
Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas

Folheações de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$ induzidas por 1-formas diferenciais

Fernando Rossales Castro

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Luciana de Fátima Martins

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual
Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Campus de São
José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em Matemática, na área
de Sistemas Dinâmicos e Singularidades.

São José do Rio Preto
Março - 2012

Castro, Fernando Rossales.

Folheações de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$ induzidas por 1-formas diferenciais / Fernando Rossales Castro. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2012.

67 f. : il. ; 30cm.

Orientadora: Luciana de Fátima Martins

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Topologia diferencial. 3. Folheações (Matemática). 4. Formas Diferenciais. 5. Campos de Planos. I. Martins, Luciana de Fátima. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 515 - 16

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Fernando Rossales Castro

Folheações de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$ induzidas por 1-formas diferenciais

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos e Singularidades, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora

Prof^a. Dr^a. Luciana de Fátima Martins

UNESP - São José do Rio Preto

Primeiro Examinador

Prof^a. Dr^a. Regilene Delazari dos Santos Oliveira

ICMC-USP - São Carlos

Segundo Examinador

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva

UNESP - São José do Rio Preto

SUPLENTES

Prof^a. Dr^a. Ana Claudia Nabarro

ICMC-USP - São Carlos

Prof^a. Dr^a. Luci Any Francisco Roberto

UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 02 de Março de 2012.

*Aos meus pais Celsior e Nilva
e à minha irmã Milena
dedico.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que puderam, de alguma forma, contribuir para que este trabalho pudesse ser realizado. Em especial agradeço:

À Luciana de Fátima Martins, pelo essencial e excelente trabalho de orientação, pela enorme receptividade e confiança, pelos conselhos sensatos e, inerente à nossa convivência, pelo amadurecimento matemático que tive.

À minha família, pelo apoio incondicional desde o dia em que iniciei meus estudos, me incentivando em todas as minhas decisões, mesmo as mais difíceis. Sobretudo, agradeço aos meus pais, pelo carinho, apoio e paciência.

A todos os meus amigos que estiveram envolvidos comigo durante este trabalho, em especial ao Diego e ao Kleyton, irmãos que eu escolhi. Agradeço, também, aos colegas da pós graduação cujos nomes não ousou dizer para não esquecer de ninguém.

À Miryah Maia, amiga e companheira desde meu primeiro ano de graduação. Todas as alegrias e tristezas me impulsionaram e me fortaleceram para terminar este trabalho.

À Capes, pelo suporte financeiro.

“Qualquer pessoa que se envolve seriamente no trabalho científico acaba convencida de que existe um espírito que se manifesta nas leis do universo - um espírito vastamente superior ao espírito humano, em face do qual nós, com nossos modestos poderes, temos de nos sentir humildes. Desse modo, a pesquisa científica leva a um sentimento religioso bem especial, que é, de fato, muito diferente da religiosidade de uma pessoa mais ingênua.”

Albert Einstein - carta a uma criança da sexta série, Phyllis Wright, quando questionado se cientistas rezavam, em 24 de Janeiro de 1936.

Resumo

Neste trabalho são abordados aspectos da teoria das folheações de $\mathbb{R}^3$, em particular, folheações definidas por formas diferenciais de grau 1. Uma folheações de $\mathbb{R}^3$ pode ser vista como a aglomeração de superfícies disjuntas duas a duas e de dimensões um ou dois. Quando obtida por uma única forma diferencial de grau 1 as folhas da folheação são superfícies de dimensões dois.

O principal objetivo desta dissertação é verificar condições que uma 1-forma diferencial deve satisfazer para induzir uma folheação de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$, o que é dado pelo Teorema de Frobenius. Quando uma tal 1-forma diferencial possui um tipo especial de singularidade (chamada “centro”), a abordagem ganha relevância, uma vez que as folhas da folheação induzida pela 1-forma são difeomorfas à esfera S^2 .

Palavras Chave: Folheações, Formas Diferenciais, Campos de Planos.

Abstract

This work aims to present aspects of the theory of foliations of $\mathbb{R}^3$, in particular, foliations defined by differential forms of degree 1. A foliation of $\mathbb{R}^3$ can be viewed as the agglomeration of two by two disjoint surfaces and of one or two dimensions. If obtained by a single differential form of degree 1 the leaves of the foliation are surfaces of dimension two.

The aim of this work is analyze conditions that a 1-differential forms must satisfy to induce a foliation of the dimension 2 of $\mathbb{R}^3$, which is given by the Theorem Frobenius. When the 1-differential form has a special type of singularity (called “center”), the approach has a particular relevancy, since the leaves of the foliation induced by 1-differential form are diffeomorphic to the sphere S^2 .

Key Words: Foliations, Differential Form, Plane Distribution.

Lista de Figuras

1.1	Carta local $(V, \mathbf{x})$ em uma superfície M	2
1.2	Superfície de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$	3
2.1	Pullback de ω por ψ	19
3.1	Folheação de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$	39
3.2	Folheação do aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ por aplicações distinguidas.	42
3.3	Folheação de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ induzida por $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 - x_3 dx_3$	45
3.4	Superfícies sem campo de vetores contínuo tangente.	46
3.5	Folheação definida por $\eta = x_2 dx_1 - 2x_1 dx_2$	56

Sumário

Introdução	xi
1 Superfícies Diferenciáveis, Campos de Vetores e Colchete de Lie	1
1.1 Superfícies diferenciáveis	1
1.2 Campos de vetores	8
1.3 Colchete de Lie	11
2 Formas Diferenciais	13
2.1 Funcional linear e o espaço dual	13
2.2 1-Formas diferenciais	14
2.3 Aplicações multilineares	20
2.4 Produto exterior de funcionais lineares	25
2.5 Formas diferenciais de grau superior	27
2.6 Formas diferenciais em superfícies	30
2.7 Diferencial exterior	33
3 Folheações, Formas Diferenciais e Campos de Planos	38
3.1 Folheações	38
3.2 Formas diferenciais, campos de 2-planos e folheações	44
3.3 O Teorema de Frobenius	49
3.4 Estrutura topológica das folhas de ω na vizinhança de uma singularidade .	56
Referências Bibliográficas	64
Índice Remissivo	65

Introdução

A teoria das folheações é um ramo de estudos recente na matemática. Seus primeiros estudos datam de meados de 1940 com C. Ehresmann e G. Reeb, mas foi ganhando força na área de sistemas dinâmicos, principalmente por suscitar a compreensão de problemas relativos ao estudo das soluções de equações diferenciais ordinárias holomorfas (analíticas) no campo complexo. A ideia de folheação corresponde à decomposição de uma variedade na união de subvariedades conexas disjuntas e de mesmas dimensões chamadas folhas. Estas, por sua vez, se aglomeram localmente tais como as folhas de um livro fechado no caso da dimensão ser igual a 2. Nesta dissertação, um dos objetivos é apresentar estes conceitos num espaço de simples visualização como é o caso de $\mathbb{R}^3$ e, fazendo uso de resultados importantes desta teoria, mostrar a relação existente entre folheações e formas diferenciais de grau 1. Em [11] é feito um estudo análogo, porém para folheações do plano.

Mesmo em $\mathbb{R}^3$ ou em $\mathbb{R}^2$, a área de estudo voltada para folheações é um tema relevante de pesquisa atual. O principal objetivo destas notas é o estudo de folheações de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$ induzidas por 1-formas diferenciais. Assim, no *Capítulo 1* apresentamos os conceitos preliminares que suportam o estudo de folheações tais como superfícies diferenciáveis e campos de vetores. Abordamos também a definição de colchete de Lie e suas principais propriedades a fim de fundamentar os pré-requisitos necessários à compreensão especificamente do Teorema de Frobenius, o qual se destaca por sua importância no nosso contexto.

No *Capítulo 2* discorremos sobre os conceitos de formas diferenciais e seus resultado fundamentais. Podemos dizer que as formas diferenciais são generalizações de expressões bem conhecidas como $Pdx + Qdy + Rdz$ e $Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$. Estas funções contendo integrandos, de linha ou de superfície, representam o trabalho feito ao se mover um objeto ao longo de uma curva em um campo de força ou o fluxo de um campo vetorial através de uma superfície. Uma forma diferencial ω de grau r (r -forma), definida em um conjunto aberto do espaço n -dimensional $\mathbb{R}^n$ ($r \leq n$) (coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_n$), é uma expressão da forma

$$\sum a_{i_1, i_2, \dots, i_r} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_r},$$

onde os coeficientes a_μ são funções diferenciáveis definidas em $\mathbb{R}^n$, e onde os diferenciais dx_ν são símbolos associados às coordenadas x_ν que são, na verdade, funcionais lineares que compõem a base do espaço dual $(\mathbb{R}^n)^*$, para $\mu, \nu \in \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ com μ uma composição de r destes elementos.

Uma regra básica ao se trabalhar com multiplicação de funcionais e que é desenvolvida nesse capítulo é a ideia de antissimetria: $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ (aqui, o produto entre eles recebe o nome de *exterior*). Em particular, tem-se $dx_i \wedge dx_i = 0$ o que faz com que a aparência da matriz jacobiana da aplicação seja simplificada: por exemplo, se x e y são funções de u e v , então $dx \wedge dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = 0 = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv$. Em consonância com isto as funções a_μ também são, geralmente, tomadas antissimétricas em seus índices, pois no exemplo acima $Ady \wedge dz + \dots$ significaria reescrevê-lo como $\frac{1}{2Ady \wedge dz} - \frac{1}{2Adz \wedge dy} + \dots$.

Ao fim desse capítulo é discutida a diferencial exterior de uma r -forma diferenciável. Apesar deste não ser o foco do trabalho, ele é um conceito importante utilizado no capítulo seguinte e destaca-se por sua influência, uma vez que resume vários teoremas do Cálculo tais como os conhecidos teoremas de Green, de Gauss, de Stokes entre outros.

Começamos a trabalhar com folheações propriamente ditas no *Capítulo 3*. Sua definição (*Seção 3.1*) pode ser encontrada de várias maneiras segundo cada autor. Aqui consideramos duas definições alternativas sendo que uma delas remete à *Forma Local das Submersões*. A fim de evitar dúvidas, provamos a equivalência entre as definições.

Uma folheação é definida basicamente como uma família específica de cartas locais. Estas cartas podem ser pensadas como sendo uma retificação local da folheação, semelhante ao Teorema do Fluxo Tubular (caixa de fluxo) associado a campos de vetores em $\mathbb{R}^3$. Aproveitando este teorema, salientamos nesse instante que é possível fazer uma analogia entre as folhas de uma folheação de dimensão 1 e a teoria de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Entretanto, neste texto estamos especialmente interessados em folheação de dimensão 2, que são como planos difeomorficamente modificados.

Ao começar a tratar da relação existente entre folheações de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$ e 1-formas diferenciais, (*Seção 3.2*), provamos que quando uma 1-forma diferencial ω sem *singularidades* é *fechada*, isto é, quando sua diferencial satisfaz $d\omega = 0$, ela induz uma folheação de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$. Mas e se ω não é fechada?

Na versão do Teorema de Frobenius para 1-formas diferenciais (*Teorema 3.3.5*) vimos outra hipótese que acarreta na indução de uma folheação por uma 1-forma diferencial. Porém para compreendê-lo precisamos primeiramente fixar alguns pré-requisitos, o que é feito ainda na *Seção 3.2*. Por exemplo, definimos campo de 2-planos, que nada mais é do que uma aplicação que associa a cada ponto do $\mathbb{R}^3$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2, e vimos suas principais propriedades. Por exemplo, vimos que uma 1-forma

diferencial em $\mathbb{R}^3$, sem singularidades no seu domínio, define um campo de 2-planos (*Proposição 3.2.3*) e que toda folheação de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$ também define um campo de 2-planos que é tangente às folhas da folheação (*Proposição 3.2.4*). A partir disto nos deparamos com a seguinte questão: quando um campo de 2-planos define uma folheação de dimensão 2? Com a resposta a esta pergunta podemos concluir quando uma 1-forma diferencial (a qual define um campo de 2-planos) induz uma folheação.

A resposta à questão é fornecida na versão do Teorema de Frobenius para campos de 2-planos (*Teorema 3.3.4*), na *Seção 3.3*. Neste teorema podemos observar quanto à possibilidade de existência de uma folheação de dimensão 2 de um aberto de $\mathbb{R}^3$ tendo-se por hipótese a existência de um campo de 2-planos definido nesse aberto e que seja *involutivo* segundo sua concepção por colchete de Lie (*Definição 3.3.1*). Com isso chegamos à segunda versão do Teorema de Frobenius agora para 1-formas diferenciais. Nele a exigência que é mais ampla do que apenas a 1-forma diferencial ω ser fechada é que ela satisfaça a relação $\omega \wedge d\omega = 0$, pois assim ela definirá um campo de 2-planos que é involutivo, como queríamos. Portanto, ao fim da seção conseguimos ampliar a restrição de 1-formas diferenciais que induzem uma folheação de dimensão 2 com estes resultados, fortalecendo assim o estudo da relação entre estes dois conceitos.

Por fim, na *Seção 3.4* retomamos-nos aos estudos da estrutura das folhas de uma folheação de dimensão 2 induzida por uma 1-forma diferencial ω na vizinhança de uma singularidade específica de ω chamada *centro*. Mostramos por meio do Teorema de G. Reeb (*Teorema 3.4.7*) que próximas às singularidades as folhas não singulares da folheação se comportam difeomorficamente à esfera S^2 e é a prova deste resultado o nosso objetivo final. Para tanto levamos em conta o Teorema de Estabilidade de G. Reeb (*Teorema 3.4.6*), cuja demonstração envolve conceitos de Topologia Algébrica que podem ser consultados na referência citada.

A referência utilizada para o *Capítulo 3* é o livro [1]. Apesar de não haver matemática original aqui nestas notas, acreditamos que nossa contribuição está na forma como a teoria está aqui desenvolvida, uma vez que apresentamos os resultados que estão demonstrados na referência citada, porém com mais detalhes.

Enfatizamos que todos os conceitos aqui apresentados podem ser estendidos para definir folheações de outras dimensões, tanto mudando a dimensão do espaço (domínio) quanto das folhas, o que é feito genericamente em [1], para variedades diferenciáveis. Por exemplo, o Teorema de Frobenius para 1-formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$, que é o seguinte: *Considere k 1-formas diferenciais $\omega^1, \dots, \omega^k$ de classes C^r ($r \geq 1$) linearmente independentes definidas num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se estas 1-formas diferenciais satisfazem a condição*

$$d\omega^i \wedge \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = 0, \quad (1)$$

para $i = 1, \dots, k$, então existe um campo de $(n - k)$ -planos de classe C^r definido por estas

1-formas diferenciais que é tangente a uma folheação de dimensão $n - k$ e classe C^r de U (Teorema 2, pág. 219 [1]). Assim, duas 1-formas diferenciais ω^1 e ω^2 definidas em $\mathbb{R}^3$ e linearmente independentes que satisfaçam as condições (1) induzem uma folheação de dimensão 1 de $\mathbb{R}^3$.

Superfícies Diferenciáveis, Campos de Vetores e Colchete de Lie

O conceito de superfície m -dimensional contida em um espaço euclidiano é um exemplo clássico de variedade diferenciável. Uma vez que os resultados estudados para folheações neste trabalho são válido para variedades diferenciáveis e é desta forma que eles são abordado em [1], estudamos e enunciamos neste capítulo os conceitos necessários à sua compreensão tais como carta local e atlas de uma variedade. Entretanto, enunciamos aqui os resultados para o caso particular de superfície diferenciável.

Neste capítulo utilizamos como principais referências os livros [1], [5], [7], [10] e [11]. Nosso objetivo aqui é enunciar apenas as definições e resultados que utilizamos nos capítulos seguintes. Omitimos portanto as demonstrações dos resultados para não tornar estas notas por demais extensas. Fixamos para este capítulo os espaços euclidianos considerados como $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^p$, onde $n \leq m \leq p$.

1.1 Superfícies diferenciáveis

A noção de superfície, definidas mais adiante e que utilizamos ao longo do texto, remete aos espaços euclidianos em que estão contidas, pela própria definição. Mas isto nem sempre ocorre para variedades diferenciáveis. Nos estudos matemáticos existem objetos importantes, semelhantes a superfícies, que não se encontram contidos num espaço euclidiano.

Assim, para eliminarmos esses inconvenientes e deixarmos evidentes as peculiaridades da definição de superfície em comparação às variedades, precisamos definir primeiramente o que são *immersões*.

Definição 1.1.1 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação de classe C^r ($r \geq 1$) definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é uma **imersão** se $df(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma aplicação injetiva, para todo $x \in U$.*

É natural que essa injetividade somente pode ocorrer quando $m \leq p$. Não é preciso que a aplicação f propriamente dita seja injetiva, somente sua diferencial. Um exemplo é quando $f : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ é uma imersão, sendo I um intervalo aberto. Assim, dizemos que $f(I) \subset \mathbb{R}^p$ é um *caminho regular* e então, como a aplicação $df(t)$ é uma transformação linear injetiva, ela não se anula em nenhum t neste intervalo, caso contrário df seria identicamente nula.

Quando $m = p$, por exemplo, toda imersão de classe C^1 de $U \subset \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^p$ é um difeomorfismo local. De modo geral, para $m \leq p$ quaisquer, o seguinte teorema garante que toda imersão de classe C^1 é uma aplicação localmente injetiva.

Teorema 1.1.2 ([5], pág. 113) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma imersão de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Então existe um aberto $A \subset U$ tal que a restrição $f|_A$ é injetiva.*

Uma **parametrização de classe C^r e dimensão m** de um conjunto $V \subset \mathbb{R}^p$ é uma imersão $\varphi : V_0 \rightarrow V$ de classe C^r , que também é um homeomorfismo do aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^m$ sobre V . Assim, podemos definir superfícies, como segue.

Definição 1.1.3 *Uma **superfície** de dimensão m e classe C^r em $\mathbb{R}^p$ é um conjunto $M \subset \mathbb{R}^p$ onde para todo $x \in M$ existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^p$ contendo x , tal que $V = U \cap M$ é a imagem de uma parametrização, de classe C^r e dimensão m , $\varphi : V_0 \rightarrow V$ definida em um aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^m$.*

Note que o conjunto V acima é um aberto de M com a topologia induzida de $\mathbb{R}^p$, o qual chamamos de uma **vizinhança parametrizada** do ponto $x \in M$. Em outras palavras, uma superfície em $\mathbb{R}^p$ é um conjunto que sempre pode ser coberto por vizinhanças parametrizadas de seus pontos. Dada uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$ de M , ao homeomorfismo inverso $\mathbf{x} = \varphi^{-1} : V \rightarrow V_0$ chamamos de **carta local** ou um **sistema de coordenadas locais** em M . Também podemos nos referir a uma carta local como um par $(V, \mathbf{x})$, com V e $\mathbf{x}$ como acima. Na Figura 1.1 temos a representação da carta local anterior.

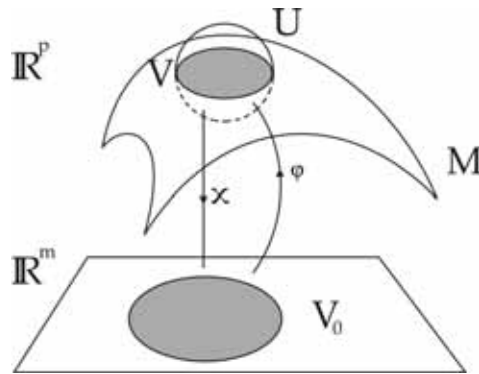


Figura 1.1: Carta local $(V, \mathbf{x})$ em uma superfície M .

Dois casos extremos de superfícies são quando $m = 0$ e $m = p$. No primeiro, M é um conjunto discreto e, no segundo caso, M é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^p$ e portanto a parametrização mais natural a se considerar é a inclusão. Importante frisar que o espaço euclidiano $\mathbb{R}^p$ em si é um exemplo de superfície. O exemplo mais simples de superfície de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$ é a esfera S^2 centrada na origem do sistema de coordenadas. Na Figura 1.2 temos a representação desta superfície.

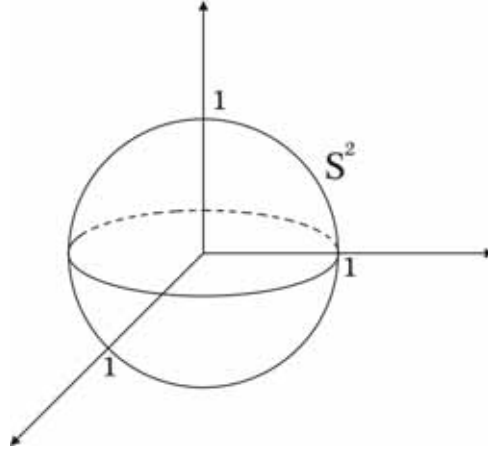


Figura 1.2: Superfície de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$.

A composição de aplicações é uma ferramenta importante no estudo de superfícies quando tratamos de duas parametrizações cujas vizinhanças parametrizadas se interceptam.

Sejam $\varphi : V_0 \rightarrow V$ e $\psi : W_0 \rightarrow W$ parametrizações da superfície M , de classes C^r e dimensões m , com $V \cap W \neq \emptyset$. A aplicação

$$\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(V \cap W) \rightarrow \psi^{-1}(V \cap W),$$

é chamada **mudança de parametrização** ou **mudança de coordenadas**.

Para concluirmos sobre a diferenciabilidade de uma mudança de coordenadas precisamos do seguinte resultado:

Proposição 1.1.4 ([5], pág. 128) *Seja M uma superfície de classe C^r e dimensão m em $\mathbb{R}^p$. Se uma aplicação $h : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^p$, de classe C^r definida no aberto $V_0 \subset \mathbb{R}^k$, tiver sua imagem $h(V_0)$ contida na vizinhança $W \subset M$ parametrizada por $\psi : W_0 \rightarrow W$, então $\psi^{-1} \circ h : V_0 \rightarrow W_0 \subset \mathbb{R}^m$ é uma aplicação de classe C^r .*

Segue que a mudança de parametrização é um *difeomorfismo de classe C^r* . Considerando duas cartas locais $(V_i, \mathbf{x}_i)$ e $(V_j, \mathbf{x}_j)$, podemos também nos referir a uma mudança de coordenadas como sendo o difeomorfismo

$$\mathbf{x}_j \circ \mathbf{x}_i^{-1} : \mathbf{x}_i(V_i \cap V_j) \rightarrow \mathbf{x}_j(V_i \cap V_j).$$

Seja agora $f : M \rightarrow \mathbb{R}^q$ uma aplicação definida em M , uma superfície de classe C^r e dimensão m em $\mathbb{R}^p$. Dizemos que f é **diferenciável (de classe $C^k, k \leq r$) num ponto** $x \in M$ quando existe uma parametrização $\varphi : V_0 \rightarrow V$, com $x \in V$, tal que a composta $f \circ \varphi : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^q$ é diferenciável (de classe $C^k, k \leq r$) no ponto $x_0 \in V_0$ onde $\varphi(x_0) = x$. Segue que, se $\psi : W_0 \rightarrow W$ é outra parametrização de M , com $x \in W$, então

$$f \circ \psi = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \psi)$$

é diferenciável. Daí resulta que a definição de diferenciabilidade é consistente.

Podemos concluir assim que em uma superfície de classe C^r as cartas locais são aplicações de classe C^r .

Seja M uma superfície de classe C^r e dimensão m em $\mathbb{R}^p$. Um **atlas** $\mathcal{U}$ de dimensão m e classe C^r sobre M é uma coleção de cartas locais (e, portanto, de difeomorfismos C^r) cujos domínios cobrem M . Como as cartas locais são o inverso de parametrizações locais sempre é possível determinar um atlas de dimensão m e classe C^r para uma superfície como M .

O conceito de diferenciabilidade de uma aplicação definida entre superfícies pode ser definido agora considerando o atlas de cada superfície, como segue.

Sejam $M \subset \mathbb{R}^p$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ superfícies de classes C^r e dimensões m e n respectivamente. Suponha que $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ são atlas de classes C^r em M e N , respectivamente. Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é uma **aplicação diferenciável de classe C^k ($k \leq r$)** se f é contínua e, para cada $x \in M$, existem cartas locais $(U, \mathbf{x}) \in \mathfrak{M}$ e $(V, \mathbf{y}) \in \mathfrak{N}$, com $x \in U$ e $f(U) \subset V$, tais que

$$\mathbf{y} \circ f \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbf{y}(V) \subset \mathbb{R}^n$$

é de classe C^k .

Como as mudanças de coordenadas são difeomorfismos C^r ($r \geq k$) esta definição independe das cartas locais escolhidas. A definição acima é equivalente a dizer que $f : M \rightarrow N$ é diferenciável como aplicação de M em $\mathbb{R}^q$ (para detalhes, ver [7], pág. 39). Daí, dizemos que f é um **difeomorfismo de classe C^k** quando possui inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ de classe C^k . Em particular, para todo $x \in U \subset M$, U aberto, $df(x) : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ é um isomorfismo e tem-se:

$$(df(x))^{-1} = df^{-1}(f(x)). \quad (1.1)$$

Considere uma superfície M de classe C^r e dimensão m . Dizemos que uma carta local $\mathbf{x}_0 : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, para um aberto $W \subset M$, é **admissível** relativamente ao atlas $\mathcal{U}$ de M se, para toda carta local $(U_i, \mathbf{x}_i) \in \mathcal{U}$, $i \in \Gamma$, com $W \cap U_i \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $\mathbf{x}_0 \circ \mathbf{x}_i^{-1}$ e $\mathbf{x}_i \circ \mathbf{x}_0^{-1}$ são difeomorfismos de classe C^r . Ou seja, se $\mathcal{U} \cup \{\mathbf{x}_0\}$ é ainda um atlas de classe C^r em M .

Acompanhemos na sequência exemplos comuns de cartas locais admissíveis relativa-

mente a um atlas.

Exemplo 1.1.5

- (a) Seja $\mathfrak{U}$ um atlas de classe C^r em M e $\mathbf{x} : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma carta local pertencente a $\mathfrak{U}$. Então para cada aberto $V \subset U$, a restrição $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}|_V$ é admissível em relação a $\mathfrak{U}$.
- (b) Se $\xi : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo de classe C^r , então $\xi \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é admissível relativamente a $\mathfrak{U}$.

Um atlas $\mathfrak{U}$ de dimensão m e classe C^r de uma superfície M é dito **máximo** quando contém todas as cartas locais que são admissíveis em relação a $\mathfrak{U}$. Todo atlas de classe C^r em uma superfície M pode ser ampliado de modo único até se tornar um atlas máximo de classe C^r , basta acrescentar-lhe todas as cartas locais admissíveis.

No seguinte exemplo vemos onde se aplica a ideia de atlas máximo.

Exemplo 1.1.6 Toda superfície M de dimensão m e classe C^r possui um atlas $\mathfrak{U}$ formado pelas cartas locais $\mathbf{x}_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ que são inversos das parametrizações $\varphi : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U_i \subset M$, de classe C^r . Na verdade, $\mathfrak{U}$ é um atlas máximo de classe C^r . De fato, seja $\mathbf{x}_0 : W \rightarrow \mathbf{x}_0(W) \subset \mathbb{R}^m$ uma carta local, admissível em relação a $\mathfrak{U}$. Então $\mathbf{x}_0^{-1} : \mathbf{x}_0(W) \rightarrow W \subset M$ é um homeomorfismo.

Para cada $a \in W$ existe uma parametrização $\varphi : U_0 \rightarrow U$ tal que $a \in U \subset M$, de classe C^r , ou seja $(W \cap U \neq \emptyset)$. Como $\mathbf{x}_0$ é admissível,

$$\varphi^{-1} \circ \mathbf{x}_0^{-1} : \mathbf{x}_0(U \cap W) \rightarrow \varphi^{-1}(U \cap W)$$

é um difeomorfismo de classe C^r , pois é uma mudança de parametrização. Portanto,

$$\varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \mathbf{x}_0^{-1}) : \mathbf{x}_0(U \cap W) \rightarrow U \cap W$$

é uma parametrização de classe C^r de uma vizinhança de a . Como $a \in W$ é arbitrário, segue-se que $\mathbf{x}_0^{-1} : \mathbf{x}_0(W) \rightarrow W$ é uma parametrização de classe C^r , isto é, $\mathbf{x}_0$ pertence a $\mathfrak{U}$.

Um atlas máximo de dimensão m e classe C^r sobre M é chamado também de *estrutura diferenciável de dimensão m e classe C^r sobre M* .

Uma **variedade diferenciável de classe C^r e dimensão m** é um espaço topológico de Hausdorff M , com base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável de dimensão m e classe C^r . Perceba assim que uma superfície é uma variedade diferenciável, como vínhamos afirmando. Uma **subvariedade** N de M é um subconjunto em M , de dimensão n ($n \leq m$) e classe C^r , tal que para todo $x \in N$ existe uma carta local de classe C^r $(U, \mathbf{x})$, com $x \in U$ e $\mathbf{x}(U) = V \times W$, onde $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ são

bolas abertas satisfazendo $x(N \cap U) = V \times \{0\}$. Dizemos assim que a *codimensão* de N é $m - n = \dim(M) - \dim(N)$. Perceba que uma subvariedade continua sendo uma variedade e classe C^r . Por exemplo, o S^n é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Na sequência vamos definir o que é um *espaço tangente* a uma superfície M de dimensão m e classe C^r em $\mathbb{R}^p$.

Definição 1.1.7 *O espaço tangente a uma superfície M , no ponto $x \in M$, é o subespaço vetorial denotado por $T_x M \subset \mathbb{R}^p$ de dimensão m definido como*

$$T_x M = d\varphi(x_0) \cdot \mathbb{R}^m,$$

onde $\varphi : V_0 \rightarrow V$ é uma parametrização de M com $\varphi(x_0) = x$.

O espaço tangente dado acima está bem definido, uma vez que podemos provar que se $\psi : W_0 \rightarrow W$ com $\psi(x_0) = x$ é outra parametrização, então vale que $d\varphi(x_0) \cdot \mathbb{R}^m = d\psi(x_0) \cdot \mathbb{R}^m$. Além disso, $T_x M$ coincide com o conjunto dos vetores $v = \lambda'(0)$, dos caminhos diferenciáveis $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, tais que $\lambda(0) = x$.

Com a ajuda do espaço tangente podemos definir a diferencial de uma aplicação diferenciável de uma superfície em outra superfície, o que é abordado mais adiante.

Toda parametrização φ da superfície M de dimensão m em uma vizinhança do ponto x , por ser uma imersão, determina uma base para $T_x M$, formada pelos vetores

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(x_0),$$

onde $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) = d\varphi(x_0) \cdot e_i$, com e_i sendo o i -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^m$ e para $i = 1, \dots, m$, denominada *base associada à parametrização φ* .

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^1 entre as superfícies M e N de dimensões m e n , respectivamente, e classes C^r . A *diferencial* de f no ponto x é a transformação linear

$$df(x) = f'(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N,$$

assim definida: todo vetor $v \in T_x M$ pode ser visto como o vetor velocidade $v = \lambda'(0)$ de um caminho $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$, com $\lambda(0) = x$. Então temos $df(x) \cdot v = d(f \circ \lambda)(0)$. Se $\varphi : V_0 \rightarrow V \subset M$ é uma parametrização C^1 com $\varphi(x_0) = x$, então $v = d\varphi(x_0) \cdot v_0$, para $v_0 \in \mathbb{R}^m$ e portanto $df(x) \cdot v = d(f \circ \varphi)(x_0) \cdot v_0$.

Quando $df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ é sobrejetiva, para todo $x \in M$, dizemos que f é uma *submersão*. Disto segue que as cartas locais são submersões.

O próximo teorema (adaptado segundo nossos interesses) é fonte de inúmeros exemplos de superfícies, além de conter uma informação importante a respeito do espaço tangente. Mas antes precisamos definir um conceito fundamental da teoria que se segue que é o de *valor regular*.

Consideremos para os próximos resultados desta seção M uma superfície de classe C^r e dimensão m em $\mathbb{R}^p$ e $N \subset \mathbb{R}^q$ uma superfície de classe C^r e dimensão n ($n \leq q$).

Definição 1.1.8 *Seja $f : M \rightarrow N$ de classe C^r ($r \geq 1$). Um **ponto regular** de f é um ponto $x \in M$ tal que a diferencial $df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ é sobrejetiva. Deste modo, dizemos que $f(x) = c$ é um **valor regular** de f quando $f^{-1}(c) = \emptyset$ ou $f^{-1}(c)$ é constituído apenas de pontos regulares.*

Todo ponto em N que não é um valor regular de f é dito *valor crítico* de f .

Teorema 1.1.9 ([1], pág. 14 e [5], pág. 131) *Sejam $f : M \rightarrow N$ de classe C^r ($r \geq 1$) e $c \in N$ um valor regular de f com $f^{-1}(c) \neq \emptyset$. Então $f^{-1}(c) = \widetilde{M}$ é uma superfície contida em M de classe C^r e codimensão igual à dimensão de N . O espaço tangente $T_x \widetilde{M}$, em cada ponto $x \in \widetilde{M}$, é determinado pelo núcleo da derivada $df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$.*

Esta noção de valor regular é importante ao se tratar de folheações. Um exemplo da situação abordada neste teorema é $S^2 = f^{-1}(1)$, onde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é a submersão fora da origem dada por $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Os seguintes resultados de análise são utilizados posteriormente.

Teorema 1.1.10 (Aplicação Inversa) ([5], pág. 115) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^r ($r \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $x \in U$ é tal que $df(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é invertível, então existe uma bola aberta $B = B(x; \delta) \subset U$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(x)$.*

Teorema 1.1.11 (Forma Local das Submersões) ([5], pág. 119) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma submersão de classe C^r definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Para cada ponto $p \in U$ existem abertos $Z \subset U$, contendo p , $W \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ contendo $c = f(p)$ e um difeomorfismo $h : V \times W \rightarrow Z$ de classe C^r , tais que $f(h(x, y)) = y$ para todo $x \in V$ e todo $y \in W$, isto é, $f \circ h$ é equivalente à projeção na segunda coordenada.*

Outro conceito utilizado posteriormente e definido a seguir é o de *mergulho*.

Definição 1.1.12 ([1], pág. 12) *Uma imersão $f : M \rightarrow N$ é chamada **mergulho** se $f : M \rightarrow f(M) \subset N$ é um homeomorfismo.*

Na sequência recordamos a fórmula de Taylor o qual é fundamental para o estudo do comportamento de uma função de classe C^2 na proximidade de uma singularidade quando tratamos de folheações no Capítulo 3.

Teorema 1.1.13 (Fórmula de Taylor) ([5], pág. 69) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Fixado $a \in U$, para todo $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que $a + v \in U$, escrevemos:*

$$f(a + v) - f(a) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \alpha_i \alpha_j + r(v).$$

Então $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|^2} = 0$.

Observação 1.1.14 Se pusermos $\rho(v) = \frac{r(v)}{|v|^2}$ quando $v \neq 0$ e $\rho(0) = 0$, a fórmula de Taylor se escreve como:

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \alpha_i \alpha_j + \rho(v)|v|^2,$$

onde $\lim_{v \rightarrow 0} \rho(v) = 0$. Em particular, a fórmula de Taylor de ordem 1 fica representada como segue:

$$f(a+v) - f(a) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \alpha_i + \rho(v)|v|.$$

1.2 Campos de vetores

Os campos vetoriais merecem destaque no estudo de folheações. Isto porque quando um campo de vetores X não possui *singularidades* (isto é, $X(x) \neq 0$, para todo $x \in M$, uma superfície) as órbitas de X compõem as folhas de uma folheação de dimensão 1. Voltamos a esta abordagem mais adiante. Nesta seção nos apoiamos em [1], [10] e [11].

Consideramos nesta seção M uma superfície de dimensão m e classe C^r em $\mathbb{R}^p$.

Definição 1.2.1 Um **campo de vetores de classe C^r** em M é uma aplicação X que associa a cada ponto $x \in M$ um vetor $X(x)$ pertencente ao espaço tangente a M em x .

Como X está definido sobre M , nos referimos à classe de diferenciabilidade da aplicação X tal como foi definido na seção anterior. O campo X induz a equação diferencial ordinária em M dada por:

$$\frac{dx}{dt} = X(x). \quad (1.2)$$

Uma solução desta equação é a curva de classe C^r com imagem em M definida a seguir.

Definição 1.2.2 Seja X um campo de vetores de classe C^r sobre a superfície M . Uma curva de classe C^r $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ é dita **curva integral** de X se $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, para todo $t \in (a, b)$.

A curva integral de X passando por $x \in M$ também recebe o nome de *solução maximal* e deve satisfazer a condição $\gamma(0) = x$, ou seja, o intervalo de definição da curva γ , denotado por $I_x = (a, b)$, deve conter a origem. Este intervalo I_x chama-se *intervalo maximal* de definição da solução passando por x e é sempre aberto. Além disso, a imagem pela curva integral passando por x determina o que chamamos de *órbita* da trajetória. A seguir mencionamos o clássico Teorema de Existência e Unicidade da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias (para mais detalhes recomendamos [1], pág. 208 e [10]).

Teorema 1.2.3 (Existência e Unicidade) ([10], pág.4) *Sejam X um campo de vetores de classe C^r ($r \geq 1$) em M , e $p \in M$. Existe uma curva integral de X , $\alpha : I_p \rightarrow M$, com $\alpha(0) = p$. Se $\beta : J_p \rightarrow M$ é outra curva integral de X com $\beta(0) = p$, então $\alpha(t) = \beta(t)$ para todo $t \in I_p \cap J_p$.*

Dizemos que X é um campo *completo* se para todo $x \in M$ uma órbita γ está definida ou, equivalentemente, se todas as curvas integrais possuem como intervalo maximal $\mathbb{R}$.

Numa carta local $\mathbf{x} : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo de vetores é representado por $\mathbf{x}_*(X)$ (ou por X_*), definido em $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^m$, pela expressão:

$$\mathbf{x}_*(X)(x) = X_*(x) = d\mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(x)) \cdot X(\mathbf{x}^{-1}(x)), \quad \text{para } x \in \mathbf{x}(U). \quad (1.3)$$

Nesse caso observamos que quando a carta local $\mathbf{x}$ é de classe C^∞ (e daí a própria superfície M seria de classe C^∞), fica claro que o campo X_* tem no máximo a mesma classe de diferenciabilidade de X . Daí segue que uma curva $\gamma : (a, b) \rightarrow U \subset M$ de classe C^1 é curva integral de X se e somente se $\mathbf{x} \circ \gamma : (a, b) \rightarrow \mathbf{x}(U)$ é curva integral de X_* .

Os campos de vetores que não se anulam em uma dada região, isto é, tais que $X(x) \neq 0$ para todo $x \in U \subset M$, intuitivamente trazem a ideia de densidade das órbitas, justamente porque para cada $x \in U$ há uma única órbita contendo x , ou seja, a região considerada pode ser vista como um aglomerado de órbitas. Esta densidade é entendida como a imagem de uma aplicação que define tais órbitas de modo geral, para cada $x \in U$ considerado. A esta aplicação chamamos *fluxo* e definimos a seguir.

Definição 1.2.4 *Seja $V = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I_x\}$, onde I_x é o intervalo maximal de definição da solução passando por x e M uma superfície. O **fluxo** de X é a aplicação $\varphi : V \rightarrow M$ de tal forma que para cada $x \in M$ fixo, a aplicação $t \mapsto \varphi(t, x)$ é uma curva integral de X com condição inicial $\varphi(0, x) = x$.*

Considere o campo X e o fluxo φ da definição, mas agora tome $V = \mathbb{R} \times M$ por comodidade. Ao fixarmos $t_0 \in \mathbb{R}$, a aplicação $X_{t_0} : M \rightarrow M$ tal que $X_{t_0}(x) = \varphi(t_0, x)$ é um difeomorfismo de classe C^r . Além disso, $X_0 = \text{identidade}$; $X_{t+s} = X_t \circ X_s = X_s \circ X_t$ e $X_{-t} = (X_t)^{-1}$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ (mais detalhes em [10], pág. 12). Com isso podemos redefinir fluxo como o conjunto de difeomorfismos locais X_t , para $t \in \mathbb{R}$ fixo.

A órbita de X passando por x é o conjunto $\mathbf{o}(x) = \{X_t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Outra observação a ser feita é que se $X(x) = 0$, então a órbita em x se reduz ao próprio ponto. Isto fica claro ao recordarmos que $X(x)$ coincide com o vetor velocidade de uma curva passando por x . Neste caso, dizemos que x é uma **singularidade** de X . Caso x não seja singularidade, $\gamma(t) = X_t(x)$ é uma imersão.

A classe de diferenciabilidade do fluxo é explicitada no seguinte teorema.

Teorema 1.2.5 ([1], pág. 208) *Seja X um campo de vetores de classe C^r ($r \geq 1$) definido na superfície M . Então nas condições da definição anterior $\varphi : V \rightarrow M$ é de classe C^r .*

Na seção seguinte discutimos um conceito fundamental neste texto que é o de *colchete de Lie*. Para tanto, fixemos aqui a notação X_t como a aplicação que a cada $x \in M$ associa a órbita $\varphi(t, x)$ ($t \in I_x$) e, por comodidade, não definamos o domínio de tal aplicação deixando subentendido se tratar de um aberto de M .

Podemos relacionar campos de vetores de superfícies por uma aplicação que recebe o seguinte nome característico. Sejam M e N duas superfícies de classe C^r e dimensões m e n , respectivamente. Considere uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$. Dizemos que os campos de vetores X em M e Y em N são ***f-relacionados*** se df aplica X em Y , isto é, $df(x) \cdot (X(x)) = Y(f(x))$, para todo $x \in M$.

Se $f : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo local de classe C^r ($r \geq 1$) e Y é um campo de vetores de classe C^s em N , então podemos definir um campo de vetores em M , denotado por $f^*Y := X$, que é *f-relacionado* com Y . Definimos este campo por:

$$f^*Y(x) = (df(x))^{-1} \cdot Y(f(x)), \quad (1.4)$$

onde $x \in M$. O campo f^*Y é C^l , onde $l = \min\{s, r - 1\}$. Neste caso, como f é um difeomorfismo, pela relação (1.1) podemos escrever:

$$f^*Y(x) = (df(x))^{-1} \cdot Y(f(x)) = df^{-1}(f(x)) \cdot Y(f(x)).$$

Além disso, definimos o operador f_* como a inversa da f^* , no caso em que temos um campo de vetores X em M e queremos determinar o campo de vetores Y em N *f-relacionado* a X . Tal campo é denotado por:

$$f_*X(y) = df(f^{-1}(y)) \cdot X(f^{-1}(y)).$$

A equação (1.3) é um exemplo onde a carta local $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ condiciona que os campos tangentes a M e a $\mathbb{R}^m$ sejam $\mathbf{x}$ -relacionados.

O seguinte resultado é uma consequência destas definições.

Proposição 1.2.6 ([1], pág. 209) *Sejam $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ difeomorfismos de classe C^r ($r \geq 2$). Então valem:*

- (a) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ e $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$
- (b) *Considere Y um campo de vetores de classe C^s em N . Sejam $\varphi : V \rightarrow N$ e $\varphi^* : V^* \rightarrow M$, fluxos de Y e $f^*Y = X$, respectivamente. Então temos $V^* = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M \mid (t, f(x)) \in V\}$ e $f(\varphi^*(t, x)) = \varphi(t, f(x))$, para todo $(t, x) \in V^*$.*

Note que o item (b) nos diz que conhecendo-se as órbitas de $f^*Y = X$ e o difeomorfismo f , então conhecemos as órbitas de Y , e reciprocamente. Mais que isso, utilizando a notação que fixa $t \in \mathbb{R}$, $Y_t : N \rightarrow N$ que é um difeomorfismo, tem-se que $f \circ X_t = f \circ Y_t^* = Y_t \circ f$.

Na sequência registramos aqui o Teorema do Fluxo Tubular. Como ele é utilizado no Capítulo 3 o apresentamos aqui para o caso particular em que $M = \mathbb{R}^3$.

Teorema 1.2.7 (Fluxo Tubular) ([10], pág. 45) *Considere X um campo de vetores de classe C^r definido em $\mathbb{R}^3$ e $p \in \mathbb{R}^3$ um ponto regular de X . Sejam $C = \{q \in \mathbb{R}^3; \|q\| < 1\}$ e X_C um campo em C definido por $X_C(q) = (1, 0, 0)$. Então existe um difeomorfismo de classe C^r , $h : V_p \rightarrow C$, onde V_p é uma vizinhança de p , levando órbitas de X em órbitas de X_C .*

1.3 Colchete de Lie

Em Álgebra, uma *Álgebra de Lie* é uma estrutura algébrica cujo principal uso está no estudo dos grupos de Lie e das variedades diferenciáveis, portanto, superfícies. O termo Álgebra de Lie é uma referência ao matemático norueguês Sophus Lie, e foi usado por Hermann Weyl na década de 1930.

Para definirmos *colchete de Lie* note primeiramente que se X e Y são campos de vetores de classes C^2 e C^1 em M , uma superfície de classe C^r e dimensão m em $\mathbb{R}^p$, respectivamente, e por simplicidade são campos completos, então fixando $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}$, da equação (1.4) obtemos o vetor:

$$v(t) = X_t^*(Y)(x) = d(X_{-t})(X_t(x)) \cdot (Y(X_t(x))),$$

que é tangente a M em x . Aqui usamos o resultado de campos de vetores $X_t^{-1} = X_{-t}$. Perceba que a aplicação que a cada t associa $v(t)$, como acima, é uma curva de classe C^1 em $T_x M$. Logo, faz-se sentido obtermos o vetor-velocidade desta curva e é a isto que estamos interessados.

Definição 1.3.1 *O colchete de Lie entre X e Y é um campo de vetores $[X, Y]$ definido por:*

$$[X, Y](x) = \frac{d}{dt}(X_t^*(Y)(x))_{t=0}.$$

Anteriormente à definição tomamos o campo vetorial X como completo, mas pelo colchete de Lie estar definido localmente em x tal hipótese é desnecessária.

O seguinte lema afirma que o colchete de Lie $[X, Y]$ está definido mesmo quando X é de classe C^1 e nos dá a expressão deste colchete de Lie em termos de uma carta local.

Lema 1.3.2 ([1], pág. 210) *Seja $\mathbf{x} : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma carta local da superfície M . Denotamos por $\frac{\partial}{\partial x_i}$ o campo de vetores em U definido por $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = (d\mathbf{x}(q))^{-1} \cdot e_i$, onde $\{e_1, \dots, e_m\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^m$. Se X e Y são campos de vetores em M , podemos escrever:*

$$X = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad e \quad Y = \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Então, temos

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^m c_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{onde } c_i = \sum_{j=1}^m \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right).$$

Em particular podemos definir $[X, Y]$ mesmo quando X é de classe C^1 . Além disso, se X e Y são de classes C^r , $[X, Y]$ é de classe C^{r-1} .

Formas Diferenciais

O objetivo deste capítulo é apresentar um estudo resumido, porém consistente, da teoria de formas diferenciais. Definimos primeiramente o espaço dual e seus funcionais lineares e, com isto, definimos as formas diferenciais de grau 1 e seus principais resultados.

A partir da Seção 2.3 desenvolvemos os pré-requisitos para estender o conceito de 1-formas. Trabalhamos em alguns instantes com formas diferenciais de graus 2 ou 3 e, para tanto, definimos em seguida as formas diferenciais de grau r ($r \in \mathbb{N}$) e seus principais resultados, até mesmo com o intuito de inteirar o assunto.

Por fim, na seção final definimos a diferencial exterior da r -forma que é importante no estudo de folheações por formas diferenciais.

Ao longo do capítulo trabalhamos, em geral, com formas diferenciais definidas em $\mathbb{R}^n$. Muitos resultados são demonstrados a fim de enriquecer este conteúdo que pouco é estudado em graduação e que é fundamental para o objetivo deste trabalho, outros são acompanhados da referência consultada para maiores detalhes. Salvo menção em contrário, as coordenadas de $u \in \mathbb{R}^n$ são com relação à base canônica de $\mathbb{R}^n$.

2.1 Funcional linear e o espaço dual

Nesta seção fixamos as bases do estudo de formas diferenciais: funcionais lineares e o espaço dual. Por se tratar de fundamentos de algebra linear, sugerimos para mais detalhes sobre esta seção [3] e [8].

Seja E espaço vetorial n -dimensional sobre $\mathbb{R}$. Denota-se por $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ o espaço vetorial dos funcionais lineares $F : E \rightarrow \mathbb{R}$, o qual chamamos de **espaço dual** de E , e que satisfaz $\dim E^* = \dim E$.

Dada uma base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de E , existe uma base $\mathcal{B}^* = \{F_1, \dots, F_n\}$ de E^* chamada **base dual** de $\mathcal{B}$ satisfazendo:

$$F_i(v_j) = \delta_{ij}, \quad \text{onde } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}. \quad (2.1)$$

Logo, dado $v \in E$ com $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, segue que $F_i(v) = \alpha_i$, para $i = 1, \dots, n$. Na verdade, este resultado é a exigência principal na definição de base dual, pois é assim que a construímos. Consequentemente,

$$v = F_1(v)v_1 + F_2(v)v_2 + \dots + F_n(v)v_n.$$

Além disso, dado um funcional linear $F \in E^*$, supondo $F = \sum_{i=1}^n \beta_i F_i$, segue que $F(v_i) = \beta_i$, para $i = 1, \dots, n$. Assim,

$$F = F(v_1)F_1 + F(v_2)F_2 + \dots + F(v_n)F_n.$$

Exemplo 2.1.1 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, um aberto, e $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em U . Sua diferencial em $x \in U$ é o funcional linear $df(x) \in (\mathbb{R}^n)^*$ dado da seguinte maneira.*

Fixando a base canônica $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e dado $v \in \mathbb{R}^n$, com $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, temos

$$df(x) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad } f(x), v \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \alpha_i,$$

onde $\text{grad } f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$.

Denotemos por $\mathcal{B}^* = \{dx_1, \dots, dx_n\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ a base dual de $\mathcal{B}$. Como

$$df(x) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

então a expressão de $df(x)$ em termos da base $\mathcal{B}^*$ é

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

2.2 1-Formas diferenciais

Como vimos anteriormente cada espaço vetorial possui um espaço associado chamado dual. Nesta seção o que fazemos é associar a cada elemento pertencente a um conjunto aberto do espaço vetorial um funcional linear pertencente ao dual correspondente deste espaço. A aplicação que faz esta operação recebe o seguinte nome característico.

Definição 2.2.1 *Uma forma diferencial de grau 1, ou uma 1-forma diferencial, definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que a cada $x \in U$ associa um funcional linear $\omega(x)$ (ou simplesmente ω_x) em $(\mathbb{R}^n)^*$.*

Assim, dada ω uma 1-forma diferencial em U , existem funções $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tais que

$$\omega(x) = \omega_x = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i, \quad (2.2)$$

onde $\{dx_1, \dots, dx_n\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ é a base dual da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Consequentemente, para $i = 1, \dots, n$, temos:

$$a_i(x) = \omega(x) \cdot e_i = \omega_x(e_i).$$

A classe de diferenciabilidade de ω é C^r quando as funções a_i acima forem de classe C^r .

Uma 1-forma diferencial ω em U é chamada **exata** quando existir uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$. Neste caso, f é dita uma *primitiva* de ω . É claro que se f é uma primitiva de ω , então para todo $c \in \mathbb{R}$, $f + c$ também é uma primitiva de ω .

Sejam $\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ uma 1-forma definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^n$ dado por $u = (u_1, \dots, u_n)$. Temos

$$\begin{aligned} \omega_x(u) &= \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i(u) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(x) u_i \\ &= \langle (a_1(x), \dots, a_n(x)), (u_1, \dots, u_n) \rangle. \end{aligned}$$

Vimos no Capítulo 1, Seção 1.2, que um *campo de vetores* de classe C^r em $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $X : x \in U \mapsto X(x) \in T_x U$ de classe C^r , a qual podemos denotar por:

$$X(x) = b_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + b_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n},$$

onde b_i são funções de classe C^r definidas em U , $i = 1, \dots, n$. Aqui $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é apenas uma notação alternativa para a base canônica, visto que $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto e daí tomamos inclusões como parametrização em $x \in U$.

Com isso, seja ω como em (2.2). Podemos definir o campo de vetores $X_\omega : x \in U \mapsto X_\omega(x) \in T_x U$, por

$$X_\omega(x) = a_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Para cada $x \in U$, considerando o núcleo de ω_x , ou seja,

$$\ker \omega_x = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \omega_x(u) = 0\},$$

temos que, $v \in \ker \omega_x$ se e somente se

$$\langle v, X_\omega(x) \rangle = 0,$$

ou seja, v e $X_\omega(x)$ são perpendiculares, para todo $x \in U$.

Concluimos assim que o estudo dessas formas diferenciais em um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é semelhante ao estudo do comportamento destes campos de vetores definidos em tal subconjunto, uma vez que, na teoria de folheações, o núcleo da 1-forma diferencial define um campo de planos que é tangente às folhas e, portanto, estes campos de vetores associados são, na verdade, normais a esse plano tangente, e por consequência às folhas. Voltamos a esta abordagem no Capítulo 3.

Acompanhemos a seguir um exemplo de como aparecem as 1-formas diferenciais em abertos de $\mathbb{R}^2$. Lembramos que no capítulo final abordamos as 1-formas diferenciais que induzem folheações de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$, portanto, neste capítulo por vezes tomamos o $\mathbb{R}^2$ como exemplo, mas apenas por simplicidade.

Exemplo 2.2.2 *Seja $\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^2)^*$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$, a 1-forma definida por $\omega(x_1, x_2) = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2$. Então obtemos $X_\omega(x_1, x_2) = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ e, assim, $\ker \omega(x_1, x_2) = \{v \in \mathbb{R}^2; \langle v, (-x_2, x_1) \rangle = 0\}$.*

Note que a 1-forma $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ é exata ($\omega = df$) se e somente se o campo de vetores associado a ω é o *campo gradiente* de f , ou seja, $X_\omega = \text{grad } f$. Além disso, quando $\omega = df$ e $f \in C^2$, então são satisfeitas as **condições de integrabilidade** que são

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}, \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

De fato, como $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, então

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i},$$

pelo Teorema de Schwarz (em [5], pág. 67).

Definimos uma 1-forma de classe C^1 como **fechada** quando ela satisfaz as condições de integrabilidade. Com isto fica claro que toda 1-forma exata é fechada, entretanto nem toda 1-forma fechada é exata. Por exemplo, a 1-forma diferencial definida em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ dada por:

$$\eta(x_1, x_2) = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2,$$

é fechada em todo aberto $U \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$, mas mostra-se que não há uma função f definida em U e tal que $\eta = df$ (mais detalhes em [6], pág. 3). Como estamos interessados

em formas exatas, por conta da relação delas com folheações, queremos saber quando é possível afirmar que uma 1-forma fechada é exata. O seguinte teorema, também conhecido como *Lema de Poincaré*, nos traz esta informação.

Teorema 2.2.3 ([6], pág 9) (Lema de Poincaré) *Toda 1-forma fechada definida num conjunto simplesmente conexo é localmente exata.*

Demonstração. Tomemos uma 1-forma definida numa bola aberta $D \subset \mathbb{R}^3$ com centro na origem, que é um conjunto simplesmente conexo. Seja $\omega = adx + bdy + cdz$ a 1-forma diferenciável definida em D , onde a, b, c são funções diferenciáveis definidas em D . Da hipótese sabemos que:

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \quad \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Consideremos a função

$$f(x, y, z) = \int_0^1 [a(tx, ty, tz)x + b(tx, ty, tz)y + c(tx, ty, tz)z] dt,$$

e também o caminho retilíneo $\lambda : [0, 1] \rightarrow D$ da origem até o ponto (x, y, z) . Derivando sob o sinal da integral, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \int_0^1 \left[\frac{\partial a}{\partial x} tx + a + \frac{\partial b}{\partial x} ty + \frac{\partial c}{\partial x} tz \right] dt,$$

onde as derivadas parciais estão avaliadas no ponto (tx, ty, tz) . Utilizando (2.3), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \int_0^1 \left(\left[\frac{\partial a}{\partial x} x + \frac{\partial a}{\partial y} y + \frac{\partial a}{\partial z} z \right] t + a \right) dt \\ &= \int_0^1 [d(a \circ \lambda) t + a] dt \\ &= \int_0^1 d[(a \circ \lambda) t] dt \\ &= a(x, y, z). \end{aligned}$$

Analogamente obtemos $\frac{\partial f}{\partial y} = b$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = c$. Portanto $\omega = df$ em D . ■

A seguir temos um exemplo de uma 1-forma que não é fechada justamente por não satisfazer as condições de integrabilidade, e outras três 1-formas que são fechadas, logo, localmente exatas.

Exemplo 2.2.4 *Considerando a 1-forma do Exemplo 2.2.2, note que ω não é fechada em $\mathbb{R}^2$. De fato, temos:*

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -1 \neq 1 = \frac{\partial a_2}{\partial x_1}(x_1, x_2).$$

Perceba assim que X_ω não é o vetor gradiente de nenhuma f não nula definida em $\mathbb{R}^2$, logo, de fato ω não pode ser exata.

Agora considere as 1-formas $\alpha = \frac{1}{x_1^2}\omega$, $\beta = \frac{1}{x_2^2}\omega$ e $\gamma = \frac{1}{x_1x_2}\omega$ definidas em $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0 \text{ e } x_2 > 0\}$. Temos então:

$$\begin{aligned}\alpha(x_1, x_2) &= a_1(x_1, x_2) dx_1 + a_2(x_1, x_2) dx_2 := \frac{-x_2}{x_1^2} dx_1 + \frac{1}{x_1} dx_2, \\ \beta(x_1, x_2) &= b_1(x_1, x_2) dx_1 + b_2(x_1, x_2) dx_2 := \frac{-1}{x_2} dx_1 + \frac{x_1}{x_2^2} dx_2, \\ \gamma(x_1, x_2) &= c_1(x_1, x_2) dx_1 + c_2(x_1, x_2) dx_2 := \frac{-1}{x_1} dx_1 + \frac{1}{x_2} dx_2,\end{aligned}$$

e todas são 1-formas de classe C^1 que satisfazem as condições de integrabilidade, uma vez que

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{x_1^2} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1}(x_1, x_2), \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{x_2^2} = \frac{\partial b_2}{\partial x_1}(x_1, x_2), \\ \frac{\partial c_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= 0 = \frac{\partial c_2}{\partial x_1}(x_1, x_2).\end{aligned}$$

Portanto, as 1-formas α , β , γ são fechadas e assim localmente exatas. Por integração determinamos as primitivas f, g e h tais que $df = \alpha$, $dg = \beta$ e $dh = \gamma$. São elas,

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= \frac{x_2}{x_1}, \\ g(x_1, x_2) &= -\frac{x_1}{x_2}, \\ h(x_1, x_2) &= \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right).\end{aligned}$$

Definição 2.2.5 Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$, abertos, e $\psi : U \rightarrow V$ uma aplicação de classe C^1 . Para toda 1-forma diferencial ω definida em V o **pullback** de ω por ψ é a 1-forma $\psi^*\omega : U \rightarrow (\mathbb{R}^m)^*$ dada por:

$$\psi^*\omega(x) \cdot v = \omega(\psi(x)) \cdot d\psi(x) \cdot v,$$

para quaisquer $x \in U$ e $v \in \mathbb{R}^m$.

De acordo com o que observamos anteriormente devemos ficar atentos para a notação utilizada, pois podemos escrever também:

$$\psi^*\omega_x(v) = \omega_{\psi(x)}(d\psi_x(v)).$$

Note que esta nova 1-forma diferencial definida pelo pullback é de classe C^1 , pois, se $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, então:

$$\psi^* \omega_x = \sum_{i=1}^m a_i(\psi(x)) dx_i(d\psi(x)),$$

onde $(a_i \circ \psi) : U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 , apesar de a_i ser de classe C^r , para $i = 1, \dots, n$.

Na Figura 2.1 temos a caracterização do pullback.

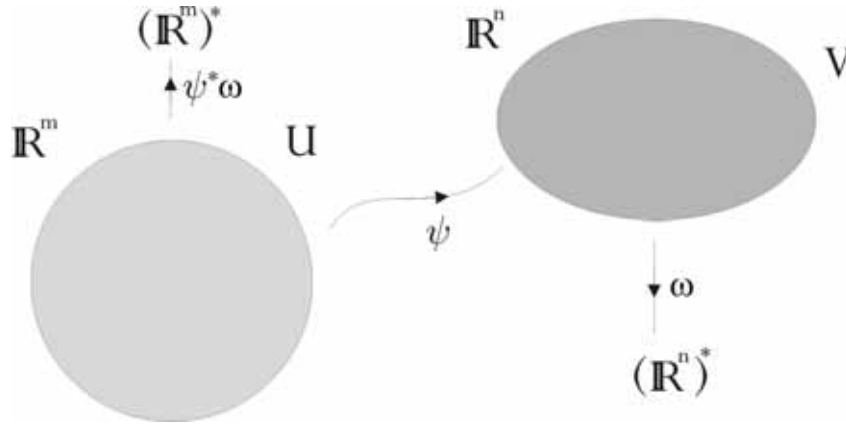


Figura 2.1: Pullback de ω por ψ .

Resumimos na seguinte proposição os principais resultados envolvendo o pullback de 1-formas diferenciais. Para ilustrar, demonstramos na sequência apenas dois itens.

Proposição 2.2.6 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ e $W \subset \mathbb{R}^p$, abertos. Considere também $\psi : U \rightarrow V$ e $\varphi : V \rightarrow W$. Temos:*

(a) $\psi^*(a\omega + b\bar{\omega})(x) \cdot v = a(\psi^*\omega)(x) \cdot v + b(\psi^*(\bar{\omega}))(x) \cdot v$, para $a, b \in \mathbb{R}$ e $\omega, \bar{\omega} : V \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$.

(b) $(\varphi \circ \psi)^*\omega(x) \cdot v = \psi^*(\varphi^*\omega)(x) \cdot v$, neste caso, para $\omega : W \rightarrow (\mathbb{R}^p)^*$.

(c) *Sejam $\psi_1, \dots, \psi_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ as funções coordenadas da aplicação ψ . Se $\omega(y) = \sum_{j=1}^n a_j(y) dy_j$, $y \in V$, então para todo $x \in U$, tem-se*

$$\psi^* \omega(x) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_j \left(\psi(x) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} \right) (x) \right) dx_i.$$

(d) *Para toda $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , tem-se $\psi^*(df) = d(f \circ \psi)$.*

(e) *Se ω é fechada, então $\psi^*\omega$ é fechada.*

(f) *Se ω é exata em V , então $\psi^*\omega$ é exata em U .*

Demonstrações dos itens (d) e (f). Para o item (d), sabemos que $df = f'$. Pela regra da cadeia, para todo $x \in U$,

$$\psi^*(df)(x) = df(\psi(x)) \cdot d\psi(x) = f'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) = (f \circ \psi)'(x) = d(f \circ \psi)(x).$$

No item (f), por hipótese $\omega = df$. Disto decorre que

$$\psi^*\omega = \varphi^*(df) = df(\psi(x)) \cdot d\psi = d(f \circ \psi).$$

■

2.3 Aplicações multilineares

Até agora trabalhamos, entre outras coisas, com funcionais lineares, uma vez que uma 1-forma diferencial é dada pela combinação linear de funcionais lineares. Nesta seção estes funcionais recebem outra denominação, a saber: formas 1-lineares. Assim, estendemos estes conceitos para r variáveis, isto é, formas r -lineares que são importantes na definição de r -formas diferenciais.

Sejam $E_1, \dots, E_r$ e F espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{R}$. Dizemos que $f : E_1 \times \dots \times E_r \rightarrow F$ é uma **aplicação multilinear**, ou **r -linear**, quando f for linear em cada uma de suas r variáveis. Ou seja, dados $v_1 \in E_1; \dots; v_i, u_i \in E_i; \dots; v_r \in E_r$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, arbitrários, então para todo $i = 1, \dots, r$ valem:

1. $f(v_1, \dots, v_i + u_i, \dots, v_r) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + f(v_1, \dots, u_i, \dots, v_r);$
2. $f(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_r) = \lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r).$

Quando $F = \mathbb{R}$, dizemos então que f é uma **forma r -linear**. O conjunto das formas r -lineares é denotado por $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_r; \mathbb{R})$. Na verdade, com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar, $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_r; \mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Quando $E_1 = \dots = E_r = E$, então o denotamos simplesmente por $\mathcal{L}_r(E)$.

Exemplo 2.3.1 Tome $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo o produto interno canônico, isto é, para cada $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ temos $f(u, v) = \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$. Efetuando contas simples verificamos que f é uma forma bilinear, ou seja, uma forma 2-linear.

A seguir, segue um resultado que não é demonstrado aqui, mas que usamos ao determinar uma base para $\mathcal{L}_r(E)$.

Teorema 2.3.2 ([6], pág. 29) *Seja G um conjunto de geradores do espaço vetorial E . Se as aplicações r -lineares $f, g \in \mathcal{L}_r(E; F)$ são tais que $f(v_1, \dots, v_r) = g(v_1, \dots, v_r)$ para quaisquer $v_1, \dots, v_r \in G$, então $f = g$.*

Definição 2.3.3 O *produto tensorial* dos funcionais lineares $f_1, \dots, f_r \in E^*$ é a forma r -linear $f = f_1 \cdots f_r \in \mathcal{L}_r(E)$ definida por:

$$f(v_1, v_2, \dots, v_r) = f_1(v_1)f_2(v_2) \cdots f_r(v_r).$$

A definição de produto tensorial também é necessária para termos condições de determinar tal base do espaço $\mathcal{L}_r(E)$. O próximo teorema nos dá, enfim, a caracterização de uma base para este espaço vetorial.

Teorema 2.3.4 Sejam $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ uma base e $\mathcal{B}^* = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \subset E^*$ a base dual. Considerando para cada sequência $(s) = (i_1, \dots, i_r)$ de r números, $r \leq n$, em $I_n = \{1, \dots, n\}$, o produto tensorial dos respectivos funcionais $\bar{e}_{(s)} = \bar{e}_{i_1} \cdots \bar{e}_{i_r}$, tem-se que as formas r -lineares $\bar{e}_{(s)}$ constituem uma base de $\mathcal{L}_r(E)$, sendo as coordenadas de uma forma r -linear f em relação a esta base dadas por $\alpha_{(s)} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$.

Demonstração. Da definição de produto tensorial segue que, para cada sequência $(s) = (i_1, \dots, i_r)$, temos:

$$\bar{e}_{(s)}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \begin{cases} 0, & \text{se } (s) \neq (j_1, \dots, j_r) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Note que, se $f = \sum_{(s)} \alpha_{(s)} \bar{e}_{(s)}$ é nula, então para toda sequência $(t) = (j_1, \dots, j_r)$, $r \leq n$, tem-se:

$$0 = f(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \sum_{(s)} \alpha_{(s)} \bar{e}_{(s)}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \alpha_{(t)} \bar{e}_{(t)}(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \alpha_{(t)},$$

logo todos os coeficientes $\alpha_{(s)}$ são nulos e, portanto, as formas $\bar{e}_{(s)}$ são linearmente independentes. Para mostrar que estas formas geram o espaço vetorial, dado $f \in \mathcal{L}_r(E)$, tomando $\alpha_{(s)} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$, para cada $(s) = (i_1, \dots, i_r)$, $r \leq n$, e considerando a forma r -linear $g = \sum_{(s)} \alpha_{(s)} \bar{e}_{(s)}$, segue que

$$g(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = \sum_{(s)} \alpha_{(s)} \bar{e}_{(s)}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}).$$

Como os vetores e_i geram E , o Teorema 2.3.2 nos dá $f = g$. Assim, as formas r -lineares $\bar{e}_{(s)}$ geram $\mathcal{L}_r(E)$ e, conseqüentemente, constituem uma base para este espaço. Portanto as coordenadas de f em relação a base acima são $\alpha_{(s)} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$. ■

Note que existem n^r sequências (s) distintas e, portanto, a dimensão de $\mathcal{L}_r(E)$ é n^r .

Definição 2.3.5 Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

1. Uma aplicação r -linear $f \in \mathcal{L}_r(E; F)$ é dita **alternada** se $f(v_1, \dots, v_r) = 0$ sempre que há repetição na lista de vetores $v_1, \dots, v_r \in E$, isto é, quando existem $i \neq j$ tais que $v_i = v_j$.

2. Dizemos que $f \in \mathcal{L}_r(E; F)$ é **antissimétrica** se

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r),$$

para quaisquer $i, j = 1, \dots, r$ com $i \neq j$.

De acordo com estas definições, concluímos que toda aplicação multilinear é antissimétrica se e somente se é alternada.

Quando $F = \mathbb{R}$ denotamos por $\Lambda_r(E)$ o espaço vetorial das formas r -lineares alternadas.

Admitimos que todo funcional linear é uma forma 1-linear alternada, uma vez que não contraria a definição por possuir apenas uma variável.

Exemplo 2.3.6 Uma forma bilinear $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(u, v) = x_1 \overline{x_2} - \overline{x_1} x_2$, onde $u = (x_1, x_2)$ e $v = (\overline{x_1}, \overline{x_2})$, é alternada.

Um resultado interessante é que aplicações r -lineares alternadas se anulam em conjuntos linearmente dependentes de E . De fato, se $f \in \mathcal{L}_r(E; F)$ é uma aplicação r -linear alternada e $v_1, \dots, v_r \in E$ são vetores linearmente dependentes então, supondo $v_r = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{r-1} v_{r-1}$, temos:

$$f(v_1, \dots, v_r) = \sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i f(v_1, \dots, v_{r-1}, v_i) = 0.$$

Segue desse resultado que se $r > \dim E$ então toda aplicação r -linear alternada de E em F é identicamente nula.

Nosso objetivo agora é definir uma base para o subespaço $\Lambda_r(E)$ de $\mathcal{L}_r(E)$. Para tanto, introduzimos a seguir alguns conceitos relevantes.

Uma **permutação** de r objetos é uma bijeção $\sigma : I_r \rightarrow I_r$ onde $I_r = \{1, \dots, r\}$. Dada uma permutação σ definida em I_r , seja p o número de pares (i, j) tais que $1 \leq i < j \leq r$ em I_r e $\sigma(i) > \sigma(j)$. O *signal* de σ é definido por:

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{se } p \text{ é par (permutação par)} \\ -1, & \text{se } p \text{ é ímpar (permutação ímpar)} \end{cases}.$$

O conjunto $\mathcal{P}_r$ das permutações de I_r contém $r!$ elementos. Uma permutação $\tau : I_r \rightarrow I_r$ é dita ser uma *transposição* se existem $i, j \in I_r = \{1, \dots, r\}$, com $i \neq j$, tais que $\tau(i) = j$ e $\tau(j) = i$ e, para $k \neq i, j$ em I_r , tem-se $\tau(k) = k$.

É possível verificar que transposições são permutações ímpares. Além disso, toda permutação pode ser escrita como composta de transposições. Apesar disso poder ser feito de várias maneiras, a paridade de p é sempre a mesma, isto é, $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^p$ depende apenas de σ . Daí segue a seguinte proposição.

Proposição 2.3.7 *A aplicação r -linear $f : E \times \cdots \times E \rightarrow F$ é antissimétrica, ou alternada se, e somente se, para toda $\sigma \in \mathcal{P}_r$ e quaisquer $v_1, \dots, v_r \in E$, tem-se $f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \text{sgn}(\sigma)f(v_1, \dots, v_r)$.*

Demonstração. Suponha que $f : E \times \cdots \times E \rightarrow F$ é uma aplicação r -linear antissimétrica. Então,

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r),$$

para quaisquer $i, j = 1, \dots, r$, com $i \neq j$. Isto denota uma transposição $\sigma(1)$ das posições v_i e v_j , tal que $\sigma(1)$ tem como p um número ímpar. Portanto, $\text{sgn}(\sigma(1)) = -1$. Suponha agora que seja necessário, mais uma vez, alterar outras duas posições i' e j' . Como f é antissimétrica, segue que

$$f(v_1, \dots, v_{i'}, \dots, v_{j'}, \dots, v_r) = -(-f(v_1, \dots, v_{j'}, \dots, v_{i'}, \dots, v_r)),$$

e essa segunda alteração nas posições pode ser denotada como uma transposição $\sigma(2)$, e assim, $\text{sgn}(\sigma(2)) = -1$.

Seguimos esse raciocínio até que tenhamos $(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = (v_1, \dots, v_r)$. Como qualquer permutação $\sigma \in \mathcal{P}_r$ se decompõe em finitas transposições, existirá um número finito de alterações nas posições dos vetores v_i , $i = 1, \dots, r$, que resultará na ordenação equivalente a $f(v_1, \dots, v_r)$. Portanto,

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \text{sgn}(\sigma)f(v_1, \dots, v_r).$$

Reciprocamente, temos dois casos a verificar. Se σ é uma permutação par, então $\text{sgn}(\sigma) = 1$ e assim,

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = f(v_1, \dots, v_r),$$

ou seja, para esta igualdade há um número par de alterações nas posições, ou podemos dizer que a permutação é a identidade. Assim, f é antissimétrica, pois não contraria a definição. Se σ é uma permutação ímpar, o resultado segue. ■

Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ uma base. Para cada sequência $(s) = (i_1, \dots, i_r)$ de r números em $I_n = \{1, \dots, n\}$, suponha estar associado um número real $\alpha_{(s)}$. Então existe uma, e somente uma, forma r -linear $f \in \mathcal{L}_r(E)$ tal que $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = \alpha_{(s)}$, para cada

sequência (s) . De fato, basta tomar $f = \sum_{(s)} \alpha(s) \bar{e}_{(s)}$, onde $\bar{e}_{(s)}$ é o produto tensorial dos funcionais $\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_r}$ pertencentes à base dual de $\mathcal{B}$.

Usando deste fato, para cada conjunto de índices $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset I_n$ com r elementos, defina uma forma r -linear $\bar{e}_I : E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$, do seguinte modo:

- (a) $\bar{e}_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = 0$, se o conjunto $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ for diferente de I (em particular se em J houver repetições).
- (b) Se $J = I$, então existe $\sigma \in \mathcal{P}_r$ tal que $j_1 = i_{\sigma(1)}, \dots, j_r = i_{\sigma(r)}$ e, nesse caso, temos $\bar{e}_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \text{sgn}(\sigma)$ (em particular tem-se

$$\bar{e}_I(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) = 1, \quad \bar{e}_I(e_1, \dots, e_j, \dots, e_j, \dots, e_r) = 0 \quad \text{e}$$

$$\bar{e}_I(e_1, \dots, e_j, \dots, e_i, \dots, e_r) = -\bar{e}_I(e_1, \dots, e_i, \dots, e_j, \dots, e_r).$$

Para esta forma r -linear temos o seguinte teorema cuja demonstração omitimos para não estender o texto, que enfim nos fornece uma base para $\Lambda_r(E)$.

Teorema 2.3.8 ([6], pág. 32) *As formas r -lineares $\bar{e}_I$ anteriormente definidas são alternadas e constituem uma base do espaço vetorial $\Lambda_r(E)$.*

Um corolário que merece ser lembrado é o seguinte.

Corolário 2.3.9 *Se $\dim E = n$, então $\dim \Lambda_r(E) = \binom{n}{r}$.*

Uma ideia da prova é notar que esta combinação é o número de subconjuntos de I_n com r elementos. Com isto fica claro que o espaço das formas n -lineares alternadas em E tem dimensão 1.

Agora que definimos o conjunto das permutações de r elementos estamos em condições de exemplificar uma função r -linear alternada bem característica que é a *função determinante*.

Exemplo 2.3.10 *Consideremos a função:*

$$\text{Det} : \mathbf{M}_r(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

que para cada matriz $A \in \mathbf{M}_r(\mathbb{R})$ associa o número real $\text{Det}(A) = \det(A)$, chamada *função determinante*, onde

$$\det(A) = |A| = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_r} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{r\sigma(r)},$$

considerando um produto de r elementos da forma $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{rj_r}$, definido pela permutação $\sigma = j_1 j_2 \dots j_r$ de r elementos em I_r .

A função Det é r -linear de suas colunas (ou linhas), isto é, para cada i , $1 \leq i \leq r$, Det é uma forma linear da i -ésima coluna (linha) quando as outras $r - 1$ colunas (linhas) são fixadas. Além disto, Det é alternada. Para mais detalhes, ver [3], capítulo 5.

2.4 Produto exterior de funcionais lineares

Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n e E^* o seu dual.

Definição 2.4.1 *O produto exterior de r funcionais lineares $f_1, \dots, f_r \in E^*$ é a forma r -linear alternada $f_1 \wedge \dots \wedge f_r \in \Lambda_r(E)$ dada por:*

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_r)(v_1, \dots, v_r) = \det(a_{ij}),$$

onde $a_{ij} = f_i(v_j)$, para $i, j = 1, \dots, r$.

Note que, como vimos no Exemplo 2.3.10, a função determinante definida em $\mathbf{M}_r(\mathbb{R})$ é uma forma r -linear alternada de suas colunas, logo, não somente $f_1 \wedge \dots \wedge f_r \in \Lambda_r(E)$, como a própria aplicação:

$$\Delta : E^* \times \dots \times E^* \rightarrow \Lambda_r(E),$$

definida por $\Delta(f_1, \dots, f_r) = f_1 \wedge \dots \wedge f_r$, é r -linear alternada.

Com isso temos uma outra maneira de denotar uma base para $\Lambda_r(E)$, a qual é dada no próximo teorema.

Teorema 2.4.2 ([6], pág. 38) *Sejam $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$ uma base e $\mathcal{B}^* = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \subset E^*$ a base dual. Para todo subconjunto $I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset I_n$, a forma $\bar{e}_I \in \Lambda_r(E)$, mencionada no Teorema 2.3.8, coincide com o produto exterior $\bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_r}$.*

Demonstração. Temos dois casos. Se o conjunto $J = \{j_1, \dots, j_r\} \subset I_n$ for diferente de I (em particular, houver repetições na sequência $(j_1, \dots, j_r)$) existirá $i \in I - J$ de modo que a matriz $(\bar{e}_{i_\lambda}(e_{j_\mu}))$ terá a i -ésima linha igual a zero. Daí,

$$(\bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_r})(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \det(\bar{e}_{i_\lambda}(e_{j_\mu})) = 0 = \bar{e}_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}),$$

conforme a definição de $\bar{e}_I$.

Se, no entanto, tivermos $J = I$, existirá uma permutação $\sigma \in \mathcal{P}_r$ tal que a matriz $(\bar{e}_{i_\lambda}(e_{j_\mu}))$ resulta da matriz identidade $(\bar{e}_{i_\lambda}(e_{j_\lambda}))$ pela aplicação da permutação σ em suas colunas. Logo,

$$(\bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_r})(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}) = \det(\bar{e}_{i_\lambda}(e_{j_\mu})) = \text{sgn}(\sigma) = \bar{e}_I(e_{j_1}, \dots, e_{j_r}).$$

Pelo Teorema (2.3.2), concluímos que $\bar{e}_I = \bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_r}$. ■

Segue deste teorema que, se $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{n \times r}(\mathbb{R})$ é a matriz das coordenadas dos vetores $v_1, \dots, v_r \in E$ na base $\{e_1, \dots, e_n\}$, isto é, se $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, $j = 1, \dots, r$, então, para todo conjunto $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset I_n$, tem-se $\bar{e}_I(v_1, \dots, v_r) = \det(A_I)$, onde A_I é a matriz quadrada de ordem r formada pelos coeficientes a_{ij} tais que $i \in I$. De fato, temos:

$$\begin{aligned} \bar{e}_I(v_1, \dots, v_r) &= (\bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_r})(v_1, \dots, v_r) \\ &= \det(\bar{e}_{i_\lambda}(v_j)) \\ &= \det(a_{i_\lambda j}) \\ &= \det(A_I). \end{aligned}$$

Usando ainda o Teorema 2.4.2 note que, se tomarmos $f_1, \dots, f_r \in E^*$ linearmente independentes então esses funcionais fazem parte de uma base do E^* e assim, $f_1 \wedge \dots \wedge f_r$ pertence a uma base de $\Lambda_r(E)$, logo $f_1 \wedge \dots \wedge f_r \neq 0$. Por outro lado, supondo que $f_1 \wedge \dots \wedge f_r \neq 0$, então os funcionais $f_1, \dots, f_r$ são linearmente independentes, pois a aplicação $\Delta : E^* \times \dots \times E^* \rightarrow \Lambda_r(E)$, propriamente, é r -linear alternada como afirmamos anteriormente. Provamos assim que os funcionais $f_1, \dots, f_r$ são linearmente independentes se e somente se $f_1 \wedge \dots \wedge f_r \neq 0$.

Seja $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$ percorrendo os subconjuntos de I_n com r elementos. Vimos que as formas r -lineares alternadas $\bar{e}_I = \bar{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{i_r}$ constituem uma base de $\Lambda_r(E)$. Vamos agora ver quais são as coordenadas do produto exterior $f_1 \wedge \dots \wedge f_r$ em relação a esta base, ou seja, vamos encontrar os escalares α_I tais que $f_1 \wedge \dots \wedge f_r = \sum_I \alpha_I \bar{e}_I$.

Note que, se $K = \{k_1 < \dots < k_r\}$ é um subconjunto de I_n com r elementos, então o valor de $\bar{e}_K(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ é igual a 1 ou 0 conforme $K = I$ ou $K \neq I$, respectivamente, para $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$ e, portanto, temos:

$$\begin{aligned} \alpha_I = \alpha_I \bar{e}_I(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) &= \sum_K \alpha_K \bar{e}_K(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \\ &= (f_1 \wedge \dots \wedge f_r)(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \\ &= \det(f_j(e_{i_\mu})) \\ &= \det(a_{i_\mu j}) \\ &= \det(A_I), \end{aligned}$$

onde $A_I \in \mathbf{M}_r(\mathbb{R})$ é formada pelas r linhas $i_1, \dots, i_r$ da matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbf{M}_{n \times r}(\mathbb{R})$, obtida de $f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{e}_i$.

Obtemos, por fim, a relação $f_1 \wedge \dots \wedge f_r = \sum_I \det(A_I) \bar{e}_I$.

2.5 Formas diferenciais de grau superior

Nesta seção, podemos estender os resultados apresentados da Seção 2.2 utilizando agora as formas r -lineares alternadas a fim de definirmos as formas diferenciais de grau r .

Definição 2.5.1 *Uma **forma diferencial de grau r** , ou uma **r -forma diferencial**, definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que a cada $x \in U$ associa uma forma r -linear alternada em $\mathbb{R}^n$, isto é, $\omega(x) \in \Lambda_r(\mathbb{R}^n)$.*

Seja $\{dx_1, \dots, dx_n\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ a base dual da base canônica $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Vimos nos Teoremas 2.3.8 e 2.4.2 que uma base do espaço vetorial das formas r -lineares alternadas é composta por funções do tipo $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$, onde $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$ percorre todos os subconjuntos com r elementos do conjunto $I_n = \{1, \dots, n\}$. Então, se ω é uma r -forma diferencial, para cada $x \in U$, temos:

$$\omega(x) = \omega_x = \sum_I a_I(x) dx_I,$$

onde $a_I : U \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de ω relativas à base composta pelos dx_I e tem-se $a_I(x) = \omega_x(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$, pois

$$\begin{aligned} \omega_x(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) &= \sum_I a_I(x) dx_I(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}) \\ &= \sum_I a_I(x) \det(dx_{i_\mu}(e_{i_\lambda})) \\ &= a_I(x), \end{aligned}$$

quando $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$.

Devido a essa dependência de x por ω , cada a_I é determinada unicamente por x . Além disso, análogo ao caso das 1-formas diferenciais, quando as aplicações a_I são de classe C^r , diz-se que ω é uma r -forma de classe C^r .

Acompanhemos um exemplo de como seriam as formas de grau superior a 1 em $\mathbb{R}^2$. Lembramos que no capítulo seguinte abordamos as 1-formas diferenciais que induzem folheações de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$, portanto, aqui tomamos o $\mathbb{R}^2$ apenas por simplicidade.

Exemplo 2.5.2

(a) Em abertos U de $\mathbb{R}^2$, dado $x = (x_1, x_2)$, as formas diferenciais de grau 1 são do tipo:

$$\omega_x = a(x) dx_1 + b(x) dx_2,$$

e as de grau 2 são

$$\omega_x = a(x) dx_1 \wedge dx_2,$$

onde a e b são funções reais definidas em U .

(b) Em abertos U de $\mathbb{R}^3$, dado $x = (x_1, x_2, x_3)$, uma forma diferencial de grau 1 se escreve como:

$$\omega_x = a(x) dx_1 + b(x) dx_2 + c(x) dx_3,$$

uma forma diferencial de grau 2 é do tipo:

$$\omega_x = a(x) dx_1 \wedge dx_2 + b(x) dx_1 \wedge dx_3 + c(x) dx_2 \wedge dx_3,$$

e, finalmente, uma forma diferencial de grau 3 é dada por:

$$\omega_x = a(x) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

onde a, b e c são funções reais definidas em U .

Para ω e $\bar{\omega}$ duas r -formas diferenciais em $\mathbb{R}^n$ dadas por $\omega = \sum_I a_I dx_I$ e $\bar{\omega} = \sum_I b_I dx_I$, definimos a **soma** delas por:

$$\omega + \bar{\omega} = \sum_I (a_I + b_I) dx_I.$$

Além disso, se η é uma s -forma diferencial podemos definir o produto exterior $\omega \wedge \eta$ como a $(r + s)$ -forma diferencial, como segue.

Definição 2.5.3 Considere $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Sejam $\omega = \sum_I a_I dx_I$, $I = \{i_1 < \dots < i_r\}$ e $\eta = \sum_J b_J dx_J$, $J = \{j_1 < \dots < j_s\}$, formas diferenciais de graus r e s , respectivamente, em U . O **produto exterior** entre ω e η é uma $(r + s)$ -forma diferencial em U dada por:

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I, J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

A classe de diferenciabilidade de $\omega \wedge \eta$ acompanha a menor das classes de diferenciabilidade entre ω e η . A seguir alguns exemplos para ilustrar a definição anterior.

Exemplo 2.5.4 Sejam $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3$ uma 1-forma diferencial e $\eta = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$ uma 2-forma diferencial, ambas em $\mathbb{R}^3$. Então, lembrando que $dx_i \wedge dx_i = 0$ e que $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, $i \neq j$, obtemos:

$$\omega \wedge \eta = x_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + x_3 x_1 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = (x_1 x_3 - x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Exemplo 2.5.5 Consideremos duas 1-formas diferenciais dadas por $\omega = 2dx_1 - 3dx_2 + dx_3$ e $\nu = dx_1 + 2dx_2 - dx_3$ definidas em $\mathbb{R}^3$. Então, a 2-forma diferencial $\omega \wedge \nu$ é tal que,

dados $v_1 = (1, 3, 1)$ e $v_2 = (2, -1, 3)$, vetores do $\mathbb{R}^3$ e $x \in \mathbb{R}^3$ qualquer, tem-se:

$$\begin{aligned}
 (\omega \wedge \nu)_x(v_1, v_2) &= (7 dx_1 \wedge dx_2 - 3 dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_3)_x(v_1, v_2) \\
 &= 7(dx_1 \wedge dx_2)_x(v_1, v_2) - 3(dx_1 \wedge dx_3)_x(v_1, v_2) + \\
 &\quad + (dx_2 \wedge dx_3)_x(v_1, v_2) \\
 &= 7 \begin{vmatrix} dx_{1x}(v_1) & dx_{1x}(v_2) \\ dx_{2x}(v_1) & dx_{2x}(v_2) \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} dx_{1x}(v_1) & dx_{1x}(v_2) \\ dx_{3x}(v_1) & dx_{3x}(v_2) \end{vmatrix} + \\
 &\quad + \begin{vmatrix} dx_{2x}(v_1) & dx_{2x}(v_2) \\ dx_{3x}(v_1) & dx_{3x}(v_2) \end{vmatrix} \\
 &= 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= -49 - 3 + 10 = -42.
 \end{aligned}$$

Perceba neste exemplo que, como as 1-formas ω e ν possuem funções coordenadas constantes, então independente do $x \in \mathbb{R}^3$ considerado, ω_x , ν_x e, conseqüentemente, $(\omega \wedge \nu)_x$ são sempre os mesmos funcionais lineares e bilineares, respectivamente. A ideia é a mesma para o seguinte exemplo.

Exemplo 2.5.6 Considere as 1-formas $\omega = dx_1 + 2dx_2 - dx_3$, $\nu = 3dx_1 - dx_2 + dx_3$ e $\eta = -dx_1 - 3dx_2 + dx_3$, definidas em $\mathbb{R}^3$. Considere a forma 3-linear $(\omega \wedge \nu \wedge \eta)$. Podemos, por exemplo, calcular o valor da forma 3-linear alternada $(\omega \wedge \nu \wedge \eta)_x$, para $x \in \mathbb{R}^3$ qualquer, nos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$. Temos, assim:

$$\begin{aligned}
 (\omega \wedge \nu \wedge \eta)_x(e_1, e_2, e_3) &= (4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)_x(e_1, e_2, e_3) \\
 &= 4(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)(e_1, e_2, e_3) \\
 &= 4 \det(I) = 4.
 \end{aligned}$$

Note que a definição de produto exterior entre formas diferenciais deixa claro que tomando r 1-formas diferenciais $\omega^1, \dots, \omega^r$ definidas em $\mathbb{R}^n$, segue que $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r$ em $x \in \mathbb{R}^n$ é a forma r -linear alternada que, avaliada em $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$, se expressa como:

$$(\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^r)_x(v_1, \dots, v_r) = \det(\omega^i_x(v_j)).$$

Deste modo, no exemplo anterior poderíamos fazer apenas:

$$(\omega \wedge \nu \wedge \eta)_x(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} \omega_x(e_1) & \nu_x(e_1) & \eta_x(e_1) \\ \omega_x(e_2) & \nu_x(e_2) & \eta_x(e_2) \\ \omega_x(e_3) & \nu_x(e_3) & \eta_x(e_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Algumas propriedades do produto exterior entre formas diferenciais são as seguintes:

Proposição 2.5.7 ([8], pág. 5) *Sejam ω uma r -forma, η uma s -forma e θ uma k -forma, definidas em $\mathbb{R}^n$. Então:*

- (a) $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$;
- (b) $(\omega \wedge \eta) = (-1)^{rs}(\eta \wedge \omega)$;
- (c) $\omega \wedge (\eta + \theta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \theta$, se $k = s$.

Demonstração. Os itens (a) e (c) são diretos. Para provar (b), escrevemos:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_I a_I dx_I, \quad I = \{i_1 < \dots < i_r\}, \\ \eta &= \sum_J b_J dx_J, \quad J = \{j_1 < \dots < j_s\},\end{aligned}$$

onde I e J são subconjuntos com r e s elementos de $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= \sum_{I, J} a_I b_J dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} \\ &= \sum_{I, J} b_J a_I (-1) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r-1}} \wedge dx_{j_1} \wedge dx_{i_r} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} \\ &= \sum_{I, J} b_J a_I (-1)^r dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_2} \wedge \dots \wedge dx_{j_s}.\end{aligned}$$

Como J possui s elementos obtemos, repetindo o argumento anterior para cada dx_{j_l} , com $j_l \in J$, que:

$$\omega \wedge \eta = \sum_{J, I} b_J a_I (-1)^{rs} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega.$$

■

2.6 Formas diferenciais em superfícies

Dado M uma superfície de classe C^k e dimensão m em $\mathbb{R}^p$, uma forma diferencial de grau r em $x \in M$ é uma forma r -linear alternada $\eta_x \in \Lambda_r(T_x M)$. Logo, para todo $x \in M$ e vetores $w_1, \dots, w_r \in T_x M$ tem-se que $\eta_x(w_1, \dots, w_r)$ é um número real que depende linearmente de cada w_i e se anula quando $w_i = w_j$ com $i \neq j$.

Seja $\psi : N \rightarrow M$ uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$) entre as superfícies $N \subset \mathbb{R}^q$, de classe C^k e dimensão n , e $M \subset \mathbb{R}^p$ anteriormente definida, e tome η uma forma diferencial de grau r sobre M . O **pullback** de η por ψ é a r -forma diferencial $\psi^* \eta$ definida em N por:

$$\psi^* \eta(x) \cdot (w_1, \dots, w_r) = \eta(\psi(x)) \cdot (d\psi(x) \cdot w_1, \dots, d\psi(x) \cdot w_r),$$

para quaisquer $w_1, \dots, w_r \in T_x N$ e considerando $x \in N$. Lembrando também que $d\psi(x) : T_x N \rightarrow T_{\psi(x)} M$ é a diferencial de ψ no ponto $x \in N$.

Um caso particular é quando N está contida na superfície M e $i : N \rightarrow M$ é a aplicação de inclusão $i(x) = x$. Neste caso, para toda r -forma η em M , seu pullback é a forma $i^*\eta$, chamada *forma induzida* de η em N , ou *restrição*, às vezes denotada por $\eta|_N$.

Tendo-se uma r -forma η definida em uma superfície M , utilizando o pullback, podemos definir uma r -forma diferencial em $\mathbb{R}^m$ através da parametrização local $\varphi : U_0 \rightarrow U$, onde $U \subset M$ e $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ são abertos. Para cada $x = \varphi(u) \in U$ indiquemos por $\{du_1, \dots, du_m\} \subset (T_x M)^*$ a base dual da base $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(u), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_m}(u) \right\} \subset T_x M$, obtida como fizemos na página 6. Por simplicidade escreveremos du_i ao invés da notação correta que é $du_i(x)$ ou du_{i_x} , pois $du_i : x \in U \mapsto du_i(x) \in (T_x M)^*$. Com isso as formas diferenciais $du_I = du_{i_1} \wedge \dots \wedge du_{i_r}$, para $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset I_m$, constituem, em cada ponto $x \in U$, uma base de $\Lambda_r(T_x M)$. Portanto, toda forma diferencial η de grau r em M se exprime, em termos da parametrização φ , como:

$$\eta_u = \sum_I a_I(u) du_I, \quad \text{onde } u \in U_0.$$

Exemplo 2.6.1 *Seja M uma superfície de dimensão m em $\mathbb{R}^p$. As formas diferenciais de grau zero são simplesmente funções reais $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Se $N \subset \mathbb{R}^q$ e $f : N \rightarrow M$ é uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$), então o pullback de g por f é simplesmente $g \circ f$.*

As próximas duas proposições trazem algumas propriedades importantes envolvendo r -formas diferenciais e o pullback. Para elas considere $N \subset \mathbb{R}^q$ uma superfície de classe C^k e dimensão n e $M \subset \mathbb{R}^p$ outra superfície, de classe C^k e dimensão m .

Proposição 2.6.2 ([8], pág. 6) *Sejam $f : M \rightarrow N$ uma aplicação e $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, ambas de classe C^k ($k \geq 1$). Considere também ω e $\bar{\omega}$ r -formas diferenciais em N . Então:*

- (a) $f^*(a\omega + b\bar{\omega}) = a(f^*\omega) + b(f^*\bar{\omega})$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$;
- (b) $f^*(g\omega) = (f^*g)(f^*\omega)$;
- (c) Se $\eta_1, \dots, \eta_r$ são 1-formas em N , tem-se $f^*(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r) = f^*\eta_1 \wedge \dots \wedge f^*\eta_r$.

Demonstração. Para a demonstração consideremos $x \in M$ e $v_1, \dots, v_r \in T_x M$.

Então,

$$\begin{aligned} f^*(a\omega + b\bar{\omega})(x) \cdot (v_1, \dots, v_r) &= (a\omega + b\bar{\omega})(f(x)) \cdot (df(x)(v_1), \dots, df(x)(v_r)) \\ &= a(f^*\omega)(x) \cdot (v_1, \dots, v_r) + b(f^*\bar{\omega})(x) \cdot (v_1, \dots, v_r) \\ &= (a(f^*\omega) + b(f^*\bar{\omega}))(x) \cdot (v_1, \dots, v_r), \end{aligned}$$

de onde segue o item (a).

Além disso, para mostrar (b), segue que

$$\begin{aligned} f^*(g\omega)(x) \cdot (v_1, \dots, v_r) &= (g\omega)(f(x)) \cdot (df(v_1), \dots, df(v_r)) \\ &= (g \circ f)(x) f^*\omega(x) \cdot (v_1, \dots, v_r) \\ &= f^*g(x) f^*\omega(x) \cdot (v_1, \dots, v_r). \end{aligned}$$

Para o item (c), omitindo a indicação do ponto x , obtemos

$$\begin{aligned} f^*(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r) \cdot (v_1, \dots, v_r) &= (\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r) \cdot (df(v_1), \dots, df(v_r)) \\ &= \det(\eta_i(df(v_j))) \\ &= \det(f^*(\eta)_i(v_j)) \\ &= (f^*(\eta)_1 \wedge \dots \wedge f^*(\eta)_r) \cdot (v_1, \dots, v_r). \end{aligned}$$

■

Note que, pelo item (a), concluímos que a aplicação $\omega \mapsto f^*\omega$ é uma transformação linear.

Proposição 2.6.3 ([8], pág. 8) *Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Então:*

- (a) $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$, onde ω e η são formas de graus r e s em N ;
- (b) $(f \circ g)^*\omega = g^*(f^*\omega)$, onde $g : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ é diferenciável.

Demonstração. Considere $(y_1, \dots, y_n) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)) \in N$, para $(x_1, \dots, x_m) \in M$, $\omega = \sum_I a_I dy_I$ e $\eta = \sum_J b_J dy_J$. Obtemos assim,

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \eta) &= f^*\left(\sum_{I,J} a_I b_J dy_I \wedge dy_J\right) \\ &= \sum_{I,J} a_I(f_1, \dots, f_n) b_J(f_1, \dots, f_n) df_I \wedge df_J \\ &= \sum_I a_I(f_1, \dots, f_n) df_I \wedge \sum_J b_J(f_1, \dots, f_n) df_J \\ &= (f^*\omega) \wedge (f^*\eta). \end{aligned}$$

de onde segue o item (a).

Para o item (b) temos:

$$\begin{aligned} (f \circ g)^*\omega &= \sum_I a_I((f \circ g)_1, \dots, (f \circ g)_n) d(f \circ g)_I \\ &= \sum_I a_I(f_1(g_1, \dots, g_m), \dots, f_n(g_1, \dots, g_m)) df_I(dg_1, \dots, dg_m) \end{aligned}$$

$$= g^*(f^*\omega).$$

■

2.7 Diferencial exterior

Como previamente destacado na introdução, a diferencial exterior de uma forma diferencial de grau r resume diversos teoremas importantes do Cálculo (para mais detalhes recomendamos [6]). Aqui definimos apenas os resultados básicos que nos auxiliam no capítulo seguinte.

Definição 2.7.1 *Seja $\omega = \sum_I a_I dx_I$ uma forma diferencial de grau r e classe C^k ($k \geq 2$) definida no conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. A **diferencial exterior** de ω é a forma diferencial de grau $r + 1$ dada por:*

$$d\omega = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_{j,I} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I,$$

de classe C^{k-1} em U .

Exemplo 2.7.2 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$ e $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset I_n$ um conjunto com r elementos.*

(a) *Se $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma diferencial de grau zero, ou seja, uma função real diferenciável com n variáveis, então, tomando $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \in \mathbb{R}^n$ e $x \in U$ arbitrários, temos:*

$$\begin{aligned} (dg)_x(v) &= dg(x) \cdot v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx_i(v) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx_i \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \alpha_i (dx_i(e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \alpha_i \\ &= \langle \text{grad } g(x), v \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, a derivada direcional de $g(x)$ em relação a v .

(b) Seja $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma diferencial de grau 1 dada por $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, temos:

$$d\omega = \sum_{i,I} da_i \wedge dx_I = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j,$$

pois, como $dx_j \wedge dx_i \in \Lambda_r(\mathbb{R}^n)$, então $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$.

Proposição 2.7.3 ([8], pág. 9) *Sejam ω e $\bar{\omega}$ duas r -formas diferenciais, η uma s -forma diferencial, definidas em $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^r ($r \geq 2$). Então:*

(a) $d(\omega + \bar{\omega}) = d\omega + d\bar{\omega}$;

(b) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge d\eta$;

(c) $d(d\omega) = d^2\omega = 0$;

(d) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$, agora para ω definida em $\mathbb{R}^m$;

(e) $d(f^*\omega) \wedge f^*\omega = f^*(d\omega \wedge \omega)$, para ω definida em $\mathbb{R}^m$.

Demonstração. Utilizamos nas demonstrações de cada item:

$$\omega = \sum_I a_I dx_I, \quad \bar{\omega} = \sum_I \bar{a}_I dx_I \quad \text{e} \quad \varphi = \sum_J b_J dx_J.$$

Segue da definição que

$$\begin{aligned} d(\omega + \bar{\omega}) &= \sum_I (da_I + d\bar{a}_I) \wedge (dx_I) \\ &= \sum_{j,I} \left(\frac{\partial a_I}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{a}_I}{\partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_I \\ &= \sum_{j,I} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I + \sum_{j,I} \frac{\partial \bar{a}_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \\ &= d\omega + d\bar{\omega}, \end{aligned}$$

e isso prova o item (a).

Note que,

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \varphi) &= \sum_{I,J} d(a_I b_J) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= \sum_{I,J} b_J da_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{I,J} a_I db_J \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \varphi + (-1)^r \sum_{I,J} a_I dx_I \wedge db_J \wedge dx_J \\ &= d\omega \wedge \varphi + (-1)^r \omega \wedge d\varphi, \end{aligned}$$

o que mostra o item (b).

Para provar o item (c) assuma primeiramente que ω seja uma 0-forma diferencial. Então, podemos supor $\omega = f$ definida em $\mathbb{R}^n$ e temos:

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(df) = d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \wedge dx_j\right). \end{aligned}$$

Do Teorema de Schwarz ([5], pág. 67) e do fato de $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, quando $i \neq j$, segue que:

$$d(df) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Agora, seja ω uma r -forma diferencial. Por (a) podemos restringir ao caso em que $\omega = a_I dx_I$ com $a_I \neq 0$. Daí, por (b) segue que:

$$d\omega = da_I \wedge dx_I + a_I d(dx_I).$$

Mas $d(dx_I) = d(1) \wedge dx_I = 0$. Portanto,

$$d(d\omega) = d(da_I \wedge dx_I) = d(da_I) \wedge dx_I + da_I \wedge d(dx_I) = 0,$$

concluindo a afirmação do item (c).

No item (d), mais uma vez, consideremos primeiramente uma 0-forma diferencial. Seja $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável que associa a cada $(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ o valor $g(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{aligned} f^*(dg) &= f^*\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \\ &= \sum_j \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j} dx_j = d(g \circ f) = d(f^*g). \end{aligned}$$

Seja agora ω uma r -forma diferencial. Com o mesmo raciocínio anterior, e pelo fato de que f^* comuta com o produto exterior, segue que:

$$d(f^*\omega) = d\left(\sum_I f^*(a_I) f^*(dx_I)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_I d(f^*(a_I)) \wedge (f^*(dx_I)) \\
&= \sum_I (f^*(da_I)) \wedge (f^*(dx_I)) \\
&= f^* \left(\sum_I da_I \wedge dx_I \right) = f^*(d\omega).
\end{aligned}$$

Por fim, no item (e), utilizando respectivamente as Proposições 2.7.3 (d) e 2.6.3 (a), obtemos a relação:

$$(\psi^*\omega) \wedge d(\psi^*\omega) = \psi^*\omega \wedge \psi^*(d\omega) = \psi^*(\omega \wedge d\omega).$$

■

Observação 2.7.4 Uma 1-forma diferencial ω é **fechada** (tal como vimos na Seção 2.2) se e somente se $d\omega = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j},
\end{aligned}$$

ou seja, ω satisfaz o critério de integrabilidade, para $i, j = 1, \dots, n$.

Apesar de não termos trabalhado com integração de r -formas diferenciais (o que pode ser visto com detalhes em [6], pág. 11), é simples visualizar a importância da diferencial exterior, por exemplo, com o *Teorema de Green* que lembramos ao fim desta seção com o intuito de enriquecer a teoria aqui apresentada.

No teorema é dito que em uma região aberta $A \subset \mathbb{R}^2$, se $D \subset A$ é um aberto *simples*, ou seja, sua *fronteira* ∂D é uma curva fechada e sem auto-interseção orientada positivamente, então para um campo de vetores $\vec{F} = P(x_1, x_2)dx_1 + Q(x_1, x_2)dx_2$ definido em A , onde P e Q são duas funções de variáveis reais com derivadas parciais contínuas em D , tem-se

$$\oint_{\partial D} \vec{F} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Acompanhemos no exemplo seguinte sua aplicação.

Exemplo 2.7.5 Se considerarmos a 1-forma diferencial ω que associa a cada ponto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ um funcional linear $\omega(x_1, x_2)$ em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dada por $\omega(x_1, x_2) = \sqrt{x_2}dx_1 + \sqrt{x_1}dx_2$, então podemos calcular o valor de sua integral ao longo de uma curva γ delimitada pelas retas $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ e a parábola $x_2 = x_1^2$ utilizando o Teorema de Green,

como segue

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma} \omega &= \oint_{\gamma} \sqrt{x_2} dx_1 + \sqrt{x_1} dx_2 = \frac{1}{2} \iint_D \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} \right) dx_1 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{x_1^2} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}} \right) dx_2 \right) dx_1 \\ &= -\frac{3}{10}.\end{aligned}$$

Folheações, Formas Diferenciais e Campos de Planos

Nosso objetivo principal é estudar folheações de dimensão 2 em abertos do $\mathbb{R}^3$ induzidas por 1-formas diferenciais. Assim, apesar das definições e resultados serem válidos para $\mathbb{R}^m$ ou mesmo variedades, nos limitamos ao caso particular $m = 3$.

Lembramos que nos capítulos preliminares trabalhamos com superfícies de dimensões m em $\mathbb{R}^p$ e que abertos de $\mathbb{R}^3$ nada mais são do que casos particulares de superfícies.

Fixamos para $\mathbb{R}^3$ um sistema de coordenadas (x, y) com $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}$, com relação à base canônica; ou então $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, a menos de colocações diversas.

A principal referência utilizada é o livro [1]. Por conta disso, resultados sem referências indicam que foram adaptados a partir do livro.

3.1 Folheações

Intuitivamente, uma *folheação de dimensão 2* de um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ é uma decomposição de U em superfícies conexas, no nosso caso, de dimensões 2, e que são disjuntas duas a duas. Cada componente conexa desta decomposição é o que chamamos de *folha*. Além disto, estas folhas se aglomeram localmente tais como os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ da forma particular $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com segunda coordenada constante. Formalmente temos a seguinte definição:

Definição 3.1.1 *Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ aberto. Uma família de cartas locais de classe C^r de U , $\{(U_i, \mathbf{x}_i)\}_{i \in \Lambda}$, onde Λ é um conjunto de índices, define uma **folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r e dimensão 2** de U se satisfaz:*

- (a) $U \subset \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$;
- (b) *Se $(U_i, \mathbf{x}_i)$ é uma carta local em U , então $\mathbf{x}_i(U_i) = U_i^1 \times U_i^2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, onde U_i^1 e U_i^2 são bolas abertas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$, respectivamente;*

- (c) Se $(U_i, \mathbf{x}_i)$ e $(U_j, \mathbf{x}_j)$ são cartas locais em U tais que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas $\mathbf{x}_j \circ \mathbf{x}_i^{-1} : \mathbf{x}_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbf{x}_j(U_i \cap U_j)$ é um difeomorfismo local da forma $(\mathbf{x}_j \circ \mathbf{x}_i^{-1})(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$, onde $(x, y) \in \mathbf{x}_i(U_i \cap U_j) \subset U_i^1 \times U_i^2$.

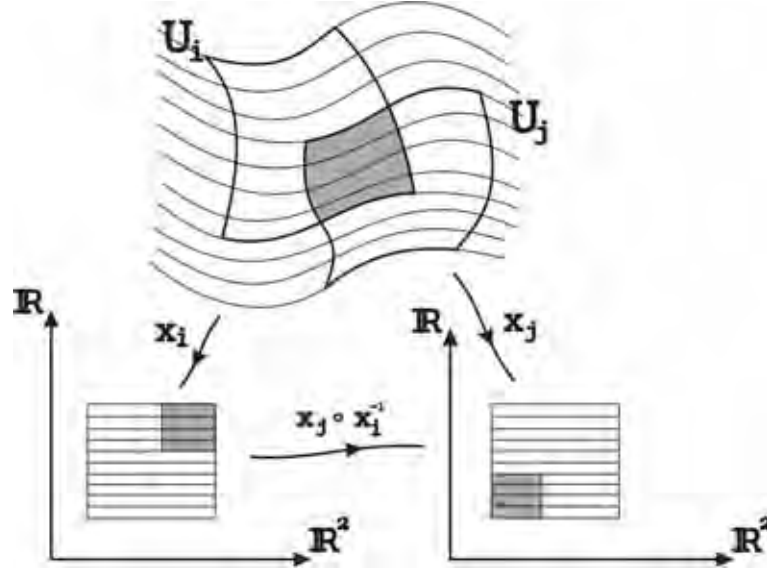


Figura 3.1: Folheação de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$.

Dizemos ainda que $U \subset \mathbb{R}^3$ é folheado pela folheação $\mathcal{F}$, ou que $\mathcal{F}$ é uma *estrutura folheada* de dimensão 2 e classe C^r de U . As cartas $(U_i, \mathbf{x}_i)$ de $\mathcal{F}$ são chamadas **cartas trivializadoras** da folheação.

Seja $(U_i, \mathbf{x}_i) \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbf{x}_i(U_i) = U_i^1 \times U_i^2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Chamamos de **placa** de U (ou de $\mathcal{F}$) o conjunto da forma $\mathbf{x}_i^{-1}(U_i^1 \times \{c\})$, $c \in U_i^2$. Lembramos que, fixando $c \in U_i^2$, a aplicação $f = \mathbf{x}_i^{-1}|_{U_i^1 \times \{c\}} : U_i^1 \times \{c\} \rightarrow U$ é um mergulho de classe C^r e, portanto, as placas são superfícies conexas de classe C^r e dimensões 2 contidas em U . Além disso, se α e β são duas placas de U_i , então $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ou $\alpha = \beta$. Dizemos que um *caminho de placas* de $\mathcal{F}$ é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas tais que $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, k-1\}$.

Note que $U \subset \mathbb{R}^3$ é coberto por placas da folheação $\mathcal{F}$. Dizemos que uma **folha** F de $\mathcal{F}$ é uma classe de equivalência da relação $\sim$ dada por: se $p, q \in U$, então $p \sim q$ se existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tal que $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. Uma consequência da definição é que toda folha é um conjunto conexo por caminhos. De fato, se F é uma folha e $p, q \in F$, seja $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ um caminho de placas com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$. Como $\mathbf{x}_i$ é, em particular, homeomorfismo, então $\alpha_i = \mathbf{x}_i^{-1}(U_i^1 \times \{c\})$ é conexo por caminhos. Assim, como $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$, para $i = 1, \dots, k-1$, tomemos $p_1 \in \alpha_1 \cap \alpha_2$. Daí existe um caminho ligando p a p_1 (em α_1). Em seguida, tome $p_2 \in \alpha_2 \cap \alpha_3$ e um caminho ligado p_1 a p_2 (em α_2). Faça assim, de maneira sucessiva, até tomar um caminho em α_k ligando p_{k-1} a q , onde $p_{k-1} \in \alpha_{k-1} \cap \alpha_k$. Assim, obtemos um caminho $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ contido em F ligando p a q .

Observação 3.1.2 Toda folha F de uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 2 e classe C^r de $U \subset \mathbb{R}^3$ possui uma estrutura de superfície diferenciável de dimensão 2 e classe C^r que é induzida pelas cartas de $\mathcal{F}$. Esta estrutura é chamada estrutura intrínseca de F e suas características ficam bem definidas ao considerarmos o atlas de $\mathcal{F}$.

Mais precisamente, dados $p \in F$ e $(U_i, \mathbf{x}_i)$ carta local de $\mathcal{F}$ tal que $p \in U_i$ e $\mathbf{x}_i(U_i) = U_i^1 \times U_i^2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, onde U_i^1 e U_i^2 são bolas abertas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, pomos $\mathbf{x}_i = (\mathbf{x}_i^1, \mathbf{x}_i^2)$, onde $\mathbf{x}_i^1 : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{x}_i^2 : U_i \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja α a placa de U_i passando por p . Então $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_i^1|_\alpha : \alpha \rightarrow U_i^1 \subset \mathbb{R}^2$ é uma carta local de classe C^r para F numa vizinhança especificada de p , ainda mais,

$$\mathfrak{A} = \{(\alpha, \tilde{\mathbf{x}}); \alpha \subset F \text{ é uma placa e } (U_i, \mathbf{x}_i) \text{ carta de } \mathcal{F}\}$$

é um atlas de classe C^r e dimensão 2 de $\mathcal{F}$ (para mais detalhes ver [1], pág. 29).

Assim, como vimos na página 6, sendo $\alpha = \mathbf{x}_i^{-1}(U_i^1 \times \{c\})$, então uma base para o plano tangente $T_p F$ à F em p é composta pelos vetores:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}^{-1}}{\partial x_1}(q) &= d\tilde{\mathbf{x}}^{-1}(q) \cdot e_1 = (d\tilde{\mathbf{x}}^{-1})_q(e_1), \quad \text{e} \\ \bullet \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}^{-1}}{\partial x_2}(q) &= d\tilde{\mathbf{x}}^{-1}(q) \cdot e_2 = (d\tilde{\mathbf{x}}^{-1})_q(e_2), \end{aligned}$$

onde $q = \tilde{\mathbf{x}}(p)$, $e_1 = (1, 0, 0)$ e $e_2 = (0, 1, 0)$.

O plano tangente à folha F de $\mathcal{F}$ por p também pode ser denotado por $T_p \mathcal{F}$.

O primeiro exemplo mostra como uma folheação pode ser obtida por submersões.

Exemplo 3.1.3 Seja $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, uma submersão de classe C^r no aberto U . Então f induz uma folheação $\mathcal{F}$ de U tal que as folhas são as componentes conexas das superfícies de nível $f^{-1}(c)$, com $c \in f(U) \subset \mathbb{R}$.

Pela Forma Local das Submersões (Teorema 1.1.11), dado $p \in U$ e tomando $c = f(p)$, existem um aberto $Z \subset U$ contendo p , bolas abertas $W \subset \mathbb{R}^2$ e $V \subset \mathbb{R}$ com $c \in V$, e um difeomorfismo $h : W \times V \rightarrow Z$ de classe C^r tal que

$$(f \circ h)(x, y) = y,$$

onde $x \in W$ e $y \in V$. Seja $\mathbf{x} = h^{-1}$. Então $(Z, \mathbf{x})$ é uma carta local de dimensão 2 e classe C^r de U em p .

Afirmamos que a coleção das cartas $(Z, \mathbf{x})$ dadas como acima define uma folheação de classe C^r e dimensão 2 de $U \subset \mathbb{R}^3$.

De fato, sejam $(Z_1, \mathbf{x}_1)$ e $(Z_2, \mathbf{x}_2)$ duas cartas como anteriormente, com $p \in Z_1 \cap Z_2$. Temos que mostrar que $\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1} : \mathbf{x}_1(Z_1 \cap Z_2) \rightarrow \mathbf{x}_2(Z_1 \cap Z_2)$ é da forma $(\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1})(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$.

Para tanto considere $(x, y_1), (\bar{x}, y_1) \in \mathbf{x}_1(Z_1 \cap Z_2)$ quaisquer. Basta mostrar que $(p_2 \circ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1})(x, y_1) = (p_2 \circ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1})(\bar{x}, y_1)$, onde p_2 é a projeção na segunda coordenada, ou seja, esta coordenada depende apenas da última variável.

Sejam $q = \mathbf{x}_1^{-1}(x, y_1)$ e $\bar{q} = \mathbf{x}_1^{-1}(\bar{x}, y_1)$. Então, $f(q) = (f \circ \mathbf{x}_1^{-1})(x, y_1) = y_1 = (f \circ \mathbf{x}_1^{-1})(\bar{x}, y_1) = f(\bar{q})$.

Sejam, agora, $(x', y_2) = \mathbf{x}_2(q)$ e $(\bar{x}', \bar{y}_2) = \mathbf{x}_2(\bar{q})$. Temos,

$$\mathbf{x}_2^{-1}(x', y_2) = q \text{ e } \mathbf{x}_2^{-1}(\bar{x}', \bar{y}_2) = \bar{q},$$

o que acarreta:

$$y_2 = (f \circ \mathbf{x}_2^{-1})(x', y_2) = f(q) = f(\bar{q}) = (f \circ \mathbf{x}_2^{-1})(\bar{x}', \bar{y}_2) = \bar{y}_2.$$

Como

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1})(x, y_1) &= \mathbf{x}_2(q) = (x', y_2) \text{ e} \\ (\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1})(\bar{x}, y_1) &= \mathbf{x}_2(\bar{q}) = (\bar{x}', \bar{y}_2), \end{aligned}$$

obtemos $p_2((\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1})(x, y_1)) = y_2 = \bar{y}_2 = p_2((\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1})(\bar{x}, y_1))$, como queríamos.

Concluimos também que as folhas de $\mathcal{F}$ são as componentes conexas das superfícies de nível $f^{-1}(c)$, com $c \in \mathbb{R}$, uma vez que o conjunto $\{\mathbf{x}^{-1}(x, c); x \in W\} = f^{-1}(c) \cap Z$ é uma placa da folheação obtida.

Exemplo 3.1.4 Considere $f : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Como f é uma submersão, define uma folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, onde as folhas são esferas centradas na origem de $\mathbb{R}^3$ e raio $c \in \mathbb{R}_+$.

Apresentamos a seguir uma definição alternativa para folheação por meio de submersões. Esta maneira de definir é muito útil nos diversos exemplos de folheação e, por conta disto, mais adiante demonstramos a equivalência entre as duas definições.

Definição 3.1.5 Uma **folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 2 e classe C^r** ($r \geq 1$) de um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ é uma coleção de pares (U_i, f_i) , para i pertencente a uma família de índices Λ , onde os U_i são abertos em $\mathbb{R}^3$ e as $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ são submersões de classes C^r satisfazendo:

- (a) $U \subset \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$;
- (b) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então existe um difeomorfismo $g_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j)$ de classe C^r tal que $f_i = g_{ij} \circ f_j$ em $U_i \cap U_j$.

As f_i são chamadas **aplicações distinguidas de $\mathcal{F}$** e as funções g_{ij} são chamadas **aplicações de coerência**. As placas de $\mathcal{F}$ são componentes conexas dos conjuntos de nível $f_i^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$.

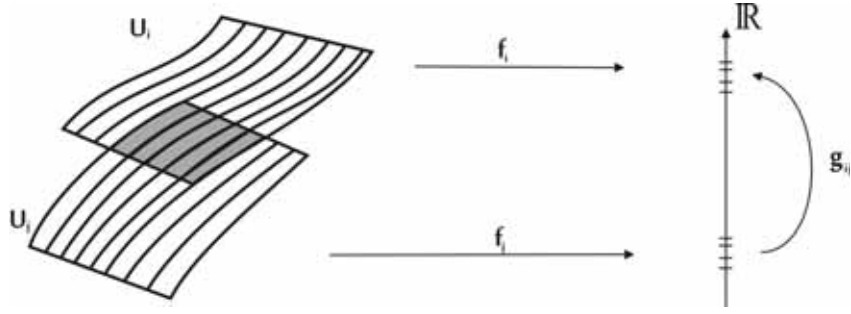


Figura 3.2: Folheação do aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ por aplicações distinguidas.

Para provarmos a equivalência das duas definições de folheações precisamos do lema a seguir. Antes disso, recordemos que toda cobertura aberta de um espaço métrico compacto admite um *número de Lebesgue*, isto é, se K é um espaço métrico compacto e $\mathcal{C}$ é uma cobertura de K por abertos, então existe um número real $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto de K com diâmetro (distância d máxima entre dois pontos deste conjunto) inferior a δ haverá um elemento de $\mathcal{C}$ contendo o subconjunto. O número δ é chamado número de Lebesgue para a cobertura $\mathcal{C}$.

Lema 3.1.6 ([1], pág. 30) *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $U \subset \mathbb{R}^3$. Existe uma cobertura $\mathcal{C} = \{U_i \mid i \in \Lambda\}$ de U por domínios de cartas de $\mathcal{F}$ tal que, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $U_i \cup U_j$ está contida no domínio de uma carta local de $\mathcal{F}$.*

Demonstração. Consideremos uma cobertura de U por compactos, isto é, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, onde $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$ é compacto, para todo n .

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixemos uma cobertura finita de K_n por domínios de cartas trivializadoras de $\mathcal{F}$, $\{V_i^n \mid i = 1, \dots, k_n\}$ (existe, pois K_n é compacto). Seja $\delta_n > 0$ o número de Lebesgue associado a esta cobertura.

Basta agora tomarmos uma cobertura de K_n por domínios de cartas trivializadoras, $\{U_j^n \mid j = 1, \dots, l_n\}$, tal que o diâmetro de U_j^n seja menor que $\frac{\delta_n}{2}$, para todo $j = 1, \dots, l_n$. Então, se $U_i^n \cap U_j^n \neq \emptyset$, temos que $U_i^n \cup U_j^n \subset V_\mu^n$, para algum $\mu \in \{1, \dots, k_n\}$. Portanto, basta tomar $\mathcal{C} = \{U_j^n \mid j = 1, \dots, l_n, n \in \mathbb{N}\}$. ■

Proposição 3.1.7 *As definições 3.1.1 e 3.1.5 são equivalentes.*

Demonstração. Seja U um aberto de $\mathbb{R}^3$. Para verificarmos a equivalência entre as definições suponhamos primeiramente que tenhamos uma folheação $\mathcal{F}$ de U segundo a Definição 3.1.5.

Seja $\{(U_i, f_i)\}_{i \in \Lambda}$ uma coleção de pares como na definição citada. Do Teorema da Forma Local das Submersões (Teorema 1.1.11) sabemos que dado $p \in U_i \subset U \subset \mathbb{R}^3$ arbitrário, existem W e V , bolas abertas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, com $V \subset [f_i(U_i)]$ e

uma carta local $\mathbf{x} : Z \rightarrow W \times V$ de classe C^r com $Z \subset U_i$ tal que $f_i \circ \mathbf{x}^{-1} : W \times V \rightarrow V$ é a projeção na segunda coordenada, o qual denotamos por p_2 .

Vamos a seguir verificar que o conjunto de todas as cartas $(Z, \mathbf{x})$ definem, desta maneira, uma folheação de $U \subset \mathbb{R}^3$ segundo a Definição 3.1.1.

Considere duas cartas locais $(Z_1, \mathbf{x}_1)$ e $(Z_2, \mathbf{x}_2)$ de modo que $Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$ tal como acima. Segue, portanto, que $Z_1 \subset U_i$ e $Z_2 \subset U_j$, pela forma como foram definidas.

Seja $h = \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1} : \mathbf{x}_1(Z_1 \cap Z_2) \rightarrow \mathbf{x}_2(Z_1 \cap Z_2)$. Suponha que $h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$. Temos:

$$\begin{aligned} h_2(x, y) &= (p_2 \circ h)(x, y) = (p_2 \circ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1})(x, y) \\ &= (f_i \circ \mathbf{x}_2^{-1} \circ \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_1^{-1})(x, y) \\ &= (f_i \circ \mathbf{x}_1^{-1})(x, y) \\ &= (g_{ij} \circ f_j \circ \mathbf{x}_1^{-1})(x, y) \\ &= (g_{ij} \circ p_2)(x, y) \\ &= g_{ij}(y), \end{aligned}$$

o que mostra a dependência apenas da última variável, como queríamos.

Suponha agora que $\mathcal{F}$ é uma folheação de U dada pela Definição 3.1.1. Seja $\mathcal{C}$ a cobertura de U dada no Lema 3.1.6. Dado $U_i \in \mathcal{C}$, temos uma carta local de $\mathcal{F}$, $\mathbf{x}_i : U_i \rightarrow \mathbf{x}_i(U_i) \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, tal que $\mathbf{x}_i(U_i) = U_i^1 \times U_i^2$ que são bolas abertas.

Considere $p_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção na segunda coordenada e seja $f_i = p_2 \circ \mathbf{x}_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$. Desta maneira f_i é uma submersão. Além disto, para cada número real $c \in U_2$ segue pela própria definição de placa que $f_i^{-1}(c) \cap U_i$ é uma placa.

Resta agora construir os difeomorfismos que são as aplicações de coerência. Para tanto, considere $(U_i, \mathbf{x}_i)$ e $(U_j, \mathbf{x}_j)$, cartas locais da folheação $\mathcal{F}$ com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e $U_i, U_j \in \mathcal{C}$. Pelo lema anterior existe $V \subset U$, um aberto, tal que $U_i \cup U_j \subset V$ com $(V, \mathbf{x}) \in \mathcal{F}$. Além disso temos $\mathbf{x}(V) = V_1 \times V_2 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, bolas abertas.

Note que se $\alpha \subset U_i$ e $\beta \subset U_j$ são placas com $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, então $\gamma = \alpha \cup \beta$ é uma placa em V . Assim, temos:

$$[\beta \cap U_i] \subset \alpha \Rightarrow f_i([\beta \cap U_i]) = f_i(\alpha)$$

que é um único ponto.

Portanto, se $y \in f_j(U_i \cap U_j)$, então $(f_i \circ f_j^{-1})(y)$ é um único número real, o qual denotamos por $g_{ij}(y)$. Um último passo a ser feito é verificar que g_{ij} é um difeomorfismo de classe C^r . A bijeção é imediata. Para verificar a diferenciabilidade basta notar que $f_j = g_{ji} \circ f_i$ e daí $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$. ■

Um aberto U de $\mathbb{R}^3$ também admite folheação de dimensão 1 e a definimos analogamente ao que foi feito até aqui. Acompanhe na sequência um exemplo comum deste tipo de folheação de $\mathbb{R}^3$ a fim de enriquecer a teoria aqui apresentada.

Exemplo 3.1.8 Considere um campo de vetores X definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Seja $\gamma : (a, b) \rightarrow U$ uma solução da equação diferencial ordinária associada a X , ou seja, $\frac{d}{dt}\gamma(t) = X(\gamma(t))$, para todo $t \in (a, b)$.

Já vimos que a solução $\tilde{\gamma} : (a_0, b_0) \rightarrow U$ de X tal que $\tilde{\gamma}(0) = p$ é chamada órbita ou curva integral de X por p . O Teorema de Existência e Unicidade de equações diferenciais ordinárias (Teorema 1.2.3) garante que, sob certas condições em X , por todo ponto de $U \subset \mathbb{R}^3$ passa uma única órbita de X .

Daí, o Teorema do Fluxo Tubular (Teorema 1.2.7) garante que quando X não possui singularidades (isto é, $X(p) \neq 0$, para todo $p \in U$) tais órbitas de X são as folhas de uma folheação de dimensão 1 de $U \subset \mathbb{R}^3$.

3.2 Formas diferenciais, campos de 2-planos e folheações

Nosso principal objetivo neste trabalho é estudar folheações de abertos de $\mathbb{R}^3$ induzidas por 1-formas diferenciais. Começamos esta abordagem com o seguinte resultado.

Proposição 3.2.1 Toda 1-forma diferencial fechada ω de classe C^r ($r \geq 1$) definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ induz uma folheação de dimensão 2, denotada por $\mathcal{F}(\omega)$, e de classe C^r de $U - \text{sing}(\omega)$, onde $\text{sing}(\omega) = \{p \in U \mid \omega_p = 0\}$.

Demonstração. Com efeito, sejam $p \in U - \text{sing}(\omega)$ e $U_\lambda \subset U$ vizinhança de p , tal que $\omega_q \neq 0$ para todo $q \in U_\lambda$. Podemos assim tomar um sistema de aplicações distinguidas como sendo o conjunto de todos os pares (U_λ, f_λ) , onde $f_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^r tal que $df_\lambda = \omega$. A existência de tal aplicação f_λ é assegurada pelo Lema de Poincaré (Teorema 2.2.3), pois podemos supor U_λ simplesmente conexa.

Percebemos facilmente que f_λ é uma submersão, uma vez que $df_\lambda(p) = \omega_p \neq 0$, para todo $p \in U_\lambda$. Visto isto, resta encontrarmos as aplicações de coerência g_{ij} . Para tanto, como f_i e f_j são submersões e $df_i = \omega|_{U_i \cap U_j} = df_j$, então para $p \in U_i \cap U_j$ arbitrário, obtemos $f_i(p) = f_j(p) + k$, com k real. Assim, basta tomar o difeomorfismo $g_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $g_{ij}(x) = x + k$ que segue a relação desejada $f_i(x) = g_{ij} \circ f_j(x)$. Satisfizemos assim as condições da Definição 3.1.5. ■

No seguinte exemplo temos uma 1-forma diferencial fechada e o esboço da respectiva folheação de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ para ilustrar a situação da proposição anterior.

Exemplo 3.2.2 Consideremos a 1-forma diferencial

$$\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 - x_3 dx_3,$$

que claramente é fechada e possui $\text{sing}(\omega) = \{0\}$, onde $0 \in \mathbb{R}^3$. Note que $\omega = df$, onde $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$. Uma particularidade desta folheação é que apesar de f não ser submersão em $\{0\}$ e termos $f(0) = 0$, o conjunto $f^{-1}(0) - \{0\}$ determina o cone de duas folhas esboçado na Figura 3.3, uma vez que, para todo $p \in f^{-1}(0) - \{0\}$, $df(p) \neq 0$, como vimos.

Assim, em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ as folhas de ω são as componentes conexas das superfícies de nível de $f|_{\mathbb{R}^3 - \{0\}}$ e estão dadas na Figura 3.3.

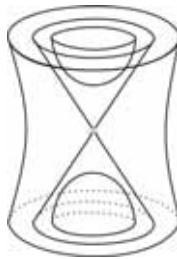


Figura 3.3: Folheação de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ induzida por $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 - x_3 dx_3$.

Portanto, se ω é uma 1-forma diferencial fechada em $\mathbb{R}^3$ obtemos uma folheação de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3 - \text{sing}(\omega)$, a qual denotamos por $\mathcal{F}(\omega)$. Mas e se ω não é fechada? Na seção seguinte vemos que se ω satisfaz a condição $\omega \wedge d\omega = 0$ (Teorema 3.3.5), que é “mais forte” que apenas ω ser fechada, então existe uma folheação de $\mathbb{R}^3 - \text{sing}(\omega)$ associada a ω .

Antes de prosseguirmos com o estudo de folheações dadas por 1-formas diferenciais vejamos um novo conceito que está relacionado com folheações e 1-formas diferenciais.

Sabemos que os campos de vetores sem singularidades definidos em $\mathbb{R}^3$ estão diretamente relacionados a folheações, pois as órbitas do campo compõem as folhas da folheação (Exemplo 3.1.8). Há, no entanto, uma generalização do conceito de campos de vetores através de *campos de planos*, como segue.

Um **campo de 2-planos** em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ é a aplicação P que associa a cada ponto $q \in U$ um subespaço vetorial $P(q) \subset T_q U$ de dimensão 2. Observamos que a definição de campos de k -planos é idêntica, mas estamos nos restringindo a nosso objetivo do texto.

Dizemos que um campo de 2-planos P em U é de classe C^r se para todo $q \in U$ existem dois campos de vetores de classe C^r , X^1 e X^2 , definidos numa vizinhança V de q , com $V \subset U$, tais que para todo $\bar{q} \in V$, $\{X^1(\bar{q}), X^2(\bar{q})\}$ é uma base de $P(\bar{q})$.

Um caso particular de campos de planos é o de campo de 1-planos que é conhecido como *campo de linhas*. Se X é um campo de vetores sem singularidades definido em $\mathbb{R}^3$ podemos definir um campo de linhas P em $\mathbb{R}^3$ colocando

$$P(q) = \mathbb{R} \cdot X(q). \quad (3.1)$$

Note que, se P é um campo de linhas em $\mathbb{R}^3$, podemos definir um campo de vetores em $\mathbb{R}^3$ sem singularidades escolhendo, em cada ponto $q \in \mathbb{R}^3$, um vetor não nulo em $P(q)$. O campo de linhas é de classe C^r quando para todo $q \in \mathbb{R}^3$ existe um campo de vetores X , de classe C^r , definido numa vizinhança V de q , tal que $X(\bar{q})$ gera $P(\bar{q})$, ou seja, satisfaz a expressão (3.1), para todo $\bar{q} \in V$.

Observamos que, em geral, um campo de linhas contínuo definido em M , uma superfície de dimensão m e classe C^r em $\mathbb{R}^p$, não possui um campo de vetores contínuo tangente. A Figura 3.4 ilustra alguns exemplos em $M = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, onde vemos claramente que numa vizinhança da origem não podemos dar uma orientação coerente para as linhas.

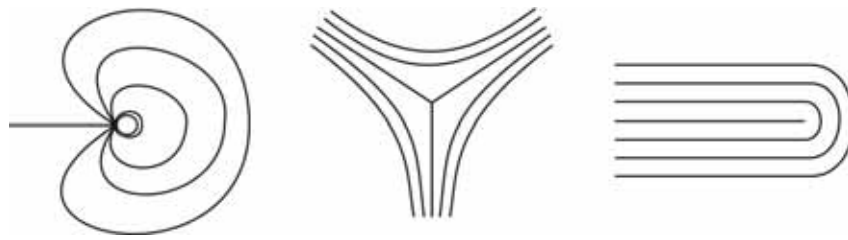


Figura 3.4: Superfícies sem campo de vetores contínuo tangente.

Em seguida, nas Proposições 3.2.3 e 3.2.4 mostramos que campos de 2-planos em abertos de $\mathbb{R}^3$ podem ser obtidos através de 1-formas diferenciais e também a partir de folheações, respectivamente. Mas antes deixemos claro o que são *singularidades* de 1-formas diferenciais.

Supondo $\omega = \sum_{i=1}^m a_i dx_i$ uma 1-forma diferenciável de classe C^r definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, onde $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^r ($r \geq 1$), dizemos que p é uma **singularidade** de ω se todas as funções coordenadas a_i de ω se anulam neste ponto, isto é, $a_i(p) = 0$, para $i = 1, \dots, m$. Então ω_p é o funcional linear nulo e p pertence ao conjunto $\text{sing}(\omega)$ que vínhamos tratando.

Proposição 3.2.3 *Se ω é uma 1-forma diferencial de classe C^r sem singularidades num aberto U de $\mathbb{R}^3$, então $P(q) = \ker \omega_q$ define um campo de 2-planos de classe C^r , onde $q \in U$ e $\ker \omega_q$ denota o núcleo do funcional linear ω_q .*

Demonstração. Para cada $q \in U$ consideremos o seguinte conjunto:

$$P(q) = \{v \in T_q U ; \omega_q(v) = 0\} = \ker \omega_q.$$

Então $P(q)$ é um subespaço vetorial de $T_q U \subseteq T_q \mathbb{R}^3$ de dimensão 2 uma vez que ω não possui singularidades em U , ou seja, ω_q é um funcional linear não nulo.

Afirmamos que o campo de 2-planos $P : q \rightarrow P(q)$ é de classe C^r .

De fato, dado $p \in U$ tome uma carta local $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $p \in V \subset U$ e que $\mathbf{x}(p) = (x_1(p), x_2(p), x_3(p))$, com $x_j : V \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$. Assim, podemos considerar para cada j a 1-forma de classes C^∞ $dx_j : p \in V \mapsto dx_j(p) \in (T_p U)^*$. Então determinamos uma base para $(T_p U)^*$ formada por $\{dx_1(p), dx_2(p), dx_3(p)\}$.

Como ω_p é um funcional linear não nulo, é possível tomar funcionais $dx_\alpha(p)$ e $dx_\beta(p)$ na base anterior tais que o conjunto

$$\{\omega_p, dx_\alpha(p), dx_\beta(p)\}$$

ainda é uma base para $(T_p U)^*$.

Tomemos uma nova representação para a base anterior denotando $dx_\alpha(p) = \omega^2_p$ e $dx_\beta(p) = \omega^3_p$. Assim, temos $\{\omega_p, \omega^2_p, \omega^3_p\}$ como a base para $(T_p U)^*$. Note que ω^2 e ω^3 são as 1-formas diferenciais que obtemos a partir da carta local $(V, \mathbf{x})$.

Por continuidade é possível determinar uma vizinhança W de p em V , com $W \subset V$, tal que o conjunto $\{\omega_q, \omega^2_q, \omega^3_q\}$ é base de $(T_q U)^*$, para todo $q \in W$.

Consideremos os campos de vetores X_ω, X_{ω^2} e X_{ω^3} definidos em W tais que para todo $q \in W$ o conjunto $\{X_\omega(q), X_{\omega^2}(q), X_{\omega^3}(q)\}$ é base dual de $\{\omega_q, \omega^2_q, \omega^3_q\}$, ou seja,

$$\omega^i_q(X_{\omega^j}(q)) = \delta_{ij}, \quad \text{onde} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases},$$

para $i, j = 1, 2, 3$, sendo $\omega^1 = \omega$.

Concluimos assim que os campos de vetores X_ω, X_{ω^2} e X_{ω^3} são ao menos de classe C^r , uma vez que ω é de classe C^r e ω^2, ω^3 são de classes C^∞ . Além disto,

$$P(q) = [X_{\omega^2}(q), X_{\omega^3}(q)],$$

pois se $v \in P(q)$, com $v = \sum_{i=1}^3 \alpha_i X_{\omega^i}(q) \in T_q U$, então $0 = \omega_q(v) = \alpha_1$, concluindo-se que $v \in [X_{\omega^2}(q), X_{\omega^3}(q)]$. Por outro lado, se $v \in [X_{\omega^2}(q), X_{\omega^3}(q)]$, obtemos $\omega_q(v) = 0$ e, portanto, $v \in P(q)$. E esta inclusão dupla entre os conjuntos comprova o enunciado. ■

Proposição 3.2.4 *Toda folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 2 e classe C^r ($r \geq 1$) em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, define um campo de 2-planos de classe C^{r-1} em U , o qual denotamos por $T\mathcal{F}$.*

Demonstração. Seja $P(p) = T_p\mathcal{F}$. Logo $P(p)$ é um subespaço de dimensão 2 contido em T_pU . Seja $(U_i, \mathbf{x}_i)$ uma carta local de $\mathcal{F}$. Segue da Observação 3.1.2 que, para todo $p \in U$, $P(p)$ é o subespaço gerado por vetores da forma $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = (d\mathbf{x})_p^{-1}(e_i)$, onde $i = 1, 2$ e e_i é o i -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Como $\mathbf{x}$ é de classe C^r segue que os campos $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, são de classe C^{r-1} e, portanto, P é de classe C^{r-1} . ■

Neste ponto, uma pergunta natural é: dado um campo de 2-planos P em um aberto U de $\mathbb{R}^3$, sob que condições existe uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 2 tal que para todo $q \in U$ tenha-se $T_q\mathcal{F} = P(q)$? A mesma pergunta pode ser feita para 1-formas diferenciais. Sua resposta é dada pelo *Teorema de Frobenius* que é abordado na próxima seção.

Antes disso porém, observemos que dada uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 2 de um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, vimos na Proposição 3.2.4 que a partir de uma folheação $\mathcal{F}$ obtemos um campo de 2-planos “tangente” à $\mathcal{F}$. A proposição abaixo mostra que a partir de $\mathcal{F}$ podemos também obter uma 1-forma localmente, isto é, dado $p \in U$ arbitrário, existe uma 1-forma diferencial ω definida numa vizinhança V de p , com $V \subset U$, tal que $T_q\mathcal{F} = \ker \omega_q$, para todo $q \in V$. Esta é uma consequência do seguinte resultado e está enunciado no Corolário 3.2.6.

Proposição 3.2.5 *Todo campo de 2-planos e classe C^r ($r \geq 0$) pode ser definido localmente como o núcleo de uma 1-forma diferencial sem singularidades e de classe C^r .*

Demonstração. Seja P um campo de 2-planos e classe C^r definido num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, e seja $p \in U$ qualquer. Considere dois campos de vetores de classe C^r , X_2 e X_3 tais que $P(q)$ é subespaço de T_qU gerado por $\{X_2(q), X_3(q)\}$, para todo $q \in V \subset U$ sendo V vizinhança de p (tais campos existem, pois P é de classe C^r).

Podemos, num processo análogo ao da demonstração da Proposição 3.2.3, definir um campo de vetores X_1 de classe C^∞ em V tal que X_1, X_2 e X_3 são linearmente independentes em uma vizinhança W de p , com $W \subset V$. Considerando agora a base dual $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ constituída por 1-formas diferenciais de classes C^∞ em W , temos assim

$$P(q) = \{v \in T_qU \mid \omega^1_q(v) = 0\},$$

A verificação desta igualdade de conjuntos é análoga ao que foi feito no fim da demonstração da Proposição 3.2.3. ■

Como consequência imediata dos resultados das Proposições 3.2.4 e 3.2.5, temos:

Corolário 3.2.6 *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão 2 e classe C^r ($r \geq 1$) de um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Dado $p \in U$, existe uma vizinhança V de p , com $V \subset U$, e uma 1-forma diferencial ω de classe C^r em V tal que $T_q\mathcal{F} = \ker \omega_q$, para todo $q \in V$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é induzida, localmente, por ω .*

Nosso objetivo agora é responder a questão levantada a respeito de quando é possível determinar uma folheação tendo-se um campo de 2-planos, o que é feito na próxima seção.

3.3 O Teorema de Frobenius

Um campo de 2-planos P de classe C^r ($r \geq 1$) definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ é dito **completamente integrável**, ou apenas **integrável**, se existe uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 2 e classe C^r em U tal que $T\mathcal{F} = P$, onde $T\mathcal{F}$ é o campo de planos tangente à $\mathcal{F}$ dado na Proposição 3.2.4. De modo análogo, uma 1-forma diferencial ω de classe C^r ($r \geq 1$) definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ é **integrável** quando existe uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 2 e classe C^r em U tal que $T_p\mathcal{F} = \ker \omega_p$, para todo $p \in U$, ou seja, se o campo de 2-planos definido por ω (dado na Proposição 3.2.3) for integrável.

O Teorema de Frobenius (Teorema 3.3.4 e Teorema 3.3.5) dá condições para que P e ω sejam integráveis. Antes de enunciá-los porém, vejamos algumas preliminares.

Definição 3.3.1 *Um campo de 2-planos P de classe C^r ($r \geq 1$) definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ é **involutivo** se dados X e Y campos de vetores de classes C^1 tais que, para todo $q \in U$, $X(q)$ e $Y(q)$ pertencem a $P(q)$, então $[X, Y](q) \in P(q)$.*

É comum dizer que um campo de vetores X é *tangente* ao campo de 2-planos P quando $X(q) \in P(q)$, para todo q no domínio de X . Daí, podemos reformular a definição de campo de 2-planos involutivos como dados X e Y campos vetoriais tangentes a P tem-se $[X, Y]$ tangente a P .

Na prova do Teorema de Frobenius para campos de planos (Teorema 3.3.4) nos apoiamos nos seguintes resultados, sobretudo no Lema 3.3.3 cuja demonstração damos apenas uma ideia.

Uma **ação local** de $\mathbb{R}^2$ num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ é uma aplicação $\varphi : V \rightarrow U$, onde V é um aberto de $\mathbb{R}^2 \times U$ contendo $\{0\} \times U$ e que, tal como um fluxo (veja página 9), satisfaz as seguintes propriedades:

- (a) $\varphi(0, p) = p$;
- (b) $\varphi(u + v, p) = \varphi(u, \varphi(v, p)) = \varphi(v, \varphi(u, p))$,

para todo $p \in U$ e desde que (u, p) , (v, p) e $(u + v, p)$ pertençam a V .

Importante frisar que para $x \in \mathbb{R}^2$ ($x \in V$) fixado, a aplicação $p \in U \mapsto \varphi_x(p) = \varphi(x, p)$ é um difeomorfismo de classe C^r , relação equivalente também ao caso do fluxo. Outro fato importante é que a ação local φ da definição anterior é gerada por dois campos de vetores definidos em U (para mais detalhes ver [1], página 212).

Lema 3.3.2 ([1], pág. 214) *Sejam X_1 e X_2 campos de vetores de classes C^r ($r \geq 1$) no aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Se $[X_1, X_2] = 0$, então existe uma base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e uma ação local*

$\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \times U \rightarrow U$, V aberto, tal que $\varphi(tv_i, p) = X_{it}(p)$, para todo $(t, p) \in \mathbb{R} \times U$, desde que ambos estejam definidos.

Lema 3.3.3 ([1], pág. 214) *Sejam X_1 e X_2 campos de vetores de classe C^r ($r \geq 1$) definidos num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ tais que $[X_1, X_2] = 0$. Suponhamos que para todo $q \in U$ o conjunto $\{X_1(q), X_2(q)\}$ gera o subespaço $P(q) \subset T_q U$. Então o campo de 2-planos P de classe C^r é tangente a uma única folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 2 e classe C^r .*

Demonstração. O objetivo é mostrar como são as cartas da referida folheação, e assim verificar que é válido o item (c) da Definição 3.1.1. Posteriormente, comprovar a unicidade de tal folheação.

Seja $\varphi : V \rightarrow U$ a ação local do Lema 3.3.2. Dado $p \in U$, fixemos um intervalo aberto I mergulhado em U , com $p \in I$, tal que para todo $q \in I$ tenhamos:

$$T_q U = P(q) \oplus T_q I. \quad (3.2)$$

Como V é aberto, existe uma bola aberta $B \subset \mathbb{R}^2$ com $0 \in B$ e tal que $B \times I \subset V$.

Coloquemos agora $\psi = \varphi|_{B \times I}$. Dado $(u, t) \in \mathbb{R}^2 \times T_p I$, com $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, temos:

- $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \psi(0, p) dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \psi(0, p) dx_2 \right) (u) = \alpha_1 X_1(p) + \alpha_2 X_2(p)$, e
- $\frac{\partial}{\partial x_3} \psi(0, p) dx_3(t) = t$.

Da condição (3.2) e por $\psi_0 : I \rightarrow \psi_0(I)$ ser um difeomorfismo, concluímos que $d\psi_0(p) : \mathbb{R}^2 \times T_p I \rightarrow T_p U$ é um isomorfismo.

Pelo Teorema da Função Inversa 1.1.10 existem bolas abertas menores $B' \subset B$ e $I' \subset I$ tais que $0 \in B'$, $p \in I'$ e $\psi' = \psi|_{B' \times I'} : B' \times I' \rightarrow \psi(B' \times I') \subset U$ é um difeomorfismo de classe C^r sobre o aberto $\psi(B' \times I')$ de U .

Coloquemos $W = \psi(B' \times I')$ e $\mathbf{x} = \psi'^{-1}$. Então $(W, \mathbf{x})$ é uma carta local de classe C^r em U e as superfícies da forma $\mathbf{x}^{-1}(B' \times \{q\})$, $q \in I'$, são as placas de uma folheação $\mathcal{F}|_W$, de classe C^r , definida em W e tangente a P . Para comprovar esta afirmação procedemos tomando duas cartas cujos domínios se interceptam tal como feito no Exemplo 3.1.3.

A folheação $\mathcal{F}|_W$ é única em W que é tangente a P , pois as folhas de $\mathcal{F}|_W$ são transformadas por $\mathbf{x}$ nas bolas abertas da forma $B' \times \{q\}$, com $q \in I'$. Por outro lado o campo de planos P é transformado por $d\mathbf{x}$ no campo de planos “horizontal”:

$$P^*(q) = d\mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(q)) \cdot P(\mathbf{x}^{-1}(q)) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \quad 0 \in T_q I',$$

pois vimos que as derivadas parciais de uma parametrização compõem uma base para o espaço tangente e, com isso, o mesmo vale para as derivadas parciais de uma carta local.

A folheação de $B' \times I'$ cujas folhas são $B' \times \{q\}$, para $q \in I'$, é a única em $B' \times I'$ que é tangente ao campo de planos $q \mapsto \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, provando a afirmação.

Logo, o conjunto de todas as cartas $(W, \mathbf{x})$ construídas como anteriormente definem uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r em U , uma vez que elas coincidem na interseção do domínio de duas cartas quaisquer. ■

Teorema 3.3.4 (Teorema de Frobenius para campos de 2-planos) *Seja P um campo de 2-planos de classe C^r ($r \geq 1$) definido em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Se P é involutivo então P é completamente integrável. Além disto, a folheação determinada por P é única em U .*

Demonstração. Fixemos $p \in U$. Da definição de campos de 2-planos de classe C^r existem campos de vetores Y_1 e Y_2 , de classes C^r , definidos numa vizinhança V de p , com $V \subset U$, tal que $P(q)$ é o subespaço gerado por $\{Y_1(q), Y_2(q)\}$, para todo $q \in V$.

Podemos supor que V seja o domínio de uma carta local $\mathbf{x} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ , pois caso não seja podemos tomar um aberto menor e chamá-lo de V .

Para cada $j = 1, 2$ podemos escrever:

$$Y_j = a_{1j} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{2j} \frac{\partial}{\partial x_2} + a_{3j} \frac{\partial}{\partial x_3},$$

onde $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$ é a base associada à carta local $\mathbf{x}$ e $a_{ij} : V \rightarrow \mathbb{R}$ são de classe C^r , para $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$.

Consideremos a matriz $A = (a_{ij})$, onde $1 \leq i \leq 3$ e $j = 1, 2$. Como $Y_1(p)$ e $Y_2(p)$ são linearmente independentes, a matriz A tem posto 2, isto é, existe uma submatriz B de A , de ordem 2, tal que $\det B(p) \neq 0$. Como o determinante é uma função contínua, temos $\det B(q) \neq 0$, para todo $q \in W$, uma vizinhança de p contida em V .

Permutando-se as variáveis x_1, x_2 e x_3 , se necessário, podemos supor que s.p.g. que $B = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$. Desta forma a matriz $B^{-1} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ está definida e tem como coeficientes funções de classe C^r definidas em W .

Coloquemos $X_j = b_{1j}Y_1 + b_{2j}Y_2$, para $j = 1, 2$.

Segue do fato de $\det B^{-1}(q) \neq 0$ que $\{X_1(q), X_2(q)\}$ é uma base de $P(q)$, para todo $q \in W$, pois só não seria caso $b_{1j} = \lambda b_{2j}$, para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $j = 1, 2$, o que não acontece. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} X_j &= b_{1j} \left(a_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{21} \frac{\partial}{\partial x_2} + a_{31} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + b_{2j} \left(a_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} + a_{32} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Desta forma, temos:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Logo, obtemos:

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + (a_{31}b_{1j} + a_{32}b_{2j})\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_j} + c_{3j}\frac{\partial}{\partial x_3},$$

onde $c_{3j} = a_{31}b_{1j} + a_{32}b_{2j}$, para $j = 1, 2$.

Afirmamos que $[X_1, X_2] = 0$. De fato, do Lema 1.3.2 vem que:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= \left(c_{31}\frac{\partial c_{32}}{\partial x_3} - c_{32}\frac{\partial c_{31}}{\partial x_3} + \frac{\partial c_{32}}{\partial x_1} - \frac{\partial c_{31}}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \\ &:= c \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Como P é involutivo, então $[X_1, X_2](q) \in P(q)$. Daí, como $\{X_1(q), X_2(q)\}$ é base de $P(q)$, para todo $q \in W$, devemos ter:

$$c \frac{\partial}{\partial x_3} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + \left(\beta_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right),$$

onde $\beta_3 = \alpha_1 c_{31} + \alpha_2 c_{32}$.

Da relação acima podemos concluir que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Logo, $[X_1, X_2] = 0$.

Segue do Lema 3.3.3 que existe uma única folheação de classe C^r e dimensão 2 em W , $\mathcal{F}|_W$, tal que $T\mathcal{F}|_W = P|_W$. Visto isto, existe uma cobertura $\{W_i\}_{i \in \Lambda}$ do aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ por abertos tal que, para cada $i \in \Lambda$ está definida uma folheação $\mathcal{F}_i$ em W_i . Da unicidade de tais folheações segue que se $W_i \cap W_j \neq \emptyset$, então $\mathcal{F}_i|_{W_i \cap W_j} = \mathcal{F}_j|_{W_i \cap W_j}$, o que implica na unicidade da folheação $\mathcal{F}$ em U tal que $T\mathcal{F} = P$. ■

Vejamos agora a versão do Teorema de Frobenius para 1-formas diferenciais.

Teorema 3.3.5 (Teorema de Frobenius para 1-formas) *Seja ω uma 1-forma diferencial de classe C^r ($r \geq 1$), sem singularidades num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Se $\omega \wedge d\omega = 0$ então ω é completamente integrável.*

Para a prova deste teorema precisamos dos seguintes lemas.

Lema 3.3.6 *Sejam ω uma 1-forma diferencial e η uma 2-forma diferencial, sem singularidades, definidas no aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e tais que $\omega \wedge \eta = 0$. Dado $p \in U$ existem uma vizinhança V de p , com $V \subset U$, e uma 1-forma α definida em V tal que $\eta = \omega \wedge \alpha$.*

Demonstração. Como ω não possui singularidades, podemos tomar 1-formas diferenciais ω^2 e ω^3 de classes C^∞ definidas numa vizinhança V de p , com $V \subset U$, tais que, para todo $q \in V$, $\{\omega_q, \omega_q^2, \omega_q^3\}$ é uma base de $(T_q U)^*$.

Pelo Teorema 2.4.2 podemos escrever a 2-forma η como o produto exterior entre as 1-formas consideradas, obtendo:

$$\eta = b_{12} \omega \wedge \omega^2 + b_{13} \omega \wedge \omega^3 + b_{23} \omega^2 \wedge \omega^3.$$

Como $\omega \wedge \eta = 0$, segue que $\left(\sum_{i < j} b_{ij} \omega^i \wedge \omega^j \right) \wedge \omega = 0$, ou seja, $b_{23} = 0$. Logo, temos:

$$\eta = b_{12} \omega \wedge \omega^2 + b_{13} \omega \wedge \omega^3 = \omega \wedge \alpha,$$

onde $\alpha = b_{12} \omega^2 + b_{13} \omega^3$. ■

Importante frisar que segue da Proposição 2.5.7 (b) que $\omega \wedge \eta = \eta \wedge \omega$; o que torna este resultado mais amplo.

Lema 3.3.7 *Sejam ω uma 1-forma diferencial de classe C^r ($r \geq 1$) definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, sem singularidades, e X e Y dois campos de vetores de classe C^1 em U . Então,*

$$d\omega(X, Y) = d(\omega(X)) \cdot Y - d(\omega(Y)) \cdot X + \omega([X, Y]),$$

onde denotamos por $\omega(X)$ a função $q \mapsto \omega_q(X(q))$.

Demonstração. Observe que queremos mostrar a relação:

$$(d\omega)_q(X(q), Y(q)) = d(\omega(X))(q) \cdot Y(q) - d(\omega(Y))(q) \cdot X(q) + \omega_q([X(q), Y(q)]).$$

Por simplicidade omitimos o ponto q . Suponha que $\omega = \sum_{i=1}^3 a_i dx_i$, onde $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^r , $i = 1, 2, 3$, e $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$ a base dual da base canônica de $\mathbb{R}^3$. Coloque $X = \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_{i=1}^3 c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Temos:

$$(i) \quad \omega(X) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i,$$

$$\omega(Y) = \sum_{i=1}^3 a_i c_i \text{ e, pelo Lema 1.3.2, temos:}$$

$$\omega([X, Y]) = \sum_{i=1}^3 a_i \left(\sum_{j=1}^3 b_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j} - c_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j} a_i \left(b_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j} - c_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right).$$

$$(ii) \quad d\omega = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \text{ onde } a_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}. \text{ Logo,}$$

$$d\omega(X, Y) = \sum_{i < j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j \cdot (X, Y)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i < j} a_{ij} \begin{vmatrix} dx_i(X) & dx_i(Y) \\ dx_j(X) & dx_j(Y) \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i < j} a_{ij} \begin{vmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i < j} a_{ij} (b_i c_j - b_j c_i).
\end{aligned}$$

Por (i) temos:

$$(d\omega(X)) \cdot Y = \sum_{i,j} \frac{\partial(a_i b_i)}{\partial x_j} c_j = \sum_{i,j} c_j \left(a_i \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + b_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \text{ e}$$

$$(d\omega(Y)) \cdot X = \sum_{i,j} \frac{\partial(a_i c_i)}{\partial x_j} b_j = \sum_{i,j} b_j \left(a_i \frac{\partial c_i}{\partial x_j} + c_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right).$$

(iii) Portanto, pelos itens anteriores, segue que:

$$\begin{aligned}
(d\omega(X)) \cdot Y - (d\omega(Y)) \cdot X &= \sum_{i,j} \left(c_j a_i \frac{\partial b_i}{\partial x_j} + c_j b_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) + \\
&\quad \sum_{i,j} \left(-b_j a_i \frac{\partial c_i}{\partial x_j} - b_j c_i \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_{i,j} a_i \left(c_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \right) + \\
&\quad \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} (b_i c_j - b_j c_i).
\end{aligned}$$

Somando a expressão de $\omega([X, Y])$ em (i) com (iii), obtemos:

$$d(\omega(X)) \cdot Y - d(\omega(Y)) \cdot X + \omega([X, Y]) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} (b_i c_j - b_j c_i).$$

Porém,

$$\sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} (b_i c_j - b_j c_i) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) (b_i c_j - b_j c_i) = d\omega(X, Y),$$

como queríamos mostrar. ■

Demonstração do Teorema 3.3.5. Seja P o campo de 2-planos obtido pela 1-forma ω de acordo com a Proposição 3.2.3. Suponha que X e Y são dois campos de classe C^1

tangentes a P em U . Como $\omega \wedge d\omega = 0$, do Lema 3.3.6 obtemos $d\omega = \omega \wedge \alpha$ e, portanto,

$$d\omega(X, Y) = \begin{vmatrix} \omega(X) & \omega(Y) \\ \alpha(X) & \alpha(Y) \end{vmatrix} = \omega(X)\alpha(Y) - \omega(Y)\alpha(X) = 0,$$

uma vez que $\omega(X) = \omega(Y) = 0$, pois X e Y são tangentes a P que é dado pelo $\ker \omega_q$ conforme a proposição mencionada, ou seja, para todo $q \in U$ temos $X(q)$ e $Y(q)$ pertencem a $P(q)$, logo, $\omega_q(X(q)) = \omega_q(Y(q)) = 0$.

Por outro lado, pelo Lema 3.3.7, temos

$$0 = d\omega(X, Y) = d(\omega(X)) \cdot Y - d(\omega(Y)) \cdot X + \omega([X, Y]) = \omega([X, Y]),$$

mais uma vez por $\omega(X) = \omega(Y) = 0$. Assim mostramos que $[X, Y]$ é tangente a P e, portanto, P é involutivo, definindo pelo Teorema 3.3.4 uma folheação de dimensão 2 de U . ■

É interessante observar que em $\mathbb{R}^2$ toda 1-forma diferenciável ω induz uma folheação, uma vez que sempre tem-se $\omega \wedge d\omega = 0$. Por fim, acompanhemos um exemplo prático que se enquadra no problema que o teorema anterior resolve.

Exemplo 3.3.8 A 1-forma $\eta = x_2 dx_1 - 2x_1 dx_2$ em $\mathbb{R}^3$ satisfaz $\eta \wedge d\eta = 0$ apesar de não ser fechada, pois $d\eta = dx_2 \wedge dx_1 - 2dx_1 \wedge dx_2 = -3dx_1 \wedge dx_2 \neq 0$, e temos

$$\begin{aligned} \eta \wedge d\eta &= (x_2 dx_1 - 2x_1 dx_2) \wedge (-3dx_1 \wedge dx_2) \\ &= -3x_2 dx_1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + 6x_1 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = 0. \end{aligned}$$

Analisando a 1-forma η vemos que o conjunto de singularidades de η é o eixo x_3 . Assim, η define uma folheação de $U = \mathbb{R}^3 - \{\text{eixo } x_3\}$.

O núcleo de η_q , para $q \in U$ qualquer, define, pela Proposição 3.2.3, um campo de 2-planos $P(q)$ que é tangente à folha que contém o ponto q .

Perceba, agora, que o campo de vetores $X(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ é tangente ao plano $P(q)$, pois, suponha $q = (y_1, y_2, y_3)$, logo

$$\eta_q = y_2 dx_1 - 2y_1 dx_2 \quad \Rightarrow \quad \eta_q(X(q)) = y_2 2y_1 - 2y_1 y_2 = 0.$$

Assim, as folhas de η são produtos do eixo x_3 com as órbitas do campo $X = 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Este campo de vetores possui autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ representando no plano $P(q)$ um nó instável. Veja a Figura 3.5.

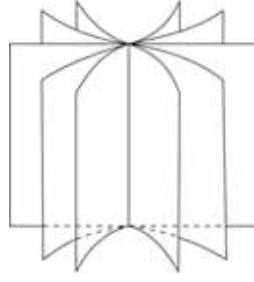


Figura 3.5: Folheação definida por $\eta = x_2 dx_1 - 2x_1 dx_2$.

3.4 Estrutura topológica das folhas de ω na vizinhança de uma singularidade

Verificamos nesta seção que, em certos casos, é possível determinar a estrutura topológica das folhas de uma 1-forma ω integrável próximas de uma singularidade isolada.

Ao longo desta seção ω é uma 1-forma diferenciável de classe C^r definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ e dada por:

$$\omega = \sum_{i=1}^3 a_i dx_i, \quad (3.3)$$

onde $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^r , $i = 1, 2, 3$. Além disso, supomos que $\omega \wedge d\omega = 0$.

Primeiramente note que se ω é uma 1-forma de classe C^r definida em $\mathbb{R}^m$ e satisfazendo a relação $\omega \wedge d\omega = 0$, considerando a aplicação $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^r , obtemos pela Proposição 2.7.3 (e) que o pullback $\psi^*\omega$ também satisfaz a relação $\psi^*\omega \wedge d(\psi^*\omega) = 0$.

Suponhamos que 0 seja uma singularidade de ω . Consideremos a matriz:

$$B = (b_{ij}) = \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(0) \right), \quad 1 \leq i, j \leq 3. \quad (3.4)$$

Então, pela diferenciabilidade de a_i , podemos escrever

$$a_i(x) = \sum_{j=1}^3 b_{ij}x_j + R_i,$$

com $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_i(x)}{\|x\|} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Logo,

$$\omega = \sum_{i,j=1}^3 b_{ij}x_j dx_i + \sum_{i=1}^3 R_i dx_i = \bar{\omega} + R, \quad (3.5)$$

onde $R = \sum_{i=1}^3 R_i dx_i$ e

$$\bar{\omega} = \sum_{i,j=1}^3 b_{ij} x_j dx_i. \quad (3.6)$$

A 1-forma $\bar{\omega}$ é chamada **parte linear de ω em 0**.

De acordo com as contas feitas no Exemplo 2.7.2 (b), temos:

$$(d\omega)_0 = \sum_{i<j} (b_{ji} - b_{ij}) dx_i \wedge dx_j = d\bar{\omega}. \quad (3.7)$$

Lema 3.4.1 *A 1-forma $\bar{\omega}$ dada acima é integrável.*

Demonstração. Como ω é completamente integrável, utilizando as Proposições 2.5.7 (c) e 2.7.3 (a), temos:

$$\begin{aligned} 0 = \omega \wedge d\omega &= (\bar{\omega} + R) \wedge (d(\bar{\omega} + R)) \\ &= (\bar{\omega} + R) \wedge (d\bar{\omega} + dR) \\ &= \bar{\omega} \wedge d\bar{\omega} + \bar{\omega} \wedge dR + R \wedge d\bar{\omega} + R \wedge dR. \end{aligned}$$

Desta expressão e da equação (3.5), vemos que a parte linear de $\omega \wedge d\omega$ é $\bar{\omega} \wedge d\bar{\omega}$.

Portanto $\bar{\omega} \wedge d\bar{\omega} = 0$. ■

Este lema nos auxilia na seguinte proposição, onde também usamos resultados do Capítulo 2 para sua prova.

Proposição 3.4.2 *Seja ω uma 1-forma de classe C^1 completamente integrável dada pela equação (3.3), e $0 \in \mathbb{R}^3$ uma singularidade de ω . Se B é a matriz dada em (3.4), então temos duas possibilidades:*

(a) $(d\omega)_0 = 0$. Neste caso B é simétrica;

(b) $(d\omega)_0 \neq 0$. Neste caso B tem posto menor ou igual a 2.

Demonstração. Suponhamos $(d\omega)_0 = 0$. Então, pela equação (3.7) temos $d\bar{\omega} = 0$ e assim $b_{ij} = b_{ji}$. Logo, B é simétrica, de onde segue o item (a).

Provemos agora o item (b). Uma consequência da hipótese é que $d\bar{\omega} \neq 0$. Seja $c_{ij} = b_{ji} - b_{ij}$ e portanto $d\bar{\omega} = \sum_{i<j} c_{ij} dx_i \wedge dx_j$, para $i, j = 1, 2, 3$. Como $d\bar{\omega} \neq 0$, podemos supor $c_{12} \neq 0$, por exemplo. Sejam

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_2 + \frac{c_{13}}{c_{12}} x_3, \quad \text{e} \\ f_2(x) &= c_{21} x_1 + c_{23} x_3, \end{aligned}$$

pois $c_{11} = c_{22} = 0$. Perceba que $c_{ij} = -c_{ji}$.

Podemos verificar, com simples cálculos, que $d\bar{\omega} = df_1 \wedge df_2$, uma vez que $df_1 = dx_2 + \frac{c_{13}}{c_{12}}dx_3$ e $df_2 = c_{21}dx_1 + c_{23}dx_3$. Além disso, temos $d(f_1 df_2) = df_1 \wedge df_2$, pois:

$$\begin{aligned} d(f_1 df_2) &= d \left[\left(x_2 + \frac{c_{13}}{c_{12}} x_3 \right) (c_{21} dx_1 + c_{23} dx_3) \right] \\ &= d \left(c_{21} x_2 dx_1 + c_{23} x_2 dx_3 - c_{13} x_3 dx_1 + \frac{c_{13} c_{23}}{c_{12}} x_3 dx_3 \right) \\ &= -c_{21} dx_1 \wedge dx_2 + c_{13} dx_1 \wedge dx_3 + c_{23} dx_2 \wedge dx_3 \\ &= df_1 \wedge df_2. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que:

$$d\bar{\omega} = df_1 \wedge df_2 = d(f_1 df_2) \Rightarrow d\bar{\omega} - d(f_1 df_2) = 0 \Rightarrow d(\bar{\omega} - f_1 df_2) = 0.$$

Pelo Lema de Poincaré (Teorema 2.2.3) existe uma função real g definida numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^3$ de grau 2 tal que,

$$\bar{\omega} - f_1 df_2 = dg.$$

Defina agora $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $T(x) = y$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (f_1(x), f_2(x), x_3) = (y_1, y_2, y_3)$.

Note que T é linear. Verificando a injetividade de T concluímos que T é bijetora, pois o domínio e o contra-domínio têm as mesmas dimensões. Com efeito, suponha que $T(x) = T(\bar{x})$, com $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. Logo, $x_3 = \bar{x}_3$. Assim, a partir das expressões de f_1 e f_2 é imediato obter $x_1 = \bar{x}_1$ e $x_2 = \bar{x}_2$ e, portanto, $x = \bar{x}$. Concluímos assim que T é invertível e, portanto, como T é linear, é um difeomorfismo.

Neste novo sistema de coordenadas, temos:

$$\begin{aligned} (T^{-1})^* \bar{\omega} &= (T^{-1})^* (f_1 df_2 + dg) \\ &= (T^{-1})^* (f_1 df_2) + (T^{-1})^* dg \\ &= (T^{-1})^* f_1 (T^{-1})^* df_2 + (T^{-1})^* dg \\ &= (f_1 \circ (T^{-1})) \cdot d((T^{-1})^* f_2) + d((T^{-1})^* g) \\ &= (f_1 \circ T^{-1}) d(f_2 \circ T^{-1}) + d(g \circ T^{-1}) \\ &= y_1 dy_2 + dh, \end{aligned}$$

com $h = g \circ T^{-1}$.

Utilizando novamente a relação $\bar{\omega} \wedge d\bar{\omega} = 0$, lembrando que o pullback preserva a

integrabilidade da 1-forma diferencial e do fato de que $d(y_1 dy_2) = dy_1 \wedge dy_2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 (T^{-1})^*(\bar{\omega} \wedge d\bar{\omega}) &= 0 \Rightarrow 0 = (T^{-1})^*\bar{\omega} \wedge (T^{-1})^*(d\bar{\omega}) \\
 &= (T^{-1})^*\bar{\omega} \wedge d((T^{-1})^*\bar{\omega}) \\
 &= (y_1 dy_2 + dh) \wedge d(y_1 dy_2 + dh) \\
 &= (y_1 dy_2 + dh) \wedge (d(y_1 dy_2) + d(dh)) \\
 &= y_1 dy_2 \wedge d(y_1 dy_2) + dh \wedge d(y_1 dy_2) \\
 &= y_1 dy_2 \wedge dy_1 \wedge dy_2 + dh \wedge dy_1 \wedge dy_2 \\
 &= dy_1 \wedge dy_2 \wedge dh.
 \end{aligned}$$

Consequentemente $\frac{\partial h}{\partial y_3} = 0$ e, portanto, h só depende de y_1 e y_2 . Logo,

$$\begin{aligned}
 (T^{-1})^*\bar{\omega} &= y_1 dy_2 + dh \\
 &= \frac{\partial h}{\partial y_1} dy_1 + \left(y_1 + \frac{\partial h}{\partial y_2} \right) dy_2 \\
 &= (e_{11}y_1 + e_{12}y_2)dy_1 + (e_{21}y_1 + e_{22}y_2)dy_2,
 \end{aligned}$$

uma vez que, como $h = g \circ T^{-1}$, com g de grau 2 e T linear, segue que h é uma função quadrática dependendo apenas das variáveis y_1 e y_2 . Portanto a matriz de $(T^{-1})^*\bar{\omega}$ tem posto menor ou igual a 2, de onde concluímos que a matriz B de $\bar{\omega}$ tem posto menor ou igual a 2. ■

Definição 3.4.3 Dizemos que 0 é uma singularidade **simples**, ou **não-degenerada**, de ω quando $\det B \neq 0$, onde B é a matriz dada na expressão (3.4).

Um exemplo de singularidade simples já tratado neste texto é o Exemplo 3.2.2.

As singularidades simples são isoladas, o que não ocorre necessariamente para singularidade *não simples*, como mostra o Exemplo 3.3.8. Para verificar que singularidades simples são isoladas, tome a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^r dada por $f(x) = (a_1(x), a_2(x), a_3(x))$. Então x é singularidade de ω se, e somente se, $f(x) = 0$. Por 0 ser uma singularidade simples de ω então $f(0) = 0$ e a matriz B é invertível. Portanto, pelo Teorema da Aplicação Inversa (1.1.10), existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ contendo 0 tal que a restrição $f|_U$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(0)$, o que comprova que f é bijetiva numa vizinhança de 0 e, assim, nesta vizinhança temos 0 como a única singularidade de ω .

Perceba que como a dimensão do espaço em que trabalhamos neste texto é 3 então, se 0 é uma singularidade simples de ω , necessariamente tem-se $(d\omega)_0 = 0$, pois caso contrário, pela Proposição 3.4.2, o posto de B seria menor ou igual a 2, o que não ocorre pois $\det B \neq 0$. Logo, $d\bar{\omega} = 0$. Portanto, segue do Lema de Poincaré (Teorema 2.2.3) que

$\bar{\omega} = df$, onde, pela equação (3.6), temos $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^3 b_{ij}x_j$, para $i = 1, 2, 3$, ou seja, f é uma função quadrática.

Agora, observemos que a matriz hessiana de f em 0 é a matriz B , cujo determinante é não nulo. Assim, f está nas hipóteses do seguinte teorema:

Teorema 3.4.4 (Lema de Morse) ([9], pág. 6) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e p um ponto crítico de f tal que o determinante da matriz hessiana de f em p é não nulo. Então existe uma mudança de coordenadas linear tal que, numa vizinhança de p , f se escreve como:*

$$f(q) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2.$$

Definição 3.4.5 *Quando $\bar{\omega} = \pm d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, em algum sistema de coordenadas linear, dizemos que 0 é um **centro** de ω .*

Assim, para $\bar{\omega} = \pm d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, como $f(x_1, x_2, x_3) = \pm(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ é uma submersão fora da singularidade 0, segue que as folhas de $\bar{\omega}$ são as esferas $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2$. Mais que isso, mostramos a seguir que se ω é integrável e de classe C^2 , então suas folhas são difeomorfas a esferas em uma vizinhança U da origem em $\mathbb{R}^3$. Para provar esta afirmação, vamos usar o seguinte resultado, cujo enunciado adaptamos para este caso e cuja demonstração envolve pré-requisitos de Topologia Algébrica não estudados, mas que pode ser consultada na referência citada.

Teorema 3.4.6 (de estabilidade de Reeb) ([1], pág. 73) *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de dimensão 2 e classe C^r ($r \geq 1$) de um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ que contenha uma folha F compacta. Então existe uma vizinhança V de F onde todas as folhas são difeomorfas a F .*

O seguinte teorema, enfim, descreve a estrutura topológica das folhas de uma 1-forma integrável na vizinhança de uma singularidade centro.

Teorema 3.4.7 (de Reeb) *Seja ω uma 1-forma integrável de classe C^2 definida em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^3$. Supondo que 0 seja um centro para ω , então existe uma vizinhança U de 0 na qual todas as folhas de ω em $U - \{0\}$ são difeomorfas à esfera S^2 .*

Demonstração. Como 0 é um centro para ω , então existe uma mudança linear de variáveis tal que $\bar{\omega} = df$, com $f(x_1, x_2, x_3) = \pm(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Mediante mais uma mudança de variáveis linear podemos supor:

$$\bar{\omega} = dg = d\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 y_i^2\right),$$

basta fazer $x_i = \frac{y_i}{\sqrt{2}}$, para $i = 1, 2, 3$. Logo, $\bar{\omega} = y_1 dy_1 + y_2 dy_2 + y_3 dy_3$.

Considere a aplicação $\psi : \mathbb{R} \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\psi(t, u) = t u.$$

Afirmamos que as restrições $\psi_1 = \psi|_{(0, \infty) \times S^2}$ e $\psi_2 = \psi|_{(-\infty, 0) \times S^2}$ são difeomorfismos sobre $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Provemos esta afirmação para ψ_1 , pois o raciocínio é análogo para ψ_2 .

- ψ_1 é injetiva. Suponha que $\psi_1(t_1, u_1) = \psi_1(t_2, u_2)$. Temos assim que $t_1 u_1 = t_2 u_2 \Rightarrow \|t_1 u_1\| = \|t_2 u_2\| \Rightarrow |t_1| \|u_1\| = |t_2| \|u_2\| \Rightarrow t_1 = t_2$, pois $\|u_k\| = 1$ e $|t_k| = t_k > 0$, para $k = 1, 2$. Portanto, $u_1 = u_2$ de onde segue a injetividade.
- ψ_1 é sobrejetiva. Dado $p \in (\mathbb{R}^3 - \{0\})$ podemos escrevê-lo como $p = t u$, com $t \in (0, \infty)$ e $u \in S^2$, pois $p = \|p\| \frac{p}{\|p\|} := t u$. Logo, $\psi_1(t, u) = t u = \|p\| \frac{p}{\|p\|} = p$. Portanto, ψ_1 é sobrejetiva e assim, bijetiva.
- ψ_1 é diferenciável. Perceba que podemos ver ψ_1 como a restrição de uma aplicação $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $H(t, u) = t u$ e, assim, podemos tomar um aberto do domínio de H para avaliar quanto a sua diferenciabilidade, uma vez que não seria possível julgar quanto a diferenciabilidade de ψ_1 diretamente, pois S^2 não é um aberto. Como H é diferenciável, concluímos que ψ_1 é diferenciável.
- ψ_1^{-1} é diferenciável. Com efeito, do item anterior sabemos que ψ_1 possui inversa que denotamos por ψ_1^{-1} . A expressão da aplicação ψ_1^{-1} em $p \in (\mathbb{R}^3 - \{0\})$ é da forma $\psi_1^{-1}(p) = \left(\|p\|, \frac{p}{\|p\|} \right) \in (0, \infty) \times S^2 \subset \mathbb{R}^4$. Como a função norma é diferenciável fora da origem segue que ψ_1^{-1} é composta por diferenciáveis e, portanto, também é diferenciável quando $p \neq 0$. Concluímos assim que ψ_1 é um difeomorfismo sobre $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

Note que, como ω é integrável, sabemos que $\psi_j^* \omega$ é uma 1-forma diferencial integrável, para $j = 1, 2$. Disto decorre que $\psi_j^* \omega$ define uma folheação de dimensão 2 de $(0, \infty) \times S^2$, para $j = 1$, e de $(-\infty, 0) \times S^2$, para $j = 2$, tal que se F é uma folha de $\psi_1^* \omega$ contida em $(0, \infty) \times S^2$, por exemplo, então $\psi(F)$ é uma folha da folheação determinada por ω de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

Para provarmos o teorema basta provarmos que numa vizinhança V de $\{0\} \times S^2$, todas as folhas de $\psi_j^* \omega$ são difeomorfas a S^2 , para $j = 1$ ou 2 . Assim, como ψ_1 e ψ_2 são difeomorfismos, concluímos que existe uma vizinhança U de $\{0\} \subset \mathbb{R}^3$ onde as folhas da folheação de ω em $U - \{0\}$ também são difeomorfas a S^2 (note que para qualquer $u \in S^2$ tem-se $\psi(t_0, u) = 0$ apenas quando $t_0 = 0 \in \mathbb{R}$).

Coloquemos agora:

$$\omega = dg + \sum_{i=1}^3 R_i dx_i, \quad \text{com } R_i(0) = 0 \text{ e } dR_i(0) = 0. \quad (3.8)$$

Temos, pelos resultados do Capítulo 2, Seções 2.2 e 2.5, que, para $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned}\psi_j^* \omega &= \psi_j^*(dg) + \psi_j^* \left(\sum_{i=1}^3 R_i dx_i \right) \\ &= d(g \circ \psi_j) + \sum_{i=1}^3 \psi_j^*(R_i dx_i)\end{aligned}$$

Sabendo que $(g \circ \psi_j)(t, u) = g(\psi_j(t, u)) = g(tu) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 t^2 u_i^2 = \frac{t^2}{2}$, onde $u = (u_1, u_2, u_3) \in S^2$ e $j = 1, 2$, segue que $d(g \circ \psi_j) = tdt$. Além disso, temos:

$$\begin{aligned}\psi_j^* \omega(t, u) &= d(g \circ \psi_j)(t, u) + \sum_{i=1}^3 R_i(\psi_j(t, u)) dx_i \cdot d\psi_j(t, u) \\ &= d(g \circ \psi_j)(t, u) + \sum_{i=1}^3 R_i(tu) d(tu_i).\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\psi_j^* \omega = tdt + \sum_{i=1}^3 R_i(tu) d(tu_i).$$

Sabemos por (3.8) e da hipótese de ω ser de classe C^2 que R_i é de classe C^2 , $R_i(0) = 0$ e $dR_i(0) = 0$. Pela Fórmula de Taylor (veja Observação 1.1.14) numa vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^3$, temos $R_i(tu) = t(\overline{R_i}(tu))$, onde $\lim_{t \rightarrow 0} \overline{R_i}(tu) = 0$.

Agora, defina a aplicação $S_i : \mathbb{R} \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, de classe C^1 , como $S_i(t, u) = \overline{R_i}(tu)$, para $i = 1, 2, 3$. Logo,

$$R_i(tu) = t(S_i(t, u)),$$

com $\lim_{t \rightarrow 0} S_i(t, u) = 0$.

Consequentemente, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\psi_j^* \omega &= tdt + \left(\sum_{i=1}^3 t(S_i(t, u)) d(tu_i) \right) \\ &= tdt + \left(\sum_{i=1}^3 t(S_i(t, u))(tdu_i + u_i dt) \right) \\ &= tdt + \left(\sum_{i=1}^3 t(S_i(t, u) u_i) dt \right) + \left(\sum_{i=1}^3 t^2(S_i(t, u)) du_i \right) \\ &:= t(dt + \eta),\end{aligned}$$

onde η é a 1-forma definida em $\mathbb{R} \times S^2$ por:

$$\eta = \left(\sum_{i=1}^3 u_i S_i dt \right) + t \sum_{i=1}^3 S_i du_i.$$

Seja $\tilde{\omega}$ a 1-forma definida em $\mathbb{R} \times S^2$ da seguinte forma:

$$\tilde{\omega} = \begin{cases} \frac{1}{t} (\psi_1^* \omega), & \text{para } t > 0 \\ \frac{1}{t} (\psi_2^* \omega), & \text{para } t < 0 \\ dt, & \text{para } t = 0 \end{cases}.$$

Como $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\psi_j^* \omega) = \lim_{t \rightarrow 0} (dt + \eta) = dt$, segue que $\tilde{\omega}$ é de classe C^1 e integrável, $j = 1, 2$.

Note também que as folhas definidas pela folheação de $\tilde{\omega}$ coincidem com as folhas de $\psi_j^* \omega$ em $(\mathbb{R} - \{0\}) \times S^2$, para $j = 1, 2$.

Afirmamos que $\{0\} \times S^2$ é uma folha de $\tilde{\omega}$. De fato, para $t = 0$, temos $\tilde{\omega} = dt$ em $\mathbb{R} \times S^2$ com coordenadas (t, u) . Assim, dado $(0, u_0) \in \mathbb{R} \times S^2$ e $(t, u) \in T_0 \mathbb{R} \times T_{u_0} S^2$, temos:

$$\ker \tilde{\omega}_{(0, u_0)} = \{(t, u) \in T_0 \mathbb{R} \times T_{u_0} S^2; \tilde{\omega}_{(0, u_0)}(t, u) = 0\},$$

mas $\tilde{\omega}_{(0, u_0)}(t, u) = dt_{(0, u_0)}(t, u) = t$, de onde segue que $\ker \tilde{\omega}_{(0, u_0)} = \{0\} \times T_{u_0} S^2$.

Como sabemos que $\ker \tilde{\omega}_{(0, u_0)}$ é o plano tangente à folha de $\tilde{\omega}$ em $(0, u_0)$, segue que $\{0\} \times S^2$ é a folha de $\tilde{\omega}$ por $(0, u_0)$, como afirmamos.

Logo, pelo Teorema de Estabilidade de Reeb (3.4.6), existe uma vizinhança V de $\{0\} \times S^2$ onde todas as superfícies integrais de $\tilde{\omega}$ em V são difeomorfas a S^2 . Com isto, tomando $U = \psi(V)$, enfim concluímos que em $U - \{0\}$ as folhas de ω são também difeomorfas a S^2 . ■

Como consideração final, é interessante observar que no teorema anterior, para provar que as folhas da folheação induzida pela 1-forma ω na vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^3$ são difeomorfas às folhas da folheação induzida pela parte linear $\bar{\omega}$ de ω , exige-se que 0 seja uma singularidade do tipo centro, o que implica que $\bar{\omega}$ satisfaz $\bar{\omega} = \pm d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ em algum sistema de coordenadas (pelo Lema de Morse (Teorema 3.4.4)). Na sua demonstração foi de fundamental importância o Teorema de Estabilidade de Reeb (Teorema 3.4.6), o qual usa fortemente a existência de uma folha compacta da folheação induzida por $\bar{\omega}$. Agora, se 0 não é um centro de ω , ou seja, se $\bar{\omega} = \pm d(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)$ em algum sistema de coordenadas, na Figura 3.3 do Exemplo 3.2.2 é exibida a folheação induzida por $\bar{\omega}$, na qual vemos não possuir folha compacta e, portanto, conclui-se que o Teorema de Estabilidade de Reeb não se aplica.

Referências Bibliográficas

- [1] CAMACHO, C.; NETO, A. L. *Teoria Geométrica das Folheações*. Rio de Janeiro, IMPA, 1976.
- [2] EINSTEIN, A. *The Expanded Quotable Einstein*, Arquivos de Einstein 52-337 acc. Ed. Alice Calaprice, Princeton University Press, Oxford 2000.
- [3] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*, 2nd. ed. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1971)
- [4] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*, 8.ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.
- [5] LIMA, E. L. *Análise Real*, v.2, 4.ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.
- [6] LIMA, E. L. *Análise Real*, v.3, 2.ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.
- [7] LIMA, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.
- [8] MANFREDO, P. C. *Differential Forms And Applications*, 1.ed. Heidelberg, Springer Verlag, 1994.
- [9] MILNOR, J. *Morse Theory*. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1973.
- [10] PALIS, J.; DE MELO, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Rio de Janeiro, IMPA, 1977.
- [11] SARMIENTO, A. B. *Folheações no plano e aplicações*, v.1, editorial Hozlo S.R.L.. Lima, 2003. Disponível em:
<http://www.mat.ufmg.br/~sarmiento/pesquisa/notascoloqufmg-2003.pdf>. Acesso em: 27 Dez. 2011.
- [12] SPIVAK, M. *Calculus on Manifolds*. W. A. Benjamin, N.Y., 1965.

Índice Remissivo

- $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, 13
- $T_x M$, 6
- $\Lambda_r(E)$, 22
- $\mathcal{F}$, 38
- $\mathcal{L}_r(E)$, 20
- f -relacionado, 10
- r -forma diferencial, 27
 - 1-forma diferencial, 14
- órbita, 8, 9
- ação local, 49
- admissível, 4
- aplicação multilinear, 20
- aplicações de coerência, 41
- aplicações distinguidas, 41
- atlas, 4
- atlas máximo, 5
- base associada à parametrização, 6
- base dual, 13
- bijeção, 22
- caminho de placas, 39
- caminho regular, 2
- campo de linhas, 46
- campo vetorial completo, 9
- campos de 2-planos, 45
- campos de vetores, 8
- campos de vetores tangentes, 49
- carta local, 2
 - cartas trivializadoras, 39
- colchete de Lie, 11
- completamente integrável, 49
 - integrável, 49
- condição de integrabilidade, 16
- curva integral, 8
- diferencial, 6
- diferencial exterior, 33
- espaço tangente, 6
- fórmula de Taylor, 7, 8
- fluxo, 9
- folha, 38–40
- folheação, 38, 41
- forma r -linear, 20
- forma exata, 15
- forma fechada, 16, 36
- forma linear alternada, 21
- forma linear antissimétrica, 21
- função determinante, 24
- funcional linear, 13
- imersão, 1, 7
- intervalo maximal, 8
- involutivo, 49
- Lema de Morse, 60
- Lema de Poincaré, 17
- mergulho, 7
- mudança de coordenadas, 3
 - mudança de parametrização, 3
- número de Lebesgue, 42

- parametrização, 2
- parte linear, 57
- permutação, 22
- placa, 39
- plano tangente, 40
- produto exterior, 25, 28
- produto tensorial, 21
- pullback, 18, 30

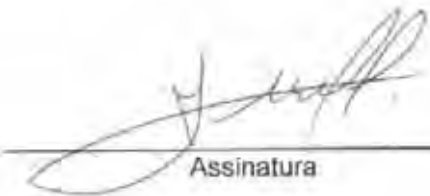
- singularidade, 9, 46
- singularidade centro, 60
- singularidade simples, 59
 - não-degenerada, 59
- sistema de coordenadas locais, 2
- solução maximal, 8
- soma entre formas diferenciais, 28
- submersão, 6
- subvariedade, 5, 6
- superfície, 2

- Teorema da Aplicação Inversa, 7
- Teorema da Forma Local das Submersões, 7
- Teorema de Estabilidade de Reeb, 60
- Teorema de Existência e Unicidade de Equações
 - Diferenciais Ordinárias, 9
- Teorema de Frobenius para 1-formas, 52
- Teorema de Frobenius para campos de 2-
 - planos, 51
- Teorema de Green, 36
- Teorema de Reeb, 60
- Teorema do Fluxo Tubular, 11
- transposição, 22

- valor crítico, 7
- valor regular
 - ponto regular, 7
- variedade diferenciável, 5
- vetor velocidade, 9
- vizinhança parametrizada, 2

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 02, 03, 12


Assinatura