IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO IFT–D.003/04

A Teoria de DKP à Temperatura Finita

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
458
BIBLIOTECA

Juan Segundo Valverde Salvador

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Co-Orientador

Prof. Dr. Rodolfo Alvan Casana Sifuentes

Julho 2004

Índice

Agradecimentos

A Natália, minha esposa, pelo apoio em todos os momentos que estamos juntos.

A meus pais, pelo apoio dado durante toda minha vida.

Ao Prof. Pimentel, pela orientação acadêmica e pelos bons conselhos.

Ao Prof. V. Ya. Fainberg, pela colaboração frutífera durante o trabalho.

Ao Prof. V. G. Zima, pelas discussões durante parte do trabalho.

Ao Rodolfo pelos comentários e ajuda na redação desta tese.

Ao IFT pelas aulas e aprendizado que recebi durante todos estes anos.

À FAPESP pelo apoio financeiro que tornou este trabalho possível.

A mi pequeño hijo, Juan Andrey.

Resumo

Estudamos a Teoria de DKP massiva à Temperatura Finita. Primeiramente, analisamos a sua estrutura de vínculos e mostramos que ela é uma teoria de vínculos de segunda classe. Em seguida, após a introdução da Função de Partição via integração funcional, estudamos a Condensação de Bose-Einstein (CBE) e mostramos que a teoria em estudo apresenta o modo zero, fundamental para a existência da CBE, de maneira simples e clara. A análise mostra resultados idênticos aos proporcionados pelas teorias de KGF e Proca.

O problema da equivalência é também estudada para o caso de termos temperatura diferente de zero. Provamos, de forma geral, que as funções de Green fotônicas das teorias de DKP e KGF coincidem. Também, calculamos a polarização do vácuo no nível de um *loop*, obtendo-se as contribuições dependentes e independentes da Temperatura tal como as obtidas via a teoria KGF.

Palavras Chave: Teoria DKP, Condensação de Bose-Einstein, Funções de Green.
Área de Conhecimento: Teoria de Campos e Mecânica Estatística.

Abstract

We study the massive DKP theory at Finite Temperature. Firstly, we analize the constraint structure and show that it is a second class constraint theory. Afterwards, we introduce the partition function by means of path integrals and study the Bose Einstein Condensation (BEC), we show that the theory has the zero mode, crucial for the existence of BEC. This analysis show identical results that were obtained by means of the KGF and Proca theories.

The problem of equivalence is also studied for the case of non-zero temperature. We show, in general form, that the photon Green functions in the case of DKP e KGF theories are identical. We also calculate the vacuum polarization in the one loop approximation and obtain the temperature dependent and independent contributions as they were obtained via the KGF theory.

Keywords: DKP Theory, Bose-Einstein Condensation, Green Functions.

Introdução

Há mais de 60 anos, G. Petiau [1], R. Duffin [2] e N. Kemmer [3] propuseram uma equação de primeira ordem nas derivadas para a descrição de partículas de spin 0 e spin 1, que hoje é conhecida como a equação de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). Por ser de primeira ordem é muito semelhante (na sua forma) à equação de Dirac, mas com matrizes β_μ satisfazendo uma álgebra muito diferente daquela satisfeita pelas matrizes γ_μ de Dirac. Uma característica fundamental da teoria é que as suas representações podem ser decompostas em 3 representações irredutíveis: 1 representação 5×5 (para spin 0), 1 representação 10×10 (para spin 1) e, uma última representação trivial que não tem significado físico.

Desde a sua aparição até os anos 70, a maioria dos trabalhos foram dirigidos ao desenvolvimento do formalismo DKP e ao estudo das interações entre as partículas DKP carregadas e o campo Eletromagnético (EM); assim, por exemplo, foram estudados processos tais como a QED dos mésons de spin 0, meso-átomos e outros. Os cálculos baseados nas equações de DKP e Klein-Gordon-Fock (KGF) levam a resultados idênticos [4], inclusive na correção a um *loop*, [5], [6]. Uma referência histórica, mais detalhada, sobre a equação de DKP e os problemas da época pode ser encontrada no trabalho [7].

Uma contribuição importante para a compreensão dessas questões foi realizada por A. Wightman [8] no seu trabalho apresentado em comemoração do 70^o aniversário de P.A.M. Dirac em 1971. Ele mostrou que quando se acopla minimamente o campo DKP com um campo EM externo $(\sim e\overline{\psi}\beta_\mu\psi A_\mu)$ somente há estabilidade da equação DKP no setor de spin 0, ou melhor, que o caráter retardado das soluções da equação DKP é conservado sob tais perturbações. A estabilidade da equação DKP sob a ação do campo EM externo esta vinculada à renormalização da teoria quando o campo EM também é quantizado.

Uma outra questão a ser estudada é o problema da equivalência das teorias DKP e KGF que surge novamente ao pretender-se descrever novos processos físicos. Assim, uma série de trabalhos [7] foram realizados aplicando o novo formalismo na desintegração de mésons K e outros mésons instáveis, o que, levou a obter resultados diferentes daqueles obtidos com ajuda da equação de KGF. Desta forma certas dúvidas foram geradas sobre a validade da teoria DKP e ao mesmo tempo deu-se início a um período de incertezas sobre a aplicação da teoria a determinados processos. Em conseqüência foram poucos os trabalhos realizados à respeito da equivalência ou não entre as teorias DKP e as de KGF e Proca. No entanto, estudos nesse sentido foram recentemente retomados nos trabalhos [9, 10], em que se consegue uma prova da equivalência, usando os métodos de LSZ, dos elementos físicos da matriz S a toda ordem da teoria de perturbações para partículas escalares interagindo minimamente com o campo EM externo ou quântico.

Um interesse maior tem aparecido, em recentes trabalhos, pela teoria DKP. Em partícular, esta foi aplicada à QCD (a curtas e longas distâncias) por Gribov [11], à dinâmica covariante hamiltoniana por Kanatchikov [12], e tem sido estudada sua generalização relativística quando acoplada a espaço–tempos curvos

[10, 13, 14].

Os problemas anteriormente mencionados e as dificuldades que a teoria DKP apresenta na Teoria de Campos à temperatura zero, também, podem ser explorados à temperatura diferente de zero. A Teoria de Campos à Temperatura Finita torna-se importante para o estudo do plasma [15], metais [16], matéria condensada [17], variação dos parâmetros físicos com a temperatura (masa, momento magnético) ou também o estudo de potenciais efetivos. Esta formulação pode também ser usada para estudar o comportamento termodinâmico de sistemas relativísticos quânticos.

Os primeiros a realizarem estudos sobre os efeitos da temperatura na Teoria de Campos foram Matzubara [18] e Fradkin [19]-[23]. Eles fizeram uma série de trabalhos sobre os diferentes métodos para obter as funções de Green na estatística quântica , assim como estudaram a estrutura das identidades de Ward na QED_4.

Posteriormente, apareceram outros trabalhos [24, 25, 26] em que foi estudada a possibilidade da restauração de algumas simetrias, quebradas a temperatura $T = 0$, a temperaturas altas, como por exemplo, a simetria $SU(2) \times U(1)$ da interação fraca. Questões importantes sobre a invariância de gauge das teorias a $T \neq 0$ são tratadas no trabalho de Bernard [27].

A presente tese se propõe a usar as ferramentas da Teoria de Campos à Temperatura Zero e Finita no estudo da teoria DKP, e assim discutir os problemas da invariância de gauge e de sua equivalência ou não com as de KGF e Proca.

No capítulo **1** é feita uma breve revisão dos principais aspectos da teoria DKP, as suas propriedades, álgebra e suas representações. Seguindo o livro de Umezawa [5], escrevemos explicitamente os projetores que separam os setores de spin 0 (P, P_μ) e spin 1 $(R_\mu,\ R_{\mu\nu})$, ou seja, as representações irredutíveis da teoria. Fazemos a extensão da teoria acoplando-a minimamente com o campo EM e obtemos as equações de movimento resultantes. Apresentamos o propagador do campo DKP livre na sua forma simplificada, isto é , sem o termo anômalo que não dá contribuição aos elementos da matriz S, como foi provado em [10].

No capítulo **2** estudamos em detalhe a estrutura de vínculos da teoria DKP [9], tanto para o setor de spin 0 como para o setor de spin 1. Fazemos a análise tanto em forma de componentes como em forma matricial, e mostramos que os vínculos primários e secundários que se obtém resultam ser de segunda classe. Este fato nos permitiria introduzir os parênteses de Dirac caso quiséssemos realizar a quantização canônica da teoria. A mesma análise dos vínculos é realizada para caso em que o campo DKP é acoplado minimamente ao campo EM.

No capítulo **3** estudamos a condensação de Bose-Einstein. Introduzimos o conceito de função de partição via o formalismo de integração funcional e impomos a condição de periodicidade sobre os campos DKP. É importante ressaltar que os vínculos de segunda classe da teoria devem ser incluídos dentro da integração funcional a fim de garantir a exatidão dos resultados. Após a análise correspondente, mostramos que o estudo da condensação de Bose-Einstein via a teoria DKP é equivalente com aqueles realizados usando as teorias de KGF e Proca.

No capítulo **4** analisamos o problema da equivalência entre a teoria DKP com a de KGF à Temperatura Finita. Escrevemos a função de partição (FP) com fontes para o campo DKP em interação com o campo EM, num certo *α-gauge*. Num primeiro passo, mostramos que as funções de Green nas teorias DKP e KGF coincidem e, por tanto, são equivalentes. Logo depois, procedemos o cálculo da polarização do vácuo $\Pi_{\mu\nu}$ para $T \neq 0$, devido a uma partícula escalar carregada, no nível de 1-*loop*. Depois de escrever as respectivas contribuições, podemos ver, mais uma vez, que nesse nível a correção para o propagador do fóton é a mesma nas duas teorias. Já com o cálculo explícito de $\Pi_{\mu\nu}$ mostramos que a parte que não depende da temperatura, após a renormalização, é exatamente a mesma obtida por Akhiezer [4].

Finalmente, no capítulo **5**, apresentamos nossas conclusões.

1. Uma revisão da Teoria DKP

Como já sinalizamos anteriormente, a teoria DKP massiva descreve, numa mesma equação, tanto campos de spin 0 como de spin 1. A equação DKP é dada por[1]

$$(\beta_\mu \partial_\mu + m)\,\psi = 0, \tag{1.1}$$

em que as matrizes β_μ satisfazem a álgebra DKP

$$\beta_\mu \beta_\lambda \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\lambda \beta_\mu = \delta_{\mu\lambda} \beta_\nu + \delta_{\nu\lambda} \beta_\mu. \tag{1.2}$$

Podemos notar que a equação DKP é linear e de primeira ordem nas derivadas, sendo muito similar na sua forma com a equação de Dirac, porém, as matrizes β_μ satisfazem uma álgebra muito diferente daquela satisfeita pelas matrizes γ_μ. Uma diferença substancial é que as matrizes β_μ são singulares.

As representações do campo ψ, contidas na teoria DKP, são redutíveis e podem ser decompostas em 3 representações irredutíveis que são escritas a seguir: uma de primeira ordem (representação trivial), outra de quinta ordem (para spin 0) e a

[1]Vamos definir a nossa métrica como sendo $\delta_{\mu\nu}$ =diag$(+,+,+,+)$. Assim por exemplo na nossa definição o quadrado de um 4-vetor é dado por: $x^2 = x_\mu x_\mu = \mathbf{x}^2 - (ct)^2$, sendo que $x_\mu \equiv (\mathbf{x}, x_4) \equiv (\mathbf{x}, ix_0) \equiv (\mathbf{x}, ict)$.

Também, usaremos o sistema de unidades em que $c = 1$, $\hbar = 1$.

última de décima ordem (para spin 1). Assim, o número de matrizes linearmente independentes é dado por

$$(1)^2 + (5)^2 + (10)^2 = 126. \tag{1.3}$$

Lembremos que o número de matrizes linearmente independentes no caso da teoria de Dirac é 16.

É importante ressaltar que a equação (1.1) implica que ψ é um vetor coluna redutível de 16 elementos.

A seguir, damos algumas propriedades muito úteis dos traços das matrizes β_μ,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(\beta_{\mu_1}\beta_{\mu_2}\ldots\beta_{\mu_{2n+1}}\right) &= 0 \\ \mathrm{Tr}\left(\beta_{\mu_1}\beta_{\mu_2}\beta_{\mu_3}\beta_{\mu_4}\ldots\beta_{\mu_{2n-1}}\beta_{\mu_{2n}}\right) &= \delta_{\mu_1\mu_2}\delta_{\mu_3\mu_4}\ldots\delta_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}} \\ &\quad +\delta_{\mu_2\mu_3}\delta_{\mu_4\mu_5}\ldots\delta_{\mu_1\mu_{2n}} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Uma outra matriz muito útil é $\eta_\mu = 2\left(\beta_\mu\right)^2 - 1$, cujos traços são dados a seguir

$$\begin{array}{lccc} & s=1 & s=0 & trivial \\ TrI & 10 & 5 & 1 \\ Tr\left(\eta_\mu\right) & 2 & -1 & -1 \\ Tr\left(\eta_\mu\eta_\nu\right) & -2 & 1 & 1 \\ Tr\left(\eta_\mu\eta_\nu\eta_\rho\right) & -2 & 3 & -1 \\ Tr\left(\eta_\mu\eta_\nu\eta_\rho\eta_\sigma\right) & 2 & -3 & 1 \end{array}. \tag{1.5}$$

Com a ajuda dessa matriz é possível construir as 126 matrizes linearmente independentes. Por sua vez, a matriz η_4 é usada para construir a função adjunta, $\overline{\psi} = \psi\eta_4$, que satisfaz a seguinte equação

$$\partial_\mu\overline{\psi}\beta_\mu - m\overline{\psi} = 0. \tag{1.6}$$

Existe a possibilidade de encontrar outras representações irredutíveis para as matrizes β_μ e uma delas pode ser dada através das matrizes γ_μ de Dirac

$$\beta_\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu \otimes 1 \pm 1 \otimes \gamma_\mu\right). \tag{1.7}$$

Nota-se nesta última expressão que a matriz β_μ é simétrica (+) ou anti–simétrica (−), e não é difícil provar que (1.7) satisfaz a álgebra (1.2).

A seguir apresentamos os projetores que permitem selecionar as representações de spin 0 ou spin 1. Esses projetores foram definidos por Umezawa [5]. Assim, no caso de spin 0 os projetores são dados por

$$P \equiv \beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\beta_4^2 \tag{1.8}$$

$$P_\mu \equiv P\beta_\mu. \tag{1.9}$$

Algumas relações importantes envolvendo o projetor P são

$$P^2 = P, \quad P_\mu\beta_\nu = P\delta_{\mu\nu}, \quad PS_{\mu\nu} = 0 \tag{1.10}$$

em que $S_{\mu\nu}$ é um tensor anti–simétrico dado por

$$S_{\mu\nu} = \beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu \tag{1.11}$$

e ele tem informações sobre o spin da representação sendo usada, em particular, ele aparece quando estudamos a invariância de Lorentz da equação DKP.

No caso de spin 1, os projetores são dados por

$$R_\mu = \beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\left(\delta_{\mu 4} - \beta_\mu\beta_4\right), \quad R_{\mu\nu} = R_\mu\beta_\nu. \tag{1.12}$$

Com ajuda da álgebra das matrizes β_μ é possível encontrar as seguintes relações

$$R_{\mu\nu} = -R_{\nu\mu}, \quad R_\mu\beta_\nu\beta_\sigma = \delta_{\nu\sigma}R_\mu - \delta_{\mu\sigma}R_\nu, \tag{1.13}$$

$$R_\mu S_{\rho\nu} = R_\mu(\beta_\rho\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\rho) = \delta_{\mu\rho}R_\nu - \delta_{\mu\nu}R_\rho, \tag{1.14}$$

$$R_{\mu\nu}S_{\rho\sigma} = \delta_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}. \tag{1.15}$$

A interação eletromagnética (EM) na teoria DKP é introduzida, no modo usual, através do acoplamento mínimo. Assim, as equações de movimento (1.1) e (1.6) são modificadas e são escritas como sendo

$$\beta_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi + m\psi = 0 \tag{1.16}$$

$$(\partial_\mu + ieA_\mu)\overline{\psi}\beta_\mu - m\overline{\psi} = 0. \tag{1.17}$$

Um fato importante a ser mencionado é o relacionado com a preservação da simetria de gauge, que somente é mantida se escrevemos de maneira correta as componentes **físicas** do campo ψ. Um outro detalhe, é o termo anômalo que aparece quando a interação é acionada [3], que é justamente resolvida com o uso apropriado da **forma física** e dos projetores (1.10) e (1.12) [30].

A formulação da teoria em termos de uma Lagrangiana não é difícil de se obter e no caso livre as equações (1.1) e (1.6) são obtidas da seguinte densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\beta_\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\overline{\psi}\beta_\mu\psi\right) + m\overline{\psi}\psi, \tag{1.18}$$

e é fácil observar que ela apresenta uma simetria global $U(1)$

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi \tag{1.19}$$

$$\overline{\psi} \to \overline{\psi}' = e^{-i\alpha}\overline{\psi} \tag{1.20}$$

que gera a seguinte corrente conservada

$$j_\mu = i\overline{\psi}\beta_\mu\psi, \tag{1.21}$$

sendo a carga conservada dada por

$$Q = \int d^3\mathbf{x} j^0 (x) \,. \tag{1.22}$$

A Lagrangiana que considera o campo DKP em interação com o campo eletromagnético é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{EM} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\beta_\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\overline{\psi}\beta_\mu\psi\right) + m\overline{\psi}\psi - ie\overline{\psi}\beta_\mu\psi A_\mu + \frac{1}{2}\left(\partial_\nu A_\mu\right)^2 \end{aligned} \tag{1.23}$$

em que temos usado o gauge $\partial_\mu A_\mu = 0$. As equações de movimento para os campos envolvidos são

$$\begin{aligned} \beta_\mu\partial_\mu\psi + m\psi &= ie\beta_\mu\psi A_\mu, \\ \partial_\mu\overline{\psi}\beta_\mu - m\overline{\psi} &= -ie\overline{\psi}\beta_\mu A_\mu, \\ \Box A_\mu &= -ie\overline{\psi}\beta_\mu\psi. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Com a quantização as funções ψ, $\overline{\psi}$ tornam-se operadores e necessitamos calcular as relações de comutação entre eles, assim como, o valor esperado deles no vácuo. Por exemplo, após certas manipulações obtemos para este último

$$\langle 0|\, T\left(\psi_\alpha(x), \overline{\psi}_\beta(x')\right)|0\rangle = T^c_{\alpha\beta}(x-x') + \frac{1}{m}\left(1-\beta_0^2\right)_{\alpha\beta}\delta(x-x') \tag{1.25}$$

em que $\beta_0 = -i\beta_4$. A matriz $(1-\beta_0^2)$ não é invariante relativista e aparece quando consideramos as componentes não físicas do campo. Tal como fora recentemente mostrado no trabalho [9], fazendo uso do formalismo de Lemman-Symanzic-Zimmerman (LSZ), o último termo da equação (1.25) não contribui para os elementos físicos da matriz S. Portanto, para efeitos de cálculo é suficiente usar a função de Green $T^c_{\alpha\beta}(x-x')$ dada por

$$T^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int T^c(p)e^{ipx}d^4p \tag{1.26}$$

$$T^c(p) \;=\; (i\widehat{p}+m)^{-1} = \frac{i\widehat{p}\,(i\widehat{p}-m)+p^2+m^2}{m\,(p^2+m^2)} \tag{1.27}$$

em que denotamos $\widehat{p} = \beta_\mu p_\mu$. Até o momento, diversos cálculos têm sido feitos para processos envolvendo as partículas DKP, tanto no caso livre como em interação. Por exemplo, para o caso de campos escalares carregados interagindo com o campo EM, obteve-se as correções radiativas a um loop [29] para a polarização do vácuo $\Pi_{\mu\nu}$, a correção de massa o auto-energia $\Sigma_{\mu\nu}$ e a função de vértice Γ_μ. Os resultados foram obtidos usando a representação de Kallen-Lehmann (KL) e coincidem com os obtidos pela teoria de KGF.

Em seguida damos algumas representações específicas para as matrizes β_μ que serão usadas ao longo da tese.

No caso de spin 0 as matrizes de 5×5 são,

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$
$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-i\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ i&0&0&0&0 \end{pmatrix}. \tag{1.28}$$

É fácil obter relações como

$$\beta_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 - \beta_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

nota-se que a forma destas últimas nos faz pensar nelas como projetores.

No caso de spin 1 as matrizes de 10×10 são,

$$\beta_1 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline \begin{matrix} -1 & 0 & 0 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\beta_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),$$

$$\beta_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),$$

$$\beta_4 = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right), \tag{1.30}$$

assim como os projetores

$$\beta_4^2 = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right), \tag{1.31}$$

$$
1-\beta_4^2=\left(\begin{array}{c|c|c|c}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right). \qquad (1.32)
$$

2. Análise de vínculos

Para realizar a análise de vínculos da teoria partimos da Lagrangiana (1.18),

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\beta_\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\overline{\psi}\beta_\mu\psi\right) + m\overline{\psi}\psi. \tag{2.1}$$

Seguindo o procedimento padrão do formalismo de Dirac, calculamos os momentos canônicos da teoria

$$\pi = \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\,\dot{\psi}} = \frac{1}{i}\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\partial_4\psi} = -\frac{i}{2}\overline{\psi}\beta_4 \tag{2.2}$$

$$\overline{\pi} = \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\,\dot{\overline{\psi}}} = \frac{i}{2}\beta_4\psi. \tag{2.3}$$

Em seguida, obtemos o Hamiltoniano canônico, $\mathcal{H} = p_a\,\dot{q}^a - \mathcal{L}$, da teoria

$$\mathcal{H}_0 = \pi\,\dot{\psi} + \dot{\overline{\psi}}\,\overline{\pi} - \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\beta_k\partial_k\psi - \partial_k\overline{\psi}\beta_k\psi\right) - m\overline{\psi}\psi. \tag{2.4}$$

É preciso, agora, fazer uma primeira distinção entre a análise de vínculos em forma matricial ou em forma de componentes para cada um dos setores do modelo DKP.

2.1 Caso escalar livre

2.1.1 Análise em Componentes

Definimos as componentes do campo ψ na seguinte forma

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} -m\varphi \\ \varphi_k \\ i\varphi_4 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

em que φ é um campo escalar e temos definido o vetor φ_μ dado por $\varphi_\mu \equiv (\varphi_k, i\varphi_4)$. Os campos φ e φ_μ são considerados graus de liberdade independentes.

Por outro lado, usando a representação (1.28) temos que a matriz $\eta_4 = 2\beta_4^2 - 1$ é dada como

$$\eta_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

e com ela construímos o campo adjunto $\overline{\psi} = \psi^+ \eta_4$, com a seguinte forma

$$\overline{\psi} = \frac{1}{\sqrt{m}} \left(-m\varphi^*, -\varphi_k^*, -i\varphi_4^* \right). \tag{2.7}$$

Então, na representação de spin 0 é possível escrever a densidade Lagrangiana (2.1) como sendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} \left(-\varphi^* \partial_\mu \varphi_\mu + \varphi_k^* \partial_k \varphi - \varphi_4^* \partial_4 \varphi + \partial_\mu \varphi^* \varphi_\mu - \partial_k \varphi_k^* \varphi + \partial_4 \varphi_4^* \varphi \right) \\ &\quad + m^2 \varphi^* \varphi - \varphi_k^* \varphi_k + \varphi_4^* \varphi_4 \end{aligned} \tag{2.8}$$

podemos, agora, notar claramente que temos 10 campos independentes, que agrupamos como

$$\varphi_a \equiv \{\varphi, \varphi_k, \varphi_4, \varphi^*, \varphi_k^*, \varphi_4^*\} \tag{2.9}$$

com $a = 1, 2, ..., 10$. Os momentos canônicos associados a estes campos são dados por[1]

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\,\dot{\varphi}} = \frac{1}{i}\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\partial_4\varphi} = \frac{i}{2}\varphi_4^*, \quad \pi^* = \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\,\dot{\varphi^*}} = \frac{1}{i}\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\partial_4\varphi^*} = -\frac{i}{2}\varphi_4 \\
\pi_4 &= \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\,\dot{\varphi_4}} = \frac{1}{i}\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\partial_4\varphi_4} = \frac{i}{2}\varphi^*, \quad \pi_4^* = \frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\,\dot{\varphi_4^*}} = \frac{1}{i}\frac{\delta\mathcal{L}_0}{\delta\partial_4\varphi_4^*} = -\frac{i}{2}\varphi \\
\pi_k &= 0, \quad \pi_k^* = 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

cujo conjunto é denotado por

$$\pi_a \equiv \{\pi, \pi_k, \pi_4, \pi^*, \pi_k^*, \pi_4^*\}\,. \tag{2.11}$$

Da equação (2.10), obtemos os seguintes vínculos primários

$$\begin{aligned}
\theta &= \pi - \frac{i}{2}\varphi_4^* \approx 0, \quad \theta^* = \pi^* - \frac{i}{2}\varphi_4 \approx 0, \quad \theta_4 = \pi_4 - \frac{i}{2}\varphi^* \approx 0 \\
\theta_4^* &= \pi_4^* + \frac{i}{2}\varphi \approx 0, \quad \theta_k = \pi_k \approx 0, \quad \theta_k^* = \pi_k^* \approx 0,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

que agrupamos da seguinte maneira

$$\theta_a \equiv \{\theta, \theta_k, \theta_4, \theta^*, \theta_k^*, \theta_4^*\}\,. \tag{2.13}$$

Procedemos, agora, a construção do Hamiltoniano canônico que é definido segundo

$$\mathcal{H}_0 = \pi_a\,\dot{\varphi}_a - \mathcal{L}_0 \tag{2.14}$$

[1] Segundo a nossa métrica se tem que $\partial_0 = i\partial_4$

então, tendo em conta as equações (2.8) e (2.10) temos

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\varphi^*\partial_k\varphi_k - \varphi_k^*\partial_k\varphi + \partial_k\varphi_k^*\varphi - \partial_k\varphi^*\varphi_k\right) - m^2\varphi^*\varphi + \varphi_k^*\varphi_k - \varphi_4^*\varphi_4. \tag{2.15}$$

A densidade Hamiltoniana primária é construída considerando os vínculos primários que devem ser incluídos junto aos multiplicadores de Lagrange, assim, temos

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_0 + \lambda_a\theta_a \tag{2.16}$$

sendo que λ_a denota o conjunto de multiplicadores de Lagrange dados como

$$\lambda_a \equiv \{\lambda, \lambda_k, \lambda_4, \lambda^*, \lambda_k^*, \lambda_4^*\}. \tag{2.17}$$

Seguidamente, é necessário calcular os parênteses de Poisson (PB) entre todos os vínculos primários θ_a. Dadas as duas funções F e G, a definição funcional dos PB neste caso é dado por

$$\{F(\mathrm{x}'), G(\mathrm{x}'')\}_{PB} = \int d^3\mathrm{x}\left(\frac{\delta F(\mathrm{x}')}{\delta\varphi_c(\mathrm{x})}\frac{\delta G(\mathrm{x}'')}{\delta\pi_c(\mathrm{x})} - \frac{\delta F(\mathrm{x}')}{\delta\pi_c(\mathrm{x})}\frac{\delta G(\mathrm{x}'')}{\delta\varphi_c(\mathrm{x})}\right). \tag{2.18}$$

Assim, encontramos os seguintes PB diferentes de zero

$$\begin{aligned} \{\theta(\mathrm{x}'), \theta_4^*(\mathrm{x}'')\}_{PB} &= -\{\theta_4^*(\mathrm{x}''), \theta(\mathrm{x}')\}_{PB} = -i\delta(\mathrm{x}' - \mathrm{x}'') \\ \{\theta^*(\mathrm{x}'), \theta_4(\mathrm{x}'')\}_{PB} &= -\{\theta_4(\mathrm{x}''), \theta^*(\mathrm{x}')\}_{PB} = i\delta(\mathrm{x}' - \mathrm{x}''). \end{aligned} \tag{2.19}$$

A matriz $C_{ab} = \|\{\theta_a, \theta_b\}_{PB}\|$, formada por todos os parênteses de Poisson dos vínculos primários tem a seguinte forma

$$C_{ab} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} i\delta(\mathrm{x}' - \mathrm{x}'') \tag{2.20}$$

de onde é fácil notar que

$$\operatorname{rank}\left\|\{\theta_a, \theta_b\}_{PB}\right\| = 4 \tag{2.21}$$

o resultado nos indica que não todos os coeficientes de Lagrange λ_a podem ser calculados e, portanto, devem existir vínculos secundários na teoria. Esses novos vínculos devem aparecer quando a condição de estabilidade é aplicada sobre os vínculos θ_a, assim temos

$$\dot{\theta}_a\left(\mathrm{x}'\right) = \left\{\theta_a\left(\mathrm{x}'\right), H^{(1)}\right\}_{PB} \approx 0, \tag{2.22}$$

em que $H^{(1)}$ é dado através da densidade Hamiltoniana primária (2.16)

$$H^{(1)} = \int d^3\mathbf{x}\mathcal{H}^{(1)}. \tag{2.23}$$

Então, aplicando a condição de estabilidade obtemos as seguintes relações

$$\dot{\theta} = -\partial_k\varphi_k^* + m^2\varphi^* - i\lambda_4^* = 0, \quad \rightarrow \quad \lambda_4^* = i\left(\partial_k\varphi_k^* - m^2\varphi^*\right) \tag{2.24}$$

$$\dot{\theta}^* = -\partial_k\varphi_k + m^2\varphi + i\lambda_4 = 0, \quad \rightarrow \quad \lambda_4 = -i\left(\partial_k\varphi_k - m^2\varphi\right) \tag{2.25}$$

$$\dot{\theta}_4 = \varphi_4^* - i\lambda^* = 0, \quad \rightarrow \quad \lambda^* = -i\varphi_4^* \tag{2.26}$$

$$\dot{\theta}_4^* = \varphi_4 + i\lambda = 0, \quad \rightarrow \quad \lambda = i\varphi_4 \tag{2.27}$$

$$\dot{\theta}_k \equiv \theta_k^{(2)} = \partial_k\varphi^* - \varphi_k^* \approx 0 \tag{2.28}$$

$$\dot{\theta}_k^* \equiv \theta_k^{*(2)} = \partial_k\varphi - \varphi_k \approx 0 \tag{2.29}$$

em que as 4 primeiras condições (2.24)-(2.27), como já mencionamos antes, nos permitem conhecer os primeiros 4 coeficientes de Lagrange. Esses coeficientes são necessários para obter as equações de movimento. As outras duas relações (2.28) e (2.29) proporcionam 6 vínculos secundários.

A nossa nova classificação de vínculos, que inclui os seis vínculos secundários, é dada por

$$\Theta_A \equiv \left\{\theta, \theta_k, \theta_4, \theta^*, \theta_k^*, \theta_4^*, \theta_k^{(2)}, \theta_k^{*(2)}\right\} \tag{2.30}$$

em que $A = 1, 2, ..., 16$. Usando, novamente, a nossa definição (2.18) para obter os PB com os novos vínculos secundários, os únicos parênteses diferentes de zero são dados por

$$\left\{\theta\left(\mathbf{x}'\right), \theta_k^{*(2)}\left(\mathbf{x}''\right)\right\}_{PB} = -\partial_k^{\mathbf{x}''}\delta\left(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\right) \tag{2.31}$$

$$\left\{\theta_i\left(\mathbf{x}'\right), \theta_k^{*(2)}\left(\mathbf{x}''\right)\right\}_{PB} = \delta_{ik}\delta\left(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\right) \tag{2.32}$$

$$\left\{\theta^*\left(\mathbf{x}'\right), \theta_k^{(2)}\left(\mathbf{x}''\right)\right\}_{PB} = -\partial_k^{\mathbf{x}''}\delta\left(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\right) \tag{2.33}$$

$$\left\{\theta_i^*\left(\mathbf{x}'\right), \theta_k^{(2)}\left(\mathbf{x}''\right)\right\}_{PB} = \delta_{ik}\delta\left(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\right). \tag{2.34}$$

A análise da nova matriz de vínculos $C_{AB} = \|\{\Theta_A, \Theta_B\}_{PB}\|$ permite deduzir que o posto dela é agora 16,

$$\operatorname{rank}\|\{\Theta_A, \Theta_B\}_{PB}\| = 16. \tag{2.35}$$

Isso implica que todos os coeficientes de Lagrange podem ser calculados e que não existem mais vínculos na teoria, como é verificado quando a condição de estabilidade é aplicado aos novos vínculos secundários

$$\dot{\Theta}_A\left(\mathbf{x}'\right) = \left\{\Theta_A\left(\mathbf{x}'\right), H^{(1)}\right\}_{PB} \tag{2.36}$$

se obtém, simplesmente, identidades do tipo $0 \equiv 0$.

Uma vez que não existem mais vínculos procedemos a sua classificação. Não é difícil concluir, da equação (2.35), que todos os vínculos, primários e secundários, são de **segunda classe** devido ao determinante da matriz C_{ab} ser diferente de zero. Desse resultado, a matriz inversa C_{ab}^{-1} existe e como tal é possível introduzir os parênteses de Dirac (DB) que permitem tornar todos os vínculos de segunda classe fortemente nulos e, assim, factível quantizar a teoria.

As equações de movimento são calculadas segundo as equações de Hamilton, assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}\,(\mathbf{x}') &= \left\{\varphi\,(\mathbf{x}')\,, H^{(1)}\right\}_{PB} = \lambda\,(\mathbf{x}') = i\varphi_4\,(\mathbf{x}') \qquad (2.37)\\
\dot{\varphi}^*\,(\mathbf{x}') &= \left\{\varphi^*\,(\mathbf{x}')\,, H^{(1)}\right\}_{PB} = \lambda^*\,(\mathbf{x}') = -i\varphi_4^*\,(\mathbf{x}') \qquad (2.38)
\end{aligned}$$

em que temos usado os coeficientes calculados em (2.26) e (2.27).

Notando que $\partial_0 = i\partial_4$ e $\partial_4^* = -\partial_4$, das equações acima tem-se

$$\varphi_4 = \partial_4\varphi, \quad \varphi_4^* = -\partial_4\varphi^*. \qquad (2.39)$$

Devido aos vínculos (2.28) e (2.29) se tornarem fortemente nulos é possível obter

$$\partial_k\varphi = \varphi_k, \quad \partial_k\varphi^* = \varphi_k^*, \qquad (2.40)$$

assim, chegamos a

$$\varphi_\mu = \partial_\mu\varphi, \quad \varphi_\mu^* = (\partial_\mu\varphi)^*. \qquad (2.41)$$

Por outro lado, das equações de Hamilton para as outras componentes do campo, se tem

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_4\,(\mathbf{x}') &= \left\{\varphi_4\,(\mathbf{x}')\,, H^{(1)}\right\}_{PB} = \lambda_4\,(\mathbf{x}') = -i\left(\partial_k\varphi_k - m^2\varphi\right)\\
\dot{\varphi}_4^*\,(\mathbf{x}') &= \left\{\varphi_4^*\,(\mathbf{x}')\,, H^{(1)}\right\}_{PB} = \lambda_4^*\,(\mathbf{x}') = i\left(\partial_k\varphi_k^* - m^2\varphi^*\right),
\end{aligned}$$

onde temos usado os coeficientes obtidos em (2.24) e(2.25). Essas últimas relações permitem obter

$$\partial_\mu\varphi_\mu - m^2\varphi = 0, \quad (\partial_\mu\varphi_\mu)^* - m^2\varphi^* = 0$$

das quais, usando (2.41), se seguem as equações de movimento

$$\partial_\mu \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi = 0, \quad \partial_\mu \partial_\mu \varphi^* - m^2 \varphi^* = 0$$

que são as equações de KGF para os campos φ, φ^*.

2.1.2 Forma matricial

Agora, daremos procedimento à analise de vínculos na forma matricial. Sendo que na representação escalar as matrizes β_μ são de 5×5, o campo ψ é um vetor coluna (5×1), e $\overline{\psi}$ é um vetor linha (1×5). Definimos, então, as nossas coordenadas e momentos canônicos

$$q \equiv \left\{ \psi^a, \overline{\psi}^a \right\} \tag{2.42}$$

$$p \equiv \left\{ \pi_a, \overline{\pi}_a \right\} \tag{2.43}$$

em que $a = 1, 2, ..., 5$. Aqui π_a é uma matriz 1×5 e $\overline{\pi}_a$ uma matriz 5×1.

Das equações (2.2) e (2.3) escrevemos em forma explícita os momentos canônicos

$$\pi_a = \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \dot{\psi}^a} = -i\overline{\psi}^c \beta_{4ca}, \quad \overline{\pi}_a = \frac{i}{2} \beta_{4ac} \psi^c, \tag{2.44}$$

de onde se obtém os seguintes vínculos primários

$$\theta_a = \pi_a + i \left(\overline{\psi} \beta_4 \right)_a \approx 0, \quad \overline{\theta}_a = \overline{\pi}_a - \frac{i}{2} \left(\beta_4 \psi \right)_a \approx 0. \tag{2.45}$$

Notemos que o total de vínculos neste caso é igual a 10. Esses vínculos são agrupados como

$$\theta_A \equiv \left\{ \theta_a, \overline{\theta}_a \right\} \tag{2.46}$$

em que $A = 1, 2, ..., 10$. A densidade Hamiltoniana é dada pela equação (2.4), logo, junto com os vínculos primários construímos a densidade Hamiltoniana primária

$$\mathcal{H}^{(1)} = -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\beta_k\partial_k\psi - \partial_k\overline{\psi}\beta_k\psi\right) - m\overline{\psi}\psi + \theta_a\lambda^a + \overline{\lambda}^a\overline{\theta}_a \tag{2.47}$$

em que $\lambda^a, \overline{\lambda}^a$ são os coeficientes de Lagrange, que agrupamos como

$$\lambda^A \equiv \left\{\lambda^a, \overline{\lambda}^a\right\} \tag{2.48}$$

aqui λ^a é uma matriz 5×1 e $\overline{\lambda}^a$ uma matriz 1×5.

Agora, calculamos os parênteses de Poisson para os vínculos primários (2.45) e temos

$$\begin{aligned}
\left\{\theta_a(\mathbf{x}'), \overline{\theta}_b(\mathbf{x}'')\right\}_{PB} &= -\left\{\overline{\theta}_b(\mathbf{x}''), \theta_a(\mathbf{x}')\right\}_{PB} = i(\beta_4)_{ab}\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \\
\left\{\theta_a(\mathbf{x}'), \theta_b(\mathbf{x}'')\right\}_{PB} &= 0, \quad \left\{\overline{\theta}_a(\mathbf{x}'), \overline{\theta}_b(\mathbf{x}'')\right\}_{PB} = 0.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Com isso, a matriz de vínculos $C_{ab} = \|\{\theta_A, \theta_B\}_{PB}\|$ é

$$C_{ab} = \begin{vmatrix} 0 & (\beta_4)_{ab} \\ -(\beta_4)_{ab} & 0 \end{vmatrix} i\delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''), \tag{2.50}$$

usando a representação (1.28) para β_4, temos que o posto da matriz (2.50) é

$$\operatorname{rank}\|\{\theta_A, \theta_B\}_{PB}\| = 4 \tag{2.51}$$

isto implica que só 4 coeficientes λ^A podem ser dedeterminados e deve, portanto, existir vínculos secundários.

Impondo a preservação dos vínculos primários no tempo (condição de estabilidade), obtemos

$$\dot{\theta}_a = \left\{\theta_a, H^{(1)}\right\}_{PB} = -\left(\partial_k\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi}\right)_a + i\left(\overline{\lambda}\beta_4\right)_a \approx 0 \tag{2.52}$$

$$\dot{\overline{\theta}}_a = \left\{\overline{\theta}_a, H^{(1)}\right\}_{PB} = (\beta_k\partial_k\psi + m\psi)_a - i(\beta_4\lambda)_a \approx 0 \tag{2.53}$$

em que $H^{(1)}$ é o Hamiltoniano primário definido por (2.23). A expressão (2.52), permite obter a relação

$$i\left(\overline{\lambda}\beta_4\right)_a = \left(\partial_k\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi}\right)_a \tag{2.54}$$

multiplicando pela direita por β_4 (omitindo os índices) temos

$$i\overline{\lambda}\beta_4^2 = \left(\partial_k\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi}\right)\beta_4 \tag{2.55}$$

e levando em conta (1.29), vemos que a equação acima nos permite conhecer somente dois coeficientes $\overline{\lambda}^a$ $(a = 1, 5)$. As outras 3 componentes da equação resultam em novos vínculos secundários, que são separados pelo projetor $(1 - \beta_4^2)$, assim temos

$$\theta_a^{(2)} = \left[\left(\partial_k\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi}\right)\left(1 - \beta_4^2\right)\right]_a \approx 0, \quad a = 2, 3, 4. \tag{2.56}$$

Similarmente, da condição de estabilidade (2.53) se obtém

$$i\left(\beta_4\lambda\right)_a = \left(\beta_k\partial_k\psi - m\psi\right)_a \tag{2.57}$$

da qual, após multiplicar pela esquerda por β_4, temos

$$i\beta_4^2\lambda = \beta_4\left(\beta_k\partial_k\psi - m\psi\right) \tag{2.58}$$

equação que nos permite conhecer somente 2 coeficientes λ^a $(a = 1, 5)$. Da mesma forma que no caso anterior, tem-se 3 novos vínculos secundários que são separados pelo projetor $(1 - \beta_4^2)$

$$\overline{\theta}_a^{(2)} = \left[\left(1 - \beta_4^2\right)\left(\partial_k\psi\beta_k + m\psi\right)\right]_a \approx 0, \quad a = 2, 3, 4. \tag{2.59}$$

O conjunto de todos os vínculos, primários e secundários, agora, pode ser agrupado como

$$\Theta_A \equiv \left\{\theta_a, \overline{\theta}_a, \theta_i^{(2)}, \overline{\theta}_i^{(2)}\right\} \tag{2.60}$$

em que $i = 2,3,4$, $A = 1,2,...,16$. Quando aplicamos a condição de estabilidade sobre os novos vínculos secundários, com o Hamiltoniano $H^{(1)}$

$$\dot{\Theta}_A(\mathbf{x}) = \left\{\Theta_A(\mathbf{x}), H^{(1)}\right\}_{PB} \approx 0 \tag{2.61}$$

se mostra que não aparecem mais vínculos na teoria.

Em seguida calculamos os PB entre todos os vínculos (2.60), assim, obtemos

$$\left\{\theta_a(\mathbf{x}'), \overline{\theta}_i^{(2)}(\mathbf{x}'')\right\}_{PB} = -\left[\left(1-\beta_4^2\right)(\beta_k\partial_k + m)\right]_{ia}\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}'') \tag{2.62}$$

$$\left\{\overline{\theta}_a(\mathbf{x}')\,\theta_i^{(2)}(\mathbf{x}'')\right\}_{PB} = -\left[(\beta_k\partial_k - m)\left(1-\beta_4^2\right)\right]_{ia}\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}''). \tag{2.63}$$

A nova matriz de vínculos $C_{AB} = \|\{\Theta_A, \Theta_B\}_{PB}\|$ tem posto 16 e é não singular, isto implica que todos os coeficientes de Lagrange podem ser calculados. Concluímos assim que os vínculos (2.60) são de **2^a Classe**.

Vejamos agora as equações de movimento. Primeiramente para o campo $\overline{\psi}$

$$\dot{\overline{\psi}}^a(\mathbf{x}') = \left\{\overline{\psi}^a(\mathbf{x}'), H^{(1)}\right\}_{PB} = \int d^3\mathbf{x}\overline{\lambda}^b(\mathbf{x})\left\{\overline{\psi}^a(\mathbf{x}'), \overline{\theta}_b(\mathbf{x})\right\}_{PB} = \overline{\lambda}^a(\mathbf{x}'), \tag{2.64}$$

lembrando que $\dot{\overline{\psi}} = i\partial_4\overline{\psi}$, e usando a relação (2.54) se obtém a equação de movimento para o campo $\overline{\psi}$

$$\partial_\mu\overline{\psi}\beta_\mu - m\overline{\psi} = 0. \tag{2.65}$$

Do mesmo modo, podemos obter para o campo ψ

$$\dot{\psi}^a(\mathbf{x}') = \left\{\psi^a(\mathbf{x}'), H^{(1)}\right\}_{PB} = \int d^3\mathbf{x}\left\{\psi^a(\mathbf{x}'), \theta_b(\mathbf{x})\right\}_{PB}\lambda^b(\mathbf{x}) = \lambda^a(\mathbf{x}') \tag{2.66}$$

então, fazendo uso de (2.57) se obtém a equação de movimento para o campo ψ,

$$\beta_\mu\partial_\mu\psi + m\psi = 0. \tag{2.67}$$

As equações (2.65) e (2.67) reproduzem as equações de DKP para os campos ψ e $\overline{\psi}$.

2.2 Caso Vetorial

A análise de vínculos no caso de spin 1 é semelhante a realizada no caso escalar. A diferença substancial é o número de vínculos da teoria para o setor de spin 1 que resulta ser maior que no caso escalar.

2.2.1 Forma matricial

Como já mencionamos anteriormente, no setor de spin 1 a representação das matrizes β_μ é de 10×10, assim, o campo ψ é um vetor coluna de 10×1, enquanto que $\overline{\psi}$ é um vetor fila de 1×10. Denotamos os nossos campos e momentos canônicos como

$$q \equiv \left\{\psi^a, \overline{\psi}^a\right\} \tag{2.68}$$

$$p \equiv \left\{\pi_a, \overline{\pi}_a\right\} \tag{2.69}$$

em que $a = 1, 2, ..., 10$. Aqui π_a é uma matriz 1×10 e $\overline{\pi}_a$ uma matriz 10×1.

Os momentos canônicos são definidos nas equações (2.2) e (2.3), assim, escrevemos

$$\pi_a == -i\overline{\psi}^c \beta_{4ca} \quad , \quad \overline{\pi}_a = \frac{i}{2}\beta_{4ac}\psi^c, \tag{2.70}$$

de onde se obtém os seguintes vínculos primários

$$\theta_a = \pi_a + i\left(\overline{\psi}\beta_4\right)_a \approx 0 \quad , \quad \overline{\theta}_a = \overline{\pi}_a - \frac{i}{2}\left(\beta_4\psi\right)_a. \tag{2.71}$$

Notemos que o total de vínculos primários neste caso é igual a 20. Esses vínculos são agrupados como

$$\theta_A \equiv \left\{\theta_a, \overline{\theta}_a\right\} \tag{2.72}$$

em que $A = 1, 2, ..., 20$. A nossa densidade Hamiltoniana primária $\mathcal{H}^{(1)}$ que considera os vínculos primários (2.71) é semelhante a (2.47) com a diferença de que, agora, o número de vínculos é maior,

$$\mathcal{H}^{(1)} = -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\beta_k\partial_k\psi - \partial_k\overline{\psi}\beta_k\psi\right) - m\overline{\psi}\psi + \theta_a\lambda^a + \overline{\lambda}^a\overline{\theta}_a \tag{2.73}$$

sendo $\lambda^a, \overline{\lambda}^a$ os coeficientes de Lagrange e são agrupados como

$$\lambda^A \equiv \left\{\lambda^a, \overline{\lambda}^a\right\} \tag{2.74}$$

ou seja, temos 20 coeficientes a serem calculados, em princípio. Aqui λ^a é uma matriz 10×1 e $\overline{\lambda}^a$ uma matriz 1×10.

Em seguida calculamos os PB entre todos os vínculos primários (2.71), e obtemos

$$\begin{aligned} \left\{\theta_a(\mathbf{x}'), \overline{\theta}_b(\mathbf{x}'')\right\}_{PB} &= -\left\{\overline{\theta}_b(\mathbf{x}'')\,\theta_a(\mathbf{x}'),\right\}_{PB} = i\left(\beta_4\right)_{ab}\delta^3\left(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\right) \\ \left\{\theta_a(\mathbf{x}'), \theta_b(\mathbf{x}'')\right\}_{PB} &= 0, \quad \left\{\overline{\theta}_a(\mathbf{x}'), \overline{\theta}_b(\mathbf{x}'')\right\}_{PB} = 0. \end{aligned} \tag{2.75}$$

A matriz formada pelos PB dos vínculos $C_{ab} = \left\|\{\theta_A, \theta_B\}_{PB}\right\|$

$$C_{ab} = \begin{vmatrix} 0 & (\beta_4)_{ab} \\ & \\ -(\beta_4)_{ab} & 0 \end{vmatrix} i\delta^3\left(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\right) \tag{2.76}$$

é uma matriz 20×20. Usando a representação (1.30), é possível determinar que o posto desta matriz é

$$\operatorname{rank}\left\|\{\theta_A, \theta_B\}_{PB}\right\| = 12. \tag{2.77}$$

Assim, como no caso escalar, esse resultado implica que só 12 coeficientes de Lagrange podem ser calculados e, portanto, devem existir vínculos adicionais. Os vínculos secundários são obtidos ao impor a preservação dos vínculos primários no tempo, ou seja

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_a &= \left\{\theta_a, H^{(1)}\right\}_{PB} = -\left(\partial_k\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi}\right)_a + i\left(\overline{\lambda}\beta_4\right)_a \approx 0 & (2.78) \\ \dot{\overline{\theta}}_a &= \left\{\overline{\theta}_a, H^{(1)}\right\}_{PB} = \left(\beta_k\partial_k\psi + m\psi\right)_a - i\left(\beta_4\lambda\right)_a \approx 0 & (2.79) \end{aligned}$$

em que $H^{(1)}$ é dado agora por (2.73). A expressão (2.78), permite obter a relação

$$i\left(\overline{\lambda}\beta_4\right)_a = \left(\partial_k\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi}\right)_a \tag{2.80}$$

da qual segue a seguinte expressão

$$i\overline{\lambda}\beta_4^2 = \left(\partial_k\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi}\right)\beta_4 \tag{2.81}$$

que segundo a representação (1.31) permite calcular somente 6 coeficientes $\overline{\lambda}^a$ $(a = 1,2,3,7,8,9)$. As outras 4 componentes da equação proporcionam novos vínculos, em nosso caso os vínculos secundários, que são separados pelo projetor $(1-\beta_4^2)$, temos, então,

$$\theta_a^{(2)} = \left[\left(\partial_k\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi}\right)\left(1-\beta_4^2\right)\right]_a \approx 0, \quad a = 4,5,6,10. \tag{2.82}$$

Similarmente, da outra relação (2.79) se tem

$$i\left(\beta_4\lambda\right)_a = \left(\beta_k\partial_k\psi - m\psi\right)_a \tag{2.83}$$

da qual conseguimos a equação

$$i\beta_4^2\lambda = \beta_4\left(\beta_k\partial_k\psi - m\psi\right) \tag{2.84}$$

que somente permite conhecer 6 coeficientes λ^a $(a = 1,2,3,7,8,9)$. Portanto, temos mais 4 vínculos secundários que são

$$\overline{\theta}_a^{(2)} = \left[\left(1-\beta_4^2\right)\left(\partial_k\psi\beta_k + m\psi\right)\right]_a \approx 0, \quad a = 4,5,6,10. \tag{2.85}$$

Agrupamos, então, todos os vínculos primários e secundários como

$$\Theta_A \equiv \left\{\theta_a, \overline{\theta}_a, \theta_i^{(2)}, \overline{\theta}_i^{(2)}\right\} \tag{2.86}$$

em que $i = 4, 5, 6, 10$, $A = 1, 2, ..., 28$. Para saber se existem mais vínculos na teoria é preciso aplicar a condição de estabilidade sobre os vínculos secundários usando o mesmo Hamiltoniano $H^{(1)}$, ou seja

$$\dot{\Theta}_A(\mathrm{x}) = \left\{\Theta_A(\mathrm{x}), H^{(1)}\right\}_{PB} \approx 0 \tag{2.87}$$

que permite mostrar que não há mais vínculos na teoria.

Logo, seguindo o procedimento de Dirac, calculamos os PB entre todos os vínculos primários e secundários, obtendo

$$\left\{\theta_a(\mathrm{x}'), \overline{\theta}_i^{(2)}(\mathrm{x}'')\right\}_{PB} = -\left[\left(1-\beta_4^2\right)\left(\beta_k\partial_k + m\right)\right]_{ia}\delta(\mathrm{x}'-\mathrm{x}'') \tag{2.88}$$

$$\left\{\overline{\theta}_a(\mathrm{x}')\,\theta_i^{(2)}(\mathrm{x}'')\right\}_{PB} = -\left[\left(\beta_k\partial_k - m\right)\left(1-\beta_4^2\right)\right]_{ia}\delta(\mathrm{x}'-\mathrm{x}''). \tag{2.89}$$

Desse modo a nova matriz de vínculos $C_{AB} = \|\{\Theta_A, \Theta_B\}_{PB}\|$ resulta ter posto 28 e é não singular, assim, concluímos, então, que todos os vínculos (2.86) são de **2ª Classe.**

As equações de movimento são calculadas da mesma forma que no caso escalar, como pode-se ver nas equações (2.64) e (2.66), e que resultam nas equações de DKP (2.65)e (2.67) para os campos $\overline{\psi}$ e ψ.

2.3 Caso escalar. Campo Externo

A interação eletromagnética na teoria de DKP é introduzida seguindo o procedimento de acoplamento mínimo, assim, se tem

$$\partial_\mu\psi \rightarrow \mathcal{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi - ieA_\mu\psi \tag{2.90}$$

$$\partial_\mu \overline{\psi} \rightarrow \mathcal{D}^*_\mu \overline{\psi} \;=\; \partial_\mu \overline{\psi} + ieA_\mu \overline{\psi} \tag{2.91}$$

que introduzido na Lagrangiana (2.1) resulta em

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\beta_\mu \mathcal{D}_\mu \psi - \mathcal{D}^*_\mu \overline{\psi}\beta_\mu \psi\right) + m\overline{\psi}\psi \\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\beta_\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \overline{\psi}\beta_\mu \psi\right) + m\overline{\psi}\psi - ie\overline{\psi}\beta_\mu \psi A_\mu . \end{aligned} \tag{2.92}$$

A seguir, procedemos a análise de vínculos da nova Lagrangiana. Como primeiro passo calculamos os momentos canônicos

$$\pi = -\frac{i}{2}\overline{\psi}\beta_4, \quad \overline{\pi} = \frac{i}{2}\beta_4 \psi \tag{2.93}$$

que neste caso coincidem com aqueles do caso livre. No entanto, o Hamiltoniano canônico é dado pela expressão

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\beta_k \partial_k \psi - \partial_k \overline{\psi}\beta_k \psi\right) - m\overline{\psi}\psi + ie\overline{\psi}\beta_\mu \psi A_\mu . \tag{2.94}$$

2.3.1 Forma Matricial

Como no caso escalar livre, as representações das matrizes β_μ são de 5×5, portanto, o campo ψ é um vetor coluna de 5×1 e $\overline{\psi}$ é um vetor fila de 1×5. O conjunto de coordenadas e impulsos canônicos é denotado por

$$q \;\equiv\; \left\{\psi^a, \overline{\psi}^a\right\} \tag{2.95}$$

$$p \;\equiv\; \left\{\pi_a, \overline{\pi}_a\right\} \tag{2.96}$$

em que $a = 1, 2, ..., 5$. Com isso, os impulsos canônicos (2.93) podem ser escritos em forma explícita como

$$\pi_a = -\frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\beta_4\right)_a, \quad \overline{\pi}_a = \frac{i}{2}\left(\beta_4 \psi\right)_a \tag{2.97}$$

oem que obtemos o seguinte conjunto de vínculos primários

$$\theta_a \equiv \pi_a + \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\beta_4\right)_a \approx 0, \quad \overline{\theta}_a \equiv \overline{\pi}_a - \frac{i}{2}\left(\beta_4\psi\right)_a \approx 0 \tag{2.98}$$

que denotamos como

$$\theta_A \equiv \left\{\theta_a, \overline{\theta}_a\right\} \tag{2.99}$$

e vemos que existem 10 vínculos. A presença desses vínculos primários na teoria implica em definir um outro Hamiltoniano $\mathcal{H}^{(1)}$ chamado de Hamiltoniano primário por incluir esses vínculos, e é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)} &= \mathcal{H} + \theta_a\lambda^a + \overline{\lambda}^a\overline{\theta}_a \\ &= -\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\beta_k\partial_k\psi - \partial_k\overline{\psi}\beta_k\psi\right) - m\overline{\psi}\psi + ie\overline{\psi}\beta_\mu\psi A_\mu + \theta_a\lambda^a + \overline{\lambda}^a\overline{\theta}_a \end{aligned} \tag{2.100}$$

em que $\lambda^a, \overline{\lambda}^a$ são os coeficientes de Lagrange que agrupamos como

$$\lambda_A \equiv \left\{\lambda^a, \overline{\lambda}^a\right\} \tag{2.101}$$

sendo que λ^a é uma matriz 5×1 e $\overline{\lambda}^a$ uma matriz 1×5.

Em seguida calculamos os parênteses de Poisson entre todos os vínculos primários, assim temos

$$\begin{aligned} \left\{\theta_a(\mathbf{x}'), \overline{\theta}_b(\mathbf{x}'')\right\}_{PB} &= -\left\{\overline{\theta}_b(\mathbf{x}''), \theta_a(\mathbf{x}')\right\}_{PB} = i\left(\beta_4\right)_{ba}\delta\left(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\right) \\ \left\{\theta_a(\mathbf{x}'), \theta_b(\mathbf{x}'')\right\}_{PB} &= \left\{\overline{\theta}_a(\mathbf{x}''), \overline{\theta}_b(\mathbf{x}')\right\}_{PB} = 0 \end{aligned} \tag{2.102}$$

a matriz formada por esses parênteses, $C_{ab} = \left\|\{\theta_A, \theta_B\}_{PB}\right\|$ (ver (2.50)), tem posto igual a 4 e é singular, isto quer dizer que é possível conhecer somente 4 coeficientes de Lagrange λ_A e, portanto, existem mais vínculos na teoria. Para obter esses novos vínculos é preciso impor a preservação dos vínculos primários no tempo, ou seja, aplicar a condição de estabilidade que é dada por

$$\dot{\theta}_a(\mathbf{x}') = \left\{\theta_a(\mathbf{x}'), H^{(1)}\right\}_{PB} = -\left(\partial_k\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi} + ie\overline{\psi}\beta_\mu A_\mu\right)_a + i\left(\overline{\lambda}\beta_4\right)_a \approx 0 \tag{2.103}$$

$$\dot{\overline{\theta}}_a(\mathbf{x}') = \left\{\overline{\theta}_a(\mathbf{x}'), H^{(1)}\right\}_{PB} = \left(\beta_k\partial_k\psi + m\psi - ie\beta_\mu\psi A_\mu\right)_a - i\left(\beta_4\lambda\right)_a \approx 0 \tag{2.104}$$

com $H^{(1)}$ sendo o Hamiltoniano construido a partir de (2.100).

Da expressão (2.103) se obtém a seguinte equação para $\overline{\lambda}_a$

$$i\left(\overline{\lambda}\beta_4\right)_a = \left(\partial_k\overline{\psi}\beta_k + ie\overline{\psi}\beta_\mu A_\mu - m\overline{\psi}\right)_a = \left(\mathcal{D}_k^*\overline{\psi}\beta_k + ie\overline{\psi}\beta_4 A_4 - m\overline{\psi}\right)_a \tag{2.105}$$

multiplicando esta última expressão pela direita por β_4 se tem

$$i\left(\overline{\lambda}\beta_4^2\right)_a = \left[\left(\mathcal{D}_k^*\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi}\right)\beta_4 + ie\overline{\psi}\beta_4^2 A_4\right]_a \tag{2.106}$$

que, segundo a forma de β_4^2 dada em (1.29), permite concluir que somente 2 coeficientes de Lagrange podem ser calculados, para os valores de $a = 1, 5$. Por outro lado, o projetor $(1-\beta_4^2)$ consegue separar de (2.105) 3 vínculos secundários, ou seja,[2]

$$\theta_a^{(2)} = \left[\left(\mathcal{D}_k^*\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi}\right)\left(1-\beta_4^2\right)\right]_a, \qquad a = 2, 3, 4. \tag{2.107}$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado para a outra condição de estabilidade (2.104), se obtendo

$$i\left(\beta_4\lambda\right)_a = \left(\beta_k\partial_k\psi - ie\beta_\mu\psi A_\mu + m\psi\right)_a = \left(\beta_k\mathcal{D}_k\psi - ie\beta_4\psi A_4 + m\psi\right)_a \tag{2.108}$$

[2]Aqui temos usado a relação $\beta_4\left(1-\beta_4^2\right) = 0$.

logo ao multiplicar β_4 pela esquerda se tem

$$i\left(\beta_4^2\lambda\right)_a = \beta_4\left(\beta_k\mathcal{D}_k\psi + m\psi\right) - ie\beta_4^2\psi A_4 \qquad (2.109)$$

e novamente concluímos que só 2 coeficientes de Lagrange podem ser obtidos, para valores de $a = 1, 5$. Os 3 vínculos secundários que resultam em aplicar o projetor $(1-\beta_4^2)$ sobre (2.108) são

$$\overline{\theta}_a^{(2)} = \left[\left(1-\beta_4^2\right)\left(\beta_k\mathcal{D}_k\psi + m\psi\right)\right]_a, \qquad a = 2, 3, 4. \qquad (2.110)$$

O conjunto de todos os vínculos primários e secundários é denotado por

$$\Theta_A \equiv \left\{\theta_a, \overline{\theta}_a, \theta_i^{(2)}, \overline{\theta}_i^{(2)}\right\} \qquad (2.111)$$

em que $A = 1, 2, ..., 16$ e $i = 1, 2, 3$. Para verificar a possibilidade de se ter ou não mais vínculos na teoria aplicamos a condição de estabilidade sobre os vínculos secundários usando o Hamiltoniano obtido a partir da densidade $\mathcal{H}^{(1)}$ dada em (2.100), ou seja

$$\dot{\Theta}_A\left(x'\right) \equiv \left\{\Theta_A\left(x'\right), H^{(1)}\right\}_{PB}. \qquad (2.112)$$

Não é difícil verificar que isto nos leva a resultados do tipo $0 \equiv 0$, o que implica que não se tem mais vínculos na teoria.

Para proceder a classificação de vínculos é preciso conhecer os PB entre todos os vínculos Θ_A. Parte deles já foi calculado em (2.102), enquanto que os outros PB são dados por

$$\left\{\theta_a\left(\mathbf{x}'\right), \overline{\theta}_i^{(2)}\left(\mathbf{x}''\right)\right\}_{PB} = -\left[\left(1-\beta_4^2\right)\left(\beta_k\partial_k - ieA_k + m\right)\right]_{ia}\delta\left(\mathbf{x}'-\mathbf{x}''\right) \qquad (2.113)$$

$$\left\{\overline{\theta}_a\left(\mathbf{x}'\right)\theta_i^{(2)}\left(\mathbf{x}''\right)\right\}_{PB} = -\left[\left(\beta_k\partial_k + ieA_k - m\right)\left(1-\beta_4^2\right)\right]_{ia}\delta\left(\mathbf{x}'-\mathbf{x}''\right) \qquad (2.114)$$

com os outros PB sendo iguais a zero. A matriz formada por esses PB $C_{AB} = \|\{\Theta_A, \Theta_B\}_{PB}\|$, tem posto 16 e é não singular. Com isto todos os coeficientes de Lagrange λ_A podem ser calculados. Podemos concluir que o conjunto de vínculos (2.111) é de **2ª classe.**

Prosseguindo, calcularemos as equações de movimento para o campo $\overline{\psi}$ e ψ. Para $\overline{\psi}$

$$\dot{\overline{\psi}}^a(\mathrm{x}') = \left\{\overline{\psi}^a(\mathrm{x}'), H^{(1)}\right\}_{PB} = \int d^3\mathrm{x}\overline{\lambda}^b(\mathrm{x})\left\{\overline{\psi}^a(\mathrm{x}'), \overline{\theta}_b(\mathrm{x})\right\}_{PB} = \overline{\lambda}^a(\mathrm{x}') \tag{2.115}$$

usando o fato que $\dot{\overline{\psi}} = i\partial_4\overline{\psi}$, e multiplicando a equação acima por $i\beta_4$ pela direita, se tem

$$\mathcal{D}_\mu\overline{\psi}\beta_\mu - m\overline{\psi} = 0 \tag{2.116}$$

onde temos usado a equação (2.105).

Da mesma forma, procedemos para obter a equação de movimento para o campo ψ,

$$\dot{\psi}^a(\mathrm{x}') = \left\{\psi^a(\mathrm{x}'), H^{(1)}\right\}_{PB} = \int d^3\mathrm{x}\left\{\psi^a(\mathrm{x}'), \theta_b(\mathrm{x})\right\}_{PB}\lambda^b(\mathrm{x}) = \lambda^a(\mathrm{x}') \tag{2.117}$$

multiplicando β_4 pelo lado esquerdo da equação e substituindo $(\beta_4\lambda)^a$ de (2.108), obtemos a equação de movimento do campo DKP minimamente acoplado a um campo eletromagnético externo,

$$\beta_\mu\mathcal{D}_\mu\psi + m\psi = 0. \tag{2.118}$$

3. Condensação de Bose-Einstein

A Condensação de Bose-Einstein (CBE) [32, 33] é um fenômeno que foi longamente associado ao estudo do Hélio líquido (misturas de ^4He e ^3He-^4He). No entanto, pesquisas recentes vinculam a CBE com uma série de áreas da física moderna [34]: na termodinâmica a CBE aparece como uma transição de fase de um gás a um novo estado da matéria [35], na mecânica quântica a CBE é tratada como uma coerência de onda-matéria [36] que aparece ao se sobrepor às ondas de de-Broglie dos átomos [37]; a estatística quântica explica a CBE como algo mais do que um átomo distribuído numa cela do espaço de fase, na Teoria Quântica das armadilhas atômicas [38] vários átomos condensam no estado fundamental da armadilha e na Teoria Quântica de Campos (TQC) a CBE está, geralmente, vinculada a quebra espontânea de simetria [26]- [40]

Na Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita o campo escalar carregado é usado para estudar as propriedades termodinâmicas dos sistemas físicos compostos por partículas bosônicas de spin 0. No entanto, à temperatura zero existe uma alternativa não só para o estudo das propriedades de campos escalares complexos, mas também para campos vetoriais complexos. Tal método alternativo é conhecido como a teoria de DKP massiva.

À temperatura zero, uma questão importante no que diz respeito a teoria

DKP é a sua equivalência ou não, dos seus setores de spin 0 e spin 1, com as teorias baseadas nas equações de KGF e Proca, respectivamente. No começo dos anos 50 o problema da equivalência foi talvez o principal motivo para o abandono da teoria DKP em favor das teorias convencionais de KGF e Proca. Contudo, no início dos anos 70 o problema da equivalência começa a ser estudado de forma mais detalhada para diferentes situações envolvendo quebra espontânea de simetria e processos com hádrons, mostrando que em alguns casos a teoria de DKP poderia dar resultados diferentes, cujo problema até agora não foi resolvido na sua totalidade.

Como mencionamos anteriormente, todos os estudos relacionados à teoria DKP foram feitos à temperatura zero. O nosso interesse, agora, é o estudo da termodinâmica e a condensação de Bose-Einstein para partículas massivas carregadas usando a teoria de DKP.

3.1 A Função de Partição

A Função de Partição (FP) é definida através da matriz densidade ρ [41]

$$Z = \mathrm{Tr}\rho = \sum_n \rho_{nn} = \mathrm{Tr}e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} \tag{3.1}$$

em que $(\hat{\ })$ está para indicar que temos operadores, $\beta = 1/T$, sendo T a temperatura, μ o potencial químico[1] e N o número de partículas no sistema. É a partir da FP que as diferentes grandezas termodinâmicas podem ser calculadas. A maneira de exemplo, vejamos como obter as distribuições de Fermi-Dirac e Bose-Einstein a partir da FP (3.1). Segundo relações da termodinâmica a distribuição

[1]No caso de partículas sem carga teríamos $\mu = 0$. Já para partículas com carga positiva teríamos $+\mu$ e para partículas com carga negativa $-\mu$.

do número de partículas N em relação a temperatura β é dada por

$$N = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}, \tag{3.2}$$

em seguida, introduzimos uma base completa de estados $|n\rangle$ tal que

$$\widehat{H}\,|n\rangle = E\,|n\rangle = \omega\,|n\rangle\,, \quad \widehat{N}\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,, \tag{3.3}$$

uma vez que o Hamiltoniano pode sempre ser escolhido como $\widehat{H} = \omega\widehat{N}$, temos que a relação (3.1) passa a ser

$$Z = \sum_n \langle n|\, e^{-\beta(\omega-\mu)\widehat{N}}\,|n\rangle = \sum_n e^{-\beta(\omega-\mu)n}, \tag{3.4}$$

segundo o tipo de partículas a ser considerado, a soma (3.4) tem um resultado diferente.

No caso de Férmions devemos levar em conta o princípio de exclusão de Pauli, de modo que os valores para n são: $n = 0, 1$, assim, a FP para Férmions (Z_F) é dada por

$$Z_F = 1 + e^{-\beta(\omega-\mu)}. \tag{3.5}$$

No caso de Bósons não existe tal restrição para o número total de partículas que podem estar num mesmo estado, assim, n pode tomar todos os valores inteiros possíveis $n = 1, 2, \ldots$, desse modo, temos para a FP bosônica (Z_B)

$$Z_B = 1 + e^{-\beta(\omega-\mu)} + e^{-\beta(\omega-\mu)2} + \ldots = \left(1 - e^{-\beta(\omega-\mu)}\right)^{-1}. \tag{3.6}$$

Aplicando a relação (3.2) temos

$$N_F = \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} + 1}, \tag{3.7}$$

$$N_B = \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)} - 1}. \tag{3.8}$$

Dessas últimas distribuições vemos que no caso dos férmions o potencial químico não tem restrições, sendo possível, também, o valor $\mu = \omega$. No caso dos bósons temos que μ só pode ter o valor $|\mu| < \omega$.

Fazemos agora uma análise da FP na TQC para o caso de partículas bosônicas e usamos para ela uma representação via integração funcional. Vamos supor que exista uma base completa de estados $|\phi_a\rangle$, com propriedades bem definidas no espaço de Fock, então, é possível obter uma representação funcional para o Traço e podemos reescrever a equação (3.1) como

$$Z = \mathrm{Tr} e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} = \int \mathcal{D}\phi_a \langle\phi_a| e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} |\phi_a\rangle, \tag{3.9}$$

em que a soma é sobre todos os estados possíveis $|\phi_a\rangle$ e a operação do Traço implica que devemos integrar sobre todos os campos ϕ_a. Esta última expressão é muito similar a amplitude de transição estudada em TQC quando é usada a integração funcional. No entanto, algumas diferenças fundamentais devem ser consideradas quando a integração é feita em TQC à Temperatura Finita. Primeiro, os limites da integração estão restritos sobre a variável temporal τ[2] sendo que ela só pode ter valores no intervalo $[0, \beta]$. Por outro lado, a métrica[3] aqui adotada permite uma identificação direta com os métodos funcionais usados em TQC à Temperatura zero e nos leva a seguinte forma para a FP

$$Z = \int \mathcal{D}\pi_a \int_{\text{periódico}} \mathcal{D}\phi_a \exp\left\{\int_\beta d^4x \left(i\pi_a\partial_4\phi_a - \mathcal{H}(\pi_a, \phi_a) + \mu\mathcal{N}(\pi_a, \phi_a)\right)\right\}, \tag{3.10}$$

[2]Estamos identificando a variável τ com β.

[3]Com a métrica usual teríamos que adotar o Formalismo de Tempo Imaginário e fazer em seguida a substituição $t \to it$.

sendo $\mathcal{H}$ a densidade Hamiltoniana e $\mathcal{N}$ o número de partículas respectivamente. E a notação

$$\int_\beta d^4x = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x}. \tag{3.11}$$

Notemos que a integração sobre os momentos π_a não tem restrições, tanto que os campos ϕ_a estão sujeitos as condições de periodicidade

$$\phi_a(\mathbf{x}, 0) = \phi_a(\mathbf{x}, \beta), \tag{3.12}$$

sendo esta última condição uma conseqüência das propriedades do Traço.

No caso especial em que o Hamiltoniano só tem dependência quadrática nos momentos π_a é sempre possível realizar a integração em $\mathcal{D}\pi_a$, uma vez que nesse caso temos integrais gaussianas. No entanto, aparece uma constante com dependência na temperatura $N(\beta)$ que dá uma contribuição adicional a FP.

Devido à condição (3.12), é sempre possível decompor o campo $\phi(\mathbf{x}, \tau)$ em série de Fourier, assim,

$$\phi_a(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \widetilde{\phi}_a(\omega_n, \mathbf{p})\, e^{i(\mathbf{px}+\omega_n\tau)}, \tag{3.13}$$

com $\omega_n = 2\pi n/\beta$. Usando a seguinte definição da função $\delta_{nn'}$

$$\delta_{nn'} = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau e^{i(\omega_n - \omega_{n'})\tau}, \tag{3.14}$$

podemos obter a transformada de Fourier do campo $\phi(\mathbf{x}, \tau)$

$$\widetilde{\phi}_a(\omega_n, \mathbf{p}) = \int_0^\beta d\tau \int d^3\mathbf{x} \phi_a(\mathbf{x}, \tau)\, e^{-i(\mathbf{px}+\omega_n\tau)}. \tag{3.15}$$

Não é difícil ver que essas expressões podem ser deduzidas da TQC à $T = 0$ se fizermos as seguintes substituições

$$k_4 \longrightarrow \omega_n = 2\pi n/\beta, \tag{3.16}$$

$$\int \frac{dk_4}{2\pi} f(k_4) \rightarrow \frac{1}{\beta}\sum_n f(\omega_n), \tag{3.17}$$

$$\int d^4x \rightarrow \int_\beta d^4x. \tag{3.18}$$

Agora analisaremos o caso específico de um campo carregado, com $\mu \neq 0$, usando a teoria de DKP. Como mostrada, na seção **2.1.2**, a teoria tem vínculos de segunda classe que devem ser considerados no momento de escrever a representação funcional para a FP. Assim, ela tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} Z_0(\mu,\beta) &= N(\beta)\int_\beta \mathcal{D}\overline{\pi}\mathcal{D}\pi\mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\delta(\Theta_A)(\det C_{AB})^{1/2} \times \\ & \exp\left[\int_\beta d^4x\left(i\pi\partial_4\psi + i\partial_4\overline{\psi}\overline{\pi} - \mathcal{H}_0 + \mu j^0\right)\right], \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde Θ_A são todos os vínculos de segunda classe dados por (2.60); C_{AB} é a matriz formada pelos PB desses vínculos, que no caso, tem como determinante uma quantidade que não depende dos campos (e não depende de β) podendo ser absorvida na constante de normalização; $\mathcal{H}_0$ é a densidade Hamiltoniana dada em (2.4); $j_4 = ij_0$ é a corrente conservada definida em (1.21) e $N(\beta)$ é uma constante de regularização[4]. Explicitamente, os vínculos $\delta(\Theta_A)$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \delta(\Theta_A) &= \delta\left(\pi + \frac{i}{2}\overline{\psi}\beta_4\right)\delta\left(\overline{\pi} - \frac{i}{2}\beta_4\psi\right)\delta\left[\left(1-\beta_4^2\right)\left(\beta_k\partial_k\psi + m\psi\right)\right] \\ & \delta\left[\left(\partial_k\overline{\psi}\beta_k - m\overline{\psi}\right)\left(1-\beta_4^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Se usarmos a álgebra de DKP é possível mostrar que

$$\left(1-\beta_4^2\right)\beta_\mu\partial_\mu\psi = \left(1-\beta_4^2\right)\beta_k\partial_k\psi, \tag{3.21}$$

$$\partial_\mu\overline{\psi}\beta_\mu\left(1-\beta_4^2\right) = \partial_k\overline{\psi}\beta_k\left(1-\beta_4^2\right), \tag{3.22}$$

[4] Esta constante é usada também por Bernard [27] para retirar os infinitos da teoria.

assim, os vínculos presentes em (3.20) podem ser escritos em forma covariante. Levando isso em consideração e com ajuda das funções δ realizamos a integração funcional nos momentos canônicos, obtendo

$$\begin{aligned} Z_0 &= N(\beta) \int_\beta \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\delta\left[\left(1-\beta_4^2\right)\left(\beta_\mu\partial_\mu\psi + m\psi\right)\right]\delta\left[\left(\partial_\mu\overline{\psi}\beta_\mu - m\overline{\psi}\right)\left(1-\beta_4^2\right)\right] \\ & \exp\left\{\int_\beta d^4x\left[\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\beta_\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\overline{\psi}\beta_\mu\psi\right) + m\overline{\psi}\psi + \mu\overline{\psi}\beta_4\psi\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

ressaltamos que os campos ψ, $\overline{\psi}$ estão sujeitos as mesmas condições de periodicidade (3.12). Em seguida, realizamos uma integração por partes no exponente de (3.23) e exponenciamos as funções δ, com isto obtemos

$$\begin{aligned} Z_0(\mu,\beta) &= N(\beta) \int_\beta \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{C}\mathcal{D}C \exp\left\{\int_\beta d^4x\left[\overline{\psi}\left(\beta_\mu\partial_\mu + m + \mu\beta_4\right)\psi\right.\right. \\ & \left.\left. + \left(\partial_\mu\overline{\psi}\beta_\mu - m\overline{\psi}\right)\left(1-\beta_4^2\right)C + \overline{C}\left(1-\beta_4^2\right)\left(\beta_\mu\partial_\mu\psi + m\psi\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

na exponencial separamos do lado esquerdo o campo $\overline{\psi}$ realizando, novamente, uma integração por partes para o termo $\left(\partial_\mu\overline{\psi}\beta_\mu - m\overline{\psi}\right)\left(1-\beta_4^2\right)C$, e reescrevemos a última expressão como

$$\begin{aligned} Z_0(\mu,\beta) &= N(\beta) \int_\beta \mathcal{D}\overline{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{C}\mathcal{D}C \exp\left\{\int_\beta d^4x\left[\overline{\psi}\left(\left(\beta_\mu\partial_\mu + m + \mu\beta_4\right)\psi\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. - \left(\beta_\mu\partial_\mu + m\right)\left(1-\beta_4^2\right)C\right) + \overline{C}\left(1-\beta_4^2\right)\left(\beta_\mu\partial_\mu\psi + m\psi\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Agora, é possível realizar a integração funcional em $\overline{\psi}$

$$\begin{aligned} Z_0(\mu,\beta) &= N(\beta) \int_\beta \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\overline{C}\mathcal{D}C \exp\left\{\int_\beta d^4x\overline{C}\left(1-\beta_4^2\right)\left(\beta_\mu\partial_\mu\psi + m\psi\right)\right\} \\ & \delta\left[\left(\beta_\mu\partial_\mu + m + \mu\beta_4\right)\psi - \left(\beta_\mu\partial_\mu + m\right)\left(1-\beta_4^2\right)C\right], \end{aligned} \tag{3.26}$$

usando propriedades da função δ:

$$\delta\left[A\psi - B\right] = \frac{1}{\det(A)}\delta\left(\psi - A^{-1}B\right) \tag{3.27}$$

com A e B sendo operadores diferenciais matriciais. Após, a integração funcional em ψ temos

$$Z_0\left(\mu,\beta\right) = \frac{N\left(\beta\right)}{\det\left(\beta_\mu\partial_\mu + m + \mu\beta_4\right)} I_0, \tag{3.28}$$

em que I_0 é dado por

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_\beta \mathcal{D}\overline{C}\mathcal{D}C \exp\left\{\int_\beta d^4x\overline{C}\left(1-\beta_4^2\right)\left(\beta_\mu\partial_\mu + m\right)\times\right. \\ &\left.\left(\beta_\mu\partial_\mu + m + \mu\beta_4\right)^{-1}\left(\beta_\mu\partial_\mu + m\right)\left(1-\beta_4^2\right)C\right\}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Usando a álgebra de DKP é possível simplificar o exponente de $I_0\left(\mu,\beta\right)$ que passa a ser

$$I_0 = \int_\beta \mathcal{D}\overline{C}\mathcal{D}C \exp\left\{\int_\beta d^4x m\overline{C}\left(1-\beta_4^2\right)C\right\}. \tag{3.30}$$

Como o nosso objetivo é o estudo da condensação, todos os cálculos de nossas integrais devem ser realizados no espaço dos momentos. Para isto devemos expressar os campos $\overline{C}, C$ em séries de Fourier, de forma semelhante a (3.13), assim teremos

$$C\left(\mathbf{x},\tau\right) = \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\widetilde{C}\left(\omega_n,\mathbf{p}\right)e^{i\left(\mathbf{px}+\omega_n\tau\right)}, \tag{3.31}$$

$$\overline{C}\left(\mathbf{x},\tau\right) = \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\left(2\pi\right)^3}\widetilde{\overline{C}}\left(\omega_n,\mathbf{p}\right)e^{-i\left(\mathbf{px}+\omega_n\tau\right)}, \tag{3.32}$$

substituindo em (3.30) se obtém

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_\beta \mathcal{D}\widetilde{\overline{C}}\mathcal{D}\widetilde{C} \exp\left\{m\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3p}{\left(2\pi\right)^3}\widetilde{\overline{C}}\left(\omega_n,\mathbf{p}\right)\left(1-\beta_4^2\right)\widetilde{C}\left(\omega_n,\mathbf{p}\right)\right\} \\ &= \prod_n\prod_{\mathbf{p}}\left(\det m\left(1-\beta_4^2\right)\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

em que usamos as definições das seguintes funções δ

$$\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{x}e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{x}}, \tag{3.34}$$

$$\delta_{nn'} = \frac{1}{\beta}\int_0^\beta d\tau e^{-i(\omega_n-\omega_{n'})\tau}, \tag{3.35}$$

tomando o logarítmo[5] de (3.33) chegamos a[6]

$$\ln I_0 = -V\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ln\det m\left(1-\beta_4^2\right), \tag{3.36}$$

vemos que apesar de ser uma quantidade infinita ela não tem dependência da temperatura β e, portanto, não tem contribuição termodinâmica.

Com este resultado podemos escrever (3.28) como

$$Z_0(\mu,\beta) = N(\beta)\int_{\text{periódico}} D\overline{\psi}D\psi\exp\left\{\int_\beta d^4x\overline{\psi}\left(\beta_\mu\partial_\mu + m + \mu\beta_4\right)\psi\right\}, \tag{3.37}$$

novamente expressamos os campos $\psi, \overline{\psi}$ segundo (3.13) como

$$\psi(\mathbf{x},\tau) = \psi_0 + \frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\widetilde{\psi}(\omega_n,\mathbf{p})e^{i(\mathbf{px}+\omega_n\tau)}, \tag{3.38}$$

$$\overline{\psi}(\mathbf{x},\tau) = \overline{\psi}_0 + \frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\widetilde{\overline{\psi}}(\omega_n,\mathbf{p})e^{-i(\mathbf{px}+\omega_n\tau)}, \tag{3.39}$$

os campos $\psi_0, \overline{\psi}_0$ independem de $(\omega_n, \mathbf{p})$ e no estado $n = 0$, $\mathbf{p} = 0$ são diferentes de zero, possibilitando o conglomerado de partículas bosônicas. Em outras palavras, os campos $\psi_0, \overline{\psi}_0$ caracterizam o comportamento infravermelho do sistema levando à condensação de Bose-Einstein.

[5] Como sabemos a quantidade que apresenta interesse físico é $\ln Z_0$, a partir da qual são calculadas as diferentes grandezas termodinâmicas.

[6] Nota-se que a inclusão do volume V é devido à preservação da dimensionalidade.

Introduzindo (3.38), (3.39) em (3.37) chegamos a

$$\begin{aligned} Z_0(\mu,\beta) &= N(\beta)\int_{\text{periódico}} D\widetilde{\overline{\psi}}D\widetilde{\psi}\exp\left\{\beta V\overline{\psi}_0(\mu\beta_4+m)\psi_0+\right. \\ &\left. +\frac{1}{\beta}\sum_n\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\widetilde{\overline{\psi}}(\omega_n,\mathbf{p})\left[i\beta_k p_k+\beta_4(\omega_n-i\mu)+m\right]\widetilde{\psi}(\omega_n,\mathbf{p})\right\} \\ &= N(\beta)\exp\left\{\beta V\overline{\psi}_0(\mu\beta_4+m)\psi_0\right\}\prod_n\prod_{\mathbf{p}}(\det A)^{-1}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

em que a matriz A é dada por

$$A=(i\beta_k p_k+\beta_4(\omega_n-i\mu)+m), \tag{3.41}$$

em que usamos novamente as funções (3.34), (3.35). Tomando o logarítmo desta última expressão temos

$$\ln Z_0(\mu,\beta)=\ln N(\beta)+\beta V\overline{\psi}_0(\mu\beta_4+m)\psi_0-V\sum_n\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\ln\det A, \tag{3.42}$$

nesta última relação é possível identificar a contribuição do modo zero como

$$Z_{\text{zero}}=\beta V\overline{\psi}_0(\mu\beta_4+m)\psi_0. \tag{3.43}$$

O cálculo de Z_0 deve ser feito para cada um dos setores da teoria DKP usando uma representação específica das matrizes β_μ.

3.2 Caso Escalar. Spin 0

Agora, analisaremos as implicâncias que o resultado (3.42) traz no caso de partículas de spin 0. Usaremos para isso as representações das matrizes β_μ dadas em (1.28).

Assim,

$$A = \begin{pmatrix} m & ip_1 & ip_2 & ip_3 & \omega_n - i\mu \\ ip_1 & m & 0 & 0 & 0 \\ ip_2 & 0 & m & 0 & 0 \\ ip_3 & 0 & 0 & m & 0 \\ -(\omega_n - i\mu) & 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

cujo determinante resulta ser

$$\det A = m^3 \left(\omega^2 + (\omega_n - i\mu)^2\right), \tag{3.45}$$

em que denotamos

$$\omega^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \tag{3.46}$$

e tomando o logarítmo de (3.45), obtemos

$$\ln \det A = 3 \ln m + \ln \left(\omega^2 + (\omega_n - i\mu)^2\right), \tag{3.47}$$

o segundo termo pode ser transformado com o auxílio de (3.16): $\omega_n = -\omega_{-n}$, em

$$\ln \det A = 3 \ln m + \frac{1}{2} \ln \left(\omega^2 + (\omega_n - \mu)^2\right) + \frac{1}{2} \ln \left(\omega^2 + (\omega_n + \mu)^2\right), \tag{3.48}$$

como o cálculo do terceiro termo em (3.42) é feito sobre uma soma, é preciso fazer uso da seguinte fórmula [45]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left(n^2 + \frac{c^2}{\pi^2}\right) = 2c + 2 \ln \left(1 - e^{-2c}\right), \tag{3.49}$$

da qual obtemos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \left(\omega^2 + \omega_n^2\right) = \beta\omega + 2 \ln \left(1 - e^{-\omega\beta}\right) + 2 \ln \left(\frac{2\pi}{\beta}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty}, \tag{3.50}$$

esta última pode ser facilmente generalizada para o cálculo de (3.48) fazendo $\omega_n \longrightarrow \omega_n \pm \mu$. Assim temos

$$\begin{aligned}\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \det A &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\beta\omega + \ln\left(1 - e^{-(\omega-\mu)\beta}\right) + \ln\left(1 - e^{-(\omega+\mu)\beta}\right)\right] \\ &\quad -2\ln\beta \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} + (3\ln m + 2\ln 2\pi) \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3},\end{aligned} \tag{3.51}$$

cujo último termo é uma quantidade infinita, contudo, ela não tem dependência da temperatura β e pode ser omitido por não apresentar interesse termodinâmico.

Substituindo (3.51) em (3.42) se tem

$$\begin{aligned}\ln Z_0(\mu,\beta) &= \ln N(\beta) + 2V\ln\beta \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} + \beta V \overline{\psi}_0 (\mu\beta_4 + m)\psi_0 \\ &\quad -V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\beta\omega + \ln\left(1 - e^{-(\omega-\mu)\beta}\right) + \ln\left(1 - e^{-(\omega+\mu)\beta}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.52}$$

este resultado mostra explicitamente a existência de partículas com cargas opostas: partículas $(+\mu)$ e anti-partículas $(-\mu)$. A constante $N(\beta)$ é ajustada a fim de cancelar o termo divergente

$$\ln N(\beta) = -2V\ln\beta \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{3.53}$$

Notamos então que é justificada a inclusão da constante $N(\beta)$ na definição da FP. O termo proporcional a $\beta\omega$ resulta na energia do vácuo que, como era de se esperar, aparece quando a integração funcional é usada[7]. Temos finalmente

$$\ln Z_0(\mu,\beta) = \beta V \overline{\psi}_0 (\mu\beta_4 + m)\psi_0$$

[7]Esta energia do vácuo desaparece quando usamos o ordenamento normal dos operadores de criação e aniquilação no formalismo canônico. Já na integração funcional este ordenamento normal não acontece.

$$-V\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left[\beta\omega+\ln\left(1-e^{-(\omega-\mu)\beta}\right)+\ln\left(1-e^{-(\omega+\mu)\beta}\right)\right], \tag{3.54}$$

que coincide com o resultado obtido quando é usada a teoria de KGF [26], [27].

3.2.1 O Modo zero

Analisaremos agora a contribuição que se obtém do primeiro termo em (3.54). Como já mencionamos em (3.38) e (3.39) $\psi_0, \overline{\psi}_0$ não dependem de $(\omega_n, \mathbf{p})$, portanto, a equação de DKP para estes no espaço dos momentos se reduz a

$$(\mu\beta_4+m)\,\psi_0=0, \tag{3.55}$$

que é um sistema de equações homogêneas e tem solução desde que seja satisfeita a relação

$$\det\left(\mu\beta_4+m\right)=0, \tag{3.56}$$

o que implica em

$$\mu=\pm m, \tag{3.57}$$

O próximo passo é calcular o vetor ψ_0, supondo que ele tenha a seguinte forma

$$\psi_0=\begin{pmatrix} a\\ c_1\\ c_2\\ c_3\\ b\end{pmatrix}, \tag{3.58}$$

é possível resolver a equação (3.55), obtendo

$$c_i=0, \quad b=-\frac{im}{\mu}a \quad \text{ou} \quad b=-\frac{i\mu}{m}a, \tag{3.59}$$

assim, temos a contribuição do modo zero, Z_{zero} dada por (3.43), é

$$Z_{\text{zero}} = \beta V \left(\mu^2 - m^2\right) \zeta^2, \tag{3.60}$$

em que $\zeta^2 = \frac{|b|^2}{m}$, é um parâmetro real arbitrário. A expressão completa para a função de partição no caso escalar é dada por

$$\begin{aligned} \ln Z_0 (\mu, \beta) &= \beta V \left(\mu^2 - m^2\right) \zeta^2 \\ &\quad - V \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\beta\omega + \ln\left(1 - e^{-(\omega-\mu)\beta}\right) + \ln\left(1 - e^{-(\omega+\mu)\beta}\right)\right], \end{aligned} \tag{3.61}$$

esta expressão reproduz a função de partição para partículas escalares carregadas, já antes obtida em [26]. Por outro lado, a integral que aparece em (3.61) é convergente somente para o caso $|\mu| \leq m$, que é na verdade uma restrição sobre o potencial químico no caso de partículas bosónicas[8]. O parâmetro ζ que aparece no resultado final para a função de partição é um parâmetro livre que em princípio está relacionado com a carga das partículas condensadas.

Para um β e μ fixos temos que $\ln Z_0$ tem um extremo com relação à variação do parâmetro livre ζ, ou seja

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \zeta} = 2\beta V \left(\mu^2 - m^2\right) \zeta = 0, \tag{3.62}$$

analisando este último resultado vemos que para $\mu \neq m$ temos $\zeta = 0$, isto implica que a contribuição do modo zero para Z_{zero} é nula. Já quando $\mu = m$ o parâmetro ζ não é determinado pelo princípio variacional (3.62) e uma outra análise deve ser adotada para o seu cálculo.

---

[8]Veja-se o comentário após (3.8).

3.2.2 A Condensação de Bose-Einstein

Para finalizar, damos algumas propriedades da CBE no caso de um gás Bosônico relativístico. Como já mencionamos antes no caso em que $|\mu| < m$, a contribuição do modo zero é nula, portanto, a densidade de carga é definida da maneira usual como

$$\rho = \frac{1}{\beta V}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}\right) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{e^{(\omega-\mu)\beta}-1} - \frac{1}{e^{(\omega+\mu)\beta}-1}\right), \tag{3.63}$$

quantidade esta positiva definida, seja no caso de termos partículas ($\mu > 0$) ou antipartículas ($\mu < 0$). Na verdade a relação (3.63) permite conhecer μ através de ρ e T. Numa certa temperatura, chamada de temperatura crítica T_C, as partículas começam a passar para um estado com $\mathbf{p} = 0$, mas se a temperatura seguir caindo pode acontecer o fato de todas as partículas estarem naquele estado formando um condensado. Em termos do potencial químico μ todas as partículas estão fora do condensado quando $|\mu| < m$, mas quando a temperatura cair até T_C pode-se chegar ao valor $|\mu| = m$; neste caso as partículas começam a passar para o estado de condensação. Assim, na região $T \geq T_C \gg m$ podemos escrever

$$|\rho| \approx \frac{1}{3} m T^2, \tag{3.64}$$

mas quando o potencial químico alcançar $|\mu| = m$ e a temperatura seguir caindo abaixo de T_C, a densidade de carga estaria dada por

$$\rho = \frac{1}{\beta V}\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}\right)_{\mu=m} = \rho_0 + \rho^*\left(\beta, \mu = m\right), \tag{3.65}$$

em que $\rho_0 = 2m\zeta^2$ é a contrtibuição do condensado, ou seja, representa a quantidade de partículas que já passaram ao estado com $\mathbf{p} = 0$ (Modo zero), em que ρ^* representa a quantidade de partículas que ainda não passaram para o estado de condensação, e no caso, seriam excitações térmicas.

À temperatura crítica T_C, em que a CBE ocorre e que corresponde ao valor $|\mu| = m$, pode ser determinada implicitamente pela equação

$$\rho = \rho^* \left(\beta_C, \mu = m\right), \tag{3.66}$$

o que implica em

$$T_C = \left(\frac{3\,|\rho|}{m}\right)^{1/2}. \tag{3.67}$$

Para temperaturas $T < T_C$, (3.65) é uma equação para a densidade de carga $\rho - \rho_0$ no caso de $\mathbf{p} \neq 0$, ou seja

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{3} m T^2, \tag{3.68}$$

dessa forma a densidade de carga no estado fundamental $\mathbf{p} = 0$, é dado por

$$\rho_0 = \rho \left(1 - \left[\frac{T}{T_C}\right]^2\right). \tag{3.69}$$

A expressão (3.67) nos permite conhecer a condição necessária para que quaisquer gás ideal bosônico de massa m condense a temperaturas relativísticas, ou seja quando $\rho \gg m^3$.

3.3 Caso Vetorial. Spin 1.

O setor vetorial (spin 1) da teoria de DKP será analisada a seguir. Para isso usamos a representação 10×10 dada em (1.30). A matriz A (3.41) neste caso resulta ser

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_n' & 0 & 0 & -ip_1 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_n' & 0 & -ip_2 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_n' & -ip_3 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & -ip_3 & ip_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 & ip_3 & 0 & -ip_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & -ip_2 & ip_1 & 0 & 0 \\ -\omega_n' & 0 & 0 & 0 & ip_3 & -ip_2 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_n' & 0 & -ip_3 & 0 & ip_1 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_n' & ip_2 & -ip_1 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ -ip_1 & -ip_2 & -ip_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \tag{3.70}$$

em que $\omega_n' = \omega_n - i\mu$. Assim, o determinante é dado por

$$\det A = m^4 \left(\omega^2 + (\omega_n - i\mu)^2\right)^3, \tag{3.71}$$

sendo que $\omega^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$. Tomando o logarítmo de (3.71) se tem

$$\ln \det A = 4 \ln m + 3 \ln \left(\omega^2 + (\omega_n - i\mu)^2\right), \tag{3.72}$$

seguindo as mesmas motivações que em (3.48) escrevemos também

$$\ln \det A = 4 \ln m + \frac{3}{2} \ln \left(\omega^2 + (\omega_n - \mu)^2\right) + \frac{3}{2} \ln \left(\omega^2 + (\omega_n + \mu)^2\right). \tag{3.73}$$

Como a expressão para a função de partição Z_0 contém uma soma para o termo (3.73), devemos fazer uso das relações (3.49) e (3.50). Assim, após algumas operações temos

$$\sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \det A \;=\; 3 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[\omega\beta + \ln\left(1 - e^{-(\omega-\mu)\beta}\right) + \ln\left(1 - e^{-(\omega+\mu)\beta}\right)\right]$$

$$-6\ln\beta\sum_n\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}+(4\ln m+6\ln 2\pi)\sum_n\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}.$$

Notemos primeiro que o último termo é divergente, mas não depende da temperatura e, por tanto, não tem interesse termodinâmico o que permite escrever a função de partição Z_0 (3.42) como

$$\begin{aligned}\ln Z_0 &= \ln N(\beta)+\beta V\overline{\psi}_0(\mu\beta_4+m)\psi_0+6\ln\beta\sum_n\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\\&-3V\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left[\omega\beta+\ln\left(1-e^{-(\omega-\mu)\beta}\right)+\ln\left(1-e^{-(\omega+\mu)\beta}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.74}$$

similarmente, como no caso escalar, devemos escolher a constante $N(\beta)$ de modo tal que cancele o terceiro termo infinito na FP, então, temos

$$\ln N(\beta)=-6\ln\beta\sum_n\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \tag{3.75}$$

Finalmente, a FP para o caso de partículas vetoriais carregadas é dada por

$$\begin{aligned}\ln Z_0 &= \beta V\overline{\psi}_0(\mu\beta_4+m)\psi_0\\&-3V\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left[\omega\beta+\ln\left(1-e^{-(\omega-\mu)\beta}\right)+\ln\left(1-e^{-(\omega+\mu)\beta}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.76}$$

cujo primeiro termo desta expressão representa a contribuição do modo zero, Z_{zero}, a FP. A diferença com (3.54) esta no fator 3 que aparece em (3.76), que está relacionado ao número de graus de liberdade de um campo vetorial massivo.

3.3.1 O Modo zero

Em forma análoga à realizada para o caso escalar, procedemos o estudo do modo zero da FP dado pelo primeiro têrmo em (3.76). Devemos lembrar que ψ_0 $\left(\overline{\psi}_0\right)$

não dependem de $(\omega_n, \mathbf{p})$ portanto, a equação que elas satisfazem é dada por

$$(\mu\beta_4 + m)\,\psi_0 = 0. \tag{3.77}$$

Esta equação tem soluções não triviais no caso em que o determinante seja igual a zero, isto é, que o potencial químico satisfaça a mesma condição que se tem em (3.57).

A seguir, calculamos a solução ψ_0, supondo que ela deve ter a seguinte forma

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \end{pmatrix}. \tag{3.78}$$

Levando em conta a representação (1.30) para β_4, podemos resolver a equação (3.77) e , assim, obtemos

$$c_1 = \frac{im}{\mu}c_7, \quad c_2 = \frac{im}{\mu}c_8, \quad c_3 = \frac{im}{\mu}c_9, \quad c_4 = c_5 = c_6 = c_{10} = 0, \tag{3.79}$$

com isto, a contribuição do modo zero para $\mu \neq m$, no caso vetorial é dado por

$$Z_{\text{zero}} = \beta V \overline{\psi}_0\,(\mu\beta_4 + m)\,\psi_0 = \beta V\left(\mu^2 - m^2\right)\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right), \tag{3.80}$$

onde

$$\xi_1^2 = \frac{m}{\mu^2}\left|c_1\right|^2, \quad \xi_2^2 = \frac{m}{\mu^2}\left|c_2\right|^2, \quad \xi_3^2 = \frac{m}{\mu^2}\left|c_3\right|^2. \tag{3.81}$$

A FP total que considera o modo zero, finalmente, é

$$\begin{aligned}\ln Z_0 &= \beta V\left(\mu^2 - m^2\right)\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2\right) \\ &-3V\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\left[\omega\beta + \ln\left(1 - e^{-(\omega-\mu)\beta}\right) + \ln\left(1 - e^{-(\omega+\mu)\beta}\right)\right],\end{aligned} \tag{3.82}$$

desta última expressão não é difícil concluir que cada um dos graus de liberdade presentes tem uma contribuição idêntica numa temperatura crítica.

4. Equivalência

4.1 Prova da Equivalência

A equivalência das teorias DKP e KGF tem sido estudada e questionada por muitos anos, no entanto trabalhos recentes [9] mostram que à temperatura zero as duas teorias coincidem. Vale lembrar que a prova foi realizada para os elementos da matriz S, na camada de massa, para partículas escalares carregadas interagindo com um campo EM quantizado e campos de Yang Mills, assim como, para a função de Green com fótons externos fora da camada de massa. O nosso objetivo é mostrar que a equivalência é mantida inclusive quando se tem efeitos de temperatura, ou seja, à temperatura diferente de zero. Para isso usamos os métodos da integração funcional na Teoria Quântica de Campos à Temperatura Finita para escrever a FP no cálculo da função de Green na teoria DKP, em seguida, usando a forma física fazemos a integração nas componentes do campo, o que nos permite obter a função de Green para o campo de KGF.

A FP para a teoria DKP na presença de fontes é dada por

$$\begin{aligned} Z_{DKP}[J,\overline{J},J_\mu] &= Z_0 \int_\beta DA_\mu D\psi D\overline{\psi} \exp\left\{ \int_\beta d^4x \left[\overline{\psi}\left(\beta_\mu \mathcal{D}_\mu + m\right)\psi + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{2\alpha}\left(\partial_\mu A_\mu\right)^2 + J_\mu A_\mu + \overline{J}\psi + \overline{\psi}J \right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde a FP é escrita num certo α-gauge. Aqui usamos também a notação (3.11), além disso, devido à presença do potencial químico μ se tem

$$\mathcal{D}_\mu \psi = \partial^*_\mu \psi - ieA_\mu, \quad \partial^*_4 = \partial_4 + \mu, \tag{4.2}$$

e Z_0 é definida como

$$Z_0 = Z_{DKP}[0,0,0]. \tag{4.3}$$

Os campos DKP $\psi, \overline{\psi}$ e o campo EM A_μ, à temperatura diferente de zero, resultam ser periódicos como em (3.12), restringindo os nossos limites de integração

$$\overline{\psi}(\mathbf{x},0) = \overline{\psi}(\mathbf{x},\beta), \quad \psi(\mathbf{x},0) = \psi(\mathbf{x},\beta), \quad A_\mu(\mathbf{x},0) = A_\mu(\mathbf{x},\beta). \tag{4.4}$$

Para calcular a integral (4.1)[1], agrupamos de forma conveniente a parte exponencial

$$\begin{aligned} Z_{DKP} &= Z_0 \int_\beta DA_\mu D\psi D\overline{\psi} \exp\left\{ \int_\beta d^4x \left[\overline{\psi}\left(\left(\beta_\mu \mathcal{D}_\mu + m\right)\psi + J\right) + \frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{2\alpha}\left(\partial_\mu A_\mu\right)^2 + J_\mu A_\mu + \overline{J}\psi \right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

e em seguida integramos em $\overline{\psi}$

$$\begin{aligned} Z_{DKP} &= Z_0 \int_\beta DA_\mu D\psi \delta\left(\left(\beta_\mu \mathcal{D}_\mu + m\right)\psi + J\right) \times \\ &\exp\left\{ \int_\beta d^4x \left(\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha}\left(\partial_\mu A_\mu\right)^2 + J_\mu A_\mu + \overline{J}\psi \right) \right\}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

usando as propriedades da função δ, semelhantes a (3.27),

$$\delta\left(\left(\beta_\mu \mathcal{D}_\mu + m\right)\psi + J\right) = \frac{1}{\det\left(\beta_\mu \mathcal{D}_\mu + m\right)} \delta\left(\psi + \left(\beta_\mu \mathcal{D}_\mu + m\right)^{-1} J\right), \tag{4.7}$$

[1] Daqui em diante não escreveremos de forma explícita as fontes na FP, ou seja, $Z_{DKP}[J, \overline{J}, J_\mu] \equiv Z_{DKP}$.

obtemos para (4.6), após a integração em ψ, a expressão

$$\begin{aligned} Z_{DKP} &= Z_0 \int_\beta DA_\mu \left(\det\left(\beta_\mu \mathcal{D}_\mu + m\right)\right)^{-1} \exp\left\{ \int_\beta d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\alpha} \left(\partial_\mu A_\mu\right)^2 \right.\right. \\ &\left.\left. + J_\mu A_\mu \right) \right\} \exp\left\{ - \int_\beta d^4x d^4y \overline{J}(x) \left(\beta_\mu \mathcal{D}_\mu + m\right)^{-1} \delta^4(x-y) J(y) \right\}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

este resultado permite concluir que

$$S(x,y,A) = \left(\beta_\mu \mathcal{D}_\mu + m\right)^{-1} \delta^4(x-y), \tag{4.9}$$

é a função de Green do campo DKP num campo externo $A_\mu(x)$.

Usando propriedades para o determinante de uma matriz podemos escrever a seguinte relação[2]

$$\det\left(\beta_\mu \mathcal{D}_\mu + m\right)^{-1} = \det S(x,y,A) = \exp\left\{ \mathrm{Tr} \ln S(x,y,A) \right\}, \tag{4.10}$$

levando isto em consideração temos para (4.8)

$$\begin{aligned} Z_{DKP} &= Z_0 \int_\beta DA_\mu \exp\left\{ \int_\beta d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2\alpha} \left(\partial_\mu A_\mu\right)^2 + J_\mu A_\mu \right.\right. \\ &\left.\left. + \mathrm{Tr} \ln S(x,y,A) \right) \right\} \exp\left\{ - \int_\beta d^4x d^4y \overline{J}(x) S(x,y,A) J(y) \right\}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Na teoria de perturbações o termo no exponente proporcional ao Trln $S(x,y,A)$ considera todas os diagramas do vácuo. Vejamos de forma mas detalhada o termo (4.10) e para isto, usamos a forma física do campo DKP (2.5), (2.7)

$$\begin{aligned} \det S(x,y,A) &= \int_\beta D\varphi D\varphi^* D\varphi_k D\varphi_k^* D\varphi_4 D\varphi_4^* \exp\left\{ \int_\beta d^4x \left(\varphi_k^* \mathcal{D}_k \varphi - \varphi_4^* \mathcal{D}_4 \varphi \right.\right. \\ &\left.\left. - \varphi^* \mathcal{D}_4 \varphi_4 - \varphi^* \mathcal{D}_k \varphi_k + m^2 \varphi^* \varphi - \varphi_k^* \varphi_k + \varphi_4^* \varphi_4 \right) \right\}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

[2]Lembremos que para qualquer matriz C se tem: $(\det C)^{-1} = \det C^{-1}$.

primeiro, integramos a última expressão nos campos φ_4^* e φ_4, obtemos

$$\begin{aligned}\det S(x,y,A) &= \int_\beta D\varphi D\varphi^* D\varphi_k D\varphi_k^* \exp\left\{\int_\beta d^4x \left(\varphi_k^* \mathcal{D}_k \varphi - \varphi^* \mathcal{D}_4^2 \varphi_4 - \varphi^* \mathcal{D}_k \varphi_k \right.\right. \\ &\left.\left. + m^2 \varphi^* \varphi - \varphi_k^* \varphi_k \right)\right\}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

finalmente, após a integração nos campos φ_k^* e φ_k se tem para (4.10)

$$\begin{aligned}\det S(x,y,A) &= \int_\beta D\varphi D\varphi^* \exp\left\{\int_\beta d^4x \varphi^* \left(-\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\mu + m^2\right)\varphi\right\} \\ &= \frac{1}{\det\left(-\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\mu + m^2\right)} = \det G(x,y,A), \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde

$$G(x,y,A) = \left(-\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\mu + m^2\right)^{-1} \delta^4(x-y), \tag{4.15}$$

é a função de Green do campo de KGF em presença de um campo externo A_μ. Assim, pode-se concluir das equações (4.12)-(4.15) que a função de Green para o fóton é idêntica nas teorias de DKP e KGF.

4.2 Polarização do Vácuo

Seguindo os métodos de QED escalar à temperatura zero para a teoria de KGF, é possível obter uma expressão para o tensor da polarização do vácuo $\Pi_{\mu\nu}^{KGF}$ a $T \neq 0$, desde que usemos a prescrição antes mencionada em (3.16)-(3.18). Com isto temos que à Temperatura Finita o tensor $\Pi_{\mu\nu}^{KGF}$, a um *loop*, é dado por

$$\Pi_{\mu\nu}^{KGF}(k) = \frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \sum_n \int d^3\mathbf{p} \left\{ \frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu}{(p^2+m^2)\left((p+k)^2+m^2\right)} - 2\frac{\delta_{\mu\nu}}{(p^2+m^2)} \right\}, \tag{4.16}$$

onde $p^2 = p_4^2 + \mathbf{p}^2$, $p_4 = 2\pi n/\beta$, $-\infty < n < \infty$. O termo proporcional a $\delta_{\mu\nu}$ é importante para provar que o tensor $\Pi_{\mu\nu}^{KGF}$ é transversal, ou seja, que se cumpra

$$k_\mu \Pi_{\mu\nu}^{KGF} = 0, \tag{4.17}$$

no entanto, este último termo não tem contribuição para $\Pi_{\mu\nu}^{KGF}$ após a renormalização[3].

O nosso objetivo é provar que, a um *loop*, o tensor de polarização do vácuo nas teorias de KGF e DKP coincidem também quando $T \neq 0$. Usando a teoria de DKP fazer o cálculo de $\Pi_{\mu\nu}^{DKP}$, temos então

$$\Pi_{\mu\nu}^{DKP}(k) = -\frac{e^2}{(2\pi)^2 \beta} \sum_n \int d^3\mathbf{p} \mathrm{Tr} \beta_\mu G\left(\widehat{p} + \widehat{k}\right) \beta_\nu G(\widehat{p}) \tag{4.18}$$

onde $G(\widehat{p})$ é propagador da teoria DKP livre, dado por (1.27). Substituindo os valores para o propagador, temos que (4.18) é dado por

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{DKP}(k) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^2 \beta} \sum_n \int d^3\mathbf{p} \mathrm{Tr} \left\{ \beta_\mu \left[\frac{\left(i\widehat{p} + i\widehat{k}\right)\left(i\widehat{p} + i\widehat{k} - m\right)}{(p+k)^2 + m^2} + 1 \right] \times \right. \\ & \left. \beta_\mu \left[\frac{i\widehat{p}\,(i\widehat{p} - m)}{p^2 + m^2} + 1 \right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

e usando as propriedades do Traço (1.4), esta expressão resulta em

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{DKP}(k) &= \frac{e^2}{(2\pi)^2 \beta} \sum_n \int d^3\mathbf{p} \left\{ \frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu}{(p^2+m^2)\left((p+k)^2 + m^2\right)} - \frac{\delta_{\mu\nu}}{(p^2+m^2)} \right. \\ & \left. - \frac{\delta_{\mu\nu}}{\left((p+k)^2 + m^2\right)} \right\}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

[3]É importante também mencionar que, no formalismo Hamiltoniano, este termo seria eliminado pelo ordenamento normal dos campos, eliminando as possíveis contribuições que provem do vácuo.

Não é difícil provar que os dois últimos termos proporcionais a $\delta_{\mu\nu}$ são iguais, para isto notemos que ao substituirmos $p \leftrightarrow (p+k)$ nestes termos, eles tornam-se idênticos um ao outro, e um fator 2 é obtido no termo proporcional a $\delta_{\mu\nu}$. Isto prova que, na aproximação a um *loop*, as teoria de KGF e DKP coincidem quando $T \neq 0$.

A seguir, realizamos o cálculo do tensor de polarização $\Pi_{\mu\nu}$ à Temperatura Finita. Sabemos que a $T=0$, o tensor $\Pi_{\mu\nu}$ é dado por

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\pi\left(k^2\right), \tag{4.21}$$

onde $\pi\left(k^2\right)$ é uma função escalar que depende de k^2, e (4.21) é tal que satisfaz a condição de transversalidade. Os efeitos da temperatura ocasionam uma correção na forma do tensor $\Pi_{\mu\nu}(k)$ que agora vai depender dos vetores k_μ, u_μ, sendo que u_μ é a velocidade do meio térmico ($u^2=1$).

A construção mais geral usando os vetores $g_{\mu\nu}, k_\mu, u_\mu$ que podem ser construídos e que satisfazem a condição $k_\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$, é dada por

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(k) &= \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)A_1 + \left(u_\mu u_\nu - \frac{k_\mu u_\nu (ku)}{k^2} - \frac{k_\nu u_\mu (ku)}{k^2} + \frac{k_\mu k_\nu (ku)^2}{k^4}\right)A_2 \\ &\equiv \Phi^1_{\mu\nu}A_1 + \Phi^2_{\mu\nu}A_2\end{aligned} \tag{4.22}$$

e podemos ver que a contribuição a mais no tensor de polarização é dado pelo segundo termo em (4.22), de forma que se tem

$$\lim_{\beta\to\infty} \Phi^2_{\mu\nu}A_2 = 0, \tag{4.23}$$

ou seja, este termo desaparece quando $T \to 0$ ($\beta \to \infty$).

Introduzimos agora as seguintes quantidades

$$a_1 \equiv \Pi_{\mu\mu}(k), \tag{4.24}$$

$$a_2 \equiv u_\mu \Pi_{\mu\nu}(k)\, u_\nu, \tag{4.25}$$

com ajuda de (4.22) realizamos as respectivas contrações que resultam em

$$a_1 \equiv \Pi_{\mu\mu}(k) = 3A_1 + \lambda A_2, \tag{4.26}$$

$$a_2 \equiv u_\mu \Pi_{\mu\nu}(k)\, u_\nu = \lambda A_1 + \lambda^2 A_2, \tag{4.27}$$

e introduzindo a notação

$$\lambda = \left(1 - \frac{(ku)^2}{k^2}\right), \tag{4.28}$$

desta forma, podemos expressar A_1 e A_2 em termos das outras quantidades

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 - \frac{1}{\lambda}a_2\right), \tag{4.29}$$

$$A_2 = \frac{1}{2\lambda}\left(-a_1 + \frac{3}{\lambda}a_2\right), \tag{4.30}$$

substituindo estas últimas expressões em (4.22), teríamos para o vetor de polarização

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{2}\Phi^1_{\mu\nu}\left(a_1 - \frac{1}{\lambda}a_2\right) + \frac{1}{2\lambda}\Phi^2_{\mu\nu}\left(-a_1 + \frac{3}{\lambda}a_2\right). \tag{4.31}$$

Fazemos a escolha de um referencial em repouso[4], neste caso a velocidade é dada por

$$u_\mu \equiv (0,0,0,1), \tag{4.32}$$

com isto (4.26)-(4.28) passam a ser

$$\lambda = \left(1 - \frac{k_4^2}{k^2}\right), \tag{4.33}$$

$$a_1 = \Pi_{\mu\mu} = 3A_1 + \left(1 - \frac{k_4^2}{k^2}\right)A_2, \tag{4.34}$$

$$a_2 = \Pi_{44} = \left(1 - \frac{k_4^2}{k^2}\right)A_1 + \left(1 - \frac{k_4^2}{k^2}\right)^2 A_2. \tag{4.35}$$

[4]Neste caso, o fluxo térmico do meio esta em repouso.

Separamos de forma conveniente as quantidades a_i $(i = 1,2)$, da seguinte maneira

$$a_i = a_i^R + a_i^\beta, \tag{4.36}$$

onde a_i^R é a parte que não depende da temperatura e precisa ser renormalizada, enquanto, que a_i^β depende de β. Podemos concluir que quando fizermos o limite $\beta \longrightarrow \infty$, ou seja, à temperatura zero, o termo que depende de β deverá ser cancelado

$$\lim_{\beta\to\infty} a_i^\beta = 0, \tag{4.37}$$

e substituindo (4.36) em (4.31) se tem

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{2}\Phi^1_{\mu\nu}\left(a_1^R + a_1^\beta - \frac{1}{\lambda}a_2^R - \frac{1}{\lambda}a_2^\beta\right) + \frac{1}{2\lambda}\Phi^2_{\mu\nu}\left(-a_1^R - a_1^\beta + \frac{3}{\lambda}a_2^R + \frac{3}{\lambda}a_2^\beta\right), \tag{4.38}$$

usando os limites (4.23) e (4.37) obtemos

$$a_2^R = \frac{\lambda}{3}a_1^R. \tag{4.39}$$

Por outro lado, o termo proporcional a $\Phi^1_{\mu\nu}$ no limite $\beta \longrightarrow \infty$ é diferente de zero e deve reproduzir o tensor de polarização da teoria de campos à $T = 0$, portanto

$$\lim_{\beta\to\infty} \Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{2}\Phi^1_{\mu\nu}\left(a_1^R - \frac{1}{\lambda}a_2^R\right) = \frac{1}{3}\Phi^1_{\mu\nu}a_1^R, \tag{4.40}$$

ou também

$$\lim_{\beta\to\infty} \Pi_{\mu\mu}(k) = a_1^R. \tag{4.41}$$

O cálculo das constantes a_i é feito com a ajuda da forma explícita para $\Pi_{\mu\nu}$ dada em (4.16) ou (4.20), ou seja

$$a_1 \;=\; \Pi_{\mu\mu}(k) = \frac{e^2}{(2\pi)^3\beta}\int d^3\mathbf{p}\sum_n \frac{(2p+k)^2}{(p^2+m^2)\left((p+k)^2+m^2\right)} \tag{4.42}$$

$$a_2 = \Pi_{44}(k) = \frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \int d^3\mathbf{p} \sum_n \frac{(2p_4 + k_4)^2}{(p^2+m^2)\left((p+k)^2+m^2\right)} \tag{4.43}$$

onde $p_4 = 2\pi n/\beta$.

Calculamos agora a expressão (4.42), para isto nota-se que o numerador pode ser escrito como

$$(2p+k)^2 = 2\left(p^2+m^2\right) + 2\left((p+k)^2+m^2\right) - \left(k^2+4m^2\right), \tag{4.44}$$

substituindo (4.44) em (4.42) temos para a_1

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \int d^3\mathbf{p} \sum_n \left\{ \frac{2}{(p+k)^2+m^2} + \frac{2}{p^2+m^2} \right. \\ &\left. - \frac{(k^2+4m^2)}{(p^2+m^2)\left((p+k)^2+m^2\right)} \right\}, \end{aligned} \tag{4.45}$$

levando em conta que os dois primeiros termos desaparecem com a renormalização, podemos escrever a_1 como

$$a_1 = -\frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \int d^3\mathbf{p} \sum_n \frac{(k^2+4m^2)}{(p^2+m^2)\left((p+k)^2+m^2\right)}, \tag{4.46}$$

agora, ao introduzir os parâmetros de Feynman para o denominador, segundo

$$\frac{1}{(p^2+m^2)\left((p+k)^2+m^2\right)} = \int_0^1 \frac{dx}{\left[(p^2+m^2)(1-x) + x\left((p+k)^2+m^2\right)\right]^2} \tag{4.47}$$

pode-se chegar a

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{e^2}{(2\pi)^3 \beta} \left(k^2+4m^2\right) \int d^3\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial m^2} \int_0^1 dx \sum_n \frac{1}{(p^2+m^2) + k^2 x(1-x)} \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \left(k^2+4m^2\right) \int d^3\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial m^2} \int_0^1 dx \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{p_4^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 + k^2 x(1-x)}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Neste momento é preciso realizar o cálculo da soma em n fazendo uso da seguinte fórmula

$$\frac{1}{\beta}\sum_{n} f\left(\omega_n, K\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega f\left(\omega, K\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} d\omega \frac{f\left(\omega, K\right) + f\left(-\omega, K\right)}{e^{-i\beta\omega} - 1}, \quad (4.49)$$

onde $\omega_n = 2\pi n/\beta$. Da última expressão é possível ver que somente o segundo termo tem dependência da temperatura (β), isto é, a contribuição a_1^R, ou seja, a parte que não depende da temperatura, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} a_1^R\left(k^2\right) &= \frac{e^2}{(2\pi)^3}\left(k^2 + 4m^2\right)\int d^3\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial m^2}\int_0^1 dx \frac{1}{2\pi}\times \\ &\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 + k^2 x\left(1-x\right)}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

e se usarmos a relação

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \quad (4.51)$$

temos

$$\begin{aligned} a_1^R\left(k^2\right) &= \frac{e^2}{(2\pi)^3}\left(k^2 + 4m^2\right)\int d^3\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial m^2}\int_0^1 dx \frac{1}{2\left[\mathbf{p}^2 + m^2 + k^2 x\left(1-x\right)\right]^{1/2}} \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^3}\left(k^2 + 4m^2\right)\frac{1}{2k}\int d^3\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial m^2}\int_0^1 dx \frac{1}{\left[\left(\frac{\mathbf{p}^2+m^2}{k^2}\right) + x - x^2\right]^{1/2}}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

e o cálculo da integral em x pode ser feito usando as tábuas matemáticas, o que leva a

$$a_1^R\left(k^2\right) = \frac{e^2}{(2\pi)^3}\left(k^2 + 4m^2\right)\frac{1}{2k}\int d^3\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial m^2}\left\{2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{\mathbf{p}^2+m^2}{k^2}\right)}}\right)\right\}$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^3}\left(k^2+4m^2\right)\int d^3\mathbf{p}\left(-\frac{1}{\left(\mathbf{p}^2+m^2\right)^{1/2}\left(k^2+4\left(\mathbf{p}^2+m^2\right)\right)}\right) \tag{4.53}$$

ou também

$$a_1^R\left(k^2\right) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{E}\frac{k^2+4m^2}{k^2+4E^2} \tag{4.54}$$

sendo

$$E = \left(\mathbf{p}^2+m^2\right)^{1/2} \tag{4.55}$$

Usando a seguinte prescrição para a renormalização de a_1^R

$$\tilde{a}_1^R\left(k^2\right) = a_1^R\left(k^2\right) - a_1^R(0) - k^2\frac{\partial}{\partial k^2}a_1^R(0) \tag{4.56}$$

temos

$$\tilde{a}_1^R\left(k^2\right) = -\frac{e^2k^4}{16\pi^2}\int\limits_{4m^2}^{\infty} dz^2\frac{\left(1-\frac{4m^2}{z^2}\right)^{3/2}}{z^2\left(z^2+k^2\right)}. \tag{4.57}$$

Com este resultado podemos determinar o valor da polarização do vácuo à temperatura zero, isto é, quando $\beta\to\infty$. Para isto, usamos a relação já encontrada anteriormente em (4.40)

$$\lim_{\beta\to\infty}\Pi_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{3}\Phi^1_{\mu\nu}a_1^R = -\frac{e^2}{48\pi^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)k^4\int\limits_{4m^2}^{\infty}dz^2\frac{\left(1-\frac{4m^2}{z^2}\right)^{3/2}}{z^2\left(z^2+k^2\right)}, \tag{4.58}$$

cujo coeficiente a_2^R, já renormalizado, pode ser obtido com auxilio da relação (4.39), isto é

$$\tilde{a}_2^R\left(k^2\right) = \frac{\lambda}{3}\tilde{a}_1^R\left(k^2\right) = \frac{e^2}{48\pi^2}\left(k_4^2-k^2\right)k^2\int\limits_{4m^2}^{\infty}dz^2\frac{\left(1-\frac{4m^2}{z^2}\right)^{3/2}}{z^2\left(z^2+k^2\right)} \tag{4.59}$$

A expressão a_1^β que depende da temperatura é calculada com ajuda do segundo termo da relação (4.49), desta forma temos

$$\begin{aligned} a_1^\beta &= \frac{e^2}{(2\pi)^3}\left(k^2+4m^2\right)\int d^3\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial m^2}\int_0^1 dx\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} d\omega\left(e^{-i\beta\omega}-1\right)^{-1}\times \\ & \frac{2}{\omega^2+\mathbf{p}^2+m^2+k^2x\left(1-x\right)}. \end{aligned} \tag{4.60}$$

5. Conclusões

Nesta Tese realizamos um estudo da Teoria de Campos à Temperatura Finita da Teoria de DKP. A abordagem via DKP apresenta algumas vantagens quando a interação é acionada, assim por exemplo, por ser uma teoria baseada numa equação de primeira ordem, ela não apresenta acoplamentos derivativos na interação.

Realizamos uma análise detalhada dos vínculos da teoria DKP para os setores de spin 0 e spin 1. Com a estrutura de vínculos conhecida, construímos a Função de Partição para, em seguida, estudar a condensação de Bose-Einstein. A teoria DKP apresenta um modo simples de obter as contribuições do modo zero, que é responsável pela CBE. Os resultados que aqui obtivemos estão em concordância com aqueles proporcionados pelas teorias de KGF e Proca.

Como já mencionamos anteriormente, o problema da equivalência é estudado à temperatura zero e as mesmas questões ainda precisam ser abordadas à temperatura diferente de zero. Nesse sentido, aqui fizemos um estudo do problema para o caso escalar e provamos que as funções de Green nas teorias de DKP e KGF são equivalentes [44]. A prova é realizada usando os métodos de integração funcional. Um dos processos estudados à Temperatura diferente de zero é a polarização do vácuo, ou seja, a contribuição ao propagador do fóton que vem da sua interação com uma partícula escalar carregada. No nível de um *loop*, comprovamos que o tensor de polarização $\Pi_{\mu\nu}$ calculado pelas teorias DKP e KGF são exatamente iguais. Aqui realizamos o cálculo do tensor de polarização, levando em conta a contribuição adicional devido aos efeitos da temperatura. Obtivémos a parte dependente da temperatura que resulta ser finita e não precisa de renormalização. Já o cálculo da parte que não depende de β precisa ser renormalizado e no limite de $\beta \longrightarrow \infty$ obtemos, como deveria ser, a polarização do vácuo à temperatura zero, já antes obtida em [4, 29]. A generalização da prova da equivalência para o setor de spin 1 , ou seja, campos vetoriais massivos carregados em interação com o campo eletromagnético pode também ser estudada na teoria DKP, ainda que de maneira formal devido ao fato da teoria de Proca não ser renormalizável.

Uma outra questão, também, interessante é a extensão da prova da equivalência para campos não abelianos que permitiria estudar campos do tipo de Yang-Mills com uma outra abordagem, no caso, a teoria DKP poderia trazer alguma informação adicional.

Um outro cálculo a ser realizado é a do vértice Γ_μ e o operador de massa Σ no nível de um *loop*, da mesma forma como a realizada em [29] à Temperatura zero, o que permitirá provar, através das identidade de Ward, a invariância de gauge da teoria DKP à Temperatura finita.

Da mesma maneira que se obteve os resultados para a condensação de Bose-Einstein no trabalho [43] tanto para partículas escalares, como para partículas com spin 1, pode-se agora realizar um estudo adicional dos efeitos da curvatura na CBE quando o campo DKP é acoplado minimamente, ao espaço-tempo de Riemann[9].

Existem também outras áreas em que a teoria DKP pode ser aplicada, como, por exemplo, na pseudomecânica, em que variáveis grassmanianas são introduzidas no nível da mecânica clássica [46, 48] para a descrição de spin. Neste sentido, alguns avanços têm sido feitos para a obtenção de um modelo pseudomecânico para a teoria DKP, tanto para o caso massivo como para o caso não massivo [49, 50], respectivamente.

Bibliografia

[1] G. Petiau, Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect **16** (1936).

[2] R. Y. Duffin, Phys. Rev. **54**, 1114 (1938).

[3] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. **A173**, 91 (1939).

[4] I. Akhiezer and V. B. Berestetski, *Quantum Electrodynamics*, 2nd ed. Inter., New York, 1965.

[5] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, North-Holland, 1956.

[6] T. Kinoshita, Prog. Teor Phys. **5**, 473 (1950).
T. Kinoshita and Y. Nambu, ibid. **5**, 749 (1950).

[7] R. A. Krajcik and M. M. Nieto, Am. J. Phys., **45**, 818 (1974).

[8] A. Wightman, *Aspects of Quantum Theory*, p95, Edited by A. Salam and E.P. Wigner, Cambridge, University Press (1972).

[9] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel, Theor. Math. Phys. **124**, 1234 (2000).

[10] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel, Phys. Lett. **A271** , 16 (2000).

[11] V. Gribov, Eur. Phys. J. **C10**, 71 (1999).

[12] I.V. Kanatchikov, hep-th/9911175.

[13] J.T. Lunardi, B.M. Pimentel and R.G. Teixeira, *Proceedings of Conference on Geometrical Aspects of Quantum Fields*, Londrina, Brazil, 17-20 Apr 2000. Disponível como gr-gc/9909033.

[14] V.M. Red´kov, quant-ph/9812007.

[15] A. Weldon, Phys. Rev **D26**, 1394 (1982).

[16] H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, *Thermo-Field Dynamics and Condensed States* (North Holland, Amsterdam, 1982).

[17] F. Donoghue, B.R. Holstein and R.W. Robinett, Phys. Rev. **D30**, 2561 (1984).

[18] J.Matzubara, Progr. Theor. Phys., **9**, (1953).

[19] E.S.Fradkin, Doklady Akad. Nauk, **98** (1954) 47; ibid **100**, 897 (1955).

[20] E.S. Fradkin, Soviet Phys. JETP, **29**, 259 (1955); ibid **2**, 361 (1956)

[21] E.S. Fradkin, Soviet Phys. JETP, **29**, 121 (1955); ibid **2**, 148 (1956).

[22] E.S. Fradkin, Soviet Phys. JETP, **36**, 912 (1959).

[23] E.S. Fradkin, Soviet Phys. JETP, **11**, 114 (1960).

[24] S. Weinberg, Phys. Rev. **D9**, 3357 (1974).

[25] L. Dolan and R. Jackiw, Phys. Rev. **D9**, 3320 (1974).

[26] J. I. Kapusta, Phys Rev. **D24**, 426 (1981).

[27] Claude W. Bernard, Phys. Rev. **D9**, 12, 3212 (1974) .

[28] V.Ya.Fainberg and B.M.Pimentel, Braz. J. Phys. **30**, 275 (2000).

[29] V.Ya.Fainberg, B.M.Pimentel and J.S.Valverde, Dispersion method in DKP theory, Proceedings of the International Meeting *Quantization Gauge Theories and Strings* dedicated to the Memory of E. S. Fradkin, Moscow, (2000), Vol II, p79 (edited by A. Semikhatov, M. Vasilied and V. Zaikin, Scientific World 2001).

[30] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira and J. S. Valverde, Phys. Lett. **268A**, 165 (2000).

[31] J.T. Lunardi, L.A. Manzoni, B.M. Pimentel and J.S. Valverde, Int. J. of Modern Phys. **A17**, 205 (2002).

[32] S. N. Bose, *Z. Phys.* **26**, 178 (1924).

[33] A. Einstein, *Sitz. Ber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* **22**, 261 (1924).

[34] *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. W. Snoke and S. Stringari, Cambridge University Press, 1995.

[35] K. Huang, *Statistical Mechanics*, 2^{th} Ed., John Wiley & Sons, New York, 1987.

[36] L.Deng, E. W. Hagley, J. Wen, *et al.*, Nature **398**, 218 (1999).

S. Inouye, A.P. Chikkatur, D.M. Stamper-Kurn, *et al.*, Science **285**, 571 (1999).

M. Kozuma, Y. Suzuki, Y. Torii, *et al.*, Science **287**, 2309 (1999).

S. Inouye, T. Pfau, S. Gupta, *et al.*, Nature **402**, 641 (1999).

[37] M.O. Mewes, M.R. Andrews, D.M. Kurn, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **78**, 582 (1997).

B.P. Anderson and M.A. Kasevich, Science **282**, 1686 (1998).

I. Bloch, T.W. Hänsch and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. **82**, 3008 (1999).

E.W. Hangley, L. Deng, M. Kozuma, *et al.*, Science **283**, 1706 (1999).

[38] V. S. Bagnato and D. Kleppner, Phys. Rev. **A44**, 7439 (1991).

A.S. Parkins and D.F. Walls, Phys. Rep. **303**, 1 (1998).

F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii and S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).

Z. Yang, Phys. Rev. **A59**, 4657 (1999).

[39] H. E. Haber and H. A. Weldon, Phys. Rev. Lett. **46**, 1497 (1981)

H. E. Haber and H. A. Weldon, Phys. Rev. **D 25**, 502 (1982).

[40] J. Bernstein and S. Dodelson, Phys. Rev. Lett. **66**, 683 (1991).

K.M. Benson, J. Bernstein and S. Dodelson, Phys. Rev. **D44**, 2480 (1991).

[41] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press, 1989.

[42] H.J. Rothe, *Lattice Gauge Theories: An Introduction*, World Scientific, Singapure (1996).

[43] R.Casana, V.Ya.Fainberg, B.M.Pimentel, J.S.Valverde, Phys. Lett. **A316,** 33 (2003).

[44] V.Ya.Fainberg, B.M.Pimentel, J.S.Valverde, hep-th/0309078, accepted to the Theor. Math. Phys.

[45] E. Elizalde, *Ten Physical Aplication of Spectral Zeta Functions*, Springer-Verlag Berlin, 1995.

[46] F.A. Berezin and M.S. Marinov; JETP Lett., **21**, 678 (1975).

[47] L. Brink *et al.*, Phys. Lett. **64B**, 435 (1976).

[48] L. Brink *et al.*, Nuclear Physics **B118**, 76 (1977).

[49] V.G Zima, J.S. Valverde, http://www.sbf1.if.usp.br/eventos/enfpc/xxiii/procs/res127/.

[50] R. Casana, B. M. Pimentel, J.S. Valverde and V.G Zima, em preparação.