

**AJUSTES DE MODELOS NÃO LINEARES DE EFEITOS FIXOS,
COM PONDERAÇÃO E MISTO**

Glauber Márcio Silveira Pereira

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para a obtenção do título de Mestre em Biometria.

BOTUCATU
São Paulo - Brasil
Fevereiro - 2014

**AJUSTES DE MODELOS NÃO LINEARES DE EFEITOS FIXOS,
COM PONDERAÇÃO E MISTO**

Glauber Márcio Silveira Pereira

Orientadora: Profa. Dra. **Lídia Raquel de Carvalho**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para a obtenção do título de Mestre em Biometria.

BOTUCATU
São Paulo - Brasil
Fevereiro - 2014

Ficha Catalográfica

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA SEÇÃO TÊC. AQUIS. TRATAMENTO DA INFORM.
DIVISÃO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO - CAMPUS DE BOTUCATU - UNESP
BIBLIOTECÁRIA RESPONSÁVEL: ROSEMEIRE APARECIDA VICENTE - CRB 8/5651

Pereira, Glauber Márcio Silveira.

Ajustes de modelos não lineares de efeitos fixos, com ponderação e misto /
Glauber Márcio Silveira Pereira. - Botucatu, 2014

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de
Bióciências de Botucatu

Orientador: Lídia Raquel de Carvalho

Capes: 10202064

1. Biometria - Estudos longitudinais. 2. Modelos não lineares (Estatística). 3.
Estatística matemática. 4. Logística.

Palavras-chave: Curvas de crescimento; Dados longitudinais; Estruturas de efeitos
mistos; Estruturas de efeitos ponderados; Modelos não-lineares.




UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Botucatu



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE GLAUBER MÁRCIO SILVEIRA PEREIRA, INTITULADA "AJUSTES DE MODELOS NÃO LINEARES DE EFEITOS FIXOS, COM PONDERAÇÃO E MISTO", APRESENTADA AO INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, UNESP, CAMPUS DE BOTUCATU, SÃO PAULO, EM 17 de fevereiro de 2014.

APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA:

Prof(a) Dr(a) LIDIA RAQUEL DE CARVALHO
Instituição: Instituto de Biociências de Botucatu
Assinatura: 

Prof(a) Dr(a) JOSE SILVIO GOVONE
Instituição: Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Assinatura: 

Prof(a) Dr(a) SILVIO SANDOVAL ZOCCHI
Instituição: Universidade de São Paulo
Assinatura: 

Dedicatória

Eu dedico este trabalho a Deus que sempre me tem dado forças para prosseguir e a minha família por fazer parte da minha vida em todos os momentos.

Agradecimentos

A Deus.

À minha família.

À minha noiva Érica Boizan Batista que sempre me apoiou nas minhas decisões.

À todos os meus colegas de mestrado pelo companheirismo.

À minha orientadora Profa. Dra. Lídia Raquel de Carvalho e Profa. Dra. Martha Maria Mischan, pela orientação neste projeto.

À todos os docentes que puderam passar um pouco do conhecimento acadêmico.

À todos os funcionários que sempre estiveram dispostos a auxiliar.

Ao Prof. Dr. José Raimundo de Souza Passos que através do Prof. Dr. Edson Furtado, forneceu os dados de volume do tronco de *Eucaliptus grandis* e Profa. Dra. Martha Maria Mischan que forneceu os dados de massa de frutos de laranjeiras doces *Citrus sinensis* (L.) Osbeck.

Ao departamento de Bioestatística.

À Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP)
que mantém programas de pós-graduação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CA-
PES, pelo apoio financeiro.

Sumário

	Página
LISTA DE FIGURAS	x
LISTA DE TABELAS	xii
RESUMO	xv
SUMMARY	xviii
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO DE LITERATURA	3
3 MATERIAL E MÉTODOS	9
3.1 Material	9
3.1.1 Perfis	12
3.2 Metodologia Estatística	15
3.2.1 A geometria da superfície de esperança	16
3.2.2 Determinação das estimativas de mínimos quadrados	16
3.2.3 O método de Gauss-Newton	17
3.2.4 Método da Máxima Verossimilhança	18
3.3 Modelos	19
3.3.1 Modelo logístico	19
3.3.2 Modelo de Gompertz	22
3.3.3 Modelo von Bertalanffy	25

	ix
3.3.4 Modelo de Richards	27
3.4 Estimativas iniciais para os parâmetros	30
3.4.1 Modelo logístico	30
3.4.2 Modelo de Gompertz	30
3.4.3 Modelo de Richards	30
3.5 Análise de Resíduos	31
3.5.1 Teste de Durbin-Watson	32
3.5.2 Teste de Breusch-Pagan	33
3.5.3 Teste de Shapiro-Wilk	34
3.6 Ponderação	35
3.7 Modelos de efeitos Mistos	36
3.8 Critérios de seleção dos modelos	37
3.9 Aplicações	40
4 RESULTADOS	42
4.1 Dados de volume do tronco de <i>Eucalyptus grandis</i>	42
4.1.1 Ajuste único	42
4.1.2 Ajustes individuais	48
4.2 Dados de massa de frutos de laranjeiras doces <i>Citrus sinensis</i> (L.) Osbeck.	58
4.2.1 Resultados das análises de variância não paramétricas para comparação de copas e porta-enxertos.	61
5 DISCUSSÃO	74
5.1 Dados de volume do tronco de <i>Eucalyptus grandis</i>	74
5.2 Dados de massa de frutos de laranjeiras doces <i>Citrus sinensis</i> (L.) Osbeck	75
6 CONCLUSÕES	77
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79

Lista de Figuras

Página

1	Valores observados e estimados pelo modelo de Gompertz ($f(x, \boldsymbol{\theta}) = \alpha \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\}$), referentes ao volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i> nas três regiões.	12
2	Valores observados e estimados pelo modelo Logístico $\left(f(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, referentes às copas - dados de massa de frutos de laranjeiras doces <i>Citrus sinensis</i> (L.) Osbeck.	13
3	Valores observados e estimados pelo modelo Logístico $\left(f(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, referentes às copas - dados de massa de frutos de laranjeiras doces <i>Citrus sinensis</i> (L.) Osbeck.	14
4	Exemplo de gráfico referente à função logística. $f(x, 1, -4, 2) = \frac{1}{1 + e^{-(-4+2x)}}$	20
5	Exemplo de gráfico referente à função Gompertz. $f(x, 2, 3, 1) = 2 \exp\{-\exp\{3 - x\}\}$	23
6	Exemplo de gráfico referente à função von Bertalanffy. $f(x, 2, 1, 3) = 2(1 - e^{-3x})^3$	26
7	Exemplos de gráficos referente à função Richards. (a) $f(x, 2, 1, 1) = 2(1 + e^{-3x})^1$, (b) $f(x, 2, 1, 2) = 2(1 + e^{-3x})^2$, (c) $f(x, 2, 1, 3) = 2(1 + e^{-3x})^3$ (d) $f(x, 2, 1, 5) = 2(1 + e^{-3x})^5$, (e) $f(x, 2, 1, 10) = 2(1 + e^{-3x})^{10}$, (f) $f(x, 2, 1, 20) = 2(1 + e^{-3x})^{20}$	28
8	Ajustes médios do modelo de Gompertz ($f(x, \boldsymbol{\theta}) = \alpha \exp\{-\exp\{\beta + \gamma x\}\}$), segundo região - dados de volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i>	56

9	Ajustes médios do modelo de Gompertz ($f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \exp\{-\exp\{\beta + \gamma x\}\}$), segundo região e linhas por região - dados de volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i> (m^3).	57
10	Ajustes médios do modelo Logístico $\left(f(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, segundo copas dentro do porta-enxerto TR - dados de volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i>	70
11	Ajustes médios do modelo Logístico $\left(f(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, segundo copas dentro do porta-enxerto TR - dados de volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i>	71
12	Ajustes médios do modelo Logístico $\left(f(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, segundo copas dentro do porta-enxerto TR - dados de volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i>	72
13	Ajustes médios do modelo Logístico $\left(f(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, segundo copas dentro do porta-enxerto TR - dados de volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i>	73

Lista de Tabelas

Página

1	Quadro 77. Produção (Kg/parcela) das laranjeiras Hamlim, no ano de 1969	10
2	Estimativa dos parâmetros, com seus respectivos erros-padrão, quadrado médio do resíduo e valores de p para os testes de Breusch Pagan e Durbin Watson para a estrutura de erros de efeitos fixos para os quatro modelos - dados de volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i>	43
3	Estimativa dos parâmetros, com seus respectivos erros-padrão, quadrado médio do resíduo e valores de p para os testes de Breusch Pagan e Durbin Watson para a estrutura de erros com ponderação para os quatro modelos - dados de volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i>	44
4	Estimativa dos parâmetros, com seus respectivos erros-padrão, quadrado médio do resíduo e valores de p para os testes de Breusch Pagan e Durbin Watson para a estrutura de erros de efeitos mistos para os quatro modelos - dados de volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i>	45
5	Coefficiente de correlação ao quadrado, Critério de informação de Akaike e Critério de Informação Bayesiano de Schwarz segundo estruturas e modelos ajustados para as três regiões de plantio - dados de volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i> (m^3).	47
6	- Valores mínimos, máximos, mediana, média, desvio-padrão e coeficiente de variação referentes às estimativas dos parâmetros para os modelos ajustados em cada região para a estrutura com ponderação - dados de volume do tronco de <i>Eucaliptus grandis</i>	49

7	Valores mínimos, máximos, mediana, média, desvio-padrão e coeficiente de variação referentes aos coeficientes de correlação ao quadrado e peso de Akaike para os modelos ajustados em cada região para a estrutura com ponderação - dados de volume do tronco de <i>Eucalyptus grandis</i>	51
8	Valores mínimos, máximos, mediana, média, desvio-padrão e coeficiente de variação referentes ao coeficiente correlação ao quadrado e valores p para os testes de Breusch-Pagan, Durbin Watson e Shapiro-Wilk para o modelo de Gompertz em cada região para a estrutura com ponderação - dados de volume do tronco de <i>Eucalyptus grandis</i>	53
9	Resultados das análises individuais em 402 repetições nas três regiões avaliando o número e porcentagem de não convergência, melhor ajuste e problemas com autocorrelação para cada um dos modelos - dados de volume do tronco de <i>Eucalyptus grandis</i>	54
10	Mediana, 1º e 3º quartil, entre colchetes, referentes às estimativas dos parâmetros ajustados pela função Gompertz segundo regiões - dados de volume do tronco de <i>Eucalyptus grandis</i>	55
11	Estimativas dos parâmetros e seus respectivos erros-padrão segundo copa e porta-enxerto para as três estruturas (modelo logístico - dados de massa de laranjeiras doces <i>citrus sinensis</i>). Continua	59
12	Estimativas dos parâmetros e seus respectivos erros-padrão segundo copa e porta-enxerto para as três estruturas (modelo logístico - dados de massa de laranjeiras doces <i>citrus sinensis</i>). Conclusão	60
13	Coeficiente de correlação ao quadrado, <i>AIC</i> e <i>BIC</i> , e indicação da estrutura mais apropriado segundo copa e porta-enxerto para o modelo logístico - dados de massa de laranjeiras doces <i>citrus sinensis</i>	62

- 14 Valores de p para os testes de Breusch -Pagan e Durbin Watson e avaliação da necessidade de correção da heterogeneidade e autocorrelação, segundo copa e porta-enxerto para o modelo logístico - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*. 63
- 15 Valores mínimos, máximos, mediana, média, desvio-padrão e coeficiente de variação referentes ao coeficiente correlação ao quadrado e valores p para os testes de Breusch-Pagan, Durbin Watson e Shapiro-Wilk para o modelo logístico em cada copa para a estrutura com ponderação - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*. 64
- 16 Mediana, 1^o e 3^o quartil, referentes às estimativas do parâmetro α segundo copa e porta-enxerto - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*. 65
- 17 Mediana, 1^o e 3^o quartil, referentes às estimativas do parâmetro β segundo copa e porta-enxerto - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*. 67
- 18 Mediana, 1^o e 3^o quartil, referentes às estimativas do parâmetro γ segundo copa e porta-enxerto - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*. 69

AJUSTES DE MODELOS NÃO LINEARES DE EFEITOS FIXOS, COM PONDERAÇÃO E MISTO

Autor: GLAUBER MÁRCIO SILVEIRA PEREIRA

Orientadora: Profa. Dra. LÍDIA RAQUEL DE CARVALHO

RESUMO

Modelos não lineares tendem a ser usados quando são sugeridos por considerações teóricas, ou por comportamentos não lineares. Mesmo quando uma aproximação linear é aceitável, um modelo não linear pode ainda ser utilizado para se obter uma interpretação clara dos parâmetros. Modelos não lineares têm sido aplicados a uma variedade de situações, mesmo em populações finitas.

O objetivo desta pesquisa foi:

- O estudo do modelo Logístico com ajustes em três estruturas de erros: de efeitos fixos, com ponderação e de efeitos mistos, a dados de massa de frutos de laranjeiras doces *Citrus sinensis* (L.) Osbeck em um experimento com cinco copas enxertadas em porta-enxertos situado na Fazenda Experimental Lageado em Botucatu. A produção de laranjas foi controlada em massa de frutos

produzida por plantas em cada safra, anualmente, no período de abril-maio, nos anos de 1969 a 1974, sendo a massa determinada de cada planta em kg.

- O estudo dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Richards com ajustes em três estruturas de erros: de efeitos fixos, com ponderação e de efeitos mistos a dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*, obtidos em três regiões de plantio pertencentes a Votorantim Celulose e Papel. Esta região foi escolhida por constituir favoravelmente a ocorrência da ferrugem do Eucalipto e também por se encontrarem grandes maciços de reflorestamento destinados tanto para recuperação de áreas degradadas como para fins de produção em empresas privadas.

Os critérios utilizados para a seleção de modelos foram: Quadrado médio dos resíduos, Critério de informação de Akaike, Peso de Akaike MOTULSKY & CHISTOPOULOS (2004), Critério de Informação Bayesiano de Schwarz, teste de Breusch-Pagan, teste de Durbin-Watson, teste de Shapiro-Wilk e coeficiente de correlação ao quadrado.

Para o estudo da massa de frutos das laranjeiras, a estrutura com ponderação se mostrou mais adequada, pois corrigiu o problema de heterocedasticidade e autocorrelação.

Para os dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis* a estrutura com ponderação também foi a mais adequada e quanto à escolha do melhor modelo, o de Richards foi o que se mostrou mais adequado em termos de coeficiente de correlação ao quadrado, AIC, BIC e peso de Akaike, porém teve um percentual de convergência de 70%; em segundo lugar foi o de Gompertz, com 100% de convergência; em terceiro lugar o von Bertalanffy e por último o logístico, ambos com aproximadamente 100% de convergência. Os pesos de Akaike mostraram que

em média a probabilidade do modelo de Richards estar correto era de 0,67 em relação ao Gompertz e de 0,60 de Gompertz em relação ao von Bertalanffy.

Palavras-chave: modelos não-lineares, estruturas de efeitos mistos, estruturas de efeitos ponderados, curvas de crescimento, dados longitudinais.

ADJUSTMENTS OF NONLINEAR MODELS WITH FIXED, WEIGHTED AND MIXED EFFECTS

Author: GLAUBER MÁRCIO SILVEIRA PEREIRA

Adviser: Prof. Dr. LÍDIA RAQUEL DE CARVALHO

SUMMARY

Nonlinear models tend to be used when it is suggested by theoretical considerations or by non-linear behavior. Even when a linear approximation is acceptable, a non-linear can also be used to obtain a clear understanding of the parameters. Nonlinear models have been applied to a variety of situations, even at finite populations.

The objective of this research was:

- To study the Logistic model with adjustments in three errors structures: the fixed effects structure, structure with weighting and mixed-effects structure. It was used data of sweet orange fruit *Citrus sinensis* (L.) Osbeck in an experiment with five hearts grafted onto rootstock located at the Experimental Farm

Lageado in Botucatu. Orange production was controlled by mass of fruits produced by plants in each crop annually in the period from April to May in the years 1969 to 1974, with the given mass of each plant in kg.

- To study of logistic, Gompertz, von Bertalanffy and Richards models with adjustments in three errors structures: the fixed effects structure, the weighting structure and mixed effects structure adjusted to data of volume of the trunk of *Eucalyptus grandis*, from three growing regions belonging to Votorantim Celulose e Papel. This region was chosen because favorably constitute the occurrence of rust of Eucalyptus and also because they are great for massive reforestation to restore degraded areas and for production purposes in both private companies.

The criteria used for the selection of models were: Error mean square, Akaike information criterion, Akaike weight MOTULSKY & CHISTOPOULOS (2004), Bayesian Information Criterion Schwarz, Breusch Pagan test, Durbin Watson Test and squared correlation coefficient.

To study the weight of fruit of the orange, the structure with weighting was more appropriate, since fixed the problem of heteroscedasticity and autocorrelation. For the data of volume of the trunk of *Eucalyptus grandis*, the structure with weighting was also the most appropriate. In the choice of the best model, Richards was the one that proved better, but had a convergence percentage of 70%; second was the Gompertz, with 100% of convergence; thirdly was the von Bertalanffy and lastly the logistics, both with approximately 100% convergence. Akaike weights showed that on average the probability of Richards being the correct model compared to Gompertz was 0,67 and Gompertz compared to von Bertalanffy was 0,60.

Keywords: non-linear models, mixed effects structure, weighted structure, growth curves, longitudinal data.

1 INTRODUÇÃO

Segundo SEBER & WILD (1989), uma importante tarefa em estatística é encontrar relações entre variáveis. Se em um grupo de variáveis existir relações e uma variável é aleatória, a resposta pode ficar sujeita a flutuações e possivelmente a erros de medida. Em problemas de regressão tipicamente, uma das variáveis, geralmente chamada variável resposta ou dependente, é de particular interesse e denotada por Y . As outras variáveis, X_1, X_2, \dots, X_k , usualmente chamadas variáveis explicativas ou regressoras, ou variáveis independentes, são geralmente utilizadas para prever ou explicar o comportamento de Y . Os gráficos dos dados sugerem alguma relação entre Y e os X_i , e se espera que esta relação possa ser expressa através de um modelo.

Entretanto, na prática, particularmente nas áreas biológicas, o processo é geralmente complexo e não muito bem entendido. Isto significa que se tem uma vaga idéia ou nenhuma idéia sobre a forma de relação entre as variáveis e o objetivo é encontrar algum modelo que seja o mais próximo possível dos dados.

Modelos não lineares tendem a ser usados quando são sugeridos por considerações teóricas, ou por comportamentos não lineares. Mesmo quando uma aproximação linear é aceitável, um modelo não linear pode ainda ser utilizado para se obter uma interpretação clara dos parâmetros. Modelos não lineares têm sido aplicados a uma variedade de situações, mesmo em populações finitas.

O objetivo desta pesquisa foi o estudo do modelo Logístico com ajustes

em três estruturas de erros: de efeitos fixos, com ponderação e de efeitos mistos, a dados de massa de frutos de laranjeiras doces *Citrus sinensis* (L.) Osbeck em um experimento com cinco copas enxertadas em portas-enxerto situado na Fazenda Experimental Lageado em Botucatu. Também o estudo dos modelos Logístico, Gompertz, von Bertalanffy e Richards com ajustes em três estruturas de erros: de efeitos fixos, com ponderação e de efeitos mistos a dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*, obtidos em três regiões de plantio pertencentes a Votorantim Celulose e Papel.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Nos modelos lineares segundo NETER & WASSERMAN (1974), DRAPER & SMITH (1981), o problema de estimação dos parâmetros, cai no problema de resolver um sistema de equações lineares com relação aos coeficientes de regressão desconhecidos. Existe uma solução única e, portanto, obtemos uma forma analítica de estimação dos parâmetros. Esta forma é a mesma para qualquer modelo e qualquer conjunto de dados. Além disso, havendo normalidade nos erros, como os coeficientes são combinações lineares das observações, pela teoria estatística, demonstra-se que a distribuição amostral dos coeficientes de regressão segue uma distribuição t , assim, podemos realizar os testes de hipóteses, calcular os intervalos de confiança para esses coeficientes. Existem, entretanto, muitas situações nas quais não é desejável, ou mesmo possível, descrever um fenômeno através de um modelo de regressão linear. Ao invés de se fazer uma descrição puramente empírica do fenômeno em estudo, pode-se, a partir de suposições importantes sobre o problema (frequentemente dadas através de uma ou mais equações diferenciais), trabalhar no sentido de obter uma relação teórica entre as variáveis observáveis de interesse.

O problema no caso não linear, diferentemente do caso linear, é que os parâmetros entram na equação de forma não linear, assim, não se pode simplesmente aplicar fórmulas para estimar os parâmetros, recorre-se a procedimentos iterativos.

As funções não lineares têm várias aplicações em diversas áreas, por isto a importância deste estudo. Procuramos apresentar exemplos onde os modelos estudados foram similares aos utilizados neste trabalho, bem como salientar os

critérios de seleção utilizados pelos autores.

SILVA et al. (2001) ajustaram a funções de crescimento de Brody, Logística, Gompertz, Richards e von Bertalanffy para descrever o crescimento de 542 animais da raça Nelore, sendo 183 machos e 359 fêmeas, pesados bimestralmente do nascimento aos 550 dias de idade. As funções foram ajustadas através dos mínimos quadrados generalizados para modelos de regressão não-linear com erros auto-regressivos de primeira ordem. Elas apresentaram coeficientes de determinação próximos de 98% e 99%. Concluíram que as funções de von Bertalanffy, Gompertz e Logística superestimaram o peso inicial e subestimaram o peso adulto dos animais, e que as funções de Brody e Richards apresentaram um melhor comportamento em relação às demais.

SCHINCKEL & CRAIG (2002) usaram modelos não lineares de efeitos mistos como uma alternativa para estudar o crescimento de porcos. A otimização dos sistemas de produção de suínos envolvendo a avaliação de manejos alternativos e estratégias de mercado requer conhecimento da variabilidade entre e dentro do peso ao nascer. Estes modelos fornecem parâmetros necessários para a modelagem estocástica, que é necessário para avaliar o impacto econômico das mudanças que reduzem a quantidade de variação. Concluíram que os modelos não lineares de efeitos mistos permitem uma estimativa mais precisa das funções do crescimento dos animais que os modelos tradicionais de efeitos fixos.

MAZZINI et al. (2003) ajustaram as funções de Brody, Gompertz, Logística, Richards e von Bertalanffy a dados de crescimento de bovinos Hereford. A estimativa dos parâmetros para modelos de regressão não-linear foi feita pelo método dos Quadrados Mínimos Ponderado. Para isso, utilizou-se o procedimento MODEL (PROC MODEL) do software Statistical Analysis System (SAS). Foram obtidos ajustes de curvas individuais para os animais em dois diferentes modelos:

não-ponderado e ponderado pelo inverso da variância dos pesos, com o objetivo de levar em consideração a heterogeneidade das variâncias. A comparação entre os modelos foi feita pela interpretação biológica dos parâmetros e dos avaliadores da qualidade de ajuste (coeficiente de determinação ajustado, quadrado médio do resíduo, erro de predição médio, teste t de Student, para as estimativas dos parâmetros “ A ” e “ K ” e percentual de convergência). O melhor modelo foi o ponderado pelo inverso da variância dos pesos. As funções que apresentaram melhor ajuste foram as de von Bertalanffy e Gompertz, seguidas da Logística. As funções de Brody e Richards apresentaram um baixo percentual de convergência, isto é, a maioria das repetições não convergiu, mostrando-se inadequadas para descrever os dados em estudo.

MAZZINI et al. (2005) ajustaram os modelos de crescimento de Brody, Gompertz, Logístico e von Bertalanffy a dados de peso e idade de novilhos Hereford utilizando os métodos dos quadrados mínimos ordinários, quadrados mínimos ponderados, quadrados mínimos ponderados generalizados com erros autoregressivos de primeira e segunda ordens. Compararam os modelos pelos avaliadores de qualidade do ajuste: percentual de convergência, quadrado médio do resíduo, coeficiente de determinação ajustado e erro de predição médio. Concluíram que os modelos de Gompertz e von Bertalanffy ajustados pelos métodos dos quadrados mínimos ponderados e os ponderados generalizados com erros autoregressivos de primeira e segunda ordens se mostraram melhores para descrever o crescimento dos novilhos Hereford até os dois anos de idade.

LOBO et al. (2006) ajustaram as funções de Richards, Brody, Gompertz, von Bertalanffy e Logística a dados de crescimento de ovinos Santa Inês. Foram utilizadas informações de fêmeas para os anos de 1993 a 2004, na Embrapa Tabuleiros Costeiros e de 1981 a 2004 na Embrapa Caprinos. Para o ajuste das curvas, as análises foram realizadas separadamente para cada rebanho,

utilizando-se o procedimento NLIN do software Statistical Analysis System (SAS), por meio do método de GAUSS. Para determinar a função que melhor ajustava os dados, foram utilizados os critérios de coeficiente de determinação (R^2), de quadrado médio residual (QMR) e o erro de predição médio (EM). No rebanho da Embrapa Tabuleiros Costeiros, todas as funções subestimaram os pesos, à exceção da curva de Richards. Diferentemente, todas as funções superestimaram o peso predito para o rebanho da Embrapa Caprinos. A curva de Richards foi a que promoveu melhor ajuste nos dois rebanhos. Os valores do peso adulto e da taxa de maturação estimados pela função de Richards foram de $54,38kg$ e $0,00144/dia$, respectivamente, para o rebanho da Embrapa Tabuleiros Costeiros, e $42,74kg$ e $0,00260/dia$, respectivamente, para o da Embrapa Caprinos. A função de Richards foi utilizada para estimar curvas individuais de crescimento dos animais. A partir destas curvas, foram estimadas várias características de interesse econômico.

SANTOS et al. (2007) estudaram curvas de crescimento morfométrico de linhagens de tilápias em função dos pesos de abate. Ajustaram os modelos de Brody, logístico, Gompertz e von Bertalanffy. Utilizaram como avaliadores de qualidade dos ajustes o R^2 ajustado, o quadrado médio do resíduo, número de iterações e intervalo de confiança para os parâmetros. Concluíram que os quatro modelos descreveram bem o crescimento morfométrico, porém consideraram que os modelos de Gompertz e von Bertalanffy foram os mais indicados.

SILVA et al. (2011) estudaram o crescimento de vacas de corte de diferentes tipos biológicos. Estudaram quatro tipos genéticos em duas estações do ano e dois níveis de concentrado. Ajustaram os modelos de Brody, Gompertz, logístico, von Bertalanffy e Richards. O ajuste dos modelos foi realizado por mínimos quadrados ordinários usando os pesos ponderados e não ponderados pelo inverso da variância. Dos cinco modelos ajustados apenas os modelos Brody e von Bertalanffy não ponderado e ponderado, respectivamente, convergiram para os

quatro grupos genéticos. Enfatizaram que a heterogeneidade de variância dos pesos observados ao longo das idades deve ser considerada na estimação dos parâmetros.

SILVEIRA et al. (2011), utilizaram a análise de agrupamento para classificar modelos de regressão não-lineares usados para descrever a curva de crescimento de ovinos cruzados, para isto utilizando diferentes avaliadores de qualidade de ajuste tais como coeficiente de determinação ajustado, critérios de informação de Akaike e Bayesiano, erro quadrático médio de predição e coeficiente de determinação de predição. Foram ajustados doze modelos não-lineares: Schnute, Mitscherlich, Richards, Gompertz, Logístico, Meloun I, Meloun II, Brody, von Bertalanffy, Michaelis-Menten e Michaelis-Menten Modificado. Com os dados de peso de 3 cruzamentos entre raças de ovinos de corte, após a indicação do melhor modelo, foi aplicada a técnica de identidade de modelos proposta por REGAZZI (2003) com o intuito de verificar diferenças nas estimativas dos parâmetros, auxiliando na identificação do cruzamento mais produtivo. Concluíram que o modelo de Richards foi o que melhor se ajustou, enfatizando sua facilidade na interpretação de seus parâmetros e também por ser muito utilizado na descrição de curvas de crescimento de ovinos.

SARTORIO et al. (2012), utilizaram a abordagem mista não linear para analisar os dados de comprimento de frutos de pereira asiática (*Pyrus pyrifolia*) ao longo de onze observações coletadas quinzenalmente, após a antese. Modelos com efeito aleatório em cada parâmetro e combinações destes foram ajustados e realizados testes, com o intuito de confrontar os resultados com a sugestão de inserir efeito aleatório pelos gráficos de intervalos de confiança sugerido por PINHEIRO & BATES (2000), que enfatizam que estes gráficos fornecem uma boa idéia sobre a variabilidade entre os indivíduos, podendo sugerir em quais parâmetros é conveniente associar um efeito aleatório.

Para explicar o crescimento de frutos da cultivar Shinsseiki ainda pendentes na planta, utilizaram o modelo de Gompertz com efeitos aleatórios associados aos seus parâmetros. Na seleção da parte aleatória do modelo utilizaram o teste da razão de verossimilhanças (TRV) e os critérios de informação de Akaike (*AIC*) e Bayesiano (*BIC*). Dentre as estruturas de covariância disponíveis, procuraram uma estrutura parcimoniosa que explicasse bem o comportamento das variâncias e covariâncias dos dados. A significância dos efeitos fixos foi testada utilizando-se a estatística de Wald. Concluíram que o comprimento da pêra ao longo do tempo pode ser analisado utilizando-se regressão não linear mista. O modelo final escolhido incluiu efeito aleatório apenas na assíntota (β_1) como sugerido por PINHEIRO & BATES (2000) pelos gráficos de intervalos. A solução mostrou-se mais atraente, uma vez que incorporou a variação entre os indivíduos nos procedimentos de ajuste.

PRADO et al. (2013) ajustaram os modelos Gompertz e logístico a dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde, com base nos dados de diâmetros externos, longitudinal e transversal. Utilizaram as estruturas de erros independentes e autocorrelacionados (processo autoregressivos de primeira e segunda ordem). Para avaliação da qualidade dos ajustes utilizaram os critérios coeficiente de determinação ajustado, desvio-padrão residual e peso de Akaike, segundo MOTULSKY & CHISTOPOULOS (2004). Concluíram que a consideração da estrutura residual adequada no ajuste dos modelos logístico e Gompertz resultaram em reduções expressivas nas estimativas dos erros padrões assintóticos dos parâmetros, sendo o modelo logístico, o mais adequado para descrever o crescimento, em diâmetro, longitudinal e transversal, de frutos de coqueiro anão verde.

3 MATERIAL E MÉTODOS

3.1 Material

Foram utilizados dados de massa de frutos de laranjeiras doces *Citrus sinensis* (L.) Osbeck em um experimento com cinco copas enxertadas em porta-enxertos situado na Fazenda Experimental Lageado em Botucatu, sendo 6 repetições para cada porta-enxerto em cada copa. As cinco copas selecionadas para o experimento foram: Hamlin, Baianinha, Westin, Rubi e Itaboraí. As laranjeiras Hamlin e Baianinha sendo variedade de tradicional importância na citricultura paulista, prestando-se a primeira para a industrialização e a exportação “in natura” e a segunda para os mercados de fruta fresca interno e externo. As variedades Westin e Rubi produzem frutas de muito boa qualidade apresentando valor potencial para o cultivo no estado de São Paulo; e a Itaboraí apresenta excelente coloração da casca e boa qualidade do suco de suas frutas. Os cinco porta-enxertos escolhidos para competição no experimento foram: limoeiro Cravo - LC, tangerineira Sunki - SU, laranjeira Caipira - CA, trifoliata - TR e limoeiro rugoso da Flórida - RF. Porta-enxertos estes tolerantes aos vírus da tristeza, constituindo o grupo dos cinco cavalos mais amplamente utilizados na formação dos pomares de citrus.

O experimento relatado foi instalado e conduzido na Fazenda Experimental “Emilio Garrastazu Médici”, da Faculdade de Ciências Médicas e Biológicas de Botucatu, localizada no município de Botucatu. Esta propriedade, com 2139,6 ha é constituída de uma área denominada Lageado, com as seguintes coordenadas geográficas: latitude 22°51' S e longitude 48° 22' W. O delineamento experimental

utilizado foi o de blocos ao acaso, com seis repetições. Cada bloco constituiu-se de cinco parcelas de duas plantas, em um espaçamento de 7,00 x7,00 m. Cada ensaio compreendeu as combinações de uma variedade de copa enxertada sobre os cinco cavalos, num total de 60 plantas úteis.

A produção de laranjas foi controlada em massa de frutas produzida por plantas em cada safra, anualmente, no período de abril-maio, nos anos de 1969 a 1974, sendo a massa determinada de cada planta em kg.

Exemplo de um quadro apresentado por SALIBE (1974)

Tabela 1. Quadro 77. Produção (Kg/parcela) das laranjeiras Hamlim, no ano de 1969

Bloco	LC	SU	CA	TR	RF
1	14	2	1	3	17
2	14	2	1	2	12
3	22	6	1	4	21
4	21	5	5	5	21
5	11	6	6	3	9
6	14	6	1	3	12

Foram também utilizados dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*, obtidos em três fazendas de plantio pertencentes à Votorantim Celulose e Papel na região do Vale do Paraíba. Esta região foi escolhida por constituir favoravelmente a ocorrência da ferrugem do Eucalipto e também por se encontrarem grandes maciços de reflorestamento destinados tanto para recuperação de áreas degradadas como para fins de produção em empresas privadas. Em cada fazenda havia três linhas com aproximadamente 50 plantas em cada linha. Tirando-se as repetições em que não havia as medidas em todos os tempos, ficaram 130 repetições na Fazenda Gaspar, 131 na Fazenda Nossa Senhora da Ajuda e 141 na Fazenda São Pedro, totalizando 402 repetições. As medidas foram efetuadas em 11 tempos não equiespaçados que foram 8, 10, 12, 15, 19, 21, 25, 27, 30, 36, e 50 meses para a fazenda São Pedro; 9, 11, 13, 16, 19, 22, 26, 28, 31, 38 e 52 meses para a fazenda Nossa Senhora da Ajuda e 10, 12, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 39 e 52 meses para a Gaspar.

3.1.1 Perfis

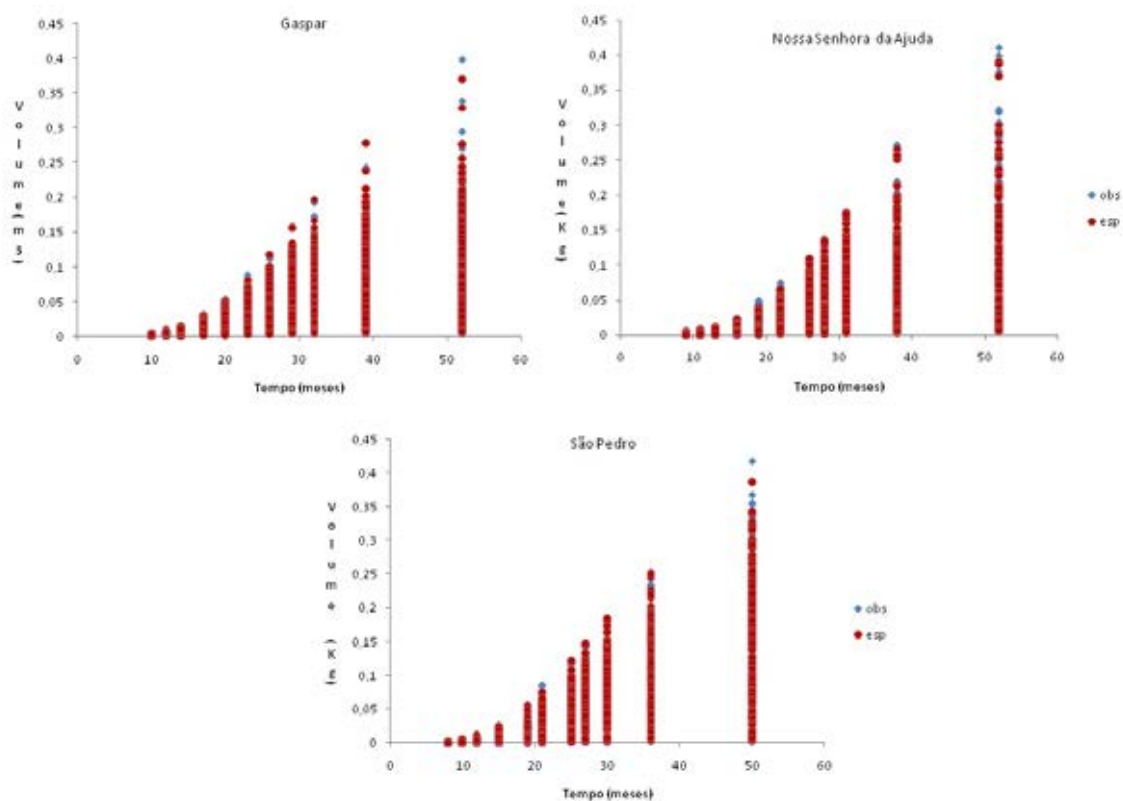


Figura 1 - Valores observados e estimados pelo modelo de Gompertz ($f(x, \theta) = \alpha \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\}$), referentes ao volume do tronco de *Eucalyptus grandis* nas três regiões.

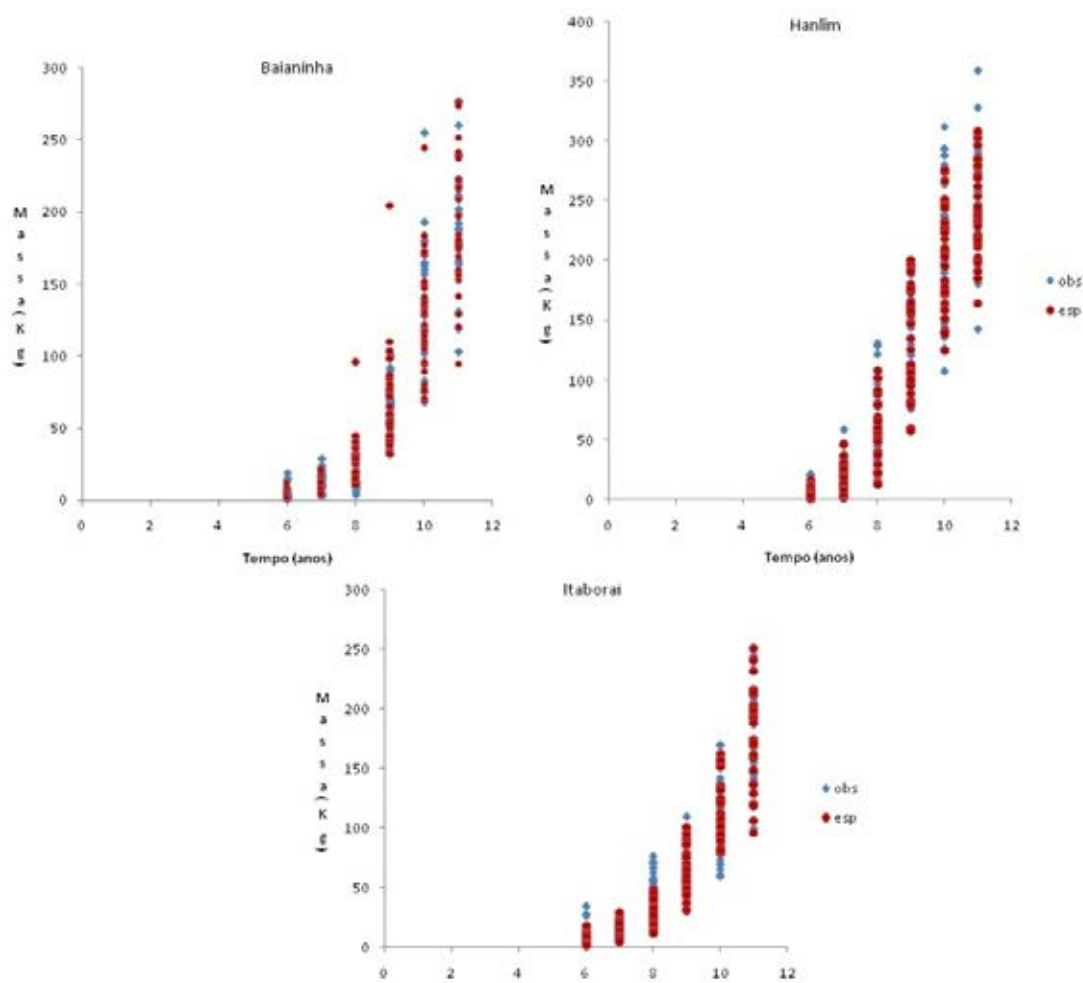


Figura 2 - Valores observados e estimados pelo modelo Logístico $\left(f(x, \theta) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, referentes às copas - dados de massa de frutos de laranjeiras doces *Citrus sinensis* (L.) Osbeck.

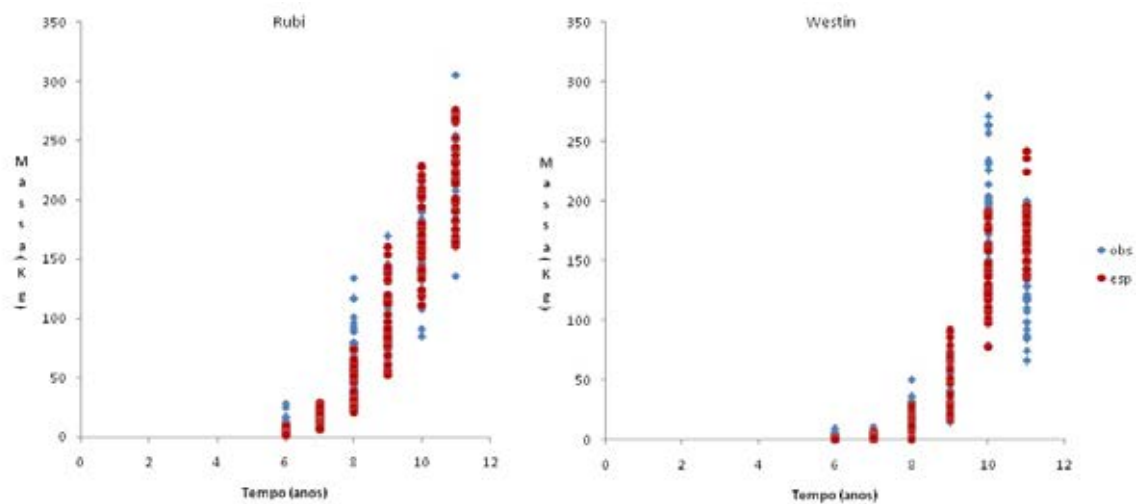


Figura 3 - Valores observados e estimados pelo modelo Logístico $\left(f(x, \theta) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, referentes às copas - dados de massa de frutos de laranjeiras doces *Citrus sinensis* (L.) Osbeck.

3.2 Metodologia Estatística

Um modelo de regressão escrito como:

$$Y_i = f(X_i, \theta) + \varepsilon_i \quad (1)$$

com $i = 1, \dots, n$, sendo:

- $\boldsymbol{\theta}^T = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ o vetor dos p parâmetros;
- $Y_i = f(X_i, \theta)$ é uma função não linear;
- $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{pmatrix}$ a matriz das variáveis regressoras em uma amostra de tamanho n ;
- $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \mathbf{I}\sigma^2)$

Este modelo é definido como não linear se em uma das derivadas parciais em relação a um dos parâmetros depende de, pelo menos, um dos parâmetros (BATES & WATTS, 1988).

Seja o i -vetor $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta})$ com o i -ésimo elemento

$$\eta_i(\boldsymbol{\theta}) = f(X_i, \boldsymbol{\theta}); \quad i = 1, \dots, n$$

e seja o modelo de regressão não linear escrito como:

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon}$$

assumindo-se que $\boldsymbol{\varepsilon}$ tenha distribuição normal esférica. Assim,

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$$

$$Var(\boldsymbol{\varepsilon}) = E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T] = \sigma^2\mathbf{I}$$

como é no caso linear.

3.2.1 A geometria da superfície de esperança

A suposição de uma distribuição normal esférica para $\boldsymbol{\varepsilon}$ nos leva a considerar a geometria Euclidiana da resposta espacial n -dimensional, por que estamos interessados na estimativa $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dos parâmetros. Os n -vetores $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta})$ definem uma superfície p -dimensional chamada *superfície de esperança* no espaço resposta, e o estimador de mínimos quadrados corresponde ao ponto na superfície de esperança,

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

que é próximo a \mathbf{y} . Isto é, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ minimiza a soma de quadrados residual

$$S(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta})\|^2$$

3.2.2 Determinação das estimativas de mínimos quadrados

O problema de se achar as estimativas de mínimos quadrados pode ser resolvido geometricamente - dado um vetor \mathbf{y} , uma função esperança $f(X_i, \boldsymbol{\theta})$ e um grupo de vetores $X_i, i = 1, \dots, n$, da seguinte maneira:

1. achando o ponto $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ na superfície esperada que é próxima a \mathbf{y} e então
2. determinar o vetor paramétrico $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que corresponda ao ponto $\hat{\boldsymbol{\eta}}$.

Para o modelo linear o passo (1) é fácil de se fazer pois a superfície esperada é um plano, e podemos escrever uma expressão explícita para o ponto no

plano que é próximo a \mathbf{y} , e o passo (2) também é fácil para o caso linear, pois o plano p -dimensional paramétrico tangencia linearmente ao plano esperado, de modo que se sabemos onde estamos em um plano, podemos achar o ponto correspondente no outro.

No caso não linear, entretanto, os dois passos são muito difíceis: o primeiro porque a superfície esperada é curva e é difícil de se achar o $\hat{\boldsymbol{\eta}}$, e o segundo porque podemos mapear os pontos somente em uma direção - do plano paramétrico para a superfície esperada. Isto é, se conhecemos $\hat{\boldsymbol{\eta}}$, é extremamente difícil determinar as coordenadas $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ do plano paramétrico correspondente a esse ponto. Para resolver estas dificuldades são usados métodos iterativos para determinar as estimativas de mínimos quadrados.

3.2.3 O método de Gauss-Newton

Um procedimento sugerido por Gauss é usar uma aproximação linear para a esperança da função para iterativamente melhorar as estimativas iniciais $\boldsymbol{\theta}^0$ para $\boldsymbol{\theta}$ e continuar melhorando as estimativas até que elas se estabilizem. Isto é, expandimos a função esperança $f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})$ em séries de Taylor de primeira ordem sobre $\boldsymbol{\theta}^0$ como

$$f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}) \approx f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}^0) + v_{i1}(\theta_1 - \theta_1^0) + v_{i2}(\theta_2 - \theta_2^0) + \cdots + v_{ip}(\theta_p - \theta_p^0)$$

onde

$$v_{ij} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right|_{\boldsymbol{\theta}^0}; \quad j = 1, \dots, p$$

Incorporando todos os n casos, tem-se

$$\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}) \approx \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}^0) + \mathbf{V}^0(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^0)$$

onde \mathbf{V}^0 é a matriz de derivadas $n \times p$ com elementos $\{v_{ij}\}$. Isto é equivalente a aproximar os resíduos, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta})$ por

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{y} - [\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}^0) + \mathbf{V}^0 \boldsymbol{\delta}] = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \mathbf{V}^0 \boldsymbol{\delta}$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}^0)$ e $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^0$.

Calcula-se o *incremento de Gauss* $\boldsymbol{\delta}^0$ para minimizar a soma de quadrados residual aproximada $\|\boldsymbol{\varepsilon}^0 - \mathbf{V}^0 \boldsymbol{\delta}\|^2$.

O ponto

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}^1 = \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}^1) = \hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\theta}^0 + \boldsymbol{\delta}^0)$$

deverá ser mais próximo de \mathbf{y} que $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}^0)$ e assim movemos este valor $\boldsymbol{\theta}^1 = \boldsymbol{\theta}^0 + \boldsymbol{\delta}^0$ e fazemos outra iteração calculando novos resíduos $\boldsymbol{\varepsilon}^1 = \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\theta}^1)$, uma nova matriz de derivadas \mathbf{V}^1 e um novo incremento. Este processo é repetido até que a convergência seja obtida, isto é, até que o incremento seja tão pequeno que não produza mudanças nos elementos do vetor dos parâmetros.

Existem outras técnicas iterativas. Algumas são modificações do método de Gauss-Newton. Este método é considerado como um caso especial do método de Newton-Raphson. Uma modificação do método de Gauss-Newton é o método de Levenberg-Marquardt que trabalha no caso de singularidade da matriz de derivadas \mathbf{V} (BATES & WATTS, 1988).

3.2.4 Método da Máxima Verossimilhança

Vamos considerar que os erros ε_i na equação (1) são independentes, normalmente distribuídos com variância constante σ^2 . A função de verossimilhança é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}; \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - f(X_i, \boldsymbol{\theta}))^2 \right]$$

Maximizar esta função com relação aos parâmetros, é idêntico a minimizar o somatório na parte do expoente, portanto, chega-se aos mesmos estimadores com os dois métodos. (DRAPER & SMITH, 1981; HOFFMANN &

VIEIRA, 1983).

3.3 Modelos

Seguem os modelos usados neste trabalho:

3.3.1 Modelo logístico

Criado por Verhulst em 1838, é um modelo que supõe a capacidade de sustentação do meio, que limita o crescimento a partir de um determinado valor informado pelo especialista na área em estudo (SEBER & WILD, 1989)

$$f(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{-(\beta + \gamma x)\}} \quad (2)$$

para cada x real, α , β e γ positivos, $\boldsymbol{\theta}^T = (\alpha, \beta, \gamma)$ a curva apresenta a forma de uma sigmóide. Segue um exemplo para $\boldsymbol{\theta}^T = (1, -4, 2)$.

Propriedades da função logística:

- $f(x) = \alpha$ assíntota superior;

prova:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, \boldsymbol{\theta}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{1 + \exp\{-(\beta + \gamma x)\}} = \frac{\alpha}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\{-(\beta + \gamma x)\}} = \\ &= \frac{\alpha}{1 + \exp\{-\beta\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\{-\gamma x\}} = \frac{\alpha}{1 + \exp\{-\beta\} \exp\{-\gamma \lim_{x \rightarrow +\infty} x\}} = \\ &= \frac{\alpha}{1 + 0} = \alpha \end{aligned}$$

- $f(x) = 0$ é assíntota inferior;

prova:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, \boldsymbol{\theta}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha}{1 + \exp\{-(\beta + \gamma x)\}} = \frac{\alpha}{1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\{-(\beta + \gamma x)\}} = \\ &= \frac{\alpha}{1 + \exp\{-\beta\} \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\{-\gamma x\}} = 0 \end{aligned}$$

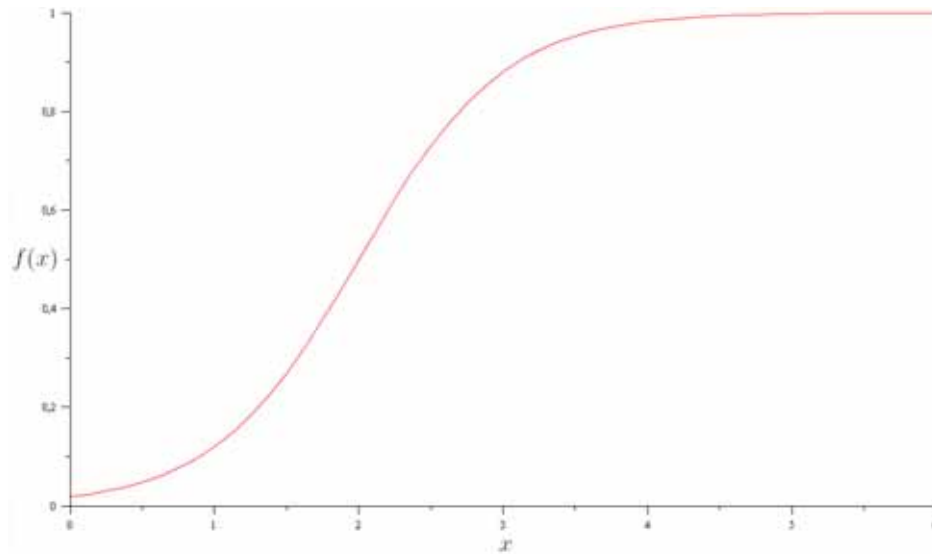


Figura 4 - Exemplo de gráfico referente à função logística. $f(x, 1, -4, 2) = \frac{1}{1 + e^{-(-4+2x)}}$

- $f(x)$ é uma função estritamente crescente, ou seja para quaisquer m, n reais tais que $m < n$ implica $f(m) < f(n)$;

prova:

$$m < n \Rightarrow \beta + \gamma m < \beta + \gamma n \Rightarrow -(\beta + \gamma m) > -(\beta + \gamma n) \Rightarrow \exp\{-(\beta + \gamma m)\} > \exp\{-(\beta + \gamma n)\} \Rightarrow \frac{\alpha}{1 + \exp\{-(\beta + \gamma m)\}} < \frac{\alpha}{1 + \exp\{-(\beta + \gamma n)\}} \Rightarrow f(m) < f(n)$$

- o contradomínio é o intervalo $(0, \alpha)$;
- concavidade para cima quando $x < -\frac{\beta}{\gamma}$, concavidade para baixo quando $x > \gamma$ e ponto de inflexão quando $x = -\frac{\beta}{\gamma}$ com $f\left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) = \frac{\alpha}{2}$;

prova:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha}{1 + \exp\{-\beta - \gamma x\}} \right) = \frac{\alpha \cdot (-\gamma) \cdot (-\exp\{-\beta - \gamma x\})}{(1 + \exp\{-\beta - \gamma x\})^2} = \frac{\alpha \gamma \exp\{-\beta - \gamma x\}}{(1 + \exp\{-\beta - \gamma x\})^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha \gamma \exp\{-\beta - \gamma x\}}{(1 + \exp\{-\beta - \gamma x\})^2} \right) = \frac{\alpha \gamma}{(1 + \exp\{-\beta - \gamma x\})^4} \\ & \quad (-\gamma \exp\{-\beta - \gamma x\} (1 + \exp\{-\beta - \gamma x\})^2 + (\exp\{-\beta - \gamma x\})^2 (2\gamma (1 + \exp\{-\beta - \gamma x\}))) \\ &= \frac{2\alpha \gamma^2 (\exp\{-\beta - \gamma x\})^2}{(1 + \exp\{-\beta - \gamma x\})^3} - \frac{\alpha \gamma^2 \exp\{-\beta - \gamma x\}}{(1 + \exp\{-\beta - \gamma x\})^2} \end{aligned}$$

Vemos que:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right) = 0;$$

Para todo $m > -\frac{\beta}{\gamma}$ temos $\frac{df}{dx}(m) > 0$;

Para todo $m < -\frac{\beta}{\gamma}$ temos $\frac{df}{dx}(m) < 0$;

Logo, segue o resultado.

- a função atinge metade da capacidade de sustentação em $x = -\frac{\beta}{\gamma}$, isto é,

$$f \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right) = \frac{\alpha}{2};$$

prova:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{1 + \exp\{-(\beta + \gamma x)\}} = \frac{\alpha}{2} &\Rightarrow \frac{1}{1 + \exp\{-(\beta + \gamma x)\}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \exp\{-(\beta + \gamma x)\} = 2 \\ \Rightarrow \exp\{-(\beta + \gamma x)\} = 1 &\Rightarrow -\beta - \gamma x = 0 \Rightarrow x = -\frac{\beta}{\gamma} \end{aligned}$$

- $f'(x)$ tem máximo em $x = -\frac{\beta}{\gamma}$, sendo $f' \left(-\frac{\beta}{\gamma} \right) = \frac{\alpha \gamma}{4}$;

prova:

Segue do resultado anterior.

- a função tem simetria em torno do seu ponto de inflexão, ou seja para qualquer medida Δ temos:

$$\alpha - f(x) \left(-\frac{\beta}{\gamma} - \Delta \right) = f(x) \left(-\frac{\beta}{\gamma} + \Delta \right) - 0.$$

Para $f(x) \approx -\frac{\beta}{\gamma}$, a taxa relativa de crescimento da função é aproximadamente igual à constante γ e a logística tem um crescimento aproximadamente

exponencial. À medida que a função cresce, a sua taxa relativa de crescimento vai-se tornando mais lenta. Para $f(x) \approx \alpha$, a taxa relativa de crescimento de f é aproximadamente nula e a logística tende a estabilizar.

Interpretações dos parâmetros da função logística:

- α : capacidade de sustentação do meio;
- β , alguns significados: abscissa do ponto de inflexão, ponto de controle da taxa de crescimento.
- γ : taxa relativa de crescimento máximo.

3.3.2 Modelo de Gompertz

O modelo de Gompertz é outra alternativa ao modelo de crescimento exponencial. Neste modelo também se admite a existência de uma capacidade de sustentação do meio que limita um crescimento. A curva de Gompertz é também uma sigmóide. No modelo de Gompertz, a taxa relativa de crescimento da função não é constante (como na exponencial), nem decresce linearmente em y (como na logística), mas decresce exponencialmente em x . (SEBER & WILD, 1989; RATKOWSKY, 1990).

$$f(x, \boldsymbol{\theta}) = \alpha \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} \quad (3)$$

para todo x real, α , β e γ possuem valores positivos, $\boldsymbol{\theta}^T = (\alpha, \beta, \gamma)$.

A equação diferencial corresponde a dizer que a taxa relativa de crescimento de $f(x)$, em ordem a x , decresce exponencialmente com o aumento de x (que frequentemente representa tempo).

Propriedades da função de Gompertz:

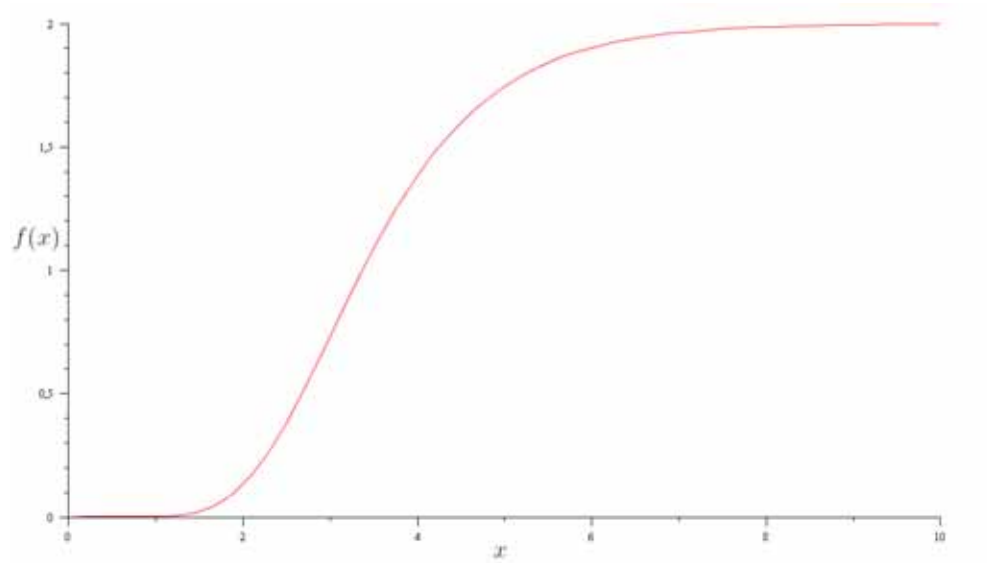


Figura 5 - Exemplo de gráfico referente à função Gompertz. $f(x, 2, 3, 1) = 2 \exp\{-\exp\{3 - x\}\}$

- $f(x) = \alpha$ assíntota superior;

prova:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} &= \alpha \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} = \\ \alpha \exp\left\{\lim_{x \rightarrow +\infty} -\exp\{\beta - \gamma x\}\right\} &= \alpha \exp\{-\exp\{\beta\} \cdot \{-\exp \lim_{x \rightarrow +\infty} -\gamma x\}\} = \\ \alpha \exp\{0\} &= \alpha \end{aligned}$$

- $f(x) = 0$ é assíntota inferior;

prova:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} &= \alpha \exp\left\{\lim_{x \rightarrow -\infty} -\exp\{\beta - \gamma x\}\right\} = \\ \alpha \exp\{-\exp\{\beta\} \lim_{x \rightarrow -\infty} \{-\gamma x\}\} &= \alpha \exp\left\{-\lim_{y \rightarrow +\infty} y\right\} = \alpha \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

- função estritamente crescente;

prova:

$$\begin{aligned} \text{Para quaisquer } m \text{ e } n \text{ reais: } m > n &\Rightarrow \beta - \gamma m < \beta - \gamma n \Rightarrow \exp\{\beta - \gamma m\} < \\ \exp\{\beta - \gamma n\} &\Rightarrow -\exp\{\beta - \gamma m\} > -\exp\{\beta - \gamma n\} \Rightarrow \alpha \exp\{-\exp\{\beta + \gamma m\}\} > \\ \alpha \exp\{-\exp\{\beta + \gamma n\}\} & \end{aligned}$$

- contradomínio é o intervalo $(0, \alpha)$;
- $f(x)$ tem concavidade para cima se $x < \frac{\beta}{\gamma}$, concavidade para baixo se $x > \frac{\beta}{\gamma}$, ponto de inflexão em $x = \frac{\beta}{\gamma}$.

prova:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \alpha \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} = \alpha \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} \cdot (-\exp\{\beta - \gamma x\}) \cdot (-\gamma) = \alpha \gamma \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} \exp\{\beta - \gamma x\}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dx^2}(x) &= \frac{d}{dx} (\alpha \gamma \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} \exp\{\beta - \gamma x\}) = \alpha \gamma (\exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} \exp\{\beta - \gamma x\} (-\gamma) + \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} (-\exp\{\beta - \gamma x\}) (-\gamma) \exp\{\beta - \gamma x\}) \\ &= \alpha \gamma^2 (-\exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} \exp\{\beta - \gamma x\} + \exp\{-\exp\{\beta - \gamma x\}\} \exp\{2\beta - 2\gamma x\}) \end{aligned}$$

Vemos que:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \left(\frac{\beta}{\gamma} \right) = 0;$$

Para todo $m > \frac{\beta}{\gamma}$ temos $\frac{df}{dx}(m) > 0$;

Para todo $m < \frac{\beta}{\gamma}$ temos $\frac{df}{dx}(m) < 0$;

Logo, segue o resultado.

- No ponto de inflexão $x = \frac{\beta}{\gamma}$, $f(x)$ atinge menos de metade da capacidade de sustentação, isto é, $f\left(\frac{\beta}{\gamma}\right) = \frac{\alpha}{e} < \frac{\alpha}{2}$;
- $f'(x)$ tem máximo em $x = \frac{\beta}{\gamma}$, com valor $f'(\alpha) = \frac{\alpha \gamma}{e}$;

- $f(x)$ não tem simetria em torno do seu ponto de inflexão;

prova:

Na Figura 5 vemos graficamente um contra exemplo da simetria.

- qualquer potência positiva de uma função Gompertz é ainda uma função Gompertz.

Interpretações dos parâmetros da função de Gompertz:

- α : capacidade de sustentação do meio;
- β : abcissa do ponto de inflexão;
- γ : taxa relativa de crescimento em $x = \frac{\beta}{\gamma}$ (parâmetro de controle da velocidade de queda da taxa de crescimento relativa).

3.3.3 Modelo von Bertalanffy

Este modelo não tem o formato de um sigmóide. Tem a característica de $f(x)$ crescer para a assíntota horizontal superior:

$$f(x, \boldsymbol{\theta}) = \alpha \left[1 - \beta e^{-\gamma x} \right]^3 \quad (4)$$

para todo x real e α , β e γ positivos, $\boldsymbol{\theta}^T = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Propriedades da função de von Bertalanffy:

- $f(x) = \alpha$ assíntota superior;

prova:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \left[1 - \beta e^{-\gamma x} \right]^3 = \alpha \left[1 - \beta \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\gamma x} \right]^3 = \alpha(1 + 0)^3 = \alpha$$

- $f(x) = -\infty$ é assíntota inferior;

prova:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha \left[1 - \beta e^{-\gamma x} \right]^3 = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha - \beta \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\gamma x} \right]^3 = [1 - \infty]^3 = -\infty$$

- função estritamente crescente;

prova:

Para quaisquer m e n positivos:

$$\begin{aligned} m > n &\Rightarrow -\gamma m < -\gamma n \Rightarrow \beta \exp\{-\gamma m\} < \beta \exp\{-\gamma n\} \Rightarrow -\beta \exp\{-\gamma m\} > \\ &-\beta \exp\{-\gamma n\} \Rightarrow (1 - \beta \exp\{-\gamma m\})^3 > (1 - \beta \exp\{-\gamma n\})^3 \Rightarrow \alpha(1 - \\ &\beta \exp\{-\gamma m\})^3 > \alpha(1 - \beta \exp\{-\gamma n\})^3 \Rightarrow f(m) > f(n) \end{aligned}$$

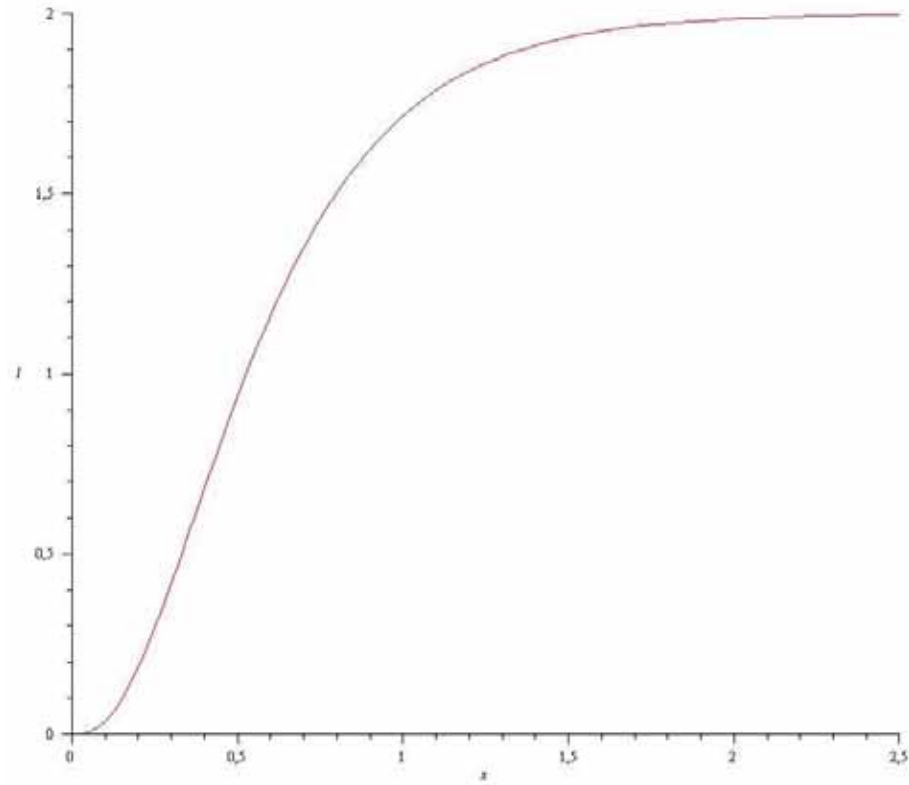


Figura 6 - Exemplo de gráfico referente à função von Bertalanffy. $f(x, 2, 1, 3) = 2(1 - e^{-3x})^3$

- contradomínio é o intervalo $(0, \alpha)$;
- $f(x)$ tem concavidade sempre voltada para baixo, logo não tem ponto de inflexão. prova:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left(\alpha [1 - \beta e^{-\gamma x}]^3 \right) = \alpha \frac{d}{dx} \left([1 - \beta e^{-\gamma x}]^3 \right) = \alpha \{ 3[1 - \beta e^{-\gamma x}]^2 [\beta \gamma e^{-\gamma x}] \} = 3\alpha \beta \gamma e^{-\gamma x} [1 - \beta e^{-\gamma x}]^2$$

como $\frac{df}{dx}(x) > 0$, para todo x real, segue o resultado.

Interpretações dos parâmetros da função de von Bertalanffy:

- α : capacidade de sustentação.
- β : parâmetro de controle do crescimento de $f(x)$.

- γ : parâmetro de controle exponencial do crescimento de $f(x)$.

3.3.4 Modelo de Richards

Este modelo pode ter o formato de sigmóide e possui um parâmetro a mais do que os três modelos anteriores.

$$f(x, \boldsymbol{\theta}) = \alpha \left[1 - \beta e^{-\gamma x} \right]^\delta \quad (5)$$

x real, α , β e γ positivos e $\delta > 1$, $\boldsymbol{\theta}^T = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Motivação: generaliza as curvas Logística, Monomolecular e de von Bertalanffy :

- se $\delta = -1$ então f é a Logística (Figura 4).
- se $\delta = 1$ então f é a Monomolecular (Figura 7a).
- se $\delta = 3$ então f é a von Bertalanffy (Figura 7c).

Propriedades da função Richards:

- $f(x) = \alpha$ é uma assíntota horizontal à direita, e $f(x) = 0$ uma assíntota horizontal à esquerda.

prova:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \left[1 - \beta e^{-\gamma x} \right]^\delta = \alpha \left[1 - \beta \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\gamma x} \right]^\delta = \alpha (1 + 0)^\delta = \alpha$$

- $f(x) = -\infty$ é assíntota inferior;

prova:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha \left[1 - \beta e^{-\gamma x} \right]^\delta = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha - \beta \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\gamma x} \right]^\delta = [1 - \infty]^\delta = -\infty$$

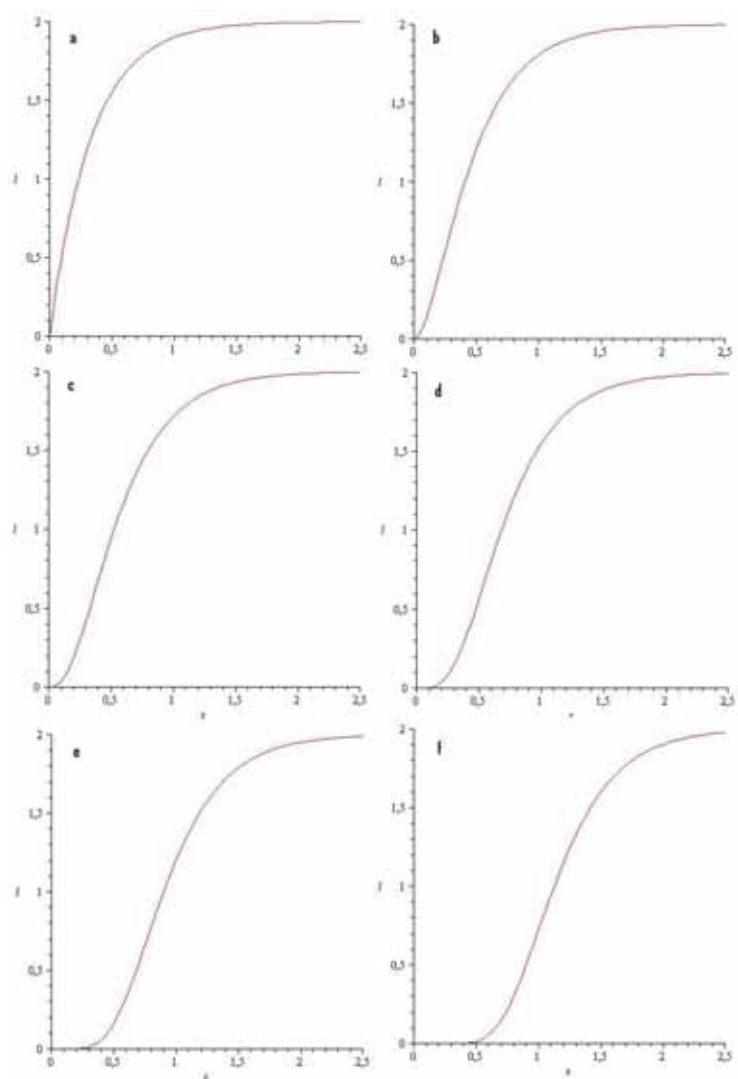


Figura 7 - Exemplos de gráficos referente à função Richards. (a) $f(x, 2, 1, 1) = 2(1 + e^{-3x})^1$, (b) $f(x, 2, 1, 2) = 2(1 + e^{-3x})^2$, (c) $f(x, 2, 1, 3) = 2(1 + e^{-3x})^3$, (d) $f(x, 2, 1, 5) = 2(1 + e^{-3x})^5$, (e) $f(x, 2, 1, 10) = 2(1 + e^{-3x})^{10}$, (f) $f(x, 2, 1, 20) = 2(1 + e^{-3x})^{20}$

- $f(x)$ é uma função estritamente crescente.

prova:

Para quaisquer m e n reais, como $\delta > 1$:

$$\begin{aligned} m > n &\Rightarrow -\gamma m < -\gamma n \Rightarrow \beta \exp\{-\gamma m\} < \beta \exp\{-\gamma n\} \Rightarrow -\beta \exp\{-\gamma m\} > \\ &-\beta \exp\{-\gamma n\} \Rightarrow (1 - \beta \exp\{-\gamma m\})^\delta > (1 - \beta \exp\{-\gamma n\})^\delta \Rightarrow \alpha(1 - \\ &\beta \exp\{-\gamma m\})^\delta > \alpha(1 - \beta \exp\{-\gamma n\})^\delta \Rightarrow f(m) > f(n) \end{aligned}$$

- o contradomínio é o intervalo $(0, \alpha)$

- $f(x)$ tem concavidade para cima se $x < 0$; concavidade para baixo se $x > 0$ e ponto de inflexão em $x = 0$.

prova:

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \left(\alpha [1 - \beta e^{-\gamma x}]^\delta \right) = \alpha \frac{d}{dx} \left(\alpha [1 - \beta e^{-\gamma x}]^\delta \right) = \alpha \{ \delta [1 - \beta e^{-\gamma x}]^{\delta-1} [\beta \gamma e^{-\gamma x}] \} = \alpha \beta \gamma \delta e^{-\gamma x} [1 - \beta e^{-\gamma x}]^{\delta-1}$$

como $\frac{df}{dx}(x) > 0$, para todo x real, segue o resultado.

- $f(x)$ não tem simetria em torno do seu ponto de inflexão.

prova:

A Figura 7 mostra graficamente alguns contra exemplos da simetria.

Interpretações dos parâmetros da Richards:

- α : capacidade de sustentação do meio;
- γ dois significados: abscissa do ponto de inflexão ou ponto onde a taxa de crescimento $f'(x)$ é máxima.
- β : parâmetro de controle da taxa de crescimento.
- δ : parâmetro de controle da ordenada no ponto de inflexão.

3.4 Estimativas iniciais para os parâmetros

Considerando-se a algum dos modelos, geralmente ao plotar os dados na forma de Y versus X e se obter uma estimativa visual da assíntota, denotada por α .

3.4.1 Modelo logístico

Pode-se reorganizar a equação 2 da seguinte forma:

$$z_0 = \log \left(\frac{\alpha_0}{y} - 1 \right) = \beta - \gamma X$$

que é linear nos parâmetros β e γ , e as estimativas desses parâmetros denotados por β_0 e γ_0 , respectivamente, podem ser obtidas de uma regressão linear simples de z_0 em X . O conjunto resultante de estimativas α_0 , β_0 e γ_0 podem suprir as estimativas iniciais para o processo de Gauss-Newton.

3.4.2 Modelo de Gompertz

Considerando-se a equação 3 o primeiro passo para se obter as estimativas iniciais é plotar um gráfico dos dados na forma de Y versus X e se obter uma estimativa visual da assíntota, denotada por α_0 . Rearranjando-se, obtém-se

$$z_0 = \log \left[-\log \left(\frac{y}{\alpha_0} \right) \right]$$

que é linear nos parâmetros β e γ , e as estimativas desses parâmetros denotadas por β_0 e γ_0 , respectivamente, podem ser obtidas de uma regressão linear simples de z_0 em X . O conjunto resultante de estimativas α_0 , β_0 e γ_0 podem suprir as estimativas iniciais para o processo de Gauss-Newton.

3.4.3 Modelo de Richards

Considerando-se a função 5, depois de um rearranjo obtém-se:

$$z = \log \left[\left(\frac{\alpha}{y} \right)^\delta - 1 \right] = \beta - \gamma X$$

em que z é linear em β e γ . As estimativas de α e δ podem ser obtidas do gráfico dos dados na forma Y versus X . Uma estimativa δ_0 de δ , faz-se o uso da estimativa do ponto de inflexão (X_F, Y_F)

$$X_F = \frac{\beta - \log \delta}{y} \quad (6)$$

Substituindo-se (equação 6) em (equação 5) resulta na seguinte ordenada do ponto de inflexão.

$$Y_F = \alpha(1 + \delta)^{-1/\delta} \quad (7)$$

Uma estimativa inicial razoável de δ_0 pode ser resolvida resolvendo (equação 7) usando-se estimativas α_0 da assíntota e do ponto de inflexão Y_F . O sucesso na escolha destas estimativas depende da habilidade de se escolher bem utilizando-se um gráfico dos dados.

Tendo-se obtido estimativas α_0 e δ_0 de α e δ , respectivamente, pode-se substituir estas estimativas em (2) para valores de z_0 correspondendo a cada par de observações (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$. A regressão linear simples de z_0 em X produzirá valores de β_0 e γ_0 , que juntas com α_0 e α_0 e γ , podem ser umas estimativas iniciais adequadas para os valores dos parâmetros.

3.5 Análise de Resíduos

Os testes usados neste trabalho foram o Teste de Durbin-Watson, para a independência dos resíduos, o Teste de Breusch-Pagan, para a análise da homocedasticidade e o teste de Shapiro-Wilk para a normalidade.

3.5.1 Teste de Durbin-Watson

Supõe-se que o erro seja da seguinte forma:

$$e_i = \rho e_{i-1} + a_i$$

onde e_i é o erro no i -ésimo dado, $a_i \sim N(0, \delta_a^2)$ e ρ é o coeficiente de autocorrelação com $|\rho| < 1$. As hipóteses do teste seguem:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

Dessa forma é testado se não há autocorrelação nos resíduos. Segue estatística do teste:

$$d_W = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (8)$$

medindo assim a correlação entre cada resíduo no instante i e $i - 1$.

Da equação 8 obtemos:

$$d_W = \frac{\sum_{i=2}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} + \frac{\sum_{i=2}^n e_{i-1}^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} - 2 \frac{\sum_{i=2}^n e_i e_{i-1}}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$$

Quando $n \rightarrow \infty$ a equação 8 tende a:

$$1 + 1 - 2r$$

onde r é o coeficiente de correlação entre e_i e e_{i-1} . Assim quando d_W tende a zero indica autocorrelação positiva nos erros, conseqüentemente quando d_W tende para quatro indica autocorrelação negativa e quando d_W tende para 2 não há autocorrelação entre os resíduos.

O teste depende do n , tamanho da amostra, e de p , o número de parâmetros estimados.

Para testar, consultamos a tabela do respectivo teste analisando aos níveis de significância dado pela tabela, intervalos (d_L, d_U) com os valores crítico, e interpreta-se da seguinte forma:

- se $0 \leq d_W < d_L$ então rejeita-se a hipótese nula, ou seja, há dependência dos resíduos, denotando-se correlação positiva;
- se $d_L \leq d_W \leq d_U$ então nada se conclui sobre o teste;
- se $d_U < d_W < 4 - d_U$ então não se rejeita a hipótese nula, ou seja, há independência nos resíduos;
- se $4 - d_U \leq d_W \leq 4 - d_L$ então nada se conclui sobre o teste;
- se $4 - d_L < d_W \leq 4$ então rejeita-se a hipótese nula, ou seja, há dependência dos resíduos, denotando-se correlação negativa.

3.5.2 Teste de Breusch-Pagan

Baseado no teste multiplicador de Lagrange, o teste de Breusch-Pagan é utilizado para testar a hipótese nula de que as variâncias dos erros são iguais versus a hipótese alternativa de que as variâncias dos erros são uma função multiplicativa de uma ou mais variáveis, sendo que esta(s) variável(eis) pode(m) pertencer ou não ao modelo em questão.

$$\begin{cases} H_0 : \text{Var}(u|x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma^2 \Leftrightarrow E(u^2|x_1, x_2, \dots, x_n) = E(u^2) = \sigma^2 \\ H_1 : \text{Var}(u|x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \sigma^2 \Leftrightarrow E(u^2|x_1, x_2, \dots, x_n) = E(u^2) \neq \sigma^2 \end{cases}$$

A estatística de teste neste caso é obtida da seguinte maneira: Inicialmente, ajustamos o modelo de regressão linear (simples ou múltiplo) e encontramos

os resíduos e os valores ajustados . Em seguida, consideramos os resíduos ao quadrado e os padronizamos de modo que a média do vetor de resíduos padronizados, que denotaremos por u , seja 1. Esta padronização é feita dividindo cada resíduo ao quadrado pela SQE/n em que SQE é a Soma de Quadrados dos Resíduos do modelo ajustado e n é o número de observações. Desta forma, temos que cada resíduo padronizado é dado por

$$\mu_i = \frac{e_i^2}{\frac{SQE}{n}} \quad i = 1, \dots, n$$

em que $SQE = \sum_{i=1}^n e_i^2$.

Por fim, fazemos a regressão entre $u = (u_1, \dots, u_n)$ (variável resposta) e o vetor $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)^T$ (variável explicativa) e obtemos a estatística do teste χ_{Bp}^2 calculando a Soma de Quadrados da Regressão de u sobre \hat{y} e dividindo o valor encontrado por 2. Sob a hipótese nula, esta estatística tem distribuição qui-quadrada com 1 grau de liberdade (BREUSCH & PAGAN, 1979; KOENKER, 1981).

3.5.3 Teste de Shapiro-Wilk

O teste de Shapiro-Wilk verifica se uma amostra aleatória e_1, \dots, e_n , é originária de uma população cuja distribuição é normal. Foi publicado em 1965 por Samuel Shapiro e Martin Wilk.

Formulando a seguinte hipótese:

$$\begin{cases} H_0 : \text{A amostra provém de uma população Normal.} \\ H_1 : \text{A amostra não provém de uma população Normal.} \end{cases}$$

Assim estabelecemos um nível de significância do teste (α) e ordenamos os erros, sendo $e_{(i)}$ o i -ésimo erro ordenado.

A estatística do teste é:

$$W = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (e_{(i)} - \bar{e})^2}$$

onde

- $\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i$, ou seja, a média ;
- a constante b é definida como segue:

$$b = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n/2} a_{(n-i+1)}(e_{(n-i+1)} - e_{(i)}) & \text{se } n \text{ é par;} \\ \sum_{i=1}^{(n+1)/2} a_{(n-i+1)}(e_{(n-i+1)} - e_{(i)}) & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$
- em que $a_{(n-i+1)}$ são constantes encontradas na tabela do teste.

Quanto menor for o valor da estatística W maior será a evidência de que os dados são normais. Assim tomamos a decisão de rejeitar H_0 ao nível de significância α se $W < W_\alpha$, onde W_α é encontrado na tabela do teste, segundo o nível de significância α e o número de termos da amostra n (SHAPIRO & WILK, 1965) .

3.6 Ponderação

A maioria dos trabalhos que compara modelos, em geral, não leva em consideração as variâncias durante os tempos. PASTERNAK & SHALEV (1994) afirmam que o simples ajuste de uma regressão não linear a dados longitudinais pode ser ineficiente, uma vez que não considera a heterogeneidade de variâncias. ELIAS (1998), estudando curvas de crescimento com raças zebuínas, comparou os modelos de Brody, Gompertz, Logístico Richards e Von Bertalanffy, ajustados nas estruturas não ponderada e ponderada, pelo inverso da variância dos pesos dos animais, verificando que a utilização da ponderação promoveu uma marcante

redução na variabilidade das estimativas dos parâmetros.

Como neste trabalho, para os dois conjuntos de dados, verificou-se que as variâncias eram heterogêneas ao longo dos tempos estudados, foi necessário introduzir a ponderação pelo inverso das mesmas, para que o problema fosse resolvido.

Heteroscedasticidade é o fenômeno estatístico que ocorre quando o modelo de hipótese matemático apresenta variâncias que não são as mesmas, condicionadas ao \mathbf{X} , contrariando o postulado:

$$E(u_i^2) = \sigma_i^2, i = 1, 2, \dots, n$$

No Modelo Clássico de Regressão Linear, temos a hipótese de que $E(u_i^2) = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n$, que pressupõe que a variância de cada termo de perturbação u_i , condicional aos valores escolhidos das variáveis explicativas, é algum número constante igual a σ^2 . Ou seja, este postulado é referente a homoscedasticidade.

Dependendo da dimensão da variabilidade da variável estudada, esta variabilidade pode afetar na estimação dos parâmetros, por isto a preocupação em utilizar um modelo ponderado para resolver o problema da heterocedasticidade. Neste trabalho foi empregado o método dos quadrados mínimos sendo que a ponderação foi feita pelo inverso da variância dos valores em cada tempo, empregando-se a opção WEIGHT do procedimento MODEL do SAS Institute (2010).

3.7 Modelos de efeitos Mistos

Modelos mistos são modelos que contêm parâmetros com efeitos fixos e parâmetros com efeitos aleatórios. Eles têm crescente utilização prática na análise

de dados agrupados, devido a flexibilidade que eles oferecem na caracterização da correlação entre observações dentro de um mesmo grupo que é frequentemente observada neste tipo de dado. Dados agrupados, tais como medidas repetidas, dados longitudinais, e observações multiníveis, são coletados com frequência cada vez maior em diversas áreas de aplicação.

Modelos não-lineares de efeitos mistos são modelos de efeitos mistos nos quais a resposta é representada por uma função não-linear de alguns de seus parâmetros.

Segundo PINHEIRO (1994), os métodos mais utilizados de estimação dos parâmetros para o modelos lineares e não lineares mistos são o método da Máxima Verossimilhança e Máxima Verossimilhança Restrita.

O modelo misto utilizado foi o seguinte:

$$y_{i,j} = f(x_i, \boldsymbol{\theta}) + \Delta_j g(x_i, \boldsymbol{\theta}) + \xi_{i,j}$$

com $g(x_i, \boldsymbol{\theta}) = \frac{f(x_i, \boldsymbol{\theta})}{\alpha}$;

Δ_j é o efeito aleatório do j-ésimo indivíduo, com distribuição $N(0, \sigma_{\Delta}^2)$;

$\xi_{i,j}$ é o erro aleatório, com distribuição $N(0, \sigma_{\xi}^2)$, independente de Δ_j e $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor dos parâmetros.

3.8 Critérios de seleção dos modelos

Para comparação dos modelos foram utilizados os critérios: Quadrado médio dos resíduos, Critério de informação de Akaike, Peso de Akaike MOTULSKY & CHISTOPOULOS (2004) Critério de Informação Bayesiano de Schwarz, teste de Breusch Pagan, teste de Durbin Watson e coeficiente de determinação.

A análise gráfica dos resíduos também é uma ferramenta muito

importante, pois ajuda na verificação da adequacidade do modelo, se os erros têm distribuição normal e se têm variância constante.

O critério de informação de Akaike (*AIC*), proposto por AKAIKE (1974), definido como:

$$AIC = -2 \log(L) + 2p$$

em que L é a função de verossimilhança; n é o número de observações e p o número de parâmetros ajustados.

Peso de Akaike é um método que mostra a probabilidade P de um modelo ser mais adequado que um outro. Analisa apenas dois modelos de cada vez, sendo definido como:

$$P = \frac{e^{-0,5\Delta}}{1 + e^{-0,5\Delta}}$$

Δ é a diferença entre os valores de *AIC* dos modelos comparados.

O critério de informação Bayesiano, proposto por SCHWARZ (1978), dado por:

$$BIC = -2 \log(L) + p \log(n)$$

em que L é a função de verossimilhança; n é o número de observações e p o número de parâmetros ajustados.

A escolha do modelo apropriado, do ponto de vista estatístico, é um tópico extremamente importante na análise de dados BOSDOGAN (1987). Busca-se o modelo mais parcimonioso, isto é, o modelo que envolva o mínimo de parâmetros possíveis a serem estimados e que explique bem o comportamento da variável resposta. Nesta linha, diversos critérios para seleção de modelos são apresentados

na literatura (BOSDOGAN, 1987; WOLFINGER, 1993; LITTELL et al., 2002). Dentre os critérios para seleção de modelos, os critérios baseados no máximo da função de verossimilhança (*MFV*) são os mais utilizados, com maior ênfase o Teste da Razão de Verossimilhança (*TRV*), o Critério de Informação de Akaike (*AIC*) e o Critério Bayesiano de Schwarz (*BIC*).

O Critério de Informação de Akaike (*AIC*) admite a existência de um modelo “real” que descreve os dados que é desconhecido, e tenta escolher dentre um grupo de modelos avaliados, o que minimiza a divergência de Kullback-Leibler (K-L). Esta divergência está relacionada à informação perdida por se usar um modelo aproximado e não o “real”. O modelo com menor valor de *AIC* é considerado o modelo de melhor ajuste.

O Critério Bayesiano de Schwarz (*BIC*) tem como pressuposto a existência de um “modelo verdadeiro” que descreve a relação entre a variável dependente e as diversas variáveis explanatórias entre os diversos modelos sob seleção. Assim o critério é definido como a estatística que maximiza a probabilidade de se identificar o verdadeiro modelo dentre os avaliados. O modelo com menor *BIC* é considerado o de melhor ajuste.

Utilizando-se o *AIC* admite-se que dentre os modelos avaliados nenhum é considerado o que realmente descreve a relação entre a variável dependente e as variáveis explanatórias, ou o “modelo verdadeiro” e então, tenta-se escolher o modelo que minimize a divergência (K-L). Com o Critério Bayesiano de Schwarz (*BIC*), está implícito que existe o modelo que descreve a relação entre as variáveis envolvidas e o critério tenta maximizar a probabilidade de escolha do verdadeiro modelo.

Em estudos de simulação realizados por EMILIANO et al. (2010),

utilizando os critérios *AIC*, *AIC* corrigido e *BIC* para dados oriundos de séries temporais, os autores concluíram que para amostras de tamanho pequeno (< 500), os desempenhos dos critérios *AIC* e *AIC* corrigido foram similares e inferiores ao *BIC*.

Neste trabalho utilizou-se o coeficiente de determinação que foi calculado elevando-se o coeficiente de correlação entre os valores observados e estimados pelo modelo, ao quadrado, segundo (SCHINCKEL & CRAIG, 2002).

3.9 Aplicações

Para os dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*, foi realizado um ajuste único para que as três estruturas de erro fossem comparadas e foram utilizados os critérios: Quadrado médio do resíduo, Informação de Akaike, Informação Bayesiano de Schwarz, teste de Breusch Pagan e coeficiente de correlação ao quadrado, na comparação das mesmas.

Foram também realizados ajustes individuais comparando-se as estruturas de erros de efeitos fixos e ponderados, utilizando-se os 4 modelos. Foram utilizados os critérios, teste de Breusch Pagan, teste de Durbin Watson, coeficiente de correlação ao quadrado, teste de Shapiro-Wilk e peso de Akaike na comparação das estruturas e dos modelos.

Para a maioria das repetições para todas os modelos nos ajustes individuais, a estrutura com ponderação corrigiu a heterocedasticidade e presença de autocorrelação, por isto somente os resultados desta estrutura foram apresentados. Para comparação dos parâmetros foi utilizada a análise de variância não paramétrica, uma vez que as estimativas dos parâmetros não apresentaram distribuição normal.

Para os dados de massa de frutos de laranjeiras doces *Citrus sinensis* (L.) Osbeck foi ajustado o modelo logístico com ajustes em três estruturas: de efeitos fixos, com ponderação e de efeitos mistos e foi realizada uma análise de variância utilizando os valores individuais das estimativas dos parâmetros para comparar copas e porta-enxertos.

4 RESULTADOS

4.1 Dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*

4.1.1 Ajuste único

Para o ajuste único, são apresentadas tabelas com as estimativas dos parâmetros, com seus respectivos erros-padrão, quadrados médios do resíduo e valores p para os testes de Breusch Pagan e Durbin Watson para as três estruturas estudadas para os quatro modelos (tabelas 2, 3 e 4). São também apresentados os coeficientes de correlação ao quadrado, critérios de informação de Akaike e critérios de Informação Bayesiano de Schwarz segundo estruturas e modelos ajustados para as três regiões de plantio (tabela 5).

Tabela 2. Estimativa dos parâmetros, com seus respectivos erros-padrão, quadrado médio do resíduo e valores de p para os testes de Breusch Pagan e Durbin Watson para a estrutura de erros de efeitos fixos para os quatro modelos - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

	Estimativas				$QMRes$	BP	d_W
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$			
Logística							
Gaspar	0,1245	4,6791	0,1565	..	0,00112	< 0,0001	< 0,0001
	0,0352	0,2288	0,0093	..			
NSA	0,1395	4,6584	0,1420	..	0,00151	< 0,0001	< 0,0001
	0,0051	0,2474	0,0098	..			
São Pedro	0,1956	4,9813	0,1522	..	0,00147	< 0,0001	< 0,0001
	0,0051	0,1910	0,0075	..			
Gompertz							
Gaspar	0,1389	2,2909	0,0845	..	0,00111	< 0,0001	< 0,0001
	0,0060	0,1349	0,0065	..			
NSA	0,1672	2,1383	0,0690	..	0,00150	< 0,0001	< 0,0001
	0,0116	0,1377	0,0069	..			
São Pedro	0,2370	2,2739	0,0728	..	0,00146	< 0,0001	< 0,0001
	0,0123	0,1099	0,0054	..			
von Bertalanffy							
Gaspar	0,1521	1,5709	0,0608	..	0,00110	< 0,0001	< 0,0001
	0,0088	0,1700	0,0057	..			
NSA	0,2001	1,2957	0,0446	..	0,00150	< 0,0001	< 0,0001
	0,0217	0,1365	0,0060	..			
São Pedro	0,2866	1,4129	0,0467	..	0,00146	< 0,0001	< 0,0001
	0,0241	0,1241	0,0048	..			
Richards							
Gaspar	0,1416	0,7041	0,0783	11,5190	0,00112	< 0,0001	< 0,0001
	0,0113	1,7800	0,0205	36,1606			
NSA	0,1696	0,2682	0,0664	29,0711	0,00150	< 0,0001	< 0,0001
	0,0267	2,5211	0,0265	297,6000			
São Pedro	0,2547	1,0146	0,0606	6,4772	0,00146	< 0,0001	< 0,0001
	0,0369	0,9825	0,0196	10,1405			

$QMRes$ - quadrado médio do resíduo; BP - Breusch Pagan; d_W - Durbin-Watson

Tabela 3. Estimativa dos parâmetros, com seus respectivos erros-padrão, quadrado médio do resíduo e valores de p para os testes de Breusch Pagan e Durbin Watson para a estrutura de erros com ponderação para os quatro modelos - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

	Estimativas				$QMRes$	BP	d_W
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$			
Logística							
Gaspar	0,0871	6,4104	0,2625	..	0,00117	0,56	< 0,0001
	0,0030	0,0785	0,0058	..			
NSA	0,0872	6,1390	0,2389	..	0,001553	0,73	< 0,0001
	0,0043	0,2474	0,0098	..			
São Pedro	0,1091	7,5063	0,1522	..	0,001674	0,14	< 0,0001
	0,0038	0,0806	0,0075	..			
Gompertz							
Gaspar	0,1302	2,4103	0,0923	..	0,001092	0,99	< 0,0001
	0,0064	0,0293	0,0030	..			
NSA	0,1459	2,2762	0,0792	..	0,001458	0,98	< 0,0001
	0,0103	0,0267	0,0032	..			
São Pedro	0,1974	2,5240	0,8890	..	0,001462	0,99	< 0,0001
	0,0097	0,0220	0,0024	..			
von Bertalanffy							
Gaspar	0,1968	1,2775	0,0455	..	0,001103	0,99	< 0,0001
	0,0156	0,0277	0,0025	..			
NSA	0,2744	1,1463	0,0339	..	0,001465	0,99	< 0,0001
	0,0358	0,0217	0,0026	..			
São Pedro	0,4320	1,2020	0,0334	..	0,00146	0,99	< 0,0001
	0,0443	0,0182	0,0019	..			
Richards							
Gaspar	0,1396	0,6943	0,0803	12,1586	0,001092	0,99	< 0,0001
	0,0115	0,4261	0,0103	10,2414			
NSA	0,1710	0,0118	0,0617	7,9705	0,001457	0,99	< 0,0001
	0,0239	0,2988	0,0108	4,8650			
São Pedro	0,2271	0,8306	0,0717	10,1472	0,001458	0,99	< 0,0001
	0,0200	0,2232	0,0076	4,3993			

$QMRes$ - quadrado médio do resíduo; BP - Breusch Pagan; d_W - Durbin-Watson

Tabela 4. Estimativa dos parâmetros, com seus respectivos erros-padrão, quadrado médio do resíduo e valores de p para os testes de Breusch Pagan e Durbin Watson para a estrutura de erros de efeitos mistos para os quatro modelos - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

	Estimativas				$\hat{\sigma}_{\Delta}^2$	$QMRes$	BP	d_W
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$				
Logística								
Gaspar	0,1273	4,6888	0,154	..	0,0052	0,00003	< 0,0001	0,02
	0,0064	0,0340	0,0014	..	0,0006			
NSA	0,1429	4,7529	0,1422	..	0,0094	0,00143	< 0,0001	< 0,0001
	0,0085	0,0356	0,0014	..	0,0012			
São Pedro	0,1973	4,9805	0,1512	..	0,0097	0,00007	< 0,0001	0,006
	0,0084	0,0366	0,0015	..	0,0012			
Gompertz								
Gaspar	0,1438	2,2727	0,0817	..	0,0067	0,00000	< 0,0001	0,02
	0,0072	0,0174	0,0008	..	0,0008			
NSA	0,1740	2,1600	0,0678	..	0,0140	0,00008	< 0,0001	0,0005
	0,0105	0,0188	0,0009	..	0,0017			
São Pedro	0,2414	2,2592	0,0711	..	0,0146	0,00006	< 0,0001	0,0100
	0,0104	0,0195	0,0010	..	0,0018			
von Bertalanffy								
Gaspar	0,1596	1,5263	0,0578	..	0,0082	0,00002	< 0,0001	0,03
	0,0081	0,0225	0,0008	..	0,0010			
NSA	0,2122	1,3002	0,0430	..	0,0208	0,00016	< 0,0001	0,0005
	0,0131	0,0197	0,0008	..	0,0027			
São Pedro	0,2954	1,3878	0,0453	..	0,0218	0,00006	< 0,0001	0,01
	0,0133	0,0225	0,0010	..	0,0027			
Richards								
Gaspar	0,1581	1,4893	0,0596	3,2540	0,0085	0,00000	< 0,0001	0,03
	0,0081	0,0469	0,0020	0,2755	0,0010			
NSA	0,1945	1,1016	0,0518	4,6883	0,0175	0,00004	< 0,0001	0,03
	0,0127	0,0952	0,0028	0,8040	0,0024			
São Pedro	0,2640	1,0834	0,0575	5,6331	0,0174	0,00006	< 0,0001	0,01
	0,0135	0,1503	0,0036	1,3925	0,0023			

$QMRes$ - quadrado médio do resíduo; BP - Breusch Pagan; d_W - Durbin-Watson

Para o parâmetro α , com exceção do modelo von Bertalanffy, todas as estimativas foram menores para a estrutura ponderada e também seus desvios-padrão foram menores. Com relação aos parâmetros β e γ , as estimativas variaram; ora maiores, ora menores na estrutura ponderada, sendo que os desvios-padrão na maioria dos casos foram menores na estrutura ponderada.

Para a estrutura de efeitos fixos todos os valores p para os testes de Breush-Pagan e Durbin-Watson foram significativos mostrando presença de heterogeneidade e autocorrelação. A estrutura com ponderação corrigiu a heterogeneidade, porém não corrigiu o efeito da autocorrelação. A estrutura de efeitos mistos não corrigiu a heterogeneidade nem tampouco o efeito da autocorrelação (tabelas 2 a 4).

Uma solução seria incorporar o efeito da autocorrelação no modelo com ponderação, mas como os valores de x não são equiespaçados, torna-se uma análise bem complicada, o que não é o objetivo deste trabalho.

Tabela 5. Coeficiente de correlação ao quadrado, Critério de informação de Akaike e Critério de Informação Bayesiano de Schwarz segundo estruturas e modelos ajustados para as três regiões de plantio - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis* (m^3).

Modelo	Estrutura								
	Efeitos fixos			com Ponderação			Efeitos Mistos		
	R^2	AIC	BIC	R^2	AIC	BIC	R^2	AIC	BIC
Logístico									
Gaspar	0,57	-9710,0	-9694,2	0,68	-9647,1	-9631,3	0,99	-14732,3	-14706,0
NSA	0,51	-9354,2	-9338,4	0,60	-9314,1	-9298,3	0,99	-10429,5	-10403,2
São Pedro	0,67	-10110,4	-10094,3	0,68	-9908,4	-9892,4	0,98	-14820,7	-14794,0
Gompertz									
Gaspar	0,57	-9722,9	-9707,1	0,70	-9745,6	-9729,8	0,99	-15198,7	-15172,4
NSA	0,51	-9363,8	-9348,0	0,62	-9404,3	-9388,5	0,99	-10662,0	-10635,7
São Pedro	0,68	-10121,0	-10104,9	0,72	-10119,3	-10103,3	0,99	-15166,6	-15139,8
von Bertalanffy									
Gaspar	0,57	-9735,8	-9720,0	0,70	-9731,5	-9715,7	0,99	-15156,5	-15130,2
NSA	0,51	-9363,8	-9348,0	0,62	-9398,1	-9382,3	0,99	-10616,8	-10590,5
São Pedro	0,68	-10121,0	-10104,9	0,71	-10085,2	-10069,2	0,99	-15160,8	-15134,1
Richards									
Gaspar	0,57	-9708,0	-9687,0	0,70	-9743,9	-9722,8	0,99	-15166,8	-15140,4
NSA	0,51	-9361,8	-9340,7	0,62	-9404,0	-9382,9	0,99	-10644,9	-10618,5
São Pedro	0,68	-10119,0	-10097,6	0,72	-10121,6	-10100,2	0,99	-15177,5	-15150,8

Os coeficientes de correlação ao quadrado foram bem próximos para modelos e regiões dentro de cada estrutura, sendo os menores para estrutura de efeitos fixos, em segundo lugar a ponderada e os maiores para a estrutura de efeitos mistos. Os valores de *AIC* e *BIC* foram sempre menores para a estrutura de efeitos mistos (tabela 5), isto mostra uma evidência de que esta estrutura de erros tenha corrigido melhor do que a ponderada a estrutura de efeitos fixos. Este fato era esperado porque a estrutura de efeitos mistos incorpora mais parâmetros.

4.1.2 Ajustes individuais

São apresentados os valores mínimos, máximos, mediana, média, desvio-padrão e coeficiente de variação (Tabela 5) referentes às estimativas dos parâmetros e coeficientes de correlação ao quadrado (Tabela 6) para os modelos ajustados em cada região para a estrutura com ponderação, uma vez que esta estrutura se mostrou melhor, pois corrigiu a heterocedasticidade e presença de autocorrelação para a maioria das repetições.

Tabela 6. - Valores mínimos, máximos, mediana, média, desvio-padrão e coeficiente de variação referentes às estimativas dos parâmetros para os modelos ajustados em cada região para a estrutura com ponderação - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

Região	Modelo												
	Logística			Gompertz			von Bertalanffy			Richards			
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\delta}$
Gaspar (n=130)													
Min	0,005	5,21	0,20	0,005	2,01	0,07	0,006	1,02	0,03	0,005	-16,84	0,01	-34,5
Máx	0,288	9,67	0,53	0,428	3,81	0,22	0,717	3,44	0,14	0,613	1,66	0,21	186,0
Me	0,082	6,49	0,28	0,115	2,46	0,10	0,169	1,32	0,05	0,169	1,00	0,08	5,5
Méd	0,090	6,66	0,28	0,132	2,53	0,10	0,202	1,43	0,05	0,177	0,40	0,08	10,9
DP	0,056	0,78	0,05	0,085	0,29	0,03	0,146	0,37	0,02	0,103	2,43	0,03	28,0
CV	62,058	11,73	18,23	64,731	11,65	25,15	72,276	25,56	36,03	58,408	602,85	32,92	257,8
Nossa Sra. Ajuda (n=131)													
Min	0,002	4,03	0,17	0,004	1,73	0,05	0,007	0,96	0,01	0,010	-10,79	0,01	-14,3
Máx	0,312	10,38	0,57	0,486	4,19	0,23	1,155	3,17	0,12	2,506	3,35	0,17	30,6
Me	0,075	6,36	0,26	0,128	2,34	0,09	0,217	1,21	0,04	0,202	1,10	0,05	4,2
Méd	0,089	6,44	0,27	0,145	2,39	0,09	0,279	1,29	0,04	0,257	0,83	0,06	5,6
DP	0,069	1,12	0,06	0,110	0,37	0,03	0,242	0,34	0,02	0,284	1,40	0,03	6,2
CV	77,405	17,43	23,16	76,147	15,46	27,89	86,668	26,14	40,31	110,207	169,20	44,91	111,4
São Pedro (n=141)													
Min	0,001	6,25	0,24	0,003	2,24	0,06	0,007	1,06	0,01	0,009	-4,48	0,04	-19,2
Máx	0,253	11,88	0,80	0,488	4,88	0,33	2,353	3,89	0,16	0,655	1,91	0,12	296,9
Me	0,112	7,90	0,31	0,197	2,60	0,09	0,371	1,27	0,04	0,258	1,04	0,07	7,1
Méd	0,116	7,91	0,33	0,201	2,66	0,10	0,458	1,36	0,04	0,276	0,88	0,07	13,3
DP	0,063	0,82	0,07	0,113	0,31	0,03	0,378	0,33	0,02	0,148	0,80	0,02	31,1
CV	54,171	10,30	21,12	56,292	11,66	30,41	82,675	24,01	44,96	53,625	91,22	27,71	233,1

Nota: Min - mínimo; Máx - máximo; Me - mediana; Méd - média; DP - desvio padrão; CV - coeficiente de variação

A variabilidade relativa à estimativa do parâmetro α foi grande para todas as regiões e modelos, apresentando coeficientes de variação superiores a 50%. Quanto ao parâmetro β , a variabilidade não foi tão grande para as regiões e modelos, com exceção do modelo de Richards que apresentou valores bem mais altos que os demais, principalmente na região Gaspar. As estimativas do parâmetro γ não apresentaram variabilidade tão grande, porém as estimativas do parâmetro δ apresentaram sempre variabilidade alta, coeficiente de variação superiores a 100% (tabela 6).

Tabela 7. Valores mínimos, máximos, mediana, média, desvio-padrão e coeficiente de variação referentes aos coeficientes de correlação ao quadrado e peso de Akaike para os modelos ajustados em cada região para a estrutura com ponderação - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

Região	Modelo				Peso	Peso
	Logístico	von Gompertz	Bertalanffy	Richards	Rich/Gomp	Gomp/v. Bertff
Gaspar	(n=130)					
Mínimo	0,805	0,755	0,705	0,952	0,325	0,000
Máximo	0,994	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
Mediana	0,966	0,993	0,988	0,995	0,680	0,948
Média	0,961	0,987	0,982	0,993	0,651	0,711
DP	0,027	0,027	0,030	0,008	0,256	0,370
CV	2,786	2,711	3,104	0,815	39,304	51,972
Nossa Sra. Ajuda	(n=131)					
Mínimo	0,896	0,879	0,857	0,967	0,330	0,000
Máximo	0,988	0,997	0,997	0,998	0,999	0,999
Mediana	0,954	0,987	0,987	0,991	0,683	0,504
Média	0,951	0,984	0,983	0,990	0,683	0,486
DP	0,020	0,013	0,017	0,007	0,238	0,370
CV	2,112	1,365	1,693	0,673	34,829	76,125
São Pedro	(n=141)					
Mínimo	0,816	0,911	0,891	0,958	0,332	0,000
Máximo	0,986	0,999	0,996	0,998	0,999	0,999
Mediana	0,936	0,990	0,986	0,994	0,698	0,881
Média	0,933	0,986	0,982	0,993	0,686	0,608
DP	0,026	0,013	0,016	0,006	0,233	0,418
CV	2,799	1,348	1,659	0,593	34,038	68,738

Nota: DP - desvio padrão; CV - coeficiente de variação

O modelo que apresentou maiores coeficientes de correlação ao quadrado foi o de Richards seguido pelo modelo de Gompertz. Em média, a probabilidade do modelo de Richards ser melhor que o de Gompertz ficou em torno de 0,65 a 0,68 e do Gompertz em relação a von Bertalanffy ficou em torno de 0,48 a 0,71 (tabela 7).

Na tabela 8 apresenta-se apenas o modelo de Gompertz levando-se em consideração a convergência e o melhor ajuste entre os modelos propostos. Os valores de R^2 mostram que os ajustes foram adequados para todas as regiões. Houve também homogeneidade dos resíduos para todas as repetições em cada região. Houve presença de autocorrelação em apenas algumas das repetições e falta de normalidade em apenas algumas repetições.

A tabela 9 apresenta o resumo dos resultados referentes a convergência, melhor ajuste e problemas com autocorrelação. Avaliando o número e porcentagem de não convergência, melhor ajuste e problemas com auto correlação para cada um dos modelos.

Baseado nos critérios do coeficiente de correlação, AIC e BIC , o melhor ajuste foi utilizando-se o modelo de Richards, em seguida o modelo de Gompertz, depois o de von Bertalanffy e por último o logístico (tabela 9).

A tabela 10 apresenta os resultados da análise de variância não paramétrica (teste de Kruskal Wallis, seguido do teste de Dunn para comparações multiplas) referente aos parâmetros α , β e γ , sendo apresentados medianas, 1º e 3º quartis, para a função Gompertz segundo região.

Tabela 8. Valores mínimos, máximos, mediana, média, desvio-padrão e coeficiente de variação referentes ao coeficiente de correlação ao quadrado e valores p para os testes de Breusch-Pagan, Durbin Watson e Shapiro-Wilk para o modelo de Gompertz em cada região para a estrutura com ponderação - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

Região	Estatística	R^2	BP	p_{d_W}	p_W
Gaspar $n = 130$	Mínimo	0,7545	0,2021	0,0008	0,0062
	Máximo	0,9991	0,8577	0,9839	0,9949
	Mediana	0,9930	0,3122	0,2642	0,4816
	Média	0,9869	0,3642	0,3243	0,4936
	DP	0,0268	0,1478	0,2808	0,3100
	CV	2,71	40,59	86,58	62,81
NSA $n = 131$	Mínimo	0,8789	0,2028	0,0005	0,0167
	Máximo	0,9967	0,8710	0,9210	0,9988
	Mediana	0,9865	0,3738	0,1277	0,4886
	Média	0,9835	0,4281	0,2171	0,5141
	DP	0,0134	0,1715	0,2256	0,2744
	CV	1,37	40,07	103,90	53,38
São Pedro $n = 141$	Mínimo	0,9105	0,2342	0,0009	0,0017
	Máximo	0,9987	0,9096	0,9650	0,9912
	Mediana	0,9901	0,3286	0,1675	0,4629
	Média	0,9858	0,3827	0,2713	0,4649
	DP	0,0133	0,1313	0,2701	0,2933
	CV	1,35	34,31	99,57	63,08

Nota: DP - desvio padrão; CV - coeficiente de variação

Tabela 9. Resultados das análises individuais em 402 repetições nas três regiões avaliando o número e porcentagem de não convergência, melhor ajuste e problemas com autocorrelação para cada um dos modelos - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

	Modelo			
	Logística	Gompertz	von Bertalanffy	Richards
Não convergiram (Nº)	1	-	1	119
(%)	0,25	0,00	0,25	29,60
Melhor ajuste (Nº)	4	94	62	242
(%)	1,00	23,38	15,42	60,20
Problemas com				
autocorrelação (Nº)	1	2	2	3
(%)	0,25	0,50	0,50	1,07

Sinal convencional utilizado:

- Dado numérico igual a zero não resultante de arredondamento.

Melhor ajuste segundo critérios: R^2 , AIC , BIC e resultados dos testes de Breuch-Pagan, Durbin-Watson e Shapiro-Wilk

Tabela 10. Mediana, 1º e 3º quartil, entre colchetes, referentes às estimativas dos parâmetros ajustados pela função

Gompertz segundo regiões - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

Região	Estimativa		
	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
Gaspar	0,115B [0,069; 0,192]	2,461B [2,339; 2,672]	0,099A [0,088; 0,113]
Nossa Senhora da Ajuda	0,128B [0,052; 0,217]	2,344C [2,150; 2,546]	0,087B [0,074; 0,102]
São Pedro	0,197A [0,111; 0,282]	2,597A [2,500; 2,771]	0,093A [0,084; 0,107]
Valor de p	< 0,001	< 0,001	0,002

Comparações múltiplas pelo teste de Dunn

Como os melhores modelos ajustados foram o de Richards e em segundo lugar o de Gompertz, e o de Gompertz apresentou 100% de convergência nas repetições, na comparação dos parâmetros, utilizamos este modelo.

As regiões de Gaspar e Nossa Senhora da Ajuda não mostraram diferenças em relação ao parâmetro α . Com relação ao parâmetro β as três regiões diferiram e quanto ao parâmetro γ as regiões Gaspar e São Pedro não diferiram entre si (tabela 10).

Apresenta-se as figuras com ajustes médios da função Gompertz segundo região (Figura 8) e segundo região e linhas por região (Figura 9).

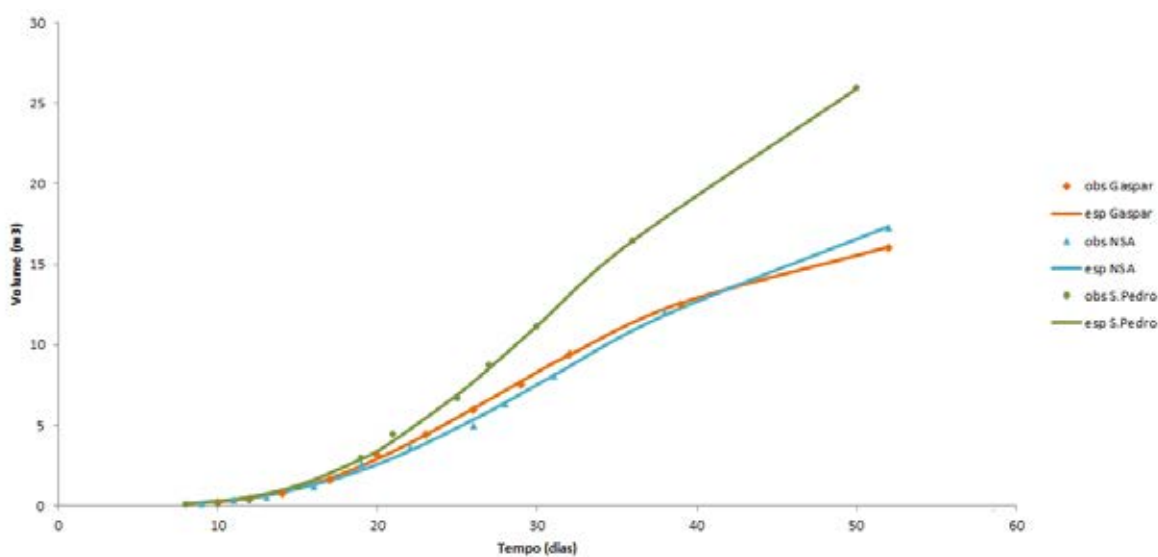


Figura 8 - Ajustes médios do modelo de Gompertz ($f(x, \theta) = \alpha \exp\{-\exp\{\beta + \gamma x\}\}$), segundo região - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

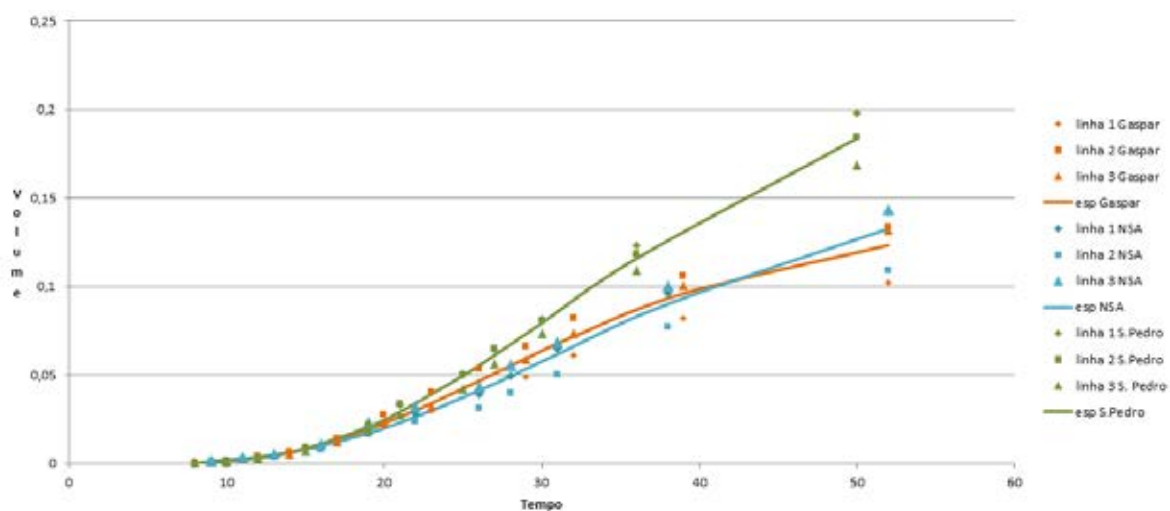


Figura 9 - Ajustes médios do modelo de Gompertz ($f(x; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha \exp\{-\exp\{\beta + \gamma x\}\}$), segundo região e linhas por região - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis* (m^3).

Percebe-se que a região de São Pedro teve um comportamento distinto das outras duas regiões mostrando valores da assíntota superiores às demais. ($p < 0,001$)

4.2 Dados de massa de frutos de laranjeiras doces *Citrus sinensis* (L.) Osbeck.

Foram apresentadas as estimativas dos parâmetros e seus respectivos erros-padrão segundo copa e porta-enxerto para as três estruturas estudadas (Tabelas 11 e 12), bem como os coeficientes de correlação ao quadrado, AIC e BIC, e indicação da estrutura mais apropriada segundo copa e porta-enxerto (Tabela 13). Foram também apresentados os valores p para os testes de Breusch-Pagan, Durbin-Watson, Shapiro-Wilk e avaliação da necessidade de correção da heterogeneidade e autocorrelação, segundo copa e porta-enxerto (tabela 14).

Posteriormente foram apresentados os resultados da análise de variância não paramétrica, teste de Kruskal Wallis para comparação de copas e teste de Friedman para comparação de porta-enxertos, sendo apresentados as medianas, 1^o e 3^o quartil entre colchetes referentes às estimativas dos parâmetros, α , β e γ (Tabelas 16, 17 e 18). Foram apresentados também os resultados dos testes de comparações múltiplas para comparação de copas e de porta-enxertos.

Foram também apresentadas figuras com os valores observados e estimados para a função logística, segundo copa (Figuras 10 e 11) e porta-enxerto (Figuras 12 e 13).

Tabela 11. Estimativas dos parâmetros e seus respectivos erros-padrão segundo copa e porta-enxerto para as três estruturas (modelo logístico - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*).
Continua

Copa	Porta-enxerto	Estrutura										
		Efeitos fixos			Com ponderação			Efeitos mistos				
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\sigma}_{\Delta}^2$	
Baianinha	LC	235,9	12,55	1,34	366,0	8,63	0,81	235,6	12,41	1,32	489,5	
		90,0	2,41	0,28	535,9	2,40	0,46	24,2	2,3	0,26	682,0	
	SU	360,9	10,36	0,99	326,3	11,55	1,13	240,2	11,12	1,12	438,8	
		90,0	1,39	0,18	59,5	0,53	0,08	32,5	1,43	0,17	247,6	
	CA	224,4	18,75	1,94	251,6	13,79	1,4	223,8	18,53	1,92	408,7	
		11,7	2,21	0,24	22,7	0,48	0,07	13,4	1,84	0,2	178,3	
	TR	264,3	9,53	0,88	215,4	11,47	1,1	151,5	11,74	1,22	2557,3	
		113,8	1,39	0,2	48,2	0,42	0,07	25,8	0,61	0,09	1091,3	
	RF	278,1	10,11	0,98	193,3	12,83	1,38	307,3	9,4	0,89	6468,6	
		82,4	1,80	0,23	28,2	0,95	0,14	106,2	0,55	0,1	4760,2	
	Hamlin	LC	286,7	11,61	1,36	294,2	10,77	1,25	287,3	11,45	1,34	442,4
			11,7	1,27	0,16	14,2	0,48	0,07	12,5	1,04	0,13	374,7
SU		311,3	9,5	0,05	249,4	12,92	1,52	298,2	10,14	1,14	498,6	
		26,0	1,24	0,16	15,0	0,7	0,1	23,8	1,22	0,16	562,6	
CA		249,1	24,86	2,76	257,8	17,34	1,92	254,4	17,05	1,89	4097,5	
		10,9	6,24	0,7	17,1	1,53	0,19	22,9	1,37	0,18	1480,1	
TR		297,6	9,11	0,91	212,8	12,16	1,3	195,2	12,41	1,37	4900,4	
		69,1	1,48	0,2	31,6	0,65	0,1	23,6	0,75	0,11	1723,8	
RF		259,9	10,08	1,1	287,2	9,33	0,99	265,9	9,6	1,04	443,4	
		20,4	1,19	0,15	32,1	0,49	0,08	21,3	1,35	0,16	109,9	
Itaboraí		LC	824,4	7,13	0,55	521,2	7,58	0,65	486,1	7,15	0,62	515,1
			987,2	0,51	0,11	340,6	0,32	0,1	348,7	0,46	0,37	1568,7
	SU	543,0	7,79	0,67	321,5	9,05	0,89	205,9	10	1,1	1496,6	
		300,8	0,55	0,12	55,9	0,44	0,08	20,5	0,71	0,1	353,3	
	CA	557,5	9,81	0,84	388,0	10,42	0,95	324,9	9,87	0,85	413,3	
		355,6	0,76	0,15	92,1	0,3	0,06	269,3	0,74	0,13	1269,9	
	TR	NC	NC	NC	181,0	11,15	1,14	241,7	9,22	0,88	3124,4	
					32,5	0,56	0,09	81,1	0,64	0,12	1931,3	
	RF	646,4	7,76	0,59	349,8	8,02	0,69	312,4	7,68	9,97	287,4	
		1225,5	0,81	0,17	247,0	0,35	0,09	182,8	0,39	10,63	295,4	

limoeiro Cravo - LC, tangerineira Sunki - SU, laranjeira Caipira - CA, trifoliata - TR e limoeiro rugoso da Flórida - RF

Não convergiu - NC

Tabela 12. Estimativas dos parâmetros e seus respectivos erros-padrão segundo copa e porta-enxerto para as três estruturas (modelo logístico - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*).
Conclusão

Copa	Porta-enxerto	Estrutura										
		Efeitos fixos			Com ponderação			Efeitos mistos			$\hat{\sigma}_{\Delta}^2$	
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$		
Rubi	LC	278,4	8,25	0,9	259,7	10,56	1,17	273,4	8,32	0,92	573,2	
		30,1	1,07	0,14	25,6	0,69	0,11	32,8	0,96	0,13	752,8	
	SU	301,4	8,7	0,92	290,1	10,24	1,08	290,5	80,95	0,96	285,5	
		37,2	1,1	0,14	27,6	0,7	0,1	73,4	1,9	0,27	1638,9	
	CA	291,8	9,66	1	241,6	12,57	0,37	267,3	10,38	1,11	555,2	
		40,9	1,39	0,17	22,9	0,68	0,09	29,6	1,08	0,14	416,2	
	TR	764,9	8,3	0,66	228,5	10,73	1,1	198,0	11,63	1,25	1726,9	
		812,9	0,41	0,13	30,9	0,55	0,08	19,3	0,58	0,08	564,2	
	RF	225,3	10,48	1,13	238,0	11,2	1,19	223,7	10,48	1,13	564,5	
		29,1	2,01	0,25	35,1	0,83	0,12	23,6	1,42	0,17	459,6	
	Westin	LC	370,9	11,26	1,08	310,9	12,94	1,29	341,0	11,58	1,13	1884,7
			61,0	1,14	0,14	38,8	0,49	0,07	53,4	0,69	0,09	1127,7
SU		255,0	16,33	1,66	293,9	14,26	1,4	249,1	13,29	1,56	1013,5	
		24,7	2,72	0,3	44,1	0,57	0,08	19,7	2,21	0,24	443,4	
CA		193,2	22,59	2,28	245,4	16,49	1,62	263,7	13,99	1,33	9252,9	
		13,5	4,11	0,43	92,0	1,92	0,24	91,2	0,84	0,13	7564,3	
TR		171,5	17,26	1,83	167,5	18,06	1,92	172,1	16,25	1,72	817,5	
		8,2	1,98	0,22	8,6	0,78	0,1	13,5	0,94	0,12	295,8	
RF		334,6	13,77	1,28	642,6	13,67	1,17	NC	NC	NC		
		83,1	1,67	0,2	671,5	0,88	0,21					

limoeiro Cravo - LC, tangerineira Sunki - SU, laranjeira Caipira - CA, trifoliata - TR e limoeiro rugoso da Flórida - RF

Não convergiu - NC

A escolha da estrutura mais adequada foi utilizando todos os critérios, ou seja, testes de Durbin-Watson, Breusch-Pagan, Shapiro-Wilk, AIC , BIC e R^2 . Apesar de algumas estruturas apresentarem menores valores de AIC e BIC , elas acabaram mostrando problemas com a autocorrelação e/ou homocedasticidade (tabela 14).

As estimativas dos parâmetros e respectivos erros-padrão variaram de acordo com a estrutura ajustada.

Pelos coeficientes de correlação ao quadrado, verifica-se que houve um bom ajuste para todas as copas e portas-enxerto. Os critérios AIC e BIC também variaram conforme a estrutura ajustada.

Na tabela 15 os valores de R^2 mostram que os ajustes do modelo logístico foram muito bons para todas as copas. Houve também homogeneidade e normalidade dos resíduos para todas as repetições em cada copa. Houve presença de autocorrelação em apenas algumas das repetições.

4.2.1 Resultados das análises de variância não paramétricas para comparação de copas e porta-enxertos.

São apresentados as medianas, 1^o e 3^o quartil entre colchetes e os resultados das comparações múltiplas para comparação de copas e porta-enxertos referentes aos parâmetros α , β e γ (Tabelas 16 , 17 e 17).

Tabela 13. Coeficiente de correlação ao quadrado, *AIC* e *BIC*, e indicação da estrutura mais apropriado segundo copa e porta-enxerto para o modelo logístico - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*.

Copa	Porta-enxerto	Estrutura									Estrutura mais apropriada
		Efeitos fixos			Com ponderação			Efeitos mistos			
		R^2	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	R^2	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	R^2	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>	
Baianinha	LC	0,89	244,4	249,2	0,97	395,25	400,01	0,97	354,82	362,74	sp
	SU	0,94	224,9	229,6	0,94	259,07	263,82	0,95	337,79	345,71	cp
	CA	0,96	203,9	208,6	0,95	259,21	263,96	0,99	282,22	290,13	cp
	TR	0,92	204,1	208,9	0,93	221,83	226,58	0,99	46,46	54,37	mi
	RF	0,90	231,1	235,8	0,82	284,70	289,45	0,99	212,04	219,96	nenhuma
Hamlin	LC	0,96	230,9	235,7	0,98	242,3	247,1	0,98	327,02	334,94	cp
	SU	0,94	243,9	248,7	0,96	251,82	256,57	0,99	340,9	348,8	sp
	CA	0,94	246,7	251,5	0,93	247,8	252,6	0,99	184,21	192,13	nenhuma
	TR	0,91	239,0	243,7	0,92	251,2	255,9	NC	NC	NC	cp
	RF	0,95	221,3	226,1	0,95	224,7	229,4	0,98	311,82	319,74	cp
Itaboraí	LC	0,94	212,3	217,1	0,90	226,6	231,3	0,95	332,8	340,7	sp
	SU	0,95	214,4	219,1	0,95	220,8	225,5	0,99	191,12	199,04	mi
	CA	0,96	246,7	251,5	0,97	199,8	204,5	0,96	323,9	331,9	cp
	TR	NC	NC	NC	0,89	221,5	226,3	0,99	187,21	195,12	cp
	RF	0,89	211,8	216,6	0,88	219,1	223,9	0,99	165,39	173,31	cp
Rubi	LC	0,93	233,4	238,1	0,95	240,0	244,7	0,96	341,58	349,49	cp
	SU	0,94	232,7	237,5	0,96	236,6	241,3	0,95	352,98	360,90	nenhuma
	CA	0,93	235,5	240,2	0,94	239,9	244,6	0,98	326,7	334,6	mi
	TR	0,95	207,2	212,0	0,94	212,9	217,6	0,99	109,63	117,55	cp
	RF	0,88	211,8	216,6	0,91	246,2	250,9	0,95	345,5	353,5	sp
Westin	LC	0,97	204,0	208,8	0,97	214,5	219,3	0,96	341,58	349,49	cp
	SU	0,94	229,9	234,6	0,89	248,3	253,0	0,95	352,98	360,90	cp
	CA	0,94	209,2	213,9	0,71	289,6	294,3	0,98	326,7	334,6	sp
	TR	0,97	184,4	189,2	0,96	194,6	199,3	0,99	109,6	117,6	sp
	RF	0,97	184,7	189,5	0,99	189,0	193,7	0,95	345,55	353,46	cp

sp=sem ponderação, cp= com ponderação, mi=misto, NC= não convergiu ;

limoeiro Cravo - LC, tangerineira Sunki - SU, laranjeira Caipira - CA, trifoliata - TR e limoeiro rugoso da Flórida - RF

Tabela 14. Valores de p para os testes de Breusch -Pagan e Durbin Watson e avaliação da necessidade de correção da heterogeneidade e autocorrelação, segundo copa e porta-enxerto para o modelo logístico - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*.

		Estrutura						
		Efeitos fixos		Com ponderação		Efeitos mistos		
Copa	Porta-enxerto	BP	d_W	BP	d_W	BP	d_W	Avaliação
Baianinha	LC	0,35	0,11	0,09	0,43	< 0,0001	0,08	SC
	SU	0,036	0,74	0,29	0,87	< 0,0001	0,72	HT
	CA	0,0096	0,04	0,22	0,4	0,48	0,50	HT/AC
	TR	0,0022	0,04	0,55	0,005	0,99	0,62	HT/AC
	RF	0,0083	0,042	0,01	0,47	0,72	0,01	HT/AC
Hamlin	LC	0,04	0,99	0,57	0,26	0,85	0,82	HT
	SU	0,06	0,67	0,89	0,45	0,09	0,68	SC
	CA	0,03	0,07	0,93	0,003	0,89	0,02	HT
	TR	0,13	0,002	0,97	0,78	NC	NC	AC
	RF	0,2	0,02	0,85	0,9	0,50	0,02	AC
Itaboraí	LC	0,34	0,06	0,39	0,86	0,19	0,07	SC
	SU	0,02	0,58	0,28	0,83	0,001	0,60	HT
	CA	0,05	0,19	0,96	0,55	0,58	0,08	SC
	TR	NC	0,74	0,8	0,002	0,67	NC	NC
	RF	0,01	0,04	0,93	0,14	0,0008	0,04	HT/AC
Rubi	LC	0,16	0,001	0,31	0,46	0,60	0,004	AC
	SU	0,09	0,001	0,94	0,006	0,74	0,006	AC
	CA	0,06	0,71	0,9	0,0007	0,18	0,50	SC
	TR	0,19	0,0008	0,25	0,83	< 0,0001	0,10	AC
	RF	0,08	0,41	0,99	0,004	0,26	0,06	SC
Westin	LC	0,001	0,98	0,97	0,89	0,60	0,004	HT
	SU	0,005	0,96	0,61	0,93	0,74	0,005	HT
	CA	0,12	0,13	0,0006	0,39	0,18	0,49	SC
	TR	0,08	0,27	0,89	0,04	< 0,0001	0,70	SC
	RF	0,01	0,1	0,71	0,4	0,26	0,06	HT

SC-Não precisa de correção; HT- com heterogeneidade; HT/AC- com heterogeneidade e autocorrelação nos resíduos; NC-não convergiu.

limoeiro Cravo - LC, tangerineira Sunki - SU, laranjeira Caipira - CA, trifoliata - TR e limoeiro rugoso da Flórida - RF

Tabela 15. Valores mínimos, máximos, mediana, média, desvio-padrão e coeficiente de variação referentes ao coeficiente correlação ao quadrado e valores p para os testes de Breusch-Pagan, Durbin Watson e Shapiro-Wilk para o modelo logístico em cada copa para a estrutura com ponderação - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*.

Copa	Estatística	R^2	BP	d_W	W
Baianinha	Mínimo	0,8213	0,0521	0,0052	0,0969
	Máximo	0,9524	0,5535	0,8726	0,3071
	Mediana	0,9394	0,2262	0,4339	0,2646
	Média	0,9131	0,2342	0,4377	0,2333
	DP	0,0616	0,2092	0,3077	0,0931
	CV	6,75	89,32	70,31	39,93
Hamlin	Mínimo	0,9193	0,5735	0,0049	0,2820
	Máximo	0,9761	0,9738	0,8821	0,9115
	Mediana	0,9525	0,8828	0,3960	0,4797
	Média	0,9488	0,8136	0,4645	0,5650
	DP	0,0228	0,1764	0,3635	0,2449
	CV	2,41	21,68	78,25	43,34
Itaboraí	Mínimo	0,8767	0,2762	0,1404	0,1061
	Máximo	0,9705	0,9625	0,8623	0,6722
	Mediana	0,8988	0,7400	0,7969	0,2630
	Média	0,9186	0,6595	0,6369	0,3133
	DP	0,0400	0,3116	0,3038	0,2347
	CV	4,35	47,25	47,69	74,91
Rubi	Mínimo	0,9117	0,2498	0,0007	0,0543
	Máximo	0,9633	0,9982	0,8230	0,6714
	Mediana	0,9403	0,9021	0,0064	0,3123
	Média	0,9417	0,6806	0,2596	0,3278
	DP	0,0198	0,3691	0,3727	0,2394
	CV	2,11	54,23	143,56	73,05
Westin	Mínimo	0,8926	0,2137	0,3658	0,1867
	Máximo	0,9691	0,9680	0,9886	0,9777
	Mediana	0,9422	0,6123	0,9345	0,5779
	Média	0,9361	0,5403	0,8298	0,5800
	DP	0,0282	0,3147	0,2619	0,3792
	CV	3,01	58,25	31,56	65,37

limoeiro Cravo - LC, tangerineira Sunki - SU, laranja Caipira - CA, trifoliata - TR e limoeiro rugoso da Flórida - RF

Tabela 16. Mediana, 1^o e 3^o quartil, referentes às estimativas do parâmetro α segundo copa e porta-enxerto - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*.

Porta-enxerto	Copa					p-valor
	Baianinha	Hamlin	Itaboraí	Rubi	Westin	
CA	232,45ab	252,59ab	447,46a	288,44ab	207,49b	0,02
	A	A	A	A	AB	
	[190,83;253,10]	[226,96;282,58]	[310,97;776,76]	[233,49;382,19]	[174,37;224,02]	
LC	220,47a	276,37a	431,71a	274,11a	304,92a	0,14
	A	A	A	A	A	
	[203,58;311,34]	[256,58;295,42]	[313,02;538,69]	[244,02;311,01]	[279,33;455,88]	
RF	345,01a	246,69a	223,80a	210,85a	286,44a	0,31
	A	A	A	A	AB	
	[265,48;347,10]	[223,91;293,33]	[152,16;379,95]	[169,99;249,19]	[245,13;301,66]	
SU	381,52a	275,82a	276,07a	283,69a	266,33a	0,48
	A	A	A	A	AB	
	[222,30;490,15]	[253,79;543,19]	[225,27;433,41]	[260,50;306,02]	[251,62;276,92]	
TR	202,63ab	220,64ab	502,97a	360,18a	159,78b	0,02
	A	A	A	A	B	
	[164,86;298,35]	[165,47;276,89]	[224,27;781,68]	[291,24;528,81]	[152,25;192,38]	
p-valor	0,26	0,51	0,33	0,23	0,02	

Letras minúsculas comparam copas em cada porta-enxerto.

Letras maiúsculas comparam porta-enxertos em cada copa.

limoeiro Cravo - LC, tangerineira Sunki - SU, laranjeira Caipira - CA, trifoliata - TR e limoeiro rugoso da Flórida - RF

Para o parâmetro α , comparando os porta enxertos em cada copa, com exceção da copa Westin que mostrou diferença entre os porta-enxertos LC e TR, as demais não apresentaram diferenças.

Comparando copas em cada porta-enxerto, para o porta-enxerto CA, a copa Itaboraí diferiu da copa Westin e para o porta-enxerto TR, as copas Itaboraí e Rubi, diferiram da copa Westin.

Tabela 17. Mediana, 1^o e 3^o quartil, referentes às estimativas do parâmetro β segundo copa e porta-enxerto - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*.

Porta-enxerto	Copa					p-valor
	Baianinha	Hamlin	Itaboraí	Rubi	Westin	
CA	20,75ab A [14,25;24,51]	23,39a A [21,30;28,04]	11,30ab A [9,09;12,11]	10,19b A [8,62;11,08]	21,34a A [19,42;31,75]	0,003
LC	13,73a AB [10,38;14,52]	12,56ab AB [11,73;13,16]	7,36b A [6,35;8,25]	8,519ab A [8,14;8,93]	11,81ab B [11,57;13,08]	0,01
RF	11,12ab AB [10,63;11,55]	10,35ab B [9,78;10,94]	7,65b A [7,18;9,30]	11,67ab A [9,69;13,29]	14,76a AB [13,01;16,37]	0,02
SU	11,73a AB [9,67;15,84]	10,43a B [7,38;11,33]	8,59a A [7,99;12,72]	9,88a A [9,05;9,99]	17,07a AB [12,82;20,36]	0,76
TR	10,04ab B [9,90;10,31]	13,32ab AB [8,98;19,90]	8,75b A [8,54;8,97]	8,54b A [8,08;7,76]	19,87a AB [16,57;23,12]	0,004
p-valor	0,02	0,02	0,06	0,07	0,02	

Letras minúsculas comparam copas em cada porta-enxerto.

Letras maiúsculas comparam porta-enxertos em cada copa.

limoeiro Cravo - LC, tangerineira Sunki - SU, laranjeira Caipira - CA, trifoliata - TR e limoeiro rugoso da Flórida - RF

Para o parâmetro β , comparando os porta-enxertos em cada copa, para a copa Baianinha, o porta-enxerto CA diferiu do porta-enxerto TR, para a copa Hamlim, o porta-enxerto CA diferiu dos porta-enxertos RF e SU e para o Westing o porta-enxerto CA diferiu do porta-enxerto LC.

Comparando copas em cada porta-enxerto, para o porta-enxerto CA, as copas Hamlim e Westin diferiram da copa Rubi. Para o porta-enxerto LC, a copa Baianinha diferiu da Itaboraí. Para o porta-enxerto RF, a copa Westin diferiu da Itaboraí e para o porta-enxerto TR, a copa Westin diferiu da Itaboraí e da Rubi.

Tabela 18. Mediana, 1^o e 3^o quartil, referentes às estimativas do parâmetro γ segundo copa e porta-enxerto - dados de massa de laranjeiras doces *citrus sinensis*.

Porta-enxerto	Copa					<i>p</i> -valor
	Baianinha	Hamlin	Itaboraí	Rubi	Westin	
CA	2,13a	2,64a	0,98b	1,09ab	2,10a	0,003
	A	A	A	AB	A	
	[1,49;2,53]	[2,36;3,06]	[0,77;1,13]	[0,81;1,16]	[1,90;3,31]	
LC	1,47a	1,46a	0,66b	0,93ab	1,12ab	0,02
	AB	AB	A	AB	B	
	[1,12;1,56]	[1,42;1,51]	[0,58;0,74]	[0,87;1,02]	[1,12;1,31]	
RF	1,03a	1,17a	0,75a	1,22a	1,47a	0,10
	AB	B	A	A	AB	
	[1,03;1,18]	[1,07;1,20]	[0,66;0,94]	[1,02;1,50]	[1,26;1,58]	
SU	1,09a	1,19a	0,79a	1,04a	1,70a	0,57
	AB	B	A	A	AB	
	[0,85;1,74]	[0,70;1,31]	[0,78;1,36]	[1,01;1,13]	[1,29;2,13]	
TR	0,99ab	1,46Aab	0,76b	0,75b	2,17a	0,006
	B	AB	A	B	A	
	[0,95;1,00]	[0,93;2,27]	[0,66;0,87]	[0,72;0,84]	[1,73;2,51]	
<i>p</i> -valor	0,02	0,01	0,13	0,02	0,02	

Letras minúsculas comparam copas em cada porta-enxerto.

Letras maiúsculas comparam porta-enxertos em cada copa.

limoeiro Cravo - LC, tangerineira Sunki - SU, laranjeira Caipira - CA, trifoliata - TR e limoeiro rugoso da Flórida - RF

Para o parâmetro γ , comparando os porta enxertos em cada copa, para a copa Baianinha, o porta-enxerto CA diferiu do TR. Para a copa Hamlim, o porta enxerto CA diferiu do SU. Para a copa Rubi o porta-enxerto RF diferiu do TR e para a copa Westin os porta-enxertos CA e TR diferiram do LC.

Comparando as copas em cada porta-enxerto, para os porta-enxertos CA e LC, a copa Itaboraí mostrou menor valor e para o porta-enxerto TR, as copas Itaboraí e Rubi mostraram menores valores.

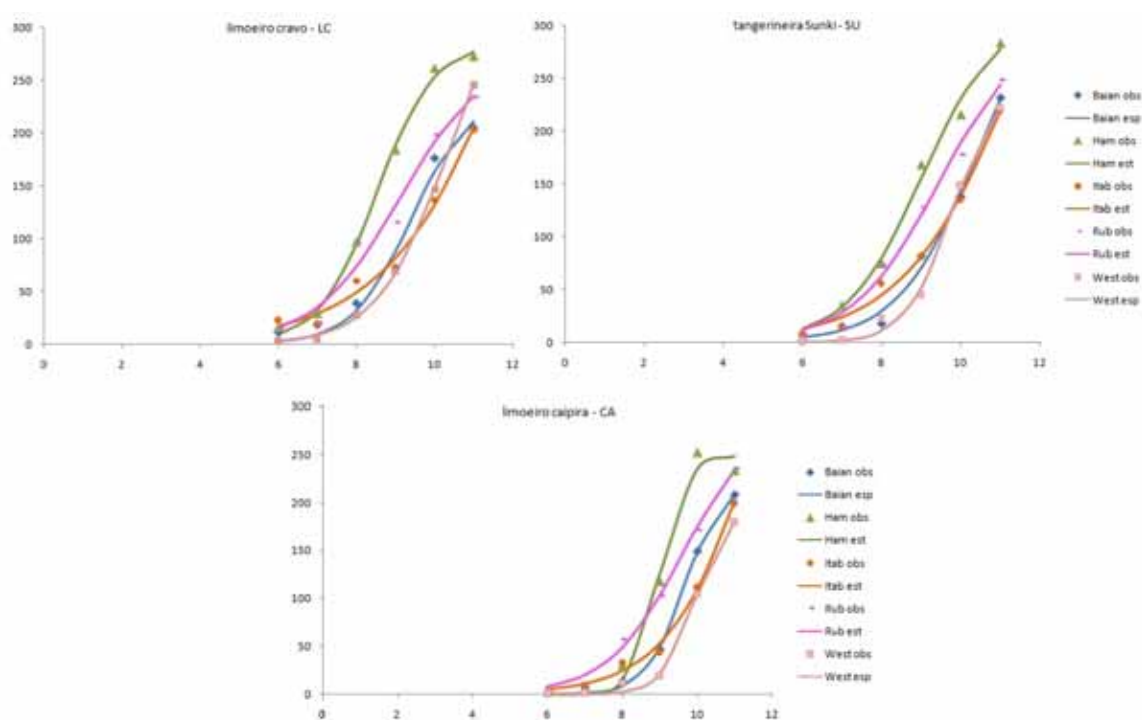


Figura 10 - Ajustes médios do modelo Logístico $\left(f(x, \theta) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, segundo copas dentro do porta-enxerto TR - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

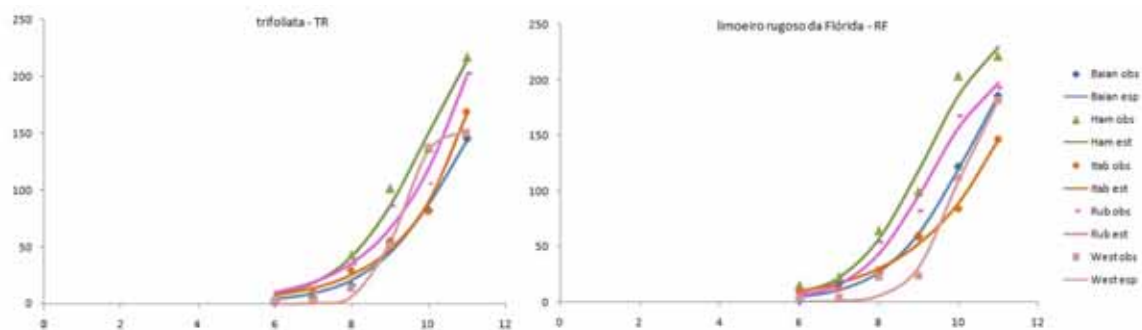


Figura 11 - Ajustes médios do modelo Logístico $\left(f(x, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, segundo copas dentro do porta-enxerto TR - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

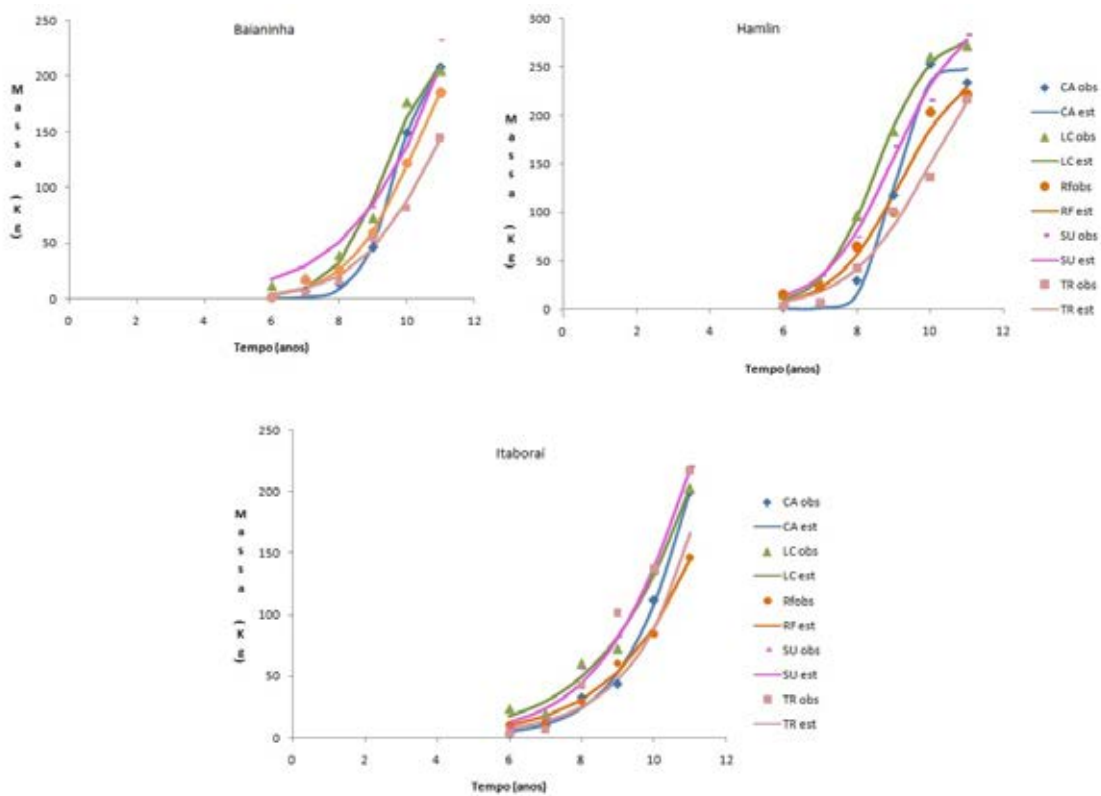


Figura 12 - Ajustes médios do modelo Logístico $\left(f(x, \theta) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, segundo copas dentro do porta-enxerto TR - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

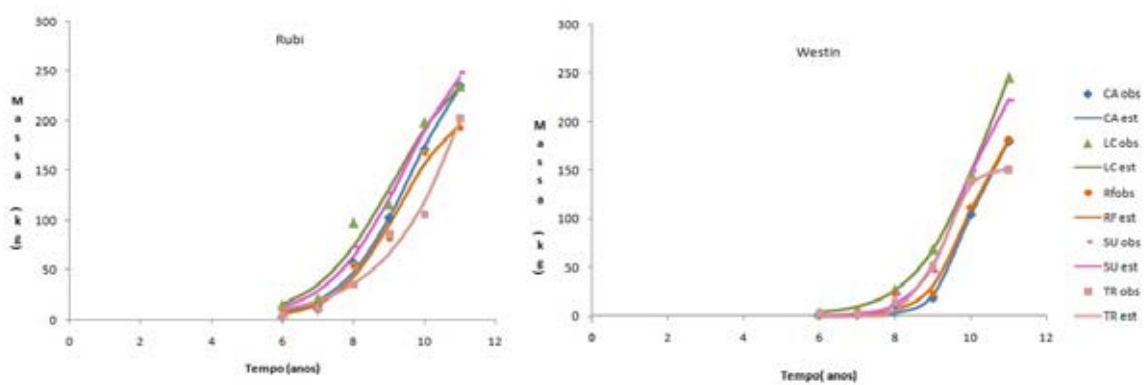


Figura 13 - Ajustes médios do modelo Logístico $\left(f(x, \theta) = \frac{\alpha}{1 + \exp\{\beta - \gamma x\}}\right)$, segundo copas dentro do porta-enxerto TR - dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*.

5 DISCUSSÃO

5.1 Dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*

Havia três regiões de plantios, sendo que na primeira havia 130 repetições, na segunda 131 e na terceira, 141 repetições. A primeira abordagem foi feita para um ajuste único para que fosse possível comparar as estruturas de efeitos fixos, ponderada e de efeitos mistos. A estrutura de efeitos fixos, mostrou que havia heterocedasticidade, o que foi corrigido no emprego da estrutura ponderada. A estrutura de efeitos mistos, apesar de apresentar menores quadrados médios do resíduo, menores valores dos Critérios de informação de Akaike e de Informação Bayesiano de Schwarz, e maiores valores de coeficientes de correlação ao quadrado, não corrigiu a heterocedasticidade (Tabela 2 a 5).

Concluimos portanto que neste caso a estrutura com ponderação foi a melhor para resolver os problemas de heterocedasticidade. Quanto a comparação dos modelos, os quatro tiveram um comportamento semelhante em termos dos critérios acima utilizados, ficando o logístico com valores ligeiramente piores em termos de Quadrado médio do resíduo, Critério de informação de Akaike, peso de Akaike, Critério de Informação Bayesiano de Schwarz, teste de Breusch Pagan e coeficiente de correlação ao quadrado. Segundo MAZZINI et al. (2005) que ajustaram os modelos de Brody, de Gompertz, Logístico e von Bertalanffy a dados de crescimento de novilhos Herford, os modelos de Gompertz e von Bertalanffy foram os mais indicados para descrever o crescimento dos animais, assim como a estrutura com ponderação foi melhor que a estrutura de efeitos fixos.

Quanto aos ajustes individuais a melhor estrutura foi a ponderada e o modelo que melhor se ajustou foi o de Richards, seguido pelo de Gompertz, von Bertalanffy e por último o logístico. Ressalta-se, porém, que o percentual de convergência para o de Richards foi de 70%, bem abaixo dos demais que convergiram praticamente em quase 100% das repetições. Segundo SILVA et al. (2011) que utilizaram os modelos de Brody, de Gompertz, Logístico, von Bertalanffy e de Richards para descrever o crescimento de vacas de corte de diferentes tipos biológicos, concluíram que apenas os modelos Brody e von Bertalanffy convergiram para todos os grupos genéticos. Concluíram também que a estrutura ponderada foi importante na estimação dos parâmetros.

5.2 Dados de massa de frutos de laranjeiras doces *Citrus sinensis* (L.) Osbeck

Havia seis repetições para cada porta-enxerto em cada copa, porém foi feito um ajuste único para que fosse possível comparar com a estrutura de efeitos mistos.

Pelos coeficientes de correlação ao quadrado, verifica-se que houve um bom ajuste para todas as copas e porta-enxertos. Os critérios AIC e BIC também variaram conforme a estrutura ajustada.

Pode-se ver pela tabela 13, que eram vinte e cinco repetições e quando foi feito o ajuste para a estrutura sem ponderação, foram detectados problemas em dezessete repetições da seguinte forma: em sete delas havia heterogeneidade de variâncias, em quatro havia heterogeneidade de variâncias e presença de autocorrelação residual, em cinco havia autocorrelação e uma repetição não convergiu. A estrutura com ponderação corrigiu doze das dezessete repetições e a

estrutura de efeitos mistos corrigiu apenas duas, de acordo com os critérios utilizados.

Concluimos portanto que neste caso a estrutura com ponderação foi a melhor para resolver os problemas de heterocedasticidade e autocorrelação.

6 CONCLUSÕES

Para os dados de volume do tronco de *Eucalyptus grandis*, a estrutura de efeitos fixos mostrou que havia heterocedasticidade, o que foi corrigida no emprego da estrutura ponderada. A estrutura de efeitos mistos, apesar de apresentar menores quadrados médios do resíduo, menores valores dos Critérios de informação de Akaike e de Informação Bayesiano de Schwarz, e maiores valores de coeficientes de correlação ao quadrado, não corrigiu a heterocedasticidade. Portanto, neste caso a estrutura com ponderação foi a melhor para resolver os problemas de heterocedasticidade.

Quanto à comparação dos modelos, os quatro tiveram um comportamento semelhante em termos dos critérios acima utilizados, ficando o logístico com valores ligeiramente piores em termos de Quadrado médio do resíduo, Critério de informação de Akaike, peso de Akaike, Critério de Informação Bayesiano de Schwarz e coeficiente de correlação ao quadrado.

Quanto aos ajustes individuais a melhor estrutura foi a ponderada e o modelo que melhor se ajustou foi o de Richards, seguido do Gompertz, von Bertalanffy e por último o logístico. Ressalta-se porém que o percentual de convergência para o Richards foi de 70%, bem abaixo dos demais que convergiram praticamente em quase 100% das repetições.

Para os dados de massa de frutos de laranjeiras doces *Citrus sinensis* (L.) Osbeck a estrutura com ponderação corrigiu doze das dezessete repetições e a estrutura de efeitos mistos corrigiu apenas duas, de acordo com os critérios utilizados.

Portanto, a estrutura com ponderação foi a melhor para resolver os problemas de heterocedasticidade e autocorrelação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE transactions on Automatic Control**, v.19, n.6, p.716–723, 1974.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. **Nonlinear regression analysis and its applications**. New York: John wiley & Sons, 1988. 365p.
- BOSDOGAN, H. Model selection and Akaike's information criterion (AIC): The general theory and its analytical extensions. **Psychometrica**, v.52, n.1, p.345–370, 1987.
- BREUSCH, T. S.; PAGAN, A. S. A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. **Econometrika**, v.47, n.5, p.1287–1294, 1979.
- DRAPER, N. R.; SMITH, H. **Applied regression analysis**. New York: John wiley & Sons, 1981. 709p.
- ELIAS, A. M. Análise de curvas de crescimento de vacas das Raças Nelore, Guzerá e Gir. Piracicaba, 1998. 128p. Dissertação (Mestrado) - Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz.
- EMILIANO, P. C.; VEIGA, E. P.; VIVANCO, M. J.; MENEZES, F. S. Critérios de informação de Akaike versus Bayesiano: análise comparativa. In: 19, Associação Brasileira de Estatística, 2010. **19º SINAPE**; resumos. São Pedro-SP: 19º SINAPE, 2010. 1-6, 2010.
- HOFFMANN, R.; VIEIRA, S. **Análise de regressão- Uma introdução à Econometria**. 2ed. Piracicaba: Hucitec, 1983. 379p.

INSTITUTE, S. **SAS 9.2 Language Reference: Concepts**. Cary: SAS Institute INC, 2010. 629p.

KOENKER, R. A Note on Studentizing a Test for Heteroscedasticity. **SAS Institute**, v.17, p.107–112, 1981.

LITTELL, R. C.; STROUP, W. W.; FREUND, R. J. SAS for linear models. **SAS Institute**, 2002.

LOBO, R. N. B.; VILELA, L. C. V.; LOBO, A. M. B. O.; PASSOS, J. R. S.; OLIVIERA, A. A. Parâmetros genéticos de características estimadas da curva de crescimento de ovinos da raça Santa Inês. **R. Bras. Zootec**, v.35, n.3, p.1012–1019, 2006.

MAZZINI, A. R. A.; MUNIZ, J. A.; AQUINO, L. H.; SILVA, F. F. Análise da curva de crescimento de machos Hereford. **Ciênc.Agrotec**, v.25, n.5, p.1105–1112, 2003.

MAZZINI, A. R. A.; MUNIZ, J. A.; SILVA, F. F.; AQUINO, L. H. Curva de crescimento de novilhos Hereford: heterocedasticidade e resíduos autoregressivos. **Ciência Rural**, v.35, n.2, p.422–427, 2005.

MOTULSKY, H.; CHISTOPOULOS, A. **Fitting models to biological data using linear and nonlinear regression- A practical guide to curve fitting**. Oxford: Oxford University Press, 2004. 212p.

NETER, J.; WASSERMAN, W. **Applied Linear Statistical Models**. London: Richard D. Irwin, 1974. 842p.

PASTERNAK, H.; SHALEV, B. A. The effect of a feature of regression disturbance on the efficiency of fitting growth curves. **Growth, Development and Aging**, v.58, n.1, p.33–39, 1994.

PINHEIRO, J. C. **Topics in Mixed Effects Models**. Madison: Doctor of Philosophy- University of Wisconsin, 1994. 210p.

PINHEIRO, J. C.; BATES, D. M. **Mixed-Effects Models in S and S-PLUS**. New York: Springer-Verlag, 2000. 528p.

PRADO, T. K. L.; SAVIAN, T. V.; MUNIZ, J. A. Ajuste dos modelos Gompertz e Logístico aos dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde. **Ciência Rural**, v.43, n.5, p.803–809, 2013.

RATKOWSKY, D. A. **Handbook of nonlinear regression models**. New York: Doctor of Philosophy- University of Wisconsin, 1990. 241p.

REGAZZI, A. J. Teste para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não linear. **Ceres**, v.50, n.287, p.9–26, 2003.

SALIBE, A. A. Efeito do porta-enxerto e da localidade no vigor e produção de laranjeiras doces, *Citrus sinensis* (L.) Osbeck. Botucatu, 1974. 226p. Tese (Doutorado) - Tese de livre docência em Fruticultura- Faculdade de Ciências Médicas e Biológicas.

SANTOS, V. B.; FREITAS, R. T. F.; SILVA, F. F.; FREATO, T. A. Avaliação de curvas de crescimento morfométrico de linhagens de tilápia do Nilo (*Oreochromis niloticus*). **Ciênc.agrotec**, v.31, n.5, p.1486–1492, 2007.

SARTORIO, S. D.; LIMA, T. V. S. C. G.; MAESTRE, M. R. Descrição de curvas de crescimento de frutos de pereira asiática utilizando o modelo de Gompertz com abordagem mista. In: REUNIÃO ANUAL DA REGIÃO BRASILEIRA DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE BIOMETRIA-RBRAS, 57, Piracicaba, 2012. **Modelos de regressão e aplicações interdisciplinares**; resumos. Piracicaba: RBRAS/ABE/EMBRAPA, 2012. 834-838.

SCHINCKEL, A. P.; CRAIG, B. A. Evaluation of alternative nonlinear mixed effects models of swine growth. **The Professional Animal Scientist**, v.18, n.1, p.1486–1492, 2002.

SCHWARZ, G. Estimating the Dimension of a Model. **Annals of Statistics**, v.6, n.2, p.461–464, 1978.

SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. **Nonlinear regression**. New York: John Wiley & Sons, 1989. 768p.

SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality. **Biometrika**, v.52, n.3, p.591–611, 1965.

SILVA, F. F.; ALENCAR, M. M.; FREITAS, A. R.; PACKER, I. U.; MOURÃO, G. B. Curvas de crescimento em vacas de corte de diferentes tipos biológicos. **Pesq.agrop.bras**, v.46, n.3, p.262–271, 2011.

SILVA, F. F.; AQUINO, L. H.; OLIVEIRA, A. I. G. Influência de fatores genéticos e ambientais sobre as estimativas dos parâmetros das funções de crescimento de gado nelore. **Ciênc.Agrotec**, v.25, n.5, p.1195–1205, 2001.

SILVEIRA, F. G.; SILVA, F. F.; CARNEIRO, P. L. S.; MALHADO, C. H. M.; MUNIZ, J. A. Análise de agrupamento na seleção de modelos de regressão não-lineares para curvas de crescimento de ovinos cruzados. **Ciência Rural**, v.41, n.4, p.692–698, 2011.

WOLFINGER, R. Covariance structure selection in general mixed models. **Communications in Statistics - Simulation**, v.22, n.4, p.1079–1106, 1993.