e os registros produzidos pelos alunos em grupo serão importantes elementos para o acompanhamento de todo o processo.

Proposta 2: O número de Euler

Nesta proposta, vamos apresentar o número de Euler (o irracional e) através de uma soma infinita.

Geralmente o que se verifica na literatura voltada ao Ensino Médio é que a apresentação do número de Euler se dá através de uma definição no mínimo estranha e sem justificativa nenhuma para o aluno; geralmente ao final do desenvolvimento da teoria dos logaritmos, se apresenta o número e como o irracional base de um sistema de logaritmos, chamados de naturais, e cujo valor é aproximado por $2,71828\ldots$.

Nesta proposta didática, apresentamos o número de Euler como uma soma infinita; a expressão desta soma segue facilmente da expansão da exponencial e^x em série de Maclaurin. Novamente o uso de planilhas eletrônicas será incentivado. Além disso, a apresentação do número de Euler é uma excelente oportunidade para trabalhar com os alunos tópicos de História da Matemática.

Detalhadamente, a proposta é a seguinte:

Público Alvo: Alunos do Ensino Médio.

Recursos Pedagógicos: Laboratório de Informática.

Objetivo Geral: Apresentar a definição rigorosa do número de Euler como limite de uma série, como alternativa à definição como base dos logaritmos naturais, presente nos livros destinados ao Ensino Médio.

Objetivos Específicos:

1. Definir o número de Euler como limite de uma soma infinita;
2. Pesquisar aplicações do número de Euler.

Conteúdo: Exponencial; Número de Euler.

Desenvolvimento: Esta proposta será realizada em duas aulas. A primeira aula do tema terá início com a leitura em sala de aula da definição do número de Euler presente nos livros de matemática do Ensino Médio. É provável que ele seja definido como *número irracional utilizado como base do sistema de logaritmos naturais e cujo valor aproximado é* $2,71828\ldots$. A discussão com a classe se dará sobre este valor para o número de Euler; de onde ele surge? Como justificar isso? Onde este número aparece? Em grupos, os alunos pesquisarão na internet respostas para estas perguntas e, ao final da aula, uma discussão coletiva sobre as conclusões de cada grupo se seguirá.

Na segunda aula desta proposta, o professor apresentará a seguinte soma:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots .$$

Com o auxílio da planilha eletrônica, já apresentada aos alunos, os grupos calcularão seu valor. Abaixo são apresentadas as somas obtidas, com precisão de nove casas decimais, quando se somam $5, 10, 15, 20$ e 25 termos desta soma:

Número de Parcelas	**Valor de** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
5	2,716666667
10	2,718281801
15	2,718281828
20	2,718281828
25	2,718281828

Esta tabela será construída com os alunos ao final da discussão desta aula, onde cada grupo apresentará os dados obtidos.

Após a socialização dos resultados com a classe, algumas discussões podem ser levantadas:

a) O que sugere o resultado da soma dos termos de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$?

b) Como se poderia definir o número de Euler nos livros de matemática?

Espera-se que ao final do debate, o aluno perceba que, de modo semelhante ao que acontece com o seno e o cosseno, o número de Euler também pode ser apresentado como uma soma infinita. Sendo de interesse comum dos alunos, o professor pode sugerir que estes pesquisem mais sobre somas infinitas e apresentem os resultados aos demais.

Avaliação: A avaliação é um processo contínuo e terá início na primeira aula, com a verificação da participação, interesse e envolvimento com todas as etapas aqui propostas. As planilhas produzidas e os registros produzidos pelos alunos em grupo serão importantes elementos para o acompanhamento de todo o processo.

Referências

[1] G. Ávila, *Cálculo II*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., SBM Editora, São Paulo, 1981

[2] C. B. Boyer, *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1974.

[3] H. L. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo*, Vol. 2, Livros Técnicos e Científicos S.A, Rio de Janeiro, 2001.

[4] H. L. Guidorizzi, *Um curso de Cálculo*, Vol. 4, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2002.

[5] G. Iezzi, *Fundamentos de Matemática Elementar*, Vol. 4, São Paulo, 1998.

[6] E.L. Lima, *Análise Real*, Vol. 1, SBM Editora, Rio de Janeiro, 2001.

[7] E. L. Lima, *Espaços Métricos*, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[8] E. L. Lima, *Meu professor de matemática e outras histórias*, SBM Editora, Rio de Janeiro, 2011.

[9] E. L. Lima, P. C. P. Morgado, E. Wagner, A. C. Morgado, *A matemática do Ensino Médio*, Vol. 2, SBM Editora, Rio de Janeiro, 2011.

[10] E. L. Lima, P. C. P. Morgado, E. Wagner, A. C. Morgado, *A matemática do Ensino Médio*, Vol. 4, SBM Editora, Rio de Janeiro, 2011.

[11] A. Shenk, *Cálculo e Geometria Analítica*, Vol.2, Editora Campus, São Paulo, 1987.

[12] G. F. Simmons, *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol.2, Ed. McGraw Hill, São Paulo, 1987.

[13] J. Stewart, *Cálculo*, Vol.2, Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2001.

[14] E. W. Swokowski, *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol.2, Makron Books, São Paulo, 1994.

[15] G. B. Thomas, *Cálculo*, Vol.2, Addison Wesley, São Paulo, 2003.