



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**Aproximação de Funções usando
Polinômios Ortogonais e sua
Aplicação em Compensação
de Modelos de Fricção**

Waléria Andrade Martins

Ilha Solteira - SP

1210001462



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA – CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO:

"APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES USANDO POLINÔMIOS
ORTOGONAIS E SUA APLICAÇÃO EM COMPENSAÇÃO
DE MODELOS DE FRICÇÃO"

Proc. 063/04 - nro 38

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCNICO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
18.03.04	31.03.04
REGISTRADO POR	TOMBO
Ailza	Te. 1462
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
locação autor R\$ 10,00	M 386 a

WALÉRIA ANDRADE MARTINS

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP – como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Francisco Villarreal Alvarado

ILHA SOLTEIRA – S.P.
SETEMBRO – 2003



FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da FEIS/UNESP

Martins, Waléria Andrade

M386a Aproximação de funções usando polinômios ortogonais e sua aplicação em compensação de modelos de fricção / Waléria Andrade Martins. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2003
87 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2003.

Orientador: Francisco Villarreal Alvarado

Bibliografia: p. 70-72

1. Funções ortogonais. 2. Chebyshev, Polinômios de. 3. Legendre, Polinômios de. 4. Teoria da aproximação. 5. Aproximação de funções. 6. Compensação de fricção.

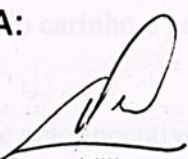
70104020

APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES USANDO POLINÔMIOS ORTOGONAIS E SUA APLICAÇÃO EM COMPENSAÇÃO DE MODELOS DE FRICÇÃO

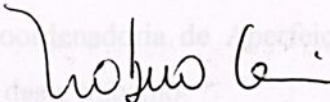
Waléria Andrade Martins

**DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA - CAMPUS DE
ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

COMISSÃO EXAMINADORA:


Prof. Dr. Francisco Villarreal Alvarado – orientador


Prof. Dr. Edivaldo Romanini


Prof. Dr. Nobuo Oki

Ilha Solteira-SP, agosto de 2003.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a Deus e a todos aqueles que, em seu nome, transmitiram forças nos momentos difíceis.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Villarreal, pelo incentivo, paciência, confiança e atenção com que sempre me orientou durante o transcorrer do trabalho.

Ao Prof. Dr. Nobuo Oki, pelas inúmeras contribuições dadas a esse trabalho. E ao Prof. Dr. João Antônio Carvalho pela colaboração.

A toda minha família pelo carinho e pelo apoio.

Ao meu namorado Jorge pelo incentivo e paciência.

Aos meus colegas do departamento pela amizade ao longo deste trabalho, em especial à Vanessa, Marco, Alessandra e Tadao.

À CAPES (Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro deste trabalho.

RESUMO

A principal motivação para o estudo de aproximação de funções é a incapacidade e limitação humana em registrar e manipular com exatidão as variações do comportamento da natureza física de um fenômeno. Estas variações serão denominadas sinais ou funções. Muitos problemas associados ao cotidiano humano podem ser formulados como um problema de aproximação de funções.

Neste trabalho é apresentado o método dos quadrados mínimos para aproximação de funções. É feita uma adaptação no método para aproximar funções descontínuas utilizando funções ortogonais, tendo como objetivo obter funções mais simples que possam ser de fácil manipulação e serem utilizadas em futuras implementações. Esta teoria de aproximação é aplicada em funções de fricção. Em seguida é realizada a compensação de fricção nestas funções aproximadas, com intuito de “anular parcialmente” a função de fricção que aparece em inúmeras aplicações reais.

O método adaptado foi testado para o modelo de fricção de Coulomb + Viscosa e para o modelo de fricção de Lugre, utilizando o software MATLAB.

Palavras Chaves: aproximação de funções, funções ortogonais, polinômios de Legendre, polinômios de Chebyshev, compensação de fricção.

Abstract

The main motivation to study function approximation is the incapacity and the human limitation to register and manipulate accurately the variations of the behavior of a physical nature phenomenon. These variations will be denominated signals or functions. Many problems associated to the human daily can be formulated as a function approximation problem.

In this work the least squares method is presented for functions approximation. It is made an adaptation to the method to approximate discontinuous functions using orthogonal functions with the objective of obtain simpler functions of easy manipulation to be used in future implementations. This approximation theory is applied in friction functions. After, the friction compensation is accomplished using these approximate functions, with intention of “partially annulling” the friction function that appears in several real applications.

The adapted method was tested for the Coulomb + Viscous friction model and for the *Lugre* friction model, using the MATLAB software.

Key Words: functions approximation, orthogonal functions, Legendre polynomials, Chebyshev polynomials, friction compensation.

3.4 - Deslocamento de Intervalos	32
CAPÍTULO IV – MODELOS E COMPENSAÇÃO DE FRICÇÃO	
4.1 - Introdução	38
4.2 - Breve Histórico	39
4.3 - Modelos de Fricção	40
4.3.1 - Modelos Estáticos	41
4.3.2 - O Modelo de Fricção de Coulomb	42
4.4 - Compensação de Fricção	47

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

1.1 - Introdução	1
------------------	---

CAPÍTULO II - TEORIA DE APROXIMAÇÃO

2.1 - Introdução	3
2.2 - Aproximações de Funções – O Método dos Quadrados Mínimos	4
2.3 - Generalidades	4
2.4 - Funções Ortogonais e Aproximação pelo Método dos Quadrados Mínimos	7
2.4.1 - O Método dos Quadrados Mínimos	7
2.4.2 - Funções Ortogonais	12
2.4.3 - Polinômios de Legendre e Polinômios de Chebyshev	15
2.5 - Aproximação Trigonométrica	23
2.5.1 - Aproximação Trigonométrica utilizando o Método dos Quadrados Mínimos	23

CAPÍTULO III - APROXIMAÇÃO POR PARTES DE FUNÇÕES DESCONTÍNUAS

3.1 - Introdução	29
3.2 - Aproximação Por Partes pelo Método dos Quadrados Mínimos	30
3.3 - Funções Descontínuas	30
3.3.1 - Tipos de Descontinuidades	30



3.4 - Deslocamento de Intervalos	32
CAPÍTULO IV – MODELOS E COMPENSAÇÃO DE FRICÇÃO	
4.1 - Introdução	38
4.2 - Breve Histórico	39
4.3 - Modelos de Fricção	40
4.3.1 - Modelos Estáticos	41
4.3.2 - O Modelo de Lugre	45
4.4 - Compensação de Fricção	47
CAPÍTULO V – APLICAÇÃO: APROXIMAÇÃO DE MODELOS DE FRICÇÃO E COMPENSAÇÃO DE FRICÇÃO	
5.1 -Introdução	50
5.2 -Testes e Resultados	51
CAPÍTULO VI – CONCLUSÃO	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	70
APÊNDICE A	
A.1 – Aproximação de Funções – Como Aproximar?	73
APÊNDICE B	
B.1 - Polinômios de Chebyshev	75
B.1.1 - Ortogonalidade dos Polinômios de Chebyshev	77
B2 - Polinômios de Legendre	79
APÊNDICE C	
C.1 – Aproximação Por Partes do Modelo de Fricção de Coulomb + Viscosa	82
C.2 – Aproximação Por Partes do Modelo de Fricção de Lugre em Regime Permanente	85



Figura 2.9: Erro Percentual obtido utilizando Aproximação Trigonométrica. 28

Figura 3.1: a) Função $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } -3 \leq x \leq -1 \\ 1 + \sin(x) & \text{se } -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ e sua 37

Aproximação de Ordem 7.

b) Erro Percentual em Relação as Aproximações.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 4.1: Modelo de Fricção Estática + Coulomb + Viscosa. 39

Figura 4.2: Representação da Região de Contato entre Duas Superfícies. 41

Figura 2.1: Análise do Erro. 6

Figura 4.3: Modelos de Fricção Estática.

a) Modelo de Fricção de Coulomb

Figura 2.2: Aproximação de Ordem 2 pelo Método dos Quadrados

Mínimos. 10

c) Modelo de Fricção Suction, Coulomb e Viscosa.

Figura 2.3: Polinômios de Legendre. 16

d) Modelo de Fricção Suction, Coulomb, Viscosa e Efeito Stribeck.

Figura 5.1: Função Original e Função Aproximada de Ordem 1. 54

Figura 2.4: Polinômios de Chebyshev. 17

a) Mostra Aproximação utilizando os Polinômios de Legendre

Figura 2.5: Aproximação pelo Método dos Quadrados Mínimos utilizando
Polinômios de Legendre e Polinômios de Chebyshev. 21

no intervalo $[-0.2, 0.2]$

Figura 2.6: Erro Percentual das Aproximações obtidas utilizando Polinômios
de Legendre e de Chebyshev. 23

Figura 5.2: a) Mostra Aproximações do Modelo de

Fricção de Coulomb + Viscosa utilizando os Polinômios de

Figura 2.7: Funções Trigonométricas. 24

Legendre e Chebyshev respectivamente

Figura 2.8: Melhor Aproximação encontrada pelo Método dos Quadrados
Mínimos utilizando Funções Trigonométricas. 27

b) Mostra Aproximação do Modelo de Fricção de Coulomb + Viscosa

utilizando os Polinômios de Legendre

b) Mostra Compensação utilizando os Polinômios de Chebyshev.

Figura 2.9: Erro Percentual obtido utilizando Aproximação Trigonométrica.	28
Figura 3.1: a) Função $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{se } -3 \leq x \leq -1 \\ 1 + \text{sen}(x) & \text{se } -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ e sua Aproximação de Ordem 7. b) Erro Percentual em Relação as Aproximações.	37
Figura 4.1: Modelo de Fricção Estática + Coulomb + Viscosa.	40
Figura 4.2: Representação da Região de Contato entre Duas Superfícies.	41
Figura 4.3: Modelos de Fricção Estática.	44
a) Modelo de Fricção de Coulomb.	
b) Modelo de Fricção de Coulomb + Viscosa.	
c) Modelo de Fricção <i>Stiction</i> , Coulomb e Viscosa.	
d) Modelo de Fricção <i>Stiction</i> , Coulomb, Viscosa e Efeito <i>Stribeck</i> .	
Figura 5.1: Função Original e Função Aproximada de Ordem 1.	54
a) Mostra Aproximação utilizando os Polinômios de Legendre no Intervalo $[-0.2, 0.2]$.	
b) Mostra Aproximação utilizando os Polinômios de Chebyshev no Intervalo $[-0.2, 0.2]$.	
Figura 5.2: a) e b) Erro Percentual das Aproximações do Modelo de Fricção de Coulomb + Viscosa utilizando os Polinômios de Legendre e de Chebyshev respectivamente.	55
Figura 5.3: Compensação do Modelo de Fricção de Coulomb + Viscosa.	57
a) Mostra Compensação utilizando os Polinômios de Legendre.	
b) Mostra Compensação utilizando os Polinômios de Chebyshev.	

Figura 5.4: Compensação da Função de Fricção utilizando os Polinômios de Legendre para o Intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon = 6 * 10^{-17}$.	58
Figura 5.5: Compensação da Função de Fricção utilizando os Polinômios de Chebyshev para o Intervalo $[0, \varepsilon]$, com $\varepsilon = 6 * 10^{-17}$.	59
Figura 5.6: a) Função Original e Função Aproximada de Ordem 9 utilizando os Polinômios de Legendre. b) Função Original e Função Aproximada de Ordem 7 utilizando os Polinômios de Chebyshev.	63
Figura 5.7: a) e b) Erro Percentual das Aproximações do Modelo de Fricção de Lugre utilizando os Polinômios de Legendre e de Chebyshev respectivamente.	64
Figura 5.8: Compensação do Modelo de Fricção de Lugre. a) Mostra Compensação da Função de Fricção utilizando os Polinômios de Legendre. b) Mostra Compensação da Função de Fricção utilizando os polinômios de Chebyshev.	66
Figura 5.9: Compensação da Função de Fricção utilizando os Polinômios de Legendre para o Intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon = 5 * 10^{-3}$.	67
Figura 5.10: Compensação da Função de Fricção utilizando os Polinômios de Chebyshev para o Intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon = 3 * 10^{-3}$.	68

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 2.1: Comparação do Erro (definido em (2.5)) encontrado utilizando Polinômios Ortogonais.	18
Tabela 2.2: Erro encontrado nas Aproximações utilizando Funções Trigonométricas.	27
Tabela 5.1: Parâmetros para um Modelo de Fricção obtidos do Sistema de Identificação [15].	51
Tabela 5.2: Erro encontrado nas Aproximações de Ordem 1 a 8 utilizando os Polinômios de Legendre e de Chebyshev.	52
Tabela 5.3: Compensação de Fricção em alguns Pontos do Intervalo $[-0.2, -0.005]$ e $[0.005, 0.2]$.	56
Tabela 5.4: Erro encontrado nas Aproximações de Ordem 1 a 10 utilizando os Polinômios de Legendre e de Chebyshev.	60
Tabela 5.5: Compensação de Fricção em alguns Pontos do Intervalo $[-0.2, -0.005]$ e $[0.005, 0.2]$.	65
Tabela B.1.1: Polinômios Tradicionais Escritos pelos de Chebyshev.	77



CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 Introdução:

Considerando-se a natureza como a expressão mais perfeita do exato, conhecida pelo homem, a comunidade científica tem se convencido de suas limitações e dificuldades sobre a diferença entre o exato e o aproximado. As descobertas científicas, em grande parte, nada mais são do que maneiras de compreender e interpretar a natureza e toda sua exatidão, pela realização de modelos aproximados. Se a exatidão dos elementos da natureza os define de maneira única, e este é o objetivo máximo do critério de investigação científica, então, o único meio que resta é a aproximação para modelar a natureza através de infinitas maneiras.

Baseados na realidade dos fatos e na criatividade de muitos cientistas, a ciência a partir do século dezessete, tem encontrado, solucionado e legado problemas difíceis associados a fenômenos físicos, para os quais grupos de matemáticos e físicos tiveram que desenvolver (e ainda desenvolvem) muitas das ferramentas matemáticas hoje existentes. É destacado aqui, especificamente, o problema de aproximação de funções.



Firme no propósito de inovar grandes idéias do passado, este trabalho procura encaminhar uma discussão sobre aproximação de funções pelo método dos quadrados mínimos.

Nesta dissertação é apresentada a aproximação de funções lineares, não lineares e descontínuas através do método dos quadrados mínimos utilizando funções ortogonais, tendo como objetivo obter funções mais simples que possam ser de fácil manipulação e serem utilizadas em futuras implementações. Esta teoria de aproximação é aplicada em funções de fricção. Em seguida é realizada a compensação de fricção utilizando estas funções aproximadas, com intuito de “anular parcialmente” a função de fricção que aparece em inúmeras aplicações reais, como por exemplo as tratadas em [12] e [16].

No capítulo II é realizada uma revisão bibliográfica do método dos quadrados mínimos. Este método é analisado de forma mais detalhada para aproximação com polinômios de Legendre e de Chebyshev e neste capítulo também é visto a aproximação trigonométrica.

No capítulo III é apresentado uma forma de aproximar funções descontínuas através do método dos quadrados mínimos. Esta aproximação é feita por partes utilizando deslocamento de intervalos.

No capítulo IV é apresentado alguns modelos de fricção e uma forma de compensar essa fricção através da aproximação de funções. No capítulo V é realizado alguns testes utilizando o software MATLAB aproximando o modelo de fricção estática de Coulomb + Viscosa e o modelo de Lugre em regime permanente. Em seguida é feito a compensação utilizando estas funções de fricção aproximadas.

No capítulo VI é apresentado a conclusão do trabalho e finalmente, no apêndice é mostrado a análise do erro de uma aproximação, como é encontrado a família de polinômios ortogonais de Legendre e de Chebyshev e, a aproximação por partes do modelo de fricção de Coulomb + Viscosa e do modelo de Lugre em regime permanente.



2.2 Aproximações de Funções – O Método dos Quadrados Mínimos

Neste capítulo é abordado o problema de aproximar uma função $f(x)$ por uma função $P(x)$ de uma família previamente escolhida. Será tratado o caso em que a função $f(x)$ é dada na forma analítica com “domínio contínuo” (conjunto não discreto).

O método dos quadrados mínimos será estudado para obter uma aproximação $P(x)$ de uma função $f(x)$ de forma que $P(x)$ seja uma combinação linear de funções conhecidas, não nulas $g_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

CAPÍTULO II

TEORIA DE APROXIMAÇÃO

2.1 Introdução:

O estudo da teoria de aproximação envolve em geral dois tipos de problemas. O primeiro problema surge quando uma função é dada explicitamente, porém é conveniente encontrar um tipo de função “simples”, tal como um polinômio, que pode ser usado para determinar valores aproximados da função dada. O outro problema da teoria de aproximação consiste em adaptar os dados fornecidos e encontrar a melhor função numa certa classe que pode ser usada para representá-los [4].

Em vários métodos encontrados na literatura a aproximação é determinada de maneira a coincidir com o valor da função dada em pontos definidos. Em certos tipos de problemas, isto pode ser totalmente indesejado; assim, o que se procura é determinar uma aproximação que reflita a tendência geral da função dada sem reproduzir flutuações localizadas. O método dos quadrados mínimos tem este objetivo [14].



2.2 Aproximações de Funções – O Método dos Quadrados Mínimos

Neste capítulo é abordado o problema de aproximar uma função $f(x)$ por uma função $P(x)$ de uma família previamente escolhida. Será tratado o caso em que a função $f(x)$ é dada na forma analítica com “domínio contínuo” (conjunto não discreto).

O método dos quadrados mínimos será estudado para aproximar uma dada função $f(x)$ por uma $P(x)$ da família $P_n(x)$ de funções, sendo que cada uma delas é uma combinação linear de funções conhecidas, não nulas $g_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k g_k(x).$$

A seguir será tratado também o caso particular em que as funções $g_k(x)$ são polinômios ortogonais entre si e o caso em que as $g_k(x)$ são funções trigonométricas, conhecido como aproximação trigonométrica ou análise harmônica.

2.3 Generalidades

Quando se trata de fazer uma aproximação, surgem naturalmente algumas questões:

- Por que aproximar?
- Qual família de funções escolher?
- Como aproximar? (Análise do erro)

Respondendo estas questões, justifica-se, assim, a escolha do método dos quadrados mínimos.



Por que aproximar? (análise do erro)

Quando é feito um experimento, normalmente se conhece a família da função que descreve o fenômeno envolvido. Em geral, os valores obtidos já são afetados por erros e, portanto, a função desejada não necessita fornecer exatamente os valores medidos. Basta achar, entre os diversos elementos da família, aquele que “melhor aproxima” o fenômeno medido.

Aparentemente, uma “boa aproximação” seria obtida impondo a condição $\sum_{i=1}^n (f(x_i) - P_n(x_i))^2 = 0$. Uma outra circunstância é quando se conhece a forma analítica da função que descreve um fenômeno e é preciso substituí-la por uma outra função (por exemplo, para facilitar o tratamento matemático do modelo) porém, que “se aproxime razoavelmente” da função original.

Qual família de funções escolher?

A escolha da família aproximadora, $P_n(x)$, deve levar em conta os seguintes fatores:

- as características que a função aproximada deve ter para facilitar os cálculos. Por exemplo: polinômios são facilmente integráveis; é fácil de realizar com eles as operações de adição, subtração, multiplicação; e translações de polinômios resultam em polinômios;
- o comportamento das funções da família $P_n(x)$ deve ser o mais próximo possível do comportamento da função dada $f(x)$, porém, com forma analítica conveniente. Por exemplo, a periodicidade de uma dada função pode ser obtida com funções trigonométricas.

A escolha da família aproximadora não será tratada neste texto. O método dos quadrados mínimos assume que a família $P_n(x)$ será escolhida a contento.



Como aproximar? (Análise do erro)

Ao aproximar uma função $f(x)$ por uma função $P(x)$ de uma família $P_n(x)$ é introduzido um erro E que também é chamado de resíduo. Assim,

$$E(x) = f(x) - P(x). \quad (2.1)$$

Aparentemente, uma “boa aproximação” seria obtida impondo a condição $\sum_x E(x) = 0$. Analisando tal afirmação, para ilustrar, suponha que foi realizado um experimento em que se levantou os pontos D_1, D_2, D_3 e D_4 . Sabendo-se que o fenômeno é descrito por uma reta [ver Apêndice A], é necessário determiná-la de modo a satisfazer $\sum_x E(x) = 0$. Pode-se observar na Figura 2.1 que as retas que foram traçadas, $P_1(x)$ e $P_2(x)$, obedecem tal exigência, o que mostra que impor a condição $\sum_x E(x) = 0$ não significa obter uma boa aproximação.

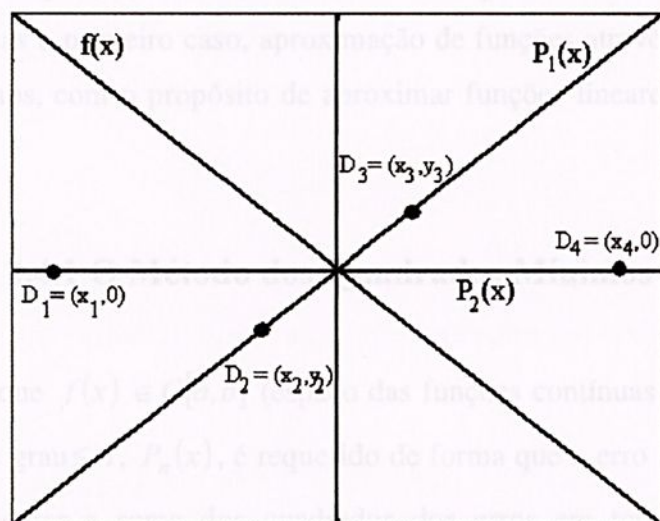


Figura 2.1: Análise do Erro.

O problema enfrentado com este critério é o fato dos erros positivos cancelarem os erros negativos. Portanto, se o sinal dos erros não forem considerados, este problema pode ser evitado. Isso pode ser feito trabalhando com o valor absoluto dos erros e exigindo que $\sum_x |E(x)|$ seja mínimo. Achar o mínimo desta função leva a uma dificuldade técnica de derivação não desejada. Um outro critério com a mesma característica, porém com tratamento matemático mais simples, é exigir que $\sum_x E^2(x)$ seja mínimo. O método para aproximar uma função $f(x)$ por uma $P(x) \in \{P_n(x)\}$ utilizando esse último critério é denominado método dos **Quadrados Mínimos** [9].

2.4 Funções Ortogonais e Aproximação pelo Método dos Quadrados Mínimos

Os problemas mencionados na introdução dizem respeito à aproximação de funções e aproximação de um conjunto de dados experimentais. Nesta dissertação será tratado apenas o primeiro caso, aproximação de funções através do método dos quadrados mínimos, com o propósito de aproximar funções lineares, não lineares e descontínuas.

2.4.1 O Método dos Quadrados Mínimos

Suponha que $f(x) \in C[a, b]$ (espaço das funções contínuas em $[a, b]$) e que um polinômio de grau $\leq n$, $P_n(x)$, é requerido de forma que o erro seja minimizado. Assim, ao considerar a soma dos quadrados dos erros em todos os pontos do intervalo $[a, b]$, tem-se, no limite, a integral do quadrado do erro em cada ponto do intervalo em que se quer aproximar a função dada, ou seja,

$$\int_a^b (f(x) - P_n(x))^2 dx. \quad (2.2)$$



Para determinar uma aproximação polinomial pelo método dos quadrados mínimos, isto é, um polinômio para minimizar a expressão (2.2), sendo

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

define-se a função

$$E(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) = \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx.$$

O problema consiste em encontrar coeficientes reais $a_0, a_1, \dots, a_n$ que minimizará E . Do cálculo de funções de várias variáveis, uma condição necessária para que os números $a_0, a_1, \dots, a_n$ minimizem a função E é que

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{para cada } j = 0, 1, \dots, n.$$

Desde que

$$E = \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k f(x) dx + \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)^2 dx,$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \int_a^b x^j f(x) dx + 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx.$$

Portanto, para encontrar $P_n(x)$, as $(n+1)$ **equações normais** lineares

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j f(x) dx, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

podem ser resolvidas para as $(n+1)$ variáveis a_j , $j = 0, 1, 2, \dots, n$, desconhecidas.



Exemplo 2.1:

Utilizando o método dos quadrados mínimos, encontrar a aproximação polinomial de grau 2 para a função $f(x) = \sin(\pi x)$ no intervalo $[0,1]$.

As equações normais para $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ são dados por:

$$\begin{aligned}a_0 \int_0^1 1 dx + a_1 \int_0^1 x dx + a_2 \int_0^1 x^2 dx &= \int_0^1 \sin \pi x dx, \\a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx + a_2 \int_0^1 x^3 dx &= \int_0^1 x \sin \pi x dx, \\a_0 \int_0^1 x^2 dx + a_1 \int_0^1 x^3 dx + a_2 \int_0^1 x^4 dx &= \int_0^1 x^2 \sin \pi x dx.\end{aligned}$$

Figura 2.2: Aproximação de Ordem 2 pelo Método dos Quadrados Mínimos.

Resolvendo as integrais tem-se:

$$a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{2}{\pi}, \quad \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{\pi}, \quad \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}.$$

Resolvendo as equações tem-se:

$$a_0 = \frac{12\pi^2 - 120}{\pi^3} \approx -0.050465 \quad \text{e} \quad a_1 = -a_2 = \frac{720 - 60\pi^2}{\pi^3} \approx 4.12251.$$

Conseqüentemente, a aproximação polinomial pelo método dos quadrados mínimos de grau dois para $f(x) = \sin(\pi x)$ em $[0,1]$ é $P_2(x) = -4.12251x^2 + 4.12251x - 0.050465$. A Figura 2.2 mostra o gráfico da função original e da função aproximada.

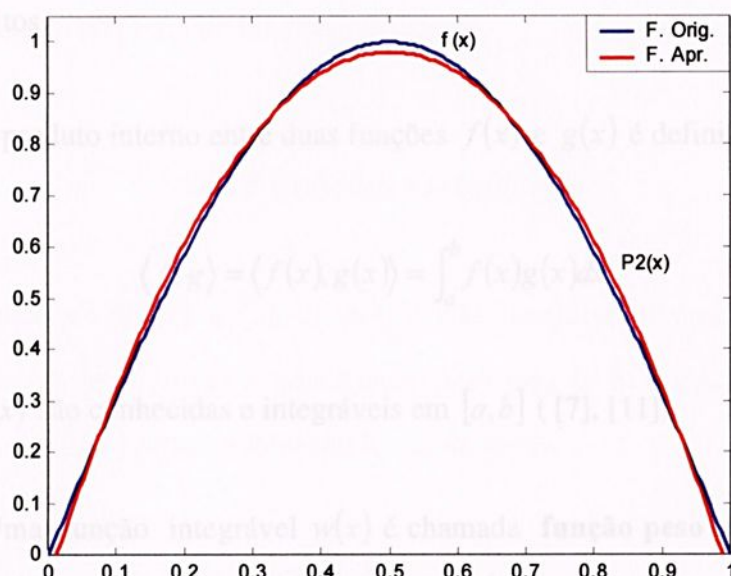


Figura 2.2: Aproximação de Ordem 2 pelo Método dos Quadrados Mínimos.

O exemplo 2.1 ilustra o grau de dificuldade para se obter uma aproximação polinomial pelo método dos quadrados mínimos. Um sistema linear $(n+1) \times (n+1)$ para os coeficientes $a_0, \dots, a_n$ de $P_n(x)$ deve ser resolvido. Desde que os coeficientes do sistema linear são da forma

$$\int_a^b x^{j+k} dx = \frac{b^{j+k+1} - a^{j+k+1}}{j+k+1},$$

o sistema linear não tem uma solução numérica conveniente [4].

Outra desvantagem para a técnica usada no exemplo 2.1 é que os cálculos desempenhados para obter o polinômio de grau n , $P_n(x)$, não diminui o trabalho (os cálculos) para obter o polinômio $P_{n+1}(x)$.

Uma técnica diferente para se obter aproximações pelo método dos quadrados mínimos será considerada. Ela tem uma eficiência computacional e também, desde que $P_n(x)$ é conhecido, os cálculos a serem realizados para determinar $P_{n+1}(x)$ serão

de fácil manipulação. Para facilitar o entendimento será necessário a introdução de alguns conceitos.

- O produto interno entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$ é definido por

$$\langle f, g \rangle = \langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

se $f(x)$ e $g(x)$ são conhecidas e integráveis em $[a, b]$ ([7], [11]).

- Uma função integrável $w(x)$ é chamada **função peso** em um intervalo I se $w(x) \geq 0$ para todo x em I . Essa função $w(x)$ se anula somente num número finito de pontos [4].

A formulação do método dos quadrados mínimos usando produto interno de funções permite aumentar a sua potencialidade.

A primeira vantagem está em colocar em maior evidência a aproximação numa certa parte do intervalo. Isso pode ser feito introduzindo uma função peso, $w(x)$, no produto interno, modificando assim, a definição de produto interno, tendo agora,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx. \quad (2.4)$$

Um exemplo de função peso é: $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, $x \in (-1, 1)$, que é usada nos polinômios de Chebyshev. Neste caso, a função $w(x)$ atribui menos peso a região central do intervalo $(-1, 1)$ e dá mais ênfase aos pontos próximos aos extremos deste intervalo [7].

Outra vantagem do método dos quadrados mínimos usando produto interno de funções está no emprego de funções ortogonais.

2.4.2 Funções Ortogonais

Suponha que $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$ é um conjunto de funções linearmente independentes em $[a, b]$, $w(x)$ é uma função peso para $[a, b]$ e que, para uma dada função $f(x) \in C[a, b]$ uma combinação linear da forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x)$$

é procurada para minimizar a função

$$E(a_0, \dots, a_n) = \int_a^b w(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x) \right]^2 dx. \quad (2.5)$$

De forma semelhante ao que foi feito no começo do capítulo, em que $w(x) = 1$ e $\phi_k(x) = x^k$ para cada $k = 0, 1, \dots, n$, é necessário que

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_j} = 2 \int_a^b w(x) \left[f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x) \right] \phi_j(x) dx$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n$.

O sistema de equações normais pode ser escrito como

$$\int_a^b w(x) f(x) \phi_j(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, n.$$

Suponha também que as funções $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ possam ser escolhidas contanto que sejam ortogonais em relação à função peso $w(x)$, isto é

$$\int_a^b w(x) \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k \\ \alpha_k > 0 & \text{se } j = k \end{cases} \quad (2.6)$$

Então, para cada $j = 0, 1, \dots, n$, tem-se

$$\int_a^b w(x) f(x) \phi_j(x) dx = a_j \int_a^b w(x) [\phi_j(x)]^2 dx = a_j \alpha_j$$

e portanto

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j} \int_a^b w(x) f(x) \phi_j(x) dx.$$

Assim o problema de aproximação pelo método dos quadrados mínimos é grandemente simplificado quando as funções $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$ são escolhidas de modo a satisfazer a equação (2.6).

O método dos quadrados mínimos se torna mais simples quando se trabalha com aproximações usando famílias de funções ortogonais. De fato, se no sistema de equações normais tem-se $\langle \phi_k, \phi_j \rangle = 0$ para $k \neq j$, o sistema será diagonal, o que significa uma grande vantagem [7].

Um resultado importante para aproximação pelo método dos quadrados mínimos é dado a seguir.

Se $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$ é um conjunto de funções ortogonais em $[a, b]$ em relação à função peso $w(x)$, então a aproximação pelo método dos quadrados mínimos, para $f(x)$ definida em $[a, b]$, em relação a $w(x)$ é [4]

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x)$$

sendo

$$a_k = \frac{\int_a^b w(x) \phi_k(x) f(x) dx}{\int_a^b w(x) [\phi_k(x)]^2 dx} = \frac{1}{\alpha_k} \int_a^b w(x) \phi_k(x) f(x) dx.$$

Um processo para se obter famílias de polinômios ortogonais é dado abaixo.

O conjunto de polinômios $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$ definido a seguir é ortogonal em $[a, b]$ em relação à função peso $w(x)$.

$$\phi_0(x) \equiv 1,$$

$$\phi_1(x) = x - B_1 \quad \text{para cada } a \leq x \leq b,$$

sendo

$$B_1 = \frac{\int_a^b x w(x) [\phi_0(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x) [\phi_0(x)]^2 dx};$$

quando $k \geq 2$,

$$\phi_k(x) = (x - B_k) \phi_{k-1}(x) - C_k \phi_{k-2}(x) \quad \text{para cada } a \leq x \leq b,$$

sendo

$$B_k = \frac{\int_a^b x w(x) [\phi_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x) [\phi_{k-1}(x)]^2 dx}$$

e

$$C_k = \frac{\int_a^b x w(x) \phi_{k-1}(x) \phi_{k-2}(x) dx}{\int_a^b w(x) [\phi_{k-2}(x)]^2 dx};$$

Este resultado fornece um processo recursivo para a construção de um conjunto de polinômios ortogonais [4].

2.4.3 Polinômios de Legendre e Polinômios de Chebyshev

Existem duas famílias de funções ortogonais bem conhecidas na literatura por causa de suas importantes aplicações: os polinômios ortogonais e as funções trigonométricas, que, cada vez mais, aparecem em problemas que envolvem aproximações [7].

Um dos mais comuns conjuntos de polinômios ortogonais é o conjunto de **Polinômios de Legendre** [ver apêndice B.2], $\{L_n(x)\}$, que são ortogonais em $[-1, 1]$ em relação à função peso $w(x) = 1$. A definição clássica dos Polinômios de Legendre requer que $L_n(1) = 1$ para cada n , e uma relação recursiva pode ser usada para generalizar os polinômios quando $n \geq 2$. Esses polinômios também podem ser encontrados utilizando o processo visto anteriormente.

Relação Recursiva:

$$L_{n+1}(x) = xL_n(x) - \frac{n^2 L_{n-1}(x)}{(4n^2 - 1)} \quad n \geq 1 \quad (2.7)$$

em que

$$L_0(x) \equiv 1, \quad L_1(x) = x.$$

Os seis primeiros polinômios de Legendre definidos em $[-1, 1]$ são ([4], [21])

$$L_0(x) \equiv 1$$

$$L_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_4(x) = x^4 - (6/7)x^2 + 3/35$$

$$L_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$L_5(x) = x^5 - (10/9)x^3 + (5/21)x.$$

Os gráficos de L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 são mostrados na Figura 2.3 abaixo

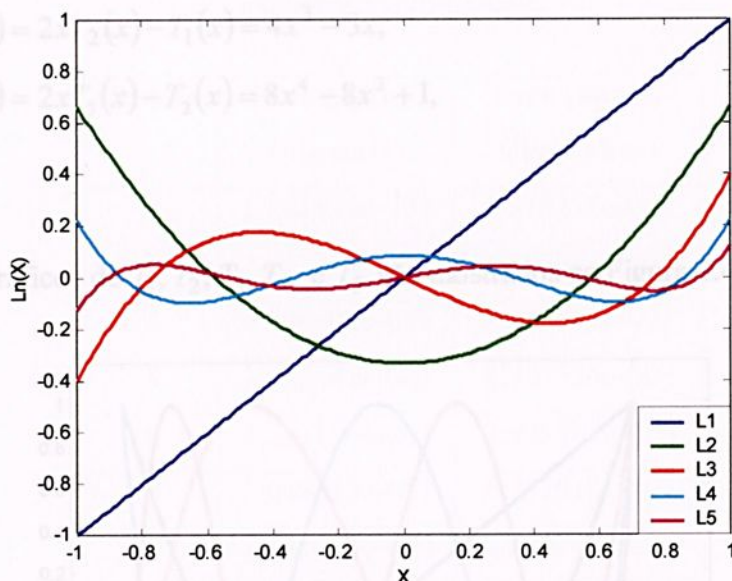


Figura 2.3: Polinômios de Legendre.

Um outro conjunto de polinômios ortogonais, é chamado conjunto de **Polinômios de Chebyshev**, $\{T_n(x)\}$, [ver apêndice B.1]. Esses polinômios são ortogonais em $[-1, 1]$, em relação à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$, $x \in (-1, 1)$ ([4], [6]).

Por definição, $T_n(x) = \cos[n \arccos(x)]$ para cada $n \geq 0$.

Relação Recursiva:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \text{para cada } n \geq 1. \quad (2.8)$$

Desde que

$$T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1 \quad \text{e} \quad T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x,$$

os polinômios de Chebyshev são obtidos de maneira seqüencial, usando a equação (2.8)

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

⋮

Os gráficos de T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5 são mostrados na Figura 2.4 abaixo

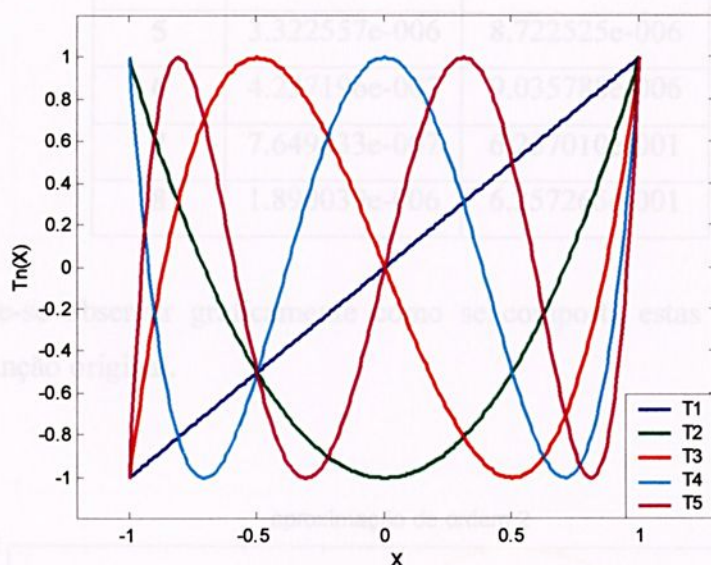


Figura 2.4: Polinômios de Chebyshev.

Exemplo 2.2: Dada a função $f(x) = 1 + \sin(2x + 1)$, ($x \in [-1, 1]$), será analisada a aproximação polinomial de 2ª, 3ª, 4ª, 5ª, 6ª, 7ª e 8ª ordem, através do método dos quadrados mínimos utilizando os polinômios de Legendre e os polinômios de Chebyshev. Será feito também uma análise gráfica destas aproximações.

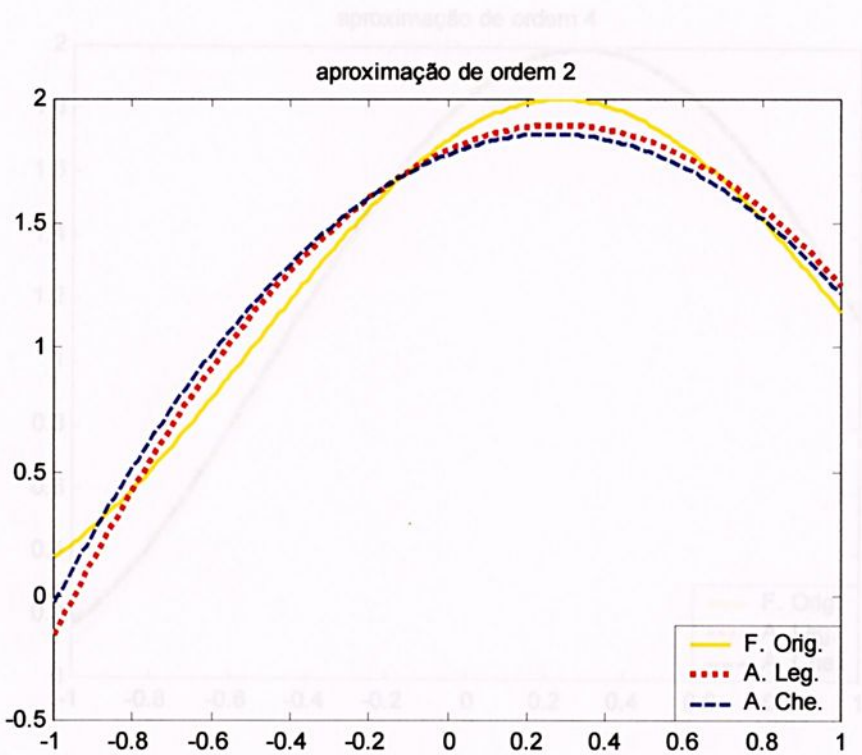
A tabela a seguir mostra os erros encontrados comparando a função original com a função aproximada.

b) **Tabela 2.1:** Comparação do Erro (definido em (2.5)) encontrado utilizando Polinômios Ortogonais.

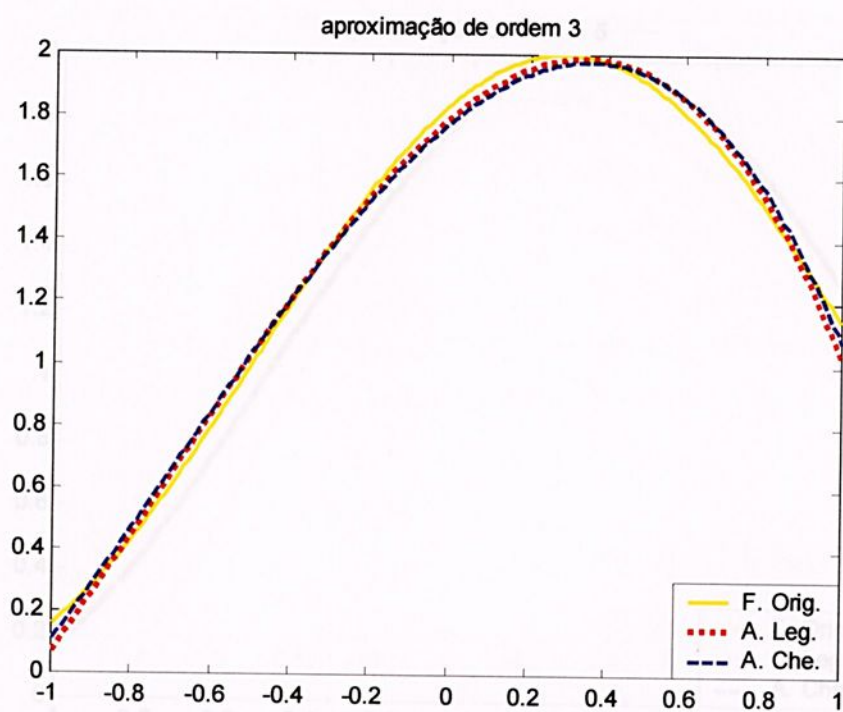
Ordem	Erro (aprox. Legendre)	Erro (aprox. Chebyshev)
2	1.765524e-002	3.578276e-002
3	2.577746e-003	5.252973e-003
4	4.796602e-005	9.839861e-005
5	3.322557e-006	8.722525e-006
6	4.237196e-007	9.035788e-006
7	7.649833e-007	6.257010e-001
8	1.890039e-006	6.257265e-001

Pode-se observar graficamente como se comporta estas aproximações em relação a função original.

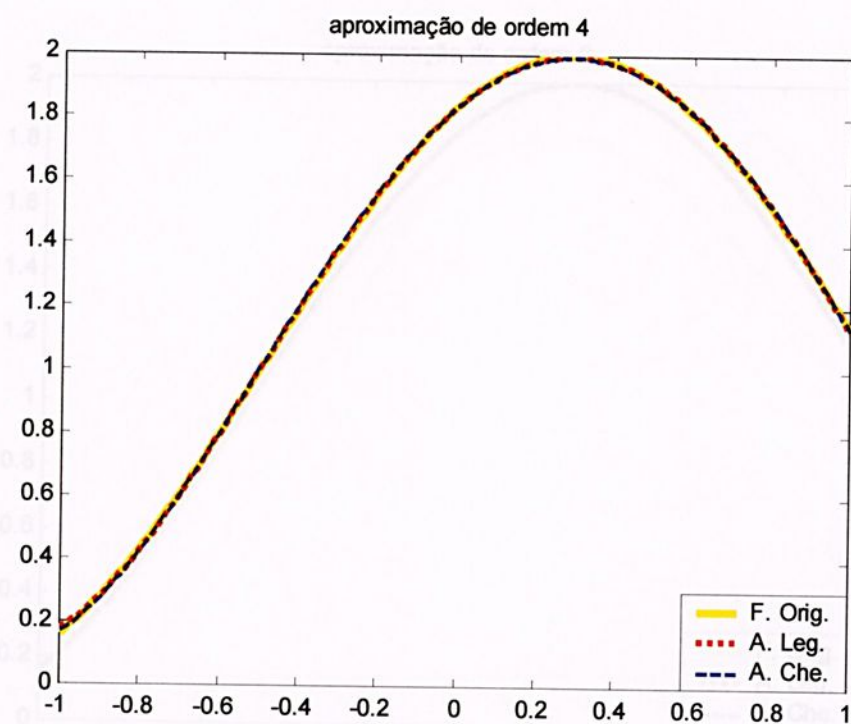
a)



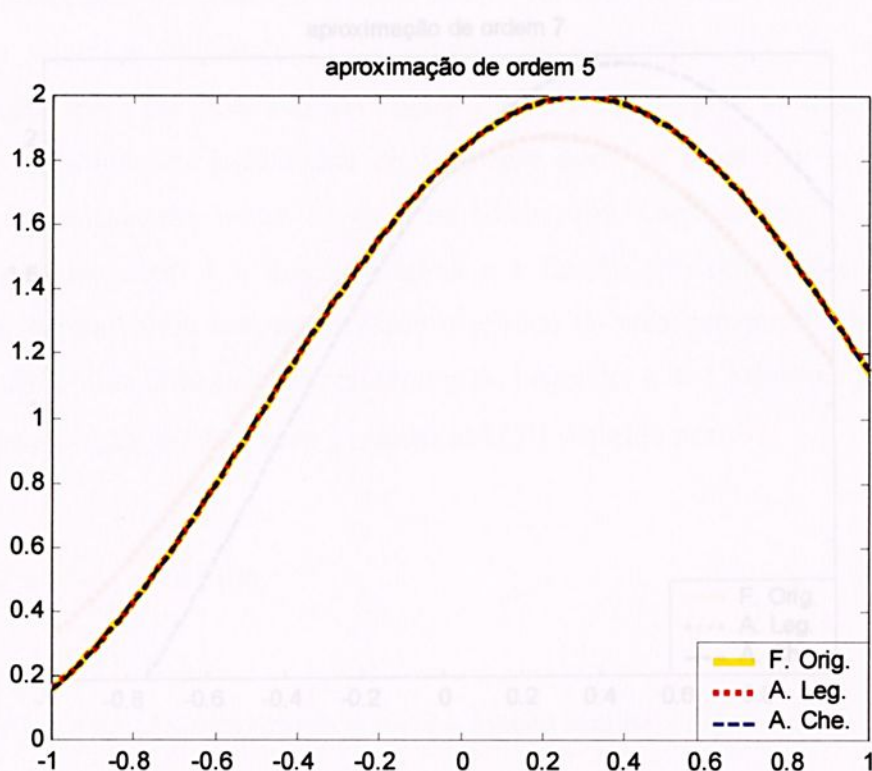
b)



c)



d)



e)

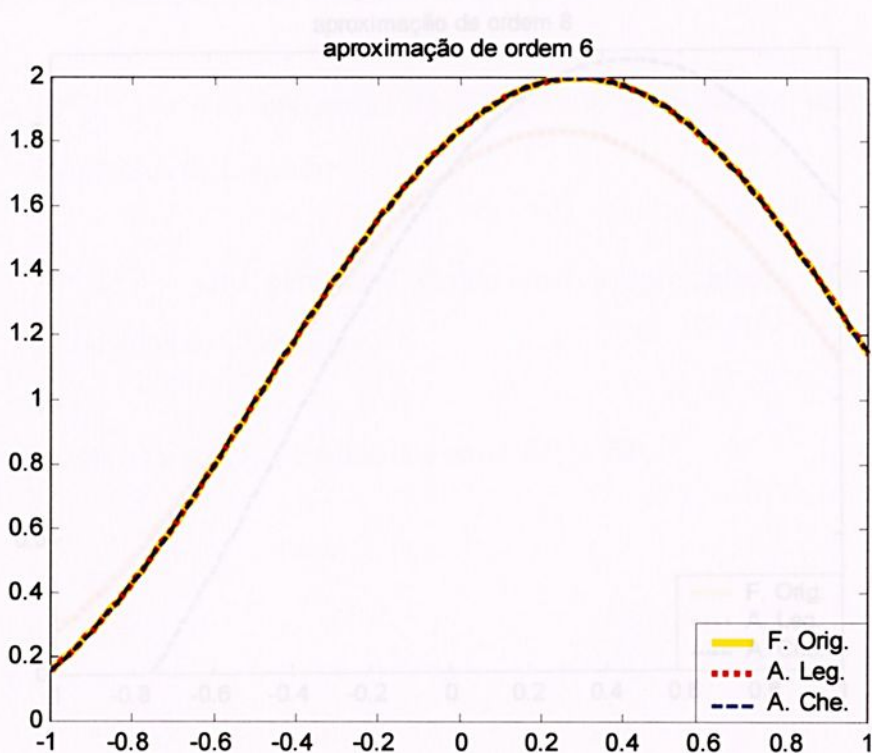
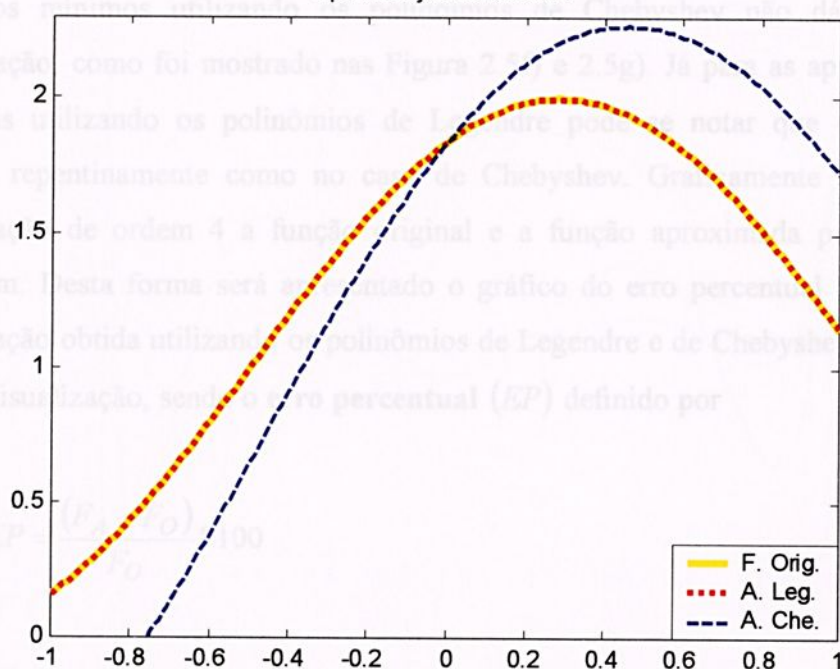


Figura 2.5: Aproximação pelo Método dos Quadrados Mínimos utilizando Polinômios de Legendre e Polinômios de Chebyshev

f)

aproximação de ordem 7



g)

aproximação de ordem 8

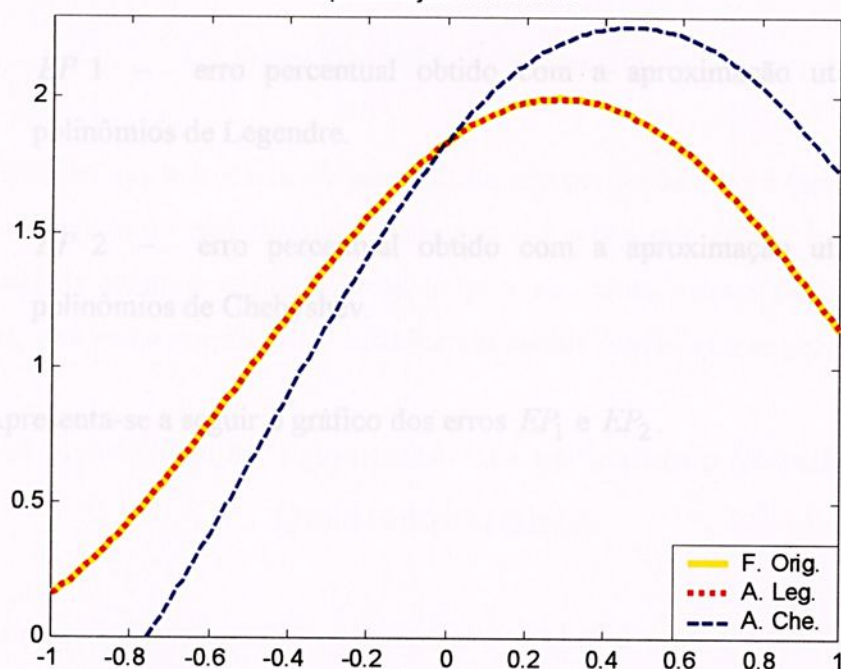


Figura 2.5: Aproximação pelo Método dos Quadrados Mínimos utilizando Polinômios de Legendre e Polinômios de Chebyshev.

É importante observar que a partir da aproximação de ordem 7 o método dos quadrados mínimos utilizando os polinômios de Chebyshev não dá uma boa aproximação, como foi mostrado nas Figuras 2.5f) e 2.5g). Já para as aproximações realizadas utilizando os polinômios de Legendre pode-se notar que o erro não aumenta repentinamente como no caso de Chebyshev. Gráficamente a partir da aproximação de ordem 4 a função original e a função aproximada praticamente coincidem. Desta forma será apresentado o gráfico do erro percentual da melhor aproximação obtida utilizando os polinômios de Legendre e de Chebyshev para uma melhor visualização, sendo o **erro percentual (EP)** definido por

$$EP = \frac{(F_A - F_O)}{F_O} * 100 \quad (2.9)$$

em que, F_A é a função aproximada e F_O é a função original [17].

Para este exemplo, serão utilizadas as notações:

- EP_1 – erro percentual obtido com a aproximação utilizando os polinômios de Legendre.
- EP_2 – erro percentual obtido com a aproximação utilizando os polinômios de Chebyshev.

Apresenta-se a seguir o gráfico dos erros EP_1 e EP_2 .



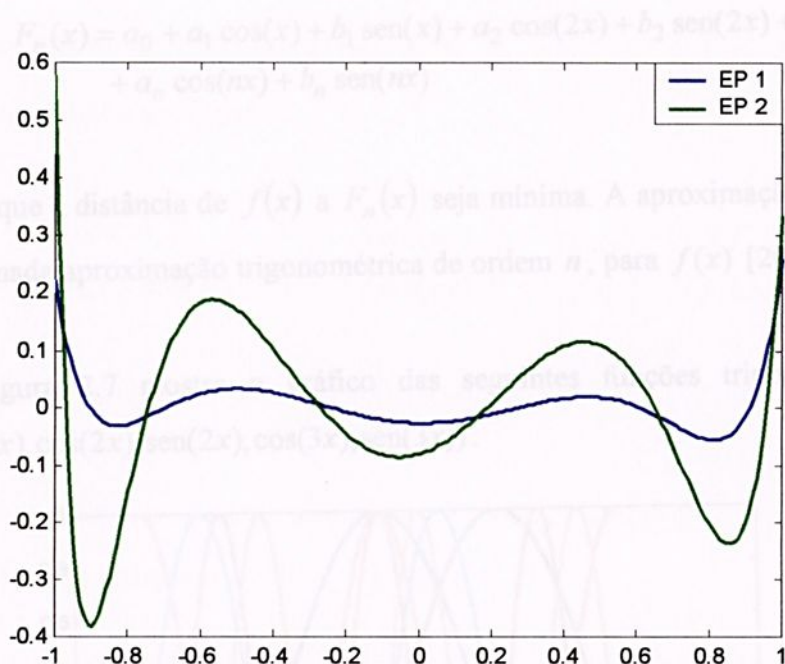


Figura 2.6: Erro Percentual das Aproximações obtidas utilizando Polinômios de Legendre e de Chebyshev.

2.5 Aproximação Trigonométrica

Suponha que a função a ser aproximada seja periódica. Nesse caso, aproximá-la por um polinômio não seria uma boa escolha, visto que estes não possuem a propriedade de serem periódicos. Deve-se, portanto, tentar aproximar a função por uma outra, que tenha propriedades semelhantes àquela função que se quer aproximar.

2.5.1 Aproximação Trigonométrica utilizando o Método dos Quadrados Mínimos

Considere uma função $f(x)$ periódica e integrável em $[-\pi, \pi]$.

Sendo $f(x)$ periódica faz sentido, aproximá-la no intervalo $[-\pi, \pi]$, por uma função do tipo:

$$F_n(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \dots + a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad (2.10)$$

de tal modo que a distância de $f(x)$ a $F_n(x)$ seja mínima. A aproximação da forma (2.10) é chamada aproximação trigonométrica de ordem n , para $f(x)$ [20].

A Figura 2.7 mostra o gráfico das seguintes funções trigonométricas: $(\cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \cos(3x), \sin(3x))$.

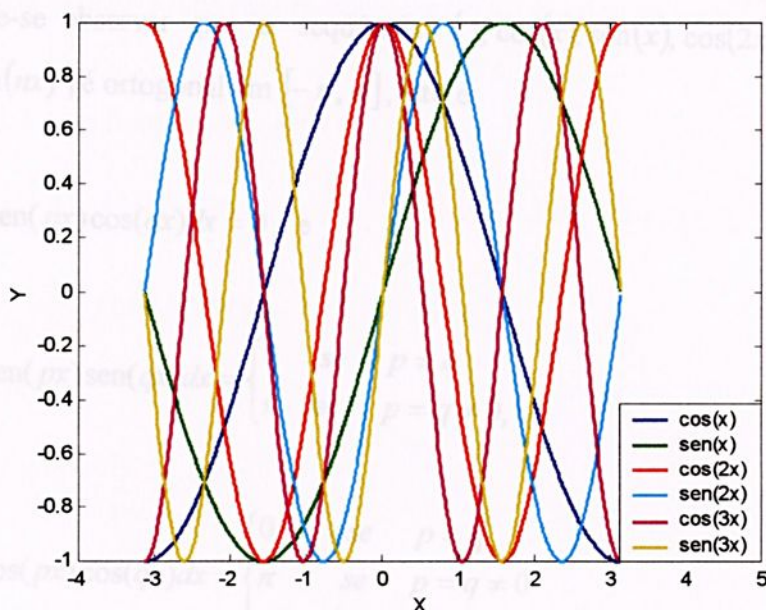


Figura 2.7: Funções Trigonômicas.

Para determinar uma aproximação pelo método dos quadrados mínimos utilizando funções trigonométricas, deve-se minimizar a função

$$E(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n) = \int_a^b (f(x) - F_n(x))^2 dx. \quad (2.11)$$

De forma análoga a aproximação utilizando polinômios ortogonais, deve-se encontrar coeficientes $(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$ que minimizará E . Do cálculo de funções de várias variáveis, uma condição necessária é $\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0$ para cada

$j = 0, 1, \dots, n$. Assim, os coeficientes: $(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$ são determinados resolvendo-se o sistema normal

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle \cos(x), 1 \rangle & \cdots & \langle \sin(nx), 1 \rangle \\ \langle 1, \cos(x) \rangle & \langle \cos(x), \cos(x) \rangle & \cdots & \langle \sin(nx), \cos(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle 1, \sin(nx) \rangle & \langle \cos(x), \sin(nx) \rangle & \cdots & \langle \sin(nx), \sin(nx) \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, 1 \rangle \\ \langle f, \cos(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \sin(nx) \rangle \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Pode-se observar que a sequência $\{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)\}$ é ortogonal em $[-\pi, \pi]$, isto é:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(px) \cos(qx) dx = 0, \text{ e}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(px) \sin(qx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq q \\ \pi & \text{se } p = q \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(px) \cos(qx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq q \\ \pi & \text{se } p = q \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } p = q = 0. \end{cases}$$

Portanto o sistema (2.12) se reduz a

$$\begin{pmatrix} 2\pi & & 0 \\ & \pi & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, 1 \rangle \\ \langle f, \cos(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \sin(nx) \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

cujas soluções são dadas por (ver [4] e [20])

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Observações 2.1:

Desde que $\cos(x)$ é uma função par e $\sin(x)$ é uma função ímpar, tem-se:

a) Se $f(x)$ é uma função par, então,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

e, portanto,

$$f(x) \cong \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx).$$

b) Se $f(x)$ é uma função ímpar, então,

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

e, portanto,

$$f(x) \cong \sum_{k=1}^n b_k \sin(kx).$$

Exemplo 2.3: Usando o método de aproximação trigonométrica visto anteriormente será aproximada a função $f(x) = 1 + \sin(2x + 1)$, ($x \in [-\pi, \pi]$), com diferentes ordens de aproximação, serão analisados os erros encontrados e os gráficos destas aproximações.

Na tabela a seguir são dados os erros obtidos com as aproximações de ordem 2 a 8.

Tabela 2.2: Erro encontrado nas Aproximações utilizando Funções Trigonômicas.

Ordem	Erro (aprox. Trigonométrica)
2	2.7257e-005
3	3.8120e-005
4	4.8959e-005
5	5.9774e-005
6	7.0565e-005
7	8.1332e-005
8	9.2073e-005

Não é possível comparar os erros destas aproximações com os erros encontrados no exemplo 2.2 da seção 2.4.3, dado que os intervalos de aproximação destes exemplos são distintos. Mas, pode-se concluir que a aproximação trigonométrica fornece bons resultados. Isto pode ser visualizado graficamente:

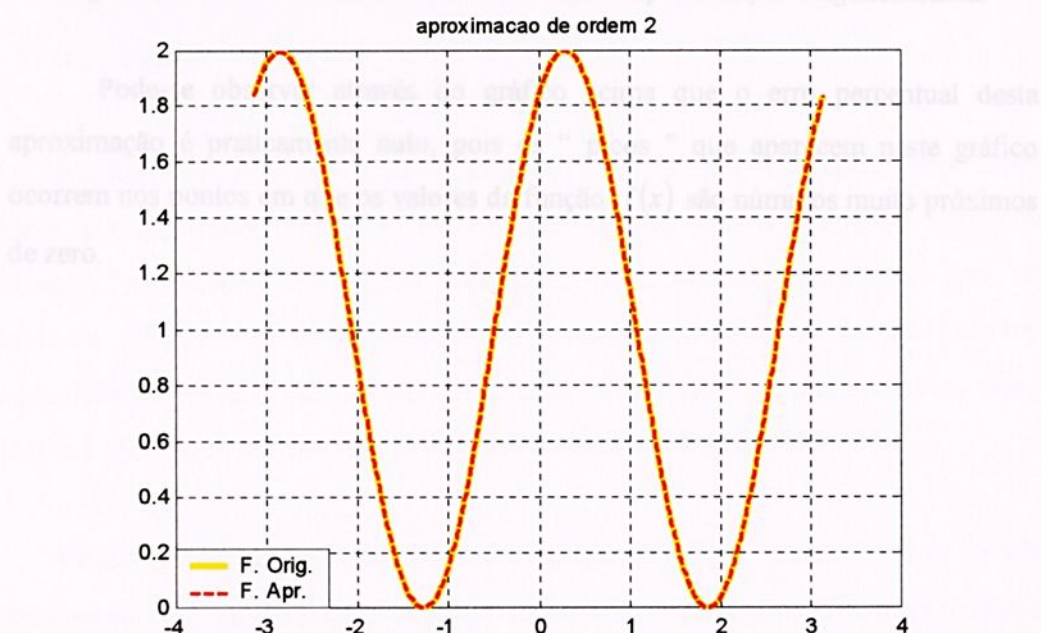


Figura 2.8: Melhor Aproximação encontrada pelo Método dos Quadrados Mínimos utilizando Funções Trigonômicas.

Graficamente pode-se observar que a função aproximada praticamente coincide com a função original. Desta forma, para uma melhor visualização do tamanho do erro encontrado será apresentado o gráfico do erro percentual.

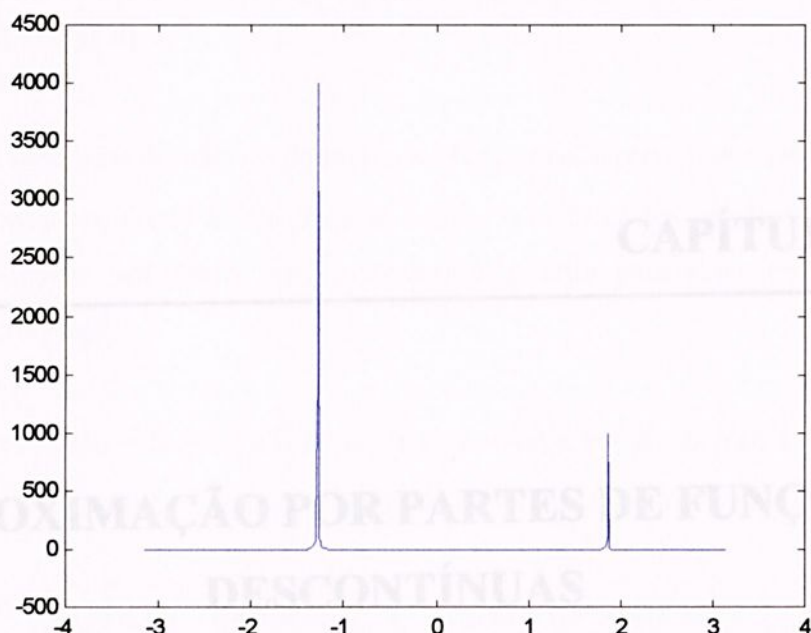


Figura 2.9: Erro Percentual obtido utilizando Aproximação Trigonométrica.

3.1 Introdução:

Pode-se observar através do gráfico acima que o erro percentual desta aproximação é praticamente nulo, pois os “picos” que aparecem neste gráfico ocorrem nos pontos em que os valores da função $f(x)$ são números muito próximos de zero.

No entanto, em várias aplicações reais, existem problemas que são formulados através de funções descontínuas (contínuas por partes) no qual resultados de aproximação estão dispersos em várias áreas diferentes. Alguns exemplos destas aplicações são dados por função, *denture*, *backlash*, e outros [16].

Desta forma, o que se propõe é aproximar “por partes” estas funções descontínuas, ou seja, será feita uma aproximação em cada intervalo onde a função está definida.

3.2 Aproximação Por Partes pelo Método dos Quadrados Mínimos

Suponha que é dada uma função $f(x)$ da família do conjunto de funções descontínuas em $[c, d]$.

Será feito uma divisão do domínio de $f(x)$ em subintervalos onde a função é definida e contínua. Desta forma pode-se aplicar o método dos quadrados mínimos utilizando funções ortogonais visto no capítulo anterior para aproximar cada um destes subintervalos.

CAPÍTULO III

APROXIMAÇÃO POR PARTES DE FUNÇÕES DESCONTÍNUAS

3.1 Introdução:

Na literatura existem vários tipos de funções que são aproximadas pelo método dos quadrados mínimos, sendo este método aplicado apenas a funções contínuas. No entanto, em várias aplicações reais, existem problemas que são formulados através de funções descontínuas (contínuas por partes) no qual resultados de aproximação estão dispersos em várias áreas diferentes. Alguns exemplos destas aplicações são dados por fricção, *deadzone*, *backlash*, e outros [16].

Desta forma, o que se propõe é aproximar “por partes” estas funções descontínuas, ou seja, será feito uma aproximação em cada intervalo onde a função está definida.



3.2 Aproximação Por Partes pelo Método dos Quadrados Mínimos

Suponha que é dada uma função $f(x)$ da família do conjunto de funções descontínuas em $[c, d]$.

Será feito uma divisão do domínio de $f(x)$ em subintervalos onde a função é definida e contínua. Desta forma pode-se aplicar o método dos quadrados mínimos utilizando funções ortogonais visto no capítulo anterior para aproximar cada um destes subintervalos.

Por exemplo, a função $f(x) = 1/x$ é descontínua em $x = 0$, desta forma para aproximá-la utilizando o método dos quadrados mínimos deve-se fazer:

$$f_1(x) = 1/x \quad \text{para } x > 0 \quad \text{e} \quad f_2(x) = 1/x \quad \text{para } x < 0.$$

Sendo assim, tem-se

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x > 0 \\ f_2(x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Desta forma, para aproximar $f(x)$ deve-se aproximar $f_1(x)$ e $f_2(x)$ de forma análoga as aproximações feitas no capítulo anterior.

3.3 Funções Descontínuas

3.3.1 Tipos de Descontinuidades

Se $f(x)$ é uma função descontínua em um ponto q do intervalo $[c, d]$, é dito que [19]



- i) $f(x)$ tem descontinuidade de salto (1ª espécie) em q , se os limites laterais de $f(x)$ em q existem (são finitos) e são distintos.
- ii) $f(x)$ tem descontinuidade infinita (2ª espécie) em q , se a função assume valores arbitrariamente grandes ou arbitrariamente pequenos próximos de q , isto é

$$\lim_{x \rightarrow q^+} f(x) = \pm \infty,$$

ou

$$\lim_{x \rightarrow q^-} f(x) = \pm \infty.$$

A definição de continuidade de uma função num ponto q , exige o conceito de limite lateral à esquerda e à direita, portanto só pode ser aplicada a pontos q de um intervalo aberto. Esta definição pode ser estendida a intervalos fechados, semi abertos ou infinitos. Por exemplo, uma função $f(x)$ definida num intervalo do tipo (c, d) , $(c, +\infty)$ ou $(-\infty, d)$ será contínua nesse intervalo se a definição é verificada em todos os pontos do intervalo citado.

É muito importante saber sempre em que intervalo a função está definida, quando se deseja estudar a sua continuidade.

Observar que, se $f(x)$ é uma função contínua em $[c, d]$, para todo q em (c, d) , se tem

$$\lim_{x \rightarrow q} f(x) = f(q)$$

e nas extremidades $x = c$ e $x = d$ do intervalo, se tem

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

$$\lim_{x \rightarrow d^-} f(x) = f(d)$$

Por exemplo: A função sinal, definida por:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

tem uma descontinuidade de salto em $x = 0$ [1], [19].

3.4 Deslocamento de Intervalos

Em muitos casos os intervalos de definição da função $f(x)$ escolhida não coincidem com o intervalo considerado no método de aproximação utilizado. Por exemplo, ao aproximar uma função $f(x)$ utilizando os polinômios de Legendre, e $f(x) \in C[c, d]$, será necessário deslocar $f(x)$ para $[a, b] = [-1, 1]$, onde os polinômios de Legendre são definidos, fazer a aproximação e depois deslocar novamente a função aproximada ao intervalo inicial.

Este deslocamento pode ser feito seguindo o esquema descrito a seguir.

Dada uma função $f(x) \in C[c, d]$, considerar a função:

$$\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$$

$$x \mapsto y = \psi(x)$$

definida por

$$\psi(x) = a + \frac{(b-a)}{(d-c)}(x-c), \quad \forall x \in [c, d].$$

Sabe-se que uma dada função possui inversa se, e somente se, ela for bijetora.

Observar que a função $\psi(x)$ acima é bijetora.

Calculando a função inversa de $\psi(x)$, $\psi^{-1}(y) = x$, ($y \in [a, b]$), e fazendo a composta de $f(x)$ com $\psi^{-1}(y)$ é encontrada a função $\xi(y)$, $f \circ \psi^{-1} = \xi(y)$, que é a função $f(x)$ deslocada para o intervalo $[a, b]$.

Assim a função $\xi(y)$ pode ser aproximada pelo método dos quadrados mínimos utilizando funções ortogonais e sua aproximação, a qual será denotada por $Q_n(y)$, que é feita no intervalo $[a, b]$, deve ser deslocada para o intervalo inicial, ou seja, ao intervalo $[c, d]$.

Para deslocar $Q_n(y)$ para o intervalo $[c, d]$ é necessário fazer o procedimento inverso adotado anteriormente:

$$P_n(x) = Q_n(y) \circ \psi(x),$$

obtendo assim, $P_n(x)$, que é a função aproximada de $f(x)$ no intervalo $[c, d]$.

É importante observar que este processo de deslocamento de intervalos foi feito apenas para uma função $f(x)$ definida em um intervalo $[c, d]$. Porém, para o caso em que $f(x)$ é definida em mais de um intervalo ou é uma função descontínua, será necessário deslocar cada um destes intervalos separadamente e fazer uma aproximação por partes utilizando o método dos quadrados mínimos.

Abaixo será mostrado um exemplo de aproximação por partes no qual será necessário fazer o deslocamento de intervalos.

Exemplo 3.1: Será dada uma aproximação da função

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}(x) & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ 1 + \text{sen}(x) & \text{se } -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



pelo método dos quadrados mínimos, utilizando os polinômios de Legendre de ordem 7.

Como $f(x)$ é uma função descontínua, é necessário utilizar o procedimento de aproximação por partes, para isso seja

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \sin(x) & \text{se } x \in [-3, -1) \\ f_2(x) = 1 + \sin(x) & \text{se } x \in [-1, 3] \end{cases}.$$

Deslocar o intervalo $[-3, -1)$ para o intervalo $[-1, 1]$ não é possível, pois este tipo de deslocamento é feito apenas para intervalos que são do mesmo tipo, desta forma uma opção conveniente é deslocar o intervalo $[-3, -1]$ para $[-1, 1]$ e para obter um polinômio aproximado no intervalo inicial, desconsiderar a extremidade -1 do intervalo $[-3, -1]$.

Fazendo o deslocamento de cada intervalo tem-se:

- $\psi_1 : [-3, -1] \rightarrow [-1, 1]$
 $x \mapsto y = \psi_1(x)$

$$\psi_1(x) = x + 2, \quad \forall x \in [-3, -1].$$

- $\psi_2 : [-1, 3] \rightarrow [-1, 1]$
 $x \mapsto y = \psi_2(x)$

$$\psi_2(x) = \frac{x-1}{2}, \quad \forall x \in [-1, 3].$$

Calculando a inversa dessas funções, tem-se respectivamente *da novamente ao intervalo inicial, ou seja, considerar as funções compostas*

$$\psi_1^{-1}(y) = y - 2, \forall y \in [-1, 1]$$

e

$$\psi_2^{-1}(y) = 2y + 1, \forall y \in [-1, 1].$$

Desta forma as funções a serem aproximadas são *respectivamente. A função*

$$\xi_1(y) = f_1(x) \circ (\psi_1^{-1}(y)) = \text{sen}(y - 2), \forall y \in [-1, 1]$$

e

$$\xi_2(y) = f_2(x) \circ (\psi_2^{-1}(y)) = 1 + \text{sen}(2y + 1), \forall y \in [-1, 1].$$

As aproximações encontradas para as funções $\xi_1(y)$ e $\xi_2(y)$ são respectivamente

$$Q_7(y) = \begin{cases} Q_1(y) = a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4 + a_5 l_5 + a_6 l_6 + a_7 l_7 \\ Q_2(y) = c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + c_4 l_4 + c_5 l_5 + c_6 l_6 + c_7 l_7 \end{cases}, \forall y \in [-1, 1],$$

sendo,

$$a_0 = -0.76514$$

$$a_1 = -0.37598$$

$$a_2 = 0.42291$$

$$a_3 = 0.06520$$

$$a_4 = -0.03750$$

$$a_5 = -0.00727$$

$$a_6 = -0.01365$$

$$a_7 = -0.03329$$

$$c_0 = 1.38256$$

$$c_1 = 0.70570$$

$$c_2 = -1.25207$$

$$c_3 = -0.57337$$

$$c_4 = 0.46742$$

$$c_5 = 0.12797$$

$$c_6 = -0.04623$$

$$c_7 = 0.03217$$

e $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ e l_7 são os polinômios de Legendre mostrados no capítulo anterior (ver (2.7)).

a) A função aproximada encontrada, $Q_7(y)$, deve ser deslocada novamente ao intervalo inicial, ou seja, considerar as funções compostas

$$P_7(x) = \begin{cases} P_1(x) = Q_1(y) \circ \psi_1(x), & \forall x \in [-3, -1] \\ P_2(x) = Q_2(y) \circ \psi_2(x), & \forall x \in [-1, 3] \end{cases}$$

sendo $P_1(x)$ e $P_2(x)$ as aproximações de $f_1(x)$ e $f_2(x)$, respectivamente. A função $P_7(x)$ é uma aproximação de $f(x)$.

O erro encontrado para as funções $P_1(x)$ e $P_2(x)$, usando as fórmulas (ver (2.5)), é dado por:

$$E_i = \int_{-1}^1 w(x) [f(x) - P_i(x)]^2 dx, \quad i = 1, 2.$$

Assim obtém-se, respectivamente

$$E_7 = E(a_0, a_1, \dots, a_7) = \begin{cases} E_1 = 4.49871e - 007 = 4.49871 \cdot 10^{-7} \\ E_2 = 1.52996e - 006 = 1.52996 \cdot 10^{-6} \end{cases}.$$

Graficamente:



Figura 3.1: a) Função $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ 1 + \sin(x) & \text{se } -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ e sua Aproximação de Ordem 7. b) Erro Percentual em Relação as Aproximações

Observação 3.1: É importante verificar que a ordem de aproximação depende do tipo de função utilizada (linear, quadrática, exponencial, ...). Por exemplo, se for feita uma aproximação de ordem 8 ou superior no exemplo anterior será notado que os resultados do tamanho do erro começam a aumentar.

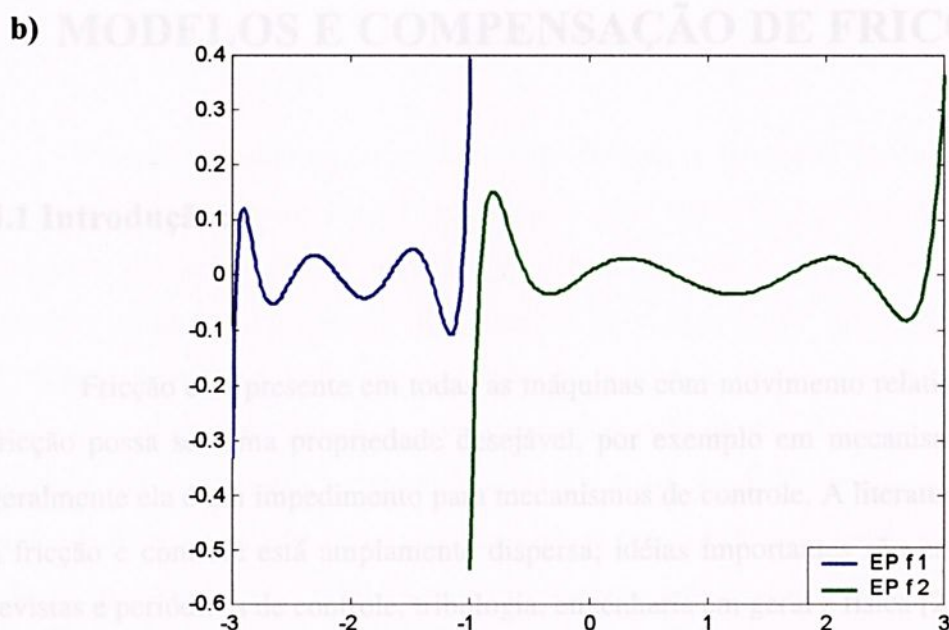
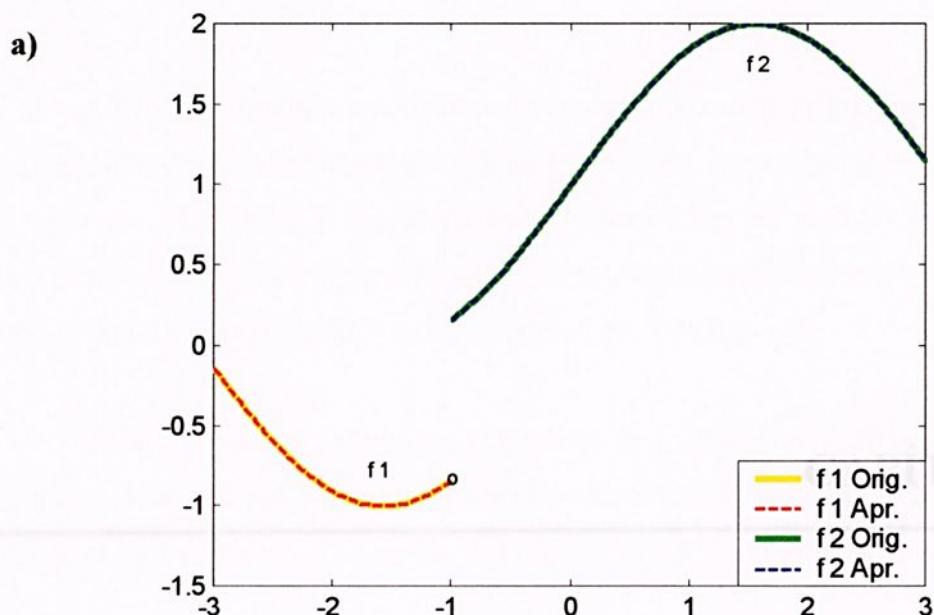


Figura 3.1: a) Função $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ 1 + \sin(x) & \text{se } -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ e sua Aproximação de Ordem 7. b) Erro Percentual em Relação as Aproximações.

Observação 3.1: É importante verificar que a ordem de aproximação depende do tipo de função utilizada (linear, quadrática, exponencial, ...). Por exemplo, se for feita uma aproximação de ordem 8 ou superior no exemplo anterior será notado que os resultados do tamanho do erro começam a aumentar.

CAPÍTULO IV

MODELOS E COMPENSAÇÃO DE FRICÇÃO

4.1 Introdução:

Fricção está presente em todas as máquinas com movimento relativo. Ainda que fricção possa ser uma propriedade desejável, por exemplo em mecanismos de freios, geralmente ela é um impedimento para mecanismos de controle. A literatura relacionada a fricção e controle está amplamente dispersa; idéias importantes são encontradas em revistas e periódicos de controle, tribologia, engenharia em geral e física [2].

Fricção aparece na interface física entre duas superfícies em contato. Lubrificantes tais como graxa ou óleo são freqüentemente usados, mas também pode haver um contato seco entre as superfícies. Existe uma ampla classe de fenômenos físicos que causam fricção, incluindo deformações elásticas, deformações plásticas, mecânica de fluido e fenômenos de onda [15].



A fricção é também muito importante em todos os movimentos de sistemas de controle. Ela é uma não linearidade que pode ocasionar erros de regime e de seguimento de trajetória. Além disso, a fricção conduz a ciclos limites em torno da posição desejada e movimentos tipo adere-desliza. Portanto é importante compreender o fenômeno fricção para melhorar e compreender o comportamento dos sistemas [3].

Neste capítulo será visto alguns modelos de fricção estática, o modelo de fricção dinâmico de Lugre em regime permanente e uma forma de compensar as funções de fricção utilizando algumas manipulações algébricas e a teoria vista nos capítulos II e III.

Figura 4.1: Modelo de Fricção Estática + Coulomb + Viscosa.

4.2 Breve Histórico

4.3 Modelos de Fricção

Fricção tem sido investigada ao longo do tempo. Leonardo da Vinci investigou o movimento de deslize de blocos retangulares sobre superfícies planas. O físico francês Amonton fez investigações semelhantes e concluiu que a força de fricção em uma interface de deslize é proporcional à carga normal e se opõe ao movimento. Ele também descobriu que a força de fricção não depende da área de contato aparente. Um pequeno bloco desliza em uma superfície com a mesma fricção de um bloco grande se as forças normais são as mesmas. O físico francês Coulomb estabeleceu que uma vez que o movimento se inicia a fricção é independente da velocidade, resultando na famosa lei de fricção de Coulomb. O fenômeno fricção tem sido extensivamente estudado em tribologia [3]. Morin introduziu a idéia de fricção estática e Reynolds a equação de fluxo de fluido viscoso, completando o modelo mais usado em engenharia: o Modelo de Fricção Estática + Coulomb + Viscosa (Morin, 1833; Reynolds, 1886) mostrado na Figura 4.1 [2].



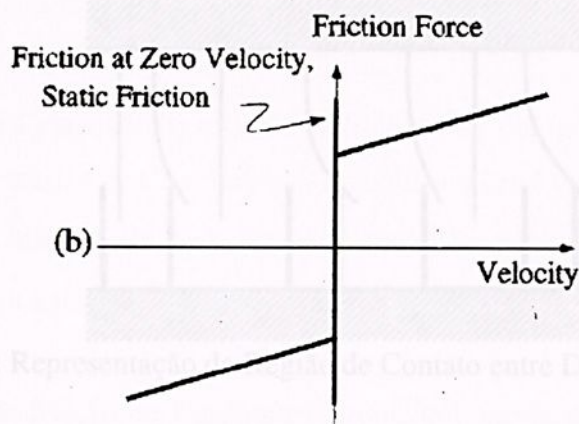


Figura 4.1: Modelo de Fricção Estática + Coulomb + Viscosa.

4.3 Modelos de Fricção

Antes de ser apresentado modelos matemáticos de fricção será dada uma descrição do fenômeno de fricção em deslize. Para este propósito será considerado um bloco retangular sobre uma superfície plana. Fricção é a força de reação tangencial entre as superfícies. Se uma pequena força tangencial é aplicada existirá inicialmente uma pequena deflexão do bloco, mas o bloco retornará a sua posição original se a força é reiniciada em direção a zero [3].

Isto pode ser visualizado, por exemplo, quando dois blocos fazem contato através de um número de asperidades microscópicas (cerdas elásticas). Quando uma força tangencial é aplicada, as cerdas se curvam (inclinam) como molas, ao qual surge a força de fricção como pode ser visto na figura a seguir.

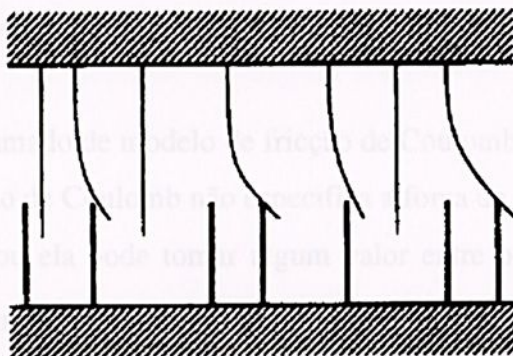


Figura 4.2: Representação da Região de Contato entre Duas Superfícies.

Se a força é suficientemente grande algumas cerdas (asperidades) se curvam tanto que deslizam; assim o bloco inicia o movimento. A força requerida para isto é chamada de força *break-away*. A força necessária para manter o bloco se movendo depende da velocidade e de vários outros fatores. O fenômeno é altamente aleatório devido as formas irregulares das superfícies [3].

4.3.1 Modelos Estáticos

Os modelos clássicos de fricção consistem em diferentes componentes, os quais cada um toma cuidado com certos aspectos da força de fricção. A idéia principal é que a fricção se opõe ao movimento e que sua magnitude é independente da velocidade e da área de contato.

Ela pode ser descrita pela fórmula

$$F = F_C \operatorname{sgn}(v) = \mu F_N \operatorname{sgn}(v); \quad (4.1)$$

sendo

F_C – a força de fricção,

F_N – a carga normal

μ – o coeficiente de fricção e

v – a velocidade.

Este modelo é chamado de modelo de fricção de Coulomb e é ilustrado na Figura 4.3a). O modelo de fricção de Coulomb não especifica a força de fricção para velocidade zero. Ela pode ser zero ou ela pode tomar algum valor entre o intervalo $-F_C$ e F_C , dependendo de como a função sinal é definida.

O modelo de fricção de Coulomb é muito útil apesar de sua simplicidade. Ele pode explicar vários fenômenos associados com fricção e é comumente usado para compensação de fricção [3].

No século XIX a teoria de hidrodinâmica foi desenvolvida usando expressões para força de fricção causada por lubrificantes de viscosidade. O termo fricção Viscosa é usado para este componente de força, que é normalmente descrito como

$$f(v) = F_v v \quad (4.2)$$

sendo F_v a força de fricção Viscosa .

O modelo de fricção de Coulomb pode ser melhorado adicionando fricção Viscosa $F_v v$, ou seja ([3], [15])

$$F = F_C \operatorname{sgn}(v) + f(v). \quad (4.3)$$

Este modelo será aproximado e compensado no problema 1 do capítulo V utilizando o método dos quadrados mínimos visto nos capítulos II e III e a compensação de fricção que será vista na seção 4.4. A Figura 4.3b) mostra o gráfico deste modelo.

Como foi visto anteriormente, o modelo (4.1) não descreve o que acontece quando a velocidade é zero se a função sinal, sgn , não for definida em $v = 0$. Como



mencionado na seção 4.3 fricção atua como uma mola quando uma pequena força é aplicada. Este fenômeno é muitas vezes chamado de *stiction*. *Stiction* descreve a força de fricção em repouso. Um jeito simples de capturar o fenômeno fricção em velocidade zero é aumentando o modelo de fricção de Coulomb (4.1) com uma força de fricção específica em velocidade zero, ou seja

$$F = \begin{cases} F_e & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e) & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| \geq F_s \end{cases}, \quad (4.4)$$

sendo F_e a força aplicada (força externa) ao bloco e F_s a força *stiction*.

O modelo de fricção pode ser visto como uma composição de dois modelos, um para $v = 0$ e um modelo de fricção de Coulomb para $v \neq 0$. O modelo para $v = 0$ afirma que fricção opõe ao movimento contanto que a força aplicada é menor que a força *stiction*. O modelo de fricção de Coulomb + Viscosa também pode ser aumentado com um modelo *stiction*, como ilustrado na Figura 4.3c).

Existem várias dificuldades com os modelos *stiction*. Um dos problemas é que a força de fricção não é uma função, mais especificamente não é uma função da velocidade quando $v = 0$, ela é apenas uma relação devido a $v = 0$ ter várias fricções diferentes. Isto conduz a algumas complicações matemáticas.

Existem evidências experimentais mostrando que a força de fricção não diminui repentinamente quando a velocidade aumenta. Stribeck observou que a força de fricção possui comportamento ilustrado na Figura 4.3d). Essa força é chamada de fricção Stribeck. O modelo de Stribeck pode ser descrito por

Figura 4.3: Modelos de Fricção Estática. a) Modelo de Fricção de Coulomb. b) Modelo de Fricção de Coulomb + Viscosa. c) Modelo de Fricção *Stiction*, Coulomb e Viscosa. d) Modelo de Fricção *Stiction*, Coulomb, Viscosa e Efeito Stribeck.



4.3.2 O Modelo de Lagre

$$F = \begin{cases} F(v) & \text{se } v \neq 0 \\ F_e & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.5)$$

sendo $F(v)$ uma função arbitrária, a qual pode ser vista na Figura 4.3d). Um número de parametrizações para $F(v)$ tem sido proposto. Uma forma comum de não linearidade é dada abaixo ([3], [15])

$$F(v) = F_C + (F_s - F_C)e^{-|v/v_s|^{\delta_s}} + F_v v \quad (4.6)$$

sendo

v_s – a velocidade Stribeck,

δ_s – uma constante que depende da geometria da aplicação.

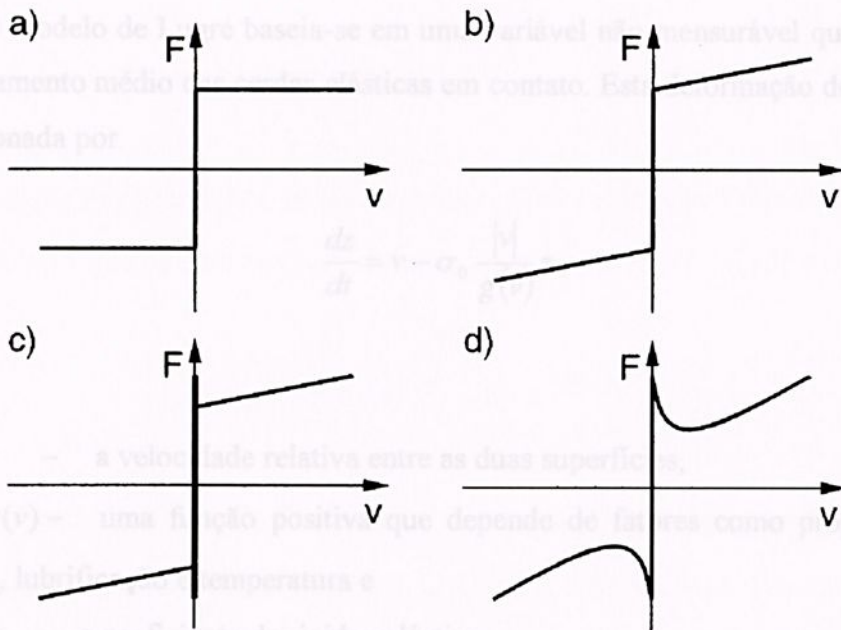


Figura 4.3: Modelos de Fricção Estática. a) Modelo de Fricção de Coulomb. b) Modelo de Fricção de Coulomb + Viscosa. c) Modelo de Fricção Stiction, Coulomb e Viscosa. d) Modelo de Fricção Stiction, Coulomb, Viscosa e Efeito Stribeck.

4.3.2 O Modelo de Lugre

O termo Lugre deriva do modelo surgido através do trabalho em conjunto entre as universidades de Lund e Grenoble.

O modelo de Lugre foi baseado no entendimento do mecanismo microscópico do fenômeno fricção. A este nível, as superfícies são muito irregulares e seu contato se dá através de asperidades. No modelo em questão isto é aproximado por dois corpos rígidos em contato através de pequenas cerdas elásticas (molas elásticas), tal como mostrado na Figura 4.2.

Este modelo foi baseado no comportamento médio das cerdas elásticas. A fricção é modelada como a força de inclinação média das cerdas elásticas. Assim, quando uma força tangencial é aplicada as cerdas se inclinarão como molas. Se a inclinação é suficientemente grande as cerdas iniciam o deslize [15].

O modelo de Lugre baseia-se em uma variável não mensurável que representa o comportamento médio das cerdas elásticas em contato. Esta deformação denotada por z é equacionada por

$$\frac{dz}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z, \quad (4.7)$$

sendo

v – a velocidade relativa entre as duas superfícies,

$g(v)$ – uma função positiva que depende de fatores como propriedades dos materiais, lubrificação e temperatura e

σ_0 – o coeficiente de rigidez elástica.



Em regime permanente ($dz/dt = 0$ e v constante) a deformação z assume a seguinte forma

$$z_{ss} = \frac{g(v)}{\sigma_0} \operatorname{sgn}(v) \quad (4.8)$$

onde o sub-índice ss indica regime permanente (*steady state*).

Para um comportamento típico de fricção, $g(v)$ decresce monotonicamente para $g(0)$ quando v aumenta. Isto corresponde ao efeito *Stribeck*. A força de fricção gerada pela reação ao movimento das cerdas elásticas em contato é aproximada por

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + f(v), \quad (4.9)$$

sendo

σ_1 — o coeficiente de amortecimento.

A função $g(v)$ modela o efeito *Stribeck* e $f(v)$ é a fricção Viscosa. Uma escolha razoável de $g(v)$ que dá uma boa aproximação no efeito *Stribeck* é ([15] e [8])

$$g(v) = F_C + (F_s - F_C) e^{-(v/v_s)^2} \quad (4.10)$$

onde F_C é a força de fricção de Coulomb, F_s é a força *Stiction* (que corresponde a força limite do regime de pré-deslizamento) e v_s é a velocidade *Stribeck*. Com esta descrição o modelo fica caracterizado por quatro parâmetros estáticos F_C , F_s , $f(v)$ e v_s e dois dinâmicos σ_0 e σ_1 .



A função ($\infty > F_S \geq g(v) \geq F_C > 0$) descreve parte das características de regime permanente do modelo para movimentos com velocidade constante e $dz/dt = 0$. Neste caso, as características de regime permanente para a fricção são governadas por:

$$F_{ss}(v) = g(v)\text{sgn}(v) + f(v) = F_C \text{sgn}(v) + (F_S - F_C)e^{-(v/v_s)^2} \text{sgn}(v) + f(v). \quad (4.11)$$

ver ([5], [8]).

O modelo de Luge em regime permanente será aproximado e compensado no problema 2 do capítulo V utilizando o método dos quadrados mínimos visto nos capítulos II e III e a compensação de fricção que será vista a seguir.

4.4 Compensação de Fricção

Existem vários caminhos para compensar a fricção. Um caminho muito simples para eliminar alguns efeitos da fricção é o uso do sinal *dither*, que é um sinal de alta frequência que é adicionado ao sinal de controle.

O efeito do *dither* é que ele introduz forças extras que fazem o sistema mover antes do nível *Stiction* ser alcançado. O efeito neste caso é semelhante a remover o *Stiction*. Uma versão moderna é o *Knocker*, utilizado em válvulas industriais.

Se um bom modelo de fricção for avaliado é possível o seu uso para esquemas de compensação de fricção baseados no modelo. A idéia é muito simples. A força de fricção F é estimada usando algum modelo, e um sinal que compense a força de fricção estimada, $\tilde{F}$, é adicionado ao sinal de controle [15].



Por exemplo, dada a função robótica não linear [16],

$$f(x) = M \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q}_d + \Lambda \dot{e} \end{pmatrix} + V_m \begin{pmatrix} q, \dot{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_d + \Lambda e \end{pmatrix} + G(q) + F \begin{pmatrix} \dot{q} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

em que,

$$x \equiv \begin{bmatrix} T & .T & T & .T & ..T \\ q & q & q_d & q_d & q_d \end{bmatrix},$$

$q(t)$ – vetor variável $\in R^n$,

$q_d(t)$ – é a trajetória $\in R^n$,

$M \begin{pmatrix} q \end{pmatrix}$ – é a matriz de inércia,

$\Lambda = \Lambda^T > 0$ – é um esquema dos parâmetros da matriz,

e – é a trajetória do erro,

$V_m \begin{pmatrix} q, \dot{q} \end{pmatrix}$ – a matriz centrípeta,

$G(q)$ – o vetor gravidade,

$F \begin{pmatrix} \dot{q} \end{pmatrix}$ – é a fricção.

É necessário obter um sinal que compense a força de fricção $F \begin{pmatrix} \dot{q} \end{pmatrix}$ e adicioná-lo à função robótica não linear dada pela equação (4.12).

O que se propõe neste trabalho é fazer a compensação da função de fricção baseada num dado modelo de fricção. Para esse fim, a força de fricção $\left(F \begin{pmatrix} \dot{q} \end{pmatrix} \right)$ será considerada como função da velocidade v ($F(v)$). Primeiramente, será feita a aproximação da função de fricção $F(v)$ através do método dos quadrados mínimos com

o uso dos polinômios ortogonais, pois como foi visto nos capítulos II e III são mais eficazes. Assim obtém-se um polinômio, $\hat{F}(v)$, que é a força de fricção aproximada (estimada),

$$F(v) \equiv \hat{F}(v).$$

CAPÍTULO V

Calculando o inverso aditivo de $\hat{F}(v)$, o qual será chamado de $R(v)$ e adicionando esta função $R(v)$ à função de fricção obtém-se valores muito próximos de zero, ou seja

$$C(v) = F(v) + R(v) = F(v) + \left(-\left(\hat{F}(v) \right) \right) \equiv 0,$$

5.1 Introdução:

sendo $C(v)$ a função de compensação da função de fricção.

Desta forma vários efeitos indesejados que a fricção causa podem ser “parcialmente anulados”. Além disso, é importante destacar a facilidade de aplicação das funções aproximadas para a realização da compensação.

Neste capítulo serão realizados alguns testes com modelos de fricção para verificar a eficiência das aproximações e da compensação. Nos capítulos anteriores foi aproximado o modelo de fricção de Coulomb e o modelo de LuGre em regime permanente através do método visto no capítulo II (método dos quadrados mínimos utilizando polinômios ortogonais) juntamente com a teoria do capítulo III (aproximação por partes de funções descontínuas). Serão apresentados resultados numéricos obtidos com os métodos considerados em contrapartida com a função original e será realizada a compensação destas funções de fricção utilizando as aproximações obtidas. Foi utilizado o software MATLAB.

Observação 5.1: Não será testado o método dos quadrados mínimos utilizando funções trigonométricas para as aproximações das funções de fricção pelo fato delas não serem funções periódicas.



5.2 Testes e Resultados

Problema 1: O problema consiste em aproximar o modelo de fricção de Coulomb + Viscosa (ver (4.3)),

$$F(v) = F_C \operatorname{sgn}(v) + F_v(v).$$

CAPÍTULO V

APLICAÇÃO: APROXIMAÇÃO DE MODELOS DE FRICÇÃO E COMPENSAÇÃO DE FRICÇÃO

5.1 Introdução:

Neste capítulo serão realizados alguns testes com modelos de fricção para verificar a eficiência das aproximações e da compensação proposta nos capítulos anteriores. Foi aproximado o modelo de fricção estática de Coulomb + Viscosa e o modelo de Lugre em regime permanente através do método visto no capítulo II (método dos quadrados mínimos utilizando polinômios ortogonais) juntamente com a teoria do capítulo III (aproximação por partes de funções descontínuas). Será apresentado resultados numéricos obtidos com os métodos considerados em contrapartida com a função original e será realizada a compensação destas funções de fricção utilizando as aproximações obtidas. Foi utilizado o software MATLAB.

Observação 5.1: Não será testado o método dos quadrados mínimos utilizando funções trigonométricas para as aproximações das funções de fricção pelo fato delas não serem funções periódicas.



5.2 Testes e Resultados

Problema 1: O problema consiste em aproximar o modelo de fricção de Coulomb + Viscosa (ver (4.3)),

$$F(v) = F_C \operatorname{sgn}(v) + f(v), \quad (5.1)$$

pelo método dos quadrados mínimos utilizando os polinômios de Legendre e de Chebyshev, no intuito de comparar seu desempenho e compensar a fricção.

A função $F(v)$ será aproximada com os parâmetros dados na tabela abaixo:

Tabela 5.1: Parâmetros para um Modelo de Fricção obtidos do Sistema de Identificação [15].

Parâmetros de Fricção	Valores Identificados
F_c	0.28 [Nm]
F_s	0.33 [Nm]
F_v	0.0176 [Nms / rad]
v_s	0.01 [rad / s]

Com os dados acima, a função $F(v)$ é dada por:

$$F(v) = \begin{cases} -0.28 + 0.0176v = f_1(v) & \text{se } v < 0 \\ 0 = f_2(v) & \text{se } v = 0 \\ 0.28 + 0.0176v = f_3(v) & \text{se } v > 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Sendo $F(v)$ uma função descontínua, a mesma será aproximada pelo processo de aproximação por partes.

Por conveniência, a função $f_1(v)$ será aproximada no intervalo $[-0.2, -0.005]$ e $f_3(v)$ no intervalo $[0.005, 0.2]$, dado que é necessário ser feito deslocamento de intervalos.



A função aproximada de ordem n para o modelo de fricção (5.2), usando polinômios de Legendre e de Chebyshev, é dada por [ver apêndice C.1]:

$$\hat{F}_n(v)=\begin{cases} \sum_{k=0}^n a_k P_k(\psi_1(v)) & se \quad -0.2 \leq v \leq -0.005 \\ 0 & se \quad v = 0 \\ \sum_{k=0}^n c_k P_k(\psi_3(v)) & se \quad 0.005 \leq v \leq 0.2 \end{cases}, \tag{5.3}$$

sendo $\psi_1(v)=(10.25641026v+1.051282051)$, $\psi_3(v)=(10.25641026v-1.051282051)$, P_k é o conjunto de polinômios ortogonais de ordem k e, a_k e c_k são coeficientes de ordem k , para cada $k=0,1,2,...,n$.

A Tabela 5.2 mostra o erro obtido com as aproximações de ordem 1 a 8 utilizando os polinômios de Legendre e de Chebyshev. Os dados foram obtidos usando o software MATLAB.

Tabela 5.2: Erro encontrado nas Aproximações de Ordem 1 a 8 utilizando os Polinômios de Legendre e de Chebyshev.

Ordem		Erro (aprox. Legendre)	Erro (aprox. Chebyshev)		Erro (aprox. Legendre)	Erro (aprox. Chebyshev)
1	Para $v < 0$	1.457158e-34	2.479506e-34	Para $v > 0$	1.457158e-34	6.517199e-34
2		4.838050e-11	1.736849e-10		4.838050e-11	1.736849e-10
3		4.839417e-11	1.738229e-10		4.839417e-11	1.738229e-10
4		1.015077e-09	1.838133e-8		1.015077e-09	1.838133e-8
5		1.015189e-09	1.838376e-8		1.015189e-09	1.838376e-8
6		7.166598e-09	1.603553e-7		7.166598e-09	1.603553e-7
7		7.167100e-09	1.603662e-7		7.167100e-09	1.603662e-7
8		3.082561e-08	6.598694e-7		3.082561e-08	6.598694e-7

O melhor polinômio encontrado das aproximações realizadas utilizando os polinômios ortogonais é dado por

$$\hat{F}(v) = \begin{cases} a_0 + a_1(10.25641026v - 1.051282051) = \hat{f}_1 & \text{se } -0.2 \leq v \leq -0.005 \\ 0 = f_2 = \hat{f}_2 & \text{se } v = 0 \\ c_0 + c_1(10.25641026v - 1.051282051) = \hat{f}_3 & \text{se } 0.005 \leq v \leq 0.2 \end{cases} \quad (5.4)$$

sendo

$$\begin{aligned} a_0 &= -2.818039999988846e-1 & c_0 &= 2.818039999988846e-1 \\ a_1 &= 1.715999999399404e-3 & c_1 &= 1.715999999399384e-3 \end{aligned}$$

para aproximação realizada com os polinômios de Legendre e

$$\begin{aligned} a_0 &= -2.818039999989265e-1 & c_0 &= 2.81803999998926e-1 \\ a_1 &= 1.717717717072941e-3 & c_1 &= 1.717717717072921e-3 \end{aligned}$$

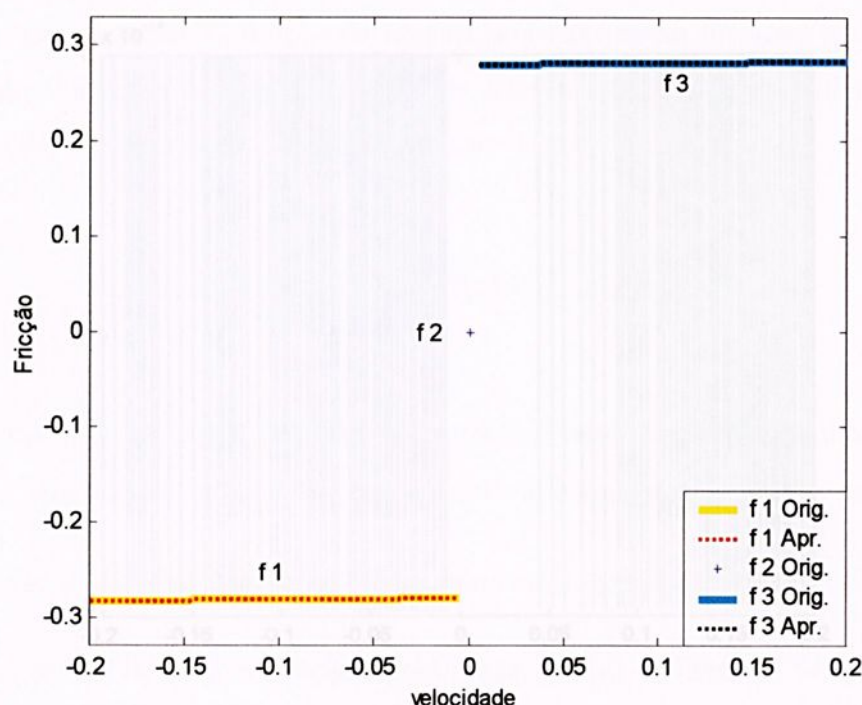
para aproximação realizada com os polinômios de Chebyshev.

Graficamente a função original e a função aproximada praticamente são iguais, como mostra a Figura 5.1.

Figura 5.1: Função Original e Função Aproximada de Ordem 1. a) Mostra Aproximação utilizando os Polinômios de Legendre no Intervalo $[-0.2, 0.2]$. b) Mostra Aproximação utilizando os Polinômios de Chebyshev no Intervalo $[-0.2, 0.2]$.

a)

O gráfico de cada erro percentual é apresentado a seguir.



b)

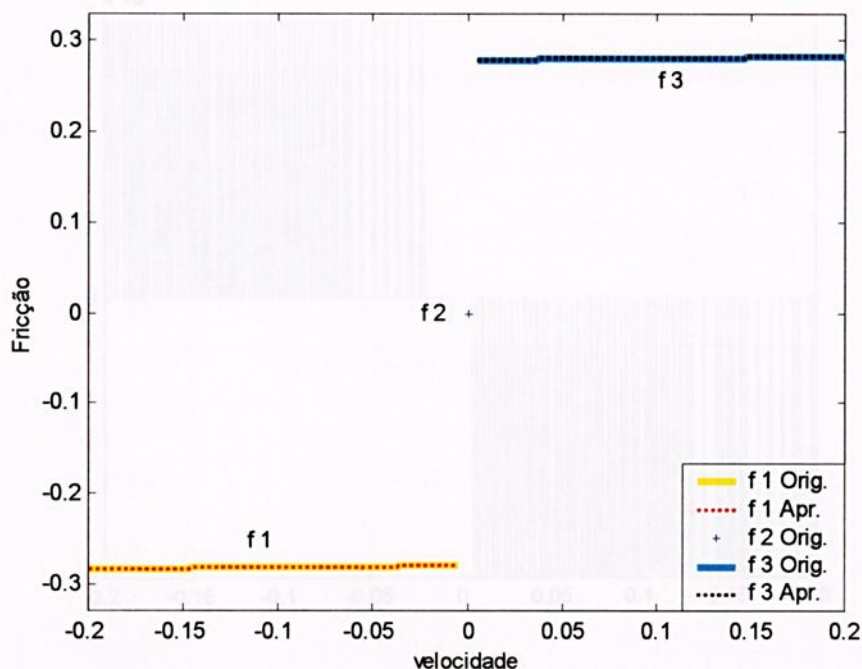


Figura 5.1: Função Original e Função Aproximada de Ordem 1. a) Mostra Aproximação utilizando os Polinômios de Legendre no Intervalo $[-0.2, 0.2]$. b) Mostra Aproximação utilizando os Polinômios de Chebyshev no Intervalo $[-0.2, 0.2]$.

O gráfico de cada erro percentual é apresentado a seguir:

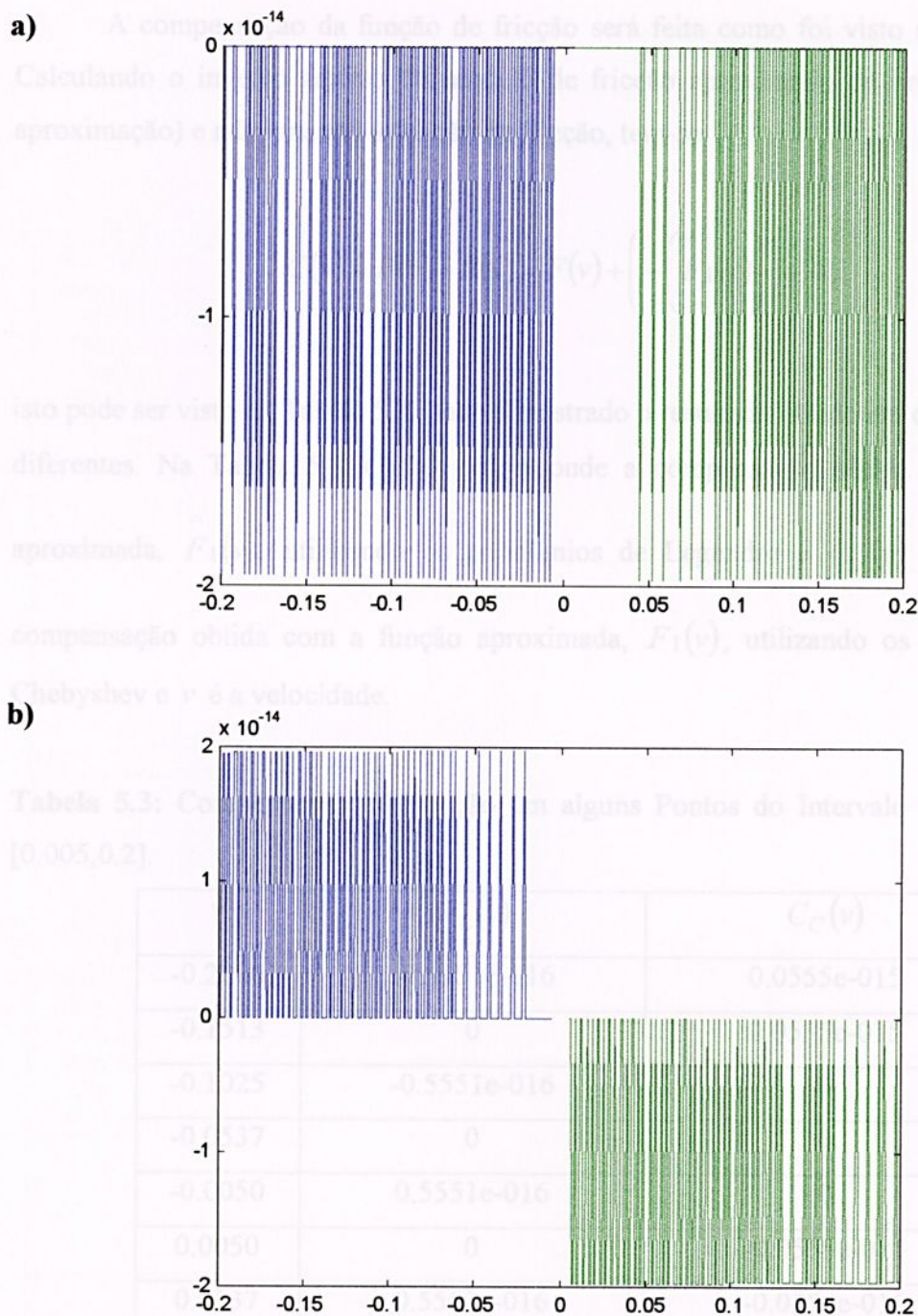


Figura 5.2: a) e b) Erro Percentual das Aproximações de Ordem 1 do Modelo de Fricção de Coulomb + Viscosa utilizando os Polinômios de Legendre e de Chebyshev respectivamente.

A compensação da função de fricção será feita como foi visto no capítulo IV. Calculando o inverso aditivo do modelo de fricção aproximado de ordem 1 (melhor aproximação) e adicionando à função de fricção, tem-se

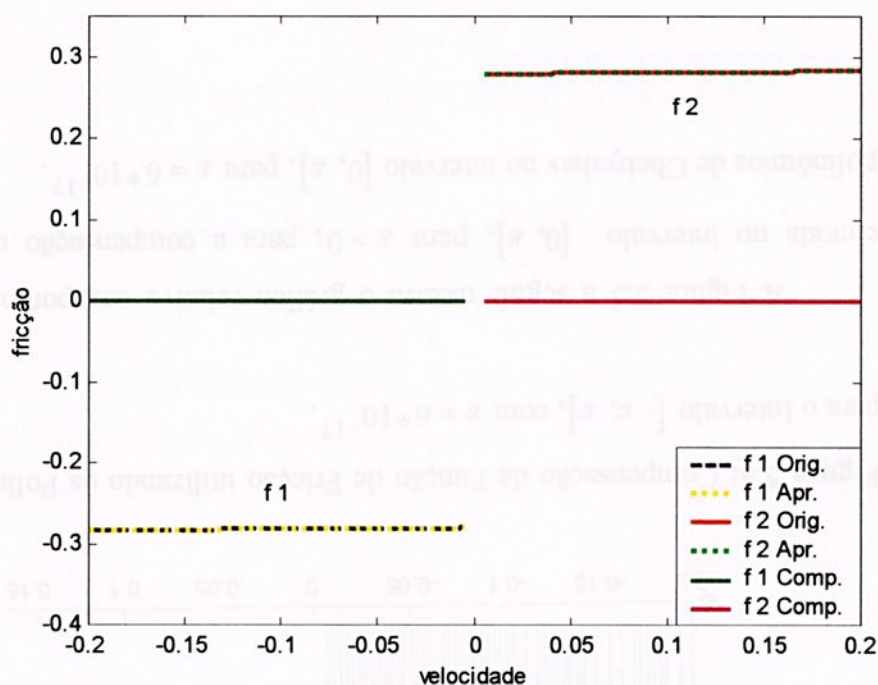
$$C(v) = F(v) + R(v) = F(v) + \left(- \left(\hat{F}_1(v) \right) \right) \cong 0,$$

isto pode ser visto na Tabela 5.3, onde é mostrado o resultado obtido em dez velocidades diferentes. Na Tabela 5.3 $C_L(v)$ corresponde a compensação obtida com a função aproximada, $\hat{F}_1(v)$, utilizando os polinômios de Legendre e $C_C(v)$ corresponde a compensação obtida com a função aproximada, $\hat{F}_1(v)$, utilizando os polinômios de Chebyshev e v é a velocidade.

Tabela 5.3: Compensação de Fricção em alguns Pontos do Intervalo [-0.2,-0.005] e [0.005,0.2].

v	$C_L(v)$	$C_C(v)$
-0.2000	-0.5551e-016	0.0555e-015
-0.1513	0	0.0555e-015
-0.1025	-0.5551e-016	0
-0.0537	0	0
-0.0050	0.5551e-016	0
0.0050	0	-0.0555e-015
0.0537	0.5551e-016	-0.0555e-015
0.1025	0.5551e-016	-0.0555e-015
0.1513	0	-0.1110e-015
0.2000	0	-0.1110e-015

a)



b)

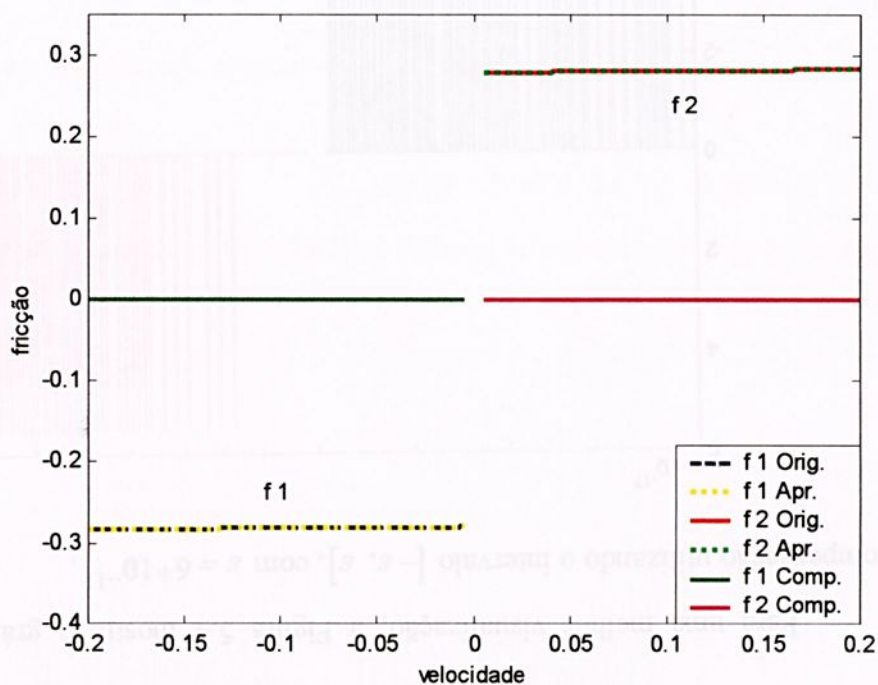


Figura 5.3: Compensação do Modelo de Fricção de Coulomb + Viscosa. a) Mostra Compensação utilizando os Polinômios de Legendre. b) Mostra Compensação utilizando os Polinômios de Chebyshev.

Graficamente, pode-se observar que a função de compensação é “praticamente nula” tanto para o modelo utilizando os polinômios de Legendre como para o modelo utilizando os polinômios de Chebyshev; ou seja, a imagem da função compensação, $C(v)$ está contida num intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Para uma melhor visualização, a Figura 5.4 mostra o gráfico da função de compensação utilizando o intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon = 6 \cdot 10^{-17}$.

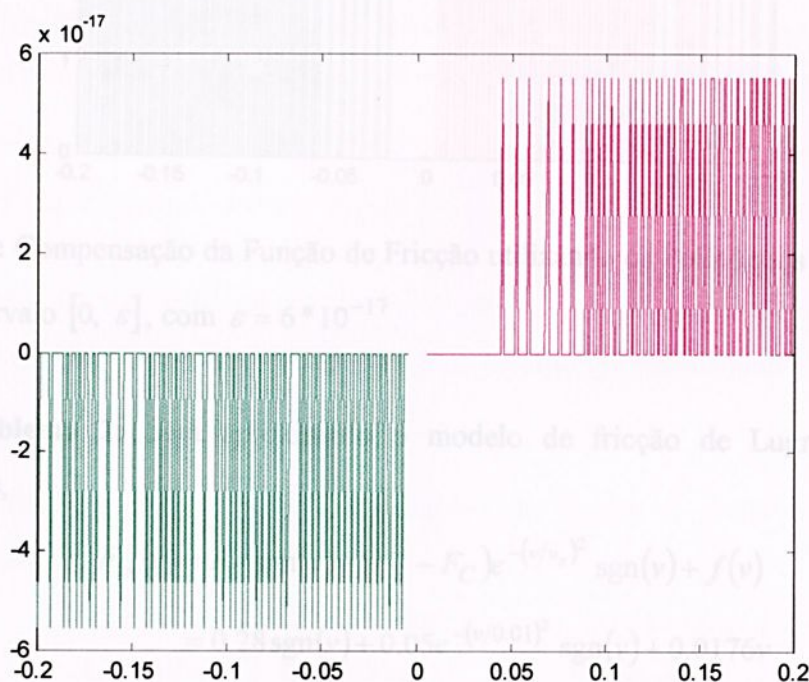


Figura 5.4: Compensação da Função de Fricção utilizando os Polinômios de Legendre para o Intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon = 6 \cdot 10^{-17}$.

A Figura 5.5 a seguir mostra o gráfico relativo aos pontos cuja imagem está contida no intervalo $[0, \varepsilon]$, para $\varepsilon > 0$, para a compensação obtida utilizando os polinômios de Chebyshev no intervalo $[0, \varepsilon]$, para $\varepsilon = 6 \cdot 10^{-17}$.

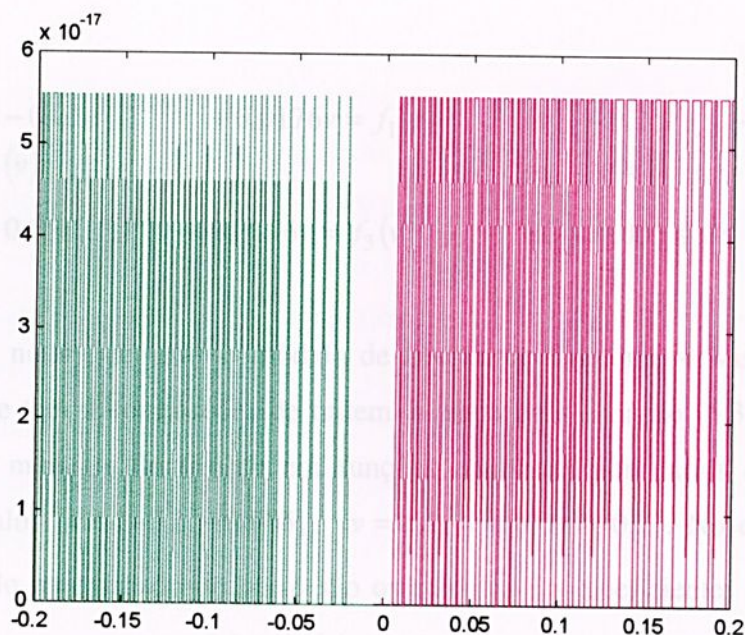


Figura 5.5: Compensação da Função de Fricção utilizando os Polinômios de Chebyshev para o Intervalo $[0, \varepsilon]$, com $\varepsilon = 6 * 10^{-17}$.

Problema 2: Será aproximado o modelo de fricção de Lugre em regime permanente,

$$F_{ss}(v) = F_C \operatorname{sgn}(v) + (F_S - F_C) e^{-(v/v_s)^2} \operatorname{sgn}(v) + f(v) \quad (5.5)$$

$$= 0.28 \operatorname{sgn}(v) + 0.05 e^{-(v/0.01)^2} \operatorname{sgn}(v) + 0.0176v$$

utilizando o processo de aproximação anterior (método dos quadrados mínimos com polinômios ortogonais de Legendre e Chebyshev). Será analisado o erro obtido de ordem 1 a 10, o gráfico de melhor aproximação e será realizada a compensação da função de fricção.

Os parâmetros utilizados são dados na Tabela 5.1 do problema 1.

Como $F(v)$ é uma função descontínua, utiliza-se o procedimento de aproximação por partes, ou seja, a equação (5.5) deve ser escrita na forma [ver apêndice C.2],

$$F_{ss}(v) = \begin{cases} -0.28 - 0.05e^{-(v/0.01)^2} + 0.0176v = f_1(v) & \text{se } -0.2 \leq v \leq -0.005 \\ 0 = f_2(v) & \text{se } v = 0 \\ 0.28 + 0.05e^{-(v/0.01)^2} + 0.0176v = f_3(v) & \text{se } 0.005 \leq v \leq 0.2 \end{cases} \quad (5.6)$$

Deve-se notar que tanto o modelo de fricção de Coulomb + Viscosa como o modelo de Lugre tem aproximações de ordem n dada pela equação (5.3), isto porque dividimos estes modelos de fricção em funções contínuas por partes definidas nos mesmos intervalos: $v \in [-0.2, -0.005]$, $v = 0$ e $v \in [0.005, 0.2]$. No entanto o que difere um modelo aproximado do outro são os cálculos dos coeficientes a_k e c_k que dependem da função original, $f_1(v)$ e $f_3(v)$.

Na tabela 5.4 tem-se os valores dos erros obtidos com as aproximações de ordem 1 a 10 utilizando os polinômios de Legendre e de Chebyshev para o modelo de fricção de Lugre.

Tabela 5.4: Erro encontrado nas Aproximações de Ordem 1 a 10 utilizando os Polinômios de Legendre e de Chebyshev.

Ordem		Erro (aprox. Legendre)	Erro (aprox. Chebyshev)		Erro (aprox. Legendre)	Erro (aprox. Chebyshev)
1	Para $v < 0$	4.124407e-6	2.270618e-5	Para $v > 0$	4.124407e-6	2.270618e-5
2		3.231582e-6	1.494710e-5		3.231582e-6	1.494710e-5
3		2.275756e-6	8.916948e-6		2.275756e-6	8.916948e-6
4		1.426039e-6	4.752151e-6		1.426039e-6	4.752151e-6
5		7.813317e-7	2.197511e-6		7.813317e-7	2.197511e-6
6		3.724785e-7	1.023720e-6		3.724785e-7	1.023720e-6
7		1.487487e-7	4.527761e-7		1.487487e-7	4.527761e-7
8		8.122355e-8	8.573386e-7		8.122355e-8	8.573386e-7
9		5.291562e-8	8.316687e-7		5.291562e-8	8.316687e-7
10		1.310132e-7	2.287861e-6		1.310132e-7	2.287861e-6

Pode-se notar que o erro obtido não é tão pequeno como o encontrado na aproximação de ordem 1 do problema anterior, no entanto, é importante observar que o modelo de fricção de Lugre é um modelo mais complexo que capta melhor o comportamento do efeito fricção. Para um modelo como este que não é formulado através de equações lineares pode-se verificar que a aproximação normalmente vai melhorando à medida que se aumenta sua ordem de aproximação, porém, a partir de uma certa ordem o erro começa a crescer novamente. Normalmente as melhores aproximações não excedem polinômios de ordem 10, isto depende muito do tipo de função que estamos aproximando. Para o problema 1 a melhor aproximação foi de ordem 1 por ser aproximada uma função linear, já neste caso a melhor aproximação foi de ordem 9 para a aproximação utilizando os polinômios de Legendre e de ordem 7 para aproximação utilizando os polinômios de Chebyshev.

O melhor polinômio encontrado das aproximações realizadas utilizando os polinômios ortogonais de Legendre é dado por

$$\hat{F}_9(v) = \begin{cases} \sum_{k=0}^9 a_k L_k(\psi_1(v)) & \text{se } -0.2 \leq v \leq -0.005 \\ 0 & \text{se } v = 0 \\ \sum_{k=0}^9 c_k L_k(\psi_3(v)) & \text{se } 0.005 \leq v \leq 0.2 \end{cases} \quad (5.7)$$

sendo $\psi_1(v) = (10.25641026v + 1.051282051)$, $\psi_3(v) = (10.25641026v - 1.051282051)$, L_k o conjunto de polinômios ortogonais de Legendre de ordem k para cada $k = 0, 1, 2, \dots, 9$, e os coeficientes a_k e c_k para $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ são dados por:

$$a_0 = -2.828951881203322e-1 \quad c_0 = -2.828951881203322e-1$$

$$a_1 = -1.418306912888604e-3 \quad c_1 = -1.418306912888617e-3$$

$$a_2 = -7.229316027454371e-3 \quad c_2 = 7.229316027454368e-3$$

$$a_3 = -1.464037087228158e-2 \quad c_3 = -1.464037087228155e-2$$

$$a_4 = -2.834126112103677e-2$$

$$c_4 = 2.834126112103669e-2$$

$$a_5 = -4.753079828924259e-2$$

$$c_5 = -4.753079828924261e-2$$

$$a_6 = -8.557441510823892e-2$$

$$c_6 = 8.557441510823884e-2$$

$$a_7 = -1.125194430491212e-1$$

$$c_7 = -1.125194430491211e-1$$

$$a_8 = -2.216196107772597e-1$$

$$c_8 = 2.216196107772596e-1$$

$$a_9 = -1.726205603771754e-1$$

$$c_9 = -1.726205603771758e-1$$

E o melhor polinômio encontrado das aproximações realizadas utilizando os polinômios ortogonais de Chebyshev é dado por

$$\hat{F}_7(v) = \begin{cases} \sum_{k=0}^7 a_k T_k(\psi_1(v)) & \text{se } -0.2 \leq v \leq -0.005 \\ 0 & \text{se } v = 0 \\ \sum_{k=0}^7 c_k T_k(\psi_3(v)) & \text{se } 0.005 \leq v \leq 0.2 \end{cases} \quad (5.8)$$

sendo T_k o conjunto de polinômios ortogonais de Chebyshev de ordem k para $k = 0, 1, 2, \dots, 7$ e os coeficientes a_k e c_k para $k = 0, 1, 2, \dots, 7$ são dados por:

$$a_0 = -2.857286115101216e-1$$

$$c_0 = 2.857286115101216e-1$$

$$a_1 = -5.943287960419453e-3$$

$$c_1 = -5.943287960419460e-3$$

$$a_2 = -7.078988011016120e-3$$

$$c_2 = 7.078988011016122e-3$$

$$a_3 = -6.270514085240001e-3$$

$$c_3 = -6.270514085240001e-3$$

$$a_4 = -5.577678450252599e-3$$

$$c_4 = 5.577678450252598e-3$$

$$a_5 = -4.105933935996052e-3$$

$$c_5 = -4.105933935996062e-3$$

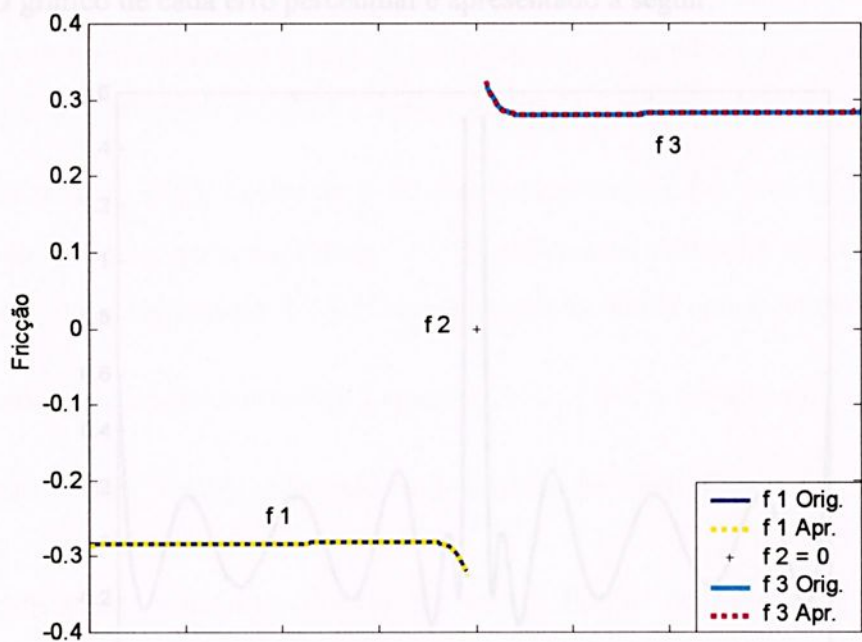
$$a_6 = -3.967161204475249e-3$$

$$c_6 = 3.967161204475242e-3$$

$$a_7 = -2.016156511765167e-3$$

$$c_7 = -2.016156511765163e-3$$

a)



b)

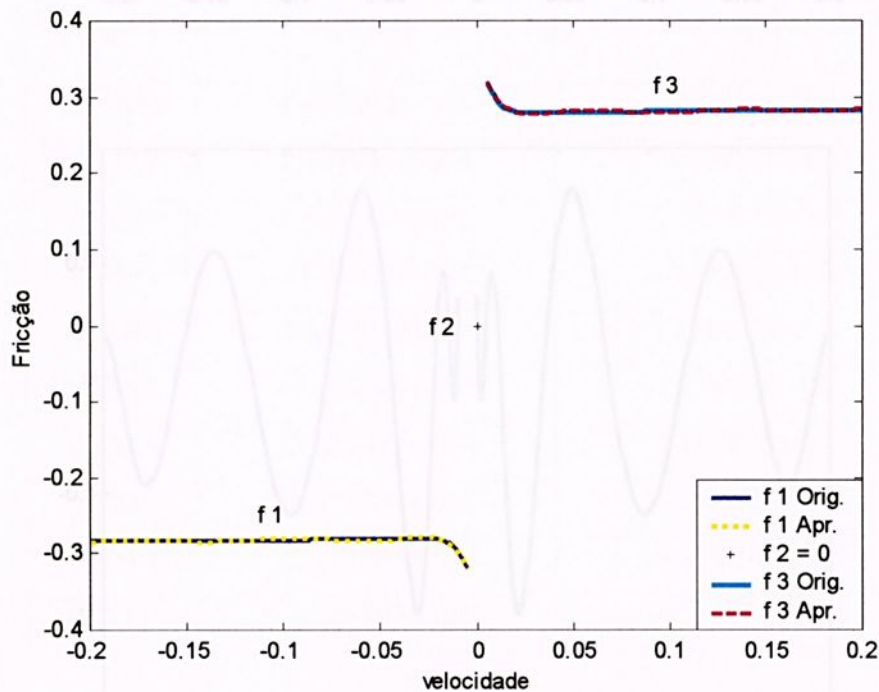
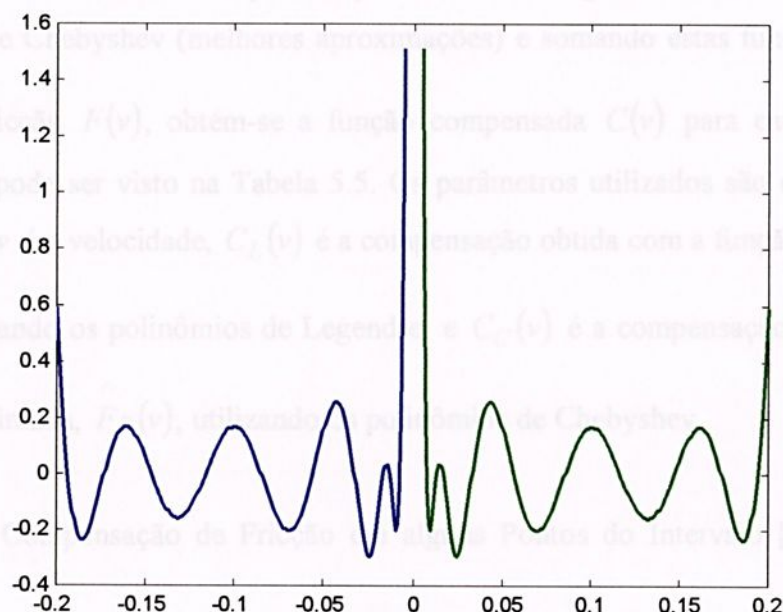


Figura 5.6: a) Função Original e Função Aproximada de Ordem 9 utilizando os Polinômios de Legendre. b) Função Original e Função Aproximada de Ordem 7 utilizando os Polinômios de Chebyshev.

O gráfico de cada erro percentual é apresentado a seguir:

a)



b)

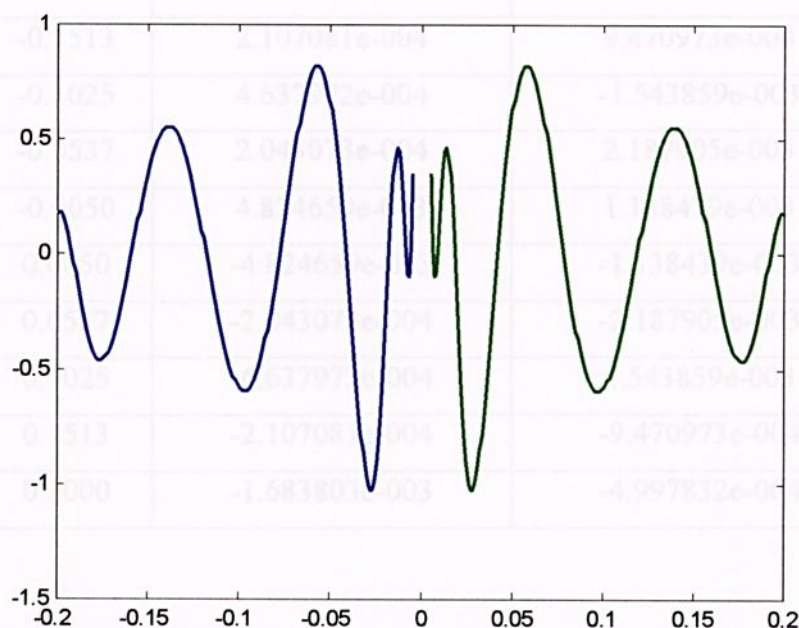


Figura 5.7: a) e b) Erro Percentual das Aproximações do Modelo de Fricção de Lugre utilizando os Polinômios de Legendre e de Chebyshev respectivamente.

a) De forma análoga ao problema 1, calculando o inverso aditivo do modelo de fricção aproximado de ordem 9 para os polinômios de Legendre e de ordem 7 para os polinômios de Chebyshev (melhores aproximações) e somando estas funções obtidas à função de fricção $F(v)$, obtém-se a função compensada $C(v)$ para cada modelo de fricção, isto pode ser visto na Tabela 5.5. Os parâmetros utilizados são os mesmos do problema 1: v é a velocidade, $C_L(v)$ é a compensação obtida com a função aproximada, $\hat{F}_9(v)$, utilizando os polinômios de Legendre e $C_C(v)$ é a compensação obtida com a função aproximada, $\hat{F}_7(v)$, utilizando os polinômios de Chebyshev.

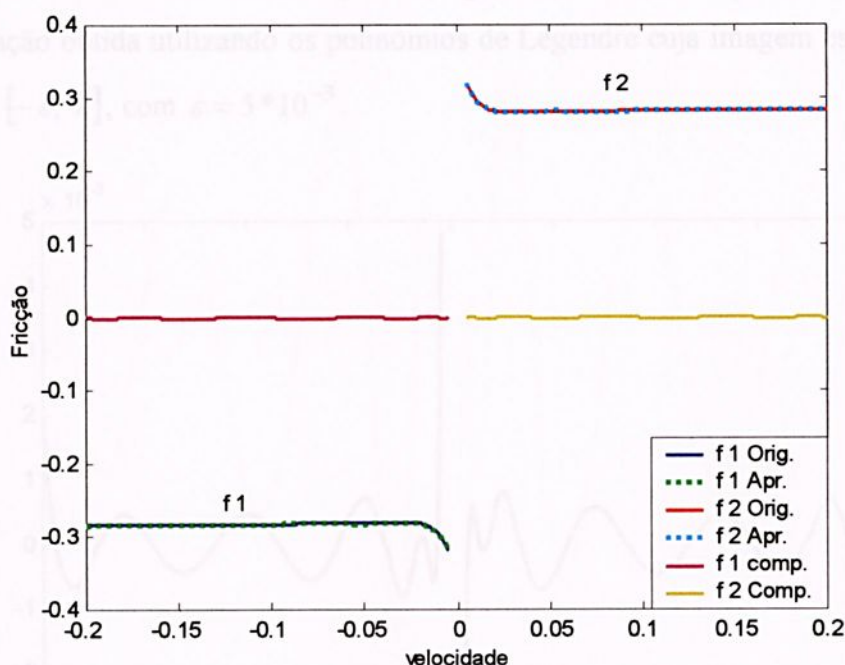
Tabela 5.5: Compensação de Fricção em alguns Pontos do Intervalo $[-0.2,-0.005]$ e $[0.005,0.2]$.

v	$C_L(v)$	$C_C(v)$
-0.2000	1.683803e-003	4.997832e-004
-0.1513	2.107081e-004	9.470973e-004
-0.1025	4.637972e-004	-1.543859e-003
-0.0537	2.043073e-004	2.187905e-003
-0.0050	4.824659e-003	1.138439e-003
0.0050	-4.824659e-003	-1.138439e-003
0.0537	-2.043073e-004	-2.187905e-003
0.1025	-4.637972e-004	1.543859e-003
0.1513	-2.107081e-004	-9.470973e-004
0.2000	-1.683803e-003	-4.997832e-004

A Compensação de fricção pode ser vista graficamente pela Figura 5.8.



a)



b)

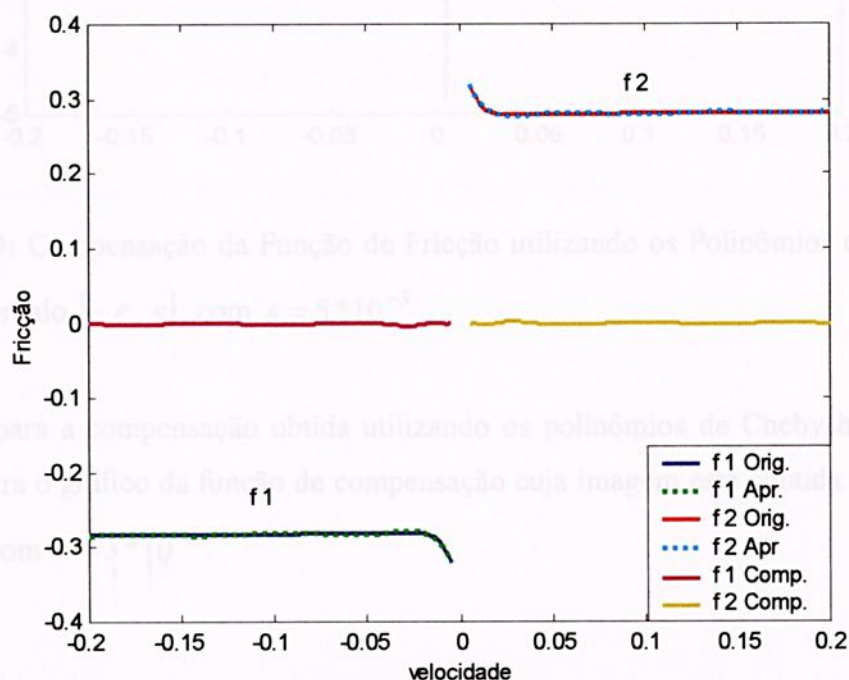


Figura 5.8: Compensação do Modelo de Fricção de Lugre. a) Mostra Compensação da Função de Fricção utilizando os Polinômios de Legendre. b) Mostra Compensação da Função de Fricção utilizando os Polinômios de Chebyshev.

Para uma melhor visualização, a Figura 5.9 mostra o gráfico da função de compensação obtida utilizando os polinômios de Legendre cuja imagem está contida no intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon = 5 * 10^{-3}$.

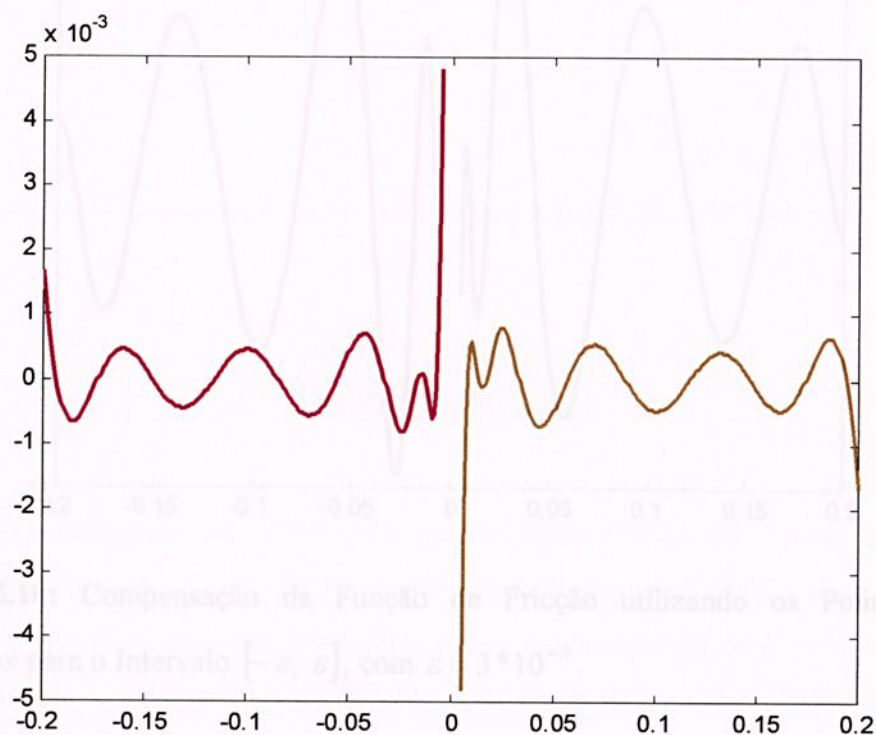


Figura 5.9: Compensação da Função de Fricção utilizando os Polinômios de Legendre para o Intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon = 5 * 10^{-3}$.

E para a compensação obtida utilizando os polinômios de Chebyshev a Figura 5.10 mostra o gráfico da função de compensação cuja imagem está contida no intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon = 3 * 10^{-3}$.

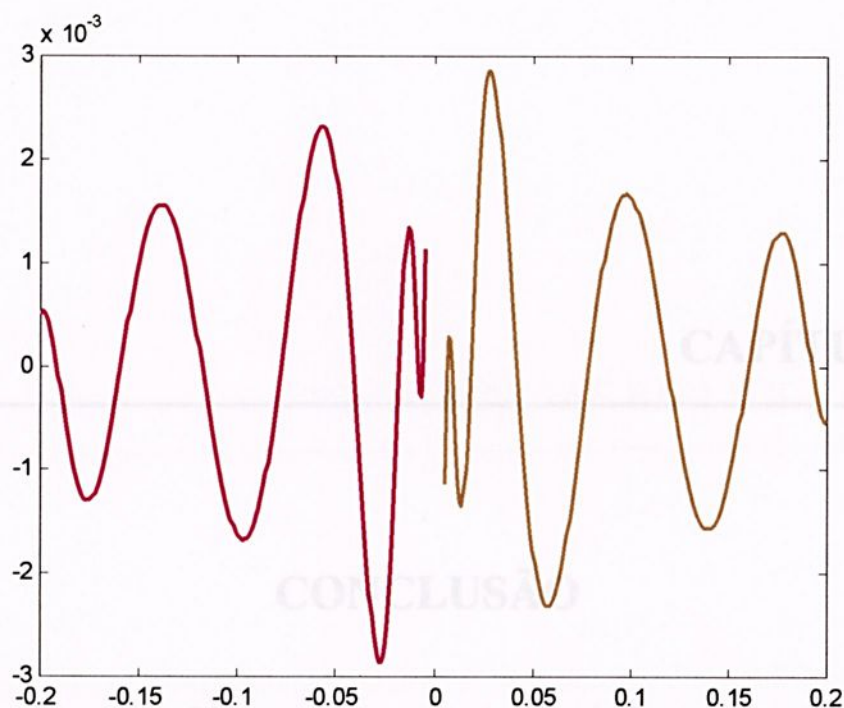


Figura 5.10: Compensação da Função de Fricção utilizando os Polinômios de Chebyshev para o Intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3}$.

Observação 5.2: Nos problemas 1 e 2 não foram considerados a aplicação de forças externas ($F_e = 0$).

CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO

Nesta dissertação foi apresentada a aproximação de funções lineares, não lineares e descontínuas através do método dos quadrados mínimos utilizando funções ortogonais, tendo como objetivo obter funções mais simples que possam ser de fácil manipulação e serem utilizadas em futuras implementações. Esta teoria de aproximação foi aplicada em funções de fricção. Em seguida foi realizada a compensação de fricção nestas funções aproximadas, com intuito de “anular parcialmente” a função de fricção que aparece em inúmeras aplicações reais, como por exemplo em [12] e [16].

Neste sentido, foi desenvolvida uma aproximação por partes para funções descontínuas, sendo possível aproximar os modelos de fricção em questão.

Os resultados encontrados foram satisfatórios para as aproximações utilizando os polinômios ortogonais. Nas aproximações realizadas com o modelo de fricção de Coulomb + Viscosa e o modelo de fricção de Lugre os erros encontrados foram pequenos.

O modelo matemático proposto para compensar a função de fricção também teve um bom desempenho para os modelos testados. Além disso, é importante destacar a facilidade de aplicação das funções aproximadas para a realização da compensação, uma vez que elas são determinadas.



[6] CONTE, S. e DE BOOR, C. "Elementary Numerical Analysis: an Algorithmic Approach, terceira edição, McGraw-Hill Book Co, 1981.

[7] CUNHA, M. C. C., "Métodos Numéricos", segunda edição, editora da Unicamp, 2000.

[8] GUENTHER, R. e PEROND, E. A., "The Pneumatic Positioning System Cascade Control with Friction",

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[9] HUMES, A. F. P. C.; MELO, I. S. H.; YOSHIDA, L. K. e MARTINS, W. T., "Noções de Cálculo Numérico", editora McGraw-Hill do Brasil, lda, 1984.

[1] APOSTOL, T. M., "Mathematical Analysis", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1960.

[2] ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B.; DUPONT P.; e CANUDAS DE WIT, C., " A Survey of Models for the Control of Machines with Friction", Automatica, Vol. 30, No 7, 1994.

[3] ASTRÖM, K. J., " Control of Systems with Friction", Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, SWEDEN.

[4] BURDEN, R. L. e FAIRES, J. D., "Numerical Analysis", fourth edition, PWS-KENT Publishing Company Boston, 1989.

[5] CANUDAS DE WIT, C.; OLSSON, H.; ASTRÖM, K. J. e LISCHINSKY, P., " A New Model for Control of Systems with Friction", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 40, No 3, March 1995.



- [6] CONTE, S. e DE BOOR, C. "Elementary Numerical Analysis: an Algorithmic Approach, terceira edição, McGraw-Hill Book Co, 1981.
- [7] CUNHA, M. C. C., "Métodos Numéricos", segunda edição, editora da Unicamp, 2000.
- [8] GUENTHER, R. e PEROND, E. A., "The Pneumatic Positioning System Cascade Control with Friction Compensation", Robotics Laboratory, Mechanical Engineering Departament, Federal University of Santa Catarina – UFSC, 2002.
- [9] HUMES, A. F. P. C; MELO, I. S. H.; YOSHIDA, L. K. e MARTINS, W. T., "Noções de Cálculo Numérico", editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda, 1984.
- [10] KREYSZIG, E., "Introductory Functional Analysis with Applications", University of Windsor, 1978.
- [11] KREYSZIG, E. "Matemática Superior", Livros Técnicos e Científicos, Editora Ltda, vol. 2, 1969.
- [12] LISCHINSKY, P.; CANUDAS DE WIT, C. e MOREL G., "Friction Compensation for an Industrial Hydraulic Robot", IEEE Contr. Syst. Mag., Vol. 19, No. 1, 1999.
- [13] MARAR, J. F., " Polinômios Potenciais de Sigmóide (PPS): Uma Nova Técnica para Aproximação de Funções, Construções de Wavenets e Suas Aplicações em Processamentos de Imagens e Sinais", Tese de Doutorado, UFP 1997.
- [14] MILNE, W. E., "Cálculo Numérico" , tradução Oliveira, M. B.; segunda edição, editora polígono, São Paulo, 1968.



- [15] OLSSON, H.; ASTRÖM, K.J.; CANUDAS DE WIT, C.; GÄFVERT, M e LISCHINSKY, P., “Friction Models and Friction Compensation”, 1997.
- [16] SELMIC, R. R. e LEWIS, F. L., “Neural-Network Approximation of Piecewise Continuous Functions: Application to Friction Compensation”, IEEE Transactions on Neural Networks, volume 13, No. 3, May 2002.
- [17] STARK, P. A., “Introdução aos Métodos Numéricos”, tradução, Carvalho, J. P., PUC-RJ, Editora Interciência, 1979.
- [18] SZEGÖ, G., “Orthogonal Polynomials”, American Mathematical Society, 1959.
- [19] www.icmc.sc.usp.br/~pztaboas/nocte/node11.html , “Continuidade”, Placido Zoega Taboas, 02/2003.
- [20] www.lcad.icmc.sc.usp.br/~siae98/cap7/node10.htm, “Aproximação Trigonométrica” 12/2002
- [21] www.mat.utfsm.cl/guias/2001/guias1/mat270/polinomio, “ Polinomios Ortogonales y sus Propiedades”, Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa Maria, 06/2002.



APÊNDICE A

A.1 Aproximação de Funções – Como Aproximar?

Ao aproximar uma função $f(x)$ por uma função $P(x)$ de uma família $P_n(x)$ é introduzido um erro E ,

$$E(x) = f(x) - P(x). \quad (\text{A.1.1})$$

Aparentemente, uma “boa aproximação” seria obtida fazendo

$$\sum_x E(x) = 0. \quad (\text{A.1.2})$$

Foi suposto a realização de um experimento em que se levantou os pontos D_1, D_2, D_3 e D_4 , no qual o fenômeno é descrito pela reta,

$$f(x) = -x. \quad (\text{A.1.3})$$

Na Figura 2.1 do capítulo II, pode-se observar que as retas traçadas, $P_1(x) = x$ e $P_2(x) = 0$, satisfazem a equação $\sum_x E(x) = 0$. De fato, como

$$D_1 = (x_1, 0), \quad D_2 = (x_2, y_2), \quad D_3 = (x_3, y_3) \quad \text{e} \quad D_4 = (x_4, 0),$$

mas

$$D_1 = -D_4 \quad \text{e} \quad D_2 = -D_3,$$

tem-se,

$$E_1(x) = f(x) - P_1(x),$$

logo,

$$\sum_x E_1(x) = (f(x_2) - P_1(x_2)) + (f(x_3) - P_1(x_3)) = 0.$$

Da mesma forma, sendo

$$E_2(x) = f(x) - P_2(x),$$

tem-se

$$\sum_x E_2(x) = (f(x_1) - P_2(x_1)) + (f(x_4) - P_2(x_4)) = f(x_1) + f(x_4) = 0.$$

O que mostra que a imposição da condição $\sum_x E(x) = 0$ não implica a obtenção

de uma boa aproximação.



APÊNDICE B

B.1 Polinômios de Chebyshev

Existe uma grande variedade de polinômios ortogonais, dentre os quais destaca-se, os polinômios ortogonais de Gegenbauer, Hermite, Laguerre, Legendre, Jacobi e Chebyshev. Embora existam duas classes de polinômios de Chebyshev, T e U [11], será apresentado apenas o primeiro caso.

As polinômios ortogonais de Chebyshev do tipo T , são definidos através da equação (B.1.1) para $x \in [-1, 1]$ [4] e [13]:

$$T_n(x) = \cos[n \arccos(x)], \quad (\text{B.1.1})$$

para cada $n \geq 0$.

Introduzindo a substituição $\theta = \arccos(x)$ muda-se esta equação para

$$T_n(\theta(x)) \equiv T_n(\theta) = \cos(n\theta) \quad \text{onde } \theta \in [0, \pi]. \quad (\text{B.1.2})$$



A relação de recorrência é encontrada notando que

$$T_{n+1}(\theta) = \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

e

$$T_{n-1}(\theta) = \cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) + \sin(n\theta)\sin(\theta),$$

(B.1.3)

mas

$$T_{n+1}(\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) - T_{n-1}(\theta).$$

(B.1.4)

Retornando para a variável x ,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

(B.1.5)

Desde que

$$T_0(x) = \cos(0 \arccos(x)) = 1 \quad \text{e} \quad T_1(x) = \cos(1 \arccos(x)) = x,$$

os polinômios de Chebyshev são obtidos de maneira seqüencial, usando a equação (B.1.5):

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 4x^3 - 3x,$$

$\vdots$

Os gráficos de T_1 , T_2 , T_3 , T_4 e T_5 são mostrados na Figura 2.4 do Capítulo II.

Da mesma maneira que os polinômios de Chebyshev podem ser escritos como polinômios na variável x , é possível também explicitar x em função de tais polinômios. Em outras palavras, qualquer potência de x pode ser escrita como

combinação linear dos $T_n(x)$. A Tabela B.1.1 apresenta as cinco primeiras potências de x , escritas em função dos polinômios de Chebyshev.

Tabela B.1.1: Polinômios Tradicionais Escritos pelos de Chebyshev.

$x^0 =$	$T_0(x)$
$x^1 =$	$T_1(x)$
$x^2 =$	$1/2(T_2(x) - T_0(x))$
$x^3 =$	$1/4(T_3(x) + 3T_1(x))$
$x^4 =$	$1/8(T_4(x) + 4T_2(x) + 3T_0(x))$

Pela definição original dos polinômios de Chebyshev (B1.1), cada um dos T_n é definido como um cosseno de uma certa quantidade; assim, a imagem da função está contida no intervalo $[-1, 1]$. De forma semelhante, a expressão $\arccos(x)$ é definida sobre o $[-1, 1]$. Deste modo, a lista dos cinco primeiros polinômios de Chebyshev e a Tabela B.1.1 podem induzir à utilização de x e $T_n(x)$ quaisquer, mas deve-se ter em mente que o intervalo de definição dos polinômios ocorre apenas no intervalo $[-1, 1]$. Este fato, não limita as aplicações, dado que qualquer função contínua pode ser expressa neste intervalo (ver [10] e [18]).

B.1.1 Ortogonalidade dos Polinômios de Chebyshev

Para mostrar a ortogonalidade dos polinômios de Chebyshev, considere

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(n\arccos x)\cos(m\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$



Reintroduzindo a substituição $\theta = \arccos(x)$ sendo

$$d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

e

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int_{\pi}^0 \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta = \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta. \quad (8.3.1)$$

Supondo $n \neq m$. Desde que $\cos n\theta \cos m\theta = \frac{1}{2}[\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta]$, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos((n+m)\theta)d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos((n-m)\theta)d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2(n+m)} \sin((n+m)\theta) + \frac{1}{2(n-m)} \sin((n-m)\theta) \right]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por uma técnica semelhante pode também ser mostrado que [4]

$$B_n = \frac{\int_{-1}^1 T_n(x)T_n(x)}{\int_{-1}^1 \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx} = \frac{\pi}{2} \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

B.2 Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre são muitas vezes chamados de funções de Legendre de primeira classe. Esses polinômios são obtidos segundo o produto escalar [21]:

$$\langle f, g \rangle = \langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx, \quad (\text{B.2.1})$$

isto é, com $w(x) = 1$, $a = -1$ e $b = 1$.

Estes polinômios podem ser obtidos utilizando a teoria da seção 2.4.2 do capítulo II, ou seja, aplicando o teorema abaixo.

Teorema B.2.1: O conjunto de polinômios $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)\}$ definido a seguir é ortogonal em $[a, b]$ em relação a função peso $w(x)$.

$$\phi_0(x) \equiv 1,$$

$$\phi_1(x) = x - B_1 \quad \text{para cada } a \leq x \leq b,$$

sendo

$$B_1 = \frac{\int_a^b xw(x)[\phi_0(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x)[\phi_0(x)]^2 dx};$$

quando $k \geq 2$,

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x) \quad \text{para cada } a \leq x \leq b,$$

sendo

$$B_k = \frac{\int_a^b x w(x) [\phi_{k-1}(x)]^2 dx}{\int_a^b w(x) [\phi_{k-1}(x)]^2 dx}$$

e

$$C_k = \frac{\int_a^b x w(x) \phi_{k-1}(x) \phi_{k-2}(x) dx}{\int_a^b w(x) [\phi_{k-2}(x)]^2 dx}.$$

A definição clássica dos Polinômios de Legendre requer que $L_n(1) = 1$ para cada n , e uma relação recursiva pode ser usada para generalizar os polinômios quando $n \geq 2$. Utilizando o processo do Teorema B.2.1, temos

$$L_0(x) \equiv 1$$

$$B_1 = \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0$$

portanto,

$$L_1(x) = (x - B_1)L_0(x) = x.$$

Além disso,

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = 0 \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\int_{-1}^1 x^2 dx}{\int_{-1}^1 dx} = \frac{1}{3},$$

portanto

$$L_2(x) = (x - B_2)L_1(x) - C_2L_0(x) = (x - 0)x - \frac{1}{3} \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Sequencialmente,

$$B_3 = \frac{\int_{-1}^1 x(x^2 - 1/3)^2 dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - 1/3)^2 dx} = 0 \quad \text{e} \quad C_3 = \frac{\int_{-1}^1 x^2(x^2 - 1/3) dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = \frac{8/45}{2/3} = \frac{4}{15},$$

portanto

$$L_3(x) = (x - B_3)L_2(x) - C_3L_1(x) = x(x^2 - 1/3) - \frac{4}{15}x = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Os polinômios de Legendre de maior grau são encontrados da mesma maneira. Os próximos dois são $L_4(x) = x^4 - (6/7)x^2 + 3/35$ e $L_5(x) = x^5 - (10/9)x^3 + (5/21)x$. A Figura 2.3 do capítulo II mostra o gráfico destes polinômios [4].

APÊNDICE C

C.1 Aproximação Por Partes do Modelo de Fricção de Coulomb + Viscosa

O modelo de fricção de Coulomb + Viscosa dado pela equação (5.1) é aproximado utilizando o procedimento de aproximação por partes, dado que

$$F(v) = \begin{cases} -0.28 + 0.0176v = f_1(v) & \text{se } v < 0 \\ 0 = f_2(v) & \text{se } v = 0 \\ 0.28 + 0.0176v = f_3(v) & \text{se } v > 0 \end{cases} \quad (\text{C.1.1})$$

sendo, por conveniência a função $f_1(v)$ aproximada no intervalo $[-0.2, -0.005]$ e a função $f_3(v)$ aproximada no intervalo $[0.005, 0.2]$.

Fazendo o deslocamento dos intervalos $[-0.2, -0.005]$ e $[0.005, 0.2]$, tem-se:

- $\psi_1 : [-0.2, -0.005] \rightarrow [-1, 1]$

$$v \mapsto y = \psi_1(v)$$

$$\psi_1(v) = (10.25641026 * v + 1.051282051), \quad \forall v \in [-0.2, -0.005].$$

- $\psi_3 : [0.005, 0.2] \rightarrow [-1, 1]$

$$v \mapsto y = \psi_3(v)$$

$$\psi_3(v) = (10.25641026 * v - 1.051282051), \quad \forall v \in [0.005, 0.2].$$

Calculando a inversa dessas funções, tem-se respectivamente

$$\psi_1^{-1}(y) = ((y - 1.051282051) / 10.25641026), \quad \forall y \in [-1, 1]$$

e

$$\psi_3^{-1}(y) = ((y + 1.051282051) / 10.25641026), \quad \forall y \in [-1, 1].$$

Desta forma as funções a serem aproximadas são

$$\xi_1(y) = f_1(v) \circ (\psi_1^{-1}(y)) = (-0.28 + 0.0176 * (\psi_1^{-1}(y))), \quad \forall y \in [-1, 1]$$

e

$$\xi_3(y) = f_3(v) \circ (\psi_3^{-1}(y)) = (0.28 + 0.0176 * (\psi_3^{-1}(y))), \quad \forall y \in [-1, 1].$$

As aproximações encontradas para as funções $\xi_1(y)$ e $\xi_3(y)$ são respectivamente

$$Q_n(y) = \begin{cases} Q_1(y) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(y) \\ Q_3(y) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(y) \end{cases}, \quad \forall y \in [-1, 1],$$

sendo, para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $P_k(y)$ o conjunto de polinômios ortogonais de ordem k (Legendre ou Chebyshev) e, a_k e c_k são coeficientes de ordem k .

A função aproximada encontrada, $Q_n(y)$, deve ser deslocada novamente ao intervalo inicial, ou seja, considerar as funções compostas

$$\hat{F}_n(v) = \begin{cases} \hat{f}_1(v) = Q_1(y) \circ \psi_1(v), & \forall v \in [-0.2, -0.005] \\ \hat{f}_3(v) = Q_3(y) \circ \psi_3(v), & \forall v \in [0.005, 0.2] \end{cases} \quad (\text{C.1.2})$$

sendo $\hat{f}_1(v)$ e $\hat{f}_3(v)$ as aproximações de $f_1(v)$ e $f_3(v)$, respectivamente. A função $\hat{F}_n(v)$ é uma aproximação de ordem n para a função $F(v)$.

Reescrevendo a equação (C.1.2), a função aproximada de ordem n para o modelo de fricção de Coulomb + Viscosa (C.1.1) é dada por:

$$\hat{F}_n(v) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n a_k P_k(\psi_1(v)) & \text{se } -0.2 \leq v \leq -0.005 \\ 0 & \text{se } v = 0 \\ \sum_{k=0}^n c_k P_k(\psi_3(v)) & \text{se } 0.005 \leq v \leq 0.2 \end{cases} \quad (\text{C.1.3})$$

sendo, para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $\psi_1(v) = (10.25641026v + 1.051282051)$, $\psi_3(v) = (10.25641026v - 1.051282051)$, P_k o conjunto de polinômios ortogonais de ordem k e, a_k e c_k são os coeficientes de ordem k .

C.2 Aproximação Por Partes do Modelo de Fricção de Lugre em Regime Permanente

O modelo de fricção de Lugre em regime permanente dado pela equação (5.5) é aproximado utilizando o procedimento de aproximação por partes, dado que

$$F_{ss}(v) = \begin{cases} -0.28 - 0.05e^{-(v/0.01)^2} + 0.0176v = f_1(v) & \text{se } -0.2 \leq v \leq -0.005 \\ 0 = f_2(v) & \text{se } v = 0 \\ 0.28 + 0.05e^{-(v/0.01)^2} + 0.0176v = f_3(v) & \text{se } 0.005 \leq v \leq 0.2 \end{cases} \quad (\text{C.2.1})$$

As funções $\psi_1(v)$, $\psi_3(v)$, $\psi_1^{-1}(y)$ e $\psi_3^{-1}(y)$ são as mesmas do apêndice C.1, pois os intervalos a serem deslocados são os mesmos.

Desta forma as funções a serem aproximadas são

$$\xi_1(y) = f_1(v) \circ (\psi_1^{-1}(y)) = \left(-0.28 - 0.05e^{-((\psi_1^{-1}(y))/0.01)^2} + 0.0176(\psi_1^{-1}(y)) \right),$$

e

$$\xi_3(y) = f_3(v) \circ (\psi_3^{-1}(y)) = \left(0.28 + 0.05e^{-((\psi_3^{-1}(y))/0.01)^2} + 0.0176(\psi_3^{-1}(y)) \right),$$

$\forall y \in [-1, 1]$.

As aproximações encontradas para as funções $\xi_1(y)$ e $\xi_3(y)$ são respectivamente

$$Q_n(y) = \begin{cases} Q_1(y) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(y) \\ Q_3(y) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(y) \end{cases}, \quad \forall y \in [-1, 1],$$

sendo, para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $P_k(y)$ o conjunto de polinômios ortogonais de ordem k (Legendre ou Chebyshev) e, a_k e c_k são os coeficientes de ordem k .

A função aproximada encontrada, $Q_n(y)$, deve ser deslocada novamente ao intervalo inicial, ou seja, considerar as funções compostas

$$\hat{F}_n(v) = \begin{cases} \hat{f}_1(v) = Q_1(y) \circ \psi_1(v), & \forall v \in [-0.2, -0.005] \\ \hat{f}_3(v) = Q_3(y) \circ \psi_3(v), & \forall v \in [0.005, 0.2] \end{cases} \quad (\text{C.2.2})$$

sendo $\hat{f}_1(v)$ e $\hat{f}_3(v)$ as aproximações de $f_1(v)$ e $f_3(v)$, respectivamente. A função $\hat{F}_n(v)$ é uma aproximação de ordem n para a função $F(v)$.

Desta forma a função aproximada de ordem n para o modelo de fricção de Lugre dado pela equação (C.2.1) é dada por:

$$\hat{F}_n(v) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n a_k P_k(\psi_1(v)) & \text{se } -0.2 \leq v \leq -0.005 \\ 0 & \text{se } v = 0 \\ \sum_{k=0}^n c_k P_k(\psi_3(v)) & \text{se } 0.005 \leq v \leq 0.2 \end{cases} \quad (\text{C.2.3})$$

sendo $\psi_1(v) = (10.25641026v + 1.051282051)$, $\psi_3(v) = (10.25641026v - 1.051282051)$,
 P_k o conjunto de polinômios ortogonais de ordem k e, a_k e c_k são os coeficientes de
ordem k , para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n$.





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dee.feis.unesp.br

