



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Mayara Cristina Teixeira

Regularização de folheações descontínuas: blow up e
condições de deslize via teoria de Fenichel

São José do Rio Preto - SP
2023

Mayara Cristina Teixeira

Regularização de folheações descontínuas: blow up e
condições de deslize via teoria de Fenichel

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto - SP
2023

T266r Teixeira, Mayara Cristina

Regularização de folheações descontínuas: blow up e condições de deslize via teoria de Fenichel / Mayara Cristina Teixeira. -- São José do Rio Preto, 2023

157 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Márcio Ricardo Alves Gouveia

1. Matemática. 2. Campos de Filippov. 3. Regularização. 4. Folheações. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Mayara Cristina Teixeira

Regularização de folheações descontínuas: blow up e
condições de deslize via teoria de Fenichel

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia
Orientador

Prof^a. Dr^a. Luci Any Francisco Roberto
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Clayton Eduardo Lente da Silva
Instituto de Ciências Exatas e Naturais -
Universidade Federal de Rondonópolis

São José do Rio Preto - SP
16 de Fevereiro de 2023

*Aos meus pais, Elizevane e Márcio,
à minha irmã, Mariely,
e a toda minha família e amigos.*

AGRADECIMENTOS

Terminar o mestrado, finalizar mais essa etapa, é hoje parte de um sonho, um sonho de criança que tenho tido a oportunidade de realizar. Este trabalho, que é fruto de muitos momentos de alegria, de entusiasmo, de motivação, mas também de momentos de insegurança, de medo e de preocupações, é uma conquista que compartilho com muitos, sem os quais jamais estaria hoje escrevendo essa página de agradecimentos. Deixo então aqui registrado todo meu agradecimento:

Primeiramente, e sobretudo, à Deus, pelo dom da vida, e pela graça de me permitir realizar esse trabalho. Agradeço também pela intercessão incessante da Santíssima Virgem Maria, a Mãe que inúmeras vezes recorri e que nunca me desamparou, a quem pertence todo o mérito desta conquista.

À toda minha família, que sempre me apoiou e incentivou. Em especial, aos meus pais, Elizevane e Márcio, pelo amor e cuidado de toda a vida, por acreditarem em mim e por sempre me apoiarem nos meus sonhos; à minha irmã Mariely, que deixa meus dias mais leves e felizes, e também aos meus avós, Iracema e Milbas, e aos meus tios, Ricardo e Edilaine. Nada do que escrevesse aqui seria o suficiente para os agradecer, mas registro todo o meu amor e gratidão à vocês.

Ao meu orientador, o professor Márcio Gouveia, que me orienta desde a graduação e que contribuiu para a minha formação profissional e desenvolvimento deste trabalho. Muito pude aprender e me divertir pesquisando nos últimos anos. Agradeço por todos os ensinamentos e pela confiança em mim depositada.

Ao PET, Programa de Educação Tutorial, por me proporcionar viver experiências incríveis, conhecer lugares e pessoas maravilhosas e, por muito contribuir na minha formação: acadêmica, profissional e pessoal; à família que ganhei no programa, à todos os amigos com os quais dividi inúmeros momentos e, em particular, aos professores Weber Pereira e Juliana Precioso, os quais recordo com muito carinho pela relação de amizade e reciprocidade, que muito ultrapassou a relação Tutor/Petiano(a).

Ao Diego, por toda a paciência e incentivo neste período final deste trabalho, por

sempre estar disposto a me ouvir e me deixar desabafar quando precisei, mesmo antes, quando ainda pouco me conhecia.

À todos os amigos que o curso de graduação me deu; obrigada por dividirem comigo os bons e maus momentos do curso: os dias intermináveis de estudo, a tensão antes das provas e muitas vezes o choro de alívio depois destas, por compartilharem os momentos de alegrias e conquistas e por estarem sempre presentes.

Em especial, agradeço aos meus amigos, Maria Fernanda, Maria Clara, Daiane e Murillo; à vocês que dividiram tudo comigo, que compartilharam a alegria em cada conquista, que sempre me apoiaram, acreditaram em mim e, muitas vezes me deram forças para não desistir, agradeço por fazerem deste sonho um sonho compartilhado; vocês fizeram desses anos muito mais fáceis e felizes. As meninas, Maria Fernanda, Maria Clara e Daiane, agradeço também pelo tempo em que moramos juntas, por fazerem da nossa casa um verdadeiro lar. E também ao Pedro, Mateus e ao Yuri, amigos que lembrarei sempre com muito carinho.

À todos os meus professores, por se doarem e por acreditarem no papel transformador da educação; em particular, aos professores da graduação nos quais pude ver o entusiasmo e o amor pela matemática em suas aulas.

Por fim, a todos aqueles que de alguma forma contribuíram e me apoiaram para que este momento se concretizasse. A todos serei eternamente grata.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Dê-me Senhor, agudeza para entender,
capacidade para reter,
método e faculdade para aprender,
sutileza para interpretar,
graça e abundância para falar.
Dê-me Senhor, acerto ao começar,
direção ao progredir
e perfeição ao concluir.
(São Tomás de Aquino)*

RESUMO

Dada uma 1-folheação descontínua $\mathcal{F}$ definida em $M - \Sigma$, onde M é uma variedade suave e $\Sigma \subset M$ é um subconjunto fechado de M interpretado como o locus de descontinuidade de $\mathcal{F}$, neste trabalho generalizaremos o conceito de regularização para 1-folheações, considerando uma ampla família de funções de transição, com o objetivo de compreender o comportamento na região de descontinuidade destas folheações. Em um paralelo com as convenções de Filippov, serão definidas regiões de deslize e costura no locus de descontinuidade Σ para a regularização de uma folheação. Tais regiões podem ser interpretadas como um tipo de limite da dinâmica de uma 1-folheação suave próxima. Técnicas de perturbação singular, da teoria clássica de Fenichel e de blow ups serão utilizadas para obter condições suficientes para identificar as regiões de deslize e/ou costura da regularização de uma 1-folheação descontínua.

Palavras-chave: Campos de Filippov. Blow Up. Regularização. Folheações.

ABSTRACT

Given a discontinuous 1-foliations $\mathcal{F}$ defined on $M - \Sigma$, where M is a smooth manifold and $\Sigma \subset M$ is a closed subset interpreted as the discontinuity locus of $\mathcal{F}$, in this work we will generalize the regularization concept to 1-foliations, considering a wide family of transition functions, with the objective of understanding the behavior in the discontinuity region of those foliations. In parallel with the Filippov's conventions, slide and sewing regions will be defined at the discontinuity locus Σ for the regularization of a foliation. Such regions can be interpreted as some sort of limit of the dynamics of a nearby smooth 1-foliation. Singular perturbation techniques, of classical Fenichel theory and blow ups will be used to obtain sufficient conditions to identify the slide and/or sewing regions of the regularization of a discontinuous 1-foliations.

Keywords: Filippov Fields. Blow Up. Regularization. Foliations.

Lista de Figuras

2.1	$\partial\Sigma = \Sigma \cap \partial M \neq \emptyset$.	17
2.2	$\partial\Sigma = \Sigma \cap \partial M = \emptyset$.	17
2.3	Vizinhança de um ponto de costura.	18
2.4	Vizinhança de um ponto de escape.	18
2.5	Vizinhança de um ponto de deslize.	18
2.6	Interpretação geométrica da Derivada de Lie.	18
2.7	Exemplo de tangência regular.	19
2.8	Exemplo de tangência singular.	20
2.9	Construção do Campo de Filippov.	20
2.10	Ponto Σ -regular tal que $p \in \Sigma^c$.	22
2.11	Ponto Σ -regular tal que $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$.	23
2.12	Exemplos de Σ -dobras.	23
2.13	Pontos críticos hiperbólicos de X^Σ .	23
2.14	Pontos de sela de X^Σ .	23
2.15	Pontos de nó de X^Σ .	24
2.16	Exemplos de separatrizes.	24
2.17	Exemplos de poli-trajetórias.	25
2.18	Poli-trajetórias fechadas tipo I.	25
2.19	Poli-trajetórias fechadas tipo II e tipo III, respectivamente.	25
2.20	Forma canônica da Proposição 2.33.	28
2.21	Forma canônica da Proposição 2.34.	28
2.22	Forma canônica da Proposição 2.35.	29
2.23	Forma canônica da Proposição 2.36.	29
2.24	Forma canônica da Proposição 2.37.	29
2.25	Exemplo de função de transição.	30
2.26	Faixa de regularização.	30
2.27	Exemplo de arco de costura e sua regularização.	31
2.28	Exemplo de ponto de sela e sua regularização.	32
2.29	Exemplo de ponto de nó e sua regularização.	32
2.30	Σ -dobra e sua regularização.	32
2.31	Configuração geométrica da Proposição 2.46.	33
2.32	Configuração geométrica da Proposição 2.47.	34
3.1	Variedade crítica C_0 (em azul) para a Equação de Van der Pol 3.15.	39
3.2	Retrato de fase da Equação 3.21: Variedade crítica C_0 (curva azul pontilhada), variedade lenta C_ε (curva azul, $\varepsilon = 0.1$) e ponto de equilíbrio $q = (0, 0)$.	42

3.3	Representação do limite singular $\varepsilon = 0$ para a Equação 3.27. (a) Variedade crítica C_0 e suas subvariedades C_0^r (repulsora) e $C_0^{a\pm}$ (atratoras). A origem $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio e existem dois pontos que não são normalmente hiperbólicos (em verde) em $(\pm 1, \mp 2/3)$. (b) Fluxo lenta na variável x dado pela Equação 3.29.	46
3.4	Ponto de dobra (em verde) na origem para a Equação 3.33 com $g(x, y, \varepsilon) = -1$ e γ_0 uma órbita candidata.	48
3.5	Ponto transcrito (em verde) na origem para a Equação 3.38 com $g(x, y, \varepsilon) = -1$ e γ_0 uma órbita candidata.	49
3.6	Superfície de cúspide do Exemplo 3.32 contendo uma curva de pontos de dobra L (em verde).	50
3.7	Bifurcação de Hopf do subsistema rápido da Equação 3.40 (ponto em verde).	50
4.1	Interpretação geométrica do Teorema da Variedade Estável 4.2.	54
4.2	Variedade invariante “de entrada”, variedade invariante “de saída” e variedade invariante, respectivamente.	54
4.3	Configuração da dinâmica linearizada próxima da variedade M	56
4.4	Perturbação da variedade M	59
5.1	Blow up polar da origem para a Equação 5.2.	73
5.2	Comparação: blow up polar e blow up direcionais.	80
5.3	Blow up polar da origem para a Equação 5.10.	83
6.1	Configuração geométrica da demonstração do Teorema 6.3.	93
7.1	1-Folheação descontínua do exemplo 7.7.	97
7.2	Locus de descontinuidade Σ do Exemplo 7.9.	97
7.3	1-Folheação descontínua do Exemplo 7.10.	98
7.4	(a) 1-folheação dada pelo campo de vetores em 7.2. (b) 1-folheação após a aplicação de blow up.	99
7.5	1-folheação descontínua que não é suavizada por blow ups.	100
7.6	Vizinhança de um ponto em Σ	101
7.7	Regularização Sotomayor-Teixeira.	107
7.8	Regularização Dupla.	109
7.9	Região de deslize.	110
7.10	Função de transição não monótona.	111
7.11	(a) Fluxo da 1-folheação suave por partes. (b) Fluxo obtido usando a regularização S-T. A região de deslize é mostrada em vermelho. (c) Fluxo obtido usando uma regularização do tipo transição.	112
8.1	Blow up da regularização.	115
8.2	Variedade normalmente hiperbólica H_0	118
8.3	Região de costura.	119
8.4	Regiões U_1 e U_2	120
8.5	(a) Gráfico de uma função de transição não-monótona e regiões de deslize, $\text{Slide}(\mathcal{F}^r)$, e de costura, $\text{Sew}(\mathcal{F}^r)$. (b) Representação dos conjuntos NH^r e Z^r	121
D.1	Projeções centrais	153

Sumário

1	Introdução	13
2	Campos de Vetores Descontínuos e Regularização	16
2.1	Campos de Vetores Descontínuos no Plano	16
2.2	Singularidades	22
2.3	Equivalência e Conjugação entre Campos Vetoriais Descontínuos	26
2.4	Regularização de Campos Vetoriais Descontínuos	30
2.5	Propriedades locais do Campo Regularizado	31
3	Sistemas Slow-Fast	35
3.1	Sistemas Slow-Fast	35
3.1.1	Equação de Van der Pol	36
3.1.2	Equação de FitzHugh-Nagumo	37
3.2	Terminologia: Sistemas Slow-Fast	38
3.3	Teoria Geométrica de Perturbação Singular	39
3.4	O Fluxo Lento	44
3.5	Singularidades	47
4	Teoria Geral de Fenichel	52
4.1	Variedades Invariantes	52
4.2	Perturbação de Variedades Invariantes	58
4.3	Hiperbolicidade Normal	64
4.4	Aplicação em Sistemas Slow-Fast	68
5	Blow Up	71
5.1	Blow Up Polar	71
5.2	Blow Up Direcional	75
5.3	Caso Quase-homogêneo	82
6	Correspondência: Campos de Filippov e Problema de Perturbação Singular	88
7	1-Folheações Descontínuas	95
7.1	Folheações Descontínuas	95
7.2	1-Folheações Suave por Partes	100
7.3	Regularização e Dinâmica Deslizante para Folheações Suave por Partes . .	104
7.3.1	Regularização Sotomayor-Teixeira e generalizações	105
7.3.2	Regularização Dupla	108

7.4	Regiões de Deslize	109
8	Regularização do tipo transição: blow up e condições de deslize	114
	Referências	123
A	Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias	126
A.1	Existência e Unicidade de Soluções	127
A.2	Existência e comportamento limite das soluções maximais	127
A.3	Campos Vetoriais	128
A.4	Estrutura Local dos Pontos Regulares	130
A.5	Conjuntos Limites e Teorema de Poincaré-Bendixson	131
A.6	Estabilidade dos Pontos Singulares e Critério de Lyapunov	132
B	Variedades Suaves	135
B.1	Variedades Diferenciáveis	135
B.2	Espaços Tangente e Normal	135
B.3	Fibrados Vetoriais, Fibrados Tangente e Normal	137
B.4	A esfera S^2 : um exemplo	138
B.5	Variedades com bordo	140
B.6	Submersões, Imersões e Mergulhos	140
C	Exemplo: Blow up quase-homogêneo aplicado à duas singularidades	142
D	Compactificação de Poincaré	152
	Índice Remissivo	157

1 Introdução

Muitos fenômenos podem ser modelados através de Equações Diferenciais Ordinárias, estes aplicados as mais diversas áreas do conhecimento, tais como Matemática, Física, Mecânica, Economia, Engenharias, etc. A compreensão destes fenômenos, seus comportamentos passados e futuros é um dos principais objetos de estudos da Teoria de Sistemas Dinâmicos.

Métodos algébricos comumente empregados na resolução de equações diferenciais muitas vezes são ineficazes e precisamos recorrer à um estudo qualitativo e geométrico destas soluções, o que chamamos de Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias. A teoria clássica envolvendo campo de vetores suaves, associados a equação diferencial

$$x' = X(x, t), \quad (1.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $X : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^k$ definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, pode ser vista, por exemplo, em [27, 25]. O leitor também encontrará ao final deste trabalho, no apêndice A, um breve resumo dos principais resultados acerca desta teoria.

Entretanto, recentemente uma nova classe de campos vetoriais vem ganhando destaque, os campos de vetores suave por partes, amplamente conhecidos como Campos de Filippov. Nesta configuração, sendo M uma região bidimensional com bordo suave contida em $\mathbb{R}^2$, compacta e conexa, o campo vetorial fica determinado pela expressão de dois diferentes campos de mesma suavidade e uma região de descontinuidade, isto é, apresenta a seguinte forma,

$$X(q) = \begin{cases} X_1(q); & \text{se } F(q) \geq 0 \\ X_2(q); & \text{se } F(q) \leq 0 \end{cases}, \quad (1.2)$$

onde X_1 e X_2 são campos vetoriais de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$ e $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função $\mathcal{C}^\infty$ que tem $v = 0$ como valor regular e que define a região de descontinuidade $\Sigma = \{F^{-1}(0)\}$. Nesta dissertação, no capítulo 2 apresentaremos os principais conceitos e generalizações acerca do assunto e abordaremos tópicos como classificação de singularidades e equivalência entre campos.

Ainda no capítulo 2 será introduzido o método de regularização de um campo de vetores descontínuo $X = (X_1, X_2)$, principal ferramenta para estudar o comportamento de um campo descontínuo, por meio do qual este será aproximado por uma família de campos vetores contínuos que é obtida numa vizinhança da curva de descontinuidade Σ como uma média entre os campos X_1 e X_2 com auxílio de uma função de transição φ . Para cada valor fixado de ε teremos associado um campo de vetores X_ε desta família definido numa vizinhança de Σ , cuja expressão é dada por

$$X_\varepsilon(q) = (1 - \varphi_\varepsilon(F(q)))X_2(q) + \varphi_\varepsilon(F(q))X_1(q), \quad (1.3)$$

onde $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t/\varepsilon)$. A regularização Sotomayor-Teixeira também será abordada.

Estaremos também interessados em estudar o comportamento de sistemas dinâmicos em múltiplas escalas de tempo, os chamados Sistemas Slow-Fast. Estes aparecem também frequentemente em modelos matemáticos das mais diversas áreas das ciências. A clássica teoria de perturbação singular e de Fenichel será brevemente abordada nesta dissertação, afim de apresentar os principais conceitos e resultados que nos serão necessários. O leitor encontrará estes tópicos nos capítulos 3 e 4 que foram baseados em [16].

A correspondência entre um campo de vetores descontínuos e um problema de perturbação singular fica estabelecida em [2], resultado que, considerando a regularização Sotomayor-Teixeira de um campo descontínuo X , afirma que as trajetórias do campo regularizado X_ε satisfazem um problema de perturbação singular. Ainda, em [20], provou-se que o conjunto dos pontos de deslize, de acordo com as convenções de Filippov é a projeção da variedade lenta do problema de perturbação singular obtido em [2] na região de descontinuidade Σ . Descreveremos esse procedimento no capítulo 6. Essa correspondência utiliza ainda da técnica de blowing-up.

O uso de aplicações de blow-up, permite a análise numa vizinhança de uma singularidade não hiperbólica através de uma mudança de coordenadas, de maneira que, nesse novo sistema de coordenadas esta se torne hiperbólica. Nesta dissertação, a técnica do blow up será abordada em detalhes no capítulo 5. Em especial, no capítulos 6 e 8, o uso de aplicações de blow-up se apresenta como ferramenta essencial ao nos garantir a hiperbolicidade normal, hipótese necessária para os resultados clássicos da Teoria de Fenichel, vistos em 4 e utilizados nas demonstrações dos nossos principais resultados.

Fica assim estabelecido o ambiente em que trabalharemos. Essa dissertação tem por objetivo principal a compreensão dos resultados obtidos em [23], onde usaremos uma combinação das técnicas e ferramentas anteriormente mencionadas e as aplicaremos em uma 1-folheação suave por partes. Uma folheação 1-dimensional $\mathcal{F}$ orientada em uma variedade suave M é definida exibindo uma cobertura aberta de M e uma coleção de campos de vetores suaves cujos domínios são os conjuntos abertos dessa cobertura e que coincidem nas intersecções desses abertos a menos de uma multiplicação por uma função estritamente positiva. Uma 1-folheação descontínua em M é dada por um subconjunto fechado $\Sigma \subset M$ com interior vazio e por uma folheação 1-dimensional orientada em $M - \Sigma$. Os conceitos e resultados essenciais sobre folheações são apresentados no capítulo 7 desta dissertação.

Ambientados pela configuração usual de Filippov, descrita na Seção 2.1, as folheações a serem consideradas serão dadas pelo fluxo de campos de vetores expressos por

$$X = \left(\frac{1 + \text{sgn}(F)}{2} \right) X_1 + \left(\frac{1 - \text{sgn}(F)}{2} \right) X_2, \quad (1.4)$$

onde X_1, X_2 são campos vetoriais definidos em M e F é uma função suave que tem 0 como valor regular. Ainda no capítulo 7 abordaremos os resultados sobre a suavização dessas folheações. Os primeiros resultados obtidos apresentam condições para que uma 1-folheação possa ser suavizada por uma sequência de blow ups e estão resumidos a seguir.

- O Teorema 7.20 afirma que se $\mathcal{F}$ é uma 1-folheação suave por partes e que se seu locus de descontinuidade Σ é uma subvariedade suave de codimensão um, então $\mathcal{F}$ é suavizada por blow ups.
- Se o locus de descontinuidade Σ é um subconjunto analítico definido globalmente, existe uma 1-folheação suave por partes que está relacionada à folheação inicial e

cujo locus de descontinuidade é suave. Mais ainda, se supormos também que Σ tem codimensão um, então essa 1-folheação é suavizada por blow ups. Tais resultados estão descritos no Teorema 7.24 e Corolário 7.25.

O processo de suavização introduzido na Seção 7.2 não nos permite a compreensão completa da dinâmica dessas folheações, de modo que não se pode definir a chamada *dinâmica deslizante* ao longo do conjunto de descontinuidade, um paralelo ao campo de deslize idealizado por Filippov. Tal dinâmica será definida como um tipo de limite da dinâmica de uma 1-folheação suave próxima. Introduziremos para isso a noção de regularização de uma 1-folheação descontínua.

Uma regularização de $\mathcal{F}$ será dada por uma nova folheação, dependendo de um parâmetro ε , que é suave para $\varepsilon > 0$ e que coincide com a 1-folheação descontínua original quando $\varepsilon = 0$. Definiremos formalmente esse conceito na Seção 7.3. Na subseção 7.3.1 generalizaremos a noção de regularização Sotomayor-Teixeira e consideraremos uma grande família de regularizações, chamadas do tipo transição, omitindo a hipótese de monotonicidade da função de transição. Veremos ainda um segundo método de regularização, o qual será descrito na subseção 7.3.2.

E é neste cenário que estaremos agora aptos a definir uma dinâmica deslizante. Basicamente, a região de deslize da regularização $\mathcal{F}^r$ de uma 1-folheação descontínua $\mathcal{F}$ fica definida como o conjunto de acumulação de variedades invariantes do sistema regularizado. Ao considerarmos regularizações nas quais não exigimos a monotonicidade da função de transição, a região de deslize encontrada pode diferir daquela idealizada por Filippov. Em [4], provou-se que, dada uma função de transição não-monótona, a região de deslize desta proveniente contém a região de deslize idealizada por Filippov, ao considerarmos uma regularização do tipo Sotomayor-Teixeira. O leitor encontrará na Seção 7.4 exemplos que ilustram o cálculo desta região.

Este trabalho terá por objetivo principal descrever condições para identificar a região de deslize de dada regularização de uma 1-folheação descontínua. Consideraremos $\mathcal{F}$ uma 1-folheação suave por partes, cujo locus de descontinuidade Σ é uma subvariedade suave de codimensão um e $\mathcal{F}^r$ uma regularização do tipo transição de $\mathcal{F}$.

Os resultados que discorrem acerca do assunto serão provados no capítulo 8 e estão descritos abaixo.

- No Teorema 8.1 mostraremos que a regularização do tipo transição é suavizada por blow ups.
- Os Teoremas 8.5 e 8.8 descrevem as regiões de deslize e costura da regularização $\mathcal{F}^r$ de $\mathcal{F}$, permitindo que seja possível identificá-las através de condições na função de transição.

Por último, recuperamos as “condições usuais” de deslize e costura idealizadas por Filippov e vistas neste trabalho na Seção 2.1 ao considerarmos a regularização Sotomayor-Teixeira ao invés de uma regularização do tipo transição.

Os capítulos de 2 à 5 desta dissertação trazem apenas as ferramentas e pré-requisitos necessários para a compreensão dos resultados apresentados e podem ser vistos de forma independente pelo leitor interessado. Os resultados apresentados em [23] estão dispostos nos capítulos de 6 à 8 desta dissertação.

2 Campos de Vetores Descontínuos e Regularização

Neste capítulo, trataremos brevemente sobre campos vetoriais descontínuos no plano. A terminologia aqui utilizada, bem como os resultados apresentados, podem ser encontrados em [21] e em [24], no qual os resultados principais se baseiam em [12, 17]. Na Seção 2.1 introduziremos os principais conceitos e generalizações dos resultados clássicos acerca do tema. Em seguida, na Seção 2.2 nomearemos os tipos de singularidades encontradas na curva de descontinuidade de um campo descontínuo. A Seção 2.3 generaliza o conceito de equivalência entre campos vetoriais descontínuos e caracteriza, localmente, por uma expressão mais simples o campo na vizinhança de uma singularidade, enquanto que a Seção 2.4 introduz o conceito de regularização. A última seção deste capítulo traz uma série de resultados acerca das propriedades do campo regularizado numa vizinhança da singularidade original.

2.1 Campos de Vetores Descontínuos no Plano

Seja M uma região bidimensional com bordo suave contida em $\mathbb{R}^2$, compacta e conexa, dada por uma função $\beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, tal que 0 é valor regular de β . Considere

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \beta(x, y) \geq 0\},$$

e

$$\partial M = \{\beta^{-1}(0)\}.$$

Denotamos por $X^r(M)$ o conjunto de campos vetoriais de classe $\mathcal{C}^r$ definidos em M .

Seja ainda $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{C}^\infty$ que tem 0 como valor regular e denote por $\Sigma = \{F^{-1}(0)\}$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que Σ possui uma única componente conexa e que $M - \Sigma$ é composto por duas componentes conexas, a saber

$$\Sigma^+ = \{F^{-1}(0, \infty)\} \text{ e } \Sigma^- = \{F^{-1}(-\infty, 0)\}.$$

Definição 2.1. Dados $X_1, X_2 \in X^r(M)$, $r \geq 1$, e uma função F como acima, define-se o **campo vetorial descontínuo** $X = (X_1, X_2)$ da seguinte maneira:

$$X(q) = \begin{cases} X_1(q); & \text{se } F(q) \geq 0; \\ X_2(q); & \text{se } F(q) \leq 0. \end{cases}$$

Observa-se que o campo X é bivaluado nos pontos da curva Σ , chamada curva de descontinuidade.

Denotamos por $\Omega^r(M, F)$ o espaço dos campos vetoriais descontínuos de classe $\mathcal{C}^r$ definidos em M com auxílio de F . Quando necessário, denotaremos um campo descontínuo $X \in \Omega^r(M, F)$ por $X = (X_1, X_2, F)$ para enfatizar o uso da função F .

Como estamos supondo que a curva de descontinuidade Σ possui uma única componente conexa, temos somente dois casos a considerar.

- $\partial\Sigma = \Sigma \cap \partial M \neq \emptyset$: Neste caso, devemos acrescentar a hipótese que a intersecção $\Sigma \cap \partial M$ é transversal, o que é equivalente a $\nabla F \times \nabla \beta \neq 0$ em $\partial\Sigma$.

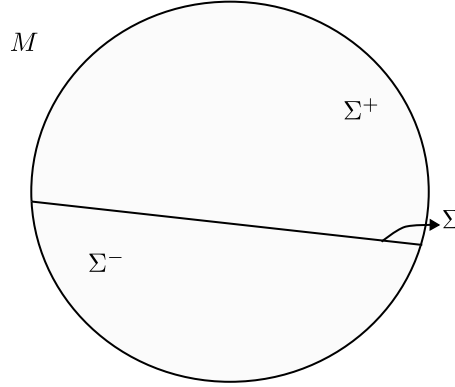


Figura 2.1: $\partial\Sigma = \Sigma \cap \partial M \neq \emptyset$.

- $\partial\Sigma = \Sigma \cap \partial M = \emptyset$.

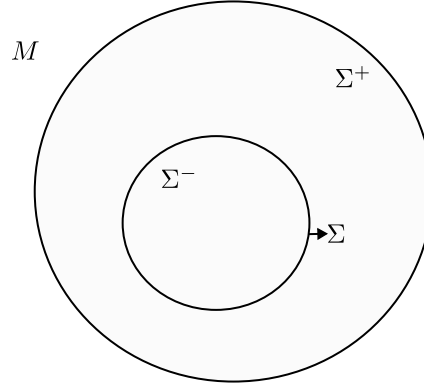


Figura 2.2: $\partial\Sigma = \Sigma \cap \partial M = \emptyset$.

Nosso objetivo é estudar o comportamento do campo descontínuo $X = (X_1, X_2)$ em uma vizinhança da curva Σ . Para isso precisamos de alguns conceitos e definições que seguem.

Definição 2.2. A derivada de Lie de F em relação ao campo vetorial X é dada por $\mathcal{L}_X(F)(p) = \langle X(p), \nabla F(p) \rangle$ e $\mathcal{L}_X^i(F)(p) = \langle X(p), \nabla X^{i-1} F(p) \rangle$, com $i \geq 2$ inteiro.

Definição 2.3. Dado $X = (X_1, X_2) \in \Omega^r(M, F)$, $r \geq 1$, seguindo a terminologia de Filippov em [11], distingui-se os seguintes tipos de pontos possíveis em Σ :

- **Pontos de Costura:** $p \in \Sigma$ é um ponto de costura (Figura 2.3) se $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p)\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) > 0$;

- **Pontos de Escape:** $p \in \Sigma$ é um ponto de escape (Figura 2.4) se $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p) > 0$ e $\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) < 0$;
- **Pontos de Deslize:** $p \in \Sigma$ é um ponto de deslize (ou deslizamento) (Figura 2.5) se $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p) < 0$ e $\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) > 0$.



Figura 2.3: Vizinhança de um ponto de costura.

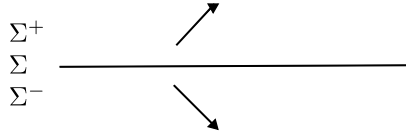


Figura 2.4: Vizinhança de um ponto de escape.

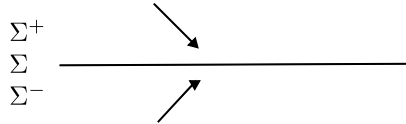


Figura 2.5: Vizinhança de um ponto de deslize.

Da definição desses pontos e da continuidade das funções envolvidas fica definida, em torno de cada ponto, uma vizinhança em Σ de pontos da mesma natureza, a saber, arcos de costura (Σ^c), arcos de deslize (Σ^s) e arcos de escape (Σ^e).

Observação 2.4. Como $\mathcal{L}_X(F)(p) = \langle X(p), \nabla F(p) \rangle = \|X(p)\| \|\nabla F(p)\| \cos(\theta)$, onde θ é o ângulo entre os vetores $X(p)$ e $\nabla F(p)$, o sinal de $\mathcal{L}_X(F)(p)$ depende desse ângulo.

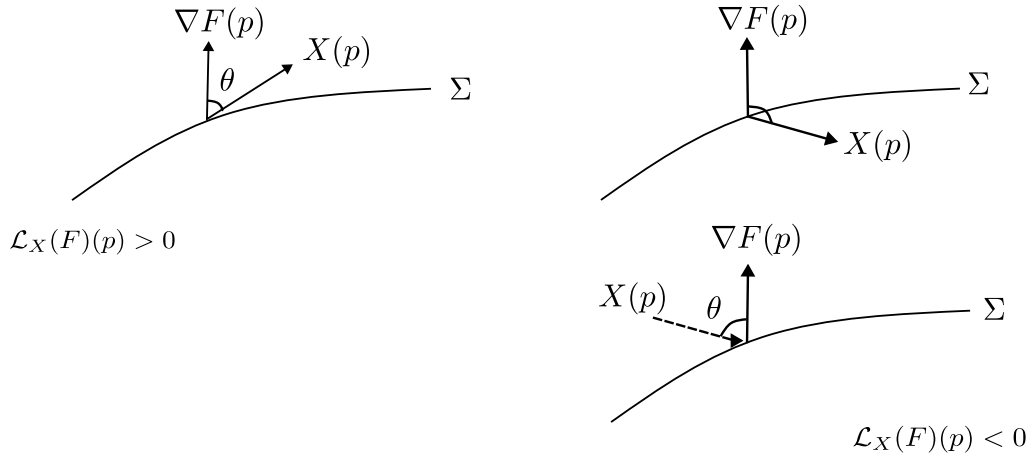


Figura 2.6: Interpretação geométrica da Derivada de Lie.

Dado um campo vetorial X qualquer, no caso em que a derivada de Lie, $\mathcal{L}_X(F)(p)$, em um ponto p , é positiva, geometricamente, temos que o cosseno do ângulo θ entre os vetores

$X(p)$ e $\nabla F(p)$ é positivo, isto é, temos $0 < \theta < \pi/2$ e uma configuração geométrica como na Figura 2.6. Analogamente, se $\mathcal{L}_X(F)(p) < 0$, temos $\pi/2 < \theta < \pi$, onde θ é o ângulo entre os vetores $X(p)$ e $\nabla F(p)$, situação esta também exemplificada na Figura 2.6. Note que neste caso, transladamos o vetor $X(p)$.

Definição 2.5. Um ponto $p \in \Sigma$ é um **ponto de tangência** se $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p) = 0$ ou $\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) = 0$. Dizemos que p é um **ponto de dobra** de X_1 (respectivamente de X_2) se $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p) = 0$ e $\mathcal{L}_{X_1}^2(F)(p) \neq 0$ (respectivamente $\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) = 0$ e $\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) \neq 0$).

Definição 2.6. Seja $p \in \Sigma$ um ponto de tangência. Se existe uma órbita γ do campo X_1 (respectivamente X_2) que passa por p após um tempo finito t_0 de tal forma que γ permanece em Σ^+ (respectivamente em Σ^-) para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, esta tangência é chamada de **tangência visível** de X_1 (respectivamente de X_2). Analogamente, se $\gamma \subset \Sigma^-$ (respectivamente Σ^+) para $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, p é **tangência invisível** de X_1 (respectivamente X_2).

Definição 2.7. Se p é um ponto de dobra de X_1 dizemos que p é uma **dobra visível** de X_1 se $\mathcal{L}_{X_1}^2(F)(p) > 0$ e uma **dobra invisível** se $\mathcal{L}_{X_1}^2(F)(p) < 0$.

Se p é um ponto de dobra de X_2 dizemos que p é uma **dobra visível** de X_2 se $\mathcal{L}_{X_2}^2(F)(p) < 0$ e uma **dobra invisível** se $\mathcal{L}_{X_2}^2(F)(p) > 0$.

Definição 2.8. Seja $p \in \Sigma$ um ponto de tangência. Dizemos que p é uma **tangência singular** se p é tangência invisível de X_1 e X_2 simultaneamente. Do contrário, $p \in \Sigma$ é de **tangência regular**. Veja as Figuras 2.7 e 2.8.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.9. Seja $F(x, y) = y$ e considere o campo

$$X(x, y) = \begin{cases} X_1(x, y) = (1, 2x); y \geq 0 \\ X_2(x, y) = (-2, -7x); y \leq 0 \end{cases}$$

Temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_1}(F)(x, y) &= \langle (1, 2x), (0, 1) \rangle = 2x \Rightarrow \mathcal{L}_{X_1}(F)(0, 0) = 0, \\ \mathcal{L}_{X_1}^2(F)(x, y) &= \langle (1, 2x), (2, 0) \rangle = 2 \Rightarrow \mathcal{L}_{X_1}^2(F)(0, 0) > 0, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_2}(F)(x, y) &= \langle (-2, -7x), (0, 1) \rangle = -7x \Rightarrow \mathcal{L}_{X_2}(F)(0, 0) = 0, \\ \mathcal{L}_{X_2}^2(F)(x, y) &= \langle (-2, -7x), (-7, 0) \rangle = 14 \Rightarrow \mathcal{L}_{X_2}^2(F)(0, 0) > 0. \end{aligned}$$

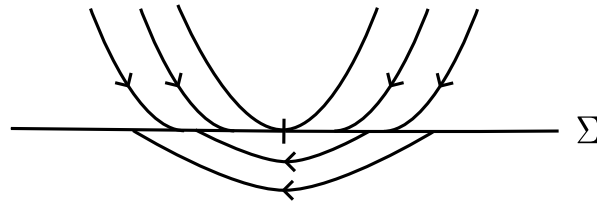


Figura 2.7: Exemplo de tangência regular.

Logo, $p = (0, 0)$ é uma dobra visível para X_1 e é uma dobra invisível para X_2 . Este é o caso em que $p = (0, 0)$ é um ponto de tangência regular. Veja a Figura 2.7.

Exemplo 2.10. Seja $F(x, y) = y$ e considere o campo

$$X(x, y) = \begin{cases} X_1(x, y) = (1, -x); y \geq 0 \\ X_2(x, y) = (-1, x^2 - x); y \leq 0 \end{cases}$$

Temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_1}(F)(x, y) &= \langle (1, -x), (0, 1) \rangle = -x \Rightarrow \mathcal{L}_{X_1}(F)(0, 0) = 0, \\ \mathcal{L}_{X_1}^2(F)(x, y) &= \langle (1, -x), (-1, 0) \rangle = -1 \Rightarrow \mathcal{L}_{X_1}^2(F)(0, 0) < 0, \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_2}(F)(x, y) &= \langle (-1, x^2 - 2), (0, 1) \rangle = x^2 - x \Rightarrow \mathcal{L}_{X_2}(F)(0, 0) = 0, \\ \mathcal{L}_{X_2}^2(F)(x, y) &= \langle (-1, x^2 - x), (2x - 1, 0) \rangle = -2x + 1 \Rightarrow \mathcal{L}_{X_2}^2(F)(0, 0) > 0, \end{aligned}$$

Logo, $p = (0, 0)$ é uma dobra invisível para X_1 e também uma dobra invisível para X_2 . Este é o caso em que $p = (0, 0)$ é um ponto de tangência singular, como na Figura 2.8 abaixo.

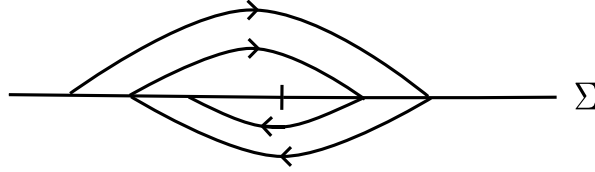


Figura 2.8: Exemplo de tangência singular.

Definição 2.11. Define-se um campo auxiliar X^Σ , dito **Campo de Filippov**, nos arcos Σ^s e Σ^e de Σ da seguinte maneira: seja $p \in \Sigma^s$ (ou $p \in \Sigma^e$), então $X^\Sigma(p)$ denota o vetor tangente a Σ em p , contido no cone gerado por $X_1(p)$ e $X_2(p)$. Veja a Figura 2.9

Vejamos como se configura essa construção. Uma vez que $\nabla F(p)$ é ortogonal à curva de nível $F = 0$, temos que o campo X^Σ é ortogonal a $\nabla F(p)$ em p , ou seja, $\langle X^\Sigma(p), \nabla F(p) \rangle = 0$.

O campo X^Σ é expresso por $X^\Sigma(p) = q - p$, onde q é um ponto que pertence ao segmento que contém os pontos $p + X_1(p)$ e $p + X_2(p)$.

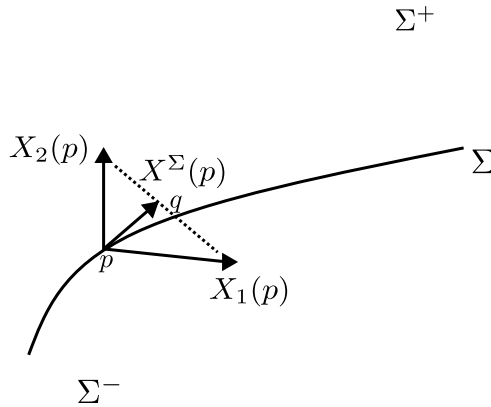


Figura 2.9: Construção do Campo de Filippov.

Afim de determinar a expressão do campo X^Σ , consideremos a equação da reta que passa pelos pontos $p + X_1(p)$ e $p + X_2(p)$, que é dada por

$$r(\lambda) = (p + X_1(p)) + \lambda(X_1(p) - X_2(p)).$$

Como $q \in r$ e $\langle q - p, \nabla F(p) \rangle = 0$ temos

$$\begin{aligned} & \langle (p + X_1(p) + \lambda(X_1(p) - X_2(p)) - p, \nabla F(p) \rangle = 0 \\ \Rightarrow & \langle X_1(p), \nabla F(p) \rangle + \lambda \langle X_1(p), \nabla F(p) \rangle - \lambda \langle X_2(p), \nabla F(p) \rangle = 0 \\ \Rightarrow & \mathcal{L}_{X_1}(F)(p) + \lambda(\mathcal{L}_{X_1}(F)(p) - \mathcal{L}_{X_2}(F)(p)) = 0 \\ \Rightarrow & \lambda = \frac{\mathcal{L}_{X_1}(F)(p)}{\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) - \mathcal{L}_{X_1}(F)(p)}. \end{aligned}$$

Dos cálculos acima obtemos a seguinte definição.

Definição 2.12. Como $X^\Sigma(p) = p - q$, a expressão do campo de Filippov X^Σ é dada por

$$X^\Sigma(p) = \frac{1}{\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) - \mathcal{L}_{X_1}(F)(p)} (\mathcal{L}_{X_2}(F)(p)X_1(p) - \mathcal{L}_{X_1}(F)(p)X_2(p)).$$

O campo $\mathcal{L}_{X_2}(F)(p)X_1(p) - \mathcal{L}_{X_1}(F)(p)X_2(p)$ é chamado de campo normalizado.

Observação 2.13. Em alguns textos da literatura o campo de Filippov X^Σ é referido como campo deslizante ou de escape, enquanto que o campo $X = (X_1, X_2)$ é as vezes também referido como campo de Filippov.

Com o objetivo de facilitar a compreensão é usual fazer as seguintes considerações.

Seja $X = (X_1, X_2) \in \Omega^r(M, F)$ e $p \in \Sigma$. Localmente, em uma vizinhança de p , podemos considerar um sistema de coordenadas locais tais que:

$$p = (0, 0) \equiv 0;$$

$$\Sigma = \{y = 0\};$$

$$F(x, y) = y;$$

$$X_1(x, y) = (a(x, y), b(x, y)); \text{ e}$$

$$X_2(x, y) = (c(x, y), d(x, y)).$$

Se $p \in \partial M$, isto é $p \in \Sigma \cap \partial M = \partial \Sigma$, podemos considerar ainda que $\beta(x, y) = x$ e $\partial M = \{x = 0\}$, já que Σ e ∂M se intersectam transversalmente, por hipótese.

Lema 2.14. *Seja $p \in \Sigma^s$ (ou $p \in \Sigma^e$). Então, na notação anterior, temos $p = 0$ e*

$$X^\Sigma(0) = \left(a(0) - b(0) \left(\frac{c(0) - a(0)}{d(0) - b(0)} \right), 0 \right).$$

Demonstração. A demonstração aqui omitida, pode ser encontrada com detalhes pelo leitor em [21]. $\square$

Vamos agora generalizar o conceito de trajetória para um campo vetorial descontínuo, mas antes recordemos a definição no caso suave. Dado Y um campo vetorial suave, a trajetória $\varphi_Y(t, p)$ que passa por p é tal que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_Y(t, p) = Y(\varphi_Y(t, p)) \\ \varphi_Y(0, p) = p \end{cases}$$

Definição 2.15. Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo vetorial descontínuo. A **trajetória** (local) $\varphi_X(t, p)$ do campo X passando por p é definida por:

- Se $p \in \Sigma^+$ (respectivamente, Σ^-): $\varphi_X(t, p) = \varphi_{X_1}(t, p)$ (respectivamente, $\varphi_X(t, p) = \varphi_{X_2}(t, p)$);
- Se $p \in \Sigma^c$ e $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p), \mathcal{L}_{X_2}(F)(p) > 0$, supondo ainda que as trajetórias passam por p em $t = 0$:

$$\varphi_X(t, p) = \begin{cases} \varphi_{X_1}(t, p); & t \geq 0 \\ \varphi_{X_2}(t, p); & t \leq 0 \end{cases}$$

Se $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p), \mathcal{L}_{X_2}(F)(p) < 0$, a definição é a mesma, invertendo o tempo.

- Se $p \in \Sigma^e$:

$$\varphi_X(t, p) = \begin{cases} \varphi_{X^\Sigma}(t, p); & t \leq 0 \\ \varphi_{X_1}(t, p) \text{ ou } \varphi_{X_2}(t, p) \text{ ou } \varphi_{X^\Sigma}(t, p); & t \geq 0 \end{cases}$$

Se $p \in \Sigma^s$, a definição é a mesma, invertendo o tempo.

- Se p é um ponto de tangência regular:

$$\varphi_X(t, p) = \begin{cases} \varphi_{X_1}(t, p) \text{ ou } \varphi_{X_2}(t, p) \text{ ou } \varphi_{X^\Sigma}(t, p); & t \leq 0 \\ \varphi_{X_1}(t, p) \text{ ou } \varphi_{X_2}(t, p) \text{ ou } \varphi_{X^\Sigma}(t, p); & t \geq 0 \end{cases}$$

- Se p é um ponto de tangência singular: $\varphi_X(t, p) = p, \forall t$.

Definição 2.16. A **órbita** (local) de um ponto p é o conjunto $\gamma(p) = \{\varphi_X(t, p) : t \in I\}$, em que I é o intervalo de definição de φ_X .

2.2 Singularidades

Definiremos em seguida o conceito de pontos Σ -regulares e Σ -dobras, pontos esses que possuirão vizinhanças nas quais não ocorrem pontos singulares durante o processo de regularização, como veremos na Seção 2.5.

Definição 2.17. Um ponto $p \in \Sigma$ é chamado um **ponto Σ -regular** de $X = (X_1, X_2)$ se uma das seguintes condições é satisfeita:

1. $p \in \Sigma^c$, isto é, $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p)\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) > 0$; ou



Figura 2.10: Ponto Σ -regular tal que $p \in \Sigma^c$.

2. $p \in \Sigma^s$ ou $p \in \Sigma^e$, isto é, $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p)\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) < 0$, e $\det[X_1, X_2](p) \neq 0$, o que significa que os vetores $X_1(p)$ e $X_2(p)$ são linearmente independentes, o que implica que p não é ponto crítico de X^Σ .

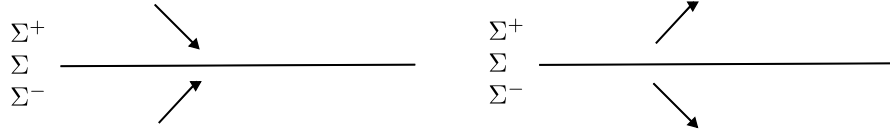


Figura 2.11: Ponto Σ -regular tal que $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$.

Definição 2.18. Um ponto $p \in \Sigma$ é chamado uma Σ -**dobra** se é um ponto de contato quadrático de X_1 com Σ , isto é, $\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) \neq 0$, $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p) = 0$ e $\mathcal{L}_{X_1}^2(F)(p) \neq 0$, ou de X_2 com Σ , isto é, $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p) \neq 0$, $\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) = 0$ e $\mathcal{L}_{X_2}^2(F)(p) \neq 0$. Veja a Figura 2.12.



Figura 2.12: Exemplos de Σ -dobras.

Veremos ainda o conceito de ponto crítico e ponto crítico hiperbólico. Pontos críticos hiperbólicos apresentarão vizinhanças nas quais encontramos um único ponto crítico hiperbólico em cada campo regularizado.

Denotemos por $d(\cdot)$ a diferencial com respeito à variável x .

Definição 2.19. Um ponto $p \in \Sigma$ é chamado **ponto crítico** de X^Σ se $\mathcal{L}_{X_1}(F)(p)\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) < 0$, isto é, $p \in \Sigma^s$ ou $p \in \Sigma^e$ e, $\det[X_1, X_2](p) = 0$. Se também tivermos $d(\det[X_1, X_2]|_\Sigma)(p) \neq 0$, o ponto p é então chamado de **ponto crítico hiperbólico**. Veja a Figura 2.13.



Figura 2.13: Pontos críticos hiperbólicos de X^Σ .

Definição 2.20. Seja $p \in D$ um ponto crítico hiperbólico de X^Σ .

Dizemos que p é do tipo **sela** se $p \in \Sigma^s$ e p é um repulsor de X^Σ , isto é, $d(\det[X_1, X_2]|_\Sigma)(p) > 0$ ou, se $p \in \Sigma^e$ e p é um atrator de X^Σ , isto é, $d(\det[X_1, X_2]|_\Sigma)(p) < 0$ (Figura 2.14).

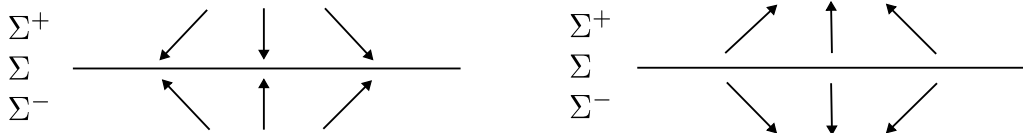


Figura 2.14: Pontos de sela de X^Σ .

Dizemos que p é do tipo **nó** se $p \in \Sigma^s$ e p é um atrator de X^Σ ou, se $p \in \Sigma^e$ e p é um repulsor de X^Σ (Figura 2.15).

Figura 2.15: Pontos de nó de X^Σ .

Definição 2.21. Um ponto $p \in \Sigma$ é chamado uma Σ -singularidade elementar de X se uma das condições abaixo for satisfeita:

1. p é uma Σ -dobra de X ; ou
2. p é um ponto crítico hiperbólico de X^Σ .

Em seguida, iremos introduzir mais alguns conceitos importantes, entre eles, o de poli-trajetória elementar.

Definição 2.22. Uma **separatriz** de X é, ou um arco de trajetória de X_1 ou X_2 que tangencia ∂M , ou um arco de trajetória de X_1, X_2 ou X^Σ cujos conjuntos α ou ω -limite é um ponto de sela de X_1, X_2 ou X^Σ .

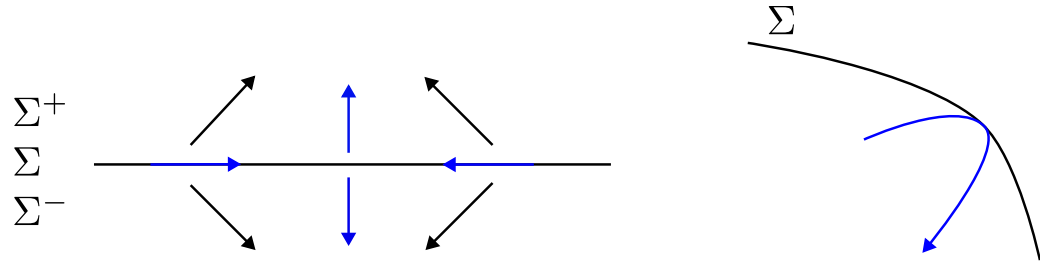


Figura 2.16: Exemplos de separatrizes.

Uma **separatriz dupla** de X é, ou uma trajetória de X_1, X_2 ou de X^Σ cujos conjuntos α e ω -limite são pontos de sela, ou uma separatriz de sela de X_1 ou X_2 que tangencia ∂M , ou ainda uma trajetória de X_1 ou X_2 que tangencia ∂M duas vezes.

Definição 2.23. Uma curva γ composta por arcos regulares de trajetórias de X_1 em Σ^+ , de X_2 em Σ^- ou de X^Σ em Σ é chamada uma **poli-trajetória** se:

1. γ contém arcos de pelo menos dois entre os campos X_1, X_2 e X^Σ , ou é composta por um arco de X^Σ ;
2. A transição de arcos de trajetória de X_1 para arcos de trajetória de X_2 é feita através de pontos de costura;
3. A transição de arcos de trajetória de X_1 ou de X_2 para arcos de trajetória de X^Σ é feita através de Σ -dobras ou de pontos regulares do arco de escape ou deslize, respeitando-se o sentido dos arcos de trajetórias.

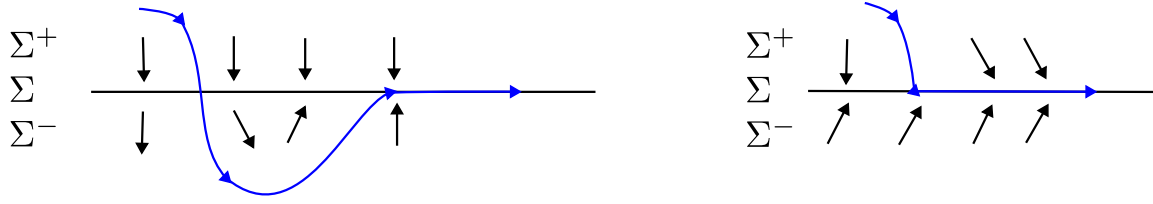


Figura 2.17: Exemplos de poli-trajetórias.

Definição 2.24. Seja γ uma poli-trajetória fechada de $X = (X_1, X_2)$.

Dizemos que γ é uma **poli-trajetória fechada tipo I** se γ encontra Σ somente em pontos de costura.

Dizemos que γ é uma **poli-trajetória fechada tipo II** se $\gamma = \Sigma$.

Dizemos que γ é uma **poli-trajetória fechada tipo III** se γ contém pelo menos uma Σ -dobra de X .

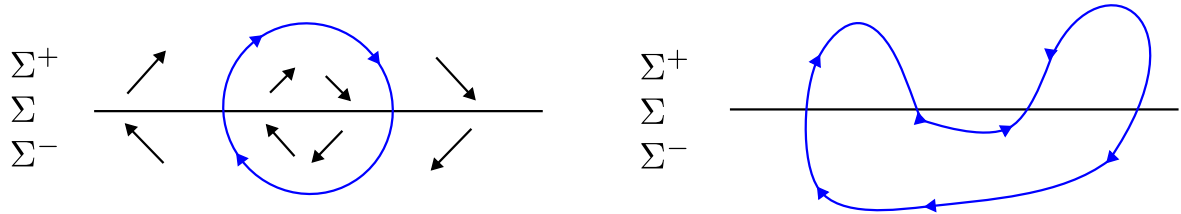


Figura 2.18: Poli-trajetórias fechadas tipo I.

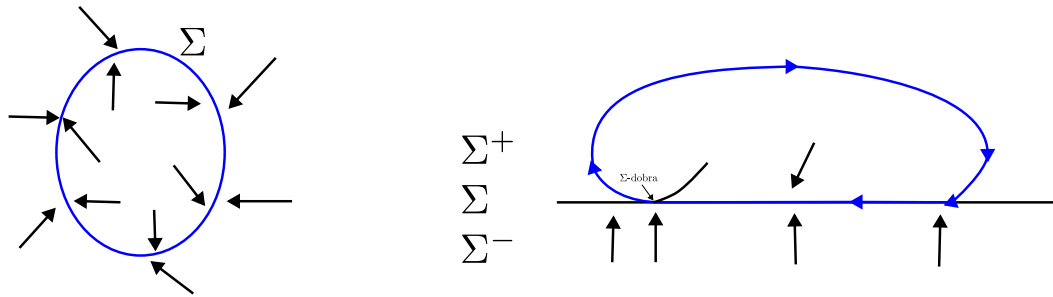


Figura 2.19: Poli-trajetórias fechadas tipo II e tipo III, respectivamente.

Definição 2.25. Dada uma poli-trajetória fechada tipo I, $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$, onde $\gamma_{2i} \in \Sigma^+$ e $\gamma_{2i+1} \in \Sigma^-$, $i = 0, \dots, (k-1)/2$, $\gamma \cap \Sigma = \{p_j, p_{j+1}\}$ com $p_{k+1} = p_0$, pode-se definir para cada $j = 1, \dots, k$ um germe em p_j de uma aplicação de Poincaré $\mathcal{C}^r$:

$$\eta_j : (\Sigma, p_j) \rightarrow (\Sigma, p_{j+1})$$

tal que a aplicação de primeiro retorno associada a órbita γ é dada por

$$\eta = \eta_k \circ \eta_{k-1} \circ \dots \circ \eta_0,$$

com $\eta(p_0) = p_0$.

A fim de melhor compreender a definição anterior definiremos brevemente o conceito de um germe de uma aplicação. Basicamente, um germe de uma aplicação é uma classe

de equivalência. Mais formalmente, se $m, n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}^m$, definimos $\mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que } U \text{ é uma vizinhança aberta de } p \text{ e } f \in \mathcal{C}^\infty\}$. Dizemos que duas aplicações $f, g \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ estão relacionadas caso exista uma vizinhança $V \subset \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ contendo p , e de forma que, f e g coincidam em V . Escrevemos, como usual, $f \sim g$. Prova-se que “ $\sim$ ” define uma relação de equivalência sobre $\mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ e que $(\mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), \sim)$ é um espaço vetorial, que denotaremos por $G_p(m, n)$. Os elementos de $G_p(m, n)$ são chamados de germes de aplicações diferenciáveis em p .

O conceito de germe pode ser visto no estudo da teoria de singularidades, por exemplo, em [29].

Definição 2.26. Seja γ uma poli-trajetória fechada. Dizemos que γ é uma **poli-trajetória elementar** se:

1. γ é do tipo I e $\eta'(p) \neq 1$, para algum $p \in \gamma$; ou
2. γ é do tipo II; ou
3. γ é do tipo III e todos os arcos de trajetória de X^Σ são de deslize ou todos os arcos são de escape.

Na Seção 2.5 será provado que a regularização de poli-trajetórias fechadas elementares gera órbitas periódicas hiperbólicas.

2.3 Equivalência e Conjugação entre Campos Vetoriais Descontínuos

Nesta seção abordaremos brevemente o conceito de equivalência entre campos. Para o caso suave, o leitor interessado pode consultar o apêndice A. Vejamos agora como esse conceito é generalizado.

Definição 2.27. Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ campos vetoriais descontínuos, onde $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ são abertos, e Σ e $\tilde{\Sigma}$ suas respectivas curvas de descontinuidade. Dizemos que X e $\tilde{X}$ são **Σ -equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação, leva órbitas de X em órbitas de $\tilde{X}$ e leva Σ em $\tilde{\Sigma}$.

A definição acima é natural pois em algumas aplicações é necessário que a curva de descontinuidade Σ seja preservada. Entretanto, em alguns casos esta pode ser muito restrita. Por exemplo, não é necessário que a região de costura seja preservada. Do ponto de vista topológico, o comportamento de uma trajetória numa vizinhança da região de costura é o mesmo comportamento de uma trajetória que passa por um ponto $p \in \Sigma^\pm$, onde o campo X é suave.

Definição 2.28. Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{X} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ campos vetoriais descontínuos, onde $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ são abertos, e Σ e $\tilde{\Sigma}$ suas respectivas curvas de descontinuidade. Dizemos que X e $\tilde{X}$ são **topologicamente equivalentes** se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação e leva órbitas de X em órbitas de $\tilde{X}$.

Note que Σ -equivalência implica em equivalência topológica, entretanto a recíproca não é verdadeira (ver Exemplo 2.31).

Recordemos a definição de conjugação entre campos vetoriais suaves, necessária para a nossa próxima definição.

Definição 2.29. Sejam Y e $\tilde{Y}$ campos suaves e $\varphi_Y(t, p)$ e $\varphi_{\tilde{Y}}(t, p)$ as trajetórias de Y e $\tilde{Y}$, respectivamente. Dizemos que os campos Y e $\tilde{Y}$ são $\mathcal{C}^r$ -**conjugados** se existe um homeomorfismo h de classe $\mathcal{C}^r$ tal que $h(\varphi_Y(t, p)) = \varphi_{\tilde{Y}}(t, h(p))$.

O leitor pode encontrar a demonstração em detalhes do próximo resultado em [24].

Proposição 2.30. *Sejam $X = (X_1, X_2, F)$ e $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{F})$ campos vetoriais descontínuos definidos nos abertos $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ respectivamente, e Σ e $\tilde{\Sigma}$ suas respectivas curvas de descontinuidade. Suponha que exista um difeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ de classe $\mathcal{C}^r$ que conjugue simultaneamente X_1 e $\tilde{X}_1$ por um lado e X_2 e $\tilde{X}_2$ por outro. Então, h conjugue os campos X^Σ e $\tilde{X}^{\tilde{\Sigma}}$ e portanto, h é uma Σ -equivalência entre X e $\tilde{X}$.*

Demonstração. Ver [24]. □

A hipótese de que h é um difeomorfismo na proposição acima não pode ser omitida. Se supormos que h seja apenas um homeomorfismo podemos considerar o seguinte contra-exemplo.

Exemplo 2.31. Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ um aberto e considere $F(x, y) = \tilde{F}(x, y) = y$, de modo que $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \tilde{\Sigma}$. Defina os campos descontínuos X e $\tilde{X}$ por

$$X(x, y) = \begin{cases} X_1(x, y) = (0, -1); & \text{se } y \geq 0 \\ X_2(x, y) = (0, 1); & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

e,

$$\tilde{X}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}_1(x, y) = (-1, -1); & \text{se } y \geq 0 \\ \tilde{X}_2(x, y) = (-1, 1); & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$$

Temos,

$$\mathcal{L}_{X_1}(F)(x, y) = \langle (0, -1), (0, 1) \rangle = -1 = \langle (-1, -1), (0, 1) \rangle = \mathcal{L}_{\tilde{X}_1}(F)(x, y),$$

$$\mathcal{L}_{X_2}(F)(x, y) = \langle (0, 1), (0, 1) \rangle = 1 = \langle (-1, 1), (0, 1) \rangle = \mathcal{L}_{\tilde{X}_2}(F)(x, y),$$

de modo que, $\Sigma^s = \Sigma = \tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^s$.

Assim, o homeomorfismo h dado por

$$h(x, y) = \begin{cases} (x + y, y); & y \geq 0 \\ (x, y); & y = 0 \\ (x - y, y); & y \leq 0 \end{cases}$$

leva Σ^+ em $\tilde{\Sigma}^+$ e Σ^- em $\tilde{\Sigma}^-$, isto é, conjugue X_1 e $\tilde{X}_1$ e X_2 e $\tilde{X}_2$, simultaneamente. Observe que h não é de classe $\mathcal{C}^1$.

Observe ainda que,

$$X^\Sigma = \frac{(0, -1) + (0, 1)}{2} = (0, 0)$$

$$\tilde{X}^{\tilde{\Sigma}} = \frac{(-1, -1) + (-1, 1)}{2} = (-1, 0)$$

Assim, todos os pontos de Σ são pontos críticos de X^Σ , enquanto que $\tilde{X}^{\tilde{\Sigma}}$ não possui nenhum ponto crítico. Portanto, h não conjugue X^Σ e $\tilde{X}^{\tilde{\Sigma}}$, ou seja, h não é uma Σ -equivalência.

Definição 2.32. Uma **forma canônica** de um campo vetorial descontínuo X é um campo vetorial descontínuo cuja expressão é suficientemente simples e que é localmente equivalente a X .

Os próximos resultados caracterizam localmente o campo X e nos fornecem uma expressão mais simples. As respectivas demonstrações, que aqui serão omitidas, podem ser encontradas em [24].

Proposição 2.33. *Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo vetorial descontínuo e Σ sua região de descontinuidade e suponha que $(0, 0) \in \Sigma^c$. Então, em uma vizinhança U de $(0, 0)$ o campo X é Σ -equivalente à forma canônica*

$$\tilde{X}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}_1(x, y) = (0, 1); y \geq 0 \\ \tilde{X}_2(x, y) = (0, 1); y \leq 0 \end{cases}$$

definido em uma vizinhança $\tilde{U}$ de $(0, 0)$. Além disso, é topologicamente equivalente a forma canônica $\tilde{X}_1 = (0, 1)$, que é um campo suave.

Demonstração. Ver [24]. □

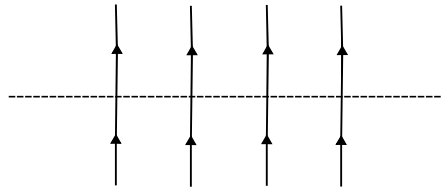


Figura 2.20: Forma canônica da Proposição 2.33.

Proposição 2.34. *Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo vetorial descontínuo com $(0, 0) \in \Sigma^s$, tal que o vetor $X_1(0, 0)$ não é paralelo a $X_2(0, 0)$. Então, existe uma vizinhança U de $(0, 0)$ onde o campo X é Σ -equivalente à forma canônica*

$$\tilde{X}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}_1(x, y) = (1, -1), y \geq 0 \\ \tilde{X}_2(x, y) = (1, 1), y \leq 0 \end{cases}$$

Demonstração. Ver [24]. □

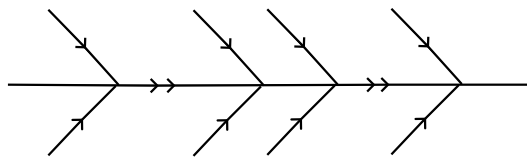


Figura 2.21: Forma canônica da Proposição 2.34.

Proposição 2.35. *Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo descontínuo com $(0, 0) \in \Sigma^e$. Então, existe uma vizinhança U de $(0, 0)$ onde o campo X é Σ -equivalente à forma canônica*

$$\tilde{X}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}_1(x, y) = (1, 1), y \geq 0 \\ \tilde{X}_2(x, y) = (1, -1), y \leq 0 \end{cases}$$

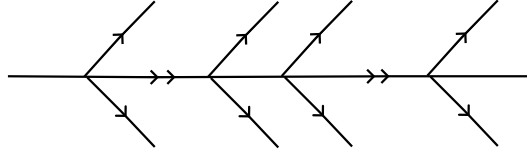


Figura 2.22: Forma canônica da Proposição 2.35.

Demonstração. Ver [24]. □

Proposição 2.36. *Seja $(0, 0) \in \Sigma$ um ponto de Σ -dobra do campo descontínuo $X = (X_1, X_2, F)$. Então, existe uma vizinhança U de $(0, 0)$ onde o campo X é Σ -equivalente à forma canônica*

$$\tilde{X}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}_1(x, y) = (b, ax), y \geq 0 \\ \tilde{X}_2(x, y) = (0, c), y \leq 0 \end{cases}$$

onde $a = \text{sgn}(\mathcal{L}_{X_1^2}(F)(0, 0))$, $b = \text{sgn}(\pi_1(X_1(0, 0)))$, $c = \text{sgn}(\mathcal{L}_{X_2}(F)(0, 0))$ e π_1 é a projeção na primeira coordenada.

Demonstração. Ver [24]. □

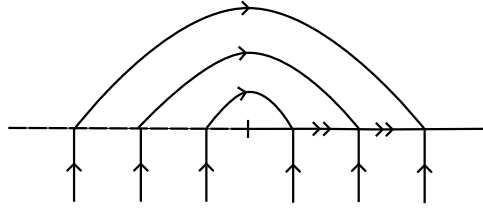


Figura 2.23: Forma canônica da Proposição 2.36.

Proposição 2.37. *Seja $(0, 0) \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ um ponto crítico hiperbólico do campo X^Σ onde $X = (X_1, X_2)$. Então, X é Σ -equivalente à forma canônica*

$$\tilde{X}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X}_1(x, y) = (ax, b); y \geq 0 \\ \tilde{X}_2(x, y) = (ax, -b); y \leq 0 \end{cases}$$

onde $a = \text{sgn}((X^\Sigma)'(0, 0))$ e $b = \text{sgn}(\mathcal{L}_{X_1}(F)(0, 0))$.

Demonstração. Ver [24]. □

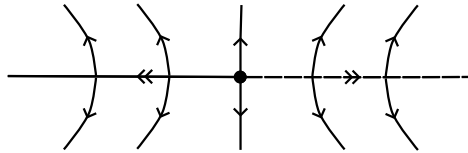


Figura 2.24: Forma canônica da Proposição 2.37.

2.4 Regularização de Campos Vetoriais Descontínuos

Nesta seção será introduzido o método de regularização de um campo de vetores descontínuo $X = (X_1, X_2)$, por meio do qual este será aproximado por uma família de campos de vetores contínuos que é obtida numa vizinhança da curva de descontinuidade Σ como uma média entre os campos X_1 e X_2 com auxílio de uma função de transição φ . Para cada valor fixado de ε teremos associado um campo de vetores X_ε desta família definido numa vizinhança de Σ , a qual chamaremos faixa de regularização.

Definição 2.38. Uma função $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$, é uma **função de transição monótona** se

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0; & \text{se } t \in (-\infty, -1]; \\ 1; & \text{se } t \in [1, \infty); \end{cases}$$

e, $\varphi'(t) > 0, t \in (-1, 1)$.

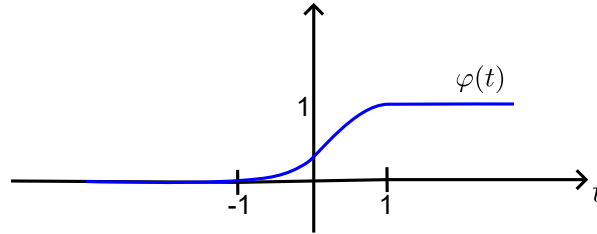


Figura 2.25: Exemplo de função de transição.

Definição 2.39. Sejam φ uma função de transição e $X = (X_1, X_2) \in \Omega^r(M, F)$ um campo de vetores descontínuo. Uma φ_ε -regularização de X é uma família indexada em ε , para $\varepsilon > 0$, de campos vetoriais X_ε em $X^r(M)$, onde cada campo X_ε é dado por

$$X_\varepsilon(q) = (1 - \varphi_\varepsilon(F(q)))X_2(q) + \varphi_\varepsilon(F(q))X_1(q), \quad (2.1)$$

com $\varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t/\varepsilon)$.

Note que a função φ é estritamente crescente no intervalo $[-1, 1]$ e que φ_ε o é no intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

Para cada valor fixo do parâmetro $\varepsilon > 0$, o campo vetorial X_ε denomina-se **campo vetorial regularizado**.

Denomina-se **faixa de regularização** a faixa em torno da curva de descontinuidade Σ dada por $(\varphi_\varepsilon \circ F)^{-1}((0, 1)) = F^{-1}(\varphi^{-1}((0, 1)))((-\varepsilon, \varepsilon))$, que é a faixa onde o campo X_ε é definido por uma média entre o campo X_1 e o campo X_2 . Veja a Figura 2.26.

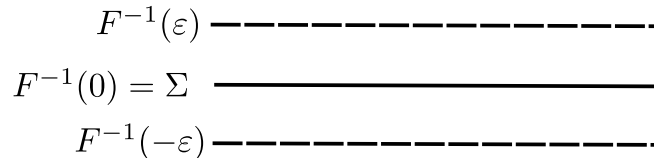


Figura 2.26: Faixa de regularização.

Observação 2.40. Pode-se encontrar na literatura outras definições para uma função de transição, bem como outras expressões para o campo regularizado.

A **regularização Sotomayor-Teixeira**, amplamente utilizada na literatura, a qual também utilizaremos neste trabalho é dada pela família

$$X_\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \varphi \left(\frac{F}{\varepsilon} \right) \right) X_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \varphi \left(\frac{F}{\varepsilon} \right) \right) X_2, \quad (2.2)$$

onde $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $\varphi(t) = -1, t \leq -1$, $\varphi(t) = 1, t \geq 1$ e $\varphi'(t) > 0, t \in (-1, 1)$.

2.5 Propriedades locais do Campo Regularizado

Os resultados apresentados nesta seção descrevem o campo regularizado X_ε dado pela equação 2.1 numa vizinhança de um ponto na curva de descontinuidade Σ . Omitiremos neste texto as demonstrações dos resultados apresentados; o leitor interessado pode consultá-las com detalhes em [21].

Inicialmente, vamos tratar do caso dos pontos Σ -regulares. Em uma vizinhança de tais pontos, o campo regularizado não possuirá pontos críticos. A proposição a seguir foi estabelecida por Sotomayor e Teixeira em [28].

Proposição 2.41. *Seja $p \in \Sigma$ um ponto Σ -regular de $X = (X_1, X_2) \in \Omega^r(M, F), r \geq 1$. Então, dada uma função de transição φ , existem uma vizinhança V de p em M e $\varepsilon_0 > 0$ tais que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, o campo vetorial regularizado X_ε não possui pontos críticos em V .*

Demonstração. Ver [21].

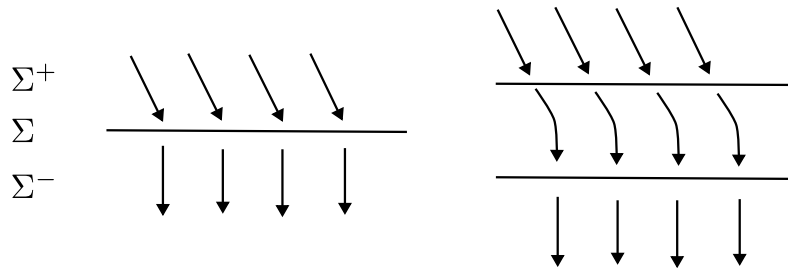


Figura 2.27: Exemplo de arco de costura e sua regularização.

□

Corolário 2.42. *Sejam $X = (X_1, X_2) \in \Omega^r(M, F), r \geq 1$ e $T \subset \Sigma$ um conjunto compacto de pontos Σ -regulares. Então, dada uma função de transição φ , existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma vizinhança V de T em M tais que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, o campo vetorial regularizado X_ε só tem pontos regulares em V .*

Também em [28], Sotomayor e Teixeira estabeleceram a seguinte proposição, que discute acerca de pontos críticos hiperbólicos de X^Σ .

Proposição 2.43. *Dado $X = (X_1, X_2) \in \Omega^r(M, F), r \geq 1$, seja p um ponto crítico hiperbólico de X^Σ . Então, dada uma função de transição φ , existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma vizinhança V de p em M tais que para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, o campo regularizado X_ε tem um único ponto crítico p_ε em V , que é hiperbólico e do tipo sela ou nó, conforme p o for para X .*

Demonstração. Ver [21].

□

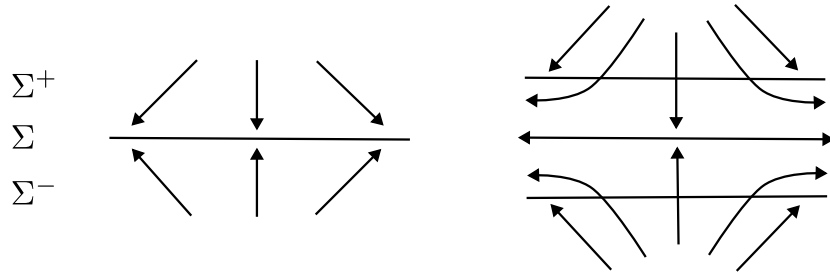


Figura 2.28: Exemplo de ponto de sela e sua regularização.

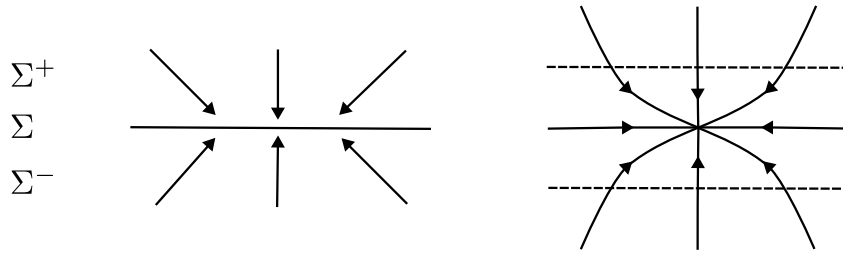


Figura 2.29: Exemplo de ponto de nó e sua regularização.

Para o caso de Σ -dobras, a situação é semelhante a de pontos Σ -regulares.

Proposição 2.44. *Seja $p \in \Sigma$ uma Σ -dobra de $X = (X_1, X_2) \in \Omega^r(M, F)$, $r \geq 1$. Então, dada uma função de transição φ , existem uma vizinhança V de p em M e $\varepsilon_0 > 0$ tais que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, o campo vetorial regularizado não possui pontos críticos em V .*

Demonstração. Ver [21]. □

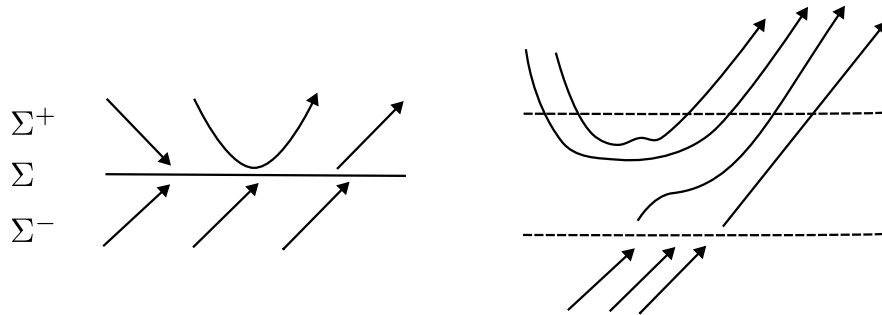


Figura 2.30: Σ -dobra e sua regularização.

As proposições seguintes abordam os casos de regularização de poli-trajetórias fechadas dos tipos I, II e III, respectivamente.

Proposição 2.45. *Seja γ uma poli-trajetória fechada elementar ou do tipo I, ou do tipo II, ou do tipo III de $X = (X_1, X_2) \in \Omega^r(M, F)$, $r \geq 1$. Então, dada uma função de transição φ , existem uma vizinhança V de γ em M e $\varepsilon_0 > 0$ tais que para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, X_ε contém uma única órbita periódica em V , e esta é hiperbólica.*

Demonstração. Ver [21]. □

Para finalizar este capítulo, abordaremos ainda o caso em $p \in \partial\Sigma = \Sigma \cap \partial M$. Em [21] ficou estabelecido condições para que o campo regularizado fosse localmente transversal a ∂M ou que surgisse uma tangência quadrática.

Proposição 2.46. *Sejam $X = (X_1, X_2) \in \Omega^r(M, F), r \geq 1$, e $p \in \Sigma \cap \partial M$ com $\mathcal{L}_{X_1}(\beta)(p)\mathcal{L}_{X_2}(\beta)(p) < 0$ e $\mathcal{L}_{X_1}(\beta)(p)\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) - \mathcal{L}_{X_1}(F)(p)\mathcal{L}_{X_2}(\beta)(p) \neq 0$. Então:*

1. *Se $\mathcal{L}_{X_1}(\beta)(p)\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) - \mathcal{L}_{X_1}(F)(p)\mathcal{L}_{X_2}(\beta)(p) > 0$, dada uma função de transição φ , existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, o campo regularizado X_ε possui um ponto de tangência quadrática interna na intersecção da faixa de regularização com ∂M ;*
2. *Se $\mathcal{L}_{X_1}(\beta)(p)\mathcal{L}_{X_2}(F)(p) - \mathcal{L}_{X_1}(F)(p)\mathcal{L}_{X_2}(\beta)(p) < 0$, dada uma função de transição φ , existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, o campo regularizado X_ε possui um ponto de tangência quadrática externa na intersecção da faixa de regularização com ∂M ;*

Demonstração. Ver [21]. □

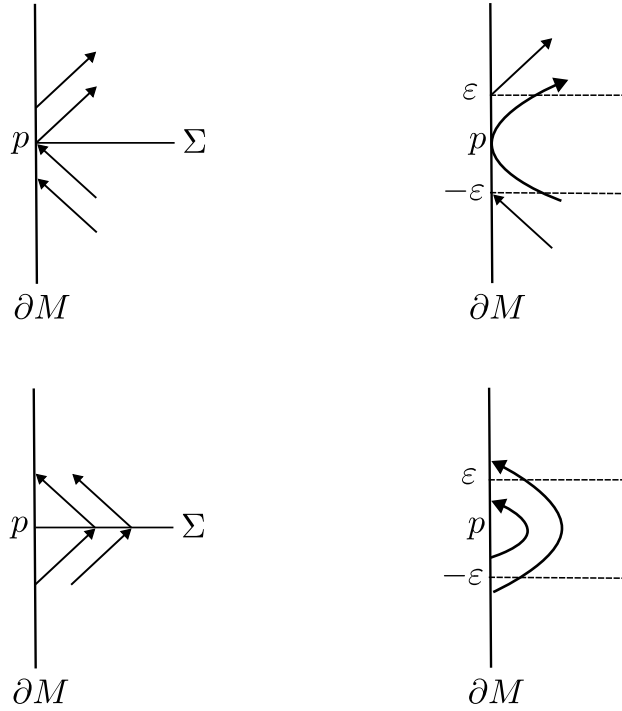


Figura 2.31: Configuração geométrica da Proposição 2.46.

Proposição 2.47. *Sejam $X = (X_1, X_2) \in \Omega^r(M, F), r \geq 1$, e $p \in \Sigma \cap \partial M$ com $\mathcal{L}_{X_1}(\beta)(p)\mathcal{L}_{X_2}(\beta)(p) > 0$. Então, dada uma função de transição φ , existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, o campo regularizado X_ε é transversal a ∂M numa vizinhança de p .*

Demonstração. Ver [21]. □

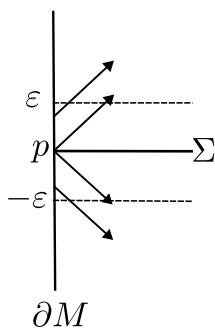


Figura 2.32: Configuração geométrica da Proposição 2.47.

Neste capítulo apresentamos importantes definições e resultados sobre campos vetoriais descontínuos, necessários na obtenção dos resultados pretendidos.

3 Sistemas Slow-Fast

Neste capítulo será introduzido o conceito de sistemas slow-fast, sistemas esses que apresentam escalas de tempo diferentes, referidas como tempo rápido e lento. As seções 3.1 e 3.2 trazem as definições essenciais acerca do assunto e as exemplifica.

Em seguida, na Seção 3.3, enunciamos o Teorema de Fenichel, importante resultado que ilustra o comportamento do sistema próximo da variedade crítica C_0 . Maiores detalhes sobre o Teorema de Fenichel e de sua demonstração serão discutidos posteriormente. Neste ponto apenas o ilustraremos com alguns exemplos.

Na Seção 3.4, serão apresentados métodos para o cálculo do fluxo lento na variedade crítica C_0 . Também por meio de exemplos, na Seção 3.5 serão discutidos os casos mais genéricos em que a hiperbolicidade normal falha localmente para certas singularidades.

Todo o conteúdo aqui apresentado pode ser encontrado pelo leitor em [16].

3.1 Sistemas Slow-Fast

Vamos iniciar estudando equações diferenciais ordinárias (EDO's) nas quais algumas variáveis possuem derivadas de magnitude muito maior do que a de outras variáveis. Essa configuração nos remete a um sistema com diferentes escalas de tempo. O caso mais simples é dado por uma separação que divide as variáveis em dois grupos.

Definição 3.1. Um **campo de vetores slow-fast** (ou um sistema (m, n) -slow-fast) é um sistema de equações diferenciais da forma

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \dot{y} = g(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $0 < \varepsilon \ll 1$.

A variável x é chamada de variável rápida, enquanto que a variável y é chamada variável lenta. Fazendo $t = \tau/\varepsilon$ o sistema 3.1 é equivalente a

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x' = f(x, y, \varepsilon) \\ \frac{dy}{dt} &= y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Nos referimos a t como escala de tempo rápida (ou tempo rápido) e a τ como escala de tempo lenta (ou tempo lento).

O parâmetro ε pode ser pensado como a “separação” das escalas de tempo e é às vezes chamado de parâmetro tempo-escala. Neste contexto, se a notação “ $0 < \varepsilon \ll 1$ ” segue uma equação, estamos interessados somente no caso em que ε é muito pequeno e positivo. Se aparece em uma afirmação ou teorema significa “suficientemente pequeno”, isto é, que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, a afirmação é válida.

Em muitas situações as aplicações f e g não dependem de ε e, neste caso, omitimos o parâmetro na notação.

Observação 3.2. Na literatura a notação para sistemas slow-fast não é uniforme; pode-se encontrar a variável x como variável lenta e as variável y como rápida, bem como aparecer diferenças quanto às escalas de tempo.

A notação adotada aqui fica clara ao se trabalhar com sistemas slow-fast nos quais se escolhermos uma condição aleatória, então o primeiro movimento da trajetória é “geralmente” rápido e, eventualmente, a trajetória se move lentamente.

Veremos agora alguns exemplos simples de equações parametrizadas por sistemas slow-fast.

3.1.1 Equação de Van der Pol

Um dos clássicos exemplos de equações estudadas em dinâmica não linear é a equação de Van der Pol. Balthasar Van der Pol é conhecido por ser um dos pioneiros no campo da rádio e comunicações. A equação dada pela EDO de segunda ordem

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0 \quad (3.3)$$

em que $\mu \gg 1$ foi usada para estudar um circuito em um tubo de vácuo, no qual observou-se que as órbitas periódicas eram modeladas pela equação 3.3.

Façamos a conversão da equação 3.3 em um sistema slow-fast. Primeiramente, consideremos $t = \mu\tau$. Assim, $x' = \dot{x}/\mu$ e $x'' = \ddot{x}/\mu^2$. Além disso, defina $y = \dot{x}/\mu^2 + x^3/3 - x$, logo,

$$\dot{y} = \ddot{x}/\mu^2 + x^2\dot{x} - \dot{x} = x'' + x^2\mu x' - \mu x' = -x.$$

Assim, podemos reescrever a equação 3.3 obtendo o sistema slow-fast a seguir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2}\dot{x} &= y - \frac{x^3}{3} + x \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Em 3.4, fazendo $\varepsilon = 1/\mu^2$ obtemos o sistema slow-fast com dimensões $(m, n) = (1, 1)$

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y), \end{aligned}$$

em que $f(x, y) = y - x^3/3 + x$ e $g(x, y) = -x$.

Pode também ser interessante considerar a seguinte variação da equação de Van der Pol, na qual acrescentamos um termo forçante $a > 0$:

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = a \quad (3.5)$$

Analogamente ao que foi feito anteriormente, podemos reescrever a equação 3.5 e obter o sistema slow-fast

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - x^3/3 + x \\ \dot{y} &= a - x.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Pode-se ainda considerar um termo forçante periódico, isto é, considerar o caso em que o termo forçante aparece com certa amplitude $a > 0$ e frequência v :

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = a \sin(2\pi vt).\tag{3.7}$$

A equação 3.7 pode ser convertida no seguinte sistema slow-fast

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - x^3/3 + x \\ \dot{y} &= a \sin(2\pi v \mu \tau) - x.\end{aligned}$$

Definindo $w = \mu v$ e $\theta = w\tau$ obtemos o sistema (1,2)-slow-fast

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - x^3/3 + x \\ \dot{y} &= a \sin(2\pi \theta) - x \\ \dot{\theta} &= w\end{aligned}\tag{3.8}$$

onde $\dot{\theta} = d\theta/d\tau$.

3.1.2 Equação de FitzHugh-Nagumo

A equação que apresentaremos agora é uma simplificação do conhecido modelo de Hodgkin-Huxley para o potencial elétrico de um axônio (prolongamento de célula) nervoso.

A primeira versão é devida à FitzHugh e dada pelo seguinte sistema (1,1)-slow-fast, que pode ser visto como uma generalização da equação de Van der Pol 3.3,

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u} &= w - u^3/3 + u + q_1 \\ \dot{w} &= -1/q_2(w + q_3u - q_4),\end{aligned}\tag{3.9}$$

em que $(u, w) \in \mathbb{R}^2$ são variáveis do espaço de fase e $q_i, i = 1, 2, 3, 4$ são parâmetros.

Posteriormente, Nagumo e seus colaboradores adicionaram um termo de difusão I à equação de FitzHugh e consideraram as seguintes equações parciais

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial u}{\partial x^2} + f(u) - w + I \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} &= \varepsilon(u - \gamma w),\end{aligned}\tag{3.10}$$

em que $f(u) = u(u - a)(1 - u)$, I, a e γ são parâmetros.

Consideremos uma solução de onda viajante para 3.10 e sejam $u(x, \tau) = u(x + s\tau) := u(t)$ e $w(x, \tau) = w(x + s\tau) := w(t)$, onde s representa a velocidade da onda. Da Regra da Cadeia obtemos $u_\tau = su'$, $u_{xx} = u''$ e $w_\tau = sw'$. Definindo $v = u'$ e substituindo na equação 3.10, obtemos a seguinte parametrização na escala de tempo rápido

$$\begin{aligned}u' &= v \\ v' &= sv - u(u - a)(1 - u) + w - I \\ w' &= \varepsilon/s(u - \gamma w).\end{aligned}\tag{3.11}$$

Mudando do tempo rápido t para o tempo lento τ ($t = \tau/\varepsilon$) e renomeando as variáveis $x_1 = u$, $x_2 = v$ e $y = w$, obtemos o sistema (2, 1)-slow-fast

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}_1 &= x_2 \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= sx_2(x_1 - a)(1 - x_1) + y - I \\ \dot{y} &= 1/s(x_1 - \gamma y).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Muitas vezes todas as equações mencionadas acima são referidas como equações de FithHugh-Nagumo.

3.2 Terminologia: Sistemas Slow-Fast

Nesta seção consideraremos o caso $\varepsilon = 0$ e analisaremos os sistemas obtidos em cada caso, considerando os tempos rápido e lento.

Definição 3.3. A equação diferencial algébrica obtida colocando $\varepsilon = 0$ na formulação da escala de tempo lenta 3.1 é chamada de **subsistema lento ou campo de vetores lento**

$$\begin{aligned}0 &= f(x, y, 0) \\ \dot{y} &= g(x, y, 0).\end{aligned}\tag{3.13}$$

O fluxo gerado por 3.13 é chamado de **fluxo lento**.

O subsistema lento é também conhecido como **problema reduzido** e seu fluxo por **fluxo reduzido**.

Definição 3.4. A parametrização do sistema de EDO's obtida colocando $\varepsilon = 0$ na formulação da escala de tempo rápida 3.2 é chamada **subsistema rápido ou campo de vetores rápido**

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, 0) \\ y' &= 0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

O fluxo gerado por 3.14 é chamado **fluxo rápido**.

O conjunto de equações 3.14 é também conhecido como **equações/problema de camada**. Essa terminologia nos remete a ideia geométrica de que cada y fixado descreve uma “camada” do subsistema rápido.

Observação 3.5. A fim de distinguir os sistemas 3.13 e 3.14 das equações originais 3.1 e 3.2, respectivamente, passaremos a nos referir a estas como sistemas completos.

Definição 3.6. O caso $\varepsilon = 0$, nos sistemas 3.13 e 3.14 anteriores, é chamado de **limite singular**.

Definição 3.7. Chamamos o conjunto

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : f(x, y, 0) = 0\}$$

de **conjunto crítico**. Se C_0 é uma subvariedade de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ nos referimos a C_0 como **variedade crítica**.

Estabeleceremos agora a relação entre pontos em C_0 e pontos de equilíbrio do fluxo rápido.

Proposição 3.8. *Os pontos de equilíbrio do fluxo rápido estão em uma correspondência biunívoca com os pontos em C_0 .*

Demonstração. Fixemos y_0 .

Seja x_0 um ponto de equilíbrio do fluxo rápido $x' = f(x, y_0, 0)$. Então, $f(x_0, y_0, 0) = 0$ e, portanto, $(x_0, y_0) \in C_0$.

Se x_0 é tal que $(x_0, y_0) \in C_0$, então $f(x_0, y_0, 0) = 0$ e, portanto x_0 é um ponto de equilíbrio do fluxo rápido $x' = f(x, y_0, 0)$. $\square$

O seguinte exemplo exemplifica as definições anteriores.

Exemplo 3.9. Consideremos a equação de Van de Pol dada na escala de tempo lenta por

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= y - x^3/3 + x \\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Fazendo $\varepsilon = 0$, encontramos a variedade crítica $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3/3 - x\}$ desta formulação. Veja a Figura 3.1.

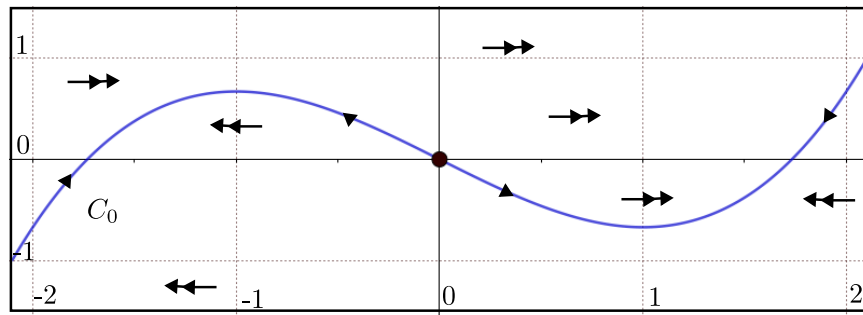


Figura 3.1: Variedade crítica C_0 (em azul) para a Equação de Van der Pol 3.15.

O fluxo lento $\dot{y} = -x$ é restrito a C_0 , o sinal de x nos fornece a direção do fluxo. Já os subsistemas rápidos são organizados como “camadas horizontais” parametrizadas por diferentes valores de y pelo sistema

$$\begin{aligned}x' &= y - x^3 + x \\ y' &= 0.\end{aligned}\tag{3.16}$$

A Figura 3.1 descreve esse comportamento. O fluxo lento é representado por setas simples, enquanto que o fluxo rápido é representado por setas duplas.

3.3 Teoria Geométrica de Perturbação Singular

Em seguida discutiremos brevemente sobre os principais elementos, definições e resultados acerca da teoria de variedades invariantes normalmente hiperbólicas para sistemas slow-fast.

Esta seção tem por objetivo somente apresentar ao leitor o resultado do Teorema de Fenichel, que introduzirá o conceito de “variedade lenta”, o qual estaremos interessados em calcular nos exemplos aqui apresentados.

Iniciemos recordando a formulação geral de um sistema (m, n) -slow-fast

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, y, \varepsilon) \\ \dot{y} &= g(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{3.17}$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $0 < \varepsilon \ll 1$ e $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções suficientemente suaves. O sistema 3.17 pode ser reescrito considerando a escala de tempo rápido $t = \tau/\varepsilon$ como

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, \varepsilon) \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Recordemos também algumas definições vista na Seção 3.2.

O subsistema lento é obtido considerando $\varepsilon = 0$ em 3.17,

$$\begin{aligned}0 &= f(x, y, 0) \\ \dot{y} &= g(x, y, 0),\end{aligned}\tag{3.19}$$

de modo que, o fluxo definido por 3.19 é chamado de fluxo lento e está restrito à variedade crítica

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} : f(x, y, 0) = 0\}$$

Da proposição 3.8 temos que pontos na variedade crítica são pontos de equilíbrio do subsistema rápido

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, 0) \\ y' &= 0\end{aligned}\tag{3.20}$$

Definição 3.10. Um subconjunto $S \subset C_0$ é chamado **normalmente hiperbólico** se a matriz quadrada $(D_x f)(p, 0)$, de ordem $m \times m$, das derivadas parciais de primeira ordem em relação às variáveis rápidas não possui autovalores com parte real nula, para todo $p \in S$.

Proposição 3.11. Um subconjunto $S \subset C_0$ é normalmente hiperbólico se, e somente se, para cada $p = (x^*, y^*) \in S$, temos que x^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $x' = f(x, y^*, 0)$.

Demonstração. Seja $S \subset C_0$ normalmente hiperbólico e $p = (x^*, y^*) \in S$. Como $p \in S \subset C_0$, da proposição 3.8 temos que p é um ponto de equilíbrio do fluxo rápido $x' = f(x, y^*, 0)$.

Ainda, como S é normalmente hiperbólico, $(D_x f)(p, 0)$ não possui autovalores com parte real nula. Logo, p é um ponto de equilíbrio hiperbólico.

Reciprocamente, seja $p = (x^*, y^*) \in S$ tal que x^* é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $x' = f(x, y^*, 0)$. Logo, $(D_x f)(p, 0)$ não possui autovalores com parte real nula.

Da arbitrariedade de $p \in S$, segue que S é normalmente hiperbólico. $\square$

A próxima definição nos fornece informações sobre a estabilidade de um ponto normalmente hiperbólico.

Definição 3.12. Um subconjunto $S \subset C_0$ normalmente hiperbólico é chamado **atrator** se todos os autovalores de $(D_x f)(p, 0)$ possuem parte real negativa, para todo $p \in S$. Analogamente, S é chamado **repulsor** se todos os autovalores de $(D_x f)(p, 0)$ possuem parte real positiva. Se S é normalmente hiperbólico e não atrai e nem repele, então S é do tipo “**sela**”.

Antes de enunciar o nosso próximo resultado, precisaremos da noção de distância de Hausdorff entre dois conjuntos não vazios $V, W \subset \mathbb{R}^{m+n}$ definida por

$$d_H(V, W) := \max \left\{ \sup_{v \in V} \inf_{w \in W} \|v - w\|, \sup_{w \in W} \inf_{v \in V} \|v - w\| \right\}.$$

Recordemos também brevemente alguns conceitos vistos em análise assintótica. Sejam $\mathcal{D}$ um domínio no $\mathbb{R}^n$ e $v, w : \mathcal{D} \times (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$ funções para ε_0 suficientemente pequeno.

Definição 3.13. A ordem de $v(x, \varepsilon)$ não é inferior a de $w(x, \varepsilon)$ em um ponto $x = x_0 \in \mathcal{D}$ se para ε tendendo a 0, existem funções positivas $k(x)$ e $\varepsilon(x)$ tais que

$$|v(x_0, \varepsilon)| < k(x_0)|w(x_0, \varepsilon)|, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon(x_0) \ll \varepsilon_0.$$

Essa relação é denotada pela notação “**O-grande**” de Landau $v(x_0, \varepsilon) = \mathcal{O}(w(x_0, \varepsilon))$,

Definição 3.14. A ordem de $v(x, \varepsilon)$ é superior a de $w(x, \varepsilon)$ num ponto $x = x_0 \in \mathcal{D}$ se para cada ε tendendo a 0 e para todo $k > 0$, existe uma função positiva $\varepsilon_k(x)$ tal que

$$|v(x_0, \varepsilon)| < k|w(x_0, \varepsilon)|, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_k(x_0) \ll \varepsilon_0.$$

Essa relação é denotada pela notação “**o-pequeno**” de Landau $v(x_0, \varepsilon) = o(w(x_0, \varepsilon))$.

Teorema 3.15. Teorema de Fenichel: *Suponha que $S = S_0$ é uma subvariedade compacta normalmente hiperbólica (possivelmente limitada) da variedade crítica C_0 do sistema slow-fast 3.17 e, que $f, g \in C^r(r < \infty)$. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, as seguintes afirmações são válidas:*

- (F1) : *Existe uma variedade localmente invariante S_ε difeomorfa à S_0 ;*
- (F2) : $d_H(S_\varepsilon, S_0) = \mathcal{O}(\varepsilon)$;
- (F3) : *O fluxo em S_ε converge para o fluxo lento quando $\varepsilon \rightarrow 0$;*
- (F4) : S_ε é C^r suave;
- (F5) : S_ε é normalmente hiperbólica e possui as mesmas propriedades de estabilidade que as variáveis rápidas em S_0 ;
- (F6) : *Em geral, S_ε não é única. Em regiões que permanecem a uma distância fixa de ∂S_ε , quaisquer variedades satisfazendo (F1) – (F5) estão a uma distância de Hausdorff $\mathcal{O}(e^{-K/\varepsilon})$ umas das outras para algum $K > 0$, $K = \mathcal{O}(1)$.*

Definição 3.16. A variedade S_ε obtida na conclusão do Teorema de Fenichel é chamada **variedade lenta**.

Observação 3.17. Na literatura, não há uniformidade de notação para as variedades críticas C e lenta S . Recomendamos ao leitor que se atente a esta notação. Neste texto passaremos a nos referir “a” variedade lenta S_ε por C_ε .

Ressaltamos que é importante distinguir sempre entre a variedade crítica, obtida no limite singular $\varepsilon = 0$, e a variedade lenta, obtida no Teorema de Fenichel para $\varepsilon > 0$.

Os exemplos a seguir ilustram algumas das propriedades do Teorema de Fenichel 3.15.

Exemplo 3.18. Considere o sistema (1, 1)-slow-fast

$$\begin{aligned} x' &= y^2 - x \\ y' &= -\varepsilon y. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Nosso objetivo é encontrar a variedade lenta C_ε . A variedade crítica C_0 (Figura 3.2) é dada por

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}.$$

Observe que C_0 é normalmente hiperbólica e atratora, já que,

$$(D_x f)(p, 0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x) \right] = -1 < 0.$$

A solução explícita de 3.21 é dada por (o leitor pode facilmente verificar a expressão por diferenciação)

$$(x(t), y(t)) = \left(\left[x(0) - \frac{y(0)^2}{1 - 2\varepsilon} \right] e^{-t} + \frac{y(0)^2}{1 - 2\varepsilon} e^{-2\varepsilon t}, y(0) e^{-\varepsilon t} \right). \quad (3.22)$$

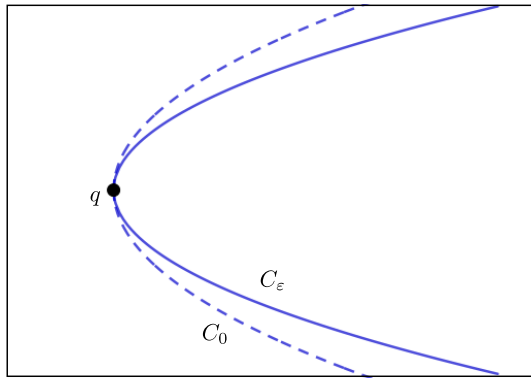


Figura 3.2: Retrato de fase da Equação 3.21: Variedade crítica C_0 (curva azul pontilhada), variedade lenta C_ε (curva azul, $\varepsilon = 0.1$) e ponto de equilíbrio $q = (0, 0)$.

Se $x(0) = \frac{y(0)^2}{1 - 2\varepsilon}$, então a solução 3.22 envolve somente a escala de tempo lento $\tau = \varepsilon t$

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{y(0)^2}{1 - 2\varepsilon} e^{-2\varepsilon t}, y(0) e^{-\varepsilon t} \right).$$

Em particular, para $t \geq 0$, observamos que

$$x(t) = \frac{y(t)^2}{1 - 2\varepsilon}.$$

Assim, a variedade lenta C_ε (Figura 3.2) é dada por

$$C_\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{y^2}{1 - 2\varepsilon} \right\}.$$

O próximo exemplo ilustra várias das propriedades do Teorema de Fenichel 3.15.

Exemplo 3.19. Considere o seguinte sistema (1, 1)-slow-fast

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y - x \\ \dot{y} &= 1, \end{aligned} \quad (3.23)$$

que tem por variedade crítica o conjunto

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}.$$

A solução explícita de 3.23 é dada por

$$(x(\tau), y(\tau)) = (y(0) + \tau - \varepsilon + (x(0) - y(0) + \varepsilon)e^{\tau/\varepsilon}, y(0) + \tau).$$

Observe que $x(0) - y(0) + \varepsilon = 0$ implica que $x(\tau) - y(\tau) + \varepsilon = 0$ para qualquer tempo τ . Portanto, a curva

$$C_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + \varepsilon\}$$

é a variedade lenta do sistema 3.23, o que assegura a afirmação (F1) do Teorema de Fenichel.

Além disso, observe que, para $\varepsilon \neq 0$, $C_0 \neq C_\varepsilon$ e,

$$d_H(C_0, C_\varepsilon) = \max \left\{ \sup_{v \in C_0} \inf_{w \in C_\varepsilon} \|v - w\|, \sup_{w \in C_\varepsilon} \inf_{v \in C_0} \|v - w\| \right\} = \varepsilon,$$

ou seja, $d_H(C_0, C_\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon)$, como afirma a propriedade (F2) do Teorema de Fenichel.

Observe ainda que

$$\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{C_0} (y - x) = -1 = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{C_\varepsilon} (y - x + \varepsilon),$$

de modo que a estabilidade é preservada conforme a propriedade (F4).

A não unicidade da variedade crítica C_ε proveniente da propriedade (F6) do Teorema de Fenichel fica clara se considerarmos a situação em que

$$x(0) - y(0) + \varepsilon = e^{K/\varepsilon}$$

para algum valor de $K > 0$ fixo, de maneira que distintas variedades se encontram a uma distância de Hausdorff $\mathcal{O}(e^{-K/\varepsilon})$ umas das outras.

Nosso último exemplo desta seção ilustra a suavidade finita da propriedade (F4) do Teorema de Fenichel.

Exemplo 3.20. Considere o sistema (1, 1)-slow-fast

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -(x + y^{1/\varepsilon}) \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{3.24}$$

em uma pequena vizinhança fixada $\mathcal{N} = \{|x| < \delta, |y| < \delta\}$ de $(x, y) = (0, 0)$. Observe que, fixado $\delta \in (0, 1)$, temos que $y \in \mathcal{N}$ implica em

$$|y|^{1/\varepsilon} < \delta^{1/\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Assim, a variedade crítica de 3.24 é formalmente dada por

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathcal{N} : x = 0\}.$$

Para o sistema completo 3.24 temos que $y(\tau) = y(0)e^{-\tau}$, de modo que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{\varepsilon}(x + y(0)^{1/\varepsilon}e^{-\tau/\varepsilon}) \\ \Rightarrow x(\tau) &= x(0)e^{-\tau/\varepsilon} - y(0)^{1/\varepsilon} \frac{\tau}{\varepsilon} e^{-\tau/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Como, $-\tau = \ln(y(\tau)/y(0))$, podemos reescrever as curvas soluções por

$$\begin{aligned} x &= x(0) \left(\frac{y}{y(0)} \right)^{1/\varepsilon} + \frac{y^{1/\varepsilon}}{\varepsilon} \ln \left(\frac{y}{y(0)} \right), \text{ se } y(0) \neq 0 \\ y &= 0, \text{ se } y(0) = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Logo, o eixo x é uma variedade suave invariante ao longo da qual a dinâmica rápida $x(\tau) = x(0)e^{-\tau/\varepsilon} = x(0)e^{-t}$ ocorre.

Quaisquer variedades lentas C_ε , que existem pelo Teorema de Fenichel, próximas da origem são construídas a partir de duas curvas

$$x = x(0) \left(\frac{y}{y(0)} \right)^r + ry^r \ln \left(\frac{y}{y(0)} \right), \quad (3.26)$$

em que $r = 1/\varepsilon$, para dois valores diferentes de $y(0)$ com sinais opostos, já que essas são as únicas outras possíveis soluções de 3.25.

Observe agora que,

$$\frac{\partial^r}{\partial y^r} \left(y^r \ln \left(\frac{y}{y(0)} \right) \right) = r! \ln \left(\frac{y}{y(0)} \right) + \dots$$

de modo que a derivada de ordem r da curva 3.26 se torna ilimitada quando $y \rightarrow 0$. Portanto, C_ε deve ter suavidade finita.

3.4 O Fluxo Lento

Nosso objetivo nesta seção será obter uma expressão analítica para a fluxo lento na variedade crítica C_0 .

Definição 3.21. Considere a variedade crítica C_0 . Chamamos

$$C_{0,s} = \{p \in C_0 : (D_x f)(p, 0) \text{ é não invertível} \}$$

de **pontos singulares (slow-fast)** e de $C_{0,r} := C_0 - C_{0,s}$ os **pontos regulares (slow-fast)**.

Observação 3.22. O termo “slow-fast” é muitas vezes adicionado na definição acima para que se evite uma possível confusão com a definição usual da teoria de singularidades, em que usamos “ponto singular” como sinônimo de ponto de equilíbrio. Por exemplo, se considerarmos $f(x, y) = y^2 - x$ e $p = (0, 0)$ temos que $p \in C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ e $(D_x f)(p, 0) = f_x|_p = -1$. Logo, $(D_x f)(p, 0)$ é invertível e portanto, p é um ponto regular no sentido da definição anterior.

Exemplo 3.23. Observamos ainda que regularidade é um conceito mais fraco do que hiperbolicidade normal. Por exemplo, considere um ponto $p^* \in C_0$ tal que

$$(D_x f)(p^*, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que $(D_x f)(p^*, 0)$ é invertível e, então $p^* \in C_{0,r}$. Note ainda que a matriz $(D_x f)(p^*, 0)$ possui um par de autovalores complexos conjugados $\pm i$, de modo que C_0 não é normalmente hiperbólica em p^* .

Suponhamos agora que C_0 é uma variedade e seja $p \in C_0$ um ponto regular de acordo com a definição 3.21. Do Teorema da Função Implícita existe uma aplicação

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

que descreve C_0 , localmente próximo de p , como o gráfico dessa aplicação, e tal que $f(h(y), y, 0) = 0$ numa vizinhança de p .

A aplicação h pode ser usada para reduzir o subsistema lento

$$\begin{aligned} 0 &= f(x, y, 0) \\ \dot{y} &= g(x, y, 0) \end{aligned}$$

na forma mais simples

$$\dot{y} = g(h(y), y, 0).$$

As vezes, será mais conveniente usar somente algumas (ou todas) as variáveis rápidas para parametrizar o subsistema lento. Ilustremos esse cálculo com o exemplo a seguir.

Exemplo 3.24. Considere a equação de Van der Pol

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= y - x^3/3 + x \\ \dot{y} &= -x, \end{aligned} \tag{3.27}$$

que tem por variedade crítica o conjunto $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3/3 - x\}$. O limite singular $\varepsilon = 0$ em 3.27 nos fornece o subsistema lento

$$\begin{aligned} 0 &= y - x^3/3 + x \\ \dot{y} &= -x. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Diferenciando a equação $f(x, y) = y - x^3/3 + x = 0$ com respeito à τ obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} = (1 - x^2)\dot{x} + \dot{y} = 0.$$

Isolando $\dot{x}$ na expressão acima e usando 3.28 temos que

$$\dot{x} = \frac{-\dot{y}}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2}. \tag{3.29}$$

Assim, derivamos uma forma explícita para o fluxo lento na variedade crítica C_0 .

Observe que a EDO 3.29 possui um ponto de equilíbrio em $x = 0$ e não está definida nos pontos $x = \pm 1$.

Os pontos $x = \pm 1$ dividem a variedade crítica em três partes

$$\begin{aligned} C_0^{a-} &= C_0 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -1\}; \\ C_0^r &= C_0 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}; \\ C_0^{a+} &= C_0 \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1\}; \end{aligned}$$

onde $C_0^{a\pm}$ são regiões normalmente hiperbólicas atratoras e C_0^r é uma região normalmente hiperbólica e repulsora, já que,

$$D_x f|_{C_0} = -x^2 + 1$$

e

$$\begin{aligned} x > 1 \text{ ou } x < -1 &\Rightarrow -x^2 + 1 < 0; \\ -1 < x < 1 &\Rightarrow -x^2 + 1 > 0. \end{aligned}$$

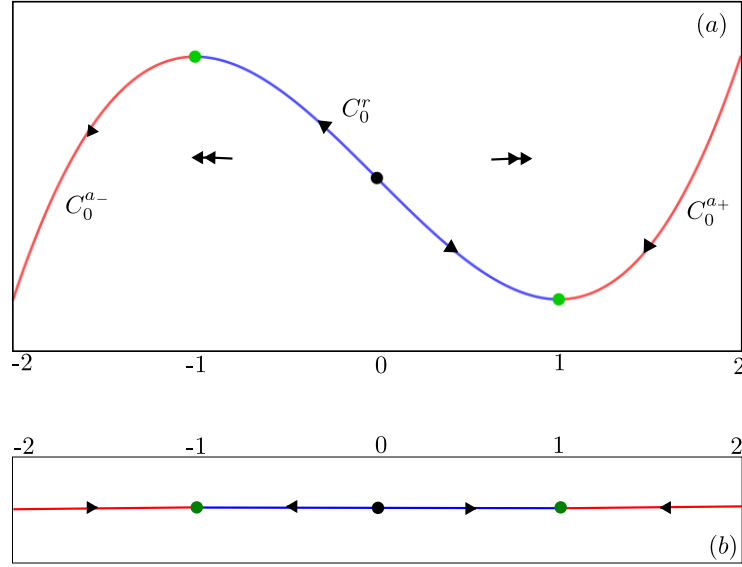


Figura 3.3: Representação do limite singular $\varepsilon = 0$ para a Equação 3.27. (a) Variedade crítica C_0 e suas subvariedades C_0^r (repulsora) e $C_0^{a\pm}$ (atratoras). A origem $(0,0)$ é um ponto de equilíbrio e existem dois pontos que não são normalmente hiperbólicos (em verde) em $(\pm 1, \mp 2/3)$. (b) Fluxo lento na variável x dado pela Equação 3.29.

Uma expressão para o fluxo lento pode também ser obtida diretamente pela seguinte proposição.

Proposição 3.25. *Assuma que a variedade crítica C_0 é uma variedade crítica suave e seja $p = (x_0, y_0) \in C_0 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e assumo que $(D_x f)(p, 0)$ tem posto máximo para $p \in C_{0,r}$. Então, existe uma vizinhança $V \subset C_0$ de p tal que o subsistema lento para $\varepsilon = 0$ em V é dado por*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(D_x f(q, 0))^{-1}(D_y f(q, 0))g(q, 0) \\ \dot{y} &= g(q, 0)\end{aligned}\tag{3.30}$$

para todo $q \in V$. Em uma notação resumida, escrevemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -(D_x f)^{-1}(D_y f)g \\ \dot{y} &= g.\end{aligned}$$

Demonstração. Seja $p = (x_0, y_0) \in C_{0,r}$, isto é, $(D_x f)(p, 0)$ é invertível.

Da continuidade da função determinante, podemos considerar uma vizinhança de p , $V \subset C_0$ tal que $(D_x f)(q, 0)$ é invertível para todo $q \in V$.

Diferenciando a equação $f(x, y, 0) = 0$ com relação à τ obtemos

$$\begin{aligned}(D_x f)\dot{x} + (D_y f)\dot{y} &= 0 \\ \Rightarrow (D_x f)\dot{x} + (D_y f)g &= 0 \\ \Rightarrow (D_x f)\dot{x} &= -(D_y f)g \\ \Rightarrow \dot{x} &= (D_x f)^{-1}(D_y f)g.\end{aligned}$$

Avaliando a última igualdade em $(q, 0)$, obtemos o sistema 3.30 c.q.d. □

3.5 Singularidades

Até o momento nos concentramos no caso em que a variedade crítica C_0 é normalmente hiperbólica ou, ao menos, constituída de pontos regulares. Grande parte da dinâmica em múltipla escala lida com a perda de regularidade e hiperbolicidade normal. Nesta seção, abordaremos uma visão geral de alguns casos em que isso pode ocorrer.

Suponhamos inicialmente que $p \in C_0$ seja uma ponto singular, ou seja, $p \in C_{0,s}$ tal que

$$(D_x f)(p, 0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (3.31)$$

não possui posto máximo.

Definição 3.26. Seja $p \in C_0$ de modo que vale $f(p, 0) = 0$; p é um **ponto de dobra** se

$$(D_x f)(p, 0) \text{ tem posto } m - 1.$$

Um ponto de dobra é chamado **não degenerado** se para vetores w e $v \in \mathbb{R}^>$, pertencentes ao núcleo à esquerda e à direita de $(D_x f)$, respectivamente, tem-se

$$w[(D_{xx} f)(p, 0)(v, v)] \neq 0 \text{ e } w[(D_y f)(p, 0)] \neq 0.$$

Observação 3.27. Recorde que um vetor v pertence ao núcleo à esquerda (à direita) de uma matriz A se $v \cdot A = 0$ ($A \cdot v = 0$).

A definição 3.26 é equivalente à:

Definição 3.28. A variedade crítica $C_0 = \{f(x, y) = 0\}$ possui um **ponto de dobra não degenerado** em $p = (x_0, y_0)$ se

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= 0; \\ f_{xx}(x_0, y_0) &\neq 0; \quad (\text{condição de não-degeneração}) \\ f_y(x_0, y_0) &\neq 0. \quad (\text{condição de transversalidade}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Exemplo 3.29. O exemplo mais simples para ilustrar a situação em 3.31 é dado pelo sistema $(1, 1)$ -slow-fast

$$\begin{aligned} x' &= y - x^2 \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.33)$$

A variedade crítica C_0 é a parábola

$$C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$

Consideremos a origem $(x, y) = (0, 0)$. Temos,

$$(D_x f)(0, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = -2x|_{x=0} = 0. \quad (3.34)$$

Portanto, $p = (0, 0) \in C_0$ não é um ponto regular e não é normalmente hiperbólico. Temos ainda que,

$$f_{xx}(0, 0, 0) = -2 \neq 0;$$

e

$$f_y(0, 0, 0) = 1 \neq 0.$$

Logo, $(x, y) = (0, 0)$ é um ponto de dobra não-degenerado.

O subsistema rápido de 3.33 é dado por

$$\begin{aligned} x' &= y - x^2 \\ y' &= 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Neste caso, $y \in \mathbb{R}$ pode ser visto como um parâmetro e 3.35 é a forma normal para uma bifurcação do tipo dobra (também conhecida como bifurcação de sela) em $y = 0$.

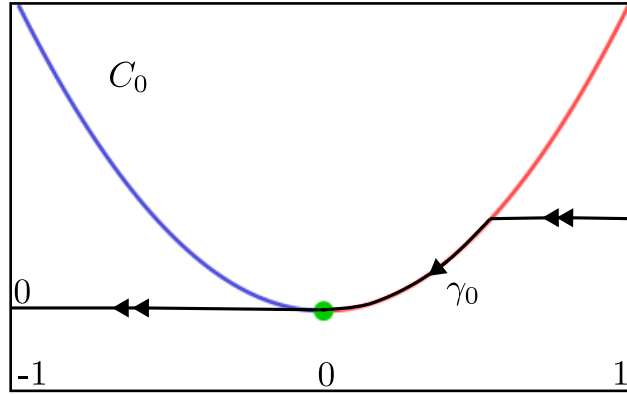


Figura 3.4: Ponto de dobra (em verde) na origem para a Equação 3.33 com $g(x, y, \varepsilon) = -1$ e γ_0 uma órbita candidata.

Ainda considerando o sistema da forma

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, \varepsilon) \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.36)$$

outro caso a se considerar é o de singularidades transcricas. Singularidades transcricas ocorrem quando dois ramos do conjunto crítico C_0 se cruzam transversalmente. Vejamos a definição formal.

Definição 3.30. O sistema 3.36 possui uma **singularidade transcrica não-degenerada** em $(x, y) = (0, 0)$ se as seguintes condições são satisfeitas

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 0; \\ f_x(0, 0, 0) &= 0; \\ f_y(0, 0, 0) &= 0; \\ f_{xx}(0, 0, 0) &\neq 0 \\ \det \begin{pmatrix} f_{xx}(0, 0, 0) & f_{xy}(0, 0, 0) \\ f_{xy}(0, 0, 0) & f_{yy}(0, 0, 0) \end{pmatrix} &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Exemplo 3.31. Considere o seguinte sistema $(1, 1)$ -slow-fast

$$\begin{aligned} x' &= x(y - x) \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.38)$$

O conjunto crítico $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ ou } y = x\}$ é uma variedade exceto pela origem. É fácil ver que C_0 não é uma variedade em 0 já que as duas retas $\{x = 0\}$ e

$\{y = x\}$ se cruzam na origem. Neste caso, temos que $(x, y) = (0, 0)$ é uma singularidade transcítica.

De fato,

$$\begin{aligned} f(0, 0, 0) &= 0; \\ f_x(0, 0, 0) &= y - 2x|_{x=y=0} = 0; \\ f_y(0, 0, 0) &= x|_{x=0} = 0; \\ f_{xx}(0, 0, 0) &= -2 \neq 0; \\ f_{xy}(0, 0, 0) &= 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx}(0, 0, 0) & f_{xy}(0, 0, 0) \\ f_{xy}(0, 0, 0) & f_{yy}(0, 0, 0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0.$$

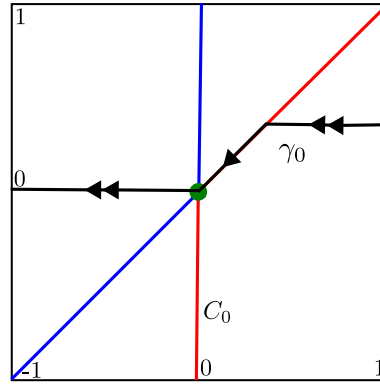


Figura 3.5: Ponto transcítico (em verde) na origem para a Equação 3.38 com $g(x, y, \varepsilon) = -1$ e γ_0 uma órbita candidata.

Exemplo 3.32. Considere o sistema (1, 2)-slow-fast

$$\begin{aligned} x' &= y_1 + y_2x - x^3 \\ y_1' &= \varepsilon g_1(x, y, \varepsilon) \\ y_2' &= \varepsilon g_2(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \tag{3.39}$$

O conjunto crítico $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = -y_2x + x^3\}$ é uma variedade, mas contém uma curva de pontos de dobra dada por

$$L = \{(x, y) \in C_0 : f_x = y_2 - 3x^2 = 0\}.$$

Veja a Figura 3.6. É fácil ver que os pontos de dobra são não-degenerados, exceto em $(x, y_1, y_2) = (0, 0, 0)$, que é um ponto de cúspide. De fato, para $p \in L$,

$$\begin{aligned} f_x(p) &= 0; \\ f_{xx}(p) &= -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Vejamoss ainda um último exemplo. Na teoria clássica, dizemos que, em uma equação diferencial, uma bifurcação de Hopf normalmente ocorre quando um par de autovalores complexos conjugados do fluxo linearizado em um ponto fixo torna-se puramente imaginário, isto é, cruza o eixo imaginário.

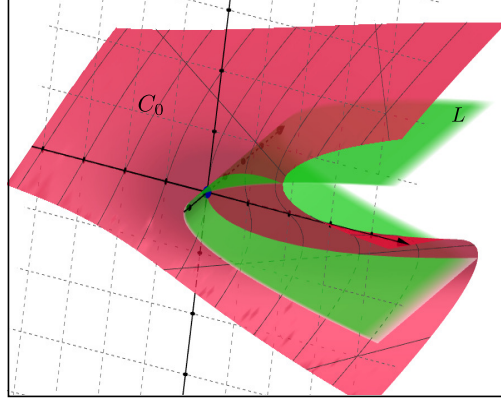


Figura 3.6: Superfície de cúspide do Exemplo 3.32 contendo uma curva de pontos de dobra L (em verde).

Exemplo 3.33. Considere o sistema $(2, 1)$ -slow-fast

$$\begin{aligned} x'_1 &= yx_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = f_1(x, y) \\ x'_2 &= x_1 + yx_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = f_2(x, y) \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $f := (f_1, f_2)$. A variedade crítica $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0 = x_2\}$ é simplesmente o eixo y . A linearização com respeito as variáveis rápidas é

$$\begin{aligned} (D_x f)|_{C_0} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{C_0} \\ &= \begin{pmatrix} y - 3x_1^2 - x_2^2|_{x_1=x_2=0} & -1 - 2x_1x_2|_{x_1=x_2=0} \\ 1 - 2x_1x_2|_{x_1=x_2=0} & y - x_1^2 - 3x_2^2|_{x_1=x_2=0} \end{pmatrix}_{C_0} \\ &= \begin{pmatrix} y & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

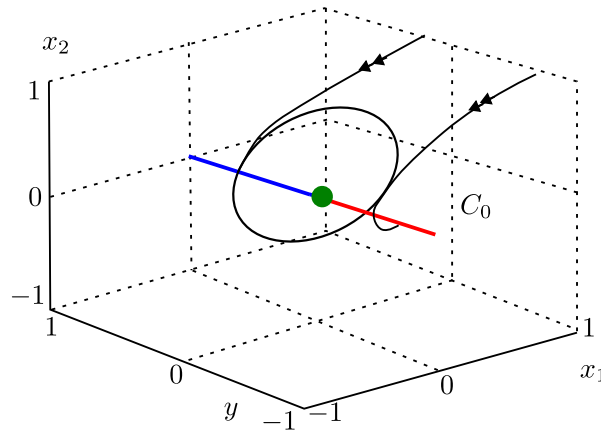


Figura 3.7: Bifurcação de Hopf do subsistema rápido da Equação 3.40 (ponto em verde).

Assim, $\det(D_x f)|_{C_0} = y^2 + 1 \neq 0$, de modo que C_0 consiste somente de pontos regulares. Observe também que $(D_x f)|_{C_0}$ possui um par de autovalores complexos conjugados $\pm i$

em $y = 0$, de modo que C_0 não é normalmente hiperbólico na origem. A origem, neste caso, é um ponto de bifurcação de Hopf do subsistema rápido

$$\begin{aligned}x'_1 &= yx_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = f_1(x, y) \\x'_2 &= x_1 + yx_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = f_2(x, y) \\y' &= 0\end{aligned}$$

Um fato importante sobre pontos singulares é que estes são pontos de transição natural do subsistema lento para o rápido, ou vice-versa.

Nas Figuras 3.4, 3.5 e 3.7, que ilustram os exemplos 3.29, 3.31 e 3.33, respectivamente, são exibidas trajetórias γ_0 , que são chamadas trajetórias candidatas (ou órbitas candidatas) e que foram obtidas como concatenação de trajetórias dos subsistemas rápido e/ou lento. A próxima definição torna esse conceito mais preciso.

Definição 3.34. Uma **trajetória candidata (ou órbita candidata)** é definida como uma imagem homeomorfa, $\gamma_0(t)$, a um intervalo real (a, b) , $a < b$, onde

- O intervalo é particionado como $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$;
- A imagem de cada subintervalo $\gamma_0(t_{j-1}, t_j)$ é uma trajetória, ou do subsistema rápido ou do subsistema lento;
- A imagem $\gamma_0(a, b)$ possui uma orientação que é consistente com as orientações em cada subintervalo $\gamma_0(t_{j-1}, t_j)$ induzidas pelos fluxos rápido e/ou lento.

Observação 3.35. Muitas vezes trajetórias candidatas são chamadas de trajetórias singulares. A terminologia “candidata” remete ao fato de que é a trajetória que queremos perturbar para $\varepsilon > 0$, enquanto que o termo “singular” remete a construção via concatenação de segmentos dos subsistemas rápido e/ou lento.

Neste capítulo ficou estabelecido os principais conceitos e resultados sobre sistemas slow-fast. Diversos exemplos ilustraram esses conceitos, bem como o resultado do Teorema de Fenichel para essa grande classe de equações diferenciais.

4 Teoria Geral de Fenichel

Neste capítulo será apresentada a prova da perturbação de variedades normalmente hiperbólicas devido à Fenichel.

Na Seção 4.1 discorreremos sobre a teoria básica sobre variedades invariantes. Também serão introduzidos os números generalizados de Lyapunov, que controlam o fluxo nas direções tangente e normal à variedade. Em seguida, na Seção 4.2 descreveremos o problema de perturbação para variedades invariantes e discutiremos sobre a principal estratégia a ser utilizada na demonstração do Teorema de Fenichel.

O conceito de hiperbolicidade normal será abordado na Seção 4.3. Nesta mesma seção, enunciaremos o Teorema de Fenichel e discorreremos brevemente sobre sua prova.

A Seção 4.4 nos fornece uma transição desta teoria para o caso de sistemas slow-fast, que faz referência à Seção 3.3 deste texto, enfatizando o caso normalmente hiperbólico para as variedades críticas e lentas.

Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [16]. Observamos ainda que será necessário o conhecimento acerca dos conceitos e resultados básicos sobre variedades suaves. O leitor que não estiver familiarizado com o assunto pode consultar o apêndice B no final deste texto.

4.1 Variedades Invariantes

Um dos pilares da abordagem geométrica no estudo do comportamento de sistemas com múltiplas escalas de tempo é a teoria de variedades invariantes. No apêndice B o leitor pode consultar as definições e resultados principais da teoria de variedades.

Iniciemos com um exemplo.

Exemplo 4.1. Considere a EDO linear em $\mathbb{R}^2$ com coeficientes constantes

$$\dot{z} = Az, \text{ com } A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}^2, \lambda_1 < 0 \text{ e } \lambda_2 > 0. \quad (4.1)$$

O sistema 4.1 possui um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo sela na origem. Uma solução para 4.1, dada uma condição inicial $z(0)$, é

$$z(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} z(0) := \Phi_t(z(0)).$$

Note que, se $z(0) = (a, 0)^T$, com $a \in \mathbb{R}^*$, o fluxo decai em direção à $(0, 0)$ para tempo positivo, enquanto que, se $z(0) = (0, a)^T$ com $a \in \mathbb{R}^*$, o fluxo decai para $(0, 0)$ para tempo negativo. Os espaços

$$E^s = \{z \in \mathbb{R}^2 : z_2 = 0\},$$

e

$$E^u = \{z \in \mathbb{R}^2 : z_1 = 0\},$$

são os subespaços estável e instável respectivamente do ponto de equilíbrio $(0, 0)$. Recorde que, da definição de subespaço estável e instável temos,

- $E^s = \{x \in \mathbb{R}^d : e^{At}x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\};$
- $E^u = \{x \in \mathbb{R}^d : e^{At}x \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty\}.$

Observe ainda que, os espaços E^s e E^u são invariantes pelo fluxo, isto é, $\Phi_t(E^s) \subset E^s$ e $\Phi_t(E^u) \subset E^u$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Agora, perturbando a equação 4.1 obtemos

$$\dot{z} = Az + Bz, \text{ com } A \text{ como em 4.1 e } B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4.2)$$

Para ε suficientemente pequeno, a análise anterior ainda se aplica e temos os espaços E^s e E^u também para o sistema perturbado.

Nos perguntamos então o quanto a observação do exemplo anterior pode ser generalizada. O próximo teorema generaliza a situação do exemplo 4.1, afirmando que, próximo de um ponto de equilíbrio hiperbólico, as variedades estável e instável não lineares são bem aproximadas pelos autoespaços estável e instável do sistema linearizado. A afirmação do teorema, bem como os conceitos nesta citados, pode ser vista pelo leitor também no apêndice A.

Teorema 4.2. *Considere a EDO*

$$\dot{z} = H(z), z \in \mathbb{R}^n, H \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), r \geq 1, \quad (4.3)$$

com z^* um ponto fixo hiperbólico para 4.3, isto é, o sistema linearizado

$$\dot{z} = [DH(z^*)]z,$$

possui a matriz $DH(z^*)$ com k autovalores com parte real negativa e $n - k$ autovalores com parte real positiva (não existe autovalor com parte real nula), correspondendo aos espaços E^s e E^u , respectivamente. Então, existe uma vizinhança U de z^* contendo as variedades estável e instável, $W_{loc}^s(z^*)$ e $W_{loc}^u(z^*)$, dadas por

$$W_{loc}^s(z^*) = \{z \in U : \Phi_t(z) \rightarrow z^*, t \rightarrow \infty \text{ e } \Phi_t(z) \in U, \forall t \geq 0\};$$

$$W_{loc}^u(z^*) = \{z \in U : \Phi_t(z) \rightarrow z^*, t \rightarrow -\infty \text{ e } \Phi_t(z) \in U, \forall t \leq 0\}.$$

Além disso, $W_{loc}^s(z^*)$ e $W_{loc}^u(z^*)$ são tangentes a E^s e E^u em z^* , isto é,

$$T_{z^*}(W_{loc}^s(z^*)) = E^s;$$

$$T_{z^*}(W_{loc}^u(z^*)) = E^u.$$

Demonstração. Ver [27, 25]. □

Queremos agora investigar o que ocorre com variedades invariantes para a EDO

$$\dot{z} = H(z), z \in \mathbb{R}^n, H \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), r \geq 1, \quad (4.4)$$

sob uma perturbação.

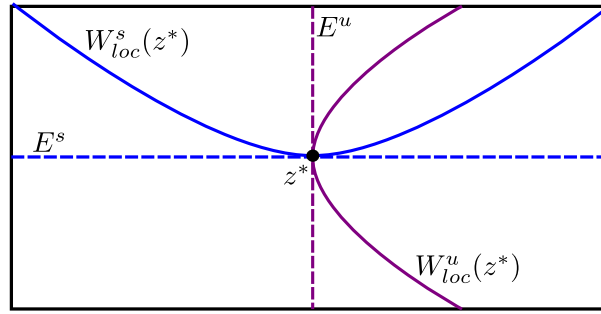


Figura 4.1: Interpretação geométrica do Teorema da Variedade Estável 4.2.

Definição 4.3. Seja M uma variedade com bordo, compacta e conexa, mergulhada em $\mathbb{R}^n$. Seja Φ_t o fluxo definido pelo campo de vetores em 4.4.

- M é chamada uma **variedade invariante “de entrada”** se para cada $p \in \partial M$, o campo de vetores aponta estritamente para dentro e para todo $p \in M$, $\Phi_t(p) \in M, \forall t \geq 0$;
- M é chamada uma **variedade invariante “de saída”** se para cada $p \in \partial M$, o campo de vetores aponta estritamente para fora e para todo $p \in M$, $\Phi_t(p) \in M, \forall t \leq 0$;
- M é chamada uma **variedade invariante** se para todo $p \in M$ temos $\Phi_t(p) \in M, \forall t \in \mathbb{R}$;
- M é chamada uma **variedade invariante local** se para cada $p \in M$ existe um intervalo de tempo $I_p = (t_1, t_2)$ tal que $0 \in I_p$ e $\Phi_t(p) \in M, \forall t \in I_p$.

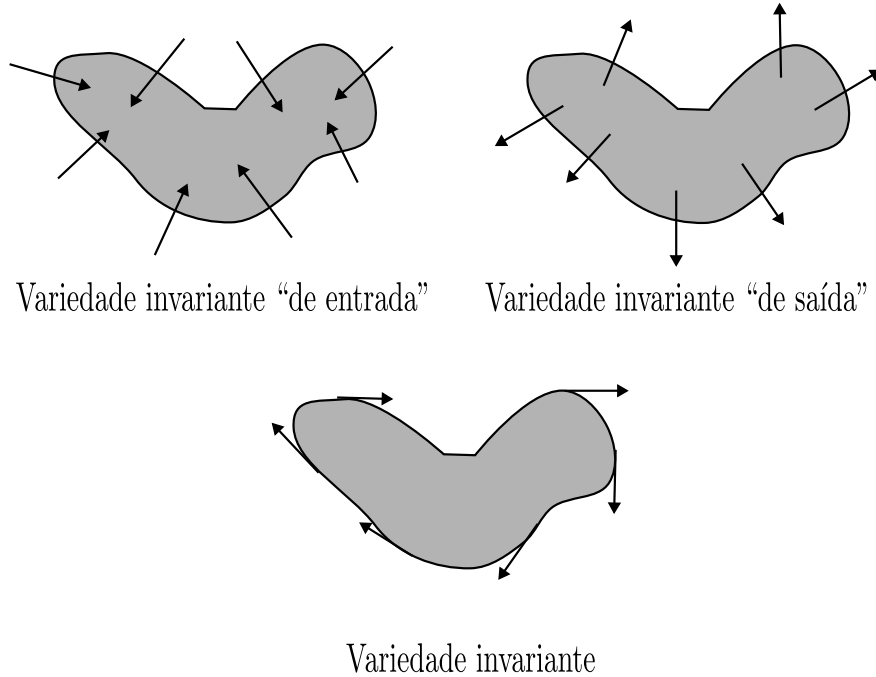


Figura 4.2: Variedade invariante “de entrada”, variedade invariante “de saída” e variedade invariante, respectivamente.

Observação 4.4. Invertendo a direção do tempo na definição anterior temos que uma variedade invariante “de entrada” se torna de “saída” e vice-versa. A partir deste momento, fixemos portanto M uma variedade invariante “de saída”, compacta e conexa, mergulhada em $\mathbb{R}^n$. Os resultados aqui apresentados valem analogamente para variedades invariantes “de entrada” somente invertendo a direção do tempo.

Antes da nossa próxima definição, consideremos a seguinte configuração.

Seja $p \in M$ um ponto arbitrário e consideremos os espaços tangente, $T_p M$, e normal, $\mathcal{N}_p$, à M em p . Recorde que, geometricamente, o espaço tangente $T_p M$ pode ser visto como a coleção de todos os vetores tangentes em p às curvas M que passam por p , e que

$$\mathcal{N}_p = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp T_p M\}.$$

Uma vez que $M \subset \mathbb{R}^n$, o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$ induz a seguinte divisão

$$\mathbb{R}^n \approx T_p \mathbb{R}^n = T_p M \oplus \mathcal{N}_p.$$

Consideremos também os fibrados tangente e normal de M . O fibrado tangente de M ,

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

reúne todos os espaços tangentes, isto é, os elementos de TM são pares (p, v) consistindo de um ponto $p \in M$ e de um vetor v em seu respectivo espaço tangente $T_p M$. Analogamente, para o fibrado normal temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \mathcal{N}_p \\ &= \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \in \mathcal{N}_p\}. \end{aligned}$$

Novamente, os fibrados tangente e normal induzem a divisão

$$T\mathbb{R}^n|_M = TM \oplus \mathcal{N}.$$

O leitor encontra maiores detalhes e informações sobre os fibrados vetoriais no apêndice B. A seguir, definiremos brevemente mais alguns conceitos que aparecerão no decorrer dessa construção. Generalizando, um fibrado vetorial é uma variedade que possui associado em cada ponto um espaço vetorial. Em particular, os espaços $\mathcal{N}_p$, que compõem o fibrado normal $\mathcal{N}$, são chamados de fibras. A mesma nomenclatura se aplica aos espaços $T_p M$ e TM . O ponto p é, também em ambos os casos, chamado de ponto de base.

Uma seção u do fibrado normal $\mathcal{N}$ é uma aplicação que leva pontos de M em pontos de $\mathcal{N}$, isto é,

$$\begin{aligned} u : M &\rightarrow \mathcal{N} \\ p &\mapsto (p, v), \end{aligned}$$

onde $v \in \mathcal{N}_p$. A seção nula é a que associa a cada ponto $p \in M$ o vetor nulo e é claramente identificada com M , isto é, $M \times \{0\} = M$.

Por último, consideremos ainda a aplicação projeção $\Pi : T\mathbb{R}^n|_M \rightarrow \mathcal{N}$, que projeta um vetor sobre a componente normal a M fixado um ponto de base p .

Para comparar os fluxos nas direções tangente e normal, fixado um ponto de base p , precisaremos das seguintes aplicações:

$$A_t(p) = D\Phi_{-t}(p)|_M : T_p M \rightarrow T_{\Phi_{-t}(p)} M;$$

$$B_t(p) = \Pi \circ D\Phi_t(\Phi_{-t}(p))|_M : \mathcal{N}_{\Phi_{-t}(p)} \rightarrow \mathcal{N}.$$

A aplicação A_t fornece a linearização do fluxo na direção tangencial, enquanto que B_t fornece a linearização do fluxo na direção normal. Fixemos a seguinte notação para vetores não nulos:

$$w_0 \in \mathcal{N}_p \text{ e } v_0 \in T_p M$$

Os vetores correspondentes dados pela linearização do fluxo são denotados por

$$w_{-t} = (\Pi \circ D\Phi_{-t}(p))w_0 \text{ e } v_{-t} = D\Phi_{-t}(p)v_0$$

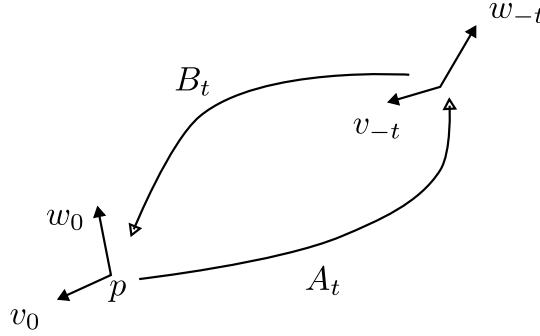


Figura 4.3: Configuração da dinâmica linearizada próxima da variedade M .

Dizemos que M é estável sobre a dinâmica linearizada se vale o seguinte limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\|w_{-t}\|} = 0,$$

para todo $p \in M$ e $w_0 \in \mathcal{N}_p$, o que, geometricamente, significa que na dinâmica linearizada os vetores normais a M “crescem” para tempo passado.

As propriedades de suavidade do fluxo próximo de M serão caracterizadas pela existência do seguinte limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|v_{-t}\|}{\|w_{-t}\|^b} = 0,$$

para todo $p \in M$, $w_0 \in \mathcal{N}_p$ e $v_0 \in T_p M$.

Para $b = 1$, geometricamente, isso significa que as vizinhanças dos pontos na órbita passada “achatam” sob a dinâmica linearizada, para $b < 1$ esse “achatamento” é mais rápido.

Definição 4.5. Seja $p \in M$. Os **números generalizados do tipo Lyapunov** são definidos por

$$\nu(p) = \inf \left\{ a; \frac{1}{\|w_{-t}\|a^t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \forall w_0 \in \mathcal{N}_p \right\} \quad (4.5)$$

e, se $\nu(p) < 1$,

$$\sigma(p) = \inf \left\{ b; \frac{\|v_{-t}\|}{\|w_{-t}\|^b} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \forall w_0 \in \mathcal{N}_p, \forall v_0 \in T_p M \right\}. \quad (4.6)$$

Lema 4.6. *Temos,*

$$\nu(p) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|B_t(p)\|^{1/t},$$

e se, $\nu(p) < 1$,

$$\sigma(p) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|A_t(p)\|}{-\log \|B_t(p)\|}.$$

Demonstração. Ver [31]. □

Exemplo 4.7. Considere a EDO linear dada por

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} z, z \in \mathbb{R}^2, \lambda, \mu > 0; \quad (4.7)$$

e seja $M = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2; z_1 \in (-1, 1) \text{ e } z_2 = 0\}$.

Temos que M é uma variedade invariante “de saída” que induz a divisão

$$T\mathbb{R}^2|_M = TM \oplus \mathcal{N},$$

onde os fibrados tangente e normal de M são dados, respectivamente, por

$$TM = \{(z_1, 0) \times (\mathbb{R}, 0) : z_1 \in (-1, 1)\},$$

e

$$\mathcal{N} = \{(z_1, 0) \times (0, \mathbb{R}) : z_1 \in (-1, 1)\}.$$

Para calcular a linearização dos fluxos nas direções tangencial e normal, isto é A_t e B_t , precisamos do fluxo linearizado de 4.7 e da projeção Π sobre $\mathcal{N}$. Temos,

$$D\Phi_t = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \text{ e } \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E, isto fornece as expressões das dinâmicas tangencial e normal

$$A_t(p) = D\Phi_{-t}(p)|_M = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

e

$$B_t(p) = \Pi \circ D\Phi_t(\Phi_{-t}(p))|_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mu t} \end{pmatrix}.$$

Portanto, os números generalizados de Lyapunov são dados por

$$\nu(p) = \limsup_{t \rightarrow \infty} |e^{-\mu t}|^{1/t} = e^{-\mu} < 1,$$

e,

$$\sigma(p) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log |e^{\lambda t}|}{-\log |e^{-\mu t}|} = -\frac{\lambda}{\mu}.$$

O próximo resultado foi desenvolvido por Fenichel em [10] e pode ser visto com maiores detalhes em [31]. Também em [10], mostrou-se que os números $\nu(p)$ e $\sigma(p)$ independem da escolha do produto interno em $\mathbb{R}^n$ e, consequentemente, da divisão $T\mathbb{R}^n|_M = TM \oplus \mathcal{N}$.

Lema 4.8. *Os números generalizados de Lyapunov são constantes em órbitas sobre o fluxo Φ_t , isto é, $\nu(p) = \nu(\Phi_{-t}(p))$ e $\sigma(p) = \sigma(\Phi_{-t}(p))$.*

Demonstração. Ver [16]. □

Analiseemos novamente a expressão de $\nu(p)$. Temos,

$$\nu(p) = \inf \left\{ a : \frac{1}{\|w_{-t}\|a^t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \forall w_0 \in \mathcal{N}_p \right\}, \quad (4.8)$$

onde $w_0 = B_t(p)w_{-t}$. Como $\|w_0\|$ é uma constante, podemos reescrever 4.8 como

$$\begin{aligned} \nu(p) &= \inf \left\{ a : \left(\frac{\|B_t(p)w_{-t}\|}{\|w_{-t}\|} \right) / a^t \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \forall w_0 \in \mathcal{N}_p \right\} \\ &= \inf \left\{ a : \frac{\|B_t(p)\|}{a^t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Da equação 4.9 temos que uma vez conhecido o valor de $\nu(p)$ estabelece-se um limite no fluxo linearizado na direção normal. O mesmo raciocínio se aplica a $\sigma(p)$, usando uma combinação adequada das expressões de A_t e B_t .

O próximo resultado foi obtido em [26] com algumas modificações nas observações anteriores.

Lema 4.9. Lema de Uniformidade: *Suponha que para todo $p \in M$ e para algum $a > 0$, $\|B_t(p)\|a^t \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Então, existem constantes $\hat{a} < a$ e $k > 0$ tais que*

$$\|B_t(p)\| < k\hat{a}^t, \forall p \in M \text{ e } t \geq 0.$$

Se supormos ainda que $a \leq 1$ e $\|A_t(p)\| \cdot \|B_t(p)\|^b \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, para todo $p \in M$, então existem constantes $\hat{b} < b$ e $k > 0$ tais que

$$\|A_t(p)\| \cdot \|B_t(p)\|^{\hat{b}} < k, \text{ para todo } p \in M \text{ e } t \geq 0.$$

Demonstração. Ver [16, 31]. □

Corolário 4.10. *Se $\nu(p) < a \ll 1$, para todo $p \in M$, então $\|B_t(p)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, uniformemente, para cada $p \in M$.*

Demonstração. Ver [31]. □

Corolário 4.11. *Se $\nu(p) < a \ll 1$ e $\sigma(p) < b$, para cada $p \in M$, segue que $\|A_t(p)\| \cdot \|B_t(p)\|^b \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, uniformemente, para cada $p \in M$.*

Demonstração. Ver [31]. □

Corolário 4.12. $\nu(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$ atingem o supremo em M .

Demonstração. Ver [16, 31]. □

4.2 Perturbação de Variedades Invariantes

Com as estimativas obtidas na seção anterior para os fluxos tangenciais e normal, nosso objetivo agora é provar o resultado de perturbação singular devido à Fenichel para variedades invariantes.

Vejamos antes alguns conceitos necessários.

Definição 4.13. Sejam H e H^{pert} campos de vetores $\mathbb{C}^1$ em $\mathbb{R}^n$ e K um conjunto compacto. Dizemos que o campo H está $\mathcal{C}^1$ θ -próximo de H^{pert} , em K , se

$$\sup_{z \in K} \|H(z) - H^{\text{pert}}(z)\| \leq \theta,$$

e,

$$\sup_{z \in K} \|DH(z) - DH^{\text{pert}}(z)\| \leq \theta.$$

Nos referimos à H como o campo não perturbado e à H^{pert} como o campo de vetores perturbado.

A definição acima nos diz simplesmente que os campos de vetores perturbado e não-perturbado são $\mathcal{C}^1$ próximos na norma do supremo.

Podemos agora enunciar o Teorema de Fenichel para variedades invariantes “de saída”. O resultado do Teorema a seguir pode ser encontrado em [10, 14]

Teorema 4.14. *Considere a E.D.O. dada por*

$$\dot{z} = H(z), \quad H \in \mathcal{C}^r, z \in \mathbb{R}^n. \quad (4.10)$$

Seja M uma variedade $\mathcal{C}^r$, compacta e conexa, “de saída” sobre o fluxo ϕ_t definido por 4.10. Assuma que,

$$\nu(p) < 1 \text{ e } \sigma(p) < 1/r, \text{ para todo } p \in M. \quad (4.11)$$

Então, para todo campo de vetores $\mathcal{C}^r$, H^{pert} , que é $\mathcal{C}^1$ θ -próximo de H , com θ suficientemente pequeno, existe uma variedade M^{pert} que é invariante “de saída” sobre H^{pert} e $\mathcal{C}^r$ -difeomorfa à M .

Rigorosamente falando, se a dinâmica linearizada para uma variedade invariante M induz uma divisão em dinâmica normal rápida e tangencial lenta, podemos perturbar um pouco o sistema e obter uma variedade distorcida M^{pert} de M , como na Figura 4.4.

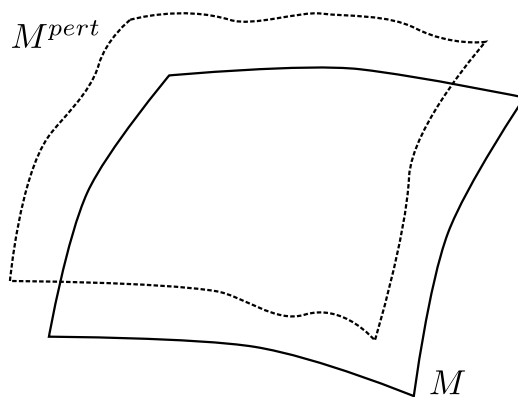


Figura 4.4: Perturbação da variedade M .

É importante ressaltar que assumiremos sempre a hipótese em 4.11.

Descreveremos brevemente a estratégia da prova do Teorema 4.14 nos seguintes passos:

1. Inicialmente, escolhemos um atlas adequado para M , isto é, escolhemos uma “boa” coleção de cartas locais, que são simplesmente aplicações de M no espaço euclidiano que parametrizam M localmente;

2. Obtemos então estimativas para os fluxos nas direções tangencial e normal;
3. Construção da aplicação “transformada gráfica” G ;
4. Obtenção de M^{pert} como um ponto fixo de G e;
5. Mostremos que M^{pert} assim obtida é de fato $\mathcal{C}^r$.

Não abordaremos aqui em detalhes toda a demonstração do Teorema, as etapas de 2. à 4. da construção anterior serão discutidas mantendo generalidade suficiente para mostrar como uma extensão da prova deste resultado pode ser obtida.

Para o passo 1., a fim de simplificar os cálculos das próximas etapas, vamos considerar que o atlas de M é formado por uma única carta, isto é, consideramos um aberto $U \subset M$ e a carta

$$\mu : U \rightarrow \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n-k},$$

onde $\mathcal{D}$ é o disco unitário centrado na origem e μ é um difeomorfismo. Suponhamos ainda que U tem dimensão $n - k$.

Das propriedades do fibrado normal, sabemos que $\mathcal{N}|_U$ possui uma base ortonormal $\mathcal{C}^{r-1}$; esse resultado pode ser visto, por exemplo, em [31]. Ainda, como M tem dimensão $n - k$, as fibras de $\mathcal{N}$ têm dimensão k .

Antes de enunciar nosso próximo resultado recordemos o seguinte fato. Dizemos que duas variedades M_1 e M_2 são transversais, ou se intersectam transversalmente, em $\mathbb{R}^n$ se os espaços tangentes, $T_p M_1$ e $T_p M_2$, geram $T_p \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$ para cada ponto $p \in M_1 \cap M_2$.

A proposição a seguir pode ser encontrada em [30, 31].

Proposição 4.15. *Existe um fibrado $\mathcal{C}^r$ k -dimensional $\mathcal{N}' \subset T\mathbb{R}^r|_M$ que é transversal à TM . Mais ainda, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existem bases ortonormais*

$$\{\tilde{e}_1(p), \dots, \tilde{e}_k(p)\} \text{ para } \mathcal{N}|_U \text{ e } \{\tilde{f}_1(p), \dots, \tilde{f}_k(p)\} \text{ para } \mathcal{N}'|_U,$$

tais que, $\|\tilde{e}_l(p) - \tilde{f}_l(p)\| < \varepsilon$ para $l \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Demonstração. Ver [30, 31]. □

Definição 4.16. O conjunto $\mathcal{N}'$ obtido na Proposição 4.15 é chamado de **fibrado transversal** e denotaremos seus elementos por pares (p, v) onde $p \in M$ e $v \in T\mathbb{R}^n$ é transversal a $T_p M$.

No entanto, queremos considerar apenas os elementos do fibrado transversal que estão em $\mathbb{R}^n$, o que pode ser feito através da aplicação

$$\begin{aligned} h : \mathcal{N}' &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\mapsto h(p, v) = p + v. \end{aligned}$$

Temos o seguinte resultado.

Proposição 4.17. *Seja $K \subset M$ um subconjunto compacto. Em uma vizinhança da seção nula de $\mathcal{N}'|_K$ a aplicação h é um difeomorfismo $\mathcal{C}^r$ sobre uma vizinhança de $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Ver [30]. □

Vejamos agora como construir um sistema de coordenadas locais em M . Considere o conjunto

$$\mathcal{N}'_\varepsilon = \{(p, v) \in \mathcal{N}' : \|v\| < \varepsilon\}.$$

Usando a aplicação h podemos enxergar $\mathcal{N}'$ como um subconjunto do $\mathbb{R}^n$. Escolhemos uma base ortonormal arbitrária de $\mathcal{N}'$ e definimos

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{N}'_\varepsilon &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (p, v) &\mapsto \tau(p, v) = \{\text{coordenadas de } v \text{ na base escolhida}\}. \end{aligned}$$

Como essa base é ortonormal e τ é linear temos $\|\tau(p, v)\| = \|v\|$.

Defina agora a aplicação

$$\begin{aligned} \mu \times \tau : \mathcal{N}'_\varepsilon &\rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k \\ (p, v) &\mapsto (\mu(p), \tau(p, v)) := (y, x). \end{aligned}$$

Usando o Teorema da Função Inversa mostra-se que $\mu \times \tau$ é um difeomorfismo $\mathcal{C}^r$. Assim, construímos um sistema de coordenadas locais em $\mathbb{R}^n$ para pontos em uma vizinhança de M . Uma vez que $(\mu \times \tau)^{-1}(y, 0) = (p, 0)$ temos que a segunda coordenada nula significa que o ponto está em M .

As principais estimativas para o fluxo dadas pelo passo 2. ficam determinadas pelos resultados que seguem.

Lema 4.18. *Seja $\Pi' : T\mathbb{R}^n|_M \rightarrow \mathcal{N}'$ a projeção sobre o fibrado transversal $\mathcal{N}'$. Defina $B'_t = \Pi' \circ D\Phi_t(\Phi_{-t}(p))$. Então, existe $T > 1$ tal que*

$$\|B'_T(p)\| < 1/4, \quad (4.12)$$

e

$$C^{2k+1} \|A_T(p)\|^k \|B'_T(p)\| < 1/4, \quad (4.13)$$

para todo $p \in U$, $0 \leq k \leq r$ e para alguma constante $C > 0$.

Demonstração. Ver [16]. □

Fixemos $T > 1$ dado pelo lema anterior. A estimativa na equação 4.12 mostra que o fluxo linearizado contrai vetores na direção transversal à M por um fator $1/4$. O próximo resultado assegura que, para uma vizinhança suficientemente pequena de M , podemos estender essa estimativa também para o fluxo não linear.

Lema 4.19. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos $\phi_t : \mathcal{N}'_\varepsilon \rightarrow \mathcal{N}'_{\varepsilon/3}$, isto é, o fluxo não linear contrai localmente por um fator de pelo menos $1/3$.*

Demonstração. Ver [16]. □

Nosso próximo passo é considerar todas as aplicações anteriores em coordenadas locais. Consideremos para isso as aplicações

$$g^0(y, x) = \mu \circ h^{-1} \circ \phi_T \circ h \circ (\mu \times \tau)^{-1}(y, x),$$

e

$$f^0(y, x) = \tau \circ h^{-1} \circ \phi_T \circ h \circ (\mu \times \tau)^{-1}(y, x).$$

Essas aplicações definem a aplicação tempo T do fluxo em coordenadas locais

$$(x, y) \mapsto (g^0(y, x), f^0(y, x)) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k.$$

Se denotarmos por D_1 a diferencial com respeito às $n - k$ primeiras variáveis e por D_2 a diferencial com respeito às k variáveis restantes, segue que, localmente, a aplicação A_t se expressa por $(D_1 g^0(x, 0))^{-1}$ e B_t por $D_2 f^0(x, 0)$.

A mesma construção pode ser considerada para o campo perturbado H^{pert} que é $\mathcal{C}^1$ θ -próximo de H , considerando

$$g^\theta(y, x) = \mu \circ h^{-1} \circ \phi_t^{\text{pert}} \circ h \circ (\mu \times \tau)^{-1}(y, x),$$

e,

$$h^\theta = \tau \circ h^{-1} \circ \phi_t^{\text{pert}} \circ h \circ (\mu \times \tau)^{-1}(y, x),$$

que definem a aplicação tempo T do fluxo perturbado em coordenadas locais

$$(y, x) \mapsto (g^\theta(y, x), f^\theta(y, x)) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k.$$

O resultado a seguir é uma versão do Lema de Uniformidade 4.9 em coordenadas locais.

Lema 4.20. *Seja $\eta > 0$ e suponha que H é $\mathcal{C}^1$ θ -próximo de H^{pert} . Assuma que θ e ε são suficientemente pequenos. Então,*

$$\|D_1 g^\theta(y, x)^{-1}\|^k \|D_2 f^\theta(y, x)\| < 1/2, \quad 0 \leq k \leq r; \quad (4.14)$$

$$\|f^\theta(y, x)\| < \varepsilon; \quad (4.15)$$

$$\|D_1 f^\theta(y, x)\| < \eta. \quad (4.16)$$

Aém disso, as normas de todas as diferenciais de $g^0, f^0, g^\theta, f^\theta$ e de $(g^\theta)^{-1}$ são limitadas em $(\mu \times \tau)(\mathcal{N}'_\varepsilon)$ por uma constante Q .

Demonstração. Ver [16]. □

Ficam assim estabelecidas as estimativas para a etapa 2.. Vamos agora passar à construção da aplicação G que chamaremos “transformada gráfica”. Denotemos por S o espaço de todas as seções de $\mathcal{N}'_\varepsilon|_U$. Assim, se $v \in S$, isso significa que, continuamente, cada ponto de $M|_U$ é atribuído a um vetor em $\mathcal{N}'_\varepsilon|_U$. Se considerarmos a seção v em coordenadas locais, estaremos olhando para sua representação local dada por

$$u := \tau \circ v \circ \mu^{-1} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

O conjunto gráfico de u é definido como

$$\text{graph}(u) = \{(y, x) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k : u(y) = x\}$$

No entanto, queremos nos restringir a um conjunto que nos seja mais conveniente. Considere então,

$$\text{Lip}(v) := \sup_{y, y' \in \mathcal{D}} \frac{\|u(y) - u(y')\|}{\|y - y'\|},$$

onde u é a representação da seção v em coordenadas locais. Definimos o conjunto

$$S_\delta := \{v \in S : \text{Lip}(v) \leq \delta\}. \quad (4.17)$$

O conjunto definido pela equação 4.17 destaca todas as seções de $\mathcal{N}'_\varepsilon$ que possuem uma expressão em coordenadas locais com constante de Lipschitz menor ou igual a δ . Em particular, se $v \in S_\delta$, então $\text{graph}(v)$ é uma variedade lipschitziana em $\mathbb{R}^n$.

Definição 4.21. Considere $v \in S_\delta$ com representação em coordenadas locais $u = \tau \circ v \circ \mu^{-1}$. O fluxo T de tempo perturbado ϕ_T^{pert} define uma aplicação no conjunto $\text{graph}(u)$ dada por

$$(y, u(y)) \mapsto (g^\theta(y, u(y)), f^\theta(y, u(y))) := (\xi, (G_u)(\xi)),$$

onde a função G_u é a representação em coordenadas locais de uma aplicação $G : S_\delta \rightarrow S$ chamada de **transformada gráfica**.

A transformada gráfica G nos fornece uma maneira de conectar o fluxo da equação perturbada com as variedades invariantes que são descritas como gráficos. De fato, desejamos obter a variedade invariante perturbada como um ponto fixo da aplicação G . Antes, nosso próximo resultado garante que G está bem definida.

Lema 4.22. *A aplicação de transformada gráfica G está bem definida, isto é, sua imagem consiste de seções em S .*

Demonstração. Uma ideia da demonstração pode ser vista em [16], enquanto que a prova completa pode ser encontrada pelo leitor em [31]. $\square$

O passo 4. consiste em obter a variedade perturbada M^{pert} como um ponto fixo de G . Escrevemos o gráfico de u como $u(y) = x$ e aplicamos G , o que nos fornece um novo gráfico

$$(G_u)(g^\theta(y, x)) = f^\theta(y, x) \text{ i.e. } (G_u)(g^\theta(y, u(y))) = f^\theta(y, u(y)),$$

de modo que um ponto fixo de G deva satisfazer

$$u(g^\theta(y, u(y))) = f^\theta(y, u(y)). \quad (4.18)$$

Pode-se pensar na equação 4.18 como uma condição que u tem que satisfazer para que $\text{graph}(u)$ permaneça invariante sobre o fluxo perturbado ϕ_T^{pert} . Para mostrarmos de fato que a variedade perturbada, M^{pert} , pode ser obtida como um ponto fixo de G , recorreremos ao Teorema de Contração de Banach, o que exige que mostremos antes que a imagem de G é suficientemente Lipschitz.

Lema 4.23. *Para ε, δ e θ suficientemente pequenos, temos $G : S_\delta \rightarrow S_\delta$, ou seja, G possui constante de Lipschitz δ .*

Demonstração. Ver [16]. $\square$

Aplicaremos agora o Teorema de Contração de Banach para G em S_δ com a norma do supremo, que é dada por

$$\|u\|_\infty = \sup_{z \in M} \|u(z)\|.$$

Lema 4.24. *Para ε, δ e η suficientemente pequenos e $v, v' \in S_\delta$, com $v \neq v'$,*

$$\|G_v - G_{v'}\|_\infty \leq k \|v - v'\|_\infty,$$

para alguma constante $k < 1$, isto é, G é uma contração no espaço de Banach das seções contínuas sobre $\mathcal{N}'_\varepsilon$.

Demonstração. Ver [16]. $\square$

Corolário 4.25. *Existe um único $v \in S_\delta$ tal que*

$$\text{graph}(v) \subset \phi_t^{\text{pert}}(\text{graph}(v)), \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Ver [16]. □

A seção v , ou localmente a função u , obtida pelo Corolário 4.25 nos fornece a variedade invariante perturbada desejada M^{pert} . Para sermos mais rigorosos, essa construção deve ser generalizada considerando um atlas qualquer de M .

Resta somente mostrarmos que M^{pert} assim obtida é $\mathcal{C}^r$, afirmação dada pela etapa 5..

Teorema 4.26. *A variedade perturbada M^{pert} obtida pela construção acima é $\mathcal{C}^r$.*

Demonstração. [16, 10] trazem demonstrações resumidas deste resultado; uma prova completa pode ser vista em [31]. □

4.3 Hiperbolicidade Normal

Nesta seção generalizaremos o conceito de hiperbolicidade normal para variedades invariantes. Até o momento, consideramos a condição

$$\nu(p) = \inf \left\{ a : \frac{1}{\|w_{-t}\|a^t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \forall w_0 \in \mathcal{N}_p \right\} < 1,$$

que expressa uma condição de estabilidade assintótica para o fluxo na direção normal de uma variedade invariante “de saída”. Uma condição análoga é necessária se considerarmos M uma variedade invariante “de entrada”, de modo que apenas a direção do tempo será invertida e a estabilidade assintótica se mantém na direção contrária.

Como anteriormente, consideremos M uma variedade compacta, conexa, invariante de classe $\mathcal{C}^r$, com $r \geq 1$. Suponhamos que exista uma divisão contínua

$$T\mathbb{R}^n|_M = \mathcal{N}^u \oplus TM \oplus \mathcal{N}^s,$$

com as respectivas projeções, $\Pi^s : T\mathbb{R}^n|_M \rightarrow \mathcal{N}^s$ e $\Pi^u : T\mathbb{R}^n|_M \rightarrow \mathcal{N}^u$. Assuma ainda que os sub-fibrados $TM \oplus \mathcal{N}^s$ e $TM \oplus \mathcal{N}^u$ são invariantes sobre $D\phi_t$. Sejam, $u_0 \in \mathcal{N}_p^u$, $v_0 \in T_p M$ e $w_0 \in \mathcal{N}_p^s$. Denotamos por

$$u_{-t} = \Pi^u \circ D\phi_{-t}(p)u_0, \quad v_{-t} = D\phi_{-t}(p)v_0, \quad w_{-t} = \Pi^s \circ D\phi_{-t}(p)w_0,$$

as imagens do fluxo linearizado.

Definição 4.27. Os números generalizados do tipo Lyapunov são dados por

$$\begin{aligned} \nu^u(p) &= \inf \left\{ a : \frac{\|u_{-t}\|}{a^t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \forall u_0 \in \mathcal{N}_p^u \right\}, \\ \nu^s(p) &= \inf \left\{ a : \frac{\|1\|}{\|w_{-t}\|a^t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \forall w_0 \in \mathcal{N}_p^s \right\}, \end{aligned}$$

e, se $\nu^u(p) < 1$ e $\nu^s(p) < 1$,

$$\begin{aligned} \sigma^u(p) &= \inf \{ b : \|v_{-t}\| \cdot \|u_{-t}\|^b \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \forall u_0 \in \mathcal{N}_p^u, v_0 \in T_p M \}, \\ \Sigma^s(p) &= \inf \left\{ b : \frac{\|v_{-t}\|}{\|w_{-t}\|^b} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \forall w_0 \in \mathcal{N}_p^s, v_0 \in T_p M \right\}. \end{aligned}$$

Observe que essa definição coincide com aquela dada na Seção 4.1, isto é, $\nu^s(p) = \nu(s)$ e $\Sigma^s(p) = \sigma(p)$ na notação da definição 4.5. Ainda, como no Lema 4.6, os números de Lyapunov podem ser calculados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\nu^u(p) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Pi^u \circ D\phi_{-t}(\phi_t(p))|_{\mathcal{N}^u}\|^{1/t}; \\ \nu^s(p) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Pi^s \circ D\phi_t(\phi_{-t}(p))|_{\mathcal{N}^s}\|^{1/t}; \\ \sigma^u(p) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|D\phi_t|_M(p)\|}{-\log \|\Pi^u \circ D\phi_{-t}(\phi_t(p))|_{\mathcal{N}^u}\|}; \\ \Sigma^s(p) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|D\phi_t|_M(p)\|}{-\log \|\Pi^s \circ D\phi_t(\phi_{-t}(p))|_{\mathcal{N}^s}\|}.\end{aligned}$$

Vejam os em um exemplo como esse cálculo ocorre. Calculemos os números ν^u e ν^s .

Exemplo 4.28. Considere a E.D.O.

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} z, z \in \mathbb{R}^2, \lambda, \mu > 0.$$

Escolhemos a variedade invariante M como sendo o ponto de equilíbrio $(0, 0) := 0$. Consideremos a divisão $T\mathbb{R}^2|_0 = \mathcal{N}^u \oplus \mathcal{N}^s$, com $\mathcal{N}^u = \{\{0\} \times (z_1, 0) : z_1 \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{N}^s = \{\{0\} \times (0, z_2) : z_2 \in \mathbb{R}\}$, ou seja, $\mathcal{N}^u$ e $\mathcal{N}^s$ são os eixos coordenados em $\mathbb{R}^2$. As projeções são dadas por

$$\Pi^u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \Pi^s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O fluxo linearizado e sua diferencial são dados respectivamente por

$$\phi_t(p) = \begin{pmatrix} p_1 e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & p_2 e^{-\mu t} \end{pmatrix} \text{ e } D\phi_t(p) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{-\mu t} \end{pmatrix}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\Pi^u \circ D\phi_{-t}(\phi_t(p))|_{\mathcal{N}^u} &= \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Pi^s \circ D\phi_t(\phi_{-t}(p))|_{\mathcal{N}^s} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{-\mu t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Portanto, os números de Lyapunov ν^u e ν^s são dados, respectivamente por,

$$\begin{aligned}\nu^u(p) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Pi^u \circ D\phi_{-t}(\phi_t(p))|_{\mathcal{N}^u}\|^{1/t} \\ &= |e^{-\lambda t}|^{1/t} = e^{-\lambda},\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}\nu^s(p) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Pi^s \circ D\phi_t(\phi_{-t}(p))|_{\mathcal{N}^s}\|^{1/t} \\ &= |e^{-\mu t}|^{1/t} = e^{-\mu}\end{aligned}$$

Isso mostra que as condições $\nu^u(p) < 1$ e $\nu^s(p) < 1$ são necessárias para que 0 seja um ponto de equilíbrio hiperbólico.

Definição 4.29. Seja M uma variedade compacta, conexa e invariante em $\mathbb{R}^n$. A divisão $T\mathbb{R}^n|_M = \mathcal{N}^u \oplus TM \oplus \mathcal{N}^s$ é chamada **hiperbólica** se $\nu^u(p) < 1$ e $\nu^s(p) < 1$, para todo $p \in M$.

Recordamos que $\sigma(p) < 1/r$, para todo $p \in M$, era a condição que garantia que o fluxo na direção normal dominasse o fluxo na direção tangencial. As condições equivalentes necessárias agora são $\sigma^u(p) < 1/r$ e $\Sigma^s(p) < 1/r$, para todo $p \in M$.

Definição 4.30. Seja M uma variedade compacta, conexa e invariante em $\mathbb{R}^n$. A divisão $T\mathbb{R}^n|_M = \mathcal{N}^u \oplus TM \oplus \mathcal{N}^s$ é chamada **normalmente hiperbólica** se $\nu^u(p) < 1$, $\nu^s(p) < 1$, $\sigma^u(p) < 1$ e $\Sigma^s(p) < 1$, para todo $p \in M$.

Se a variedade M admite uma divisão normalmente hiperbólica, então é chamada **variedade invariante normalmente hiperbólica**.

Vamos agora enunciar outra versão do teorema de perturbação para variedades invariantes.

Teorema 4.31. *Seja H um campo de vetores $\mathcal{C}^r$ em $\mathbb{R}^n$, $r \geq 1$. Seja M uma variedade $\mathcal{C}^r$ compacta e conexa propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^n$. Suponha que M é invariante e normalmente hiperbólica sobre o fluxo de H . Dado qualquer campo de vetores H^{pert} suficientemente $\mathcal{C}^1$ -próximo de H , existe uma variedade $\mathcal{C}^r$, M^{pert} , que é invariante sobre o fluxo de H^{pert} e difeomorfa a M .*

Demonstração. Ver [10]. □

Teorema 4.32. *Seja H um campo de vetores $\mathcal{C}^r$ em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Seja M uma variedade compacta, conexa, propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^n$. Suponha que M é invariante e normalmente hiperbólica sobre o fluxo de H . Então, existem variedades $\mathcal{C}^r$,*

$$W^u \text{ tangente à } \mathcal{N}^u \oplus TM,$$

$$W^s \text{ tangente à } \mathcal{N}^s \oplus TM,$$

com W^u invariante “de saída”, W^s invariante “de entrada” e $W^u \cap W^s = M$.

Dado qualquer campo de vetores $\mathcal{C}^r$, H^{pert} , suficientemente $\mathcal{C}^1$ -próximo de H , existem variedades $\mathcal{C}^r$,

$$W_{\text{pert}}^u \text{ invariante “de saída” ,}$$

$$W_{\text{pert}}^s \text{ invariante “de entrada” ,}$$

sobre o fluxo de H^{pert} , com W_{pert}^u e W_{pert}^s homeomorfas à W^u e W^s , respectivamente.

Demonstração. Ver [10]. □

O Teorema 4.32, em resumo, diz que as variedades estável e instável de uma variedade normalmente hiperbólica se mantêm sobre perturbações.

Vejam alguns exemplos.

Exemplo 4.33. Considere a E.D.O bidimensional

$$\dot{z} = H(z) + \varepsilon I(z), z \in \mathbb{R}^2, \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \quad (4.19)$$

com H e I suaves.

Façamos $\varepsilon = 0$ e suponhamos que a origem $(0,0) := 0$ é um ponto de equilíbrio de sela de $\dot{z} = H(z)$. Enxergaremos a origem como uma variedade invariante normalmente hiperbólica, como no Exemplo 4.28. O espaço tangente a 0 é o vetor nulo por convenção.

Linearizando o sistema, obtemos

$$\dot{z} = [DH(0)]z.$$

A afirmação da existência de W^u e W^s pode agora ser obtida ou do Teorema 4.32 ou do Teorema da Variedade Estável 4.2.

Suponha agora que queremos decompor as variedades em subvariedades. O próximo exemplo ilustra como isso pode ser feito.

Exemplo 4.34. Considere o sistema linear slow-fast dado por

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= \varepsilon(x + y), \end{aligned} \tag{4.20}$$

e um ponto $p = (p_1, p_2)$. Uma trajetória de 4.20 passando por p é dada por

$$\begin{aligned} x(t; p) &= p_1 e^{-t} \\ y(t; p) &= p_1 \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} e^{-t} + \left(p_2 - p_1 \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) e^{-\varepsilon t}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Observe que o eixo y , $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ é uma variedade invariante para 4.20 e, é também a variedade crítica do sistema. Esta é normalmente hiperbólica e invariante para ε pequeno, e em particular, para $\varepsilon = 0$.

Assim, temos um caso particular em que a variedade perturbada M_ε coincide com a variedade original, isto é, $M_\varepsilon = M$. Observe também que a variedade estável de M é todo o plano $W^s(M) = \mathbb{R}^2$.

Consideremos agora outra condição inicial $q = (q_1, q_2)$ e a diferença entre as duas curvas soluções

$$\begin{aligned} x(t; q) - x(t; p) &= (q_1 - p_1) e^{-t}; \\ y(t; q) - y(t; p) &= (q_1 - p_1) \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} e^{-t} + \left((q_2 - p_2) - (q_1 - p_1) \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) e^{-\varepsilon t}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Fixando a condição inicial q , podemos fazer a distinção entre diferentes pontos exigindo que a trajetória através de p se aproxime da trajetória por q “na taxa mais rápida”. Da equação 4.22, existem duas taxas naturais de aproximação para as trajetórias, a saber e^{-t} e $e^{-\varepsilon t}$. Se o objetivo é encontrar a aproximação mais rápida, devemos eliminar o coeficiente de $e^{-\varepsilon t}$, o que nos fornece a seguinte restrição algébrica:

$$(q_2 - p_2) - (q_1 - p_1) \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = 0.$$

Expressando a última informação como uma reta com variável independente p_1 , podemos escrever

$$\left\{ \left(p_1, q_2 - (q_1 - p_1) \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Sendo q um ponto arbitrário, parece razoável escolher $q \in M$. Escolhendo $q = (0, q_2)$, obtemos

$$\mathcal{F}^s(q) := \left\{ \left(p_1, q_2 + p_1 \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

A variedade $\mathcal{F}^s(q)$ é chamada de **fibra estável** através de q . Pode-se considerar a decomposição de $W^s(M)$ em subvariedades $\mathcal{F}^s(q)$ abstratamente de duas maneiras:

- $\{(q, \mathcal{F}^s(q)) : q \in M\}$ é um fibrado sobre M com fibras em $\mathbb{R}$;
- As retas $\mathcal{F}^s(q)$ descrevem uma folheação de $\mathbb{R}^2$ por subvariedades 1-dimensionais (as folhas desta folheação).

Teorema 4.35. *Considere um campo de vetores $\mathcal{C}^r$ em $\mathbb{R}^n$ e a E.D.O. associada $\dot{z} = H(z)$. Suponha que M é uma variedade normalmente hiperbólica pelo fluxo ϕ_t dado por H . Então, existe uma variedade $\mathcal{F}^u(p)$ para cada $p \in M$ tal que*

1. $\cup_{p \in M} \mathcal{F}^u(p) = W_{\text{loc}}^u(M)$;
2. $\mathcal{F}^u(p)$ é negativamente invariante, isto é, $\phi_{-t}(\mathcal{F}^u(p)) \subset \mathcal{F}^u(\phi_{-t}(p))$, para todo $t \geq 0$ e $p \in M$;
3. $\mathcal{F}^u(p)$ é tangente a $\mathcal{N}_p^u$ em p ;
4. Existem constantes C_u, λ_u tais que se $q \in \mathcal{F}^u(q)$, então

$$\|\phi_{-t}(p) - \phi_{-t}(q)\| < C_u e^{-\lambda_u t}, \forall t \geq 0; \quad (4.23)$$

5. Suponha que $q \in \mathcal{F}^u(p)$ e $q' \in \mathcal{F}^u(p')$. Então, exceto para $p = p'$,

$$\frac{\|\phi_{-t}(p) - \phi_{-t}(q)\|}{\|\phi_{-t}(p') - \phi_{-t}(q')\|} < C_u e^{-\lambda_u t}, \forall t \geq 0;$$

6. $\mathcal{F}^u(p) \cap \mathcal{F}^u(p') = \emptyset$, exceto para $p = p'$;
7. $\mathcal{F}^u(p)$ é $\mathcal{C}^r$ com respeito ao ponto base p .

As mesmas conclusões, com as modificações adequadas, valem para a variedade invariante $\mathcal{F}^s(p)$ com $\cup_{p \in M} \mathcal{F}^s(p) = W_{\text{loc}}^s(M)$ (e, substituindo negativamente por positivamente invariante).

Além disso, se H^{pert} é $\mathcal{C}^1$ θ -próximo de H , para θ suficientemente pequeno, então H^{pert} possui uma folheação com todas as propriedades acima e difeomorfa a de H .

Demonstração. Ver [7, 8]. □

Definição 4.36. Chamamos as folheações $\mathcal{F}^u$ e $\mathcal{F}^s$ descritas no Teorema 4.35 de **folheações de taxa assintótica**.

O Teorema 4.35 pode ser resumido pelo fato de que variedades estáveis e instáveis de uma variedade normalmente hiperbólica podem ser decompostas em subvariedades que são caracterizadas por condições de taxa assintótica e que essa folheação persiste sob perturbação.

4.4 Aplicação em Sistemas Slow-Fast

Na última seção deste capítulo, vamos relacionar a teoria abordada nas seções anteriores com sistemas slow-fast. Nosso objetivo é estudar sistemas da forma

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \\ \frac{dy}{d\tau} &= \dot{y} = g(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.24)$$

no qual, fazendo $t = \tau/\varepsilon$, obtemos a seguinte formulação na escala de tempo rápida

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x' = f(x, y, \varepsilon) \\ \frac{dy}{dt} &= y' = \varepsilon g(x, y, \varepsilon).\end{aligned}\tag{4.25}$$

A estratégia será adaptar os resultados vistos nas últimas seções para variedades invariantes para as equações 4.24 e 4.25.

Denote por X_ε o campo de vetores definido na escala de tempo rápida 4.25 para $0 \leq \varepsilon \leq 1$, isto é,

$$\begin{aligned}X_\varepsilon : \mathbb{R}^{m+n} &\rightarrow T\mathbb{R}^{m+n} \equiv \mathbb{R}^{m+n} \\ (x, y) &\mapsto (f(x, y, \varepsilon), \varepsilon g(x, y, \varepsilon)).\end{aligned}$$

Considerando $\varepsilon = 0$, obtemos $X_0(x, y) = (f(x, y, 0), 0)$, que é exatamente o campo de vetores definido pelo fluxo rápido na Definição 3.4. Os pontos de equilíbrio de X_0 são obtidos como soluções de $f(x, y, 0) = 0$, que pela Proposição 3.8, são também pontos da variedade crítica $C_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : f(x, y, 0) = 0\}$.

Denote ainda por X_R , o fluxo lento (ou reduzido) em C_0 , que é definido pela equação diferencial-algébrica

$$\begin{aligned}0 &= f(x, y, 0) \\ \dot{y} &= g(x, y, 0).\end{aligned}$$

Gostaríamos de alguma forma conectar os fluxos rápido e lento. Para isso, consideremos a linearização de X_ε em C_0 . Fixemos $p \in C_0$, então

$$DX_\varepsilon(p)|_{\varepsilon=0} = \begin{pmatrix} D_x f(p, 0) & D_y f(p, 0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{4.26}$$

Portanto, $\lambda_0 = 0$ é sempre um autovalor de multiplicidade n .

Definição 4.37. Chamamos λ_0 de **autovalor trivial** e todos os outros m autovalores de 4.26 de **autovalores não triviais**.

Assuma que o número de autovalores não triviais no semi-plano complexo direito, no eixo imaginário e, no semi-plano complexo esquerdo são, respectivamente, m^u, m^c e m^s . Como usual, denotaremos os autoespaços estável, central e instável por E^u, E^c e E^s , respectivamente, com $\dim(E^u) = m^u$, $\dim(E^c) = m^c + n$ e $\dim(E^s) = m^s$.

Podemos agora aplicar a teoria de variedades invariantes desenvolvidas nas seções de 4.1 à 4.3. A primeira questão é quando a variedade crítica C_0 será normalmente hiperbólica.

Definição 4.38. Uma subvariedade compacta $M_0 \subset C_0$ é chamada **normalmente hiperbólica** se, para todo $p \in M_0$, a matriz $m \times m$, $(D_x f)(p)$ não possui autovalores com parte real nula.

A matriz que não possui autovalores com parte real nula é chamada **matriz hiperbólica**.

Assim, pode-se definir hiperbolicidade normal exigindo que a linearização do subsistema rápido, $(D_x f)(p)$, seja uma matriz hiperbólica para cada $p \in M_0$.

Observação 4.39. A definição 4.38 é um caso especial da definição 3.10 com $m^c = 0$. Intuitivamente, podemos pensar como a seguir. Observe que $(D_x f)(p)$ descreve o fluxo linearizado na direção normal rápida de M_0 e $(D_y f)(p)$ o fluxo na direção lenta tangencial. Como $(D_x f)(p)$ não possui autovalores com parte real nula podemos fazer $1/\varepsilon(D_x f)(p)$ tão grande quanto se queira, tomando ε suficientemente pequeno, comparado à $(D_y f)(p)$. Assim, o fluxo normal domina o fluxo tangencial, como é exigido na definição geral de hiperbolicidade normal.

Teorema 4.40. Teorema de Fenichel - versão clássica: *Seja X_ε uma família de campos de vetores dada por um sistema slow-fast $C^r, r \geq 2$ como em 4.25. Seja $M_0 \subset C_0$ uma C^r -subvariedade n -dimensional mergulhada em $\mathbb{R}^{n+m}$. Suponha que M_0 é normalmente hiperbólica, isto é, $(D_x f)(p)$ é uma matriz hiperbólica para todo $p \in M_0$. Suponha ainda que $(D_x f)(p)$ possua m^s autovalores com parte real negativa e m^u autovalores com parte real positiva. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,*

1. *Existe uma família de C^r -subvariedades M_ε , tal que M_ε é uma variedade hiperbólica localmente invariante para X_ε ;*
2. *Existem famílias de variedades estáveis $n + m^s$ -dimensionais e de variedades instáveis $n + m^u$ -dimensionais, $W_{\text{loc},\varepsilon}^s = W_{\text{loc}}^s(M_\varepsilon)$ e $W_{\text{loc},\varepsilon}^u = W_{\text{loc}}^u(M_\varepsilon)$, respectivamente;*
3. *As variedades estável e instável possuem famílias de folheações $\mathcal{F}_\varepsilon^s$ e $\mathcal{F}_\varepsilon^u$, respectivamente, consistindo de folhas C^r , $\mathcal{F}_\varepsilon^s(p)$ e $\mathcal{F}_\varepsilon^u(p)$, para cada $p \in M_\varepsilon$;*
4. *Todas as famílias de variedades mencionadas anteriormente são C^{r-1} na variável ε ;*
5. *O campo de vetores dado por*

$$X_{C,\varepsilon}(p) := \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} X_\varepsilon(p), & \text{se } \varepsilon \neq 0 \text{ e } p \in M_0 \\ X_R(p), & \text{se } \varepsilon = 0 \text{ e } p \in M_0 \end{cases} \quad (4.27)$$

é um campo de vetores C^r em M_ε e, $X_{C,\varepsilon}$ é uma família de campo de vetores C^{r-1} na variável ε .

Demonstração. Ver [16, 9]. □

Neste capítulo abordamos brevemente a clássica Teoria de Fenichel aplicada à variedades invariantes. Os conceitos e resultados aqui obtidos nos serão necessários depois.

5 Blow Up

Neste capítulo será apresentado um método de desingularização geométrica de pontos de equilíbrios não hiperbólicos usando a técnica conhecida como blow up, que literalmente “explode” a singularidade com o objetivo de que, no novo campo obtido, esta se torne um equilíbrio hiperbólico.

Na primeira seção introduziremos o método através de uma mudança de coordenadas polares, inicialmente no plano e depois generalizando-o. Em seguida, trocamos as coordenadas polares por coordenadas locais no espaço euclidiano, o que simplifica bastante os cálculos. Essa mudança de coordenadas será denominada blow up direcional e abordada na Seção 5.2.

Contudo, o método do blow up não funciona igualmente bem para todas as classes de campos de vetores. Na Seção 5.3 discutiremos o caso de campos de vetores denominados quase-homogêneos, classe de campos vetoriais em que o método se mostra bastante eficiente.

5.1 Blow Up Polar

Iniciemos com o caso mais simples, considerando uma EDO no plano dada por $\dot{z} = F(z)$, com $z \in \mathbb{R}^2$ e $F \in \mathcal{C}^\infty$ tal que $F(0) = 0$.

Definição 5.1. Seja S^1 o círculo unitário. Considere a transformação em coordenadas polares

$$\phi : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ (possivelmente ilimitado) com $0 \in I$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. O **blow up polar** $\hat{F} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ do campo de vetores F é definido por

$$\hat{F}(\theta, r) = ((D\phi)_{(\theta, r)}^{-1} \circ F \circ \phi)(\theta, r) \quad (5.1)$$

para $r \neq 0$ e por uma extensão contínua de 5.1 para $r = 0$.

Note que $\hat{F}$ é um campo de vetores em $S^1 \times I$.

Observação 5.2. A escolha do intervalo I é arbitrária; na prática costuma-se usar $I = \mathbb{R}$, $I = [0, s]$ para algum $s > 0$ ou $I = (-a, \infty)$ para algum $0 \leq a < \infty$. Note que o caso $I = \mathbb{R}$ implica que devemos ver $\hat{F}$ como um campo de vetores no cilindro infinito; outras escolhas de I facilitam a visualização de $\hat{F}$ como um campo de vetores em $\mathbb{R}^2$.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 5.3. Considere a EDO no plano dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_1^2 - 2z_1z_2 = F_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 &= z_2^2 - 2z_1z_2 = F_2(z_1, z_2),\end{aligned}\tag{5.2}$$

onde $F(z_1, z_2) = (F_1(z_1, z_2), F_2(z_1, z_2))^T$. Temos que $F(0, 0) = 0$, isto é, $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio de F . Temos,

$$DF(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 2z_1 - 2z_2 & -2z_1 \\ -2z_2 & 2z_2 - 2z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio não hiperbólico de F .

Vamos aplicar o blow up polar no nosso exemplo. Temos,

$$D\phi(\theta, r) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta & \cos \theta \\ r \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \Rightarrow (D\phi)^{-1}(\theta, r) = \begin{pmatrix} \frac{-\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix},$$

e,

$$\begin{aligned}F(\phi(\theta, r)) &= F(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= (r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \cos \theta \sin \theta, r^2 \sin^2 \theta - 2r^2 \cos \theta \sin \theta) \\ &= (r^2(\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta), r^2(\sin^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta)).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\hat{F}(\theta, r) &= ((D\phi)^{-1} \circ F \circ \phi)(\theta, r) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^2(\cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta) \\ r^2(\sin^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3r \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) \\ \frac{r^2}{4}(\cos \theta + 3 \cos(3\theta) + \sin \theta - 3 \sin(3\theta)) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dividir por r a expressão de $\hat{F}$ não altera a estrutura qualitativa do retrato de fase de $\hat{F}$ fora de $S^1 \times \{r = 0\}$. Consideremos então,

$$\begin{aligned}\bar{F}(\theta, r) &= \frac{1}{r} \hat{F}(\theta, r) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) \\ \frac{r}{4}(\cos \theta + 3 \cos(3\theta) + \sin \theta - 3 \sin(3\theta)) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Calculemos agora as singularidades do campo $\bar{F}$ em $S^1 \times \{r = 0\}$.

$$\begin{aligned}\bar{F}(\theta, r) &= (0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) \\ r/4(\cos \theta + 3 \cos(3\theta) + \sin \theta - 3 \sin(3\theta)) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow 3 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \text{ ou } \sin \theta = 0 \text{ ou } \sin \theta &= \cos \theta \\ \Leftrightarrow \theta = \{0, \pi/4, \pi/2, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2\}\end{aligned}$$

Consideremos por exemplo o ponto de equilíbrio $(\pi/2, 0)$. Temos,

$$D\bar{F}(\theta, r) = \begin{pmatrix} A(\theta, r) & 0 \\ B(\theta, r) & C(\theta, r) \end{pmatrix},$$

onde,

$$\begin{aligned} A(\theta, r) &= 3(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta)(\sin \theta - \cos \theta); \\ B(\theta, r) &= \frac{r}{4}(-\sin \theta - 9 \sin(3\theta) + \cos \theta - 9 \cos(3\theta)); \\ C(\theta, r) &= \frac{1}{4}(\cos \theta + 3 \cos(3\theta) + \sin \theta - 3 \sin(3\theta)). \end{aligned}$$

Logo,

$$D\bar{F}(\pi/2, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto, $(\pi/2, 0)$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo sela para $\bar{F}$ em $S^1 \times \{r = 0\}$.

Analogamente, mostra-se que todos os outros cinco pontos de equilíbrio de $\bar{F}$ em $S^1 \times \{r = 0\}$ são hiperbólicos do tipo sela.

Assim, obtemos um campo de vetores “desingularizado”. Como consequência, um único ponto de equilíbrio não hiperbólico foi “explodido” em um círculo completo com seis pontos de equilíbrio hiperbólicos do tipo sela.

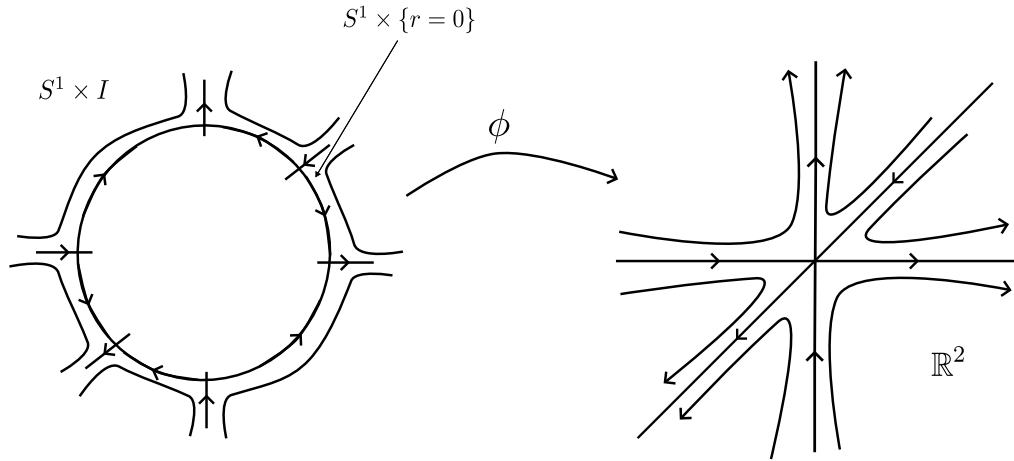


Figura 5.1: Blow up polar da origem para a Equação 5.2.

Essa construção pode ser generalizada.

Definição 5.4. Seja F um campo de vetores C^∞ em $\mathbb{R}^n$ com $F(0) = 0$. Considere a mudança de coordenadas polares generalizada $\phi : S^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\phi(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r) = (r\bar{z}_1, \dots, r\bar{z}_n),$$

onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ (possivelmente ilimitado) com $0 \in I$ e $\sum_{k=1}^n \bar{z}_k^2 = 1$. O **blow up polar** $\hat{F} : S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ do campo de vetores F é definido por

$$\hat{F}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r) = ((D\phi)^{-1} \circ F \circ \phi)(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r) \quad (5.3)$$

para $r \neq 0$ e por uma extensão contínua de 5.3 para $r = 0$.

Definição 5.5. Seja $k \in \mathbb{N}$. O k -**jato** de uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto $p \in \mathbb{R}$ pode ser definido como o polinômio de Taylor truncado de ordem k , isto é,

$$[j_k(f)](x) = f(p) + f'(p)x + \cdots + \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k f}{dx^k}(p) \right] x^k.$$

Essa definição se generaliza naturalmente para dimensões maiores.

Definição 5.6. Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores $\mathcal{C}^\infty$ com $j_l(F) = 0$ para $l \in \{0, 1, \dots, k\}$ e $j_{k+1}(F) \neq 0$. Definimos o **blow up polar redimensionado** $\bar{F} : S^{n-1} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de F por

$$\bar{F}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r) = \frac{1}{r^k} \hat{F}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r).$$

Antes de considerarmos mais um exemplo, façamos algumas observações. Como ϕ é um difeomorfismo em $S^1 \times (0, \infty)$, o campo de vetores $\hat{F}$ é conjugado com F em $S^1 \times \{r > 0\}$, de modo que não perdermos nenhuma informação “fora” de um ponto de equilíbrio ao aplicarmos o método do blow up. Uma motivação algébrica para o método do blow up pode ser considerada através do seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} T(S^1 \times I) & \xrightarrow{D\phi} & T\mathbb{R}^2 \\ \uparrow \hat{F} & & \uparrow F \\ S^1 \times I & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

O campo $\hat{F}$ é a aplicação que faz o diagrama acima comutar, o que pode ser expresso definindo $\hat{F}$ como o campo de vetores tal que $\phi_*(\hat{F}) = F$, onde ϕ_* é o pushforward de um campo de vetores.

Recordemos a definição de pushforward. Dado um campo de vetores $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $\phi : U \rightarrow V$ um difeomorfismo, o pushforward do campo de vetores F é definido como sendo o campo $\phi_* F : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ em V dado por, $\phi_* F(y) = D\phi(\phi^{-1}(y))F(\phi^{-1}(y))$, $y \in V$.

Além disso, embora ϕ não seja uma bijeção na origem, pode-se mostrar que $\hat{F}$, e consequentemente $\bar{F}$, são campos de vetores $\mathcal{C}^\infty$ em $S^1 \times I$.

Consideremos agora a situação do seguinte exemplo.

Exemplo 5.7. Considere a EDO dada por

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 = F_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 &= z_1^2 + z_1 z_2 = F_2(z_1, z_2), \end{aligned} \tag{5.4}$$

com $F(z_1, z_2) = (F_1(z_1, z_2), F_2(z_1, z_2))^T$.

Como no exemplo anterior, temos que $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio não hiperbólico de F , já que $F(0, 0) = 0$ e $DF(0, 0)$ possui 0 como um autovalor duplo. De fato,

$$DF(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2z_1 + z_2 & z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando o blow up polar em $(0, 0)$ obtemos,

$$\begin{aligned} F(\phi(\theta, r)) &= F(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= (r \sin \theta, r^2 \cos^2 \theta + r^2 \cos \theta \sin \theta) \\ &= (r \sin \theta, r^2(\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \hat{F}(\theta, r) &= \bar{F}(\theta, r) = ((D\phi)^{-1} \circ F \circ \phi)(\theta, r) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{-\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \theta \\ r^2(\cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} r \cos^3 \theta + r \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \\ r \cos \theta \sin \theta (1 + r \cos \theta + r \sin \theta) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Vamos agora determinar as singularidades do campo dado por 5.5 em $S^1 \times \{r = 0\}$. Temos,

$$\bar{F}(\theta, r) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} r \cos^3 \theta + r \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^2 \theta = 0 \\ r \cos \theta \sin \theta (1 + r \cos \theta + r \sin \theta) = 0 \end{cases}$$

Como buscamos singularidades em $S^1 \times \{r = 0\}$, o sistema de equações acima se resume a

$$\sin^2 \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm\pi.$$

Portanto, $(\pm\pi, 0)$ são pontos de equilíbrio para $\bar{F}$. Temos ainda que,

$$D\bar{F}(\theta, r) = \begin{pmatrix} A(\theta, r) & B(\theta, r) \\ C(\theta, r) & D(\theta, r) \end{pmatrix},$$

onde

$$A(\theta, r) = -3r \cos^2 \theta \sin \theta - 2r \cos \theta \sin^2 \theta + 2r \cos^3 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta;$$

$$B(\theta, r) = \cos^3 \theta + \cos^2 \theta \sin \theta;$$

$$C(\theta, r) = (-r \sin^2 \theta + r \cos^2 \theta)(1 + r \cos \theta + r \sin \theta) + (r \cos \theta \sin \theta)(-r \sin \theta + \cos \theta);$$

$$D(\theta, r) = (\cos \theta \sin \theta)(1 + r \cos \theta + r \sin \theta) + (r \cos \theta \sin \theta)(\cos \theta + \sin \theta).$$

Assim,

$$D\bar{F}(\pm\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste exemplo, mesmo após aplicarmos o método do blow up, as singularidades do novo campo obtido continuam sendo não hiperbólicas, o que não nos fornece nenhuma vantagem em comparação com o campo inicial F . A expressão de $\bar{F}$ tornou-se ainda mais complicada.

Naturalmente, podemos nos perguntar se aplicar novamente o blow up nas singularidades de $\bar{F}$ nos ajudaria neste caso.

É justamente essa pergunta que responderemos nas próximas seções, mas antes vamos considerar uma mudança de coordenadas local e introduzir a aplicação conhecida como blow up direcional.

5.2 Blow Up Direcional

Nesta seção, substituiremos a mudança de coordenadas polares por coordenadas locais no espaço euclidiano, o que se mostrará bastante útil a fim de cálculos. Essa mudança de coordenadas será denominada blow up direcional.

Definição 5.8. Seja F um campo de vetores $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}^n$ com $F(0) = 0$. Considere a aplicação

$$\mu_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \mu_i(z_1, \dots, z_n) = (z_i z_1, \dots, z_i z_{i-1}, z_i, z_i z_{i+1}, \dots, z_i z_n).$$

O **blow up direcional** de F na direção de z_i , denotado por $\hat{F}^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definido por

$$\hat{F}^i(z_1, \dots, z_n) = ((D\mu_i)^{-1} \circ F \circ \mu_i)(z_1, \dots, z_n). \quad (5.6)$$

Seja $\hat{F}^i$ o blow up direcional de F na direção de z_i em 0. Suponha que $j_l(F) = 0$ para $l \in \{0, 1, \dots, k\}$ e $j_{k+1}(F) \neq 0$. Definimos o **blow up direcional redimensionado** $\bar{F}^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de F na direção de z_i por $\bar{F}^i(z) = \frac{1}{z_i^k} \hat{F}^i(z)$.

Novamente, observamos que μ_i não é uma bijeção em $\{z_i\} = 0$. As mesmas técnicas usadas no caso polar mostram que o campo de vetores $\bar{F}^i$ pode ser estendido continuamente em $\{z_i = 0\}$.

Voltemos agora a situação do exemplo 5.7.

Exemplo 5.9. Consideremos novamente a EDO dada no exemplo 5.7

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 = F_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 &= z_1^2 + z_1 z_2 = F_2(z_1, z_2), \end{aligned}$$

Já vimos que o blow up polar de F é dado por

$$\hat{F}(\theta, r) = \bar{F}(\theta, r) = \begin{pmatrix} r \cos^3 \theta + r \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^2 \theta \\ r \cos \theta \sin \theta (1 + r \cos \theta + r \sin \theta) \end{pmatrix},$$

e que as singularidades de $\bar{F}$ continuam sendo não hiperbólicas.

Vamos tentar usar os blow ups direcionais. Inicialmente, consideremos o blow up direcional na direção de z_1 . Temos $\mu_1(z_1, z_2) = (z_1, z_1 z_2)$,

$$D\mu_1(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow (D\mu_1)^{-1}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-z_2}{z_1} & \frac{1}{z_1} \end{pmatrix}$$

e,

$$\begin{aligned} F(\mu_1(z_1, z_2)) &= F(z_1, z_1 z_2) \\ &= (z_1, z_2, z_1^2 + 2z_1^2 z_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \hat{F}_{[1]}^1(z) &= \bar{F}_{[1]}^1(z) = ((D\mu_1)^{-1} \circ F \circ \mu_1)(z) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-z_2}{z_1} & \frac{1}{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ z_1^2 + 2z_1^2 z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ -z_2^2 + z_1(2z_2 + 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A exemplo da expressão anterior, denotaremos o número de iteradas da aplicação de blow up pelo subscrito $[\cdot]$ e a última direção do blow up pelo sobrescrito. Temos,

$$\bar{F}_{[1]}^1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 z_2 = 0 \\ -z_2^2 + z_1(2z_2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 0,$$

e ainda,

$$D\bar{F}_{[1]}^1(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_2 & z_1 \\ 1 + 2z_2 & -2z_2 + 2z_1 \end{pmatrix} \Rightarrow D\bar{F}_{[1]}^1(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio não hiperbólico de $\bar{F}_{[1]}^1$.

Vamos tentar aplicar $\hat{F}^1$ novamente, de modo que,

$$\hat{F}_{[2]}^1(z) = \bar{F}_{[2]}^1(z) = ((D\mu_1)^{-1} \circ \bar{F}_{[1]}^1(z) \circ \mu_1)(z).$$

Temos,

$$\bar{F}_{[1]}^1(\mu_1(z_1, z_1 z_2)) = \bar{F}_{[1]}^1(z_1, z_2) = (z_1^2 z_2, z_1 + 2z_1^2 z_2 - z_1^2 z_2^2).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \hat{F}_{[2]}^1(z) &= \bar{F}_{[2]}^1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z_2}{z_1} & \frac{1}{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^2 z_2 \\ z_1 + 2z_1^2 z_2 - z_1^2 z_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1^2 z_2 \\ 1 + 2z_1 z_2(1 - z_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que não existem pontos de equilíbrio para $\bar{F}_{[2]}^1$. Procedemos portanto da seguinte maneira: vamos aplicar $\hat{F}^2$, ou seja, o blow up direcional de F na direção de z_2 , na última etapa. Para o cálculo de $\hat{F}^2$ temos $\mu_2(z_1, z_2) = (z_2 z_1, z_2)$,

$$D\mu_2(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_2 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (D\mu_2)^{-1}(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_2} & \frac{-z_1}{z_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, consideremos

$$\hat{F}_{[2]}^2(z) = \bar{F}_{[2]}^2(z) = ((D\mu_2)^{-1} \circ \bar{F}_{[1]}^1 \circ \mu_2)(z),$$

onde,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{[1]}^1(\mu_2(z_1, z_2)) &= \bar{F}_{[1]}^1(z_2 z_1, z_2) \\ &= (z_1 z_2^2, z_1 z_2 + 2z_1 z_2^2 - z_2^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{[2]}^2(z) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{z_2} & \frac{-z_1}{z_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 z_2^2 \\ z_1 z_2 + 2z_1 z_2^2 - z_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -z_1(z_1 - 2z_2 + 2z_1 z_2) \\ z_2(z_1 - z_2 + 2z_1 z_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculando as singularidades de $\bar{F}_{[2]}^2$ temos

$$\bar{F}_{[2]}^2(z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -z_1(z_1 - 2z_2 + 2z_1 z_2) = 0 \\ z_2(z_1 - z_2 + 2z_1 z_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 0$$

e ainda,

$$D\bar{F}_{[2]}^2(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} A(z_1, z_2) & B(z_1, z_2) \\ C(z_2, z_2) & D(z_1, z_2) \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} A(z_1, z_2) &= -4z_1z_2 = -4z_1z_2 - 2z_1 + 2z_2; \\ B(z_1, z_2) &= -2z_1^2 + 2z_1; \\ C(z_1, z_2) &= 2z_2^2 + z_2; \\ D(z_1, z_2) &= 4z_1z_2 - 2z_2 + z_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$D\bar{F}_{[2]}^2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e a singularidade $(0,0)$ de $\bar{F}_{[2]}^2$ é ainda não hiperbólica.

Iteremos ainda mais uma vez esse processo utilizando $\hat{F}^2$ novamente.

$$\bar{F}_{[2]}^2(\mu_2(z_1, z_2)) = \bar{F}_{[2]}^2(z_2z_1, z_2) = (-2z_1^2z_2^3 - z_1^2z_2^2 + 2z_1z_2^2, 2z_1z_2^3 - z_2^2 + z_1z_2^2),$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \hat{F}_{[3]}^2(z) &= ((D\mu_2)^{-1} \circ \bar{F}_{[2]}^2 \circ \mu_2)(z) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{z_2} & \frac{-z_1}{z_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2z_1^2z_2^3 - z_1^2z_2^2 + 2z_1z_2^2 \\ 2z_1z_2^3 - z_2^2 + z_1z_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1z_2(3 - 2z_1(1 + 2z_2)) \\ z_2^2(z_1 + 2z_1z_2 - 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{[3]}^2(z) &= \frac{1}{z_2} \hat{F}_{[3]}^2(z) \\ &= \begin{pmatrix} z_1(3 - 2z_1(1 + 2z_2)) \\ z_2(z_1 + 2z_1z_2 - 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculando as singularidades de $\bar{F}_{[3]}^2$ encontramos

$$\bar{F}_{[3]}^2(z_1, z_2) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} z_1(3 - 2z_1(1 + 2z_2)) = 0 \\ z_2(z_1 + 2z_1z_2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = z_2 = 0 \text{ ou } z_1 = 3/2 \text{ e } z_2 = 0.$$

Temos ainda que,

$$D\bar{F}_{[3]}^2(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} A(z_1, z_2) & B(z_1, z_2) \\ C(z_1, z_2) & D(z_1, z_2) \end{pmatrix}$$

em que

$$\begin{aligned} A(z_1, z_2) &= 3 - 4z_1 - 8z_1z_2; \\ B(z_1, z_2) &= -4z_1^2; \\ C(z_1, z_2) &= 2z_2^2 + z_2; \\ D(z_1, z_2) &= 4z_1z_2 + z_1 - 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$D\bar{F}_{[3]}^2(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } D\bar{F}_{[3]}^2(3/2,0) = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $(0,0)$ e $(3/2,0)$ são pontos de equilíbrio hiperbólicos do tipo sela do campo $\bar{F}_{[3]}^2$.

O próximo exemplo ilustra uma interessante situação.

Exemplo 5.10. Consideremos a EDO do Exemplo 5.3, dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_1^2 - 2z_1z_2 = F_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 &= z_2^2 - 2z_1z_2 = F_2(z_1, z_2),\end{aligned}$$

com $F(z_1, z_2) = (F_1(z_1, z_2), F_2(z_1, z_2))^T$.

No exemplo 5.3 vimos que o blow up polar do campo de vetores F é dado por

$$\begin{aligned}\bar{F}(\theta, r) &= \frac{1}{r} \hat{F}(\theta, r) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cos \theta \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) \\ \frac{r}{4} (\cos \theta + 3 \cos(3\theta) + \sin \theta - 3 \sin(3\theta)) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e que existem seis pontos de equilíbrio hiperbólicos do tipo sela para $\bar{F}$.

A fim de comparação, vejamos agora o que ocorre se aplicarmos os blow ups direcionais em F . Iniciemos com o blow up direcional na direção de z_1 .

$$F(\mu_1(z_1, z_2)) = F(z_1, z_1z_2) = (z_1^2 - 2z_1^2z_2, z_1^2z_2^2 - 2z_1^2z_2).$$

$$\begin{aligned}\bar{F}^1(z) &= \frac{1}{z_1} \hat{F}^1(z) = \frac{1}{z_1} ((D\mu_1)^{-1} \circ F \circ \mu_1)(z) \\ &= \frac{1}{z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_2 & \frac{1}{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^2 - 2z_1^2z_2 \\ z_1^2z_2^2 - 2z_1^2z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1(1 - 2z_2) \\ 3z_2(z_2 - 1) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Analogamente, o blow up direcional de F na direção de z_2 fornece

$$F(\mu_2(z_1, z_2)) = F(z_2z_1, z_2) = (z_2^2z_1^2 - 2z_1z_2^2, z_2^2 - 2z_1z_2^2).$$

$$\begin{aligned}\bar{F}^2(z) &= \frac{1}{z_2} \hat{F}^2(z) = \frac{1}{z_2} ((D\mu_2)^{-1} \circ F \circ \mu_2)(z) \\ &= \frac{1}{z_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{z_2} & -z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2^2z_1^2 - 2z_1z_2^2 \\ z_2^2 - 2z_1z_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3z_1(z_1 - 1) \\ z_2(1 - 2z_1) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Note que o blow up direcional $\bar{F}^1$ leva a singularidade $(0, 0)$ de F em toda uma reta de singularidades $\{z_1 = 0\}$, enquanto que o blow up direcional $\bar{F}^2$ leva $(0, 0)$ na reta de singularidades $\{z_2 = 0\}$.

A Figura 5.2 sugere que a estrutura do blow up polar pode ser inteiramente compreendida através dos blow ups direcionais.

A observação feita no final do exemplo 5.10 não ocorre por acaso. Formalizamos essa observação no seguinte resultado, que pode ser encontrado em [16].

Proposição 5.11. *Usando de uma mudança de coordenadas, o blow up polar e o blow up direcional são equivalentes. Mais precisamente, se $\hat{F}$ é o blow up polar de um campo F de vetores C^∞ em $\mathbb{R}^2$ com $F(0) = 0$ e $\hat{F}^i$ denota os blow ups direcionais de F , então, dado $V \subset \mathbb{R}^2$ suficientemente pequeno, podemos determinar $U \subset S^1 \times (-1/2, \infty)$ tal que $\hat{F}$ e $\hat{F}^i$ são equivalentes por meio de um difeomorfismo $C : U \rightarrow V$.*

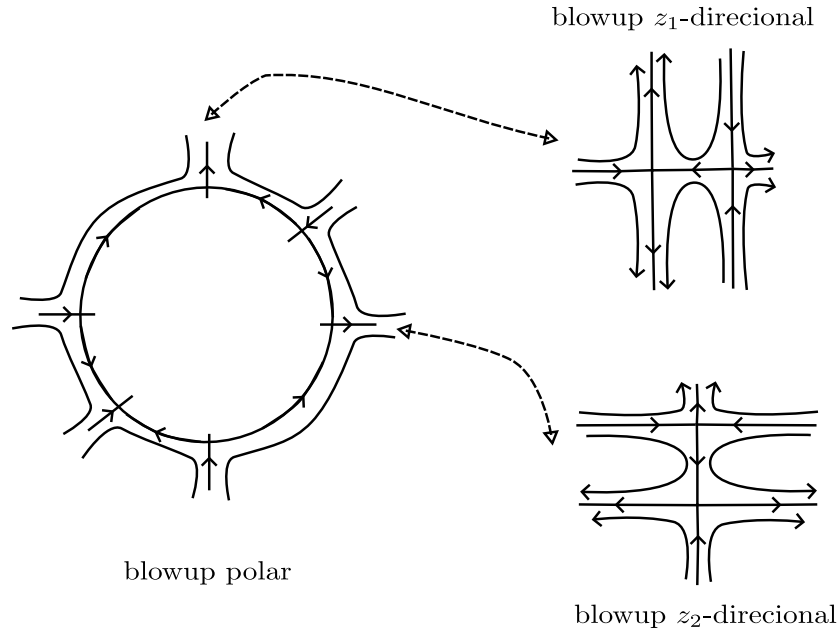


Figura 5.2: Comparação: blow up polar e blow up direcionais.

Demonstração. De fato, seja $V = \mathbb{R}^2 - \{z : z_1 \neq 0\}$ e defina $U = \{(\theta, r) \in S^1 \times (-1/2, \infty) : \theta \in [0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)\}$.

Olhando para S^1 mergulhado em $\mathbb{R}^2$, temos que U cobre ao menos uma faixa do semiplano $\{z_1 > 0\}$.

Defina uma mudança de coordenadas analíticas $C : U \rightarrow V$ dada por

$$C(\theta, r) = (r \cos \theta, \operatorname{tg} \theta),$$

e considere o diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^2 \\ C \downarrow & & \nearrow \mu_1 \\ V & & \end{array}$$

Um cálculo direto fornece

$$\begin{aligned} (\mu_1 \circ C)(\theta, r) &= \mu_1(r \cos \theta, \operatorname{tg} \theta) \\ &= (r \cos \theta, r \cos \theta \operatorname{tg} \theta) \\ &= (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) \\ &= \phi(\theta, r). \end{aligned}$$

Portanto, o diagrama acima comuta e concluímos que os campos de vetores $\hat{F}$ e $\hat{F}^1$ são difeomorfos com $C_*(\hat{F}) = \hat{F}^1$.

A afirmação permanece válida para os blow ups redimensionados $\bar{F}$ e $\bar{F}^1$. Suponhamos

que para o blow up polar redimensionado apareça a divisão $\frac{1}{r^k}$. Então,

$$\begin{aligned} C_*(\bar{F}) &= C_*\left(\frac{1}{r^k}\hat{F}\right) \\ &= \frac{1}{(z_1^2 + (z_1 z_2)^2)^{k/2}} C_*(\hat{F}) \\ &= \frac{1}{(1 + z_2^2)^{k/2}} \frac{1}{z_1^k} \hat{F}^1 \\ &= \frac{1}{(1 + z_2^2)^{k/2}} \bar{F}^1. \end{aligned}$$

Então, as órbitas de $\bar{F}$ e $\bar{F}^1$ são equivalentes com as orientações corretas, já que o redimensionamento se dá por uma função positiva em toda parte.

Analogamente, mostra-se que $\bar{F}$ e $\bar{F}^2$ são equivalentes. $\square$

Uma vez que mostramos que os blow ups polar e direcionais são equivalentes podemos escolher qual destes é mais conveniente usar em cada situação, como ocorreu no exemplo 5.9. Ainda no exemplo 5.9 usou-se o blow up repetidas vezes até que obtemos pontos de equilíbrios que passaram a ser hiperbólicos. Sob certas condições garante-se que esse processo iterativo é finito. Aqui somente enunciaremos esse resultado; o leitor interessado pode consultar maiores detalhes em [5].

Definição 5.12. Um campo de vetores F em $\mathbb{R}^n$ com $F(0) = 0$ satisfaz a **Desigualdade de Lojasiewicz** se existe $k \in \mathbb{N}$ e $c > 0$ tais que

$$\|F(z)\| \geq c\|z\|^k, \forall z \in U,$$

onde U é uma vizinhança de 0.

Campos de vetores analíticos satisfazem a desigualdade de Lojasiewicz em pontos de equilíbrio isolados, assim o próximo resultado se aplica a uma classe considerável de casos.

Teorema 5.13. *Se F é um campo de vetores no plano que satisfaz a desigualdade de Lojasiewicz, então existe uma sequência finita de blow ups que desingulariza F .*

Demonstração. Ver [5]. $\square$

Não é conhecido nenhum resultado semelhante para campos vetoriais em dimensões maiores.

Definição 5.14. O campo de vetores desingularizado obtido pelo último teorema é denotado por $\bar{F}_{[n]}$ e chamado de **desingularização de F** .

Observação 5.15. O resultado do Teorema 5.13 nos garante a existência de uma aplicação de blow up (formada pela composição finita de aplicações de blow ups) que desingulariza o campo F , mas não nos garante a sua unicidade.

5.3 Caso Quase-homogêneo

Podemos ainda considerar pequenas modificações nas expressões das aplicações de blow up utilizadas anteriormente. Antes de definirmos formalmente a aplicação que será denominada blow up quase-homogêneo, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 5.16. Considere a EDO no plano dada por

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 = F_1(z_1, z_2) \\ \dot{z}_2 &= z_1^2 = F_2(z_1, z_2),\end{aligned}\tag{5.7}$$

com $F(z_1, z_2) = (F_1(z_1, z_2), F_2(z_1, z_2))$.

Temos que $F(0, 0) = 0$ e

$$DF(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2z_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, 0 é um autovalor duplo de $DF(0, 0)$ e, portanto, $(0, 0)$ é um ponto de equilíbrio não hiperbólico de F .

Aplicando o blow up polar $\hat{F}$ obtemos

$$F(\phi(\theta, r)) = F(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \sin \theta, r^2 \cos^2 \theta).$$

$$\begin{aligned}\hat{F}(\theta, r) &= \bar{F}(\theta, r) = ((D\phi)^{-1} \circ F \circ \phi)(\theta, r) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \sin \theta \\ r^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin^2 \theta + r \cos^3 \theta \\ r \cos \theta \sin \theta (1 + r \cos \theta) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Encontramos dois pontos de equilíbrios para $\bar{F}$, a saber, $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$. Calculando a diferencial do campo $\bar{F}$ temos,

$$D\bar{F} = \begin{pmatrix} A(\theta, r) & B(\theta, r) \\ C(\theta, r) & D(\theta, r) \end{pmatrix},$$

onde,

$$\begin{aligned}A(\theta, r) &= -2 \sin \theta \cos \theta - 3r \cos^2 \theta \sin \theta; \\ B(\theta, r) &= \cos^3 \theta; \\ C(\theta, r) &= r(-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + r \cos^3 \theta - 2r \sin^2 \theta \cos \theta); \\ D(\theta, r) &= \cos \theta \sin \theta + 2r \sin \theta \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Logo,

$$D\bar{F}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D\bar{F}(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, ambos os pontos são pontos de equilíbrio não hiperbólicos de $\bar{F}$.

Na Seção 5.2, ao nos depararmos com uma situação como essa recorremos a aplicação dos blow ups direcionais. Aqui, vamos modificar um pouco a expressão da aplicação ϕ , que fornece o blow up polar, e considerar

$$\psi(\theta, r) = (r^2 \cos \theta, r^3 \sin \theta). \quad (5.8)$$

Usando essa nova expressão e com um pouco de cálculo, obtemos

$$\hat{F}(\theta, r) = ((D\psi)^{-1} \circ F \circ \psi)(\theta, r), \quad (5.9)$$

e,

$$\begin{aligned} \bar{F}(\theta, r) &= \frac{1}{r} \hat{F}(\theta, r) \\ &= \left(\frac{6 \sin^2 \theta - 4 \cos^3 \theta}{\cos(2\theta) - 5}, \frac{2r \cos \theta \sin \theta (1 + \cos \theta)}{\cos(2\theta) - 5} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

O campo obtido em 5.10 utilizando a aplicação 5.8 possui dois pontos de equilíbrio, dados aproximadamente por $(\pm 0, 63; 0)$, que são hiperbólicos do tipo sela.

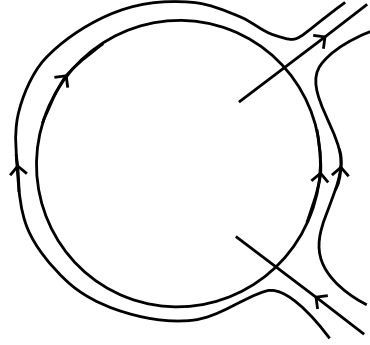


Figura 5.3: Blow up polar da origem para a Equação 5.10.

O leitor pode agora estar se perguntando como foi escolhida a aplicação ψ no exemplo anterior. Antes de explicarmos porque a consideramos vejamos algumas definições.

Definição 5.17. Uma **função** $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **quase-homogênea** do tipo $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ e grau k se, para todo $r \in \mathbb{R}$,

$$f(r^{a_1} z_1, \dots, r^{a_n} z_n) = r^k f(z_1, \dots, z_n).$$

O **campo de vetores** F é chamado **quase-homogêneo** do tipo $(a_1, \dots, a_n)$ e grau $k+1$ se suas j -ésimas funções componentes, $F_j(z_1, \dots, z_n)$, são quase-homogêneas do tipo $(a_1, \dots, a_n)$ e grau $k+1$.

Exemplo 5.18. Considere a função

$$F(z_1, z_2) = (z_1^2 - 2z_1 z_2, z_2^2 - 2z_1 z_2).$$

Temos que $F_1(z_1, z_2) = z_1^2 - 2z_1 z_2$ é quase-homogênea do tipo $(1, 1)$ e grau 2. De fato,

$$\begin{aligned} F_1(r z_1, r z_2) &= r^2 z_1^2 - 2r^2 z_1 z_2 \\ &= r^2 (z_1^2 - 2z_1 z_2) \\ &= r^2 F_1(z_1, z_2). \end{aligned}$$

O mesmo ocorre para $F_2(z_1, z_2) = z_2^2 - 2z_1 z_2$.

Exemplo 5.19. Consideremos novamente o exemplo 5.16, onde $F(z_1, z_2) = (z_2, z_1^2)$. Ao modificarmos a expressão do blow up polar e considerar a aplicação $\psi(\theta, r) = (r^2 \cos \theta, r^3 \sin \theta)$, usamos as potências 2 e 3, respectivamente, para que tivéssemos que o campo F fosse quase-homogêneo do tipo $(2, 3)$ e grau 2.

De fato, se $F(z_1, z_2) = (z_2, z_1^2)$, impondo as condições de quase-homogeneidade obtemos,

$$\begin{aligned} F_1(r^{a_1} z_1, r^{a_2} z_2) &= r^{a_2} z_2 = r^{k+a_1} z_2 \\ &= r^{k+a_1} F_1(z_1, z_2); \\ F_2(r^{a_1} z_1, r^{a_2} z_2) &= r^{2a_1} z_1^2 = r^{k+a_2} z_1^2 \\ &= r^{k+a_2} F_2(z_1, z_2) \end{aligned}$$

E, resolvendo algebricamente as equações acima, obtemos $3a_1 = 2a_2$. Então, escolhendo a_1 e a_2 suficientemente pequenos tais que $3a_1 = 2a_2$, temos que F é quase-homogêneo do tipo $(2, 3)$ e grau 2.

É essa propriedade do campo F que explica porque $\psi(\theta, r) = (r^2 \cos \theta, r^3 \sin \theta)$ é uma boa escolha para a aplicação de blow up no exemplo 5.16.

Definição 5.20. Seja F um campo de vetores $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}^n$ com $F(0) = 0$. Seja $a_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e considere a aplicação

$$\psi : S^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ dada por } \psi(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r) = (r^{a_1} \bar{z}_1, \dots, r^{a_n} \bar{z}_n),$$

onde I é um intervalo (possivelmente ilimitado) em $\mathbb{R}$ com $0 \in I$ e $\sum_{k=1}^n \bar{z}_k^2 = 1$. O **blow up polar ponderado** $\hat{F}$ do campo de vetores F é definido por

$$\hat{F}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r) = ((D\psi)^{-1} \circ F \circ \psi)(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r) \quad (5.11)$$

para $r \neq 0$ e por uma extensão contínua de 5.11 para $r = 0$. Suponha que $j_l(F) = 0$ para $l \in \{0, 1, \dots, k\}$ e $j_{k+1}(F) \neq 0$. Definimos o **blow up polar ponderado redimensionado** $\bar{F}$ do campo F por $\bar{F} = \frac{1}{r^k} \hat{F}$.

O blow up polar ponderado, definido anteriormente será na maioria das vezes referido como **blow up polar quase-homogêneo**. Será útil introduzir também os blow ups direcionais quase homogêneos, mas antes, vejamos como isso ocorre em um exemplo.

Exemplo 5.21. Considere o campo de vetores

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

dado pela mudança de coordenadas $(z_1, z_2) = (x, y)$ no exemplo 5.16. Vimos no exemplo 5.19 que o campo $F(x, y) = (y, x^2)$ é quase homogêneo do tipo $(2, 3)$. Vamos, portanto, aplicar um blow up polar quase-homogêneo com coeficientes $(2, 3)$, induzido pela aplicação

$$\psi : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \psi(\bar{x}, \bar{y}, r) = (r^2 \bar{x}, r^3 \bar{y}). \quad (5.13)$$

Um blow up somente na direção x deve ser combinado com a aplicação

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (\bar{x}, \bar{x}\bar{y}),$$

de modo que,

$$(\bar{x}, \bar{y}, r) \mapsto (r^2 \bar{x}, r^3 \bar{x} \bar{y}). \quad (5.14)$$

Recorde que o blow up direcional em x somente está bem definido fora de $\bar{x} = 0$, o que se estende naturalmente para o conjunto $\{\bar{x} = 0\}$, que representa o blow up na origem. Para obter uma extensão contínua de 5.14 em $\bar{x} = 0$, devemos ser capazes de “eliminar” toda a variável $\bar{x}$ na expressão anterior, o que formalmente é realizado considerando uma carta local.

A ideia principal dessa construção é que fora do conjunto $\{\bar{x} = 0\}$ podemos considerar a seguinte carta local

$$k_1 : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tal que } k_1(\bar{x}, \bar{y}, r) = \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}^{b_1}}, \frac{r}{\bar{x}^{b_2}} \right) := (y_1, r_1), \quad (5.15)$$

para coeficientes $b_i \in \mathbb{R}$ a serem determinados. Esse coeficientes b_i atuarão como “pesos” (e daí a nomenclatura ponderado) para obter expressões para a aplicação de blow up em coordenadas locais sem a variável $\bar{x}$.

A aplicação k_1 é remanescente da aplicação

$$(z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n) \mapsto \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, 1, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right),$$

que pode ser vista como uma mudança de coordenadas do espaço projetivo. No apêndice D usaremos aplicações como esta para construir a compactificação de Poincaré de um campo vetorial.

O objetivo é fazer com que o seguinte diagrama comute

$$\begin{array}{ccc} & S^1 \times I & \\ k_1 \swarrow & & \searrow \varphi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mu_1} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

onde μ_1 é o blow up polar em coordenadas locais, que gostaríamos que fosse dado por

$$\mu_1(y_1, r_1) = (r_1^2, r_1^3 y_1) := (x, y)$$

Das equações 5.13 e 5.15, temos

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{y} \bar{x}^{-b_1}, & r_1 &= r \bar{x}^{-b_2} \\ x &= r^2 \bar{x}, & y &= r^3 \bar{y} \end{aligned} \quad (5.16)$$

de modo μ_1 leva o (y_1, r_1) -espaço no (x, y) -espaço.

Para que o diagrama comute queremos que $x = r^2 \bar{x} = r_1^2$ e $y = r^3 \bar{y} = r_1^3 y_1$, e de 5.16 segue que

$$\begin{aligned} x &= r^2 \bar{x} = (r_1 \bar{x}^{b_2})^2 \bar{x} = r_1^2 \\ y &= r^3 \bar{y} = (r_1 \bar{x}^{b_2})^3 y_1 \bar{x}^{b_1} = r_1^3 y_1 \end{aligned}$$

e, resolvendo o sistema acima, obtemos $b_1 = 3/2$ e $b_2 = -1/2$.

Vamos agora determinar o campo de vetores em $\mathbb{R}^2$ que é dado pelo blow up via μ_1

$$\begin{aligned} x &= r_1^2 \\ y &= r_1^3 y_1 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Usando as equações 5.12 e 5.17 temos,

$$r_1^3 y_1 = y = \dot{x} = 2r_1 \dot{r}_1 \Rightarrow \dot{r}_1 = \frac{1}{2} r_1^2 y_1 \quad (5.18)$$

e, para derivar o fluxo para $\dot{y}_1$,

$$r_1^4 = x^2 = \dot{y} = 3r_1^2 \dot{r}_1 y_1 + r_1^3 \dot{y}_1 = \frac{3}{2} r_1^4 y_1^2 + r_1^3 \dot{y}_1 \Rightarrow \dot{y}_1 = r_1 \left(1 - \frac{3}{2} y_1^2\right) \quad (5.19)$$

Desingularizando as equações 5.17 e 5.18, dividindo por r_1 , obtemos o campo de vetores

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \frac{1}{2} r_1 y_1 \\ \dot{y}_1 &= 1 - \frac{3}{2} y_1^2; \end{aligned}$$

que representa o blow up polar do campo de vetores na carta k_1 , que pode ser identificada com o semiplano direito $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, uma vez que consideramos a aplicação de blow up direcional em x dada por $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}\bar{y})$.

Para cobrir todas as partes próximas de S^1 , que representa o blow up do ponto de equilíbrio $(0, 0)$, precisamos de outras três cartas, nas quais os campos obtidos representam os semiplanos $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$. As cartas a serem consideradas são as dadas a seguir

$$\begin{aligned} k_{-1}(\bar{x}, \bar{y}, r) &= (y_{-1}, r_{-1}); \\ k_2(\bar{x}, \bar{y}, r) &= (x_2, r_2); \\ k_{-2}(\bar{x}, \bar{y}, r) &= (x_{-2}, r_{-2}). \end{aligned}$$

Usando o mesmo raciocínio pelo qual fizemos o diagrama anterior comutar e construímos o blow up polar em coordenadas locais μ_1 , podemos encontrar

$$\begin{aligned} \mu_{-1}(y_{-1}, r_{-1}) &= (-r_{-1}^2, r_{-1}^3 y_{-1}); \\ \mu_2(x_2, r_2) &= (r_2^2 x_2, r_2^3); \\ \mu_{-2}(x_{-2}, r_{-2}) &= (r_{-2}^2 x_{-2}, -r_{-2}^3). \end{aligned}$$

Por último, os campos de vetores em $\mathbb{R}^2$ dados pelo blow up induzidos pelas aplicações acima são dados a seguir.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \dot{r}_{-1} = -\frac{1}{2} r_{-1} y_{-1} \\ \dot{y}_{-1} = 1 - \frac{3}{2} y_{-1}^2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{r}_2 = \frac{1}{3} r_2 x_2^2 \\ \dot{y}_2 = 1 - \frac{2}{3} x_2^3 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{r}_{-2} = \frac{1}{3} r_{-2} x_{-2}^2 \\ \dot{y}_{-2} = 1 - \frac{2}{3} x_{-2}^3 \end{cases} \end{aligned}$$

O uso de blow ups quase-homogêneos se mostra bastante eficaz ao diminuir a quantidade de cálculos necessários à aplicação, embora para isso se tenha que trabalhar com as cartas locais.

Vejamos agora como se define formalmente os blow ups direcionais quase-homogêneos.

Definição 5.22. Seja F um campo de vetores $\mathcal{C}^\infty$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $F(0) = 0$ e $DF(0) = 0$. Sejam $a_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ e considere a aplicação $\psi_i : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\psi_i(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r) = (r^{a_1} \bar{z}_1 \bar{z}_i, \dots, r^{a_{i-1}} \bar{z}_{i-1} \bar{z}_i, r^{a_i} \bar{z}_i, r^{a_{i+1}} \bar{z}_{i+1} \bar{z}_i, \dots, r^{a_n} \bar{z}_n \bar{z}_1),$$

onde I é um intervalo (possivelmente ilimitado) em $\mathbb{R}$ com $0 \in I$ e $\sum_{k=1}^n \bar{z}_k^2 = 1$.

O **blow up direcional ponderado (ou quase-homogêneo)** do campo de vetores F é definido por

$$\hat{F}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r) = ((D\psi_i)^{-1} \circ F \circ \psi_i)(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r), \quad (5.20)$$

para $r \neq 0$ e por uma extensão contínua 5.20 para $r = 0$. Suponha que $j_k(F) = 0$ e $j_{k+1}(F) \neq 0$. Definimos o **blow up direcional quase-homogêneo redimensionado** de F por $\bar{F} = \frac{1}{r^k} \hat{F}$.

Definição 5.23. Considere a configuração da definição anterior. Seja $k_a : S^{n-1} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta e $\mu_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o blow up/mudança de coordenadas induzido pelo seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} & S^{n-1} \times I & \\ k_a \swarrow & & \searrow \varphi_i \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mu_a} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Escolhendo a carta k_a adequadamente, para a i -ésima coordenada temos

$$(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, r) \mapsto \left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_i^{b_i}}, \dots, \frac{\bar{z}_{i-1}}{\bar{z}_i^{b_{i-1}}}, \frac{\bar{z}_{i+1}}{\bar{z}_i^{b_{i+1}}}, \dots, \frac{\bar{z}_n}{\bar{z}_i^{b_n}}, r \right).$$

Então, podemos escrever a aplicação μ_a como

$$\mu_a(w_1, \dots, w_n, r) = (r^{a_1} w_1, \dots, r^{a_{i-1}} w_{i-1}, r^{a_i}, r^{a_{i+1}} w_{i+1}, \dots, r^{a_n} w_n),$$

onde $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ denota as coordenadas do domínio de μ_a e da imagem de k_a . Chamamos também μ_a de blow up direcional quase-homogêneo na direção i , já que é uma expressão em coordenadas polares do blow up direcional quase-homogêneo dado na definição 5.22.

Observe que cada blow up direcional cobre uma parte do novo espaço de fase $S^1 \times I$.

A fim de melhor compreender o cálculo da aplicação de blow up em cada carta o leitor pode consultar o apêndice C, no qual todos os detalhes da aplicação do blow up quase-homogêneo são feitos por meio de um exemplo.

6 Correspondência: Campos de Filippov e Problema de Perturbação Singular

Neste capítulo provaremos a correspondência entre campos de vetores descontínuos e um problema de perturbação singular, estabelecida em [2] e em [20].

Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ como definido no Capítulo 2. Sejam X_1, X_2 campos de vetores em $X^r(M)$ e $F : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função suave que tem 0 como valor regular tal que a região de descontinuidade de

$$X(q) = \begin{cases} X_1(q); & \text{se } F(q) \geq 0; \\ X_2(q); & \text{se } F(q) \leq 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

é dada por $\Sigma = \{F^{-1}(0)\}$ onde $X_i = (f_i, g_i), i = 1, 2$.

Considerando a regularização Sotomayor-Teixeira dada pela equação 2.2, o campo regularizado X_ε é dado pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\varphi(F/\varepsilon)}{2} \right) (f_1, g_1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi(F/\varepsilon)}{2} \right) (f_2, g_2) \\ &= \left(\frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{\varphi(F/\varepsilon)}{2} (f_1 - f_2), \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{\varphi(F/\varepsilon)}{2} (g_1 - g_2) \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

O Teorema a seguir, que pode ser visto em [2], estabelece a correspondência entre um campo de vetores descontínuos e um problema de perturbação singular.

Teorema 6.1. *Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo de vetores descontínuo e X_ε sua φ_ε -regularização. Suponhamos que φ é um polinômio de grau k em um pequeno intervalo $I \subset (-1, 1)$ com $0 \in I$. Então, as trajetórias de X_ε em $V_\varepsilon = \{q : F(q)/\varepsilon \in I\}$ estão em uma correspondência com as soluções de uma equação diferencial ordinária $z' = h(z, \varepsilon)$, satisfazendo que h é suave em ambas as variáveis e $h(z, 0) = 0$ para todo $z \in \Sigma$. Além disso, se $\mathcal{L}_{X_1 - X_2}(F^k)(p) \neq 0$, então, podemos considerar um sistema de coordenadas locais $\mathcal{C}^{r-1}$, $\{(\partial/\partial x)(p), (\partial/\partial y)(p)\}$ tal que essa E.D.O. é um problema de perturbação singular.*

Demonstração. Considere $X = (X_1, X_2)$ com $X_i = (f_i, g_i), i = 1, 2 \in X^r$. Suponha que a expressão de φ para $t \in I \subset \mathbb{R}$, com $0 \in I$, é dada por

$$\varphi(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k.$$

Da equação 6.2 temos que a expressão do campo regularizado é dada por

$$X_\varepsilon = \left(\frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{\varphi(F/\varepsilon)}{2} (f_1 - f_2), \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{\varphi(F/\varepsilon)}{2} (g_1 - g_2) \right).$$

Logo, as trajetórias de X_ε em V_ε são soluções do sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{\varphi(F/\varepsilon)}{2}(f_1 - f_2) \\ &= \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{(a_1 F/\varepsilon + \cdots + a_k F^k/\varepsilon^k)}{2}(f_1 - f_2) \\ \dot{y} &= \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{\varphi(F/\varepsilon)}{2}(g_1 - g_2) \\ &= \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{(a_1 F/\varepsilon + \cdots + a_k F^k/\varepsilon^k)}{2}(g_1 - g_2) \end{aligned} \quad (6.3)$$

O tempo escalonado $\tau = t/\varepsilon^k$ fornece

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon^k \dot{x} = h_1 \\ &= \varepsilon^k \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{(a_1 F \varepsilon^{k-1} + \cdots + a_k F^k)}{2}(f_1 - f_2) \\ y' &= \varepsilon^k \dot{y} = h_2 \\ &= \varepsilon^k \frac{g_1 + g_2}{2} + \frac{(a_1 F \varepsilon^{k-1} + \cdots + a_k F^k)}{2}(g_1 - g_2) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Consideremos $h = (h_1, h_2)$. Note que, se $q = (x, y) \in \Sigma = F^{-1}(0)$, então,

$$\begin{aligned} h(q, 0) &= (h_1(q, 0), h_2(q, 0)) \\ &= \left(a_k F^k(q) \frac{(f_1 - f_2)}{2}, a_k F^k(q) \frac{(g_1 - g_2)}{2} \right) \\ &= (0, 0) \equiv 0. \end{aligned}$$

Temos, para $p \in \Sigma$ e $\varepsilon = 0$,

$$Dh(p, 0) = \begin{pmatrix} (a_k/2)(f_1 - f_2) \frac{\partial F^k}{\partial x}(p) & (a_k/2)(f_1 - f_2) \frac{\partial F^k}{\partial y}(p) \\ (a_k/2)(g_1 - g_2) \frac{\partial F^k}{\partial x}(p) & (a_k/2)(g_1 - g_2) \frac{\partial F^k}{\partial y}(p) \end{pmatrix},$$

de modo que os autovalores da parte linear de h para $\varepsilon = 0$ são soluções da equação

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (a_k/2) \left((f_1 - f_2) \frac{\partial F^k}{\partial x}(p) + (g_1 - g_2) \frac{\partial F^k}{\partial y}(p) \right) \lambda &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 - (a_k/2) \mathcal{L}_{X_1 - X_2}(F)(p) \lambda &= 0 \end{aligned}$$

Segue que 0 é um autovalor de multiplicidade pelo menos um e, como por hipótese, $\mathcal{L}_{X_1 - X_2}(F^k)(p) \neq 0$, existe um autovalor não nulo.

Então, conseguimos um cenário normalmente hiperbólico e podemos aplicar a teoria de Fenichel para obter as coordenadas desejadas (ver [9], lema 5.3, página 67).

□

Do resultado do último teorema temos que as trajetórias do campo regularizado satisfazem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{(f_1 + f_2)}{2} + \frac{\varphi(F/\varepsilon)}{2}(f_1 - f_2) \\ \dot{y} &= \frac{(g_1 + g_2)}{2} + \frac{\varphi(F/\varepsilon)}{2}(g_1 - g_2) \\ \dot{\varepsilon} &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Note que para $\varepsilon = 0$ o sistema definido em 6.5 não está definido e ainda o sistema acima não é um problema de perturbação singular.

Vamos convencionar aqui $F(x, y) = x$. Considerando o blow up direcional $\beta(x, y, \varepsilon) = (\bar{x}\bar{\varepsilon}, y, \bar{\varepsilon})$, o sistema 6.5 se escreve como

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}\dot{\bar{x}} &= \frac{(f_1 + f_2)}{2} + \frac{\varphi(\bar{x})}{2}(f_1 - f_2) \\ \dot{y} &= \frac{(g_1 + g_2)}{2} + \frac{\varphi(\bar{x})}{2}(g_1 - g_2) \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= 0\end{aligned}\tag{6.6}$$

que agora se encontra na forma de um problema de perturbação singular.

Com a finalidade de melhor compreender a correspondência estabelecida pelo Teorema 6.1 trataremos ainda de um segundo resultado. Em [20], provou-se que o conjunto dos pontos de deslize, de acordo com a convenção de Filippov, é a projeção da variedade lenta de 6.5 em Σ . Mais ainda, provou-se que o fluxo lento de 6.5 e o campo de vetores de Filippov (campo deslizante) possuem a mesma expressão. Antes de enunciarmos o teorema que assegura esse resultado vejamos o seguinte lema.

Lema 6.2. *Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de transição, como na definição 2.38. Então, $\psi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\psi(\theta) = \varphi(\cotg \theta)$, $0 < \theta < \pi$, $\psi(0) = 1$ e $\psi(\pi) = -1$ é uma função suave não crescente.*

Demonstração. Calculando diretamente a derivada da função ψ obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta}\psi(\theta) &= \frac{d}{d\theta}\varphi(\cotg \theta) \\ &= \varphi'(\cotg \theta) \frac{d}{d\theta} \cotg \theta \\ &= -\frac{\varphi'(\cotg \theta)}{\sen^2 \theta} \leq 0,\end{aligned}$$

uma vez que $\varphi'(s) \geq 0$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Logo, ψ é não crescente. □

Teorema 6.3. *Sejam $X = (X_1, X_2)$ um campo de vetores descontínuo e M definida implicitamente por $F(x_1, \dots, x_n) = x_1$. Se para qualquer $q \in \Sigma = \{F^{-1}(0)\}$ tivermos $\mathcal{L}_{X_1}(F)(q) \neq 0$ ou $\mathcal{L}_{X_2}(F)(q) \neq 0$, então existe um problema de perturbação singular*

$$\begin{aligned}\theta' &= \alpha(r, \theta, \rho) \\ \rho' &= r\beta(r, \theta, \rho)\end{aligned}\tag{6.7}$$

com $r \geq 0$, $\theta \in (0, \pi)$ e α e β de classe C^r , tais que:

1. A região de deslize é homeomorfa a variedade lenta de 6.7;
2. O campo de vetores de Filippov (ou campo deslizante) X^Σ e o problema reduzido de 6.7 são topologicamente equivalentes.

Demonstração. Dado $X = (X_1, X_2)$ com $X_1 = (f_1, \dots, f_n)$, $X_2 = (g_1, \dots, g_n)$ e $\Sigma = F^{-1}(0)$ onde $F(x_1, \dots, x_n) = x_1$, a expressão do campo regularizado X_ε é dada por

$$X_\varepsilon = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(f_i + g_i)}{2} + \varphi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \frac{(f_i - g_i)}{2} \right),\tag{6.8}$$

de modo que as trajetórias do campo X_ε são soluções do sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \frac{(f_i + g_i)}{2} + \varphi\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) \frac{(f_i - g_i)}{2}, i = 1, \dots, n \\ \dot{\varepsilon} &= 0.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Considerando um blow up polar dado por $x_1 = r \cos \theta$ e $\varepsilon = r \sin \theta$ com $r \geq 0$ e $\theta \in [0, \pi]$ temos

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{\varepsilon} &= \frac{r \cos \theta}{r \sin \theta} = \cotg \theta; \\ \dot{x}_i &= \frac{(f_i + g_i)}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_i - g_i)}{2}, i = 1, \dots, n \\ \Rightarrow x'_i &= r \left(\frac{(f_i + g_i)}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_i - g_i)}{2} \right) \\ \dot{\varepsilon} = 0 &\Rightarrow \varepsilon' = 0 \\ &\Rightarrow (r \sin \theta)' = 0 \\ &\Rightarrow r' \sin \theta + (r \cos \theta) \theta' = 0 \\ &\Rightarrow \theta' = -\frac{r'}{r} \tg \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x'_1 &= r \left(\frac{(f_1 + g_1)}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_1 - g_1)}{2} \right) \\ &= (r \cos \theta)' \\ &= r' \cos \theta - (r \sin \theta) \theta' \\ &= r' \cos \theta + r' \sin \theta \tg \theta \\ &= r' (\cos \theta + \sin \theta \tg \theta) \\ &= \frac{r'}{\cos \theta} \\ \Rightarrow r' &= r \cos \theta \left(\frac{(f_1 + g_1)}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_1 - g_1)}{2} \right)\end{aligned}$$

Logo, o sistema 6.9 se escreve como

$$\begin{aligned}r' &= r \cos \theta \left(\frac{(f_1 + g_1)}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_1 - g_1)}{2} \right) \\ \theta' &= -\sin \theta \left(\frac{(f_1 + g_1)}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_1 - g_1)}{2} \right) \\ x'_i &= r \left(\frac{(f_i + g_i)}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_i - g_i)}{2} \right), i = 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{6.10}$$

Seja $\rho = (x_2, \dots, x_n)$ e denote

$$\begin{aligned}a(r, \theta, \rho) &= \frac{f_1(r \cos \theta, \rho) + g_1(r \cos \theta, \rho)}{2}, \\ b(r, \theta, \rho) &= \frac{f_1(r \cos \theta, \rho) - g_1(r \cos \theta, \rho)}{2},\end{aligned}$$

e, considere ainda,

$$\begin{aligned}\alpha(r, \theta, \rho) &= -\sin \theta (a(r, \theta, \rho) + \varphi(\cotg \theta) b(r, \theta, \rho)) \\ \beta(r, \theta, \rho) &= \left(\frac{f_2 + g_2}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_2 - g_2)}{2}, \dots, \frac{f_n + g_n}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_n - g_n)}{2} \right)\end{aligned}$$

O sistema 6.10 é descrito como abaixo.

1. Na região $(r, \theta, \rho) \in \{0\} \times (0, \pi) \times M$:

$$\begin{aligned}\theta' &= -\sin \theta (a(r, \theta, \rho) + \varphi(\cotg \theta) b(r, \theta, \rho)) \\ \rho' &= 0\end{aligned}\tag{6.11}$$

2. Na região $(r, \theta, \rho) \in \{0\} \times \{0, \pi\} \times M$:

$$\begin{aligned}\theta' &= 0 \\ \rho' &= 0\end{aligned}\tag{6.12}$$

O problema reduzido fica determinado ao considerarmos $r = 0$ em

$$\begin{aligned}r\dot{\theta} &= -\sin \theta (a(r, \theta, \rho) + \varphi(\cotg \theta) b(r, \theta, \rho)) \\ \dot{x}_i &= \frac{(f_i + g_i)}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_i - g_i)}{2}, i = 2, \dots, n\end{aligned}$$

ou seja, é dado por

$$\begin{aligned}0 &= -\sin \theta (a(0, \theta, \rho) + \varphi(\cotg \theta) b(0, \theta, \rho)) \\ \dot{x}_i &= \frac{(f_i + g_i)}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_i - g_i)}{2}, i = 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{6.13}$$

A variedade lenta fica implicitamente determinada por

$$a(0, \theta, \rho) + \varphi(\cotg \theta) b(0, \theta, \rho) = 0\tag{6.14}$$

Temos, $b(0, \theta, \rho) = 0 \Leftrightarrow f_1(0, \rho) = g_1(0, \rho)$.

Como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_1}(F)(0, \rho) &= \langle X_1(0, \rho), \nabla F(0, \rho) \rangle = f_1(0, \rho) \\ \mathcal{L}_{X_2}(F)(0, \rho) &= \langle X_2(0, \rho), \nabla F(0, \rho) \rangle = g_1(0, \rho)\end{aligned}$$

e, para $(0, \rho) \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ temos $\mathcal{L}_{X_1}(F)(0, \rho) \mathcal{L}_{X_2}(F)(0, \rho) < 0$, segue que $b(0, \theta, \rho) \neq 0$, para todo $\theta \in (0, \pi)$ e $(0, \rho) \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$.

Além disso, para todo $(0, \rho) \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$,

$$\frac{a(0, \theta, \rho)}{b(0, \theta, \rho)} = \frac{f_1(0, \rho) + g_1(0, \rho)}{f_1(0, \rho) - g_1(0, \rho)},$$

de onde segue que,

$$-1 \leq -\frac{a(0, \theta, \rho)}{b(0, \theta, \rho)} \leq 1.$$

Como ψ^{-1} é crescente em $(-1, 1)$, a equação $a(0, \theta, \rho) + \varphi(\cotg \theta) b(0, \theta, \rho) = 0$ define uma aplicação contínua, o que prova o item (1) do teorema.

Ainda de acordo com a definição de X^Σ , temos $X^\Sigma = X_1 + \lambda(X_2 - X_1)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $X_1(x_1, \dots, x_n) + \lambda X_2(x_1, \dots, x_n) = (0, y_2, \dots, y_n)$ para algum $y_i, i = 2, \dots, n$. É fácil ver que

$$\begin{aligned} X^\Sigma &= \frac{\mathcal{L}_{X_1}(F)X_2 - \mathcal{L}_{X_2}(F)X_1}{\mathcal{L}_{X_1}(F) - \mathcal{L}_{X_2}(F)} \\ &= \frac{f_1X_2 - g_1X_1}{f_1 - g_1} \\ &= \left(0, \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{f_1 - g_1}, \dots, \frac{f_1g_n - f_ng_1}{f_1 - g_1}\right), \end{aligned} \quad (6.15)$$

enquanto que o problema reduzido é dado por

$$\dot{x}_i = \frac{(f_1 + g_i)}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_i - g_i)}{2}$$

$$\text{sobre a restrição } \varphi(\cotg \theta) = -\frac{a(0, \theta, \rho)}{b(0, \theta, \rho)} = -\frac{f_1 + g_1}{f_1 - g_1}.$$

Portanto, devemos ter

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{(f_i + g_i)}{2} + \varphi(\cotg \theta) \frac{(f_i - g_i)}{2} \\ &= \frac{(f_i + g_i)}{2} - \frac{(f_1 + g_1)(f_i - g_i)}{f_1 - g_1} \\ &= \frac{(f_i + g_i)(f_1 - g_1) - (f_1 + g_1)(f_i - g_i)}{2(f_1 - g_1)} \\ &= \frac{f_1g_i - f_ig_1}{f_1 - g_1} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Das igualdades 6.15 e 6.16 segue a afirmação (2). $\square$

A Figura 6.1 descreve a geometria da demonstração do Teorema 6.3. As setas simples descrevem o fluxo lento, enquanto que as setas duplas descrevem o fluxo rápido do sistema descrito na Equação 6.9. A variedade lenta S , determinada pela Equação 6.14 e a região

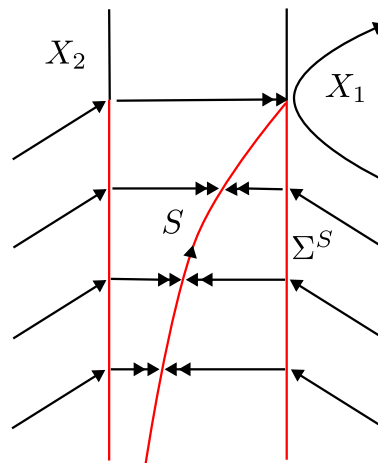


Figura 6.1: Configuração geométrica da demonstração do Teorema 6.3.

de deslize Σ^s são mostradas em vermelho. Em outras palavras, o Teorema 6.3 diz que

as trajetórias de um campo de vetores descontínuo são obtidas resolvendo um sistema slow-fast no qual a variedade crítica seja o gráfico de uma função definida em Σ^s , e a projeção do fluxo reduzido, em Σ , corresponda a expressão do campo de Filippov.

Observação 6.4. As demonstrações anteriores envolvem notação acerca de sistemas slow-fast, vistos no capítulo 3. Como mencionado anteriormente, essa notação não aparece de forma uniforme na literatura; diferente do que convencionamos no capítulo 3, aqui denotamos a derivada com respeito à t por $(\dot{\cdot})$ enquanto que, a derivada com respeito à $\tau = t/\varepsilon$ é denotada por $(\cdot)'$.

Neste capítulo, através do uso conjunto das técnicas de regularização e blow up, estabeleceu-se de que forma se dá a correspondência entre um campo de Filippov e um problema de perturbação singular. É importante ressaltar aqui que a única regularização que dá origem a uma região de deslize como a definida por Filippov é a regularização na qual utilizamos uma função de transição monótona, do tipo Sotomayor-Teixeira. Veremos nos próximos capítulos o que ocorre quando omitimos a hipótese de monotonicidade da função de transição.

7 1-Folheações Descontínuas

Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos acerca de 1-folheações descontínuas. Também serão provados os resultados relacionados à suavização por blow ups dessas 1-folheações descontínuas. Na Seção 7.1 serão introduzidas as definições fundamentais e alguns exemplos de 1-folheações descontínuas, enquanto que, na Seção 7.2 trataremos de uma classe particular de 1-folheações descontínuas, as 1-folheações suaves por partes, e estabeleceremos condições para que esta possa ser suavizada.

Com o objetivo de melhor compreender a dinâmica dessas folheações, sobretudo em seu locus de descontinuidade, na Seção 7.3 será introduzida a noção de regularização para 1-folheações descontínuas, o que nos permitirá definir um tipo de dinâmica deslizando, como a idealizada por Filippov, na região de descontinuidade. Apresentaremos dois métodos distintos de regularização, discutidos respectivamente em 7.3.1 e 7.3.2. Por último, na Seção 7.4, descrevemos a chamada região de deslize para uma 1-folheação descontínua.

7.1 Folheações Descontínuas

Consideramos variedades M com esquinas. Uma variedade com esquinas de dimensão n é um espaço paracompacto de Hausdorff com uma estrutura suave que é localmente modelado por abertos de $(\mathbb{R}^+)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Uma exposição mais detalhada dessa categoria de variedades pode ser vista em [22].

Seja M uma variedade (com esquinas). Um campo de vetores suave definido em M será chamado non-flat se sua expansão de Taylor em cada ponto de M é não nula. Todos os campos de vetores que consideraremos serão campos non-flats.

Definição 7.1. Dizemos que um par (V, Y) formado por um aberto $V \subset M$ e um campo de vetores suaves Y definido em V é um **campo de vetores local** em M .

Definição 7.2. Uma **folheação orientada 1-dimensional** em M é uma coleção

$$\mathcal{F} = \{(U_i, X_i)\}_{i \in \mathcal{I}},$$

de campos de vetores locais em M tais que as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ é uma cobertura de M ;
2. Para cada par $i, j \in \mathcal{I}$,

$$X_i = \psi_{ij} X_j, \tag{7.1}$$

para alguma função estritamente positiva ψ_{ij} definida em $U_i \cap U_j$.

Observação 7.3. Será compreendida depois a importância de se considerar 1-folheações orientadas e não campos de vetores definidos globalmente em M . Se considerarmos como nosso objeto inicial folheações definidas globalmente por um campo de vetores suave, essa propriedade pode não permanecer válida após uma aplicação de blow up.

Definição 7.4. Dizemos que o campo de vetores locais (V, Y) é um **gerador local** da folheação $\mathcal{F}$ se a coleção aumentada

$$\{(U_i, X_i)\}_{i \in \mathcal{I}} \cup \{(V, Y)\}$$

também satisfaz as condições 1. e 2. da definição 7.2.

Dizemos que a folheação $\mathcal{F}$ é **saturada** se esta contém todos os seus geradores locais.

Vamos considerar, a partir de agora, 1-folheações $\mathcal{F}$ saturadas. A próxima definição introduz uma relação entre duas folheações.

Definição 7.5. Sejam M e N duas variedades e $\psi : N \rightarrow M$ um difeomorfismo suave entre N e M . Dizemos que duas **1-folheações orientadas** $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ definidas, respectivamente, em M e N **são relacionadas** por ψ se para cada campo de vetores local (V, Y) que é um gerador local de $\mathcal{G}$, o pushforward desse campo,

$$(U, X) := (\psi(V), \psi_*Y),$$

é um gerador local de $\mathcal{F}$, onde $\psi_*Y(p) = D\psi(\psi^{-1}(p))Y(\psi^{-1}(p))$.

Vamos agora definir o conceito de uma 1-folheação descontínua.

Definição 7.6. Uma possível **1-folheação descontínua** $\mathcal{F}$ em uma variedade M é dada por um subconjunto fechado $\Sigma \subset M$ com interior vazio e uma folheação orientada 1-dimensional $\mathcal{F}$ definida em $M - \Sigma$.

O conjunto Σ é chamado de **locus de descontinuidade** de $\mathcal{F}$. Podemos considerar a decomposição

$$\Sigma = \Sigma^{\text{suave}} \cup \Sigma^{\text{sing}},$$

onde Σ^{suave} denota o subconjunto de pontos onde Σ localmente coincide com alguma subvariedade de M .

Dizemos que $\mathcal{F}$ possui **locus de descontinuidade suave** se $\Sigma = \Sigma^{\text{suave}}$.

Vejam alguns exemplos.

Exemplo 7.7. O campo de vetores em $M = \mathbb{R}^2$ dado por

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - \text{sgn}(y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (7.2)$$

define uma 1-folheação descontínua com locus de descontinuidade $\Sigma = \{y = 0\}$.

De fato, temos que $\Sigma = \{y = 0\}$ é um fechado com interior vazio em $\mathbb{R}^2$. Considere a 1-folheação orientada definida em $\mathbb{R}^2 - \{y = 0\}$ dada por

$$\mathcal{F} = \{(U_i, X_i)\}_{i=1,2},$$

onde

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \\ U_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \\ X_2 &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

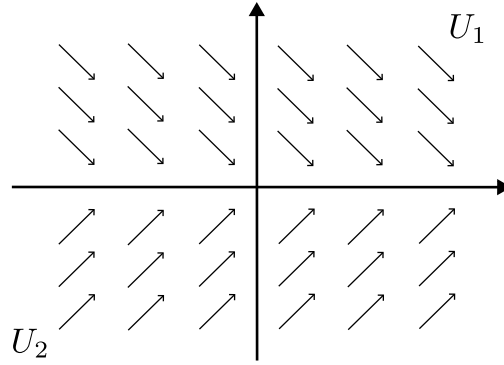


Figura 7.1: 1-Folheação descontínua do exemplo 7.7.

Exemplo 7.8. Considere a 1-folheação descontínua definida em $M = \mathbb{R}^2$ dada pelo campo de vetores

$$X = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (7.3)$$

com locus de descontinuidade dado por $\Sigma = \{0\}$. Observe que X não é suave na origem.

De fato, $\Sigma = \{0\}$ é um fechado com interior vazio em $\mathbb{R}^2$. Consideremos, por exemplo, $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, de modo que $\mathcal{F} = \{(U, X)\}$ define uma 1-folheação orientada em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Exemplo 7.9. Considere $M = \mathbb{R}^3$. O campo de vetores dado por

$$X = -\operatorname{sgn}(x) \frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{sgn}(y) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad (7.4)$$

define uma 1-folheação descontínua em $\mathbb{R}^3$ com locus de descontinuidade $\Sigma = \{xy = 0\}$.

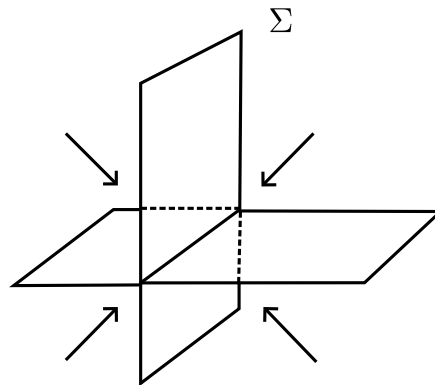


Figura 7.2: Locus de descontinuidade Σ do Exemplo 7.9.

De fato, temos $\Sigma = \{xy = 0\}$ fechado com interior vazio em $\mathbb{R}^3$. Uma 1-folheação orientada em $\mathbb{R}^3 - \{xy = 0\}$ pode ser dada, por exemplo, por $\mathcal{F} = \{(U_i, X_i)\}_{i=1,2,3,4}$ onde,

$$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\};$$

$$U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0, y < 0\};$$

$$U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y < 0\};$$

$$U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0, y > 0\};$$

e,

$$X_1 = -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z};$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z};$$

$$X_3 = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z};$$

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Mais geralmente, se F é uma função suave em uma variedade M que tem 0 como valor regular e X_1 e X_2 são campos de vetores suaves definidos em M , então

$$X = \left(\frac{1 + \text{sgn}(F)}{2}\right) X_1 + \left(\frac{1 - \text{sgn}(F)}{2}\right) X_2 \quad (7.5)$$

define uma 1-folheação descontínua em M com locus de descontinuidade $\Sigma = \{F^{-1}(0)\}$.

Exemplo 7.10. A figura abaixo ilustra uma 1-folheação descontínua em $M = \mathbb{R}^2$ fazendo $F(x, y) = y^2 - x^2(x + 1)$, $X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ e $X_2 = -X_1$ em 7.5.

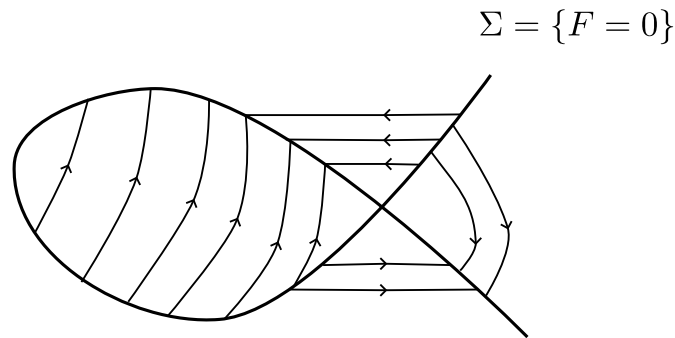


Figura 7.3: 1-Folheação descontínua do Exemplo 7.10.

Os exemplos acima mostram que não existe razão para esperar que $\mathcal{F}$ se estenda suavemente, ou mesmo continuamente, para Σ . Uma modificação do ambiente M através de uma aplicação de blow up, ou por uma sequência destas, é uma possibilidade de contornar essa dificuldade. Esperamos que essa folheação modificada se estenda suavemente para o locus de descontinuidade Σ .

Definição 7.11. Dizemos que uma 1-folheação descontínua $\mathcal{F}$ definida em M e com locus de descontinuidade Σ é **suavizada por blow ups** se existe uma sequência finita de blow ups

$$M = M_0 \leftarrow \cdots \leftarrow \cdots \leftarrow \tilde{M}$$

e uma 1-folheação suave $\tilde{\mathcal{F}}$ definida em $\tilde{M}$ tal que

1. A aplicação $\Phi : \tilde{M} \rightarrow M$ é um difeomorfismo fora de $\Phi^{-1}(\Sigma)$;
2. $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\mathcal{F}$ são relacionadas por Φ , vista como uma aplicação de $\tilde{M} - \Phi^{-1}(\Sigma)$ para $M - \Sigma$.

Vamos agora analisar entre os exemplos vistos acima quais das folheações podem ser suavizadas por blow up.

Exemplo 7.12. Considere a 1-folheação descontínua em $\mathbb{R}^2$ dada pelo campo de vetores em 7.2, a qual possui $\Sigma = \{0\}$ como locus de descontinuidade.

Se denotarmos por $S^0 = \{\pm 1\}$ a esfera 0-dimensional, o blow up de Σ é definido pela aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times (S^0 \times \mathbb{R}_{\geq 0}) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, (\pm 1, r)) &\mapsto (x = u, y = \pm r). \end{aligned}$$

Aplicando a transformação de mudança de coordenadas, o resultado é uma 1-folheação em $\mathbb{R} \times (S^0 \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ dada por

$$\frac{\partial}{\partial u} \mp \frac{\partial}{\partial r},$$

que é um campo de vetores suave $\mathbb{R} \times (S^0 \times \mathbb{R}_{\geq 0})$. Veja a Figura 7.4.

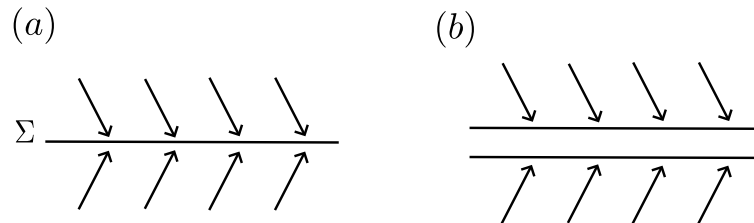


Figura 7.4: (a) 1-folheação dada pelo campo de vetores em 7.2. (b) 1-folheação após a aplicação de blow up.

Exemplo 7.13. Considere a folheação descontínua definida pelo campo de vetores em 7.3. O blow up da origem é dado pela aplicação em coordenadas polares

$$\begin{aligned} \phi : S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\mapsto (x = r \cos \theta, y = r \sin \theta). \end{aligned}$$

Considerando essa mudança de coordenadas temos

$$\begin{aligned} x = r \cos \theta &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ y = r \sin \theta &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \sin \theta + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

de modo que temos por resultado uma 1-folheação em $S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida pelo campo de vetores

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \frac{r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \left(-r \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + r \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \left(r \cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} - r^2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + r \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos(2\theta) \left(r^2 \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \right) + r \frac{\partial}{\partial r} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= r^2 \cos(2\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r},\end{aligned}$$

que é um campo de vetores suave em $S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Por último, vejamos um exemplo de uma 1-folheação descontínua que não pode ser suavizada por blow ups.

Exemplo 7.14. Considere a 1-folheação descontínua em $\mathbb{R}^2$ definida como em 7.5, onde consideramos

$$F(x, y) = y^2 - e^{-1/x^2} \sin^2(1/x)$$

e $X_1 = \frac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$.

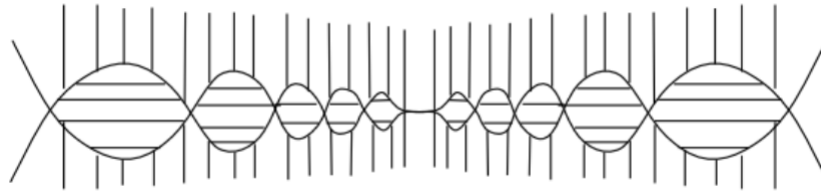


Figura 7.5: 1-folheação descontínua que não é suavizada por blow ups.

O conjunto $\mathbb{R}^2 - \{F^{-1}(0)\}$ possui um número infinito de componentes conexas abertas em qualquer vizinhança da origem, e essa propriedade não pode ser destruída localmente por uma sequência finita de blow ups.

7.2 1-Folheações Suave por Partes

Naturalmente se busca estabelecer condições para que uma 1-folheação descontínua seja suavizada por blow ups. Para isso introduziremos uma classe particular de 1-folheações descontínuas: as 1-folheações suave por partes.

Definição 7.15. Seja $\mathcal{F}$ uma 1-folheação descontínua definida em M que tem Σ por locus de descontinuidade. Um **multigerador local** de $\mathcal{F}$ é um par $(U, \{X_1, \dots, X_k\})$ satisfazendo as seguintes condições:

1. U é um conjunto aberto de M e podemos escrever $U - \Sigma$ como a união disjunta finita

$$U - \Sigma = \bigcup_{i=1}^k U_i,$$

de conjuntos abertos $U_1, \dots, U_k$.

2. Para cada $i = 1, \dots, k$, X_i é um campo de vetores suaves definido em U tal que

$$(U_i, X_i|_{U_i})$$

é um gerador local de $\mathcal{F}$.

Definição 7.16. Dizemos que a folheação $\mathcal{F}$ é **suave por partes** se existe uma coleção $\mathcal{C}$ de multigeradores locais definidos como acima, cujos domínios formam uma cobertura aberta de Σ e que vale a seguinte condição de compatibilidade: para cada par de multigeradores local

$$(U, \{X_1, \dots, X_k\}), \quad (V, \{Y_1, \dots, Y_l\})$$

que pertencem a $\mathcal{C}$, existe uma função suave estritamente positiva φ definida em $U \cap V$ tal que

$$X_i = \varphi Y_j \quad (7.6)$$

em $U_i \cap V_j$, para cada par de índices $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l$.

Observação 7.17. Será importante exigir que a função φ da definição acima seja a mesma em todas as intersecções $U_i \cap V_j$.

Voltemos aos nossos exemplos.

Exemplo 7.18. O exemplo 7.7 exhibe uma 1-folheação suave por partes, já que $\mathcal{F}$ é definida simplesmente pela restrição dos campos vetoriais constantes

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \text{ e } X_2 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

no abertos $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$, respectivamente.

De fato, basta considerarmos a coleção de multigeradores $\mathcal{C} = \{(U, \{X_1, X_2\})\}$, onde $U = \mathbb{R}^2$ e $U - \Sigma = U_1 \dot{\cup} U_2$. As condições da definição 7.16 são claramente satisfeitas.

Essa situação é análoga a que ocorre com a 1-folheação descontínua dada no exemplo 7.9.

Exemplo 7.19. A 1-folheação dada no exemplo 7.8 não é suave por partes. De fato, o campo de vetores X dado pela equação 7.3 não é suave na origem e assim, essa 1-folheação não pode ser estendida para $\Sigma = \{(0, 0)\}$. Veja a Figura 7.6.

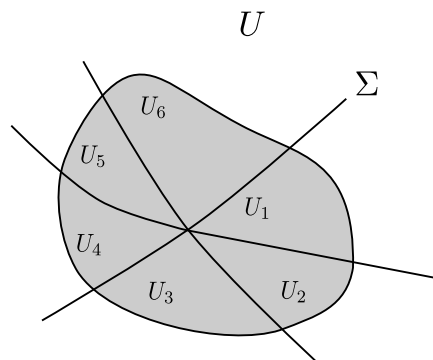


Figura 7.6: Vizinhança de um ponto em Σ .

Como consequência da definição de 1-folheações suaves por partes temos o seguinte resultado.

Teorema 7.20. *Seja $\mathcal{F}$ uma 1-folheação suave por partes definida em uma variedade M , cujo locus de descontinuidade Σ é uma subvariedade suave de codimensão um. Então, $\mathcal{F}$ é suavizada por blow ups.*

Demonstração. Sejam M e N variedades e considere uma aplicação suave $\Phi : N \rightarrow M$ definida pelo blow up em Σ e seja $D = \Phi^{-1}(\Sigma)$.

A 1-folheação $\mathcal{G}$ definida em N que está relacionada com $\mathcal{F}$ por Φ é definida descrevendo seus geradores locais em cada ponto $q \in N$. Vamos considerar separadamente os casos em que $q \in N - D$ e $q \in D$.

Se $q \in N - D$, $q = \Phi^{-1}(p)$ para algum $p \in M - \Sigma$. Ainda, sabemos que $\Phi : N - D \rightarrow M - \Sigma$ é um difeomorfismo.

Neste caso, podemos escolher um gerador local (U, X) de $\mathcal{F}$ definido em uma vizinhança suficientemente pequena de $p = \Phi(q)$ e exigir que

$$(V, Y) = (\Phi^{-1}(U), \Phi^*X)$$

seja um gerador local de $\mathcal{G}$ próximo de q , onde Φ^*X é o pullback de X por Φ , definido por $\Phi^*X = X \circ \Phi$.

Note que essa construção define de forma inequívoca uma 1-folheação suave em $N - D$, já que independe da escolha de (U, X) .

Se $q \in D$, isto é, $p = \Phi(q) \in \Sigma$, podemos escolher um sistema de coordenadas locais $(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ em uma vizinhança U de p tal que $\Sigma = \{y = 0\}$ e a aplicação de blow up assume a forma

$$(S^0 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((\pm 1, r), (u_1, \dots, u_{n-1})) \mapsto (x_1 = u_1, \dots, x_{n-1} = u_{n-1}, y = \pm r).$$

Diminuindo a vizinhança U de p , se necessário, como $\mathcal{F}$ é suave por partes e Σ tem codimensão um, podemos assumir que $U - \Sigma$ pode ser escrito como a união disjunta de subconjuntos conexos $U_+ = \{y > 0\}$ e $U_- = \{y < 0\}$ e que existem campos vetoriais suaves X_+ e X_- definidos em U tais que (U_+, X_+) e (U_-, X_-) são geradores locais de $\mathcal{F}$.

Agora, pela expressão do blow up, ou $V_+ = \Phi^{-1}(U_+)$ ou $V_- = \Phi^{-1}(U_-)$ é uma vizinhança aberta de q em N . Portanto, de acordo com a escolha do sinal $\pm$, exigimos que o campo de vetores locais $(V_{\pm}, \Phi^*X_{\pm})$ seja um gerador local de $\mathcal{G}$ em q .

Esse procedimento define de forma inequívoca uma 1-folheação suave $\mathcal{G}$ em N , que é relacionada à $\mathcal{F}$ por Φ . $\square$

Nosso próximo objetivo é obter um resultado semelhante ao do Teorema 7.20 para o caso em que o locus de descontinuidade Σ é uma subvariedade singular de codimensão um. Para isso, vamos impor outra condição de regularidade que nos permitirá usar o Teorema de Resolução de Singularidades.

Vejamos antes algumas importantes definições.

Definição 7.21. Uma variedade M é dita uma **variedade analítica** se pode ser definida localmente como o conjunto de zeros de uma família finita de funções analíticas (ou holomorfas, equivalentemente).

Um subconjunto $A \subset M$ é **localmente analítico** se, para cada $x \in A$ existe uma vizinhança V_x de x em M e funções analíticas $f_i : V_x \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ tais que $A \cap V_x = \cap_{i=1}^n f_i^{-1}(0)$.

Um subconjunto $A \subset M$ é **semianalítico** se, para cada $x \in A$ existe uma vizinhança V_x de x em M e funções analíticas f_{jk}, g_{jk} definidas em V_x tais que $A \cap V_x = \cup_{j=1}^l (\cap_{k=1}^{s_j} \{x \in M; f_{jk}(x) = 0, g_{jk}(x) > 0\})$.

A primeira condição de regularidade que exigiremos a partir de agora é descrita pela definição a seguir.

Definição 7.22. Dizemos que uma 1-folheação $\mathcal{F}$ definida em M possui um **locus de descontinuidade analítico** se o espaço ambiente M é uma variedade analítica e se o locus de descontinuidade Σ é um subconjunto analítico de M definido globalmente.

Seja $\mathcal{F}$ uma 1-folheação com locus de descontinuidade analítico e de codimensão um. Então, existe uma única filtração por conjuntos semianalíticos (ver [18] para maiores detalhes)

$$\Sigma^0 \subset \Sigma^1 \subset \dots \subset \Sigma^d = \Sigma \quad (7.7)$$

onde para cada $k = 1, \dots, d$, o conjunto $\Sigma^k - \Sigma^{k-1}$ é uma variedade suave de dimensão k .

Definição 7.23. Usando a decomposição em 7.7, dizemos que d é a **dimensão de Σ** e que $\Sigma^{reg} = \Sigma^d - \Sigma^{d-1}$ é a **parte regular** de Σ . O conjunto complementar $\Sigma^{exc} = \Sigma - \Sigma^{reg}$ é chamado de **locus excepcional**.

Ainda sob a configuração acima, podemos aplicar o Teorema de Resolução de Singularidades para conjuntos analíticos reais globalmente definidos. Para maiores detalhes sobre esse resultado, bem como sua demonstração ver, por exemplo, [1]. Como resultado, concluímos que existe uma aplicação analítica $\Phi : N \rightarrow M$ definida localmente em uma variedade N por uma sequência de blow ups tal que

1. Φ é um difeomorfismo fora de $\Phi^{-1}(\Sigma^{exc})$;
2. $D = \Phi^{-1}(\Sigma^{exc})$ é, localmente, uma união finita de componentes limitadas

$$\bigcup_{i \in I} D_i \subset \partial N$$

de codimensão um;

3. O fecho de $\Phi^{-1}(\Sigma^{reg})$ é uma subvariedade suave $\Omega \subset N$.

O próximo resultado afirma que, sobre as condições acima, o pullback da 1-folheação $\mathcal{F}$ é uma 1-folheação descontínua em N que possui locus de descontinuidade suave.

Recordamos que, se $\Phi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo e que se $Y : N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação suave, o **pullback** de Y por Φ é a aplicação definida em M e denotada por Φ^*Y dada por $X(p) = \Phi^*Y(p) = Y(\Phi(p))$.

Teorema 7.24. *Seja $\mathcal{F}$ uma 1-folheação suave por partes com locus de descontinuidade analítico definida em M . Então, usando a notação anterior, existe uma 1-folheação suave por partes $\mathcal{G}$ definida em N , que está relacionada a $\mathcal{F}$ por Φ e, cujo locus de descontinuidade é Ω .*

Demonstração. Ver [23]. □

Os teoremas anteriores podem ser combinados para fornecer um procedimento de suavização que estende o Teorema 7.20 para o caso onde Σ é singular.

Corolário 7.25. *Sobre as hipóteses do Teorema 7.24, suponha ainda que o locus de descontinuidade de $\mathcal{F}$ possui codimensão um. Então, $\mathcal{F}$ é suavizada por blow ups.*

Demonstração. Do Teorema 7.24 temos que existe $\mathcal{G}$ uma 1-folheação suave por partes definida em uma variedade N que está relacionada com $\mathcal{F}$ por uma aplicação de blow up (sem perda de generalidade, estamos supondo que a sequência de blow ups que estabelece essa relação é formada por uma única aplicação)

$$\Phi : N \rightarrow M$$

e tal que o locus de descontinuidade de $\mathcal{G}$ é uma subvariedade suave Ω .

Supondo agora que Σ tem codimensão um, devemos ter que Ω também tem codimensão um. Assim, temos $\mathcal{G}$ uma 1-folheação suave por partes cujo locus de descontinuidade é uma subvariedade suave de codimensão um. Logo, do Teorema 7.20, $\mathcal{G}$ é suavizada por blow ups, isto é, existem uma variedade P e $\Psi : P \rightarrow N$ uma aplicação de blow up (sem perda de generalidade, estamos supondo que a sequência de blow ups é formada por uma única aplicação) e $\mathcal{N}$ uma 1-folheação definida em P tal que $\mathcal{G}$ e $\mathcal{N}$ estão relacionadas por Ψ e ainda, Ψ é um difeomorfismo fora de $\Psi^{-1}(\Omega)$.

Portanto, considerando a sequência de blow ups dada por (Φ, Ψ) temos que $\mathcal{F}$ é suavizada por blow ups. De fato, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{N}$ estão relacionadas por $\Psi \circ \Phi$ e, uma vez que Φ é um difeomorfismo fora de $\Phi^{-1}(\Sigma) = \Omega$ e Ψ o é fora de $\Psi^{-1}(\Omega)$, temos ainda que $(\Psi \circ \Phi)$ é um difeomorfismo fora de $(\Psi \circ \Phi)^{-1}(\Sigma)$, como gostaríamos. $\square$

7.3 Regularização e Dinâmica Deslizante para Folheações Suave por Partes

Embora na seção anterior se tenha definido um processo de suavização de uma classe particular de 1-folheações descontínuas e estabelecido condições para que este funcione, gostaríamos ainda de melhor compreender a dinâmica dessas folheações. A desvantagem do processo introduzido anteriormente é que este não nos permite definir a chamada *dinâmica deslizante* ao longo do conjunto de descontinuidade, um paralelo ao campo deslizante definido por Filippov. Tal dinâmica será definida como um tipo de limite da dinâmica de uma 1-folheação suave próxima e para isso precisaremos introduzir a noção de regularização de uma 1-folheação descontínua.

Definição 7.26. Seja $\mathcal{F}$ uma 1-folheação descontínua em uma variedade M , com locus de descontinuidade Σ . Uma **regularização de $\mathcal{F}$** (com p parâmetros) é uma 1-folheação descontínua $\mathcal{F}^r$ definida na variedade produto

$$M \times ((\mathbb{R}^+)^p, 0)$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. $\mathcal{F}^r$ é tangente às fibras da projeção canônica

$$\Pi : M \times ((\mathbb{R}^+)^p, 0) \rightarrow ((\mathbb{R}^+)^p, 0);$$

2. A restrição $\mathcal{F}_0^r$ de $\mathcal{F}^r$ à fibra $\Pi^{-1}(0)$ coincide com $\mathcal{F}$;
3. O locus de descontinuidade Σ^r de $\mathcal{F}^r$ é um subconjunto de $\Sigma \times \{\prod_i \varepsilon_i = 0\}$, onde $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ são as coordenadas em $((\mathbb{R}^+)^p, 0)$.

A notação $((\mathbb{R}^+)^p, 0)$ utilizada na definição anterior é usada para indicar de forma abreviada uma vizinhança aberta qualquer da origem em $(\mathbb{R}^+)^p$.

Observação 7.27. A última condição da definição 7.26 implica que, para cada $\varepsilon \in ((\mathbb{R}^+)^p, 0)$ tal que $\prod_i \varepsilon_i \neq 0$, a restrição $\mathcal{F}_\varepsilon^r$ de $\mathcal{F}^r$ à fibra $\Pi^{-1}(\varepsilon)$ é uma 1-folheação suave. Mais ainda, da suavidade de $\mathcal{F}_\varepsilon^r$, segue que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\varepsilon^r = \mathcal{F}_0^r$$

uniformemente (na topologia C^∞) para cada subconjunto compacto de $M - \Sigma$. Mais precisamente, dado um ponto $q \in M - \Sigma$, existe uma vizinhança aberta U de q e uma família a p parâmetros de campos de vetores suaves X_ε definidos em $U \times ((\mathbb{R}^+)^p, 0)$ (com dependência suave em ε) tais que X_ε é um gerador local de $\mathcal{F}_\varepsilon^r|_U$ para cada ε .

Exemplo 7.28. Na seção 1.4 de [13], constrói-se uma regularização por convolução utilizando-se de uma função mensurável limitada $0 \leq \mathcal{X} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \mathcal{X}(y)dy = 1$ e de um campo de vetores suave X em $\mathbb{R}^n$ dada pela família de campo de vetores

$$X_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} X(x - \varepsilon y) \mathcal{X}(y) dy.$$

No entanto, essa regularização não nos é muito vantajosa. Algumas importantes características de $\mathcal{F}$ que aparecem fora do locus de descontinuidade podem ser “destruídas” por pequenas perturbações e, assim não são vistas em $\mathcal{F}_\varepsilon^r$.

Apresentaremos a seguir dois métodos distintos de regularização que preservam $\mathcal{F}$ inalterada fora de uma $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -vizinhança do conjunto de descontinuidade. Com isso, esperamos que a dinâmica de $\mathcal{F}$ fora de Σ se repita em $\mathcal{F}_\varepsilon$ para cada ε suficientemente pequeno.

7.3.1 Regularização Sotomayor-Teixeira e generalizações

O primeiro método de regularização que veremos ficou estabelecido por Sotomayor e Teixeira e será descrito nesta subseção.

Suponhamos inicialmente que o locus de descontinuidade Σ de $\mathcal{F}$ é uma subvariedade suave de codimensão um e fixemos a seguinte configuração.

1. Uma aplicação de vizinhança tubular

$$f : N\Sigma \rightarrow M$$

que mapeia o fibrado normal de Σ , $N\Sigma$, difeomorficamente em uma vizinhança aberta $W = f(N\Sigma)$ de Σ ;

2. Uma métrica de variação suave

$$|\cdot| : N\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

definida nas fibras de $N\Sigma$ tal que $|p| = 0$ se $p \in \Sigma$;

3. Uma função de transição monotóna $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$.

Como na situação do Teorema 7.24, que pode ser vista em [23], utilizamos a aplicação f para obter uma 1-folheação $\mathcal{G}$ definida em $N\Sigma$ tal que $\mathcal{G}$ é dada pelo pullback de $\mathcal{F}$ por

f , isto é, $\mathcal{G} = f^*\mathcal{F}$. O locus de descontinuidade de $\mathcal{G}$ é dado pela seção nula $\Sigma \subset N\Sigma$, ou seja, pela aplicação

$$\begin{aligned} u : \Sigma &\rightarrow N\Sigma \\ p &\mapsto (p, 0), \end{aligned}$$

que associa a cada ponto $p \in \Sigma$ ao vetor nulo 0, estando portanto identificada à Σ .

Ainda, sem perda de generalidade, podemos assumir que o fibrado normal $N\Sigma$ é localmente coberto por cartas de trivialização nas quais a aplicação f assume a forma

$$\begin{aligned} V \times \mathbb{R} &\rightarrow V \\ (x, y) &\mapsto x, \end{aligned}$$

para algum aberto $V \subset \Sigma$ e onde $\mathcal{F}$ possua um multigerador local da forma $(V \times \mathbb{R}, \{X_+, X_-\})$, onde X_+ (respectivamente, X_-) é um campo de vetores suaves definido em $V \times \mathbb{R}$ que gera $\mathcal{G}$ em $U_+ = \{y > 0\}$ (respectivamente, $U_- = \{y < 0\}$). Além disso, nestas cartas locais assumimos que a norma nas fibras de $N\Sigma$ é simplesmente dada pelo valor absoluto de $|y|$ em $\mathbb{R}$, isto é, a métrica do item (2) é dada por

$$\begin{aligned} |\cdot| : N\Sigma &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto |y| \end{aligned}$$

Com auxílio da função ϕ , definimos para cada $\varepsilon > 0$, um campo de vetores suave X_ε em $V \times \mathbb{R}$ dado por

$$X_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \right) X_+ + \frac{1}{2} \left(1 - \phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \right) X_- \quad (7.8)$$

Observe que, por construção, temos

$$X_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} X_+(x, y) & \text{se } y \geq \varepsilon \\ X_-(x, y) & \text{se } y \leq -\varepsilon \end{cases}$$

Embora toda a construção anterior tenha partido da escolha do multigerador $(V \times \mathbb{R}, \{X_+, X_-\})$, esta na verdade independe dessa escolha. De fato, se escolhermos outro multigerador local de $\mathcal{G}$, digamos $(V \times \mathbb{R}, \{Y_+, Y_-\})$, segue da condição 7.6 da definição de 1-folheação suave por partes que $Y_+ = \varphi X_+$ e $Y_- = \varphi X_-$, para alguma função suave estritamente positiva φ .

Logo, se definirmos uma família de campos de vetores Y_ε exatamente como fizemos acima, apenas trocando $X_\pm$ por $Y_\pm$,

$$Y_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \right) Y_+ + \frac{1}{2} \left(1 - \phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \right) Y_-$$

concluimos que

$$Y_\varepsilon = \varphi X_\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

o que mostra que a 1-folheação assim obtida está bem definida.

Em outras palavras, as famílias X_ε e Y_ε de campos de vetores definem precisamente a mesma 1-folheação suave em $V \times \mathbb{R}$.

Ainda, considerando uma cobertura aberta de $N\Sigma$ por essas cartas locais de trivialização, podemos definir, para cada $\varepsilon > 0$, uma folheação suave $\mathcal{G}_\varepsilon$ dada pela família de campos de vetores X_ε .

Por construção, cada folheação desta coincide com a folheação original $\mathcal{G}$ fora da região $\{p \in N\Sigma : |p| < \varepsilon\}$. De fato, para $y \geq \varepsilon$ temos $X_\varepsilon = X_+$, para $y \leq -\varepsilon$ temos $X_\varepsilon = X_-$ e, os campos de vetores X_+ e X_- geram a 1-folheação $\mathcal{G}$.

Finalmente, estamos prontos para definir formalmente uma regularização de $\mathcal{F}$.

Definição 7.29. A regularização Sotomayor-Teixeira de $\mathcal{F}$ é a 1-folheação descontínua $\mathcal{F}^r$ definida no espaço produto $M \times (\mathbb{R}^+, 0)$ como a seguir:

- Para $\varepsilon = 0$, definimos

$$\mathcal{F}_0^r = \mathcal{F};$$

- Para $\varepsilon > 0$ definimos a folheação $\mathcal{F}_\varepsilon^r$ em M por

$$\mathcal{F}_\varepsilon^r = \begin{cases} \mathcal{F} & \text{em } M - W; \\ f_*\mathcal{G}_\varepsilon & \text{em } W. \end{cases}$$

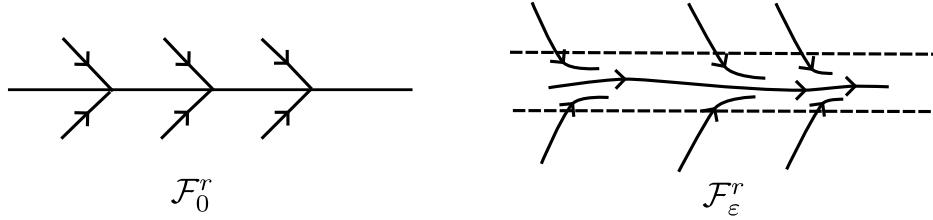


Figura 7.7: Regularização Sotomayor-Teixeira.

Observação 7.30. Segue do que já foi observado anteriormente que essa construção define globalmente uma 1-folheação suave em M .

Pode-se verificar facilmente que a 1-folheação $\mathcal{F}^r$ assim definida satisfaz as condições 1 – 3 da definição 7.26 de regularização.

De fato, da construção acima, claramente a condição 1 é satisfeita. A condição 2 também é imediata, já que por definição $\mathcal{F}_0^r = \mathcal{F}$.

Para a condição 3, queremos mostrar que $\Sigma^r \subset \Sigma \times \{0\} \equiv \Sigma$ ($p = 1$). De fato, para $\varepsilon = 0$ temos $\mathcal{F}_0^r = \mathcal{F} \Rightarrow \Sigma^r = \Sigma$. Para $\varepsilon > 0$, na região $M - W$, o mesmo ocorre. Ainda, sendo $\mathcal{G}_\varepsilon$ uma 1-folheação suave para cada $\varepsilon = 0$ e f um difeomorfismo sobre W , temos que $\mathcal{F}_\varepsilon^r = f_*\mathcal{G}_\varepsilon$ também o é. Logo, $\Sigma^r = \Sigma$ e a condição 3 é satisfeita.

Vejamos agora uma generalização desta construção. Sobre as mesmas hipóteses anteriores podemos definir a regularização de $\mathcal{F}$ omitindo a hipótese da monotonicidade da função de transição ϕ , bem como a sua independência na variável x .

Substituindo a escolha da função ϕ no item 3 pela escolha de uma função suave

$$\psi : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \quad (7.9)$$

tal que $\psi(x, t) = -1, t \leq -1$ e $\psi(x, t) = 1, t \geq 1$, substituímos de maneira correspondente a expressão de X_ε dada em 7.8 por

$$X_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \psi \left(x, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right) X_+ + \frac{1}{2} \left(1 - \psi \left(x, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right) X_- \quad (7.10)$$

Todas as demais etapas da construção seguem exatamente da mesma forma.

Definição 7.31. A regularização assim resultante é chamada de **regularização do tipo transição**.

7.3.2 Regularização Dupla

Introduziremos a seguir um segundo método de regularização. Através deste, vamos exibir uma situação onde é natural que consideremos uma regularização à multiparâmetros. Considere, por exemplo, uma 1-folheação descontínua $\mathcal{F}$ definida em $\mathbb{R}^3$ tendo $\Sigma = \{xy = 0\}$ por locus de descontinuidade. Essa pode ser encontrada como no exemplo 7.9. Neste caso, a 1-folheação $\mathcal{F}$ fica definida por quatro campo de vetores $X_{\pm,\pm}$, onde o primeiro e o segundo sinal, $\pm$, correspondem respectivamente ao sinal das coordenadas x e y . Em outras palavras, cada campo $X_{\pm,\pm}$ é um gerador local de $\mathcal{F}$ em um dos quatro quadrantes $U_{\pm,\pm} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \operatorname{sgn}(x) = \pm, \operatorname{sgn}(y) = \pm\}$.

Sejam ϕ, ψ funções de transição monótonas, como acima, e consideremos a família a dois parâmetros de campos de vetores suaves

$$Y_{\varepsilon,\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4} \left(\sum_{\alpha,\beta \in \{+,-\}} \left(1 + \alpha \phi \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \left(1 + \beta \psi \left(\frac{y}{\eta} \right) \right) X_{\alpha,\beta} \right)$$

definido para $\varepsilon, \eta > 0$.

Analogamente, definimos outras duas famílias de campos de vetores descontínuos

$$Z_{\pm,\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\sum_{\beta \in \{+,-\}} \left(1 + \beta \psi \left(\frac{y}{\eta} \right) \right) X_{\pm,\beta} \right)$$

e,

$$W_{\varepsilon,\pm} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha \in \{+,-\}} \left(1 + \alpha \phi \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) X_{\alpha,\pm} \right)$$

definidos respectivamente para $\eta > 0$ e $\varepsilon > 0$. Observe ainda que os locus de descontinuidade de $Z_{\pm,\eta}$ e de $W_{\varepsilon,\pm}$ são dados, respectivamente, por $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$.

Definição 7.32. A **regularização dupla de $\mathcal{F}$** é a 1-folheação descontínua $\mathcal{F}^r$ definida no espaço produto $\mathbb{R}^3 \times ((\mathbb{R}^+)^2, 0)$ como a seguir. Para cada parâmetro $\varepsilon, \eta \geq 0$, a restrição da folheação $\mathcal{F}^r$ à fibra $\Pi^{-1}(\varepsilon, \eta)$ é a 1-folheação gerada por um campo de vetores descontínuo, $K_{\varepsilon,\eta}$, escolhido da seguinte maneira:

$$K_{\varepsilon,\eta} = \begin{cases} X_{\pm,\pm} & \text{se } \varepsilon = 0 \text{ ou } \eta = 0 \\ Z_{\pm,\eta} & \text{se } \varepsilon = 0 \text{ e } \eta > 0 \\ W_{\varepsilon,\pm} & \text{se } \varepsilon > 0 \text{ e } \eta = 0 \\ Y_{\varepsilon,\eta} & \text{se } \varepsilon > 0 \text{ e } \eta > 0 \end{cases}$$

A Figura 7.8 ilustra esta definição.

Mais geralmente, assumindo que a 1-folheação descontínua $\mathcal{F}$ em $\mathbb{R}^n$ possua um locus de descontinuidade dado pela união de p hiperplanos coordenados, digamos

$$\Sigma = \left\{ \prod_{i=1}^p x_i = 0 \right\}$$

podemos definir uma regularização de $\mathcal{F}$ à p -parâmetros facilmente generalizando a construção anterior.

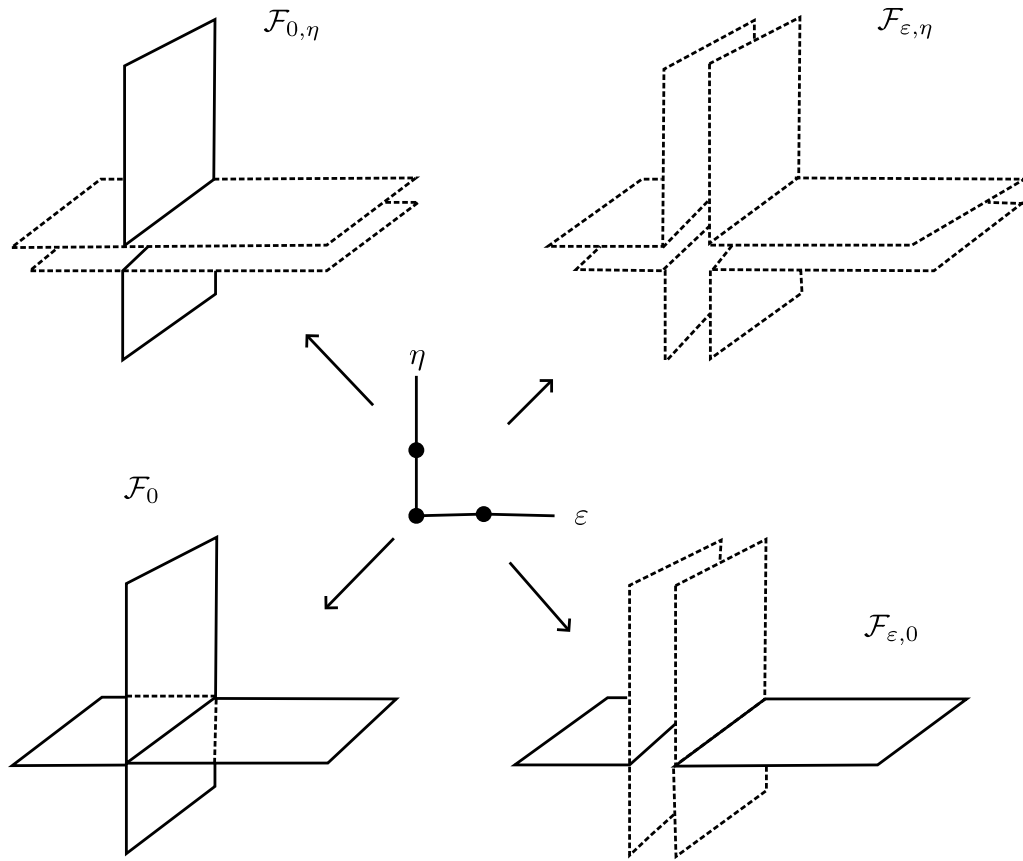


Figura 7.8: Regularização Dupla.

7.4 Regiões de Deslize

Seja $\mathcal{F}$ uma 1-folheação descontínua definida em uma variedade M , tendo Σ por locus de descontinuidade. Dada uma regularização $\mathcal{F}^r$ à p parâmetros de $\mathcal{F}$, vamos definir um subconjunto $\text{Slide}(\mathcal{F}^r)$ de Σ onde seja razoável estudar uma dinâmica limite com respeito a dada regularização.

Os conceitos aqui apresentados se definem localmente.

Definição 7.33. Dizemos que um ponto $p \in \Sigma$ é um **ponto de deslize para $\mathcal{F}^r$** se existem uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p e uma família de variedades suaves

$$S_\varepsilon \subset U$$

definidas para todo $\varepsilon \in ((\mathbb{R}^*)^p, 0)$ tais que

1. Para cada ε , a variedade S_ε é invariante pela restrição de $\mathcal{F}^r$ à U ;
2. Para cada subconjunto compacto $K \subset U$, a sequência $S_\varepsilon \cap K$ converge para $\Sigma \cap K$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, em alguma métrica de Hausdorff d_H nos subconjuntos compactos de M .

O conjunto de pontos de deslize para $\mathcal{F}^r$ é um subconjunto relativamente aberto de Σ , que denotaremos por $\text{Slide}(\mathcal{F}^r)$.

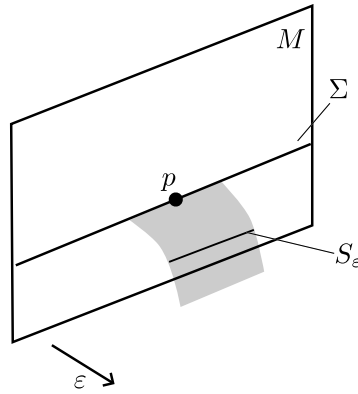


Figura 7.9: Região de deslize.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 7.34. Considere a regularização Sotomayor-Teixeira da 1-folheação descontínua definida pelo campo de vetores

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{sgn}(y) \frac{\partial}{\partial y},$$

e descrita no exemplo 7.7. A expressão do campo regularizado X_ε , definida pela equação 7.8, se torna

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= \frac{1}{2} \left(1 + \phi \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \phi \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} - \phi \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Seja $t_0 \in (-1, 1)$ o zero de ϕ , que é único pela hipótese de monotonicidade de ϕ . Assim, a família de variedades 1-dimensionais

$$S_\varepsilon = \{y = t_0 \varepsilon\}$$

satisfaz as condições 1. e 2. da definição 7.33 localmente em cada ponto Σ .

Consequentemente,

$$\operatorname{Slide}(\mathcal{F}^r) = \Sigma.$$

Observamos que, $\operatorname{Slide}(\mathcal{F}^r) = \Sigma^s$, em que Σ^s denota a região de deslizamento usual de Filippov do campo descontínuo X , já que $\mathcal{L}_{X_+}(f) = -1$, $\mathcal{L}_{X_-}(f) = 1$ e $(\mathcal{L}_{X_+}(f)(p))(\mathcal{L}_{X_-}(f)(p)) = -1 < 0$, para todo $p \in \Sigma$.

Exemplo 7.35. Considere a folheação descontínua em $\mathbb{R}^2$ definida pelo campo de vetores

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + ((x+1) + \operatorname{sgn}(y)(x-1)) \frac{\partial}{\partial y}$$

Observe que $\Sigma = \{y = 0\}$ e $\mathcal{F} = \{(U_\pm, X_\pm)\}$, onde

$$X_+ = \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y}$$

está definido em $U_+ = \{y > 0\}$ e,

$$X_- = \frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}$$

está definido em $U_- = \{y < 0\}$.

A regularização Sotomayor-Teixeira de $\mathcal{F}$ fica então definida pelo campo de vetores

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= \frac{1}{2} \left(1 + \phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} + \left((x+1) + \phi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)(x-1) \right) \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Portanto, para cada $x \in \mathbb{R}$, o coeficiente de $\frac{\partial}{\partial y}$ na expressão de X_ε se anula se, e somente se,

$$y = \varepsilon t_x$$

onde t_x é a solução da equação $\phi(t_x) = (x+1)/(1-x)$. Da hipótese de monotonicidade em ϕ , essa equação possui solução, que é necessariamente única, se, e somente se $x \leq 0$.

Provaremos na próximo capítulo que

$$\text{Slide}(\mathcal{F}^r) = \Sigma \cap \{x < 0\}$$

Novamente, temos $\text{Slide}(\mathcal{F}^r) = \Sigma^s$, uma vez que, $\mathcal{L}_{X_+}(F) = 2x$, $\mathcal{L}_{X_-}(F) = 2$ e $(\mathcal{L}_{X_+}(F)(p))(\mathcal{L}_{X_-}(F)(p)) = 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Exemplo 7.36. Consideremos o mesmo campo de vetores descontínuo do exemplo 7.35, mas agora considerando uma regularização diferente. Vamos considerar uma regularização $\mathcal{F}^r$ do tipo transição cuja função de transição ψ possui o gráfico da figura 7.10.

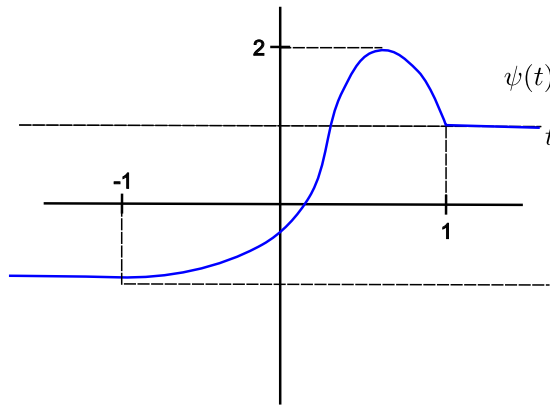


Figura 7.10: Função de transição não monótona.

Como uma consequência dos resultados que veremos no próximo capítulo, teremos

$$\text{Slide}(\mathcal{F}^r) = \Sigma \cap \{x < 1/3\},$$

onde observamos que $\frac{1/3+1}{1-1/3} = 2$.

A Figura 7.11 mostra como essa diferença se expressa geometricamente.

Observe que na Figura 7.11, a região de deslize descrita no item (c), segundo a Definição 7.33, contém pontos que pertenceriam à região de costura segundo as convenções usuais de Filippov.

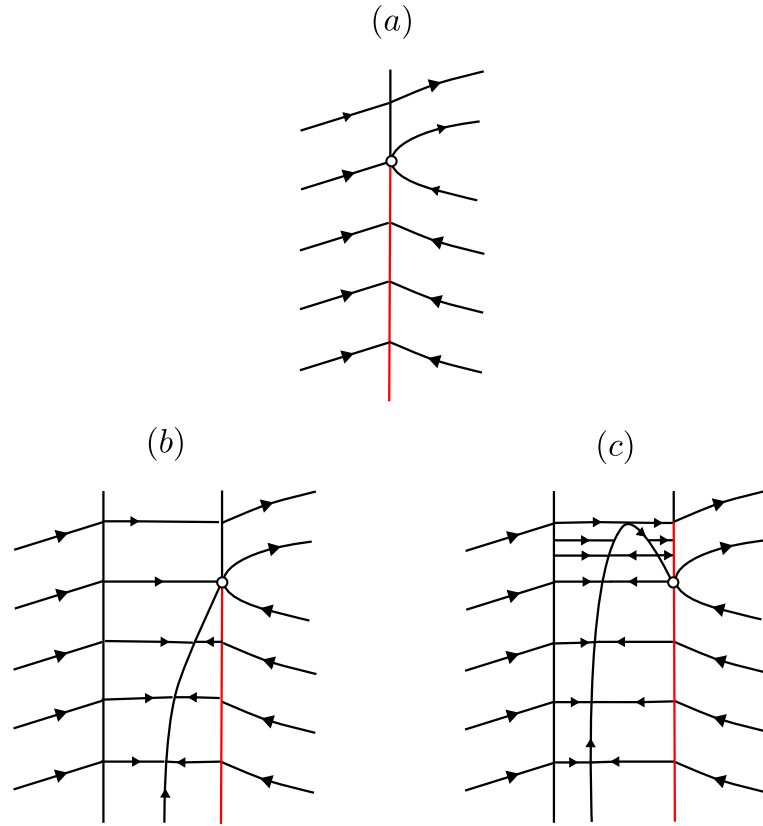


Figura 7.11: (a) Fluxo da 1-folheação suave por partes. (b) Fluxo obtido usando a regularização S-T. A região de deslize é mostrada em vermelho. (c) Fluxo obtido usando uma regularização do tipo transição.

Observação 7.37. Se considerarmos o caso em que o locus de descontinuidade Σ é um subconjunto analítico de dimensão d , podemos considerar uma noção mais refinada de deslize, considerando diferentes estratos de Σ .

Vejamos mais precisamente essa definição.

Definição 7.38. Usando a decomposição

$$\Sigma^0 \subset \Sigma^1 \subset \dots \subset \Sigma^d = \Sigma,$$

definida em 7.7, dizemos que o ponto $p \in \Sigma^k - \Sigma^{k-1}$ é um **ponto de deslize estratificado** para $\mathcal{F}^r$ se as condições 1. e 2. da definição 7.33 são satisfeitas, onde substituímos a condição de convergência em 2. por

$$d_H(S_\varepsilon \cap K, \Sigma \cap K) \rightarrow 0$$

quando $\varepsilon \rightarrow 0$. O conjunto de todos os pontos em $\Sigma^k - \Sigma^{k-1}$ satisfazendo a condição acima é chamado **região de deslize de dimensão k** , e denotado por $\text{Slide}^k(\mathcal{F}^r)$.

Exemplo 7.39. Vamos aplicar a regularização dupla descrita na Seção 7.3.2 para a 1-folheação descontínua definida pelo campo de vetores

$$X = -\text{sgn}(x)\frac{\partial}{\partial x} - \text{sgn}(y)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

e descrita no Exemplo 7.9.

O campo regularizado $X_{\varepsilon,\eta}$ é dado por

$$\begin{aligned} X_{\varepsilon,\eta} &= \left(1 + \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \left(1 + \psi\left(\frac{y}{\eta}\right)\right) \left(-\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &\quad + \left(1 + \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \left(1 - \psi\left(\frac{y}{\eta}\right)\right) \left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &\quad + \left(1 - \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \left(1 + \psi\left(\frac{y}{\eta}\right)\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &\quad + \left(1 - \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \left(1 - \psi\left(\frac{y}{\eta}\right)\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \Rightarrow X_{\varepsilon,\eta} &= 4 \left(-\phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x} - \psi\left(\frac{y}{\eta}\right) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Considere o estrato 1-dimensional $\Sigma^1 \subset \Sigma$ dado por $\Sigma^1 = \text{eixo } z$. Afirmamos que cada ponto de Σ^1 é um ponto de deslize estratificado para $\mathcal{F}^r$. De fato, se denotarmos por $t_0, u_0 \in (-1, 1)$ as únicas raízes de $\phi(t)$ e $\psi(u)$, respectivamente, então a curva 1-dimensional

$$S_{\varepsilon,\eta} = \{x = \varepsilon t_0, y = \eta u_0\}$$

é invariante por $X_{\varepsilon,\eta}$ e claramente converge para Σ^1 quando $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$.

Os conceitos e resultados introduzidos neste capítulo podem ser combinados com a técnica do blow up de maneira muito frutuosa. O próximo capítulo faz uso da combinação destas técnicas na obtenção dos resultados finais deste trabalho.

8 Regularização do tipo transição: blow up e condições de deslize

Estamos agora em condições de estabelecer os resultados principais deste trabalho, que tem por objetivo descrever condições que garantam que um ponto pertença a região de deslize de determinada regularização. Estaremos considerando para isso 1-folheações suaves por partes cujo locus de descontinuidade seja uma subvariedade suave de codimensão um e uma regularização $\mathcal{F}^r$ do tipo transição.

Convencionamos a seguinte notação. Seja $\mathcal{F}$ uma 1-folheação suave por partes definida em uma variedade M , cujo locus de descontinuidade é uma subvariedade suave $\Sigma \subset M$ de codimensão um.

Sendo $\mathcal{F}$ suave por partes, de acordo com a definição 7.16 vista na subseção 7.2, dado um ponto $p \in \Sigma$, podemos escolher coordenadas locais $(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ e campos de vetores suaves X_+ e X_- , definidos respectivamente em $U_+ = \{y > 0\}$ e $U_- = \{y < 0\}$, tais que $\Sigma = \{y = 0\}$ e $\{U_\pm, X_\pm\}$ são geradores locais de $\mathcal{F}$. Observe que essa é exatamente a mesma configuração usada na demonstração do Teorema 7.20.

O primeiro resultado deste capítulo discorre sobre a suavidade de $\mathcal{F}^r$.

Teorema 8.1. *Seja $\mathcal{F}^r$ uma regularização do tipo transição de $\mathcal{F}$. Então, $\mathcal{F}^r$ é suavizada por blow ups.*

Demonstração. Mostraremos que uma única aplicação de blow up será suficiente para obtermos uma 1-folheação suave partindo da regularização $\mathcal{F}^r$ de $\mathcal{F}$. Mais precisamente, considere N uma variedade e uma aplicação de blow up

$$\Phi : N \rightarrow M \times (\mathbb{R}^+, 0)$$

em Σ . Seja $D = \Phi^{-1}(\Sigma)$. Afirmamos que existe uma 1-folheação suave $\mathcal{G}$, definida em N , que está relacionada à $\mathcal{F}^r$ por Φ . Veja a Figura 8.1.

Para isso, usaremos a trivialização por cartas locais descritas na subseção 7.3.1, isto é, a 1-folheação suave $\mathcal{G}$ é dada pelo pullback de $\mathcal{F}^r$ por f , onde $f : N\Sigma \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre sua imagem $W = f(N\Sigma)$. Nestas cartas locais, assumimos que a aplicação f assume a forma

$$\begin{aligned} V \times \mathbb{R} &\rightarrow V \\ (x, y) &\mapsto x, \end{aligned}$$

para algum aberto $V \subset \Sigma$ e que $\mathcal{F}$ possui um multigerador local da forma $(V \times \mathbb{R}, \{X_+, X_-\})$, onde X_+ (respectivamente, X_-) é um campo de vetores suaves definido em $V \times \mathbb{R}$ que gera $\mathcal{G}$ em $U_+ = \{y > 0\}$ (respectivamente, $U_- = \{y < 0\}$). Ainda, a regularização do tipo transição de $\mathcal{F}$ fica definida pelo campo de vetores X_ε , dado pela equação 7.10.

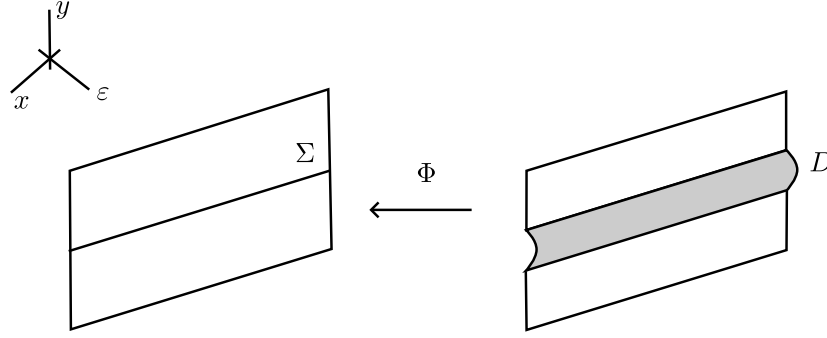


Figura 8.1: Blow up da regularização.

Nos restringindo a um subdomínio apropriado, reescrevemos a aplicação de blow up como

$$\begin{aligned} V \times S^1 \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, (\theta, r)) &\mapsto (x, y = r \cos \theta, \varepsilon = r \sin \theta) \end{aligned}$$

A fim de simplificar os cálculos vamos considerar uma cobertura de $S^1 \times \mathbb{R}$ dada por três cartas direcionais, cujos domínios são respectivamente, $E = \{\theta \not\equiv 0(\text{mod } \pi\mathbb{Z})\}$ e $F_{\pm} = \{\theta \not\equiv \pm\pi/2(\text{mod } 2\pi\mathbb{Z})\}$. Nestas cartas, a aplicação de blow up assume as respectivas formas

$$\begin{aligned} V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, (\bar{y}, \bar{\varepsilon})) &\mapsto (x, y = \bar{\varepsilon}\bar{y}, \varepsilon = \bar{\varepsilon}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, (\tilde{y}, \tilde{\varepsilon})) &\mapsto (x, y = \pm\tilde{y}, \varepsilon = \tilde{\varepsilon}\tilde{y}) \end{aligned}$$

Calculemos agora o pullback de X_{ε} em cada uma destas cartas.

Para a carta E , dado um vetor da base de $T(M \times \mathbb{R})$, temos as seguintes transformações

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}. \quad (8.1)$$

Usando a expressão de X_{ε} dada em 7.10 obtemos,

$$\Phi^* X_{\varepsilon} = \frac{1}{2}(1 + \psi(x, \bar{y}))\Phi^* X_+ + \frac{1}{2}(1 - \psi(x, \bar{y}))\Phi^* X_-.$$

Das equações em 8.1, segue que o campo de vetores

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\varepsilon}\Phi^* X_{\varepsilon} \quad (8.2)$$

possui uma extensão suave à $D = \{\bar{\varepsilon} = 0\}$. Consideramos, portanto, Y como um gerador local de $\mathcal{G}$ na E -carta.

Analogamente, nas cartas $F_{\pm}$, valem as seguintes igualdades:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \mp \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{\tilde{y}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}. \quad (8.3)$$

e, o pullback de X_ε possui a forma

$$\Phi^* X_\varepsilon = \frac{1}{2} \left(1 + \psi \left(x, \pm \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right) \right) \Phi^* X_+ + \frac{1}{2} \left(1 - \psi \left(x, \pm \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \right) \right) \Phi^* X_-.$$

Neste caso, observamos que, para todo $0 < \tilde{\varepsilon} \leq 1$, temos $\psi(x, \pm 1/\tilde{\varepsilon}) \equiv \pm 1$ e, podemos estender a função ψ suavemente para $\tilde{\varepsilon} = 0$ como sendo igual à ± 1 , de acordo com o domínio. Logo, o campo de vetores

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{y} \Phi^* X_\varepsilon \quad (8.4)$$

se estende suavemente à $D = \{\tilde{y} = 0\}$. Escolhemos o campo Z como um gerador local de $\mathcal{G}$ nas $F_\pm$ -cartas.

Assim, a 1-folheação $\mathcal{G}$ fica bem determinada, uma vez que descrevemos seus geradores locais. Portanto, $\mathcal{F}^r$ é suavizada por blow ups. $\square$

Passemos agora ao estudo das regiões de deslize. Antes vejamos algumas definições necessárias.

Definição 8.2. Usando a notação acima introduzida, definimos a **função altura** de $\mathcal{F}^r$ como a função suave h^r com domínio $(x, t) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ definida por

$$h^r(x, t) = \psi(x, t) \mathcal{L}_{(X_+ - X_-)}(y) + \mathcal{L}_{(X_+ + X_-)}(y),$$

em que $\psi(x, t)$ é a função de transição utilizada.

Observamos aqui que a derivada de Lie dos campos $X_+ - X_-$ e $X_+ + X_-$ devem ser avaliadas somente em pontos de Σ .

Se escrevermos os campos X_+ e X_- em termos das coordenadas locais de trivialização (x, y) utilizadas anteriormente como

$$X_\pm = a_\pm \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n-1} b_{i,\pm} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (8.5)$$

para funções suaves $a_\pm$ e $b_{i,\pm}$, então, a função altura de $\mathcal{F}^r$ é dada por

$$h^r(x, t) = \psi(x, t)(a_+(x, 0) - a_-(x, 0)) + (a_+(x, 0) + a_-(x, 0)). \quad (8.6)$$

Observação 8.3. Note que a função h^r independe da escolha das coordenadas locais (x, y) , bem como independe dos geradores locais (X_+, X_-) , a menos da multiplicação por uma função estritamente positiva. Mais precisamente, se substituirmos os geradores locais (X_+, X_-) por geradores locais (Y_+, Y_-) tais que $Y_\pm = \varphi X_\pm$, então h^r se torna φh^r .

Definição 8.4. Seja h^r a função altura de $\mathcal{F}^r$. Definimos os seguintes subconjuntos em $\Sigma \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Z^r &= \{h^r(x, t) = 0\}, \\ W^r &= \left\{ \frac{\partial h^r}{\partial t}(x, t) \neq 0 \right\}, \\ NH^r &= Z^r \cap W^r. \end{aligned}$$

A seguir enunciaremos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 8.5. *Seja $\mathcal{F}^r$ uma regularização do tipo transição de $\mathcal{F}$, definida por uma função de transição ψ . Então,*

$$\Pi(NH^r) \subset \text{Slide}(\mathcal{F}^r) \subset \Pi(Z^r),$$

onde $\Pi : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$ é a projeção canônica.

Demonstração. Vamos inicialmente calcular em mais detalhes a expressão da aplicação de blow up de X_ε na E -carta definida anteriormente na demonstração do Teorema 8.1.

Escrevendo o campo de vetores Y como

$$Y = \alpha \frac{\partial}{\partial \bar{y}} + \bar{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (8.7)$$

usando as expressões de X_+ e X_- dadas pela equação 8.5, temos que, para $i = 1, \dots, n-1$,

$$\beta_i = \frac{1}{2}(\psi(b_{i,+} - b_{i,-}) + (b_{i,+} + b_{i,-})),$$

e,

$$\alpha = \frac{1}{2}(\psi(a_+ - a_-) + (a_+ + a_-)),$$

onde a função de transição ψ é avaliada em $(x, t) = (x, \bar{y})$ e as funções $a_\pm$ e $b_{i,\pm}$ são avaliadas fazendo $y = \bar{\varepsilon}\bar{y}$. Observe que se considerarmos a restrição $Y|_D$ de Y , onde $D = \{\bar{\varepsilon} = 0\}$, o campo de vetores Y se expressa simplesmente por

$$Y|_D = \frac{1}{2}h^r(x, \bar{y}) \frac{\partial}{\partial \bar{y}}, \quad (8.8)$$

onde h^r é a função altura definida anteriormente.

Suponhamos agora que as coordenadas (x, y, ε) estão centradas em um ponto $p \in \Sigma \times \{0\}$ pertencente à $\Pi(NH^r)$. Da definição dos conjuntos Z^r e W^r , deve existir $y_0 \in \mathbb{R}$ pertencente ao intervalo aberto $(-1, 1)$ tal que

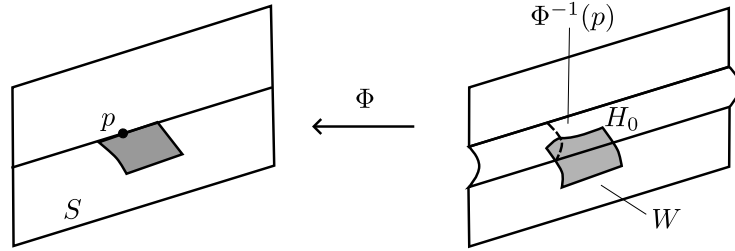
$$h^r(0, \bar{y}_0) = 0 \text{ e } \frac{\partial h^r}{\partial y}(0, \bar{y}_0) \neq 0.$$

Da expressão de $Y|_D$ em 8.8, segue do Teorema da Função Implícita que o ponto $q = (0, \bar{y}_0, 0) \in \Phi^{-1}(p)$ pertence (localmente) a uma subvariedade suave de codimensão um, H_0 , contida em $D = \{\bar{\varepsilon} = 0\}$ tal que

1. Cada ponto de H_0 é um ponto de equilíbrio de $Y|_D$;
2. H_0 é uma subvariedade invariante normalmente hiperbólica de $Y|_D$.

Da Teoria de Fenichel, encontrada em [9], segue que existe uma variedade suave local $W \subset N$ de codimensão um definida próxima de p que é invariante pelo fluxo de Y e tal que $W \cap D = H_0$.

Defina $S = \Phi(W)$. Então, temos que para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o conjunto $S_\varepsilon = S \cap \Pi^{-1}(\varepsilon)$ é uma subvariedade invariante de $\mathcal{F}_\varepsilon^r$ e S_ε se acumula em $\Phi(H_0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Figura 8.2: Variedade normalmente hiperbólica H_0 .

Portanto, $p \in \text{Slide}(\mathcal{F}^r)$. Veja a Figura 8.2.

Provamos com isso que $\Pi(NH^r) \subset \text{Slide}(\mathcal{F}^r)$. A inclusão restante será mostrada ao final deste capítulo. $\square$

Em seguida, vamos descrever o comportamento de uma regularização no complemento do conjunto de deslize, introduzindo para tal a chamada região de costura.

Definição 8.6. Mantendo a notação utilizada nos últimos parágrafos, dizemos que um ponto $p \in \Sigma$ é um **ponto de costura** para a regularização $\mathcal{F}^r$ de $\mathcal{F}$, se existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p e coordenadas locais (x, y) , definidas em U , tais que

1. $\Sigma = \{y = 0\}$ e;
2. Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o campo de vetores “vertical” $\frac{\partial}{\partial y}$ é um gerador de $\mathcal{F}_\varepsilon^r$ em U .

Em outras palavras, um ponto p é um ponto de costura para a regularização $\mathcal{F}^r$ de $\mathcal{F}$ se em uma vizinhança de p o fluxo determinado por $\mathcal{F}^r$ é transversal à Σ .

Denotaremos o conjunto de todos os pontos de costura de $\mathcal{F}^r$ por $\text{Sew}(\mathcal{F}^r)$.

Observação 8.7. Observamos que as regiões de deslize $\text{Slide}(\mathcal{F}^r)$ e de costura $\text{Sew}(\mathcal{F}^r)$ não possuem intersecção.

De fato, se $p \in \text{Sew}(\mathcal{F}^r)$, então, nas coordenadas (x, y) descritas acima, cada variedade suave S_ε que é invariante por $\mathcal{F}_\varepsilon^r$ têm necessariamente a forma

$$S_\varepsilon = \{f_\varepsilon(x) = 0\},$$

para alguma função suave f_ε que independe da variável y . Em particular, S_ε não pode tender ao locus de descontinuidade $\Sigma = \{y = 0\}$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, $p \notin \text{Slide}(\mathcal{F}^r)$.

O teorema a seguir traz informações do comportamento da regularização $\mathcal{F}^r$ na região de costura que acabamos de definir.

Teorema 8.8. *Seja $\mathcal{F}^r$ uma regularização do tipo transição de $\mathcal{F}$, definida por uma função ψ . Então,*

$$\Pi(Z^r)^c \subset \text{Sew}(\mathcal{F}^r),$$

onde $\Pi(Z^r)^c$ denota o complemento de $\Pi(Z^r)$ em Σ .

Demonstração. Suponha que as coordenadas (x, y, ε) descritas na demonstração do Teorema 8.1 estejam centradas em um ponto $p \in \Sigma \times \{0\}$ que pertence a $\Pi(Z^r)^c$. Afirmamos que existe uma constante $\mu > 0$ e uma vizinhança aberta $U \subset M \times (\mathbb{R}^+, 0)$ de p tal que a função

$$g = \mathcal{L}_{X_\varepsilon}(y),$$

que está definida somente para $\varepsilon > 0$, satisfaça $|g| > \mu$ em $U \cap \{\varepsilon > 0\}$. Uma vez que provemos essa afirmação, o resultado segue como consequência imediata do Teorema do Fluxo Tubular (veja a Figura 8.3).

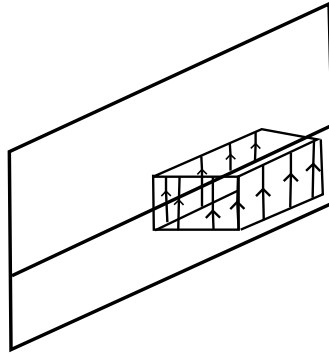


Figura 8.3: Região de costura.

Provemos essa afirmação. Para isso, usaremos que, se f é uma função suave, X um campo de vetores definido em um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ e $\Psi : W \rightarrow V$ é um difeomorfismo entre os abertos W e V , então

$$(\mathcal{L}_X(f)) \circ \Psi = \mathcal{L}_{\Psi^*X}(f \circ \Psi). \quad (8.9)$$

Em outras palavras, a operação de derivada de Lie comuta com a operação de pullback. Aplicaremos esse fato ao campo de vetores X_ε e à aplicação de blow up Φ definida na demonstração do Teorema 8.1, lembrando que Φ é um difeomorfismo fora de D . Portanto, da igualdade em 8.9, temos

$$g \circ \Phi = \mathcal{L}_{\Phi^*X_\varepsilon}(y \circ \Phi).$$

Considerando as cartas locais, $E, F_\pm$, definidas anteriormente, calculemos explicitamente essa expressão. Na carta E temos,

$$\Phi^*X_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}Y \text{ e } y \circ \Phi = \bar{\varepsilon}\bar{y},$$

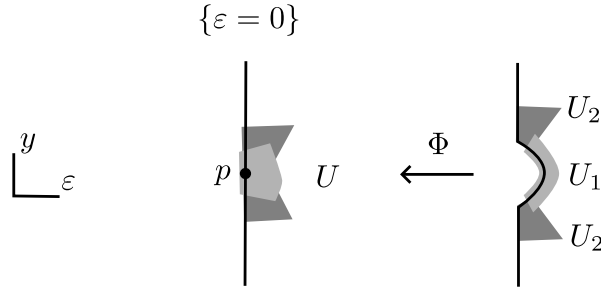
onde Y é o campo de vetores dado pela equação 8.2. Usando das propriedades da derivada de Lie, temos

$$\begin{aligned} g \circ \Phi &= \mathcal{L}_{\frac{1}{\varepsilon}Y}(\bar{\varepsilon}\bar{y}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}_Y(\bar{\varepsilon}\bar{y}) && (\text{pois } \mathcal{L}_{fX}(g) = f\mathcal{L}_X(g)) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}(\bar{\varepsilon}\mathcal{L}_Y(\bar{y}) + \bar{y}\mathcal{L}_Y(\bar{\varepsilon})) && (\text{Regra de Leibniz}) \\ &= \mathcal{L}_Y(\bar{y}) && (\text{pois } \mathcal{L}_Y(\bar{\varepsilon}) = 0) \end{aligned}$$

Usando agora a expressão do campo de vetores Y dada na equação 8.7, obtemos

$$\mathcal{L}_Y(\bar{y}) = \frac{1}{2}(\psi(x, \bar{y})(a_+ - a_-) + (a_+ + a_-)),$$

em que as funções a_+ e a_- são avaliadas em $(x, y) = (x, \bar{\varepsilon}\bar{y})$. Nos restringindo à $D = \{\bar{\varepsilon} = 0\}$ e da equação 8.8, podemos mostrar que $|g \circ \Phi| > \mu$, para algum μ , em alguma vizinhança suficientemente pequena U_1 de $\Phi^{-1}(p)$ no domínio da E -carta. Veja a Figura 8.4.

Figura 8.4: Regiões U_1 e U_2 .

Analogamente calculamos $g \circ \Phi$ nas cartas $F_{\pm}$. Temos,

$$g \circ \Phi = \frac{1}{\tilde{y}} \mathcal{L}_Z(\tilde{y}).$$

Por outro lado, da demonstração do Teorema 8.1,

$$\mathcal{L}_Z(\tilde{y}) = \pm \frac{\tilde{y}}{2} (\psi(x, \frac{1}{\tilde{\varepsilon}})(a_+ - a_-) + (a_+ + a_-)),$$

onde as funções a_+ e a_- são avaliadas em $(x, y) = (x, \pm \tilde{y})$. Novamente, nos restringindo à excepcional $D = \{\tilde{y} = 0\}$ temos que $|g \circ \Phi| > \mu$ uniformemente em uma vizinhança suficientemente pequena U_2 (Figura 8.4) de $\Phi^{-1}(p)$ nos domínios das cartas $F_{\pm}$.

Uma vez que os domínios de E e $F_{\pm}$ cobrem uma vizinhança inteira de $\Phi^{-1}(p)$, por construção, temos que $U_1 \cup U_2$ é uma vizinhança de $\Phi^{-1}(p)$ na qual $|g \circ \Phi| > \mu$. Logo, a desigualdade $|g| > \mu$ permanece válida na vizinhança $U = \Phi(U_1 \cup U_2)$ de p . E isso conclui a demonstração do Teorema. □

A seguir, mostraremos a inclusão restante do Teorema 8.5 que conclui a sua prova.

Demonstração. (Final da demonstração do Teorema 8.5): Mostremos agora que $\text{Slide}(\mathcal{F}^r) \subset \Pi(Z^r)$.

Da observação 8.7 sabemos que $\text{Slide}(\mathcal{F}^r) \cap \text{Sew}(\mathcal{F}^r) = \emptyset$. Combinando isso com o resultado do Teorema 8.8 concluímos que

$$\text{Slide}(\mathcal{F}^r) \cap \Pi(Z^r)^c = \emptyset,$$

o que conclui a prova do Teorema 8.5. □

A figura 8.5 ilustra a geometria dos Teoremas 8.5 e 8.8.

Observação 8.9. No caso da regularização Sotomayor-Teixeira, recordamos que exigimos que a função de transição seja estritamente monótona no intervalo $(-1, 1)$. Neste caso, podemos descrever o conjunto $\Pi(Z^r)$, de forma alternativa, pela condição

$$a_+ \cdot a_- \leq 0.$$

Em outras palavras, obtemos a “condição usual” de deslize de Filippov. Correspondentemente, neste caso, o conjunto $\Pi(Z^r)^c$ é descrito pela condição

$$a_+ \cdot a_- > 0,$$

que corresponde à condição de costura de Filippov.

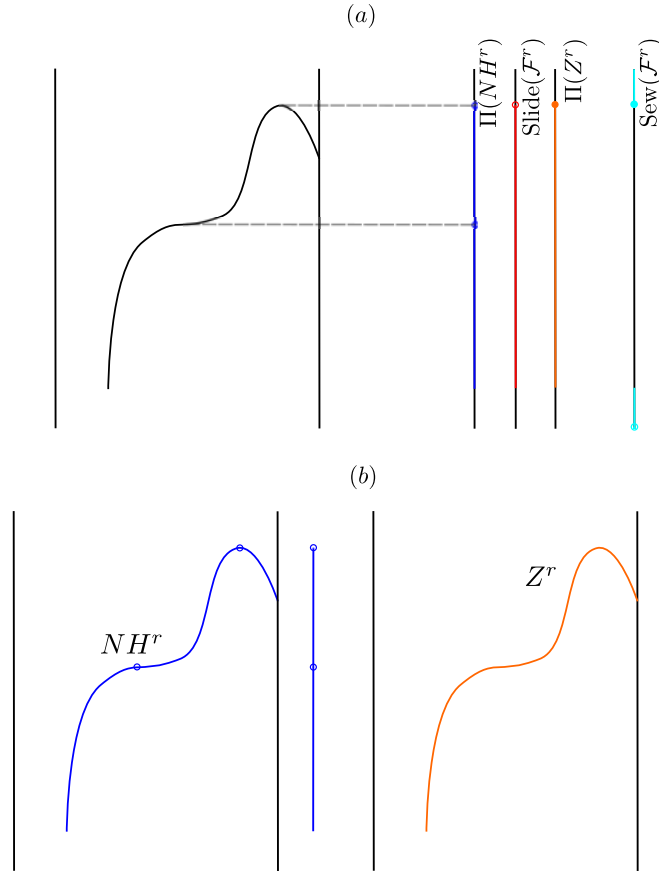


Figura 8.5: (a) Gráfico de uma função de transição não-monótona e regiões de deslize, $\text{Slide}(\mathcal{F}^r)$, e de costura, $\text{Sew}(\mathcal{F}^r)$. (b) Representação dos conjuntos NH^r e Z^r .

Observação 8.10. A dinâmica definida na região de deslize pode depender da escolha da função de transição escolhida. O exemplo a seguir ilustra bem esse fato.

Exemplo 8.11. Seja $\mathcal{F}$ a 1-folheação descontínua em $\mathbb{R}^2$ dada pelo campo de vetores

$$X = (x^2 + y) \frac{\partial}{\partial x} - \text{sgn}(y) \frac{\partial}{\partial y},$$

que possui $\Sigma = \{y = 0\}$ por locus de descontinuidade.

Explicitamente, $\mathcal{F} = \{U_{\pm}, X_{\pm}\}$, onde o campo de vetores

$$X_+ = (x^2 + y) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$$

é definido em $U_+ = \{y > 0\}$ e,

$$X_- = (x^2 + y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

é definido em $U_- = \{y < 0\}$.

Dada uma função de transição monótona ϕ , a regularização Sotomayor-Teixeira $\mathcal{F}^r$ de $\mathcal{F}$ fica determinada pelo campo X_{ε} descrito na equação 7.8, isto é,

$$\begin{aligned} X_{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left(1 + \phi \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) \right) \left((x^2 + y) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \phi \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) \right) \left((x^2 + y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= (x^2 + y) \frac{\partial}{\partial x} - \phi \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Temos, portanto, $\text{Slide}(\mathcal{F}^r) = \Sigma$. De fato, se $t_0 \in (-1, 1)$ é o único zero da função de transição ϕ , então a curva $S_\varepsilon = \{y = t_0\varepsilon\}$ é invariante pelo fluxo de X_ε para cada $\varepsilon > 0$ e, ainda $S_\varepsilon \rightarrow \Sigma, \varepsilon \rightarrow 0$.

Observe também que o fluxo de X_ε restrito à S_ε é determinado pelo campo de vetores

$$(x^2 + t_0\varepsilon) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Em particular, encontramos três comportamentos completamente distintos dependendo do sinal de t_0 .

Voltemos agora aos exemplos da Seção 7.4.

Exemplo 8.12. Para a 1-folheação dada pelo campo de vetores do Exemplo 7.34, usando a notação acima, temos

$$\begin{aligned} X_+ &= \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} & (a_+ = -1, b_+ = 1) \\ X_- &= \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & (a_- = 1, b_- = 1) \end{aligned}$$

Calculemos a função h^r de $\mathcal{F}^r$.

$$h^r(x, t) = -2\phi(t).$$

Observe que, $h^r(x, t) = 0 \implies \phi(t) = 0$, ou seja, se $t = t_0$ onde t_0 é o único zero da função ϕ em $(-1, 1)$. E obtemos portanto, a mesma condição para a região de deslize de $\mathcal{F}^r$ obtida antes no Exemplo 7.34.

Analogamente, para 1-folheação descrita no Exemplo 7.35, temos

$$\begin{aligned} X_+ &= \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y} & (a_+ = 2x, b_+ = 1) \\ X_- &= \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial y} & (a_- = 2, b_- = 1) \end{aligned}$$

Calculemos a função h^r para $\mathcal{F}^r$. Temos

$$h^r(x, t) = \phi(t)(2x - 2) + (2x + 2).$$

Note que,

$$h^r(x, t) = 0 \implies \phi(t) = -\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1}{1-x}$$

A equação acima possui solução se, e somente, se $x < 0$, e obtemos portanto a mesma condição obtida no Exemplo 7.35, usando agora a função altura h^r de $\mathcal{F}^r$.

Referências

- [1] E. Bierstone and P. D. Milman. Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant. *Inventiones Mathematicae*, 128(2):207 – 302, 1997.
- [2] C. A. Buzzi, P. R. da Silva, and M. A. Teixeira. A singular approach to discontinuous vector fields on the plane. *Journal of Differential Equations*, 231(2):633–655, 2006.
- [3] C. E. L. da Silva. Ciclos canard e variedades centrais. Master’s thesis, Universidade de São Paulo, 2005.
- [4] P. R da Silva and J. R. de Moraes. Piecewise-smooth slow–fast systems. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 27(1):67–85, 2021.
- [5] F. Dumortier. *Techniques in the Theory of Local Bifurcations: Blow-Up, Normal Forms, Nilpotent Bifurcations, Singular Perturbations*, pages 19–73. Springer Netherlands, Dordrecht, 1993.
- [6] F. Dumortier and R. Roussarie. *Canard cycles and center manifolds*, volume 577. American Mathematical Soc., 1996.
- [7] N. Fenichel. Asymptotic stability with rate conditions. *Indiana University Mathematics Journal*, 23(12):1109–1137, 1974.
- [8] N. Fenichel. Asymptotic stability with rate conditions, ii. *Indiana University Mathematics Journal*, 26(1):81–93, 1977.
- [9] N. Fenichel. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 31(1):53–98, 1979.
- [10] N. Fenichel and J. K. Moser. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. *Indiana University Mathematics Journal*, 21(3):193–226, 1971.
- [11] A. F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides*, volume 18 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988. Translated from the Russian.
- [12] M. Guardia, T. M. Seara, and M. A. Teixeira. Generic bifurcations of low codimension of planar filippov systems. *Journal of Differential equations*, 250(4):1967–2023, 2011.
- [13] M. W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33. Springer Science & Business Media, 2012.

-
- [14] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, and M. Shub. *Invariant manifolds*, volume 583. Springer, 2006.
 - [15] G. M. C. Jiménez. Retratos de fase globais de campos de vetores polinomiais no plano e a conjectura jacobiana real. Master's thesis, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2019.
 - [16] C. Kuehn. *Multiple time scale dynamics*, volume 191. Springer, 2015.
 - [17] Y. A. Kuznetsov, S. Rinaldi, and A. Gragnani. One-parameter bifurcations in planar flippov systems. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 13(08):2157–2188, 2003.
 - [18] S. law Łojasiewicz. Ensembles semi-analytiques. *IHES notes*, 1965.
 - [19] J. M. Lee. *Riemannian manifolds: an introduction to curvature*, volume 176. Springer Science & Business Media, 2006.
 - [20] J. Llibre, M. A. Teixeira, and P. R. da Silva. Sliding Vector Fields via Slow–Fast Systems. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin*, 15(5):851 – 869, 2008.
 - [21] A. L. F. Machado. *Estabilidade Estrutural e Bifurcações de Campos de Vetores Descontínuos*. PhD thesis, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.
 - [22] R. B. Melrose. Differential analysis on manifolds with corners, 1996.
 - [23] D. Panazzolo and da Silva. P. R. Regularization of discontinuous foliations: Blowing up and sliding conditions via fenichel theory. *Journal of Differential Equations*, 263(12):8362–8390, 2017.
 - [24] O. H. Perez. Bifurcações genéricas e relações de equivalência em campos de vetores suaves por partes. Master's thesis, Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas (IBILCE), Universidade Estadual Paulista (Unesp), São José do Rio Preto, 2017.
 - [25] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*, volume 7. Springer-Verlag, 1990.
 - [26] R. J. Sacker. A perturbation theorem for invariant manifolds and hölder continuity. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 18(8):705–762, 1969.
 - [27] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, volume 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.
 - [28] J. Sotomayor and M. A. Teixeira. Regularization of discontinuous vector fields. In *Proceedings of the international conference on differential equations, Lisboa*, pages 207–223. World Scientific, 1996.
 - [29] F. Tari. Singularidades de aplicações diferenciáveis. 1999.
 - [30] H. Whitney. Differentiable manifolds. *Annals of Mathematics*, pages 645–680, 1936.

-
- [31] S. Wiggins. *Normally hyperbolic invariant manifolds in dynamical systems*, volume 105. Springer Science & Business Media, 1994.

A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias

Neste apêndice recordaremos brevemente os principais conceitos e resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias. As demonstrações que aqui serão omitidas podem ser encontradas pelo leitor em qualquer livro base de um curso de EDO, como por exemplo, os clássicos [27] e [25].

Definição A.1. Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma relação do tipo

$$x^{(k)} = F(t, x, x', \dots, x^{(k-1)}), \quad (t, x, x', \dots, x^{(k-1)}) \in U$$

onde $t \in \mathbb{R}$, $x^{(i)} \in \mathbb{R}^d$, $i \in \{0, 1, \dots, k\}$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{1+kd}$. Se F não depende da variável t , a EDO é dita autônoma. Caso contrário a EDO é dita não autônoma.

Definição A.2. Uma solução de uma EDO

$$x^k = F(t, x, x', \dots, x^{(k-1)}), \quad (t, x, x', \dots, x^{(k-1)}) \in U$$

é uma curva $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$, k vezes diferenciável no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t)) \in U$, para todo $t \in I$;
- $\varphi^{(k)}(t) = F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(k-1)}(t))$, para todo $t \in I$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^{1+d}$ e considere a função $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua. Dado $(t_0, x_0) \in U$, o Problema de Cauchy

$$\begin{aligned} x' &= F(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

consiste em encontrar uma solução $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ da EDO $x' = F(t, x)$ satisfazendo $\varphi(t_0) = x_0$.

Proposição A.3. *Seja $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função tal que $(t, \varphi(t)) \in U$ para todo $t \in I$. Então, φ é solução do Problema de Cauchy A.1 se, e somente se,*

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \varphi(s)) ds.$$

A.1 Existência e Unicidade de Soluções

Nesta seção, apresentaremos condições suficientes para que o Problema de Cauchy A.1

$$\begin{aligned}x' &= F(t, x) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

admita solução e que, ademais, que essa solução seja única de acordo com a seguinte definição:

Definição A.4. Seja $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma solução do Problema de Cauchy A.1. Dizemos que essa solução é única se, para qualquer outra solução $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ de A.1, tivermos que $\varphi|_{I \cap J} = \psi|_{I \cap J}$.

Fixemos as notações:

- Para $a > 0$ e $s \in \mathbb{R}$, denotamos $I_a(s) = \{t \in \mathbb{R} : |t - s| \leq a\}$.
- Para $b > 0$ e $y \in \mathbb{R}^d$, denotamos $B_b(y) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x - y| \leq b\}$.

Teorema A.5. Teorema Local de Picard: Dados $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ e $a, b > 0$, sejam $U = I_a(t_0) \times B_b(x_0)$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua em U e Lipschitz na segunda variável. Defina $X_{a,b} := \{\varphi : I_\alpha(t_0) \rightarrow B_b(x_0) : \varphi \text{ é contínua}\}$, onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$ e $M > 0$ é tal que $\max\{|F(t, x)| : (t, x) \in U\} \leq M$. Então, existe uma única função $\varphi \in X_{a,b}$ que é solução do Problema de Cauchy A.1.

Teorema A.6. Teorema de Picard: Dado U aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua em U e localmente Lipschitz na segunda variável. Então, para cada $(t_0, x_0) \in U$, existe uma única solução $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ do Problema de Cauchy A.1. Mais ainda, $I_\alpha(t_0) \subset I$ e $\varphi(I_\alpha) \subset B_b(x_0)$, onde I_α é dado como acima com $a, b > 0$ tais que $U_{a,b} := I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0) \subset U$ e $M > 0$ tal que $\max\{|F(t, x)| : (t, x) \in U_{a,b}\} < M$.

Teorema A.7. Teorema Local de Peano: Dados $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ e $a, b > 0$, sejam $U = I_a(t_0) \times B_b(x_0)$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua em U . Então, existe uma função $\varphi : I_\alpha(t_0) \rightarrow B_b(x_0)$ onde $\alpha = \min\{a, b/M\}$ e $M > 0$ é tal que $\max\{|F(t, x)| : (t, x) \in U\} \leq M$ que é solução do Problema de Cauchy A.1.

Teorema A.8. Teorema de Peano: Dado U aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua em U . Então, para cada $(t_0, x_0) \in U$, o Problema de Cauchy A.1 admite solução $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$. Mais ainda $I_\alpha(t_0) \subset I$ onde I_α é dado como acima com $a, b > 0$ tais que $U_{a,b} := I_\alpha(t_0) \times B_b(x_0) \subset U$ e $M > 0$ tal que $\max\{|F(t, x)| : (t, x) \in U_{a,b}\} < M$.

A.2 Existência e comportamento limite das soluções maximais

Definição A.9. Uma solução $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ de $x' = F(t, x)$ é dita maximal se para qualquer outra solução $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^d$, tal que $I \subset J$ e $\psi|_I = \varphi$, tivermos que $I = J$. Em outras palavras, φ não admite extensão que é também solução. Neste caso I é chamado Intervalo Maximal.

Teorema A.10. Teorema da Existência das Soluções Maximais: Dado U aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua. Então, para cada $(t_0, x_0) \in U$, o Problema de Cauchy A.1 admite solução maximal $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Teorema A.11. Teorema da Unicidade de Soluções Maximais: Dado U aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua. Assuma que, para cada $(t_0, x_0) \in U$, o Problema de Cauchy A.1 admite solução única. Então, para cada $(t_0, x_0) \in U$ a solução maximal do Problema de Cauchy A.1 é única.

Teorema A.12. Teorema do Comportamento Limite das Soluções Maximais: Dado U aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ contínua. Assuma que $\varphi : (w^-, w^+) \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma solução maximal de $x' = F(t, x)$ e considere a curva $g(t) = (t, \varphi(t)) \subset U$. Então, $g(t)$ “tende” a ∂U , quando $t \rightarrow w^\pm$, isto é,

$$\forall K \subset U \text{ compacto}, \exists T^\pm < (>)w^\pm; g(t) \notin K, \forall t \in (w^-, T^-) \cup (T^+, w^+)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall K \subset U \text{ compacto}, \forall (t_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}} \subset (w^-, w^+), t_n^\pm \rightarrow w^\pm, \exists m \in \mathbb{N}; g(t_n^\pm) \notin K, \forall n \geq m.$$

A.3 Campos Vetoriais

Definição A.13. Sejam $U \subset \mathbb{R}^d$ e $I \subset \mathbb{R}$ abertos.

- Um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^r$ em U é qualquer função $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^r$;
- Uma trajetória (ou curva integral) do campo vetorial F é definida como sendo uma solução maximal da EDO autônoma

$$x' = F(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times U;$$

- Uma órbita do campo vetorial F por $p \in U$ é definida como sendo o conjunto

$$\gamma_p = \{\varphi_p(t), t \in I_p\},$$

onde $\varphi_p : I_p \rightarrow \mathbb{R}^d$ é trajetória de F satisfazendo $\varphi_p(0) = p$, isto é, é solução maximal de $x' = F(x), x(0) = p$.

Teorema A.14. Teorema das Trajetórias: Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ é trajetória do campo vetorial $x' = F(x)$, então, verifica-se uma das seguintes alternativas:

1. φ é injetora;
2. $I = \mathbb{R}$ e φ é constante;
3. $I = \mathbb{R}$ e existe $T > 0$ tal que $\varphi(t+T) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi(t) \neq \varphi(s)$ sempre que $|t-s| < T$ (trajetória periódica).

Teorema A.15. Teorema das Órbitas: Se γ é uma órbita do campo vetorial $x' = F(x)$, então, ou γ é um ponto (órbita estacionária, equilíbrio ou singularidade) ou γ é uma curva de classe $\mathcal{C}^r$ homeomorfa, ou a um intervalo aberto ou à $\mathbb{S}^1$ (órbita periódica ou fechada, respectivamente).

Considere a seguinte relação de equivalência: dados $p, q \in U$, $p \sim q \iff q \in \gamma_p$. Note que a classe de equivalência de $p \in U$ é dada por $[p] = \gamma_p$. Como é usual, o quociente $U/\sim$ denota o conjunto das classes de equivalência. Assim, U pode ser decomposto da seguinte forma

$$U = \bigcup_{[p] \in U/\sim} \gamma_p \quad (\text{A.2})$$

Definição A.16. Considere uma órbita γ do campo vetorial F e seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ uma parametrização $\mathcal{C}^1$ de γ . Dizemos que α está orientada pelo campo vetorial F se $\langle \alpha'(t), F(\alpha(t)) \rangle > 0$, para todo $t \in I$.

Definição A.17. A decomposição A.2 munida da orientação proveniente do campo vetorial F é chamada de Espaço de Fase do campo vetorial F .

Definição A.18. Seja V um conjunto. Dizemos que $\varphi : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ é um fluxo em V se

- $\varphi(0, p) = p$, para todo $p \in V$;
- $\varphi(s, \varphi(t, p)) = \varphi(s+t, p)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}$, e $p \in V$.

Proposição A.19. Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ aberto e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo vetorial $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$. Para cada $p \in U$, denotamos por $\varphi_p : I_p \rightarrow U$ a trajetória do campo F passando por p . Considere o conjunto $D = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times U : t \in I_p\}$. A função

$$\begin{aligned} \varphi : D &\rightarrow U \\ (t, p) &\mapsto \varphi_p(t) \end{aligned}$$

é um fluxo local em U .

Definição A.20. Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ aberto e sejam F e G campos vetoriais completos em U . Dizemos que os fluxos de F e G comutam se $F_t \circ G_s = G_s \circ F_t$, para todo $(s, t) \in \mathbb{R}^2$.

Definição A.21. Sejam U, V abertos em $\mathbb{R}^d$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo em U . Seja $\phi : U \rightarrow V$ um difeomorfismo. O pushforward do campo F é definido como sendo o campo $\phi_*F : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ em V dado por

$$\phi_*F(y) := d\phi(\phi^{-1}(y))F(\phi^{-1}(y)), \quad y \in V.$$

Definição A.22. Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ aberto e sejam F, G campos vetoriais em U de classe $\mathcal{C}^1$. O Colchete de Lie entre F e G é definido por

$$[F, G](x) = \frac{d}{dt}(dF_t(F_t(x))G(F_t(x)))|_{t=0}.$$

Teorema A.23. Teorema da Comutação dos Fluxos: *Seja U aberto em $\mathbb{R}^d$ e sejam $F, G : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campos completos em U de classe $\mathcal{C}^1$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $[F, G] = 0$;
2. $(F_t)_*G = G$, para todo $t \in \mathbb{R}$;
3. $(G_t)_*F = F$, para todo $t \in \mathbb{R}$;

4. $F_t \circ G_s = G_s \circ F_t$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Definição A.24. Sejam $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $G : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ campos vetoriais $\mathcal{C}^1$ definidos nos abertos $U, V \subset \mathbb{R}^d$, respectivamente. Dizemos que F é topologicamente equivalente (respectivamente, $\mathcal{C}^r$ -equivalente) à G se existir um homeomorfismo (respectivamente, um difeomorfismo $\mathcal{C}^r$) $h : U \rightarrow V$ que leva órbitas de F em órbitas de G preservando a orientação. Mais precisamente,

$$G_t(h(p)) = h(F_{\tau_p(t)}(p)), \text{ para todo } t \in I_{h(p)},$$

onde $\tau_p : I_{h(p)}^G \rightarrow I_p^F$ é uma função estritamente crescente.

Definição A.25. Sejam $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ e $G : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ campos vetoriais $\mathcal{C}^1$ definidos nos abertos $U, V \subset \mathbb{R}^d$, respectivamente. Dizemos que F é topologicamente conjugado (respectivamente $\mathcal{C}^r$ -conjugado) à G se existir um homeomorfismo (respectivamente um difeomorfismo $\mathcal{C}^r$) $h : U \rightarrow V$ tal que $I_p^F = I_{h(p)}^G$ para todo $p \in U$ e $h \circ F_t = G_t \circ h$ para todo $t \in I_p$. Se h é $\mathcal{C}^r$, então $G = h_*F$.

A.4 Estrutura Local dos Pontos Regulares

Definição A.26. Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$. Um ponto $p \in U$ é chamado de singularidade (ou ponto singular ou equilíbrio) do campo F se $F(p) = 0$. Caso contrário, p é chamado de ponto regular do campo F .

Definição A.27. Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$. Seja $S \subset \mathbb{R}^{d-1}$ aberto e $f : S \rightarrow U$ função $\mathcal{C}^1$ injetiva. Dizemos que $\Sigma = f(S)$ é uma seção transversal de F se $df(s) \cdot \mathbb{R}^{d-1}$ e $F(f(s))$ geram o espaço $\mathbb{R}^d$. Mais ainda, Σ é dita seção transversal em p se $f(0) = p$.

Teorema A.28. Teorema do Fluxo Tubular: *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$, $p \in U$ um ponto regular e Σ seção transversal em p . Então, existe uma vizinhança V de p em U e um difeomorfismo $h : V \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$, onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta de $\mathbb{R}^{d-1}$ centrada na origem tal que*

- $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$ e
- $h_*(F|_V) = G$, onde $G : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ é um campo vetorial constante dado por $G(t, y) = (1, 0)$.

Teorema A.29. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ um campo vetorial $\mathcal{C}^1$. Assuma que, para algum $p \in U$, γ_p é órbita periódica, isto é, $t \mapsto \varphi(t, p)$ é T -periódica para algum período (mínimo) $T > 0$. Seja $\tilde{\Sigma}$ seção transversal de F em p . Então, existem Σ, Σ_0 abertos em $\tilde{\Sigma}$ contendo p tais que $\Sigma_0 \subset \Sigma$ e $\varphi(t, p) \notin \Sigma$, para todo $t \in (0, T)$ e $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que:*

- $\tau(p) = T$;
- $\varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$, para todo $q \in \Sigma_0$;
- $\varphi(t, q) \notin \Sigma$, para todo $t \in (0, \tau(q))$ e $q \in \Sigma_0$;
- $\Pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$, definida por $\Pi(q) = \varphi(\tau(q), q)$ é um difeomorfismo $\mathcal{C}^1$ sobre sua imagem.

A função $\Pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ é chamada de mapa (aplicação) de Poincaré (ou aplicação de primeiro retorno de Poincaré) e Σ_0 é chamada seção de Poincaré.

A.5 Conjuntos Limites e Teorema de Poincaré-Bendixson

Definição A.30. Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$. Dado $p \in U$, denote por $I_p = (w_p^-, w_p^+)$ o intervalo maximal de definição de $\varphi(\cdot, p)$.

- Se $w_p^+ = \infty$, definimos o conjunto w -limite de p como sendo o conjunto

$$w(p) = \{x \in U : \exists t_n \nearrow \infty \text{ tal que } \lim \varphi(t_n, p) = x\}.$$

- Se $w_p^- = -\infty$, definimos o conjunto α -limite de p como sendo o conjunto

$$\alpha(p) = \{x \in U : \exists t_n \searrow -\infty \text{ tal que } \lim \varphi(t_n, p) = x\}.$$

Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$. Dado $p \in U$, denotamos a semi-órbita positiva de p por

$$\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) : t \in [0, w_p^+)\},$$

e a semi-órbita negativa de p por

$$\gamma_p^- = \{\varphi(t, p) : t \in (w_p^-, 0]\}.$$

Teorema A.31. Teorema dos Conjuntos Limites: *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$. Se, para algum $p \in U$, γ_p^+ está contida em um compacto $K \subset U$, então:*

1. $w(p) \neq \emptyset$;
2. $w(p)$ é compacto em K ;
3. $w(p)$ é invariante por F_t , isto é, $F_t(q) \in w(p)$, para todo $t \in I_q$ e $q \in w(p)$. Mais ainda, $I_q = \mathbb{R}$, para todo $q \in w(p)$;
4. $w(p)$ é conexo.

Se $\gamma_p^- \subset K$, as afirmações acima valem para $\alpha(p)$.

Definição A.32. Uma órbita periódica γ de um campo vetorial $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ é dita

- Ciclo limite: se existe $p \in U - \{\gamma\}$ tal que $\gamma = w(p)$ ou $\gamma = \alpha(p)$;
- Ciclo limite atrator: se existe uma vizinhança V de γ tal que $w(p) = \gamma$, para todo $p \in V$. Equivalentemente, $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, p), \gamma) = 0$, para todo $p \in V$;
- Ciclo limite repulsor: se existe uma vizinhança V de γ tal que $\alpha(p) = \gamma$, para todo $p \in V$. Equivalentemente, $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, p), \gamma) = 0$, para todo $p \in V$.

Definição A.33. Uma órbita periódica γ de um campo vetorial planar $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dita um ciclo limite semi-estável se existe uma vizinhança V de γ tal que $w(p) = \gamma$, para todo $p \in V \cap \text{int}(\gamma)$ e $\alpha(p) = \gamma$, para todo $p \in V \cap \text{ext}(\gamma)$, ou vice-versa.

Teorema A.34. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Seja γ uma órbita periódica de F isolada de outras órbitas periódicas (isto é, existe uma vizinhança V de γ tal que F não admite outra órbita periódica em V além de γ). Então, γ é ciclo limite ou atrator, ou repulsor, ou semi-estável.*

Teorema A.35. Teorema de Poincaré-Bendixson: *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Dado $p \in U$, assumamos que $\gamma_p^+ \subset K$, onde K é um compacto em U . Suponha que F possua uma quantidade finita de singularidades em $w(p)$.*

1. *Se $w(p)$ não contém pontos regulares, então $w(p)$ é uma singularidade;*
2. *Se $w(p)$ não contém singularidades, então $w(p)$ é uma órbita periódica;*
3. *Se $w(p)$ contém singularidades $p_1, \dots, p_n$ e pontos regulares, então $w(p)$ é a união dessas singularidades com órbitas regulares. Mais ainda, para cada órbita regular $\gamma \subset w(p)$ existem $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ satisfazendo que $\alpha(p) = \{p_j\}$ e $w(p) = \{p_{j'}\}$.*

Vale um resultado análogo para $\alpha(p)$.

Teorema A.36. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Se γ_0 é uma órbita periódica de F tal que $\text{int } \gamma_0 \subset U$, então existe $p_0 \in \text{int } \gamma_0$ tal que $F(p_0) = 0$.*

Teorema A.37. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Assumamos que, para algum $p \in U$, γ_p é órbita T -periódica de F . Seja $\Phi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ a aplicação de Poincaré definida numa seção transversal Σ_0 de F em p . Então,*

$$d\Pi(p) = \exp\left(\int_0^T \text{tr}(dF(F_t(p)))dt\right).$$

Se $d\Pi(p) \neq 1$, então γ_p é ciclo limite. Mais ainda, Se $0 < d\Pi(p) < 1$ (respectivamente, $d\Pi(p) > 1$), então γ_p é ciclo limite atrator (respectivamente, repulsor).

A.6 Estabilidade dos Pontos Singulares e Critério de Lyapunov

Definição A.38. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$. Seja p uma singularidade de F . Dizemos que p é:*

- *Estável, se para toda vizinhança $V \subset U$ de p existe uma vizinhança $V_0 \subset V$ de p tal que $\gamma_q^+ \subset V$ para todo $q \in V_0$;*
- *Assintoticamente estável, se existe vizinhança $V_0 \subset U$ de p tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} F_t(q) = p$ para todo $q \in V_0$.*

Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ e seja $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ função $\mathcal{C}^1$. Denotamos por $Fh(x) = \langle \nabla h(x), F(x) \rangle$.

Note que, $Fh(x) = \frac{d}{dt}h(F_t(x))|_{t=0}$.

Definição A.39. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ e seja $p \in U$ uma singularidade de F . Dizemos que $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma Função de Lyapunov de F em p se h é $\mathcal{C}^1$ e satisfaz:*

1. *$h(p) = 0$ e $h(x) > 0$ para todo $x \in U - \{p\}$;*
2. *$Fh(x) = \langle \nabla h(x), F(x) \rangle \leq 0$ para todo $x \in U$.*

Dizemos que h é uma função de Lyapunov estrita se h satisfaz (1) e

3. $Fh(x) < 0$ para todo $x \in U - \{p\}$.

Teorema A.40. Critério de Lyapunov: *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ e seja $p \in U$ uma singularidade de F . Se F admite uma função de Lyapunov (respectivamente, função de Lyapunov estrita) em p , então, p é estável (respectivamente, assintoticamente estável).*

Definição A.41. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$. Dizemos que uma singularidade $p \in U$ do campo vetorial F é hiperbólica se todos os autovalores da matriz $dF(p)$ possuem parte real distinta de zero. Neste contexto, a matriz $dF(p)$ é chamada de matriz hiperbólica.*

Teorema A.42. Teorema de Hartman-Grobman: *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ e p uma singularidade hiperbólica de F . Denote $A = dF(p)$. Então, existem vizinhanças $V \subset U$ de p e $W \subset \mathbb{R}^d$ de 0 e um homeomorfismo $h : W \rightarrow V$ tais que*

$$F_t(h(x)) = h(e^{At}x),$$

para todo $x \in W$ e $t \in J_x$, onde J_x é intervalo maximal da trajetória do campo linear $x \rightarrow Ax$ restrito a W .

Definição A.43. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ e p uma singularidade hiperbólica de F . Tome $A = dF(p)$. Definimos o Espaço Estável e o Espaço Instável de F em p por:*

- $E^s = \{x \in \mathbb{R}^d : e^{At}x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\}$;
- $E^u = \{x \in \mathbb{R}^d : e^{At}x \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty\}$.

Proposição A.44. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ e p uma singularidade hiperbólica de F . Então,*

1. E^s e E^u são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^d$ tais que $\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$.
2. Se $x \in E^s$ (resp. $x \in E^u$), então $e^{At}x \in E^s$ (resp. $e^{At}x \in E^u$), para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $A = DF(p)$.

Definição A.45. *Seja $F : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $U \subset \mathbb{R}^d$. Seja $A \subset U$ um conjunto invariante por F_t (isto é, $F_t(a) \in A$, para todo $a \in A$). Definimos os conjuntos estável e instável de F em A , respectivamente, por*

$$W_A^s(F) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow \infty} d(F_t(x), A) = 0\}$$

$$W_A^u(F) = \{x \in U : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(F_t(x), A) = 0\}$$

Exemplo A.46. *Seja $F : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $D \subset \mathbb{R}^d$. Assuma que $p \in D$ é uma singularidade hiperbólica de F e sejam E^s e E^u os espaços estável e instável de $A = dF(p)$. Então, existem vizinhanças $U \subset D$ e $V \subset \mathbb{R}^d$ de p e um homeomorfismo $h : V \rightarrow U$ tais que*

$$W_p^s(F|_U) = h(V \cap E^s) \text{ e } W_p^u(F|_U) = h(V \cap E^u).$$

Definição A.47. Seja $F : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^1$ definido no aberto $D \subset \mathbb{R}^d$ e $p \in D$ singularidade de F . Definimos, n_s, n_u e n_c como sendo, respectivamente, o número de autovalores (contando com multiplicidade) da matriz $dF(p)$ com parte real negativa, positiva e nula.

Note que, p é singularidade hiperbólica de F se, e somente se, $n_c = 0$.

Teorema A.48. Teorema das Variedades Estável e Instável: *Seja $F : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ campo vetorial $\mathcal{C}^r, r \geq 1$, definido no aberto $D \subset \mathbb{R}^d$. Assuma que $p \in D$ é singularidade hiperbólica de F e sejam E^s e E^u os espaços estável e instável de $A = dF(p)$. Então, existe uma vizinhança $U \subset D$ de p tal que*

- $W_p^s(F|_U)$ é $\mathcal{C}^r$ -subvariedade de dimensão n_s e $T_p W_p^s(F|_U) = E^s$;
- $W_p^u(F|_U)$ é $\mathcal{C}^r$ -subvariedade de dimensão n_u e $T_p W_p^u(F|_U) = E^u$.

As subvariedades $W_p^s(F|_U)$ e $W_p^u(F|_U)$ são as únicas satisfazendo as propriedades acima.

B Variedades Suaves

Introduziremos neste apêndice os conceitos básicos acerca da teoria de variedades suaves. O leitor pode consultar mais detalhes, bem como as demonstrações dos resultados aqui omitidas, em [19, 31].

B.1 Variedades Diferenciáveis

Definição B.1. Considere uma aplicação $\mathcal{C}^r$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde X é um subconjunto arbitrário do $\mathbb{R}^n$. A aplicação f é dita ser $\mathcal{C}^r$ em X se para cada ponto $x \in X$ existem um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo x e uma aplicação $\mathcal{C}^r$, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $f = F$ em $U \cap X$.

Definição B.2. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é chamado uma variedade $\mathcal{C}^r$ de dimensão m se satisfaz as seguintes propriedades:

- Existe uma coleção enumerável de abertos $V^\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A$, onde A é um conjunto de índices enumerável, com $U^\alpha = V^\alpha \cap M$ tal que $M = \cup_{\alpha \in A} U^\alpha$;
- Existe um difeomorfismo $\mathcal{C}^r$, x^α , definido em cada aberto U^α que mapeia U^α em algum aberto do $\mathbb{R}^m$.

O par (U^α, x^α) é chamado de uma carta para M enquanto que $\cup_{\alpha \in A} (U^\alpha, x^\alpha)$ é chamado um atlas para M .

Definição B.3. Seja $I = \{t \in \mathbb{R} : -\varepsilon < t < \varepsilon\}$ para algum $\varepsilon > 0$ fixo. Então, uma curva $\mathcal{C}^r$ em M é uma aplicação $\mathcal{C}^r$ $C : I \rightarrow M$.

Definição B.4. Seja $C : I \rightarrow M$ uma curva $\mathcal{C}^1$ tal que $C(0) = p$. O vetor tangente a C em p é

$$\left. \frac{d}{dt} C(t) \right|_{t=0} \equiv \dot{C}(0).$$

B.2 Espaços Tangente e Normal

Antes de discutirmos o conceito de espaço tangente para uma variedade arbitrária, vejamos o caso em que a variedade é o $\mathbb{R}^m$.

Exemplo B.5. Seja $x \in \mathbb{R}^m$. Definimos o espaço tangente a $\mathbb{R}^m$ em x , $T_x \mathbb{R}^m$, como a coleção de vetores tangentes a curvas passando por x em x . O conjunto $T_x \mathbb{R}^m$ construído dessa maneira pode claramente ser identificado com o próprio $\mathbb{R}^m$.

Vamos agora formalizar o conceito de espaço tangente em um ponto de uma variedade diferenciável arbitrária.

Seja (U^α, x^α) uma carta contendo o ponto p de uma variedade diferenciável M de dimensão m . Então, $x^\alpha(U^\alpha)$ é um aberto de $\mathbb{R}^m$ que contém $x^\alpha(p)$. Do exemplo anterior temos que $T_{x^\alpha(p)}\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$. Para construir T_pM “transportamos” $T_{x^\alpha(p)}\mathbb{R}^m$ para p usando a aplicação x^α . Como x^α é um difeomorfismo, $(x^\alpha)^{-1} : x^\alpha(U^\alpha) \rightarrow U^\alpha$ também o é. Assim, podemos calcular $D[(x^\alpha)^{-1}]$ que é um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^m$. O espaço tangente em $p \in M$, T_pM , é definido então como sendo $D[(x^\alpha)^{-1}]|_{x^\alpha(p)} \cdot \mathbb{R}^m$.

Definição B.6. Seja (U^α, x^α) uma carta em M com $p \in U^\alpha$. Então, o espaço tangente a M em p , denotado por T_pM , é definido como sendo

$$D[(x^\alpha)^{-1}]|_{x^\alpha(p)} \cdot \mathbb{R}^m.$$

Observação B.7. O espaço tangente em p de uma variedade diferenciável M possui a mesma interpretação geométrica que o espaço tangente de um ponto no $\mathbb{R}^m$, ou seja, pode ser visto como a coleção de todos os vetores tangentes a curvas em M passando por p em p .

Proposição B.8. A construção de T_pM independe da escolha da carta para M .

Tendo agora definido o espaço tangente em um ponto de uma variedade, podemos entender o conceito de derivada de uma aplicação entre variedades. Seja $f : M^m \rightarrow N^s$, onde $M^m \subset \mathbb{R}^m$, $m \leq n$ é uma variedade m -dimensional e $N^s \subset \mathbb{R}^q$, $s \leq q$ é uma variedade s -dimensional. Sejam $(U^\alpha; x^\alpha)$ uma carta em M^m contendo um ponto p e $(W^\beta; y^\beta)$ uma carta em N^s contendo $f(p)$. Usando as cartas coordenadas de M^m e N^s , podemos escrever

$$f(p) = (y^\beta)^{-1} \circ [y^\beta \circ f \circ (x^\alpha)^{-1}] \circ x^\alpha(p).$$

Definição B.9. Definimos a derivada da aplicação $f : M^m \rightarrow N^s$ no ponto p por

$$Df|_p = D[(y^\beta)^{-1}]|_{y^\beta(f(p))} D[y^\beta \circ f \circ (x^\alpha)^{-1}]|_{x^\alpha(p)} D x^\alpha|_p.$$

Proposição B.10. Sejam $f : M^m \rightarrow N^s$ e Df definida como acima; então

$$Df|_p : T_pM^m \rightarrow T_{f(p)}N^s.$$

Proposição B.11. Se M é uma variedade diferenciável m -dimensional, então, para cada $p \in M$ o espaço tangente T_pM é um espaço vetorial de dimensão m .

Definição B.12. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade diferenciável e $p \in M$. O conjunto

$$\mathcal{N}_p = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp T_pM\}$$

é chamado espaço normal em p .

O produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usual do $\mathbb{R}^n$ induz a seguinte divisão

$$T_p\mathbb{R}^n = T_pM \oplus \mathcal{N}_p.$$

B.3 Fibrados Vetoriais, Fibrados Tangente e Normal

Definição B.13. O fibrado tangente de uma $\mathcal{C}^r$ variedade, $M \subset \mathbb{R}^n$, denotado por TM , é definido como

$$TM = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \in T_p M\}.$$

Isto é, o fibrado tangente é o conjunto de todos os possíveis pares ordenados consistindo de pontos de M e de vetores tangentes a M neste mesmo ponto.

Proposição B.14. *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade $\mathcal{C}^r$ de dimensão m . Então, o fibrado tangente de M , $TM \subset \mathbb{R}^{2n}$, é uma variedade $\mathcal{C}^{r-1}$ de dimensão $2m$.*

Definição B.15. O fibrado normal de uma $\mathcal{C}^r$ variedade, $M \subset \mathbb{R}^n$, denotado por $\mathcal{N}$, é definido como

$$\mathcal{N} = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n : v \perp T_p M\}.$$

Assim como o fibrado tangente, o fibrado normal é uma variedade $\mathcal{C}^{r-1}$.

Utilizando a projeção ortogonal canônica $\Pi : T\mathbb{R}^n|_M \rightarrow \mathcal{N}$, de forma análoga ao que temos para os espaços tangente e normal, obtemos

$$T\mathbb{R}^n|_M = TM \oplus \mathcal{N}.$$

Os fibrados tangente e normal de uma variedade são exemplos de fibrados vetoriais.

Definição B.16. Um fibrado vetorial é uma variedade que possui um espaço vetorial associado para cada ponto.

Para os fibrados tangente e normal de uma variedade, os espaços vetoriais associados em cada ponto são $T_p M$ e $\mathcal{N}_p$, respectivamente.

Os espaços vetoriais individuais $\mathcal{N}_p$, que compõem o fibrado normal $\mathcal{N}$, são chamados de fibras do fibrado vetorial e p é chamado ponto de base da fibra $\mathcal{N}_p$. A mesma terminologia se aplica a TM e $T_p M$.

Definição B.17. A aplicação de projeção das fibras, denotada por ω , é a aplicação que leva cada ponto de uma fibra no seu ponto de base, isto é,

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{N} &\rightarrow M \\ (p, v) &\mapsto p. \end{aligned}$$

Definição B.18. Uma seção de um fibrado normal, denotada por u , é uma aplicação que leva pontos de M em pontos de $\mathcal{N}$, isto é,

$$\begin{aligned} u : M &\rightarrow \mathcal{N} \\ p &\mapsto (p, v). \end{aligned}$$

Dizemos que u é uma seção $\mathcal{C}^r$ se é uma aplicação $\mathcal{C}^r$.

A seção nula de M é $M \times \{0\}$ e é claramente identificada com M .

Note que, $\omega \circ u = \text{Id}_M$.

Fibrados vetoriais, em particular, o fibrado normal, possuem uma importante propriedade de trivialidade local. Isso significa que o fibrado normal restrito a uma vizinhança suficientemente pequena em M , digamos $U \subset M$, é $\mathcal{C}^r$ difeomorfo ao produto cartesiano de U com $\mathbb{R}^{n-m}$.

Queremos agora mostrar como o fibrado normal pode ser usado para construir vizinhanças de uma variedade. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} h : \mathcal{N} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\mapsto p + v \end{aligned} \tag{B.1}$$

Essa aplicação fornece uma identificação natural de $N|_M$ com $\mathbb{R}^m$.

Considere agora o seguinte subconjunto do fibrado normal

$$\mathcal{N}_\varepsilon = \{(p, v) \in \mathcal{N} : |v| < \varepsilon\}.$$

Temos o seguinte resultado.

Proposição B.19. *Seja $K \subset M$ um compacto. Então, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, e um difeomorfismo $\mathcal{C}^{r-1}$, h , que mapeia $\mathcal{N}_\varepsilon|_K$ em uma vizinhança de K em $\mathbb{R}^m$.*

B.4 A esfera S^2 : um exemplo

A fim de ilustrar os conceitos anteriormente abordados consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo B.20. Considere a esfera 2-dimensional $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Mostra-se que S^2 é uma variedade $\mathcal{C}^\infty$ 2-dimensional. Outra maneira de ver S^2 é considerar o conjunto nulo da equação

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Seja $C(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ uma curva em S^2 (s.p.g. suponhamos que $0 \in I$) e seja $C(0) \equiv p = (x_0, y_0, z_0)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(C(0)) &= \langle Df(C(0)), \dot{C}(0) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle (2x_0, 2y_0, 2z_0), (\dot{x}(0), \dot{y}(0), \dot{z}(0)) \rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2\dot{x}(0)x_0 + 2\dot{y}(0)y_0 + 2\dot{z}(0)z_0 = 0. \end{aligned}$$

Como $\dot{C}(0)$ é um vetor tangente à S^2 em $C(0) = p$, segue que

$$T_p S^2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ax_0 + by_0 + cz_0 = 0\}.$$

Da equação acima temos que $T_p S^2$ é um plano passando pela origem de $\mathbb{R}^3$. Além disso, temos

$$\mathcal{N}_p = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) = \alpha(x_0, y_0, z_0), \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Note que, $\mathcal{N}_p$ é uma reta passando pela origem em $\mathbb{R}^3$.

Por construção,

$$\mathbb{R}^3 \equiv T_p \mathbb{R}^3 = T_p S^2 \oplus \mathcal{N}_p.$$

Podemos agora calcular as expressões dos fibrados tangente e normal. Para o fibrado tangente temos

$$\begin{aligned} TS^2 &= \{(p, v) : p \in S^2, v \in T_p M\} \\ &= \{(p, v) : p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3, x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \text{ e} \\ &\quad v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3, v_1 x_0 + v_2 y_0 + v_3 z_0 = 0\}. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, o fibrado normal é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \{(p, v) : p \in S^2 \text{ e } v \in \mathcal{N}_p\} \\ &= \{(p, v) : p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3, x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \text{ e} \\ &\quad v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3, (v_1, v_2, v_3) = \alpha(x_0, y_0, z_0), \alpha \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

O fibrado tangente de $\mathbb{R}^3$ restrito à S^2 (coleção dos vetores tangente emanando de pontos em S^2) é dado por

$$\begin{aligned} T\mathbb{R}^3|_{S^2} &= \{(p, v) : p \in S^2, v \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{(p = (x, y, z), v) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, v \in \mathbb{R}^3\} \\ &= TS^2 \oplus \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Vamos obter a aplicação projeção na componente normal

$$\Pi : T\mathbb{R}^3|_{S^2} \rightarrow \mathcal{N}.$$

Seja $(p, v) \in T\mathbb{R}^3|_{S^2}$, então

$$\Pi : (p, v) \mapsto (p, \langle v, n \rangle n),$$

onde n é um vetor normal unitário a S^2 em p , isto é, $n = Df(p)/\|Df(p)\|$.

Se $p = (x_0, y_0, z_0)$, um cálculo explícito fornece

$$n = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \right)$$

e como $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$,

$$n = (x_0, y_0, z_0). \quad (\text{B.2})$$

Vamos construir uma vizinhança de S^2 . Consideremos a aplicação dada em B.1

$$\begin{aligned} h : \mathcal{N} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (p, v) &\mapsto p + v. \end{aligned}$$

Considere um ponto $(p, v) \in \mathcal{N}$ e seja $p = (x_0, y_0, z_0)$. Então, $v \in \mathcal{N}_p$ é da forma $v = \alpha n$, onde n é um vetor normal a S^2 em p e $\alpha \in \mathbb{R}$. De B.2, $n = (x_0, y_0, z_0)$. Assim, podemos reescrever a aplicação h por

$$\begin{aligned} h : \mathcal{N} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (p, v) &\mapsto p + v = (1 + \alpha)(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Variando α, x_0, y_0 e z_0 , restritos a condição $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$, obtemos uma vizinhança de S^2 em $\mathbb{R}^3$.

B.5 Variedades com bordo

Nesta seção discorreremos brevemente sobre o caso de variedades com bordo, recorrente em diversas situações.

Definição B.21. O semi-espço fechado, $\mathbb{H}^m \subset \mathbb{R}^m$, é definido como a seguir

$$\mathbb{H}^m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_1 \geq 0\}.$$

Como usual, denotamos a fronteira de $\mathbb{H}^m$ por $\partial\mathbb{H}^m$.

Em seguida, apresentaremos a definição de uma variedade com bordo.

Definição B.22. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^m$ é chamada uma variedade $\mathcal{C}^r$ com bordo m -dimensional se possui as seguintes características estruturais:

- Existe uma coleção enumerável de abertos $V^\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A$, onde A é um conjunto de índices enumerável, com $U^\alpha = V^\alpha \cap M$ tal que $M = \cup_{\alpha \in A} U^\alpha$;
- Existe um difeomorfismo $\mathcal{C}^r$, x^α , definido em cada U^α que mapeia U^α sobre algum conjunto $W \cap \mathbb{H}^m$, onde W é um aberto de $\mathbb{R}^m$.

Observação B.23. Façamos algumas observações acerca da Definição B.22.

- A fronteira de M , ∂M , é definida como o conjunto dos pontos em M que são mapeados em $\partial\mathbb{H}^m$ sobre a ação de x^α ;
- A fronteira de M é uma $\mathcal{C}^r$ variedade de dimensão $m - 1$ e, $M - \partial M$ é uma $\mathcal{C}^r$ variedade de dimensão m ;
- O espaço tangente de M em um ponto é definido exatamente como na definição B.6, mesmo se considerarmos um ponto na fronteira.

B.6 Submersões, Imersões e Mergulhos

Recordaremos agora como são definidos os conceitos de submersão, imersão e mergulho.

Definição B.24. Sejam M e N variedades suaves (com ou sem bordo). Dado uma aplicação suave $F : M \rightarrow N$ um ponto $p \in M$, definimos o posto de F em p como o posto da aplicação linear $DF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, isto é, o posto da matriz jacobiana de F em qualquer carta, ou ainda, como a dimensão de $\text{Im}(DF_p) \subset T_{F(p)} N$.

Se F possui o mesmo posto r para todo ponto, dizemos que F possui posto constante e escrevemos $\text{rank } F = r$.

Observação B.25. Como o posto de um aplicação linear nunca é maior que a dimensão de seu domínio, ou de seu codomínio, o posto de F em cada ponto é limitado superiormente pelo $\min\{\dim M, \dim N\}$.

Se o posto de DF_p é igual a esse limite superior, dizemos que F possui posto completo em p e, se F possui posto completo em todo ponto de M , dizemos que F possui posto completo.

Definição B.26. Uma aplicação suave $F : M \rightarrow N$ é chamada uma submersão suave se sua diferencial é sobrejetiva em cada ponto (ou equivalentemente, $\text{rank } F = \dim N$).

Ainda, F é chamada uma imersão suave se sua diferencial é injetiva em cada ponto (equivalentemente, $\text{Rank } F = \dim M$).

Proposição B.27. *Suponha que $F : M \rightarrow N$ é um aplicação suave e $p \in M$. Se DF_p é sobrejetiva, então p possui uma vizinhança U tal que $F|_U$ é uma submersão. Se DF_p é injetiva, existe uma vizinhança U de p tal que $F|_U$ é uma imersão.*

Um tipo especial de imersão é particularmente importante.

Definição B.28. Se M e N são variedades suaves (com ou sem bordo) um mergulho suave de M em N é uma imersão suave $F : M \rightarrow N$ que é também topologicamente um mergulho, isto é, um homeomorfismo sobre sua imagem $F(M) \subset N$ no subespaço topológico.

Teorema B.29. *Suponha que M e N são variedade suaves (com ou sem bordo) e seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação suave. Então, F é uma imersão suave se, e somente se, cada ponto em M possui uma vizinhança $U \subset M$ tal que $F|_U : U \rightarrow N$ é um mergulho suave.*

C Exemplo: Blow up quase-homogêneo aplicado à duas singularidades

O seguinte exemplo, encontrado em [3], descreve passo a passo o uso de uma aplicação de blow up quase-homogêneo.

Considere o campo de vetores em $\mathbb{R}^4$ dado por

$$X(x, y, \varepsilon, a) = \left(y - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \varepsilon(a - x), 0, 0 \right). \quad (\text{C.1})$$

Sejam $s_0 = (0, 0, 0, 0)$ e $n_0 = (-1, 1/6, 0, 0)$. Temos que $X(s_0) = X(n_0) = 0$ e,

$$DX(x, y, \varepsilon, a) = \begin{pmatrix} -x - x^2 & 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & a - x & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$DX(s_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad DX(n_0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de modo que s_0 e n_0 são pontos de equilíbrio não hiperbólicos de X . A fim de obtermos uma condição de hiperbolicidade, vamos aplicar um blow up quase-homogêneo à ambas as singularidades s_0 e n_0 .

Blow up na singularidade $s_0 = (0, 0, 0, 0)$:

Vejam os primeiro o que ocorre com $s_0 = (0, 0, 0, 0)$.

Seja $S_+^3 = \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}); \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{\varepsilon}^2 + \bar{a}^2 = 1, \varepsilon \geq 0\}$ a semi-esfera e considere a transformação

$$\begin{aligned} \Phi : S^3 \times [0, U) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \Lambda \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) &\mapsto (u^\alpha \bar{x}, u^\beta \bar{y}, u^\gamma \bar{\varepsilon}, u^\delta \bar{a}), \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

onde $\Lambda = [0, \infty) \times [-1/2, \infty)$ e U é escolhido adequadamente.

Vamos considerar o blow up quase-homogêneo dado pela transformação C.2 com coeficientes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, 2, 2, 1)$. Maiores detalhes sobre a escolha de U e dos coeficientes

da aplicação de blow up podem ser vistos em [3]. Assim, escrevemos a transformação Φ como

$$\begin{aligned}\Phi : S^3 \times [0, U) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \Lambda \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) &\mapsto (u\bar{x}, u^2\bar{y}, u^2\bar{\varepsilon}, u\bar{a}),\end{aligned}\tag{C.3}$$

Vamos obter expressões para o campo desingularizado pelo blow up dado por C.3 em cada uma das seguintes cartas $\{\bar{\varepsilon} = 1\}$, $\{\bar{a} = \pm 1\}$, $\{\bar{x} = \pm 1\}$ e $\{\bar{y} = \pm 1\}$.

Na primeira carta $\{\bar{\varepsilon} = 1\}$ a transformação C.3 é dada por

$$\begin{aligned}\Phi : S^3 \times [0, U)|_{\bar{\varepsilon}=1} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \Lambda \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, u) &\mapsto (u\bar{x}, u^2\bar{y}, u^2, u\bar{a}).\end{aligned}$$

Um cálculo direto nos fornece

$$D\Phi = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \bar{x} \\ 0 & u^2 & 0 & 2u\bar{y} \\ 0 & 0 & 0 & 2u \\ 0 & 0 & u & \bar{a} \end{pmatrix} \Rightarrow (D\Phi)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 & -\frac{\bar{x}}{2u^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2} & -\frac{\bar{y}}{u^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{a}}{2u^2} & \frac{1}{u} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2u} & 0 \end{pmatrix},$$

e,

$$\begin{aligned}X(\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, u)) &= X(u\bar{x}, u^2\bar{y}, u^2, u\bar{a}) \\ &= (u^2\bar{y} - u^2\frac{\bar{x}^2}{2} - u^3\frac{\bar{x}^3}{3}, u^2(u\bar{a} - u\bar{x}), 0, 0).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\bar{X}_{\bar{\varepsilon}=1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, u) &= \frac{1}{u}\hat{X}_{\bar{\varepsilon}=1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, u) = ((D\Phi)^{-1} \circ X \circ \Phi)(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, u) \\ &= \frac{1}{u} \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 & -\frac{\bar{x}}{2u^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2} & -\frac{\bar{y}}{u^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{a}}{2u^2} & \frac{1}{u} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2u} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2\bar{y} - u^2\frac{\bar{x}^2}{2} - u^3\frac{\bar{x}^3}{3} \\ u^2(u\bar{a} - u\bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{y} - \frac{\bar{x}^2}{2} - u\frac{\bar{x}^3}{3} \\ \bar{a} - \bar{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{C.4}$$

Sobre a semi-esfera, ou seja, fazendo $u = 0$, o campo $\bar{X}_{\bar{\varepsilon}=1}$ se escreve como

$$\bar{X}_{\bar{\varepsilon}=1} = \begin{pmatrix} \bar{y} - \frac{\bar{x}^2}{2} \\ \bar{a} - \bar{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de modo que,

$$\bar{X}_{\bar{\varepsilon}=1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{y} - \frac{\bar{x}^2}{2} = 0 \\ \bar{a} - \bar{x} = 0. \end{cases}$$

Substituindo $\bar{x} = \bar{a}$ na primeira equação do sistema acima, obtemos que o campo tem um ponto de equilíbrio em $(\bar{a}, \bar{a}^2/2)$.

Ainda, sobre a semi-esfera,

$$D\bar{X}_{\bar{\varepsilon}=1}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, u) = \begin{pmatrix} -\bar{x} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D\bar{X}_{\bar{\varepsilon}=1}(\bar{a}, \bar{a}^2/2, \bar{a}, 0) = \begin{pmatrix} -\bar{a} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para as cartas $\{\bar{a} = \pm 1\}$, o procedimento é análogo. Neste caso, a transformação Φ dada em C.3 se escreve como

$$\begin{aligned} \Phi^\pm : S^3 \times [0, U)|_{\bar{a}=\pm 1} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \Lambda \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, u) &\mapsto (u\bar{x}, u^2\bar{y}, u^2\bar{\varepsilon}, \pm u), \end{aligned}$$

de onde segue que,

$$D\Phi^\pm = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \bar{x} \\ 0 & u^2 & 0 & 2u\bar{y} \\ 0 & 0 & u^2 & 2u\bar{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (D\Phi^\pm)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 & \mp \frac{\bar{x}}{u} \\ 0 & \frac{1}{u^2} & 0 & \mp \frac{2\bar{y}}{u} \\ 0 & 0 & \frac{1}{u^2} & \mp \frac{2\bar{\varepsilon}}{u} \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

e,

$$\begin{aligned} X(\Phi^\pm(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, u)) &= X(u\bar{x}, u^2\bar{y}, u^2\bar{\varepsilon}, \pm u) \\ &= \left(u^2\bar{y} - u^2\frac{\bar{x}^2}{2} - u^3\frac{\bar{x}^3}{3}, u^2\bar{\varepsilon}(\pm u - u\bar{x}), 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, u) &= \frac{1}{u} \hat{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, u) \\ &= \frac{1}{u} \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 & \mp \frac{\bar{x}}{u} \\ 0 & \frac{1}{u^2} & 0 & \mp \frac{2\bar{y}}{u} \\ 0 & 0 & \frac{1}{u^2} & \mp \frac{2\bar{\varepsilon}}{u} \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2\bar{y} - u^2\frac{\bar{x}^2}{2} - u^3\frac{\bar{x}^3}{3} \\ u^2\bar{\varepsilon}(\pm u - u\bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{y} - \frac{\bar{x}^2}{2} - u\frac{\bar{x}^3}{3} \\ \varepsilon(\pm 1 - \bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Novamente, fazendo $u = 0$, de modo que estamos sobre a semi-esfera, o campo $\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm$ se escreve

$$\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm = \begin{pmatrix} \bar{y} - \frac{\bar{x}^2}{2} \\ \varepsilon(\pm 1 - \bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de modo que,

$$\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{y} - \frac{\bar{x}^2}{2} = 0 \\ \varepsilon(\pm 1 - \bar{x}) = 0 \end{cases}$$

Se $\varepsilon = 0$, temos uma curva de singularidades dada pela parábola $\bar{y} = \bar{x}^2/2$, isto é, todos os pontos da forma $(\bar{x}, \bar{x}^2/2, 0, 0)$ são pontos de equilíbrio para $\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm$. Para $\varepsilon \neq 0$,

devemos ter $\bar{x} = \pm 1$ e $\bar{y} = 1/2$, ou seja, os pontos $(\pm 1, 1/2, \bar{\varepsilon}, 0)$ são também pontos de equilíbrio para $\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm$.

Temos ainda que, para $u = 0$,

$$D\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm = \begin{pmatrix} -\bar{x} & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{\varepsilon} & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de onde segue que,

$$D\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm(\bar{x}, \bar{x}^2/2, 0, 0) = \begin{pmatrix} -\bar{x} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e,

$$D\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm(\pm 1, 1/2, \varepsilon, 0) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{\varepsilon} & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos agora analisar o comportamento do campo desingularizado $\bar{X}$ “fora da explosão”, ou seja, para $u \neq 0$, através das cartas $\{\bar{x} \pm 1\}$ e $\{\bar{y} = 1\}$. Estaremos portanto, considerando o campo restrito $\bar{X}|_{F_0}$ onde $F_0 = \{\bar{\varepsilon} = \bar{a} = 0\}$.

Para as cartas $\{\bar{x} = \pm 1\}$ transformação Φ dada em C.3 se escreve como

$$\begin{aligned} \Phi^\pm : S^1 \times [0, U)|_{\bar{x}=\pm 1} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \Lambda \\ (\bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) &\mapsto (\pm u, u^2\bar{y}, u^2\bar{\varepsilon}, u\bar{a}), \end{aligned}$$

de onde temos,

$$D\Phi^\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ u^2 & 0 & 0 & 2u\bar{y} \\ 0 & u^2 & 0 & 2u\bar{\varepsilon} \\ 0 & 0 & u & \bar{a} \end{pmatrix} \Rightarrow (D\Phi^\pm)^{-1} = \begin{pmatrix} \mp \frac{2\bar{y}}{u} & \frac{1}{u^2} & 0 & 0 \\ \mp \frac{2\bar{\varepsilon}}{u} & 0 & \frac{1}{u^2} & 0 \\ \mp \frac{\bar{a}}{u} & 0 & 0 & \frac{1}{u} \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e,

$$\begin{aligned} X(\Phi^\pm(\bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u)) &= X(\pm u, u^2\bar{y}, u^2\bar{\varepsilon}, u\bar{a}) \\ &= (u^2\bar{y} - \frac{u^2}{2} \mp \frac{u^3}{3}, u^2\bar{\varepsilon}(u\bar{a} \mp u), 0, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm(\bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) &= \frac{1}{u} \hat{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm(\bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) \\ &= \frac{1}{u} \begin{pmatrix} \mp \frac{2\bar{y}}{u} & \frac{1}{u^2} & 0 & 0 \\ \mp \frac{2\bar{\varepsilon}}{u} & 0 & \frac{1}{u^2} & 0 \\ \mp \frac{\bar{a}}{u} & 0 & 0 & \frac{1}{u} \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2\bar{y} - \frac{u^2}{2} \mp \frac{u^3}{3} \\ u^2\bar{\varepsilon}(u\bar{a} \mp u) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mp 2\bar{y}^2 \pm \bar{y} + u\frac{2\bar{y}}{3} + \bar{\varepsilon}(\bar{a} - 1) \\ \mp 2\bar{\varepsilon}\bar{y} \pm \bar{\varepsilon} + u\frac{2\bar{\varepsilon}}{3} \\ \mp \bar{a}\bar{y} \pm \frac{\bar{a}}{2} + u\frac{\bar{a}}{3} \\ \pm u\bar{y} \mp \frac{u}{2} - \frac{u^2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{C.6}$$

Restringindo o campo $\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm$ à $F_0 = \{\bar{\varepsilon} = \bar{a} = 0\}$, temos

$$\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm = \begin{pmatrix} \mp 2\bar{y}^2 = \pm \bar{y} + u\frac{2\bar{y}}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \pm u\bar{y} \mp \frac{u}{2} - \frac{u^2}{3} \end{pmatrix},$$

de onde segue que,

$$\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mp 2\bar{y}^2 = \pm \bar{y} + u\frac{2\bar{y}}{3} = 0 \\ \pm u\bar{y} \mp \frac{u}{2} - \frac{u^2}{3} = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima encontramos que os pontos $(0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, \mp 3/2)$ e $(1/2, 0, 0, 0)$ são pontos de equilíbrio de $\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm$. Ainda,

$$D\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm = \begin{pmatrix} \mp 4\bar{y} \pm 1 + \frac{2u}{3} & 0 & 0 & \frac{2\bar{y}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm u & 0 & 0 & \pm \bar{y} \mp \frac{1}{2} - \frac{2u}{3} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$D\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm(0, 0, 0, \mp 3/2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mp \frac{3}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e,

$$\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm(1/2, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último, vamos considerar a carta $\{\bar{y} = \pm 1\}$. A aplicação dada em C.3 se escreve neste caso como

$$\begin{aligned} \Phi^\pm : S^3 \times [0, U)|_{\bar{y}=\pm 1} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \Lambda \\ (\bar{x}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) &\mapsto (u\bar{x}, \pm u^2, u^2\bar{\varepsilon}, u\bar{a}). \end{aligned}$$

Um cálculo direto fornece,

$$D\Phi^\pm = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \bar{x} \\ 0 & 0 & 0 & \pm 2u \\ 0 & u^2 & a & 2u\bar{\varepsilon} \\ 0 & 0 & u & \bar{a} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (D\Phi^\pm)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & \mp \frac{x}{2u^2} & 0 & 0 \\ 0 & \mp \frac{\bar{a}^2 - 2u^2\bar{\varepsilon}}{2u^4} & \frac{1}{u^2} & -\frac{\bar{a}}{u^3} \\ 0 & \mp \frac{a}{2u^2} & 0 & \frac{1}{u} \\ 0 & \pm \frac{1}{2u} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e,

$$\begin{aligned} X(\Phi^\pm(\bar{x}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u)) &= X(u\bar{x}, \pm u^2, u^2\bar{\varepsilon}, u\bar{a}) \\ &= \left(\pm u^2 - \frac{u^2\bar{x}^2}{2} - \frac{u^3\bar{x}^3}{3}, u^2\bar{\varepsilon}(u\bar{a} - u\bar{x}), 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \bar{X}_{\bar{y}=\pm 1}^{\pm}(\bar{x}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) &= \frac{1}{u} \hat{X}_{\bar{y}=\pm 1}^{\pm}(\bar{x}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) \\
 &= \frac{1}{u} \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & \mp \frac{x}{2u^2} & 0 & 0 \\ 0 & \mp \frac{\bar{a}^2 - 2u^2 \bar{\varepsilon}}{2u^4} & \frac{1}{u^2} & -\frac{\bar{a}}{u^3} \\ 0 & \mp \frac{\bar{a}}{2u^2} & 0 & \frac{1}{u} \\ 0 & \pm \frac{1}{2u} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm u^2 - \frac{u^2 \bar{x}^2}{2} - \frac{u^3 \bar{x}^3}{3} \\ u^2 \bar{\varepsilon} (u \bar{a} - u \bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \pm 1 - \frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x} \bar{\varepsilon} (\bar{a} - \bar{x})/2 \\ \mp \bar{\varepsilon}^2 (\bar{a} - \bar{x}) \\ \mp \bar{a} \bar{\varepsilon} (\bar{a} - \bar{x})/2 \\ \pm u \bar{\varepsilon} (\bar{a} - \bar{x})/2 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

onde no campo acima já nos restringimos à $F_0 = \{\bar{\varepsilon} = \bar{a} = 0\}$.

Ficam assim determinadas todas as expressões da aplicação de blow up quase-homogêneo na singularidade $s_0 = (0, 0, 0, 0)$ considerando as cartas $\{\bar{\varepsilon} = 1\}$, $\{\bar{a} = \pm 1\}$, $\{\bar{x} = \pm 1\}$ e $\{\bar{y} = \pm 1\}$.

Blow up na singularidade $n_0 = (-1, 1/6, 0, 0)$:

Inicialmente, vamos considerar a mudança de variáveis

$$x = -1 + \underline{x} \text{ e } y = \frac{1}{6} + \underline{y}, \tag{C.8}$$

na qual trasladamos a origem para o ponto $(-1, 1/6)$. Feito isso, vamos aplicar a blow up quase-homogêneo como de costume.

Substituindo a mudança de coordenadas C.8 na expressão do campo X , dada pela equação C.1, obtemos

$$\begin{aligned}
 X(\underline{x}, \underline{y}, \varepsilon, a) &= \left(\underline{y} + \frac{1}{6} - \frac{(-1 + \underline{x})^2}{2} - \frac{(-1 + \underline{x})^3}{3}, \varepsilon(a - (-1 - \underline{x})), 0, 0 \right) \\
 &= \left(\underline{y} + \frac{\underline{x}^2}{2} - \frac{\underline{x}^3}{3}, \varepsilon(1 + a - \underline{x}), 0, 0 \right) \\
 &= \left(y + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \varepsilon(1 + a - x), 0, 0 \right),
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

onde na última igualdade omitimos a barra subscrita para simplificar a notação.

Consideremos, como antes, a semi-esfera $S_+^3 = \{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}) \in \mathbb{R}^4; \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{\varepsilon}^2 + \bar{a}^2 = 1, \bar{\varepsilon} \geq 0\}$ e a transformação dada por

$$\begin{aligned}
 \Phi : S^3 \times [0, U') &\rightarrow M_0 = \{s_0\} \\
 (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) &\mapsto (u^\alpha \bar{x}, u^\beta \bar{y}, u^\gamma \bar{\varepsilon}, u^\delta \bar{a}),
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

em que U' e M_0 são escolhidos adequadamente.

Vamos considerar a transformação C.10 com coeficientes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2, 4, 6, 3)$, isto é, estaremos considerando

$$\begin{aligned}
 \Phi : S^3 \times [0, U') &\rightarrow M_0 - \{s_0\} \\
 (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) &\mapsto (u^2 \bar{x}, u^4 \bar{y}, u^6 \bar{\varepsilon}, u^3 \bar{a}).
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

Novamente, o leitor pode consultar mais informações acerca da escolha dos coeficientes em [3].

Vamos olhar a transformação nas cartas $\{\varepsilon = 1\}$, $\{\bar{a} = \pm 1\}$, $\{\bar{x} = \pm 1\}$ e $\{\bar{y} = -1\}$.

Para a carta $\{\bar{\varepsilon} = 1\}$ temos que a transformação C.11 é dada por

$$\begin{aligned}\Phi : S^3 \times [0, U')|_{\bar{\varepsilon}=1} &\rightarrow M_0 - \{s_0\} \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, u) &\mapsto (u^2\bar{x}, u^4\bar{y}, u^6, u^3\bar{a}),\end{aligned}$$

de onde segue que,

$$D\Phi = \begin{pmatrix} u^2 & 0 & 0 & 2u\bar{x} \\ 0 & u^4 & 0 & 4u^3\bar{y} \\ 0 & 0 & 0 & 6u^5 \\ 0 & 0 & u^3 & 3u^2\bar{a} \end{pmatrix} \Rightarrow (D\Phi)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2} & 0 & -\frac{\bar{x}}{3u^6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^4} & -\frac{2\bar{y}}{3u^6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{a}}{2u^6} & \frac{1}{u^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6u^5} & 0 \end{pmatrix},$$

e,

$$\begin{aligned}X(\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}, u)) &= X(u^2\bar{x}, u^4\bar{y}, u^6, u^3\bar{a}) \\ &= \left(u^4\bar{y} + u^4\frac{\bar{x}^2}{2} - u^6\frac{\bar{x}^3}{3}, u^6(1 + u^3\bar{a} - u^2\bar{x}), 0, 0 \right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\bar{X}_{\bar{\varepsilon}=1} &= \frac{1}{u^2} \hat{X}_{\bar{\varepsilon}=1} = \frac{1}{u^2} ((D\phi)^{-1} \circ X \circ \phi) \\ &= \frac{1}{u^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2} & 0 & -\frac{\bar{x}}{3u^6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^4} & -\frac{2\bar{y}}{3u^6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{a}}{2u^6} & \frac{1}{u^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6u^5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^4\bar{y} + u^4\frac{\bar{x}^2}{2} - u^6\frac{\bar{x}^3}{3} \\ u^6(1 + u^3\bar{a} - u^2\bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{2} - u^2\frac{\bar{x}^3}{3} \\ 1 + u^3\bar{a} - u^2\bar{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{C.12}$$

Fazendo $u = 0$, o campo $\bar{X}_{\bar{\varepsilon}=1}$ se escreve

$$\bar{X}_{\bar{\varepsilon}=1} = \begin{pmatrix} \bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de modo que o campo $\bar{X}_{\bar{\varepsilon}=1}$ não possui singularidades.

Para as cartas $\{\bar{a} = \pm 1\}$, o procedimento é análogo. A transformação C.11 é, neste caso, dada por

$$\begin{aligned}\Phi^\pm : S^3 \times [0, U')|_{\bar{a}=\pm 1} &\rightarrow M_0 - \{s_0\}|_{\bar{a}=\pm 1} \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, u) &\mapsto (u^2\bar{x}, u^4\bar{y}, u^6\bar{\varepsilon} \pm u^3),\end{aligned}$$

de onde temos,

$$D\Phi^\pm = \begin{pmatrix} u^2 & 0 & 0 & 2u\bar{x} \\ 0 & u^4 & 0 & 4u^3\bar{y} \\ 0 & 0 & u^6 & 6u^5\bar{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 & \pm 3u^2 \end{pmatrix} \Rightarrow (D\Phi^\pm)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2} & 0 & 0 & \mp \frac{2\bar{x}}{3u^3} \\ 0 & \frac{1}{u^4} & 0 & \mp \frac{4\bar{y}}{3u^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{u^6} & \mp \frac{2\bar{\varepsilon}}{u^3} \\ 0 & 0 & 0 & \pm \frac{1}{3u^2} \end{pmatrix},$$

e,

$$\begin{aligned} X(\Phi^\pm(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, u)) &= X(u^2\bar{x}, u^4\bar{y}, u^6\bar{\varepsilon}, \pm u^3) \\ &= \left(u^4\bar{y} + u^4\frac{\bar{x}^2}{2} - u^6\frac{\bar{x}^3}{3}, u^6\bar{\varepsilon}(1 \pm u^3 - u^2\bar{x}), 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm &= \frac{1}{u^2} \hat{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm \\ &= \frac{1}{u^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2} & 0 & 0 & \mp \frac{2\bar{x}}{3u^3} \\ 0 & \frac{1}{u^4} & 0 & \mp \frac{4\bar{y}}{3u^3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{u^6} & \mp \frac{2\bar{\varepsilon}}{u^3} \\ 0 & 0 & 0 & \pm \frac{1}{3u^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^4\bar{y} + u^4\frac{\bar{x}^2}{2} - u^6\frac{\bar{x}^3}{3} \\ u^6\bar{\varepsilon}(1 \pm u^3 - u^2\bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{2} - u^2\frac{\bar{x}^3}{3} \\ \bar{\varepsilon}(1 \pm u^3 - u^2\bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (C.13)$$

Fazendo $u = 0$ em C.13, temos

$$\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm = \begin{pmatrix} \bar{y} + \frac{\bar{x}^2}{2} \\ \bar{\varepsilon} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, a expressão do campo é a mesma para ambas as cartas $\{\bar{a} = \pm 1\}$.

Observe que para $\varepsilon \neq 0$, temos que o campo $\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm$ não possui singularidades. Para $\varepsilon = 0$, encontramos toda uma curva de singularidades, dada pela parábola $\bar{y} = -\bar{x}^2/2$, ou seja, os pontos da forma $(\bar{x}, -\bar{x}^2/2, 0, 0)$ são pontos de equilíbrio para $\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm$ com

$$D\bar{X}_{\bar{a}=\pm 1}^\pm(\bar{x}, -\bar{x}^2/2, 0, 0) = \begin{pmatrix} \bar{x} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

As informações para o campo $\bar{X}$ para $u \neq 0$ serão obtidas analisando as demais cartas, considerando o campo restrito à $F_0 = \{\bar{\varepsilon} = \bar{a} = 0\}$.

Para as cartas $\{\bar{x} = \pm 1\}$ temos que a transformação C.11 se escreve

$$\begin{aligned} \Phi^\pm : S^3 \times [0, U')_{\bar{x}=\pm 1} &\rightarrow M_0 - \{s_0\} \\ (\bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) &\mapsto (\pm u^2, u^4\bar{y}, u^6\bar{\varepsilon}, u^3\bar{a}). \end{aligned}$$

Logo,

$$D\Phi^\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \pm 2u \\ u^4 & 0 & 0 & 4u^3\bar{y} \\ 0 & u^6 & 0 & 6u^5\bar{\varepsilon} \\ 0 & 0 & u^3 & 3u^2\bar{a} \end{pmatrix} \Rightarrow (D\Phi^\pm)^{-1} = \begin{pmatrix} \mp \frac{2\bar{y}}{u^2} & \frac{1}{u^4} & 0 & 0 \\ \mp \frac{3\bar{\varepsilon}}{u^2} & 0 & \frac{1}{u^6} & 0 \\ \mp \frac{3\bar{a}}{2u^2} & 0 & 0 & \frac{1}{u^3} \\ \pm \frac{1}{2u} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e,

$$\begin{aligned} X(\Phi^\pm(\bar{y}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u)) &= X(\pm u^2, u^4 \bar{y}, u^6 \bar{\varepsilon}, u^3 \bar{a}) \\ &= \left(u^4 \bar{y} \pm \frac{u^4}{2} \mp \frac{u^6}{3}, u^6 \bar{\varepsilon} (1 + u^3 \bar{a} \pm u^2), 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm &= \frac{1}{u^2} \hat{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm \\ &= \frac{1}{u^2} \begin{pmatrix} \mp \frac{2\bar{y}}{u^2} & \frac{1}{u^4} & 0 & 0 \\ \mp \frac{3\bar{\varepsilon}}{u^2} & 0 & \frac{1}{u^6} & 0 \\ \mp \frac{3\bar{a}}{2u^2} & 0 & 0 & \frac{1}{u^3} \\ \pm \frac{1}{2u} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^4 \bar{y} \pm \frac{u^4}{2} \mp \frac{u^6}{3} \\ u^6 \bar{\varepsilon} (1 + u^3 \bar{a} \pm u^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} (1 + u^3 \bar{a} \mp u^2) \mp 2\bar{y}^2 \mp \bar{y} + \frac{2}{3} u^2 \bar{y} \\ \mp 3\bar{y} \bar{\varepsilon} \mp \frac{3}{2} \bar{\varepsilon} + u^2 \bar{\varepsilon} \\ \mp \frac{3}{2} \bar{y} \bar{a} \mp \frac{3}{4} \bar{a} + u^2 \frac{\bar{a}}{2} \\ \pm u \frac{\bar{y}}{2} \pm \frac{u}{4} - \frac{u^3}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Nos restringindo à $F_0 = \{\bar{\varepsilon} = \bar{a} = 0\}$ temos

$$\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm = \begin{pmatrix} \mp 2\bar{y}^2 \mp \bar{y} + \frac{2}{3} u^2 \bar{y} \\ 0 \\ 0 \\ \pm u \frac{\bar{y}}{2} \pm \frac{u}{4} - \frac{u^3}{6} \end{pmatrix},$$

de modo que,

$$\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mp 2\bar{y}^2 \mp \bar{y} + \frac{2}{3} u^2 \bar{y} = 0 \\ \pm u \frac{\bar{y}}{2} \pm \frac{u}{4} - \frac{u^3}{6} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = \bar{y} = 0.$$

Portanto, o ponto $(0, 0, 0, 0, 0)$ é um ponto de equilíbrio para $\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm$.

Temos ainda que,

$$\begin{aligned} D\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm &= \begin{pmatrix} \mp 4\bar{y} \mp 1 + \frac{2u^2}{3} & 0 & 0 & \frac{4\bar{y}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pm \frac{u}{2} & 0 & 0 & \pm \frac{\bar{y}}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{u^2}{2} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow D\bar{X}_{\bar{x}=\pm 1}^\pm(0, 0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por fim, considerando a carta $\{\bar{y} = -1\}$ podemos escrever a transformação C.11 como

$$\begin{aligned} \Phi : S^3 \times [0, U')|_{\bar{y}=-1} &\rightarrow M_0 - \{s_0\} \\ (\bar{x}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u) &\mapsto (u^2 \bar{x}, -u^4, u^6 \bar{\varepsilon}, u^3 \bar{a}). \end{aligned}$$

Um cálculo direto fornece

$$D\Phi = \begin{pmatrix} u^2 & 0 & 0 & 2u\bar{x} \\ 0 & 0 & 0 & -4u^3 \\ 0 & u^6 & 0 & 6u^5 \bar{\varepsilon} \\ 0 & 0 & u^3 & 3u^2 \bar{a} \end{pmatrix} \Rightarrow (D\Phi)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2} & \frac{\bar{x}}{2u^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2u^4}{3\bar{\varepsilon}} & \frac{1}{u^6} & 0 \\ 0 & \frac{3\bar{a}}{4u^4} & 0 & \frac{1}{u^3} \\ 0 & -\frac{1}{4u^3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e,

$$\begin{aligned} X(\Phi(\bar{x}, \bar{\varepsilon}, \bar{a}, u)) &= X(u^2 \bar{x}, -u^4, u^6 \bar{\varepsilon}, u^3 \bar{a}) \\ &= \left(-u^4 + u^4 \frac{\bar{x}^2}{2} - u^6 \frac{\bar{x}^3}{3}, u^6 \bar{\varepsilon}(1 + u^3 \bar{a} - u^2 \bar{x}), 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\bar{y}=-1} &= \frac{1}{u^2} \hat{X}_{\bar{y}=-1} \\ &= \frac{1}{u^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{u^2} & \frac{\bar{x}}{2u^4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\bar{\varepsilon}}{2u^4} & \frac{1}{u^6} & 0 \\ 0 & \frac{3\bar{a}}{4u^4} & 0 & \frac{1}{u^3} \\ 0 & -\frac{1}{4u^3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u^4 + u^4 \frac{\bar{x}^2}{2} - u^6 \frac{\bar{x}^3}{3} \\ u^6 \bar{\varepsilon}(1 + u^3 \bar{a} - u^2 \bar{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -u^2 + u^2 \frac{\bar{x}^2}{2} - u^4 \frac{\bar{x}^3}{3} + \frac{u^2}{2} \bar{x} \bar{\varepsilon}(1 + u^3 \bar{a} - u^2 \bar{x}) \\ \frac{3}{4} \bar{\varepsilon}^2 u^2 (1 + u^3 \bar{a} - u^2 \bar{x}) \\ \frac{3}{4} \bar{a} \bar{\varepsilon} u^2 (1 + u^3 \bar{a} - u^2 \bar{x}) \\ -\frac{u^3}{4} \bar{\varepsilon} (1 + u^3 \bar{a} - u^2 \bar{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{C.15}$$

E, fazendo $\bar{\varepsilon} = \bar{a} = 0$, obtemos

$$\bar{X}_{\bar{y}=-1} = \begin{pmatrix} -u^2 + u^2 \frac{\bar{x}^2}{2} - u^4 \frac{\bar{x}^3}{3} + \frac{u^2}{2} \bar{x} \bar{\varepsilon}(1 + u^3 \bar{a} - u^2 \bar{x}) \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{u^3}{4} \bar{\varepsilon}(1 + u^3 \bar{a} - u^2 \bar{x}) \end{pmatrix}$$

Ficam assim determinadas todas as expressões da aplicação de blow up quase-homogêneo na singularidade $n_0 = (-1, 1/6, 0, 0)$ considerando as cartas $\{\bar{\varepsilon} = 1\}$, $\{\bar{a} = \pm 1\}$, $\{\bar{x} = \pm 1\}$ e $\{\bar{y} = \pm 1\}$. E, com isso, terminamos o nosso exemplo.

D Compactificação de Poincaré

Neste apêndice construiremos a compactificação de Poincaré de um campo vetorial polinomial em $\mathbb{R}^2$. A técnica de compactificação de Poincaré nos fornece uma compreensão global do retrato de fase de um campo de vetores polinomial no plano. A construção aqui apresentada por ser vista em [15].

Denote por (x_1, x_2) as coordenadas do plano e seja $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ um campo vetorial polinomial planar. Consideremos a esfera $S^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$, denominada esfera de Poincaré, e um plano $\mathbb{R}^2$ no espaço $\mathbb{R}^3$ com coordenadas $(y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, 1)$, que é tangente à esfera S^2 no ponto $(0, 0, 1)$.

Vamos dividir a esfera S^2 em três partes:

$$\begin{aligned} H_+ &= \{(y_1, y_2, y_3) \in S^2 : y_3 > 0\} : && \text{hemisfério norte;} \\ H_- &= \{(y_1, y_2, y_3) \in S^2 : y_3 < 0\} : && \text{hemisfério sul;} \\ S^1 &= \{(y_1, y_2, y_3) \in S^2 : y_3 = 0\} : && \text{equador.} \end{aligned}$$

Dado um ponto $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, consideremos a reta que passa pelos pontos $(0, 0, 0)$ e $(x_1, x_2, 1)$, que intersecta S^2 em exatamente dois pontos antipodais (diametralmente opostos) dados por

$$\begin{aligned} y^+ &= \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \in H_+ \\ y^- &= - \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right) \in H_-, \end{aligned}$$

onde $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$. Consideremos também as projeções do campo vetorial X de $\mathbb{R}^2$ em S^2 dadas pelas projeções centrais

$$\begin{aligned} f^+ : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2; f^+(x) = y^+ \\ f^- : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2; f^-(x) = y^-, \end{aligned}$$

conforme a Figura D.1.

Das projeções centrais, obtemos os campos vetoriais induzidos nos hemisférios H_+ e H_- de S^2 . Considere o campo vetorial induzido

$$\begin{aligned} \bar{X} : H_+ \cup H_- &\rightarrow H_+ \cup H_- \\ y &\mapsto \begin{cases} Df^+(x)X(x); & \text{se } y = f^+(x) \in H_+ \\ Df^-(x)X(x); & \text{se } y = f^-(x) \in H_- \end{cases} \end{aligned}$$

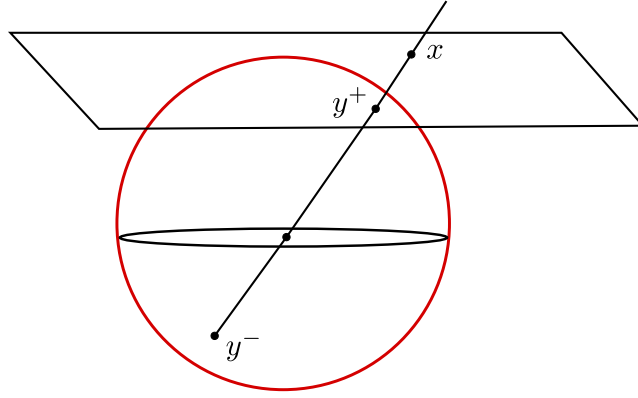


Figura D.1: Projeções centrais

Se $y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2$, segue que

$$(f^+)^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), \text{ se } y_3 > 0$$

$$(f^-)^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right), \text{ se } y_3 < 0$$

De fato, se $y = (y_1, y_2, y_3) \in S^2$ é tal que $y_3 > 0$, então existe $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1/\Delta(x) \\ y_2 = x_2/\Delta(x) \\ y_3 = 1/\Delta(x) \end{cases}$$

Da última equação do sistema acima temos que $\Delta(x) = 1/y_3$ e, substituindo nas demais obtemos

$$\begin{cases} x_1 = y_1\Delta(x) = y_1/y_3 \\ x_2 = y_2\Delta(x) = y_2/y_3; \end{cases}$$

logo,

$$(f^+)^{-1}(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right).$$

O mesmo ocorre no caso em $y \in S^2$ com $y_3 < 0$.

Podemos então escrever o campo $\bar{X}$ explicitamente como

$$\bar{X}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} Df^+ \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right); & \text{se } y_3 > 0 \\ Df^- \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right); & \text{se } y_3 < 0. \end{cases}$$

Assim, tendo em mente que $\Delta(x) = 1/|y_3|$, segue que

$$Df^+ \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) X \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) = y_3 \begin{pmatrix} y_2^2 + y_3^2 & -y_1y_2 \\ -y_1y_2 & y_1^2 + y_3^2 \\ -y_3y_1 & -y_3y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \\ Q \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3} \right) \end{pmatrix},$$

e,

$$Df^-\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) X\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) = y_3 \begin{pmatrix} y_2^2 + y_3^2 & -y_1y_2 \\ -y_1y_2 & y_1^2 + y_3^2 \\ -y_3y_1 & -y_3y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) \\ Q\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) \end{pmatrix},$$

ou seja, o campo $\bar{X}$ tem a mesma expressão em H_+ e em H_- . Observe ainda que, se $\Pi_3(y_1, y_2, y_3) = y_3$, i.e., Π_3 é a projeção na terceira coordenada, temos que $\Pi_3(f^+(x)) = \frac{1}{\Delta(x)} \rightarrow 0$, quando $\|x\| \rightarrow \infty$; neste sentido, o equador S^1 representa o “infinito” de $\mathbb{R}^2$.

Para estudar o comportamento do campo X no infinito precisamos estender o campo $\bar{X}$ em toda a esfera S^2 e, para isso vamos multiplicar o campo vetorial $\bar{X}$ pelo fator $\rho(y) = y_3^{d-1}$, onde $d = \max\{\text{grau}(P), \text{grau}(Q)\}$. Fazendo isso, temos que cada componente de

$$\begin{pmatrix} y_3^d P\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) \\ y_3^d Q\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) \end{pmatrix}$$

é um polinômio homogêneo de grau d nas variáveis y_1, y_2 e y_3 , de modo que pode-se considerar uma extensão de $\bar{X}$ em $y_3 = 0$.

Definição D.1. O campo obtido, dado por $\mathcal{P}(X)(y) = \rho(y)\bar{X}(y)$, é chamado de compactificação de Poincaré do campo de vetores X .

Queremos agora obter explicitamente o campo $\mathcal{P}(X)$. Observamos inicialmente que S^2 é uma variedade compacta que pode ser coberta por seis cartas locais, dadas por (U_k, ϕ_k) com

$$\begin{aligned} \phi_k : U_k &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k}\right), m < n; m, n \neq k, \end{aligned}$$

em que $U_k = \{y \in S^2 : y_k > 0\}$ e por (V_k, ψ_k) , onde

$$\psi_k : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad \psi_k(y) = -\phi_k(y),$$

e $V_k = \{y \in S^2 : y_k < 0\}$, com $k \in \{1, 2, 3\}$.

Vamos denotar por $z = (u, v)$ o valor de $\phi_k(y)$ ou de $\psi_k(y)$ para todo k , de modo que (u, v) dependerá da carta local escolhida.

Observe que os pontos de S^1 , em qualquer carta local, são dados por $v = 0$.

Vamos agora obter expressões de $\mathcal{P}(X)$ nas cartas locais. Consideremos a carta (U_1, ϕ_1) . O cálculo para as demais segue de maneira análoga. Dado que $X(x) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ e $U_1 = \{y \in S^2 : y_1 > 0\}$, temos que

$$\bar{X}(y) = Df^+(x)X(x),$$

onde $y = f^+(x)$, e

$$\begin{aligned} D\phi_1(y)\bar{X}(y) &= D\phi_1(y) \circ Df^+(x)X(x) \\ &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x). \end{aligned}$$

Seja $\bar{X}|_{U_1}$ o sistema definido como $\phi_1(y)\bar{X}(y)$. Um cálculo direto fornece

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f^+)(x) &= \phi_1(y^+) \\ &= \phi_1\left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)}\right) \\ &= \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1}\right) \\ &= (u, v), \end{aligned}$$

e,

$$D(\phi_1 \circ f^+)(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D\phi_1(y)\bar{X}(y) &= D\phi_1(y) \circ Df^+(x)X(x) \\ &= D(\phi_1 \circ f^+)(x)X(x) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x_1^2}(-x_2P(x_1, x_2) + x_1Q(x_1, x_2), -P(x_1, x_2)) \\ &= v^2 \left(-\frac{u}{v}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v}Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right). \end{aligned}$$

Ainda, como

$$\rho(y) = y_3^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = \frac{v^{d-1}}{\Delta(z)^{d-1}} = v^{d-1}m(z),$$

onde $m(z) = (1 + u^2 + v^2)^{(1-d)/2}$, segue que

$$\mathcal{P}(\bar{X}|_{U_1})(z) = v^{d+1}m(z) \left(-\frac{u}{v}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v}Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right).$$

Observe agora que, enquanto $\bar{X}|_{U_1}$ não é bem definido em $v = 0$, $\mathcal{P}(X|_{U_1})$ o é, uma vez que multiplicando por v^{d+1} se cancelam qualquer fator de v que apareça no denominador, o que prova que a extensão está bem definida.

Argumentos semelhantes podem ser aplicados as demais cartas.

Por meio de uma reparametrização podemos simplificar a expressão do campo obtido, removendo o fator $m(z)$. As expressões para $\mathcal{P}(X)$ nas cartas locais são dadas como a seguir:

- Na carta (U_1, ϕ_1) :

$$\begin{cases} u' = v^d \left(-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right) \\ v' = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

- Na carta (U_2, ϕ_2) :

$$\begin{cases} u' = v^d \left(P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right) \\ v' = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

- Na carta (U_3, ϕ_3) :

$$\begin{cases} u' = P(u, v) \\ v' = Q(u, v) \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

As expressões para $\mathcal{P}(X)$ nas cartas (V_k, ψ_k) para $k = 1, 2, 3$, são as mesmas das cartas (U_k, ϕ_k) dadas pelas equações D.1, D.2 e D.3, respectivamente, multiplicadas por $(-1)^{d-1}$.

Definição D.2. Chamamos de pontos singulares finitos (respectivamente, pontos singulares infinitos) de X ou de $\mathcal{P}(X)$ os pontos singulares de $\mathcal{P}(X)$ em $S^2 - S^1$ (respectivamente, em S^1).

Considerando a geometria da esfera S^2 , concluímos que para estudar o comportamento do campo X , incluindo o seu comportamento no infinito, é suficiente trabalharmos em $H_+ \cup S^1$.

Definição D.3. A projeção de $H_+ \cup S^1$ em $\mathbb{R}^2$ é chamada de disco de Poincaré.

Índice Remissivo

- Σ -dobra, 23
- Órbita de um ponto, 22
- 1-folheação, 95
- 1-folheação descontínua, 96
- 1-folheação suave por partes, 101
- Blow up, 71
- Blow up direcional, 76
- Blow up polar, 71, 73, 74
- Blow up quase-homogêneo, 84, 87
- Campo de Filippov, 20, 21
- Campo de vetores local, 95
- Campo vetorial descontínuo, 16
- Campos $\mathcal{C}^r$ -conjugados, 27
- Campos Σ -equivalentes, 26
- Derivada de Lie, 17
- Dobra invisível, 19
- Dobra visível, 19
- Fluxo lento, 38
- Fluxo rápido, 38
- Função altura, 116
- Função de transição, 30
- Função quase-homogênea, 83
- Gerador local, 96
- Hiperbolicidade normal, 40, 66, 69
- Limite singular, 38
- Locus de descontinuidade, 16, 96, 103
- Multigerador local, 100
- Números generalizados de Lyapunov, 56, 64
- Poli-trajetória, 24, 26
- Ponto Σ -regular, 22
- Ponto crítico, 23
- Ponto crítico hiperbólico, 23
- Ponto de dobra, 19, 47
- Ponto de nó, 23
- Ponto de sela, 23
- Ponto de tangência, 19
- Pontos de costura, 17, 118
- Pontos de deslize, 18, 109
- Pontos de escape, 18
- Regularização, 30
- Regularização do tipo transição, 107
- Regularização dupla, 108
- Regularização Sotomayor-Teixeira, 88, 107
- Regularização, 104
- Regularização Sotomayor-Teixeira, 31
- Separatriz, 24
- Separatriz dupla, 24
- Singularidade transcítica, 48
- Sistema lento, 38
- Sistema rápido, 38
- Sistema Slow-Fast, 35
- Tangência regular, 19
- Tangência singular, 19
- Trajetoária, 22
- Trajetoária candidata, 51
- Variedade invariante, 54
- Variedade invariante “de entrada”, 54
- Variedade invariante “de saída”, 54
- Variedade lenta, 38, 41