

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

RICHARD SILVA COSTA

**Função de Partição para um Campo Fermiônico de Dimensão de Massa Um e o Halo de
Matéria Escura das Galáxias**

Guaratinguetá

2020

Richard Silva Costa

Função de Partição para um Campo Fermiônico de Dimensão de Massa Um e o Halo de Matéria Escura das Galáxias

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física na área de Partículas e Campos, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestrado em Física .

Orientador: Prof^o Dr. Saulo Henrique Pereira

Guaratinguetá

2020

C837f Costa, Richard Silva
Função de Partição para um Campo Fermiônico de Dimensão de
Massa Um e o Halo de Matéria Escura das Galáxias / Richard Silva Costa
– Guaratinguetá, 2020.
76 f : il.
Bibliografia: f. 54-59

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2020.
Orientador: Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira

1. Teoria de campos (Física). 2. Matéria escura (Astronomia).
3. Galáxias. 4. Partículas (Física nuclear). I. Título.

CDU 530.145(043)

RICHARD SILVA COSTA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM FÍSICA

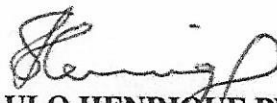
PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: MESTRADO ACADÊMICO

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Konstantin Georgiev Kostov
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA
Orientador/UNESP/FEG



Prof. Dr. MARCIO EDUARDO DA SILVA ALVES
UNESP/ICT
PARTICIPOU POR V.C.



Prof. Dr. RODOLFO JOSÉ BUENO ROGÉRIO
UNIFEI

PARTICIPOU POR V.C.

DADOS CURRICULARES

RICHARD SILVA COSTA

NASCIMENTO 08/08/1990 - São José dos Campos / SP

FILIAÇÃO José Ribamar Silva Costa
Rose Ângela Sampaio da Silva Costa

2011 / 2016 Curso de Graduação - Bacharelado em Física
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP, Brasil

2017 / 2020 Curso de Pós-Graduação - Mestrado em Física
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP, Brasil

Aos meus pais, sempre.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à meus pais, Rose Ângela Sampaio da Silva Costa e José Ribamar Silva Costa, por acreditar, por apoiar e por fornecer a estrutura familiar para que eu pudesse alcançar meus objetivos, sem nunca exigir nada além do que eu podia.

À Beatriz Helene Xavier, por seu carinho e dedicação para comigo. Sem ela e seu amor, esse trabalho não teria sido concluído.

Ao professor Saulo Henrique Pereira, pela paciência infinita e por desempenhar o papel de um verdadeiro orientador.

Aos membros da banca, Márcio Eduardo da Silva Alves e Rodolfo José Bueno Rogerio, pela disponibilidade, sugestões e críticas ao trabalho.

Aos professores Antônio Soares de Castro e Marcelo Batista Hott, por intensificar o meu interesse pela Física.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

À República Moradia, casa que me acolheu durante a graduação e parte da pós-graduação.

À Cristina Vieira (Cori), assistente social que foi fundamental na minha graduação.

Aos amigos Jean Michel Silva e Yuri Trivinho Gelesov, companheiros de quarto e da vida.

Aos amigos Caio Rodrigues dos Santos, José Raimundo Silva Júnior, Rafael Monteiro e Renato Alves Batista pela amizade, acima de tudo.

Aos amigos Diego Sá de Lima e Douglas Roberto Pimentel, pela amizade, ajuda e conselhos.

Aos amigos de pós-graduação Anderson Escobal, Tiago Francisco e Victor Lattari, pelas discussões e companhia.

À Luna e Hannah, pela injeção de alegria.

Ao 1º andar, minha segunda família.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):
CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

*“Deyr fé,
deyja frændr,
deyr sjálfr it sama.
En orðstírr
deyr aldregi
hveim er sér góðan getr.
Deyr fé,
deyja frændr,
deyr sjálfr it sama.
Ek veit einn
at aldri deyr:
dómr um dauðan hvern.*

*Cows die,
family die,
you will die the same way.
But a good reputation
never dies
for the one who earns it well.
Cows die,
family die,
you will die the same way.
I know only one thing
that never dies:
the reputation of the one who's died.*

“

(Hávamál, 76-77. Codex Regius)

RESUMO

Efeitos térmicos em teoria de campos são estudados pela chamada Teoria de Campos a Temperatura Finita. Nessa dissertação estudamos os efeitos de temperatura de um campo fermiônico de dimensão de massa um (MDO), que obedece à equação Klein-Gordon em vez da de Dirac. A função de partição foi obtida por meio do formalismo de tempo imaginário e o resultado foi o mesmo que o obtido para campos fermiônicos padrões de Dirac. Obtemos os limites de alta e baixa temperatura, sendo que o limite de baixas temperaturas é proposto como sendo o responsável por manter os halos de matéria escura da galáxia numa região da mesma ordem ou maior que o raio galáctico. Para uma partícula leve com massa de 1eV e densidade de 0.1 partículas por cm^3 , o valor da massa total da matéria escura devido a partículas MDO é da mesma ordem da massa de uma galáxia típica. Tal resultado pode explicar a matéria escura como sendo formada por partículas fermiônicas de dimensão de massa um. Por fim, comparamos as estimativas de densidade dessas partículas com densidades obtidas através de dados de simulações numéricas e concluimos que para valores de massa entre 0.1eV a 1eV, as partículas MDO produzem uma massa típica de galáxias desde que a densidade delas esteja no intervalo de 10^{-2}cm^{-3} a 10^5cm^{-3} .

PALAVRAS-CHAVE: Campo MDO, Teoria de Campos, Temperatura Finita, Matéria Escura

ABSTRACT

Thermal effects in field theory are studied by the so called Finite Temperature Field Theory. In this dissertation we study the effects of temperature of a mass dimension one (MDO) fermionic field, which obeys the Klein-Gordon equation rather than the Dirac equation. The partition function was obtained via the imaginary time formalism and the result was the same as for the a Dirac fermionic field. We obtained the high and low temperature limits, and the latter is proposed as being responsible for keeping the dark matter halos of galaxies in a region greater than or of the same order as a typical galaxy radius. For a light particle of about 1eV and density of 0.1 particles per cm^3 , the value of the total dark mass due to MDO particles is of the same order of a typical galaxy. Such result can explain dark matter as being formed by fermionic particles. Lastly, we compared those particles densities estimates with the ones obtained numeric simulation data and conclude that for mass values between 0.1eV and 1eV, the MDO particles yield a typical galaxy mass as long as their density is in the 10^{-2}cm^{-3} to 10^5cm^{-3} interval.

KEYWORDS: MDO field, Field Theory, Finite Temperature, Dark Matter

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Curva de rotação da M33 (pontos) comparada com o ajuste de curva (linha contínua). Também são mostrados a contribuição do Halo de matéria escura (linha tracejada-pontilhada), o disco estelar (linha com traços curtos) e a contribuição de gases (linha com traços longos). Fonte:(CORBELLI; SALUCCI, 2000) . . .	45
Figura 2	Gráfico de M/M_G pela densidade de número de partículas $n(cm^{-3})$, onde M_G é a massa total da nossa galáxia, para cinco diferentes valores de massa da partícula, variando de $m = 0.01$ eV a $m = 100$ eV. Quanto maior o valor da massa da partícula, maior deve ser a densidade n para que se obtenha um valor de massa da mesma ordem da massa da nossa galáxia.	48
Figura 3	Gráfico de R_0/R_G pela densidade de número de partículas $n(cm^{-3})$, onde R_G é o raio da nossa galáxia, para cinco diferentes valores de massa da partícula, variando de $m = 0.01$ eV a $m = 100$ eV. Quanto maior o valor da massa da partícula, menor deve ser a densidade n para que se obtenha um valor de raio da mesma ordem do raio da nossa galáxia.	49
Figura 4	Contorno da integração em (A.5).	63
Figura 5	Contorno de integração deformado.	64
Figura 6	Contorno C em forma de semi-círculo.	66
Figura 7	Contorno para o caso com potencial químico μ	69

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
MDO	Mass Dimension One
TQC	Teoria Quântica de Campos
TCTF	Teoria de Campos a Temperatura Finita

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	TEORIA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA	17
2.1	Mecânica Quântica Estatística - Uma Revisão	17
2.2	O Formalismo do Tempo Imaginário	18
2.3	Representação Funcional da Função de Partição	19
2.4	A Condição KMS	23
3	FUNÇÃO DE PARTIÇÃO PARA UM CAMPO ESCALAR E UM FERMIÔNICO	26
3.1	Campo Escalar	26
3.2	Campo Fermiônico	31
4	FUNÇÃO DE PARTIÇÃO PARA UM CAMPO FERMIÔNICO DE DIMENSÃO DE MASSA UM	36
4.1	O campo MDO	36
4.2	Espinoros Duais	38
4.3	Função de Partição do campo MDO	39
4.4	Comparação entre os campos	42
5	PRESSÃO DE DEGENERESCÊNCIA E O HALO DE MATÉRIA ESCURA DAS GALÁXIAS	44
5.1	Halos de Matéria Escura	44
5.2	Pressão de Degenerescência	45
5.3	Estimativa da densidade de partículas de um campo MDO	48
6	CONCLUSÕES	54
	REFERÊNCIAS	56
	APÊNDICE A – SOMAS DE FREQUÊNCIAS DE MATSUBARA	62
A.1	Soma de Frequências de Matsubara para Bósons	62
A.2	Soma de Frequências de Matsubara para Férmions	68
A.3	Soma de Frequências de Matsubara com Potenciais Químicos	69
	APÊNDICE B – INTEGRAÇÃO SOBRE VARIÁVEIS DE GRASSMAN	71
	APÊNDICE C – RELAÇÃO DO TRAÇO DO LOGARÍTMO	76

1 INTRODUÇÃO

Os efeitos de temperatura em Teoria de Campos são estudados há décadas e formam um campo de investigação denominado Teoria de Campos a Temperatura Finita. De modo geral os trabalhos em Teoria de Campos a Temperatura Finita (TCTF) trata do estudo de propriedades termodinâmicas no equilíbrio de sistemas formados por campos reais ou complexos de spin 0, campos de spin 1/2 e campos de spin 1. Para extrairmos propriedades termodinâmicas de campos relativísticos no equilíbrio a abordagem padrão usada é o estudo da função de partição da mecânica estatística, construída como uma integral funcional sobre os campos. Ao calcularmos a função de partição, o ensemble canônico garante que podemos obter a energia livre de Helmholtz e , a partir dessa, encontrarmos a densidade de energia total do sistema, além das densidades de pressão e entropia.

Teorias de campos não-relativísticas a temperatura finita existem desde o final dos anos 1950, combinando mecânica estatística e mecânica quântica para tratar de um número grande de partículas, particularmente no contexto de matéria condensada (BELLAC, 1996). Em 1955, Matsubara forneceu uma representação diagramática para a teoria da perturbação da função de partição. Uma das maiores vantagens desse formalismo era que as regras de Feynman eram similares às de Teoria Quântica de Campos a temperatura nula, com a diferença que as energias nos propagadores são imaginárias e discretas e, por consequência, algumas regras tem de ser modificadas, como por exemplo (DIJKSTRA, 2019):

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \rightarrow T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

Após Matsubara, Fradkin desenvolve um formalismo de integração funcional para descrever campos em equilíbrio termodinâmico. Em meados de 1970 a TCTF foi redescoberta devido a necessidade de se descrever a transição de fase que ocorre na teoria eletrofraca, numa temperatura da ordem de 200MeV (da ordem de 10^{12} K!) (BELLAC, 1996). Na década de 1980, teorias de gauge sugerem uma fase onde quarks e gluons não estão mais confinados, o que aconteceria em temperaturas da ordem de 150MeV, o chamado plasma de quarks e glúons. A possibilidade de observar esse estado da matéria em colisões de íons pesados contribuiu para um crescimento no estudo da TCTF nessa época (BELLAC, 1996). Esse estado foi observado em laboratório pela primeira vez no CERN em 2000 (HEINZ; JACOB, 2000).

O uso de um formalismo de teoria quântica de campos estendido para tratar do equilíbrio termodinâmico é vasto: inclui desde aplicações em no estudo de excitações e quase partículas em plasmas em eletrodinâmica quântica até emissões de neutrinos por fótons em estrelas (FERRARI; NOGUEIRA; PALECHOR, 2018). Por exemplo, os principais resultados incluem aplicações a:

- Gases relativísticos degenerados,
- Matéria nuclear superdensa,
- Transições quark-glúon,
- Quebra espontânea de simetria da unificação eletrofraca,

- Estrelas anãs brancas,
- Estrelas de nêutrons e bariogênese.

Esses resultados são discutidos em diversos livros, tais como (BELLAC, 1996; KAPUSTA; GALE, 2006; DAS, 1997) e (BAILIN; LOVE, 1993). Listas de referências abrangentes sobre TCTF podem ser encontradas em (LANDSMAN; WEERT, 1987; BELLAC, 1996; KAPUSTA; GALE, 2006; LAINE; VUORINEN, 2016).

No contexto do estudo de espinores de Majorana, uma nova classe de campos fermiônicos de dimensão de massa um foi descoberta recentemente (AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005a; AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005b; AHLUWALIA; LEE; SCHRITT, 2011; AHLUWALIA, 2017b; AHLUWALIA, 2017a). Essa classe de campos são candidatos naturais a partículas de Matéria Escura por dois motivos: o de possuírem dimensão canônica de massa um e o de serem neutros via conjugação do operador de carga. Essas duas características combinadas fazem com que esses espinores não interajam com partículas do Modelo Padrão e interajam muito fracamente com o Bóson de Higgs (GILLARD; MARTIN, 2009). Chamaremos esse campo daqui para a frente de campo MDO, do inglês *mass dimension one*.

A neutralidade desses campos, denotados aqui e subsequentemente por λ , significa que eles satisfazem

$$\mathcal{C}\lambda(p^\mu) = \pm\lambda(p^\mu), \quad (1.1)$$

onde \mathcal{C} é o operador conjugação de carga.

Já a característica de possuírem dimensão canônica de massa um significa que o propagador desses campos λ é idêntico ao propagador do campo escalar (AHLUWALIA, 2017b), ou seja,

$$S(x' - x)_{\text{MDO}} = S(x' - x)_{\text{Escalar}} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[\frac{\mathbb{1}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right]. \quad (1.2)$$

Em consequência disso e da análise dimensional da lagrangiana conclui-se que λ possui dimensão de massa um.

Originalmente esse campo sofria de um problema de covariância de Lorentz em um dos termos nas somas de spin. A solução desse problema se deu aproveitando-se de uma liberdade na definição de seu dual e assim o redefinindo (AHLUWALIA, 2017b). Uma investigação mais a fundo deu suporte matemático à esse procedimento (ROGERIO; SILVA, 2017).

Existem vários trabalhos na literatura englobando diversos aspectos dessa classe de espinores. Por exemplo, a assinatura dessa partícula fermiônica de dimensão de massa um no LHC foi proposta nas referências (DIAS; CAMPOS; SILVA, 2012; ALVES et al., 2015; DIAS; LEE, 2016) e (ALVES et al., 2018). Aplicações cosmológicas também foram recentemente estudadas nas referências (FABBRI, 2011; BÖHMER, 2008; BÖHMER et al., 2010; GREDAT; SHANKARANARAYANAN, 2010; BASAK; BHATT, 2011; SADJADI, 2012; KOUNW et al., 2013; PEREIRA; S.S.; SILVA, 2014; SILVA; PEREIRA, 2014; SOUZA; PEREIRA; JESUS, 2015) e (PEREIRA et al., 2017). Um modelo sigma foi obtido em (ROGERIO et al., 2016), seu efeito Casimir foi calculado em (PEREIRA; SILVA; SANTOS, 2017) e uma lagrangiana efetiva a um loop foi obtida em (ROGERIO et al., 2018).

Efeitos de temperatura finita em campos escalares, fermiônicos e bosônicos vetoriais de gauge são bem conhecidos na literatura (BAILIN; LOVE, 1993). Entretanto, no que tange a campos fermiônicos, os cálculos foram feitos apenas para campos de Dirac, isto é, campos fermiônicos de spin $1/2$ e dimensão de massa $3/2$ que são regidos pela dinâmica de Dirac. No presente trabalho, estudamos os efeitos de temperatura finita devido a campos de dimensão de massa um e suas contribuições a sistemas formados por esses campos no limite de altas e baixas temperaturas. Enquanto que o campo MDO satisfaz a equação de Klein-Gordon, como um campo escalar, ele deve também satisfazer a condições de contorno anti-periódicas, como um campo de Dirac. Portanto, o cálculo da sua função de partição deve levar em conta essa mistura de propriedades de campos bosônicos e fermiônicos.

Essa dissertação está estruturada da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos uma breve revisão de resultados oriundos de sistemas a temperatura finita, no capítulo 3 realizamos o cálculo explícito da função de partição para campos escalares e fermiônicos. No capítulo 4 detalhamos um pouco mais as características do campo MDO e calculamos a função de partição para um campo fermiônico de dimensão de massa um e apresentamos os principais resultados no limite de altas temperaturas, no capítulo 5 calculamos a pressão de degenerescência no limite de baixas temperaturas e sua relação com os halos de matéria escura nas galáxias. Concluimos então no capítulo 6 resumindo os resultados.

2 TEORIA DE CAMPOS A TEMPERATURA FINITA

Em teoria quântica de campos normalmente trabalhamos com sistemas em um regime em que a temperatura vai a zero. Porém, se estivermos interessados no efeito da temperatura, precisamos, de alguma forma, incorporar esses efeitos nos processos envolvidos pelos campos. Se estivermos dispostos a tratar apenas de médias de algumas propriedades, dado um período de tempo longo, podemos tratar esse problema com o ferramental da física estatística. A área de teoria de campos que incorpora os efeitos de temperatura é a chamada *Teoria de Campos a Temperatura Finita* (TCTF).

A temperatura em TCTF é introduzida via função de partição. Por conta disso, e porque o objeto de estudo dessa dissertação é a função de partição para um tipo de campo fermiônico de dimensão de massa um, é então razoável que façamos uma revisão de algumas noções de Mecânica Estatística antes de adentrarmos o terreno da TCTF de fato.

2.1 MECÂNICA QUÂNTICA ESTATÍSTICA - UMA REVISÃO

A Mecânica Quântica Estatística pode ser entendida como o estudo Mecânica Quântica a temperatura finita (BELLAC, 1996), sendo então um bom passo inicial para entender o formalismo de TCTF. É com ela que iremos introduzir a representação funcional da função de partição, cuja importância é fundamental para tratarmos de efeitos de temperatura em campos.

Recorde-se que em Física Estatística encontramos três tipos de ensemble: o microcanônico, o canônico e o grande canônico. No ensemble grande canônico a função de partição de um sistema num volume V , a temperatura T e com potenciais químicos $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, é dada por (KAPUSTA; GALE, 2006)

$$Z = Z(V, T, \mu_1, \mu_2, \dots) = \text{Tr} \hat{\rho}(\beta) = \text{Tr} e^{-[\beta(H - \mu_i N_i)]}, \quad (2.1)$$

onde $\hat{\rho}(\beta)$ é o operador densidade, H a hamiltoniana e $\beta = 1/k_B T = 1/T$. O traço significa somar os elementos da matriz $\exp[-\beta(H - \mu_i N_i)]$ entre todos os estados independentes do sistema. A conexão com a termodinâmica é feita através das seguintes relações (KAPUSTA; GALE, 2006):

$$P = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial V}, S = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial T}, E = -PV + TS + \mu_i, N_i = \frac{\partial(T \ln Z)}{\partial \mu_i}. \quad (2.2)$$

Quando não há possibilidade de troca de partículas entre os sistemas, o potencial químico é nulo e representa o caso do ensemble canônico. Quando não tratarmos de situações que precisem de se considerar destruição e criação de partículas, devemos usar o ensemble canônico.

Outra grandeza importante para o nosso trabalho é a energia livre de Helmholtz $F(N, T, V)$, a qual está relacionada com a função de partição através de (SALINAS, 2008)

$$Z = e^{-\beta F}. \quad (2.3)$$

As grandezas termodinâmicas de interesse, em função de F , são dadas por (PATHRIA; BEALE, 2011; BAILIN; LOVE, 1993):

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{N,T}, \quad S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{N,V}, \quad F = E - TS. \quad (2.4)$$

Por fim, o valor esperado do vácuo de um observável A é dado por (DIJKSTRA, 2019)

$$\langle A \rangle_0 = \sum_n \langle n|A|n \rangle, \quad (2.5)$$

enquanto que os valores esperados de observáveis em Mecânica Quântica Estatística, também chamados de *médias térmicas*, são dados por (KAPUSTA; GALE, 2006; DIJKSTRA, 2019)

$$\langle A \rangle_\beta := \frac{1}{Z} \sum_n \langle n|Ae^{-\beta H}|n \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n \langle n|A|n \rangle e^{-\beta H} = \frac{\text{Tr} A \rho(\beta)}{\text{Tr} \rho(\beta)} = \frac{1}{Z} \text{Tr} (e^{-\beta H} A), \quad (2.6)$$

onde o índice β enfatiza que estamos trabalhando com uma temperatura diferente de zero e $\rho(\beta) = e^{-\beta H} / Z$, lembrando que se estivermos trabalhando no ensemble grande canônico, H deve ser entendido como $H - \mu_i N_i$.

Resumindo: a função de partição em Mecânica Quântica Estatística é dada em termos do operador densidade $\hat{\rho}(\beta)$, que por sua vez envolve a temperatura através de β . As grandezas termodinâmicas são calculadas como derivadas parciais de $\ln Z$ e a energia livre de Helmholtz é dada também em termos de $\ln Z$. Finalmente, os valores esperados de observáveis podem ser escritos em função de Z e do traço de $e^{\beta H} A$, para um dado observável A .

2.2 O FORMALISMO DO TEMPO IMAGINÁRIO

O estudo da TCTF necessita do estudo da função de partição Z do sistema e a temperatura é introduzida por um formalismo denominado *Formalismo do Tempo Imaginário* ou *Formalismo de Matsubara*. Nesse formalismo realizamos uma rotação no eixo real do tempo para o eixo complexo, também conhecida como *Rotação de Wick*, dada pela seguinte transformação $x_0 = t \rightarrow -i\tau$. Através dessa mudança de variáveis introduzimos $\tau = \beta$. Essa introdução da temperatura é característica do formalismo e será justificada mais tarde, na seção 2.4.

O formalismo do tempo imaginário se aplica a sistemas que estejam em equilíbrio termodinâmico (DAS, 1997). O equilíbrio termodinâmico implica em um sistema sem dependência temporal e como a função de partição Z é um objeto independente do tempo, tal formalismo é apropriado. Para o caso de processos fora do equilíbrio é necessário realizar uma continuação analítica para tempo real ou utilizar um formalismo de integral funcional chamado de Formalismo do Caminho Fechado de Schwinger (Zinn-Justin, 2000).

Tal relação entre tempo imaginário e temperatura já havia sido notada por Claude Bloch em 1932

(DIJKSTRA, 2019). Particularmente, Bloch notou que

$$e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \longleftrightarrow e^{-\beta H}, \quad t = -i\hbar\beta. \quad (2.7)$$

Isso é similar ao procedimento que fazemos quando partimos do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano. De fato, em temperatura nula é conveniente realizar uma continuação analítica do tempo real para o imaginário (BELLAC, 1996):

$$t \mapsto -i\tau \text{ ou } x^0 \mapsto -ix_4, \quad (2.8)$$

com a transformação correspondente no espaço de momentos sendo $k^0 \rightarrow -ik_4$. Isso significa ir do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano, visto que as métricas se transformam de forma que:

$$t^2 - \mathbf{x}^2 \rightarrow -(\tau^2 + \mathbf{x}^2). \quad (2.9)$$

Eventualmente retornamos ao espaço de Minkowski, após realizados os cálculos de interesse no espaço euclidiano. Já em TCTF o espaço euclidiano desempenha um papel mais importante porque *não* retornamos ao espaço de Minkowski para calcular as grandezas termodinâmicas de interesse (BELLAC, 1996). A mudança de variáveis e a introdução da temperatura aparecerão na construção da representação funcional da função de partição, que tratamos a seguir.

2.3 REPRESENTAÇÃO FUNCIONAL DA FUNÇÃO DE PARTIÇÃO

Existem duas formas de abordar a teoria quântica não-relativística de muitos corpos. Uma é pelo processo de segunda quantização. Outra abordagem é utilizando integrais funcionais (KAPUSTA; GALE, 2006). Iremos desenvolver nessa seção a representação da função de partição por meio dessas integrais.

Considere um sistema que esteja em um estado q' em um tempo t' e que transita para o estado q'' em um tempo posterior t'' . A amplitude de transição entre os dois estados é (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \langle q'' | e^{-\frac{i\hat{H}(t''-t')}{\hbar}} | q' \rangle, \quad (2.10)$$

onde q são os autovalores associados ao observável Q (coordenada generalizada) na representação de Schrödinger. Podemos escrever a amplitude de transição $\langle q'', t'' | q', t' \rangle$ em forma funcional como (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle \propto \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p \exp \left[i\hbar \int_{t'}^{t''} dt (p\dot{q} - H(q, p)) \right], \quad (2.11)$$

onde a integração é realizada sobre todas as funções $q(t), p(t)$ com

$$q(t') = q', \quad q(t'') = q''. \quad (2.12)$$

Agora, considere a hamiltoniana na forma

$$H(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + V(Q), \quad (2.13)$$

onde P é o momento conjugado associado à coordenada generalizada Q . Dividimos o intervalo temporal $[t', t'']$ em $N + 1$ pedaços de comprimento ϵ , com (BAILIN; LOVE, 1993)

$$(N + 1)\epsilon = t'' - t', \quad (2.14)$$

onde os passos começam em t' e terminam em t'' com t', t_1, \dots, t_N, t'' . Estamos interessados no comportamento em que N é muito grande e ϵ é muito pequeno. Podemos escrever a representação funcional da amplitude de transição como (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle \approx \prod_{j=1}^N \int dq_j \prod_{j=0}^N \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{j=0}^N \left[\frac{p_j}{\epsilon} (q_{j+1} - q_j) - H(q_j, p_j) \right] \right\} \quad (2.15)$$

Nessa forma a integral pode ser realizada formalmente se completarmos os quadrados através da seguinte mudança de variável:

$$\tilde{p}_j = p_j - \frac{m}{\epsilon} (q_{j+1} - q_j). \quad (2.16)$$

Tomando a variável $i\epsilon$ como real, através de continuação analítica, a integral (2.15) se torna gaussiana e obtemos (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle \approx \sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon \left[\frac{m}{2\epsilon^2} (q_{j+1} - q_j)^2 - V(q_j) \right] \right\}. \quad (2.17)$$

Os autoestados do observável Q na representação de Heisenberg formam um conjunto completo para qualquer valor de t :

$$|q, t\rangle = e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |q\rangle_S, \quad (2.18)$$

onde \hat{H} é o operador hamiltoniano independente do tempo e $|q\rangle_S$ é o estado na representação de Schrödinger. A expressão para a amplitude de transição se torna

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \prod_{j=1}^N \int dq_j \langle q'', t'' | q_N, t_N \rangle \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \cdots \langle q_1, t_1 | q', t' \rangle. \quad (2.19)$$

Substituindo (2.17) em (2.19) obtemos

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle \approx \left(\frac{2\pi\epsilon\hbar}{m} \right)^{-\frac{(N+1)}{2}} \prod_{j=1}^N \int dq_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{j=0}^N \left[\frac{m}{2\epsilon^2} (q_{j+1} - q_j)^2 - V(q_j) \right] \right\}. \quad (2.20)$$

Por fim, tomando o limite $N \rightarrow \infty$ com $(N + 1)\epsilon = t'' - t'$ fixo, a representação funcional da amplitude

de transição fica

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle \propto \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt L(q, \dot{q}) \right], \quad (2.21)$$

onde $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$. A constante de proporcionalidade é formalmente infinita, mas pode ser removida por processos de regularização ou renormalização, que são processos padrões em teoria de campos. Veja, por exemplo, (SCHWINGER, 1951) para um dos métodos de regularização de quantidades infinitas em Teoria Quântica de Campos. Há diversos textos que detalham a derivação da formulação funcional e o leitor interessado pode ver, por exemplo, as referências (ZEE, 2003) e (PESKIN; SCHROEDER, 1995).

Gostaríamos agora de estender a amplitude de transição para o contexto da Teoria Quântica de Campos. Na transição de uma teoria de campos clássica para uma teoria de campos quântica assumimos que os campos clássicos $\phi(t, \mathbf{x})$ são substituídos por operadores $\hat{\phi}(t, \mathbf{x})$ na representação de Schrödinger, num espaço de Fock. Para um campo escalar, podemos definir autoestados desse operador de forma que (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x}), t\rangle = \phi(\mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x}), t\rangle. \quad (2.22)$$

Temos que a generalização de (2.11) é

$$\langle \phi''(\mathbf{x}), t'' | \phi'(\mathbf{x}), t' \rangle \propto \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp i\hbar^{-1} \int_t^{t''} dt \int d^3x (\pi \partial_0 \phi - \mathcal{H}(\pi, \phi)), \quad (2.23)$$

onde \mathcal{H} é a densidade hamiltoniana, $\pi = \partial\mathcal{L}/\partial(\partial_0\phi)$ é a densidade de momento conjugado e $\partial_0 \equiv \partial/\partial x_0$. Note que a integração é realizada sobre os campos clássicos e não sobre os operadores $\hat{\phi}(t, \mathbf{x})$. Em particular, a integração é realizada sobre todas as funções $\pi(t, \mathbf{x})$ e $\phi(t, \mathbf{x})$ satisfazendo as condições de contorno:

$$\phi(t'', \mathbf{x}) = \phi''(\mathbf{x}), \quad \phi(t', \mathbf{x}) = \phi'(\mathbf{x}). \quad (2.24)$$

Para introduzirmos a função de partição considere que o operador campo na representação de Schrödinger $\hat{\phi}(t=0, \mathbf{x})$ e seus autoestados $|\phi(\mathbf{x}), t=0\rangle$ sejam dados por (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\hat{\phi}(t=0, \mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x}), t=0\rangle = \phi(\mathbf{x}) |\phi(\mathbf{x}), t=0\rangle. \quad (2.25)$$

A função de partição (2.1) pode ser escrita formalmente como

$$Z = \sum_{\phi(\mathbf{x})} \langle \phi(\mathbf{x}), t=0 | e^{-\beta \hat{H}} | \phi(\mathbf{x}), t=0 \rangle. \quad (2.26)$$

Fazendo analogia com a equação (2.23) temos

$$\begin{aligned} \langle \phi''(\mathbf{x}), t'' | \phi'(\mathbf{x}), t' \rangle &= \langle \phi''(\mathbf{x}), t = 0 | e^{-i\hat{H}(t''-t')} | \phi'(\mathbf{x}), t = 0 \rangle \\ &\propto \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp i \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \left(\pi \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right), \end{aligned} \quad (2.27)$$

com as condições de contorno para os campos já mencionadas anteriormente. Se introduzirmos, heurísticamente, $\tau = it = ix_0$, com os limites $t' = 0$, $t'' = -i\beta$, obtemos

$$\langle \phi''(\mathbf{x}), t = 0 | e^{-\beta \hat{H}} | \phi'(\mathbf{x}), t = 0 \rangle \propto \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right), \quad (2.28)$$

onde ϕ e π agora são funções de τ e \mathbf{x} e a integral funcional é realizada com as condições de contorno

$$\phi(\beta, \mathbf{x}) = \phi''(\mathbf{x}), \quad \phi(0, \mathbf{x}) = \phi'(\mathbf{x}). \quad (2.29)$$

Note que é exatamente em (2.28) que introduzimos a temperatura, mais especificamente nos limites de integração da variável temporal. Essa introdução é mais detalhada, e de certa forma mais justificada, na seção 2.4, onde apresentamos a condição KMS.

Retornando, ao tomarmos

$$|\phi''(\mathbf{x}), t = 0\rangle = |\phi'(\mathbf{x}), t = 0\rangle = |\phi(\mathbf{x}), t = 0\rangle \quad (2.30)$$

na equação (2.28) e ‘somarmos’ sobre todos os autoestados, como em (2.26), obtemos

$$Z \propto \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right). \quad (2.31)$$

As condições de contorno (2.29) junto com os autoestados (2.30) nos mostram que a integração funcional agora é restrita a funções $\phi(\tau, \mathbf{x})$ periódicas em τ com período β . Indicamos isso escrevendo *periódicas* abaixo do sinal da integral. Além disso, o fato de que somamos sobre todos os autoestados significa que as funções devem ser integradas. A integral funcional sobre π continua sendo todas as funções $\pi(\tau, \mathbf{x})$. Em (2.31) já temos uma representação funcional geral para a função de partição. Contudo, podemos obter uma relação mais explícita quando as densidades lagrangiana e hamiltoniana tomam as formas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) &= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + f(\phi, \nabla \phi), \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \pi^2 - f(\phi, \nabla \phi). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Nesse caso a integração sobre π pode ser realizada explicitamente. Note que, para uma dada função

$\rho(x)$, (2.31) é da forma (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(-\frac{1}{2} \int dx \varphi(x') A(x', x) \varphi(x) + \int dx \rho(x) \varphi(x) \right) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{A} \right) \exp \left(\frac{1}{2} \int dx' \int dx \rho(x') A^{-1}(x', x) \rho(x) \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz simétrica real positiva definida e $A(x', x)$ o operador associado a essa matriz. Usando a notação $\bar{x} \equiv (ix_0, \mathbf{x})$ podemos identificar:

$$\begin{aligned} A(\bar{x}', \bar{x}) &= \delta^4(\bar{x}' - \bar{x}), \\ \rho(\bar{x}) &= i\partial\varphi/\partial\bar{x}_0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Assim, finalmente obtemos

$$\begin{aligned} Z &= \tilde{N}(\beta) \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}\phi \exp \left(-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau} \right)^2 - f(\phi, \nabla\phi) \right] \right) \\ &= \tilde{N}(\beta) \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}\phi \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \bar{\partial}_\mu\phi) \right), \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde $N(\beta)$ é uma constante de normalização dependente da temperatura advinda do operador determinante quando realizada a integral funcional sob π e

$$\bar{\partial}_\mu\phi \equiv \left(i\frac{\partial\phi}{\partial\tau}, \nabla\phi \right). \quad (2.36)$$

A abordagem apresentada aqui é heurística e segue de perto a referência (BAILIN; LOVE, 1993), onde não nos preocupamos com uma abordagem rigorosa para a medida de integração nas integrais funcionais. Para um tratamento mais matemático o leitor pode ver as referências (SCHULMAN, 2005) e (GLIMM; JAFFE, 1987).

2.4 A CONDIÇÃO KMS

Introduzimos na seção anterior a mudança de variável para um tempo imaginário e a identificação dessa variável com o inverso da temperatura β . Nessa seção justificaremos essa identificação.

Considere a seguinte função de correlação de dois pontos¹ (YANG, 2011):

$$\langle \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{y}, t') \rangle_\beta = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{y}, t') \right]. \quad (2.37)$$

Recorde-se que na representação de Heisenberg a evolução temporal é dada por (SAKURAI; NAPOLITANO, 2013)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{itH} \phi(\mathbf{x}, t_0) e^{-itH}. \quad (2.38)$$

¹ Uma função de correlação de n-pontos é definida como $C_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) := \langle \phi(\mathbf{x}_1) \phi(\mathbf{x}_2) \dots \phi(\mathbf{x}_n) \rangle$, isto é, o valor esperado de um produto de campos. Para mais detalhes sobre essas funções veja o capítulo 5 de (ALTLAND; SIMONS, 2010).

Então,

$$\langle \phi(\mathbf{x}, t) \phi(\mathbf{y}, t') \rangle_\beta = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \phi(\mathbf{x}, t) e^{it'H} \phi(\mathbf{y}, t') e^{-it'H} \right]. \quad (2.39)$$

A propriedade cíclica do traço de operadores nos permite escrever

$$\text{Tr} \left[e^{-\beta H} \phi(\mathbf{x}, t) e^{it'H} \phi(\mathbf{y}, t') e^{-it'H} \right] = \text{Tr} \left[e^{-i(t'-i\beta)H} \phi(\mathbf{x}, t) e^{it'H} \phi(\mathbf{y}, t') \right] \quad (2.40)$$

e a continuação analítica de $t \in \mathbb{R}$ para $t \in \mathbb{R} + i\beta$ nos dá:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \phi(\mathbf{x}, t + i\beta) e^{i(t'+i\beta)H} \phi(\mathbf{y}, t'_0 + i\beta) e^{-i(t'+i\beta)H} \right] &= \text{Tr} \left[e^{-it'H} \phi(\mathbf{x}, t + i\beta) e^{i(t'+i\beta)H} \phi(\mathbf{y}, t'_0 + i\beta) \right] \\ &= \text{Tr} \left[e^{-it'H} \phi(\mathbf{x}, t + i\beta) e^{it'H} e^{-\beta H} \phi(\mathbf{y}, t'_0 + i\beta) \right] \\ &= \text{Tr} \left[e^{-\beta H} e^{it'H} \phi(\mathbf{y}, t'_0 + i\beta) e^{-it'H} \phi(\mathbf{x}, t + i\beta) \right] \\ &= \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \phi(\mathbf{y}, t') \phi(\mathbf{x}, t + i\beta) \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde, além da propriedade cíclica do traço, usamos o fato de que a matriz densidade comuta com qualquer função de H . Assim, temos

$$\langle \phi(\mathbf{x}, t + i\beta) \phi(\mathbf{y}, t' + i\beta) \rangle_\beta = \langle \phi(\mathbf{y}, t') \phi(\mathbf{x}, t + i\beta) \rangle_\beta. \quad (2.42)$$

Esta é a chamada condição de Kubo-Martin-Schwinger, ou KMS, introduzida em 1957 por Ryogo Kubo (KUBO, 1957) e, posteriormente, usada no contexto de funções de Green termodinâmicas por Paul Martin e Julian Schwinger (MARTIN; SCHWINGER, 1959). Podemos então constatar que a temperatura imaginária faz papel de variável temporal. Essa é a relação fundamental para o Formalismo do Tempo imaginário que tratamos na seção anterior.

Para coordenadas puramente imaginárias τ, τ' a relação (2.42) ainda é válida e, particularmente, se $\tau = i\beta$ temos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[e^{-i(\tau'-i\beta)H} \phi(\mathbf{x}, \tau) e^{i\tau'H} \phi(\mathbf{y}, \tau'_0) \right] &= \text{Tr} \left[\phi(\mathbf{y}, i\beta'_0) e^{\beta'H} e^{-\beta H} \phi(\mathbf{x}, \tau) e^{-\beta'H} \right] \\ &= \text{Tr} \left[e^{-\beta H} e^{\beta'H} \phi(\mathbf{y}, i\beta'_0) e^{\beta'H} \phi(\mathbf{x}, \tau) \right]. \\ &= \text{Tr} \left[e^{-\beta H} \phi(\mathbf{y}, \beta') \phi(\mathbf{x}, \tau) \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Assim,

$$\langle \phi(\mathbf{x}, \tau) \phi(\mathbf{y}, \tau') \rangle_\beta = \langle \phi(\mathbf{y}, \beta') \phi(\mathbf{x}, \tau) \rangle. \quad (2.44)$$

E como consequência

$$\phi(\mathbf{y}, \tau') = \pm \phi(\mathbf{y}, \tau + \beta'), \quad (2.45)$$

onde os sinais positivos e negativos se devem ao fato dos campos comutarem ou anti-comutarem, isto

é, serem bosônicos ou fermiônicos, respectivamente.

Através de (2.45) podemos ver que para coordenadas temporais imaginárias a condição KMS estabelece condições de periodicidade no intervalo $0 < \tau < \beta$, ou seja, os campos podem ser periódicos ou anti-periódicos em β quando lidamos com variáveis temporais imaginárias.

3 FUNÇÃO DE PARTIÇÃO PARA UM CAMPO ESCALAR E UM FERMIÔNICO

3.1 CAMPO ESCALAR

Agora que vimos como a função de partição pode ser representada por integrais funcionais e entendemos como a temperatura pode ser inserida em teoria de campos, podemos enunciar que a função de partição para um campo escalar real é dada por (BAILIN; LOVE, 1993)

$$Z = N'(\beta) \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}\phi \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \bar{\partial}_\mu \phi) \right), \quad (3.1)$$

onde $N'(\beta)$ é uma constante de normalização dependente da temperatura, \mathcal{L} é a densidade lagrangiana do campo ϕ e sua derivada é dada por $\bar{\partial}_\mu \equiv (i\partial_\tau, \partial_i)$. Além disso, note que a integração em d^3x é realizada no intervalo $(-\infty, +\infty)$ e a integral funcional sobre o campo deve ser entendida como periódica no intervalo $0 < \tau < \beta$ devido a condição KMS, isto é,

$$\phi(\tau = 0, \mathbf{x}) = \phi(\tau = \beta, \mathbf{x}). \quad (3.2)$$

Um caso bem ilustrativo que podemos tratar é o caso de um campo escalar livre. Nessa situação a equação (3.1) se torna uma integral do tipo Gaussiana e sua integração e pode ser resolvida exatamente. A densidade lagrangiana apropriada para esse caso é (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\mathcal{L}(\phi, \bar{\partial}_\mu \phi) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2. \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) em (3.1) obtemos

$$Z = N'(\beta) \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}\phi \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right] \right). \quad (3.4)$$

Note que para uma função diferenciável num dado intervalo em que ela se anula nos limites $\pm\infty$ temos (RUDIN, 1976)

$$\int f'(x) f'(x) dx = f(x) f'(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int f(x) f''(x) dx, \quad (3.5)$$

de modo que podemos realizar a integração por partes:

$$\int d^3x \left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 = - \int d^3x \phi \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} \right), \quad \int d^3x (\nabla \phi)^2 = - \int d^3x \phi \nabla^2 \phi, \quad (3.6)$$

onde usamos $\phi(\pm\infty) = 0$. Definindo o operador A :

$$A(\bar{x}', \bar{x}) \equiv (-\bar{\partial}'_\mu \bar{\partial}^\mu + m^2) \delta^4(\bar{x}' - \bar{x}), \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned}\delta^4(\bar{x}' - \bar{x}) &\equiv \delta(\tau' - \tau) \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \\ \bar{x} &\equiv (-i\tau, \mathbf{x}).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Temos então

$$Z = N'(\beta) \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}\phi \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau' \int d^3x' \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi(\bar{x}) A(\bar{x}', \bar{x}) \cdot \phi(\bar{x})\right) \quad (3.9)$$

Podemos relacionar a integral funcional com o traço do operador introduzido através da relação (BAILIN; LOVE, 1993; ZEE, 2003)

$$\int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\frac{1}{2} \int dx' \int dx \varphi(x') A(x', x) \varphi(x)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{A}\right), \quad (3.10)$$

onde a integral é realizada sob um número infinito contínuo de componentes $\phi(x)$. Assim,

$$Z = N'(\beta) \exp\left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{A}\right). \quad (3.11)$$

Agora que temos uma expressão que relaciona a integração sobre os campos com o traço de um operador, precisamos encontrar uma expressão para calcular o traço do operador A . Recorde-se que, por conta da condição KMS, os campos são periódicos em $\tau \in (0, \beta)$. E por conta dessa periodicidade podemos expressá-los numa expansão de Fourier (BAILIN; LOVE, 1993):

$$\phi(\bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\omega_n \tau} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\phi}(\omega_n, \mathbf{p}), \quad (3.12)$$

onde temos as chamadas *frequências de Matsubara* ω_n . Para bósons $\omega_n = 2\pi n/\beta$, $n \in \mathbb{Z}$, detalhadas no Apêndice A. Redefinindo os momentos como

$$\begin{aligned}\bar{p} &\equiv (i\omega_n, \mathbf{p}), \\ \bar{p} \cdot \bar{x} &\equiv \omega_n \tau - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x},\end{aligned}\quad (3.13)$$

a expressão (3.12) se torna

$$\phi(\bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p} \cdot \bar{x}} \tilde{\phi}(\mathbf{p}). \quad (3.14)$$

Além disso, podemos reescrever a delta de Dirac em termos de sua representação integral (OLVER et al., 2010):

$$\delta^4(\bar{x}' - \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x}' - \bar{x})} \quad (3.15)$$

Assim, reescrevemos o operador A como

$$A(\bar{x}', \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x}' - \bar{x})} (-\bar{p}^2 + m^2), \quad (3.16)$$

onde $\bar{p}^2 = -(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2)$ e passamos do espaço das posições para o espaço dos momentos através da usual relação $\bar{p} \leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{x}}$. Fixando $\bar{x}' = \bar{x}$, integrando e então somando sobre os valores de \bar{x} obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \mathbf{A} &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(-\bar{p}^2 + m^2) \\ &= \int d^3x \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde o traço Tr significa $\int d\tau \int d^3x$ e reconhecemos as frequências de Matsubara no argumento da função logaritmo. Note que agora precisamos calcular uma somatória que envolve as frequências de Matsubara. Para realizar essa soma, utilizaremos resultados do Apêndice A. Começamos utilizando a seguinte identidade:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(\omega_n^2 + x^2) \right) = 2x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 + x^2}. \quad (3.18)$$

Usando (A.23) com $k_0 = i\omega_n$ e $\omega = x$, temos

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-1}{(i\omega_n)^2 - x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_4^2 + x^2} dk_4 + \frac{1}{x} \frac{1}{e^{\beta x} - 1}. \quad (3.19)$$

Substituindo em (3.18):

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(\omega_n^2 + x^2) \right) = 2x \frac{1}{x} \frac{\beta}{e^{\beta x} - 1} + 2x \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_4^2 + \omega^2} dk_4, \quad (3.20)$$

O primeiro termo em (3.19) pode ser renormalizado de forma que podemos considerar somente a contribuição térmica em (3.20) (KAPUSTA; GALE, 2006). Integrando o termo dependente da temperatura:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln(\omega_n^2 + x^2) &= 2\beta \int \frac{dx}{e^{\beta x} - 1} + c_1 \\ &= 2\beta [\ln(1 - e^{-x}) - x] + c_2 \\ &= 2\beta \ln(1 - e^{-x}) + c. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Com isso temos

$$\text{Tr} \ln \mathbf{A} = \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + 2 \ln \left[1 - \exp \left(-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \right) \right] + C_1(\beta) \right), \quad (3.22)$$

onde $C_1(\beta)$ é uma constante dependente da temperatura, mas independente de \mathbf{p} . Tal constante é formalmente infinita, já que ela não depende de \mathbf{p} e a integral em d^3p é divergente (PEREIRA, 2007). Entretanto, esse fator cancela exatamente o termo $N'(\beta)$ por um processo de renormalização que é

discutido em (BERNARD, 1974). Substituindo (3.22) em (3.11):

$$Z = N'(\beta) \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + 2 \ln \left[1 - \exp \left(-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \right) \right] + C_1(\beta) \right) \right). \quad (3.23)$$

E a energia de Helmholtz fica

$$-\beta F = \ln Z = - \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{\beta}{2} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \ln \left[1 - \exp \left(-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \right) \right] \right), \quad (3.24)$$

onde há o cancelamento de $C_1(\beta)$ com $N'(\beta)$.

A integral em (3.24) é complicada, mas para valores em que a temperatura é muito alta ela pode ser resolvida. O primeiro termo dá uma contribuição infinita que deve ser desconsiderada, pois representa a energia do vácuo (PEREIRA, 2007). Para altas temperaturas temos $T \gg m \implies \beta m \ll 1$, o que nos permite escrever:

$$\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \sqrt{\beta^2 \mathbf{p}^2 + \beta^2 m^2} \approx \sqrt{\beta^2 \mathbf{p}^2} = \beta \mathbf{p} \quad (3.25)$$

Assim, podemos expandir o argumento no logaritmo em séries de Maclaurin (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1970; GRADSHTEĬN; RYŽIK, 2007):

$$\ln(1 - e^{-\beta p}) = -e^{-\beta p} - \frac{e^{-2\beta p}}{2} - \frac{e^{-3\beta p}}{3} - \dots = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{-\beta p})^k}{k}, \text{ para } |e^{-\beta p}| < 1, e^{-\beta p} = -1. \quad (3.26)$$

Lembrando que d^3p é o elemento de volume nos espaços do momento ele pode ser escrito em coordenadas esféricas como:

$$d^3p = p^2 \sin \theta d\theta d\phi dp, \quad (3.27)$$

onde $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ e $p \in [0, \infty]$. Portanto, a integral fica (YANG, 2011):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &\equiv \frac{F}{V} \approx \frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} p^2 \ln(1 - e^{-\beta p}) \\
&= -\frac{4\pi}{\beta} \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} p^2 \sum_{k=1}^\infty \frac{(e^{-\beta p})^k}{k} \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 \beta} \int_0^\infty dp p^2 e^{-k\beta p} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 \beta} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} \left[-\frac{e^{-k\beta p}}{(k\beta)^3} (\mathbf{p}^2 (k\beta)^2 + 2\mathbf{p}k\beta + 2) \right] \Bigg|_0^\infty \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 \beta} \frac{2}{\beta^3} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^4} = -\frac{T^4}{\pi^2} \zeta(4) = -\frac{T^4}{\pi^2} \frac{\pi^4}{90} \\
&= -\frac{\pi^2 T^4}{90},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

onde $V \equiv \int_0^\infty d^3x$, $\zeta(4)$ é a função zeta de Riemann para $s = 4$ e realizamos integração por partes com o auxílio do teorema de Fubini (SCHILLING, 2005), que nos permite inverter a ordem da operação de integração com a soma. Valores particulares da função zeta podem ser encontrados em (OLVER et al., 2010) e (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1970). Usando (2.4) obtemos as relações termodinâmicas para o campo escalar:

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T} = \frac{\pi^2 T^4}{90}, \quad \mathcal{S} \equiv \frac{S}{V} = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{2\pi^2 T^3}{45}, \quad \mathcal{E} \equiv \frac{E}{V} = \frac{\pi^2 T^4}{30} \tag{3.29}$$

Aqui já podemos reconhecer um resultado conhecido da física clássica: a lei de Stefan-Boltzmann. Recorde-se que a lei de Stefan-Boltzmann nos diz que a energia radiante total que um corpo negro emite por unidade de área é proporcional a T^4 (EISBERG et al., 1985). Em unidades naturais, a constante de proporcionalidade da lei de Stefan-Boltzmann é $\sigma = \frac{\pi^2}{60}$. Para o problema de radiação do corpo negro temos, por exemplo, que a densidade de energia e pressão são (PATHRIA; BEALE, 2011)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} \frac{E}{V} = \sigma T^4 &\implies \frac{E}{V} = \frac{\pi^2}{15} T^4, \\
PV = \frac{1}{3} E &\implies P = \frac{\pi^2}{45} T^4,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

ou seja, exatamente o dobro da pressão e densidade de energia para um campo escalar livre. Isso faz sentido porque de acordo com o teorema da equipartição, a energia é proporcional aos graus de liberdade do sistema. Como o campo escalar é um campo bosônico de spin 0, ele possui apenas um grau de liberdade (YANG, 2011). Por sua vez, o campo eletromagnético possui dois graus de liberdade, correspondentes aos dois estados de polarização da radiação eletromagnética e, portanto, sua energia deve ser o dobro da energia do campo escalar livre, o que verificamos ser verdade.

Embora derivar a lei de Stefan-Boltzmann pela TCTF seja utilizar um arsenal muito sofisticado

para um problema que pode ser resolvido de maneira mais simples, é importante recuperar resultados já obtidos anteriormente por outros formalismos a fim de verificar a consistência da teoria.

3.2 CAMPO FERMIÔNICO

Campos fermiônicos adquirirão uma mudança de sinal sob uma rotação de 2π os autoestados $|\pm\psi(\mathbf{x}), t=0\rangle$ do operador $\hat{\psi}(t=0, \mathbf{x})$ descrevem o mesmo estado. Há então uma ambiguidade na derivação da representação integral da função de partição. Para obtermos uma descrição consistente com a estatística de Fermi-Dirac, quando médias térmicas são calculadas, devemos começar expressando a função da partição em termos desses dois autoestados: (BAILIN; LOVE, 1993)

$$Z = \sum_{\psi(\mathbf{x})} \langle \psi(\mathbf{x}), t=0 | e^{-\beta \hat{H}} | -\psi(\mathbf{x}), t=0 \rangle \quad (3.31)$$

Sua representação funcional, ou seja, o análogo de (2.35) é (BAILIN; LOVE, 1993)

$$Z = N''(\beta) \int_{\text{anti}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) \right], \quad (3.32)$$

onde $N''(\beta)$ é novamente uma constante dependente da temperatura e \mathcal{L} é a densidade lagrangiana do campo $\psi(\bar{x})$ e seu dual¹ $\bar{\psi}(\bar{x})$. Aqui há um abuso de notação em que a barra sobre ψ é o dual do campo enquanto que a barra nas variáveis indicam a existência da componente temporal imaginária. A integral funcional é tomada sobre os campos e devemos usar condições de contorno anti-periódicas no intervalo $0 < \tau < \beta$:

$$\psi(\tau=0, \mathbf{x}) = -\psi(\tau=\beta, \mathbf{x}). \quad (3.33)$$

De modo análogo a seção 3.1, a expansão de Fourier para o campo fermiônico é

$$\psi(\bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^d} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}} \tilde{\psi}(\bar{p}), \quad (3.34)$$

com as frequências de Matsubara agora dadas por

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}. \quad (3.35)$$

A lagrangiana para o caso de um campo livre de Dirac é dada por

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi}(\bar{x}) (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu - m) \psi(\bar{x}), \quad (3.36)$$

onde γ^μ são as chamadas *matrizes gama* e satisfazem a relação constitutiva da álgebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_{4 \times 4} \quad (3.37)$$

¹ Também chamado de espinor adjunto, é dado por $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Veja a seção 4.2 para mais detalhes.

onde $\{\cdot\}$ é o anticomutador, $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ e $\mathbb{1}_{4 \times 4}$ é a matriz identidade. Em particular, na representação de Dirac:

$$\gamma^0 = \gamma^{0\dagger}, \gamma^i = -\gamma^{i\dagger}. \quad (3.38)$$

Também nessa representação temos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & \mathbb{0}_{2 \times 2} \\ \mathbb{0}_{2 \times 2} & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_{2 \times 2} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbb{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli dadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Isto posto, a equação (3.32) fica

$$Z = N''(\beta) \int_{\text{antiperiódica}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}) (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu - m) \psi(\vec{x}) \right). \quad (3.41)$$

Integrando por partes, como fizemos na seção 3.1, obtemos

$$Z = N''(\beta) \int_{\text{antiperiódica}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int d^4\bar{x}' \int d^4\bar{x} \bar{\psi}(\bar{x}') (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + m) \delta^4(\bar{x}' - \bar{x}) \psi(\bar{x}) \right), \quad (3.42)$$

e definimos o operador:

$$D(\bar{x}', \bar{x}) \equiv (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + m) \delta^4(\bar{x}' - \bar{x}) \mathbb{1} \quad (3.43)$$

Para usarmos o análogo fermiônico de (3.11) é necessário cuidado, pois, no tratamento de férmions devemos considerar os campos como *variáveis de Grassmann*, que são objetos que anticomutam, enquanto que variáveis comuns comutam. Por conta disso, faz-se necessário realizar a integral funcional sobre essas variáveis levando em consideração suas propriedades. Visto que elas não irão interferir propriamente nos cálculos que realizarmos, deixamos as definições e propriedades dessas variáveis detalhadas no Apêndice B. Aqui iremos apenas apresentar a relação que nos permite realizar a integral funcional. Para variáveis de Grassmann complexas $\theta_i, i = 1, \dots, N$ temos (BAILIN; LOVE, 1993), (PEREIRA, 2007)

$$\int d\theta_1^* d\theta_1 \dots \int d\theta_n^* d\theta_n \exp(-\Theta^\dagger \mathbf{A} \Theta) = \begin{cases} \det \mathbf{A} & \text{se } n \text{ é par} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \quad (3.44)$$

onde \mathbf{A} é uma matriz *anti-hermitiana* e Θ um vetor coluna com componentes $\theta_1, \dots, \theta_n$ que satisfazem as relações de anticomutação $\{\theta_i, \theta_j\} = 0$. A integral funcional correspondente é (BAILIN; LOVE,

1993)

$$\int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int dx' \int dx \psi^*(x') A(x', x) \psi(x) \right) = \det \mathbf{A} = \exp(\text{Tr} \ln \mathbf{A}) \quad (3.45)$$

Como introduzimos a variável τ para fazer a conexão com mecânica estatística, não precisamos retornar para o espaço de Minkowski e podemos usar diretamente (3.45)². Então temos

$$Z = N''(\beta) \exp(\text{Tr} \ln \mathbf{D}), \quad (3.46)$$

onde agora Tr significa $\int d\tau \int d^3x \text{tr}$ e tr significa soma sobre os índices de Dirac³(PEREIRA, 2007).

Da mesma forma que no caso escalar, o operador D e a delta de Dirac podem ser expressados em termos de suas expansões de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\bar{x}', \bar{x}) &= \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x}' - \bar{x})} (-\bar{\not{p}} + m), \\ \delta^4(\bar{x}' - \bar{x}) &= \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x}' - \bar{x})}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$. Assim,

$$\text{Tr} \ln D = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(-\bar{\not{p}} + m). \quad (3.48)$$

Aqui devemos calcular $\text{Tr} \ln(-\not{p} + m)$. Os detalhes desse cálculo estão contidos no Apêndice C. O resultado é:

$$\text{Tr} \ln(-\bar{\not{p}} + m \mathbf{1}_{4 \times 4}) = 2 \ln(m^2 - \bar{p}^2). \quad (3.49)$$

Retornando a função de partição, temos que

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \mathbf{D} &= \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2 \ln(m^2 - \bar{p}^2) \\ &= 2 \int d^3x \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Novamente temos que realizar as somas sobre as frequências de Matsubara. Usando a identidade (3.18) e os resultados desenvolvidos no Apêndice A e na seção 3.1, temos

$$\text{Tr} \ln \mathbf{D} = 2 \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + 2 \ln \left[1 + \exp(-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \right] + C_2(\beta) \right), \quad (3.51)$$

² Caso precisássemos retornar para o espaço de Minkowski teríamos de usar a relação $\int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi \exp \left(i \int d^4x' \int d^4x \psi^*(x') B(x', x) \psi(x) \right) = \det(i\mathbf{B}) = \exp \text{Tr} \ln(i\mathbf{B})$. Para mais detalhes veja (BAILIN; LOVE, 1993) ou o Apêndice B

³ Somar sobre índices de Dirac significa somar sobre os índices das matrizes gama.

onde $C_2(\beta)$ novamente é uma constante dependente da temperatura e independente do momento, que também é cancelada pelo fator $N''(\beta)$, da mesma forma que discutimos no caso de campos escalares livres. Substituindo (3.51) em (3.46):

$$Z = N''(\beta) \exp \left(2 \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + 2 \ln \left[1 + \exp(-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \right] + C_2(\beta) \right) \right) \quad (3.52)$$

E a energia de Helmholtz fica

$$-\beta F = \ln Z = 2 \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\beta \sqrt{p^2 + m^2} + 2 \ln \left[1 + \exp(-\beta \sqrt{p^2 + m^2}) \right] \right), \quad (3.53)$$

donde se obtém

$$F = -4V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \frac{1}{\beta} \ln[1 + \exp(-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2})] \right), \quad (3.54)$$

onde $V \equiv \int_0^\infty d^3x$. Aqui já podemos ver alguns aspectos importantes em comparação com o cálculo do campo escalar livre. Primeiro, o sinal negativo é consequência dos férmions obedecerem a estatística de Fermi-Dirac. Segundo, o fator 4 representa os quatro graus de liberdade de um campo fermiônico: partícula, antipartícula, spin para cima e spin para baixo (DOLAN; JACKIW, 1974). O primeiro termo novamente é divergente e representa a energia de vácuo.

Para o caso em que a temperatura é muito maior que a massa também podemos realizar uma expansão no termo dependente da temperatura e resolver a integral explicitamente. Prosseguimos da mesma forma que fizemos com o caso escalar, porém, a diferença aqui é que a expansão em séries de Maclaurin se dá em $\ln(1 + e^{-\beta p})$. O análogo de (3.26) é (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1970; GRADSHTEĪN; RYŽIK, 2007)

$$\ln(1 + e^{-\beta p}) = e^{-\beta p} - \frac{e^{-2\beta p}}{2} + \frac{e^{-3\beta p}}{3} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(e^{-\beta p})^k}{k}, \quad \text{para } |e^{-\beta p}| < 1, e^{-\beta p} = 1. \quad (3.55)$$

Integrando nos momentos, temos de forma análoga a (3.28)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \equiv \frac{F}{V} &\approx -\frac{16\pi}{\beta} \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} p^2 \ln(1 + e^{-\beta p}) \\
&= -\frac{16\pi}{\beta} \int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} p^2 \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{(e^{-\beta p})^k}{k} \\
&= -\frac{2}{\pi^2 \beta} \int_0^\infty dp p^2 e^{-k\beta p} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= -\frac{2}{\pi^2 \beta} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left[-\frac{e^{-k\beta p}}{(k\beta)^3} (p^2 (k\beta)^2 + 2pk\beta + 2) \right] \Bigg|_0^\infty \\
&= -\frac{4}{\pi^2 \beta} \frac{1}{\beta^3} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^4} = -4 \frac{T^4}{\pi^2} \eta(4) = -4 \frac{T^4}{\pi^2} \frac{7\pi^4}{720} \\
&= -\frac{7\pi^2 T^4}{180},
\end{aligned} \tag{3.56}$$

onde $\eta(s) = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$. Valores particulares de $\eta(s)$ podem ser encontrados em (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1970), capítulo 23. Em (LAINE; VUORINEN, 2016) temos a seguinte expansão:

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\beta} \ln(1 + e^{-\beta \sqrt{p^2 + m^2}}) &= -\frac{1}{8} \frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{1}{2} \frac{m^2 T^2}{24} - \frac{m^3 T}{12\pi} \\
&\quad - 2 \frac{m^4}{2(4\pi)^2} \left[\ln \left(\frac{me^{\gamma_E}}{4\pi T} \right) - \frac{3}{4} + \ln 2 \right] + \frac{8m^6 \zeta(3)}{3(4\pi)^4 T^2} \\
&\quad + \frac{\pi^2 T^4}{90} - \frac{m^2 T^2}{24} + \frac{m^3 T}{12\pi} + \frac{m^4}{2(4\pi)^2} \left[\ln \left(\frac{me^{\gamma_E}}{4\pi T} \right) - \frac{3}{4} \right] - \frac{m^6 \zeta(3)}{3(4\pi)^4 T^2} - \dots \\
&= \frac{7}{8} \frac{\pi^2 T^4}{90} - \frac{m^2 T^2}{48} - \frac{m^4}{2(4\pi)^2} \left[\ln \left(\frac{me^{\gamma_E}}{\pi T} \right) - \frac{3}{4} \right] + \frac{7m^6 \zeta(3)}{3(4\pi)^4 T^2} + \dots
\end{aligned} \tag{3.57}$$

onde $\gamma_E = 0.577215664901\dots$ é a constante de Euler-Mascheroni e $\zeta(3)$ é o valor da função zeta de Riemann para $s = 3$. Tomando o primeiro termo da expansão temos

$$\mathcal{F} = \frac{F}{V} = -4 \times \frac{7}{8} \frac{\pi^2 T^4}{90} = -\frac{7\pi^2 T^4}{180}, \tag{3.58}$$

Usando (3.56) ou (3.57) as grandezas termodinâmicas são

$$P = \frac{7\pi^2 T^4}{180}, \quad \mathcal{S} = \frac{7\pi^2 T^3}{45}, \quad \mathcal{E} = \frac{7\pi^2 T^4}{60}. \tag{3.59}$$

Observe que para uma mesma temperatura, a pressão dos campos fermiônicos é $7/2 = 3,5$ vezes a pressão de campos escalares. Para mais detalhes sobre como são realizadas as expansões de baixa e alta temperaturas ver a referência (LAINE; VUORINEN, 2016; KAPUSTA; GALE, 2006) e (DOLAN; JACKIW, 1974).

4 FUNÇÃO DE PARTIÇÃO PARA UM CAMPO FERMIÔNICO DE DIMENSÃO DE MASSA UM

4.1 O CAMPO MDO

O campo MDO é um campo fermiônico que possui duas características principais que o tornam um bom candidato à Matéria Escura: o de possuir dimensão de massa um e ser um autoespinor do operador conjugação de carga. O fato de possuir dimensão de massa um significa e ser autoespinor do operador conjugação de carga significa que esse campo não interage com partículas do Modelo Padrão, exceto pelo Bóson de Higgs (GILLARD; MARTIN, 2009). Vamos discutir brevemente essas duas características a seguir.

No Modelo Padrão existem três tipos de espinores: os de Dirac, de Majorana e de Weyl. O espinor de Majorana é neutro via operador conjugação de carga. Em especial, espinores de Majorana são compostos de dois biespinores com autovalores positivos quando atuados pelo operador conjugação de carga:

$$C\psi_M(p^\mu) = +\psi_M(p^\mu). \quad (4.1)$$

Os autores em (AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005a) tentaram estender esses espinores para um conjunto completo de autoespinores do operador conjugação. É aí que surgem os campos de dimensão de massa um λ sendo autoespinores do operador conjugação de carga:

$$C\lambda(p^\mu) = \pm\lambda(p^\mu), \quad (4.2)$$

com a matriz conjugação de carga dada por (ROGERIO, 2018)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & i\Theta \\ -i\Theta & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K}, \quad (4.3)$$

onde \mathcal{K} toma o complexo conjugado de qualquer quantidade à sua direita e o operador de reversão temporal ($\Theta : t \rightarrow -t$) é caracterizado por (ROGERIO, 2018)

$$\Theta\sigma\Theta^{-1} = -\sigma^*, \quad (4.4)$$

sendo

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta^{-1} = -\Theta. \quad (4.5)$$

Dependendo dos autovalores serem positivos ou negativos, chamamos os espinores de autoconjugados e anti-autoconjugados e denotamos λ^S e λ^A , respectivamente. Assim, o operador conjugação de

carga atua neles da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\lambda^S(p^\mu) &= +\lambda^S(p^\mu) \\ \mathcal{C}\lambda^A(p^\mu) &= -\lambda^A(p^\mu)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Além disso, o campo MDO possui helicidade dual¹, em contraste com outros espinores, e uma vez estabelecidas as componentes de mão esquerda e mão direita, os campos podem ser definidos de forma explícita e possuem 4 graus de liberdade (ROGERIO, 2018).

A outra principal característica do MDO é sua dimensão canônica de massa ser igual a um. Isso vem do fato do propagador dos espinores que descrevem o campo MDO ser idêntico ao do campo escalar (AHLUWALIA, 2017b):

$$S(x' - x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[\frac{\mathbb{1}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right].\tag{4.7}$$

Enquanto que para o propagador de Dirac temos

$$S_{\text{Dirac}}(x' - x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[\frac{\gamma^\mu p_\mu + m\mathbb{1}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right].\tag{4.8}$$

Portanto, o MDO é um campo fermiônico que tem a mesma lagrangiana do campo escalar. Para entender porque dizemos que o campo escalar e o MDO possuem dimensão canônica de massa um, considere nesse sistema a ação em d dimensões:

$$S = \int d^d x \mathcal{L}.\tag{4.9}$$

A ação é adimensional se desconsiderarmos o fator $1/\hbar$. Por conta disso, a densidade de lagrangiana tem a dimensão $[\mathcal{L}] = L^{-d}$, onde L é comprimento (RYDER, 1996). A lagrangiana Klein-Gordon em $4D$ é dada por

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2.\tag{4.10}$$

Já que $[\partial_\mu] = L^{-1}$ (RYDER, 1996), temos

$$[\mathcal{L}_{KG}] = L^{-4} = \frac{1}{2} L^{-1} [\phi] L^{-1} [\phi] - \frac{1}{2} [m]^2 [\phi]^2.\tag{4.11}$$

No sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$. Devido a essa escolha de unidades, qualquer unidade pode ser convertida em termos de unidades de massa. Em particular $[m] = L^{-1}$. Portanto, por análise dimensional da lagrangiana:

$$[\phi] = L^{-1} = [m]\tag{4.12}$$

Por isso chamamos campos que obedecem a equação de Klein-Gordon de campos de dimensão

¹ Quando se define a helicidade de uma das componentes espinoriais a outra componente possui helicidade automaticamente. Isso é uma propriedade intrínseca e vem da construção dos espinores do campo MDO (ROGERIO, 2018).

canônica de massa um, já que a potência de dimensão de massa para esses campos é igual a um, o que é o caso do MDO. Segue que por sua própria construção o MDO é um campo fermiônico que possui características bosônicas (obedece a equação de Klein-Gordon). Essas características serão importantes nesse trabalho quando tratarmos das funções de partição de campos escalares e fermiônicos.

4.2 ESPINORES DUAIS

Em Mecânica Quântica Relativística trabalhamos com a equação de Dirac. As funções de onda que obedecem à essa equação são objetos chamados espinores de Dirac possuem 4 componentes complexas. Associados à esses pode-se construir o *espinor adjunto*, dado por

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0, \quad (4.13)$$

para um dado espinor de Dirac Ψ , onde γ^0 é uma das matrizes gama. Esse espinor adjunto também é chamado de *dual*. A construção de duais dessa forma (em particular envolvendo a matriz γ_0) nos garante que quantidades geralmente associadas à observáveis², os chamados *bilineares covariantes*, irão ser reais (ROGERIO, 2018).

Se utilizarmos essa definição de dual para os campos MDO a norma dos espinores autoconjugados e anti-autoconjugados é nula (AHLUWALIA, 2017b). Por isso ele contém uma definição diferente de seu dual, a saber

$$\bar{\lambda}_\alpha(p^\mu) \equiv [\Xi(p^\mu) \lambda_\alpha(p^\mu)]^\dagger \eta, \quad (4.14)$$

onde Ξ e η são matrizes 4×4 . A forma final para a estrutura dual é dada por (ROGERIO, 2018)

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{\{-,+\}}^{-S/A}(p^\mu) &= i \left[\lambda_{\{+,-\}}^{-S/A}(p^\mu) \right]^\dagger \gamma^0, \\ \bar{\lambda}_{\{+,-\}}^{-S/A}(p^\mu) &= -i \left[\lambda_{\{-,+\}}^{-S/A}(p^\mu) \right]^\dagger \gamma^0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Porém, a definição desses espinores de dimensão de massa um sofria de um problema: havia uma quebra de covariância de Lorentz em um dos termos nas somas de spin e, por consequência, tornava o campo associado não-local (ROGERIO, 2018). Uma redefinição do dual dos espinores λ , aproveitando-se de uma liberdade na definição de duais, conseguiu remediar esse problema (AHLUWALIA, 2017a) e foi dado suporte matemático para esse procedimento (ROGERIO; SILVA, 2017). Embora não será importante a forma explícita dos duais em nosso trabalho, a redefinição é a seguinte:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_\alpha^{-S}(p^\mu) &\rightarrow \tilde{\lambda}_\alpha^{-S}(p^\mu) = \bar{\lambda}_\alpha^{-S}(p^\mu) \mathcal{A}, \\ \bar{\lambda}_\alpha^{-A}(p^\mu) &\rightarrow \tilde{\lambda}_\alpha^{-A}(p^\mu) = \bar{\lambda}_\alpha^{-A}(p^\mu) \mathcal{B}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

² Bilineares covariantes tem a forma $\bar{\Psi} \Gamma \Psi$, onde Γ são combinações das matrizes gama. São covariantes por Lorentz e para certas combinações temos quantidades que se transformam como escalares, pseudoescalares, vetores, pseudovetores e tensores. (GREINER; BROMLEY, 2000; RYDER, 1996; CRAWFORD, 1990).

onde \mathcal{A} e \mathcal{B} respeitam condições específicas que podem ser encontradas em (AHLUWALIA, 2017b; ROGERIO, 2018).

Como descrito no capítulo 1, o interesse em campos fermiônicos de dimensão de massa um se deve ao fato de sua dimensão de massa diferir de $3/2$ dos férmions do modelo padrão e ser autoespinor do operador de conjugação de carga, de forma que não interagem com férmions de Dirac e campos eletromagnéticos. Assim, tais campos se tornam um candidato de primeiros princípios para descrever a matéria escura.

Para o presente trabalho apenas necessitaremos da lagrangiana que descreve esse campo. Suas propriedades, definição do dual e a teoria desenvolvida na última década podem ser encontrados na seção 4.1 e em (AHLUWALIA, 2017b)

Recorde-se que um campo escalar padrão satisfaz uma lagrangiana do tipo Klein-Gordon:

$$\mathcal{L}(\phi, \bar{\partial}_\mu \phi) = \frac{1}{2} \bar{\partial}^\mu \phi \bar{\partial}_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2,$$

enquanto que para um campo de Dirac livre, a lagrangiana é

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi}(\bar{x}) (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu - m) \psi(\bar{x}),$$

lembrando que a barra sobre as derivadas parciais significam $\bar{\partial}_0 \equiv i\partial/\partial\tau$. Contudo, para um campo fermiônico MDO, aqui denominado $\lambda(x)$, e seu respectivo dual $\bar{\lambda}$, a lagrangiana é uma lagrangiana Klein-Gordon (LEE, 2016; AHLUWALIA, 2017b):

$$\mathcal{L}(\lambda, \bar{\lambda}) = \frac{1}{2} \bar{\partial}^\mu \bar{\lambda} \bar{\partial}_\mu \lambda - \frac{1}{2} m^2 \bar{\lambda} \lambda. \quad (4.17)$$

É aqui que teremos a principal diferença no cálculo da função de partição para o campo MDO. Embora o cálculo da função de partição de campos bosônicos (satisfazendo uma equação do tipo Klein-Gordon) deva ser periódica em τ , o cálculo da função de partição para campos fermiônicos de Dirac (3.32) deve ser feito com condições de contorno anti-periódicas. No caso de um campo MDO, o campo satisfaz uma equação de Klein-Gordon, mas a função de partição deve ser feita usando as condições de contorno de campos fermiônicos, i.e., anti-periódicas. Até onde sabemos, esse cálculo ainda não foi realizado.

4.3 FUNÇÃO DE PARTIÇÃO DO CAMPO MDO

A fim de calcular a função de partição para um campo fermiônico MDO satisfazendo a densidade lagrangiana (4.17), temos de ser cuidadosos. Começamos com a expressão funcional da função de partição para férmions:

$$\begin{aligned} Z &= N(\beta) \int_{\text{antiperiódica}} \bar{\mathcal{D}}\bar{\lambda} \mathcal{D}\lambda \exp \left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\lambda, \bar{\lambda}) \right) \\ &= N(\beta) \int_{\text{antiperiódica}} \bar{\mathcal{D}}\bar{\lambda} \mathcal{D}\lambda \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left(\bar{\partial}^\mu \bar{\lambda} \bar{\partial}_\mu \lambda - m^2 \bar{\lambda} \lambda \right) \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Integrando por partes, como fizemos em (3.6), definimos o operador

$$\Lambda(x', x) \equiv -(\bar{\partial}'_{\mu} \bar{\partial}^{\mu} + m^2) \delta^4(x' - x) \mathbb{1}. \quad (4.19)$$

Note que esse operador é semelhante ao que usamos para campos escalares. Enquanto que para o caso de campos bosônicos o cálculo da função de partição (3.1) deva utilizar condições de contorno periódicas em τ , o cálculo da função de partição para férmions deve utilizar condições de contorno anti-periódicas no intervalo $0 < \tau < \beta$. A integração funcional deve ser feita sob funções Grassmanianas (ver Apêndice B), já que estamos lidando com férmions ($\bar{\lambda}$ e λ). Usando a relação (3.45), relacionamos a função de partição com o traço da matriz associada ao operador Λ :

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\bar{\lambda} \mathcal{D}\lambda \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^{\beta} d\tau' \int d^3x' \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \bar{\lambda}(\bar{x}) \lambda(\bar{x}', \bar{x}) \lambda(\bar{x}) \right) \\ &= \det \mathbf{\Lambda} = \exp(\text{Tr} \ln \mathbf{\Lambda}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

De forma que

$$Z = N(\beta) \exp \left(\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{\Lambda} \right). \quad (4.21)$$

Note que no caso do campo fermiônico MDO temos uma função de partição quase idêntica a do caso do campo escalar, a menos de um sinal negativo.

Da mesma forma que fizemos com os casos escalar e fermiônico, expandimos o campo e seu dual:

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{x}) &= \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\omega_n \tau} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\lambda}(\omega_n, \mathbf{p}), \\ \bar{\lambda}(\bar{x}) &= \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\omega_n \tau} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\bar{\lambda}}(\omega_n, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Como estamos tratando de férmions, as frequências de Matsubara são

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, n \in \mathbb{Z}. \quad (4.23)$$

A soma sobre as frequências (veja Apêndice A e a equação (3.21)) é dada por

$$\sum_n \ln(\omega_n^2 + x^2) = \beta x + 2 \ln(1 + e^{-\beta x}) + \text{constante}. \quad (4.24)$$

E o operador Λ e a delta de Dirac podem ser expandidos como

$$\begin{aligned} A(\bar{x}', \bar{x}) &= \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x}' - \bar{x})} (-\bar{p}^2 + m^2), \\ \delta^4(\bar{x}' - \bar{x}) &= \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x}' - \bar{x})} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Com isso o traço pode ser calculado e obtemos

$$\text{Tr} \ln \Lambda = 4 \int_0^\beta d\tau \int d^3x \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2). \quad (4.26)$$

Calculando a soma das frequências e realizando a integração em τ obtemos finalmente a função de partição

$$Z = N(\beta) \exp \left(2 \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + 2 \ln \left[1 + \exp(\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + C(\beta)) \right] \right) \right), \quad (4.27)$$

onde $C(\beta)$ é uma constante independente de \mathbf{p} . Note que temos a mesma energia livre de Helmholtz calculada para férmions de Dirac (3.52). Isso é interessante porque, embora o campo MDO seja um campo fermiônico, ele obedece a equação de Klein-Gordon e, a princípio, poderíamos esperar que sua função de partição fosse semelhante à função de partição de um campo fermiônico de Dirac.

Retornando, a partir da função de partição podemos calcular a energia livre de Helmholtz:

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -2 \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \frac{2}{\beta} \ln \left[1 + \exp(-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \right] \right) \quad (4.28)$$

$$F = -4V \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + \frac{1}{\beta} \ln \left[1 + \exp(-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}) \right] \right),$$

onde $V \equiv \int_0^\infty d^3x$ e a constante $C(\beta)$ foi cancelada por $N(\beta)$ pelo mesmo procedimento de renormalização das seções anteriores. Note que essa energia livre de Helmholtz é a mesma que a do caso de férmions de Dirac (3.56). Visto que a função de partição para o campo MDO é a mesma que para um campo de Dirac, naturalmente terão a mesma energia livre de Helmholtz.

O primeiro termo em (4.28) representa, como antes, a contribuição divergente de temperatura zero que deve ser removida por renormalização e o segundo termo é um termo dependente da temperatura.

Tomando somente o termo independente da temperatura em (4.28) e fazendo a integração por partes obtemos

$$\frac{F}{V} = -\frac{2}{3\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m^2}} \frac{1}{e^{\beta \sqrt{p^2 + m^2}} + 1} dp, \quad (4.29)$$

Podemos reconhecer no último termo de (4.29) o número de ocupação n_ϵ que caracteriza a distribuição de Fermi-Dirac

$$n_\epsilon \equiv \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}. \quad (4.30)$$

No nosso caso o potencial químico μ é nulo e a energia relativística é $\epsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Isso acontece também para férmions de Dirac, visto que temos a mesma expressão para a energia livre de Helmholtz naquele caso.

No limite de alta temperatura $T \gg m$, a integral em (4.29) é calculada da mesma forma que

realizada na seção 3.2. Assim, calculamos a densidade de energia livre de Helmholtz, densidade de energia, pressão e densidade de entropia:

$$\mathcal{F} = -\frac{7\pi^2 T^4}{180}, \quad \mathcal{E} = \frac{7\pi^2 T^4}{60}, \quad P = \frac{7\pi^2 T^4}{180}, \quad \mathcal{S} = \frac{7\pi^2 T^3}{45}. \quad (4.31)$$

As contribuições dos campos bosônicos, fermiônicos de Dirac e MDO podem ser assim resumidas (PEREIRA; COSTA, 2019):

$$\begin{aligned} \frac{F}{V} &= -\frac{\pi^2 T^4}{90} \left(N_B + \frac{7}{8} N_D + \frac{7}{8} N_E \right), \\ \frac{E}{V} &= \frac{\pi^2 T^4}{30} \left(N_B + \frac{7}{8} N_D + \frac{7}{8} N_E \right), \\ P &= \frac{\pi^2 T^4}{90} \left(N_B + \frac{7}{8} N_D + \frac{7}{8} N_E \right), \\ \frac{S}{V} &= \frac{2\pi^2 T^3}{45} \left(N_B + \frac{7}{8} N_D + \frac{7}{8} N_E \right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $N_B = 1$ para um campo escalar neutro, $N_B = 2$ para um campo de gauge neutro, $N_D = 4$ para um campo de Dirac, $N_D = 2$ para um campo de Weyl e $N_E = 4$ para um campo MDO.

4.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS CAMPOS

Para encerrar esse capítulo, vamos discutir os resultados obtidos para o campo MDO em comparação com os campos escalar livre e fermiônico.

Quanto a função de partição dos campos serem a mesma, esse resultado é inesperado já que a lagrangiana para o campo fermiônico de dimensão de massa um é muito diferente da lagrangiana para o campo fermiônico de Dirac.

Quanto a energia livre de Helmholtz, além de ser a mesma que a de férmions de Dirac, o fator 4 que representa os graus de liberdade agora representa os dois espinores autoconjugados $\lambda_{\{-,+\}}^S$ e dois espinores anti autoconjugados $\lambda_{\{-,+\}}^A$, advindos da helicidade dual dos campos MDO (ROGERIO, 2018).

As seguintes tabelas resumem a comparação entre os campos escalares, fermiônico e MDO:

Campo	Z	\mathcal{L}	Operador
Escalar	$N'(\beta) \exp(-1/2 \text{Tr} \ln \mathbf{A})$	$1/2 (\partial^\mu \phi \bar{\partial}_\mu \phi - m^2 \phi^2)$	$(-\partial'_\mu \partial^\mu + m^2) \delta^4(\bar{x}' - \bar{x})$
Fermiônico	$N'(\beta) \exp(\text{Tr} \ln \mathbf{D})$	$\bar{\psi}(\bar{x}) (i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu - m) \psi(\bar{x})$	$(i\gamma^\mu \bar{\partial}_\mu + m) \delta^4(\bar{x}' - \bar{x}) \mathbb{1}$
MDO	$N'(\beta) \exp(1/2 \text{Tr} \ln \boldsymbol{\lambda})$	$1/2 (\bar{\partial}^\mu \bar{\lambda} \bar{\partial}_\mu \lambda - m^2 \bar{\lambda} \lambda)$	$-(\bar{\partial}'_\mu \bar{\partial}^\mu + m^2) \delta^4(\bar{x}' - \bar{x}) \mathbb{1}$

Tabela 1 – Comparação entre funções de partições, densidades lagrangianas e operadores

Campo	\mathcal{F}	\mathcal{P}	\mathcal{E}	\mathcal{S}	ω_n
Escalar	$-\pi^2 T^4/90$	$\pi^2 T^4/90$	$\pi^2 T^4/30$	$2\pi^2 T^3/45$	$2\pi n/\beta$
Fermiônico	$-7\pi^4/180$	$7\pi^4/180$	$7\pi^2 T^4/60$	$7\pi^2 T^3/45$	$2\pi(n+1)/\beta$
MDO	$-7\pi^4/180$	$7\pi^4/180$	$7\pi^2 T^4/60$	$7\pi^2 T^3/45$	$2\pi(n+1)/\beta$

Tabela 2 – Comparação entre grandezas termodinâmicas ($T \gg m$) e frequências de Matsubara

5 PRESSÃO DE DEGENERESCÊNCIA E O HALO DE MATÉRIA ESCURA DAS GALÁXIAS

5.1 HALOS DE MATÉRIA ESCURA

Considere um grupo de estrelas em um movimento de rotação ao redor de uma galáxia. Esse movimento deve satisfazer a segunda lei de Newton $F = ma_{cp}$, onde a_{cp} é a aceleração centrípeta, de tal forma que

$$G \frac{M(r)m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}, \quad (5.1)$$

onde $M(r)$ é a distribuição de massa de galáxia, m é a massa da estrela, G é a constante gravitacional, v é a velocidade escalar de rotação da estrela e r é a distância radial do centro da galáxia. Na região central a densidade é proporcional ao raio $M(r) \propto r^3$, então

$$v \propto r. \quad (5.2)$$

Já longe da região central $M(r) = M_{tot} \approx$ constante. Assim,

$$v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}. \quad (5.3)$$

Porém, isso não é o que as observações mostram. No começo da década de 1930, Fritz Zwicky usou o teorema Virial para calcular as velocidades do aglomerado Coma e achou uma discrepância de 1500 – 2000 km/s entre as velocidades observadas e as calculadas (ZWICKY, 1933). A velocidade observada tende a fazer um plateau, o que indica um crescimento de massa linear após um certo raio, evidenciando assim matéria que não foi observada, a chamada *matéria escura*. Essa matéria se distribui ao redor das galáxias na forma de um halo.

Com a descoberta da linha espectral de 21cm do hidrogênio neutro e técnicas mais avançadas em radioastronomia, as medidas das curvas de rotação das galáxias se tornaram mais apuradas, providenciando forte evidência para matéria escura (SWART; BERTONE; DONGEN, 2017).

Além das curvas de rotação, outras evidências fortalecem a tese da existência da matéria escura, incluindo a radiação cósmica de fundo (por dar suporte ao modelo padrão) e estudos realizados com lentes gravitacionais. De fato, os autores em (MASSEY; KITCHING; RICHARD, 2010), revisando o progresso feito no entendimento da matéria escura através das lentes gravitacionais, concluem que 5/6, ou pouco mais de 80%, da matéria do universo é formada por matéria escura.

A variação das velocidades orbitais, em função das suas distâncias radiais a partir do centro das galáxias, pode ser representada em um gráfico denominado *curva de rotação*. A título de exemplo, segue a curva de rotação para a galáxia espiral M33:

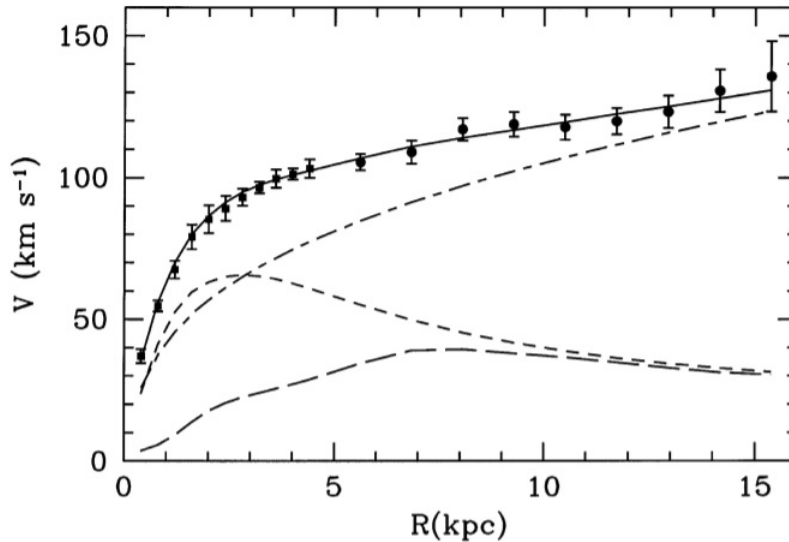


Figura 1 – Curva de rotação da M33 (pontos) comparada com o ajuste de curva (linha contínua). Também são mostrados a contribuição do Halo de matéria escura (linha tracejada-pontilhada), o disco estelar (linha com traços curtos) e a contribuição de gases (linha com traços longos). Fonte:(CORBELLI; SALUCCI, 2000)

5.2 PRESSÃO DE DEGENERESCÊNCIA

Uma forma de aplicar o que foi desenvolvido no capítulo 4 é modelar halos de matéria através de um efeito chamado *pressão de degenerescência*. A pressão de degenerescência é uma pressão advinda do princípio de exclusão de Pauli, impedindo que elétrons se comprimam em volumes muito pequenos e ocorre no limite de baixas temperaturas de um sistema fermiônico. De fato, em 1967 e 1968 Freeman Dyson mostrou que a matéria sólida é estável por conta dessa pressão e não pela repulsão eletrostática dos elétrons. Isso explica, por exemplo, a estabilidade de estrelas anãs brancas, que contém uma densidade da ordem de 10^{30} elétrons por cm^3 (PATHRIA; BEALE, 2011). Usaremos a pressão de degenerescência para obter mais informações sobre as possíveis densidades das partículas que formam um campo MDO, o que por sua vez pode nos dar ideia da densidade da matéria escura em halos galácticos.

Na presença de um potencial químico μ não-nulo, o limite $T \rightarrow 0$ faz com que o número de ocupação n_ϵ (4.30) se comporte como uma função degrau que toma valor 1 quando $\epsilon < \mu_0$ e valor 0 para $\epsilon > \mu_0$. Quando $T = 0$ todos os estados de partículas individuais são completamente preenchidos com uma partícula por estado até $\epsilon = \mu_0$, seguindo o princípio de exclusão de Pauli, enquanto que todos os estados de partículas individuais com $\epsilon > \mu_0$ estão vazios. Essa energia $\epsilon = \mu_0$ é chamada de *energia de Fermi* do sistema, é denominada ϵ_F e o momento correspondente da partícula p_F é o chamado *momento de Fermi*.

Usando a densidade de energia livre de Helmholtz (4.29) e tomando o limite quando $T \rightarrow 0$, temos a pressão de degenerescência:

$$P_0 = -\frac{\partial F}{\partial V} = \frac{2}{3\pi^2} \int_0^{p_F} \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + m^2}} dp. \quad (5.4)$$

A menos de termos constantes a integração é a mesma para o caso em que calculamos a pressão para uma partícula relativística em sistemas clássicos estatísticos (PATHRIA; BEALE, 2011). O momento de Fermi é dado por

$$p_F = \left(\frac{3N}{4\pi gV} \right)^{\frac{1}{3}} h, \quad (5.5)$$

onde g é o fator giromagnético, h a constante de Planck e N é dado em termos da *densidade de estados* $a(\epsilon)$:

$$N = \int_0^{\epsilon_F} a(\epsilon) d\epsilon, \quad a(\epsilon) = \frac{gV}{h^3} 4\pi p^2 \frac{dp}{d\epsilon}. \quad (5.6)$$

Em nosso caso $\hbar = 1$, $g = 2$. Escolhemos esse valor¹ para o fator giromagnético pelo fato desse ser o valor para um elétron. Mas isso é uma suposição já que precisaríamos saber a relação massa/carga de partículas de um campo MDO ou obter esse valor por outras vias experimentais. Nosso momento de Fermi é então

$$p_F = \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{\frac{1}{3}} 2\pi, \quad (5.7)$$

onde $n \equiv N/V$ é a densidade do número de partículas². Definindo $x \equiv p_F/m$ a integral (5.4) pode ser calculada (PATHRIA; BEALE, 2011), e nos limites que $x \ll 1$ e $x \gg 1$ a pressão de degenerescência é dada por, respectivamente

$$P_0 \simeq \frac{8\pi m^4}{15} x^5, \quad P_0 \simeq \frac{2\pi m^4}{3} x^4. \quad (5.8)$$

Portanto, dado os valores de n e m a pressão de degenerescência pode ser calculada. Agora suponha que o Universo inteiro é preenchido por um gás de partículas MDO livres que estavam em equilíbrio térmico com toda a matéria no passado. Essa suposição é válida porque, embora o MDO não se acople a campos eletromagnéticos, a altas energias ele pode se acoplar a campos de Higgs, que seriam então responsáveis por termalizar as partículas do campo MDO com outros campos de matéria. Conforme a evolução do universo se dá, a temperatura diminui e hoje ela deve ser muito baixa, satisfazendo a condição de que $T \rightarrow 0$, similar a temperatura cósmica de fundo de cerca de $2.75K$. Como bons candidatos a Matéria Escura as partículas do campo MDO não interagem eletromagneticamente e caem nos poços de gravidade em volta do núcleo galáctico. Mas a atração gravitacional deve ser contra-balanceada pela pressão de degenerescência devido ao princípio de exclusão de Pauli, atingindo o equilíbrio em um raio R , análogo ao que acontece com uma estrela anã branca ou uma estrela de nêutron antes de colapsarem. A equação de equilíbrio pode ser escrita como (PATHRIA; BEALE, 2011)

$$P_0(R) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4}, \quad (5.9)$$

¹ Experimentalmente o valor é $g/2 = 1.00115965218085(76)$ [0.076 ppt] (ODOM et al., 2006).

² Atualmente, para prótons no universo inteiro $n_\gamma \simeq 422 \text{ cm}^{-3}$ e para neutrinos $n_\nu \simeq 115 \text{ cm}^{-3}$ (KOLB; TURNER, 1994).

onde $M = nmV$ é a massa total dentro de um volume V , G é a constante gravitacional universal e $\alpha \simeq 1$ é uma constante cujo valor depende da natureza da variação do número de densidade dentro do gás e é obtida experimentalmente. Supondo uma densidade $n \simeq 1.0 \text{ cm}^{-3}$ e uma massa $m \simeq 1.0 \text{ eV}$, temos $x \simeq 0.00028$ (note que $x = p_f/m$ é adimensional) e a primeira aproximação em (5.8) é válida. Nesse caso, o raio de equilíbrio $R = R_0$ pode ser escrito como

$$R_0 = \frac{3^{4/3}}{20\pi^{5/6}} \sqrt{\frac{5}{\alpha G}} \left(\frac{1}{n^{1/6} m^{3/2}} \right). \quad (5.10)$$

Podemos ver que quanto maior os valores de m e n , menor o valor do raio, como esperado. Essa escolha de valores será justificada mais adiante quando compararmos estimativas de densidades com dados de simulações numéricas.

Para os valores de m e n mencionados nós achamos o raio de equilíbrio $R_0 \simeq 4.7 \times 10^{26} \text{ cm}$, três ordens de grandeza maior que o raio da nossa galáxia³. Tal estimativa mostra que a matéria escura formada por partículas MDO podem ser uniformemente distribuídas além do raio da galáxia, como indicado por várias observações, e mantidas em equilíbrio devido a pressão de degenerescência de suas partículas fermiônicas. Ainda, para esses valores de massa, densidade e raio R_0 encontramos que a massa total de Matéria Escura dentro de uma esfera de raio R_0 é $M = nmV = 4.3 \times 10^{78} \text{ eV} = 7.7 \times 10^{45} \text{ g}$, que é da mesma ordem de grandeza da massa total M de uma galáxia típica como a nossa. No limite de baixa densidade $n \simeq 10^{-10} \text{ cm}^{-3}$ e massa alta $m \simeq 1.0 \text{ GeV}$ encontramos valores para o raio e para a massa total muito baixos, a saber $R_0 \simeq 10^{13} \text{ cm}$ e $M \simeq 10^6 \text{ g}$, que são incompatíveis com as observações.

³ Para a Via Láctea e Andrômeda, temos $R \approx 50.000 \text{ a.l.} \approx 4.7 \times 10^{22} \text{ cm}$ e $M \approx 10^{12} M_\odot \approx 2 \times 10^{45} \text{ g}$, onde M_\odot é a massa solar.

5.3 ESTIMATIVA DA DENSIDADE DE PARTÍCULAS DE UM CAMPO MDO

Usando esse modelo baseado em pressão de degenerescência, iremos agora comparar nossas estimativas de densidade com as obtidas através dos dados em (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1996).

Em nosso modelo, a densidade varia com a massa da seguinte maneira:

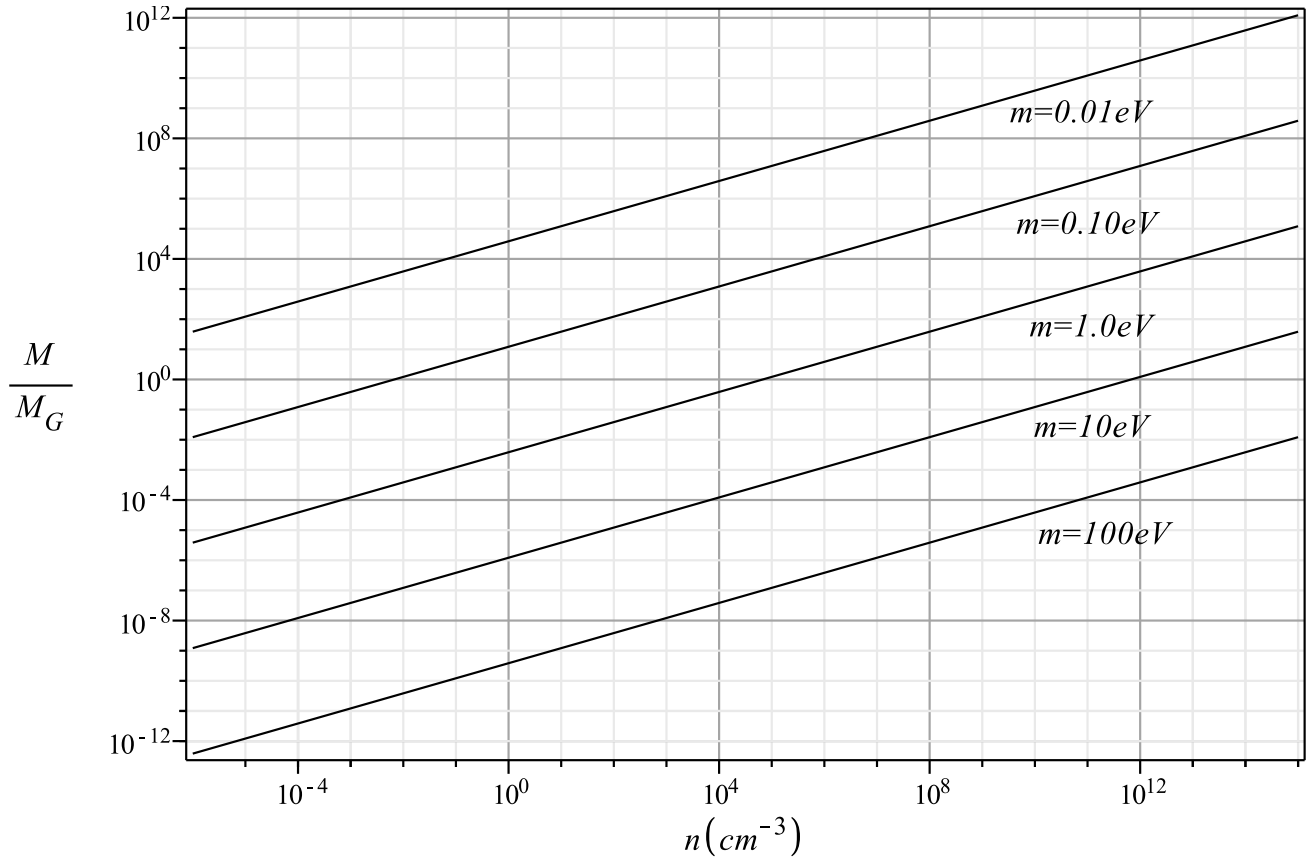


Figura 2 – Gráfico de M/M_G pela densidade de número de partículas $n(cm^{-3})$, onde M_G é a massa total da nossa galáxia, para cinco diferentes valores de massa da partícula, variando de $m = 0.01 eV$ a $m = 100 eV$. Quanto maior o valor da massa da partícula, maior deve ser a densidade n para que se obtenha um valor de massa da mesma ordem da massa da nossa galáxia.

Também podemos ver como se comporta a densidade para diferentes valores de raios:

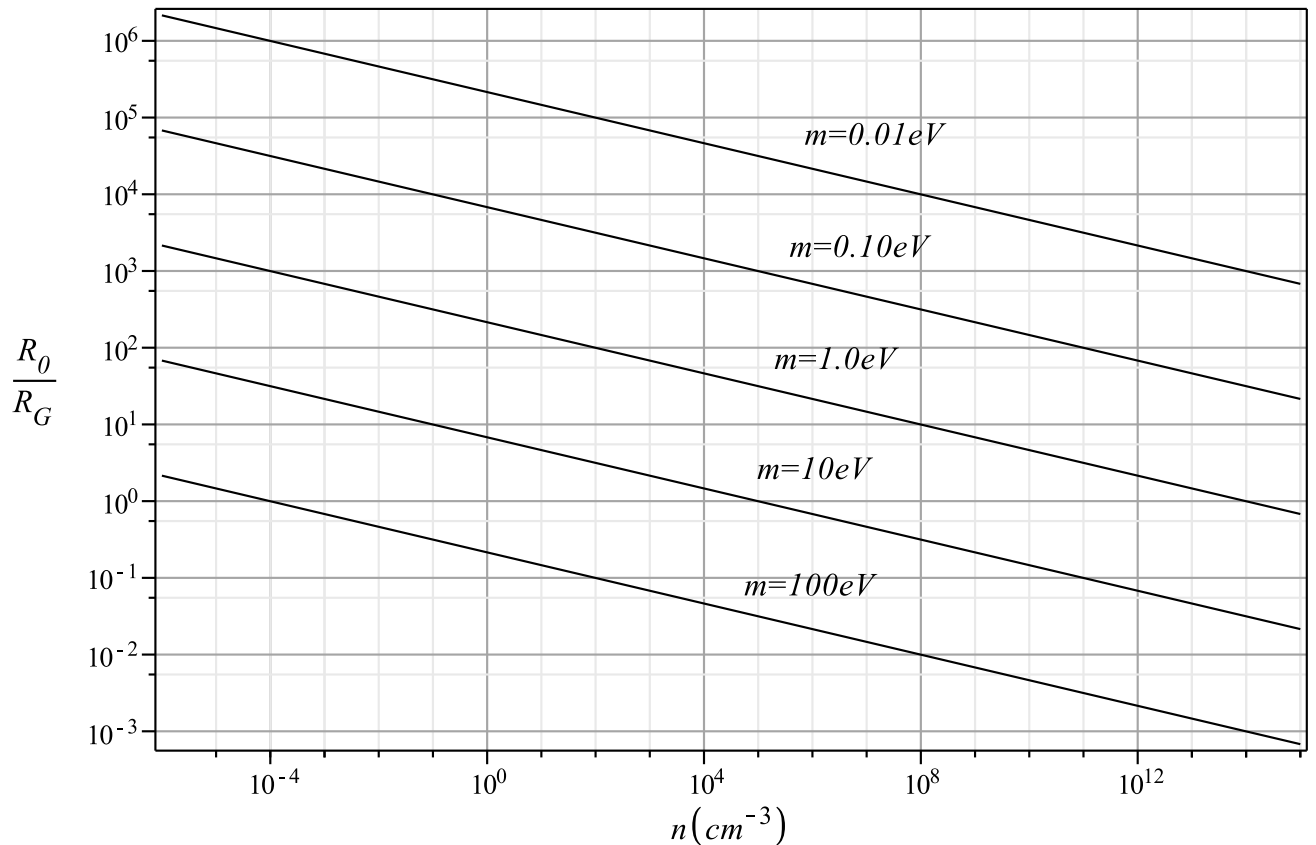


Figura 3 – Gráfico de R_0/R_G pela densidade de número de partículas $n(\text{cm}^{-3})$, onde R_G é o raio da nossa galáxia, para cinco diferentes valores de massa da partícula, variando de $m = 0.01$ eV a $m = 100$ eV. Quanto maior o valor da massa da partícula, menor deve ser a densidade n para que se obtenha um valor de raio da mesma ordem do raio da nossa galáxia.

Da análise das Figura 3 e Figura 2 vemos o comportamento típico do raio de equilíbrio R_0 e da massa total M em função da concentração ou densidade de partículas n . De uma análise mais detalhada da Figura 2 podemos ver que para a massa da partícula variando de 0.1eV a 1.0eV , a razão de massa M/M_G é da ordem da unidade se a densidade de partículas variar de cerca de 10^{-2}cm^{-3} a 10^5cm^{-3} . Da Figura 3 isso corresponde a um raio de equilíbrio variando de $1, 15 \times 10^4 R_G$ a $35 R_G$, ou seja, pouco maior que o raio estimado observável da nossa galáxia. Valores de densidade de partículas mais altos levantam a questão de porquê as partículas não serem detectadas com maior facilidade. Desta forma, para este modelo os intervalos acima de massa, densidade e raio são os esperados.

Para compararmos esses resultados com a simulação numérica em (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1996), precisamos de dois conceitos: o de massa Virial e raio Virial. O raio Virial (raio para qual o teorema do Virial é válido) nesse contexto é definido como o raio de uma esfera centrada numa galáxia (ou aglomerado galáxias). Aproximamos esse raio para um raio que contenha uma densidade média maior que a densidade crítica por um fator de 200 (por convenção). A densidade crítica é dada por

$$\rho_{\text{crit}} = 3H^2(t)/8\pi G \quad (5.11)$$

onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble e G a constante gravitacional. O raio Virial e a densidade média

são dados por

$$r_{\text{vir}} \approx r_{200} = r, \quad \rho = 200 \cdot \rho_{\text{crit}}. \quad (5.12)$$

A partir do raio r_{200} define-se a massa virial

$$M_{\text{vir}} \approx M_{200} = \frac{4}{3}\pi r_{200}^3 \times \rho_{\text{crit}}. \quad (5.13)$$

A massa Virial e o raio Virial são parâmetros utilizados nas simulações de (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1996). Os autores simularam numericamente a formação de 19 sistemas com escalas variando de galáxias anãs para grandes aglomerado galáxias. Com isso criaram um perfil de densidade para a matéria escura. Os parâmetros da simulação numérica podem ser vistos na seguinte tabela:

Label	L_{box} [Mpc]	$1 + z_i$	h_g [kpc]	M_{200} [$10^{12} M_{\odot}$]	r_{200} [kpc]	V_{200} [km/s]	N_{200}	r_s/r_{200}
1	3.0	44.0	1.5	0.319	177	88.0	5637	0.052
2	3.0	44.0	1.5	0.293	172	85.6	5178	0.057
3	3.0	44.0	1.5	0.414	193	96.1	7316	0.082
4	3.0	44.0	1.5	0.525	209	103.9	9278	0.046
5	6.0	22.0	3.0	2.425	348	173.1	5357	0.060
6	6.0	22.0	3.0	2.301	342	170.1	5083	0.071
7	6.0	22.0	3.0	3.519	394	196.0	7774	0.068
8	6.0	22.0	3.0	2.552	354	176.1	5637	0.124
9	12.0	11.0	6.0	28.15	788	392.0	7773	0.124
10	12.0	11.0	6.0	20.59	710	353.2	5686	0.078
11	12.0	11.0	6.0	29.67	802	398.9	8193	0.131
12	12.0	11.0	6.0	22.01	726	361.1	6078	0.088
13	12.0	11.0	6.0	26.16	769	382.5	7224	0.077
14	12.0	11.0	6.0	22.65	733	364.6	6254	0.065
15	18.0	5.5	9.0	102.68	1213	603.4	8401	0.110
16	24.0	5.5	12.0	224.35	1574	783.0	7744	0.121
17	40.0	5.5	20.0	1109.9	2682	1334	8274	0.151
18	48.0	5.5	24.0	1931.5	3226	1605	8334	0.188
19	58.0	5.5	30.0	3009.7	3740	1861	7360	0.143

Tabela 3 – Parâmetros numéricos utilizados na simulação em (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1996).

Dentre os parâmetros, usaremos apenas as massas M_{200} e raios r_{200} para calcular as densidades:

ID	$M_{200}[10^{12}M_{\odot}]$	$r_{200}[\text{kpc}]$
1	0.319	177
2	0.293	172
3	0.414	193
4	0.525	209
5	2.425	348
6	2.301	342
7	3.519	394
8	2.552	354
9	28.15	788
10	20.59	710
11	29.67	802
12	22.01	726
13	26.16	769
14	22.65	733
15	102.68	1213
16	224.35	1574
17	1109.9	2682
18	1931.5	3226
19	3009.7	3740

Tabela 4 – Massa Virial e raio Virial da simulação numérica em (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1996).

Note que M_{200} é da ordem da massa de nossa galáxia M_G . Para calcularmos as densidades usamos a seguinte relação

$$n = M/mV, V = 4/3\pi R^3, \quad (5.14)$$

onde M é a massa total da galáxia, m a massa da partícula. Os valores de raio R e massa M serão substituídos pelos valores de massa Virial e raio Virial da Tabela 3.

O resultado das densidades calculadas a partir dos valores da Tabela 3 podem ser encontrados na Tabela 5, com as densidades calculadas para valores de massa de partícula m entre 0.1 eV e 100 eV. Denotamos n_{nfw} as densidades calculadas a partir dos valores encontrados em (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1996).

ID	$n_{\text{NFW}}[\text{cm}^{-3}]$	$n_{\text{NFW}}[\text{cm}^{-3}]$	$n_{\text{NFW}}[10^5\text{cm}^{-3}]$	$n_{\text{NFW}}[10^4\text{cm}^{-3}]$	$n_{\text{NFW}}[10^3\text{cm}^{-3}]$
—	0.01eV	0.1eV	1eV	10eV	100eV
1	5.252077×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
2	5.257055×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
3	5.257613×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
4	5.250258×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
5	5.253325×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
6	5.251683×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
7	5.252800×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
8	5.252077×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
9	5.252427×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
10	5.252203×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
11	5.251153×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
12	5.251343×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
13	5.251930×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
14	5.250692×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
15	5.252471×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
16	5.252573×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
17	5.252521×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
18	5.252449×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$
19	5.252531×10^7	$\times 10^6$	$\times 10^5$	$\times 10^4$	$\times 10^3$

Tabela 5 – Densidades calculadas usando $n = M/mV$ a partir dos dados de (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1996) para diferentes valores de massa em eV.

Usando a Figura 2, podemos listar numa tabela os valores estimados a partir de nosso modelo. Esses valores são mostrados na Tabela 6, onde $\sim n$ significa “aproximadamente n ”.

ID	M/M_G	$\sim n[\text{cm}^{-3}]$	$\sim n[\text{cm}^{-3}]$	$\sim n[10^5\text{cm}^{-3}]$	$\sim n[10^4\text{cm}^{-3}]$	$\sim n[10^3\text{cm}^{-3}]$
—	—	0.01eV	0.1eV	1eV	10eV	100eV
1	0.319	$< 10^{-6}$	10^{-4}	10^3	10^{10}	$> 10^{15}$
2	0.293	$< 10^{-6}$	10^{-4}	10^3	10^{10}	$> 10^{15}$
3	0.414	$< 10^{-6}$	10^{-4}	10^3	10^{10}	$> 10^{15}$
4	0.525	$< 10^{-6}$	10^{-4}	10^3	10^{10}	$> 10^{15}$
5	2.425	$< 10^{-6}$	10^{-2}	10^5	10^{12}	$> 10^{15}$
6	2.301	$< 10^{-6}$	10^{-2}	10^5	10^{12}	$> 10^{15}$
7	3.519	$< 10^{-6}$	10^{-2}	10^5	10^{12}	$> 10^{15}$
8	2.552	$< 10^{-6}$	10^{-2}	10^5	10^{12}	$> 10^{15}$
9	28.15	$< 10^{-6}$	10^0	10^7	10^{14}	$> 10^{15}$
10	20.59	$< 10^{-6}$	10^0	10^7	10^{14}	$> 10^{15}$
11	29.67	$< 10^{-6}$	10^0	10^7	10^{14}	$> 10^{15}$
12	22.01	$< 10^{-6}$	10^0	10^7	10^{14}	$> 10^{15}$
13	26.16	$< 10^{-6}$	10^0	10^7	10^{14}	$> 10^{15}$
14	22.65	$< 10^{-6}$	10^0	10^7	10^{14}	$> 10^{15}$
15	102.68	10^{-6}	10^2	10^9	10^{15}	$> 10^{15}$
16	224.35	10^{-6}	10^2	10^9	10^{15}	$> 10^{15}$
17	1109.9	10^{-3}	10^4	10^{11}	$> 10^{15}$	$> 10^{15}$
18	1931.5	10^{-3}	10^4	10^{11}	$> 10^{15}$	$> 10^{15}$
19	3009.7	10^{-3}	10^4	10^{11}	$> 10^{15}$	$> 10^{15}$

Tabela 6 – Estimativas de densidades do modelo.

Comparando as tabelas 5 e 6 concluímos que nosso modelo reproduz os resultados encontrados em (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1996) para massas m da ordem de 1 eV, quando M é da ordem da nossa galáxia. Para M da ordem de $10^{-1}M_G$ e M da ordem de 10^1M_G os valores de densidade diferem por um fator de 10^2M_G . Para valores de M de ordem maior que 10^1M_G nosso modelo reproduz densidades muito elevadas, o que não é provável já que para densidades muito altas as partículas já deveriam ter sido detectadas.

6 CONCLUSÕES

A função de partição para um campo fermiônico de dimensão canônica de massa um foi calculada e o resultado é o mesmo que encontramos para campos fermiônicos de Dirac. Embora esses novos tipos de campos não obedeçam uma equação do tipo Dirac, efeitos termodinâmicos e de temperatura finita são os mesmos, obtidos pelo método padrão da soma de frequências de Matsubara em Teoria de Campos a Temperatura Finita. Isso abre a possibilidade de usar resultados muito bem conhecidos de dinâmicas de campos termalizados às partículas MDO. Em particular, a densidade de energia, densidade de entropia e pressão a altas temperaturas são as mesmas que para campos fermiônicos de Dirac.

O limite de baixa temperatura exhibe o fenômeno de pressão de degenerescência, que poderia ser responsável por manter o halo de Matéria Escura ao redor dos núcleos galácticos. Para uma partícula MDO de massa pequena $m \simeq 1.0$ eV e um número de densidade de cerca de $n \simeq 1.0$ cm⁻³, o raio de equilíbrio encontrado é maior que o raio observado de uma galáxia típica como a nossa, podendo explicar a existência de um halo enorme de Matéria Escura em volta do núcleo galáctico. Além disso, a massa total MDO atribuída a Matéria Escura é da mesma ordem de massa de massas galácticas, o que está em concordância com as observações. Ainda, devido ao fato das partículas MDO não interagirem eletromagneticamente, sua distribuição em volta do núcleo da galáxia é esférica e uniforme, modelada apenas pelo equilíbrio entre a pressão gravitacional e a pressão de degenerescência, enquanto que condensados bariônicos de matéria no centro das galáxias, formam núcleos bosônicos mais pesados que não sofrem de pressão de degenerescência e interagem eletromagneticamente, fazendo com que percam energia e se condensem. Isto mostra corretamente que a maioria da massa da galáxia pode estar na forma de Matéria Escura representando cerca de 25% de Matéria Escura contra menos de 5% de matéria bariônica do conteúdo total do Universo, em boa concordância com dados do modelo Λ CDM.

A fim de verificar se a suposição de massas e densidades feitas ($m \simeq 1.0$ eV, $n \simeq 1.0$ cm⁻³) são consistentes, utilizamos os dados de (NAVARRO; FRENK; WHITE, 1996), para estimarmos as densidades de partículas, usando $n = M/mV$, variando m entre 0.01 eV até 100 eV. Em seguida comparamos com os valores de densidade previstos no nosso modelo, na mesma variação de m . Encontramos que o modelo prevê corretamente a densidade de partículas para massas m da ordem de 1.0 eV, em especial nos casos em que a massa total M é da ordem da massa da nossa galáxia.

É importante notar que embora estimativas de buscas no LHC indiquem uma massa enorme para o MDO (cerca de 100 GeV em (DIAS; LEE, 2016) e 1TeV em (ALVES et al., 2018)), as estimativas cosmológicas baseadas em restrições observacionais apontam para uma massa muito pequena (da ordem de 10⁻³² eV em (PEREIRA et al., 2017; PEREIRA; GUIMARÃES, 2017) e (PEREIRA; HOLANDA; SOUZA, 2017)). O valor estimado aqui é da mesma ordem das massas de neutrino, também considerados bons candidatos a Matéria Escura. Modelos mais realísticos de distribuição de massa variando ao redor do núcleo galáctico precisam ser analisados para confirmar se as partículas MDO são de fato bons candidatos a Matéria Escura no Universo. Além disso, uma discussão mais completa sobre o de-acoplamento térmico de partículas de Matéria Escura MDO e sua temperatura

atual é um assunto a ser estudado, como é feito com WIMPS em (HOFMANN; ZWARGER, 2017).

REFERÊNCIAS

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**. [S.l.]: U.S. Government Printing Office, 1970.

AHLUWALIA, D. V. Evading weinberg's no-go theorem to construct mass dimension one fermions: Constructing darkness. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 118, n. 6, p. 60001, jun 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F118%2F60001>>.

AHLUWALIA, D. V. The theory of local mass dimension one fermions of spin one half. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 27, n. 3, p. 2247–2285, Sep 2017. ISSN 1661-4909. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00006-017-0775-1>>.

AHLUWALIA, D. V.; LEE, C.-Y.; SCHRITT, D. Self-interacting elko dark matter with an axis of locality. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 83, p. 065017, Mar 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.065017>>.

AHLUWALIA-KHALILOVA, D. V.; GRUMILLER, D. Dark matter: A spin one-half fermion field with mass dimension one? **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 72, p. 067701, Sep 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.067701>>.

AHLUWALIA-KHALILOVA, D. V.; GRUMILLER, D. Spin-half fermions with mass dimension one: theory, phenomenology, and dark matter. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2005, n. 07, p. 012–012, jul 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2005%2F07%2F012>>.

ALTLAND, A.; SIMONS, B. **Condensed Matter Field Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. (Cambridge books online). ISBN 9780521769754.

ALVES, A. et al. Searching for elko dark matter spinors at the cern lhc. **International Journal of Modern Physics A**, v. 30, n. 01, p. 1550006, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217751X15500062>>.

ALVES, A. et al. Constraining elko dark matter at the LHC with monophoton events. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 121, n. 3, p. 31001, feb 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F121%2F31001>>.

BAILIN, D.; LOVE, A. **Introduction to Gauge Field Theory Revised Edition**. [S.l.]: Taylor & Francis, 1993. (Graduate Student Series in Physics). ISBN 9780750302814.

BASAK, A.; BHATT, J. R. Lorentz invariant dark-spinor and inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2011, n. 06, p. 011–011, jun 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2011%2F06%2F011>>.

BELLAC, M. **Thermal Field Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521654777.

BEREZIN, F. **The Method of Second Quantization, By F.A. Berezin. Translated by Nobumichi Mugibayashi and Alan Jeffrey**. [S.l.: s.n.], 1966. (Pure and Applied Physics, V.24).

BERNARD, C. W. Feynman rules for gauge theories at finite temperature. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 9, p. 3312–3320, Jun 1974. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3312>>.

BÖHMER, C. G. Dark spinor inflation: Theory primer and dynamics. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 77, p. 123535, Jun 2008. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.123535>>.

BÖHMER, C. G. et al. Dark spinor models in gravitation and cosmology. **Journal of High Energy Physics**, v. 2010, n. 7, p. 53, Jul 2010. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP07\(2010\)053](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2010)053)>.

BUTKOV, E. **Física Matemática**. Rio de Janeiro: Ed. Guanabara Koogan, 1988.

CORBELLI, E.; SALUCCI, P. The extended rotation curve and the dark matter halo of M33. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 311, n. 2, p. 441–447, 01 2000. ISSN 0035-8711.

CRAWFORD, J. P. Bispinor geometry for even-dimensional space-time. **Journal of Mathematical Physics**, v. 31, n. 8, p. 1991–1997, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.528648>>.

DAS, A. **Finite Temperature Field Theory**. Singapore: World Scientific, 1997.

DEWITT, B. **Supermanifolds**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics). ISBN 9780521423779.

DIAS, M.; CAMPOS, F. de; SILVA, J. H. da. Exploring elko typical signature. **Physics Letters B**, v. 706, n. 4, p. 352 – 359, 2012. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037026931101402X>>.

DIAS, M.; LEE, C.-Y. Constraints on mass dimension one fermionic dark matter from the yukawa interaction. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 94, p. 065020, Sep 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.94.065020>>.

DIJKSTRA, C. D. **Local and Nonlocal Thermal Field Theory**. Dissertação (Mestrado) — University of Groningen, Groningen, Netherlands, 2019. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1904.10301>>.

DOLAN, L.; JACKIW, R. Symmetry behavior at finite temperature. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 9, p. 3320–3341, Jun 1974. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3320>>.

EISBERG, R. et al. **Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles**. [S.l.]: Wiley, 1985. (Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and Particles). ISBN 9780471873730.

FABBRI, L. The most general cosmological dynamics for elko matter fields. **Physics Letters B**, v. 704, n. 4, p. 255 – 259, 2011. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269311010860>>.

FERRARI, A.; NOGUEIRA, A.; PALECHOR, C. Mínimo teórico para descrever campos quânticos em equilíbrio termodinâmico. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, v. 40, 00 2018. ISSN 1806-1117. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172018000300415&nrm=iso>.

FETTER, A.; WALECKA, J. **Quantum Theory of Many-particle Systems**. [S.l.]: Dover Publications, 2003. (Dover Books on Physics).

GILLARD, A. B.; MARTIN, B. M. S. Quantum fields, dark matter and non-standard wigner classes. In: _____. **Dark Matter in Astrophysics and Particle Physics**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 451–456.

- GLIMM, J.; JAFFE, A. **Quantum Physics: A Functional Integral Point of View**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1987.
- GRADSHTEĪN, I. S.; RYŽIK, I. M. **Table of Integrals, Series, and Products**. [S.l.]: Elsevier Science, 2007.
- GREDAT, D.; SHANKARANARAYANAN, S. Modified scalar and tensor spectra in spinor driven inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2010, n. 01, p. 008–008, jan 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2010%2F01%2F008>>.
- GREINER, W.; BROMLEY, D. **Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations**. Springer, 2000. ISBN 9783540674573. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=2DAInxwvlHYC>>.
- HALL, B. **Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction**. Switzerland: Springer, 2015.
- HASSANI, S. **Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2013.
- HEINZ, U.; JACOB, M. **Evidence for a New State of Matter: An Assessment of the Results from the CERN Lead Beam Programme**. 2000.
- HOFMANN, J.; ZWERTGER, W. Deep inelastic scattering on ultracold gases. **Phys. Rev. X**, American Physical Society, v. 7, p. 011022, Mar 2017. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.7.011022>>.
- KAPUSTA, J. I.; GALE, C. **Finite Temperature Field Theory. Theory Principles and Applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- KNOPP, K. **Theory of Functions, Parts I and II**. Mineola, New York: Dover Publications, 1996.
- KOLB, E.; TURNER, M. **The Early Universe**. Perseus, 1994. (Frontiers in physics). ISBN 9788187169543. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Gss5m-pBauYC>>.
- KOOWN, S. et al. Elko spinor model with torsion and cosmology. **Modern Physics Letters A**, v. 28, n. 29, p. 1350121, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217732313501216>>.
- KUBO, R. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. i. general theory and simple applications to magnetic and conduction problems. **Journal of the Physical Society of Japan**, v. 12, n. 6, p. 570–586, 1957. Disponível em: <<https://doi.org/10.1143/JPSJ.12.570>>.
- LAINE, M.; VUORINEN, A. **Basics of Thermal Field Theory: A Tutorial on Perturbative Computations**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2016. (Lecture Notes in Physics). ISBN 9783319319339.
- LANDSMAN, N.; WEERT, C. van. Real- and imaginary-time field theory at finite temperature and density. **Physics Reports**, v. 145, n. 3, p. 141 – 249, 1987. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157387901219>>.
- LEE, C.-Y. A lagrangian for mass dimension one fermionic dark matter. **Physics Letters B**, v. 760, p. 164 – 169, 2016. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269316303240>>.
- MARTIN, P. C.; SCHWINGER, J. Theory of many-particle systems. i. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 115, p. 1342–1373, Sep 1959. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.1342>>.

- MASSEY, R.; KITCHING, T.; RICHARD, J. The dark matter of gravitational lensing. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 73, n. 8, p. 086901, jul 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0034-4885%2F73%2F8%2F086901>>.
- NAVARRO, J. F.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M. The structure of cold dark matter halos. **The Astrophysical Journal**, IOP Publishing, v. 462, p. 563, May 1996. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/177173>>.
- ODOM, B. et al. New measurement of the electron magnetic moment using a one-electron quantum cyclotron. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 97, p. 030801, Jul 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.030801>>.
- OLVER, F. et al. **NIST Handbook of Mathematical Functions Paperback and CD-ROM**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- PATHRIA, R.; BEALE, P. **Statistical Mechanics**. [S.l.]: Elsevier Science, 2011. ISBN 9780123821898.
- PEREIRA, S.; GUIMARÃES, T. From inflation to recent cosmic acceleration: the fermionic elko field driving the evolution of the universe. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2017, n. 09, p. 038–038, sep 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2017%2F09%2F038>>.
- PEREIRA, S.; S.S., A. P.; SILVA, J. H. da. Some remarks on the attractor behaviour in ELKO cosmology. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2014, n. 08, p. 020–020, aug 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2014%2F08%2F020>>.
- PEREIRA, S. et al. $\lambda(t)$ cosmology induced by a slowly varying elko field. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2017, n. 01, p. 055–055, jan 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2017%2F01%2F055>>.
- PEREIRA, S. H. **Equações de Transporte na Eletrodinâmica Quântica Não-Comutativa**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- PEREIRA, S. H.; COSTA, R. S. Partition function for a mass dimension one fermionic field and the dark matter halo of galaxies. **Modern Physics Letters A**, v. 34, n. 16, p. 1950126, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217732319501268>>.
- PEREIRA, S. H.; HOLANDA, R. F. L.; SOUZA, A. P. S. Evolution of the universe driven by a mass-dimension-one fermion field. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 120, n. 3, p. 31001, nov 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F120%2F31001>>.
- PEREIRA, S. H.; SILVA, J. M. H. da; SANTOS, R. dos. Casimir effect for elko fields. **Modern Physics Letters A**, v. 32, n. 22, p. 1730016, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217732317300166>>.
- PESKIN, M.; SCHROEDER, D. **An Introduction To Quantum Field Theory**. [S.l.]: Avalon Publishing, 1995. (Frontiers in Physics). ISBN 9780813345437.
- POOLE, D. **Linear Algebra: A Modern Introduction**. Boston: Brooks/Cole Cengage Learning, 2011.
- RAMOND, P. **Field Theory**. [S.l.]: Avalon Publishing, 1997. (Frontiers in Physics). ISBN 9780813346564.

- ROGERIO, R. B. et al. Effective lagrangian for a mass dimension one fermionic field in curved spacetime. **Journal of High Energy Physics**, v. 2018, n. 2, p. 145, Feb 2018. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP02\(2018\)145](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2018)145)>.
- ROGERIO, R. J. B. **Aspectos clássicos e quânticos de espinores de dinâmica não-usual: espinores de dimensão de massa um**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2018.
- ROGERIO, R. J. B.; SILVA, J. M. H. da. The local vicinity of spin sums for certain mass-dimension-one spinors. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 118, n. 1, p. 10003, apr 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F118%2F10003>>.
- ROGERIO, R. J. B. et al. A framework to a mass-dimension-one fermionic sigma model. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 113, n. 6, p. 60001, mar 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209%2F0295-5075%2F113%2F60001>>.
- RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1976. (International series in pure and applied mathematics). ISBN 9780070856134.
- RYDER, L. **Quantum Field Theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. ISBN 9781139643122.
- SADJADI, H. M. On coincidence problem in elko dark energy model. **General Relativity and Gravitation**, v. 44, n. 9, p. 2329–2336, Sep 2012. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10714-012-1392-x>>.
- SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J. **Modern Quantum Mechanics**. Pearson, 2013. (Pearson new international edition). ISBN 9781292024103. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=JBoAngEACAAJ>>.
- SALINAS, S. R. A. **Introdução à Física Estatística**. São Paulo: Edusp, 2008.
- SCHILLING, R. **Measures, Integrals and Martingales**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.
- SCHULMAN, L. **Techniques and Applications of Path Integration**. [S.l.]: Dover Publications, 2005. (Dover Books on Physics).
- SCHWINGER, J. On gauge invariance and vacuum polarization. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 82, p. 664–679, Jun 1951. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.664>>.
- SILVA, J. H. da; PEREIRA, S. Exact solutions to elko spinors in spatially flat friedmann-robertson-walker spacetimes. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2014, n. 03, p. 009–009, mar 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2014%2F03%2F009>>.
- SOUZA, A. P. dos S.; PEREIRA, S. H.; JESUS, J. F. A new approach on the stability analysis in elko cosmology. **The European Physical Journal C**, v. 75, n. 1, p. 36, Jan 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3260-9>>.
- SWART, J. G. de; BERTONE, G.; DONGEN, J. van. How dark matter came to matter. **Nature Astronomy**, Springer Science and Business Media LLC, v. 1, n. 3, Mar 2017. ISSN 2397-3366. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/s41550-017-0059>>.

YANG, Y. **An Introduction to Thermal Field Theory**. Dissertação (Mestrado) — Imperial College London, London, UK, 2011. Disponível em: <<https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/theoretical-physics/msc/dissertations/2011/Yuhao-Yang-Dissertation.pdf>>.

ZEE, A. **Quantum Field Theory in a Nutshell**. [S.l.]: Princeton University Press, 2003. ISBN 9780691010199.

Zinn-Justin, J. Quantum Field Theory at Finite Temperature: An Introduction. **arXiv e-prints**, p. hep-ph/0005272, Maio 2000.

ZWICKY, F. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. **Helv. Phys. Acta**, v. 6, p. 110–127, 1933. [Gen. Rel. Grav.41,207(2009)].

APÊNDICE A – SOMAS DE FREQUÊNCIAS DE MATSUBARA

No decorrer do cálculo da função de partição, usando o formalismo de Matsubara, encontramos somatórias sobre frequências que dependem se o sistema em questão é constituído de férmions ou bósons, as chamadas *frequências de Matsubara*. O cálculo da soma dessas frequências necessita de uma atenção especial e nesse apêndice iremos elucidar um dos procedimentos para calculá-las. Seguimos de perto as referências (KAPUSTA; GALE, 2006), sessão 3.4 e (PEREIRA, 2007), apêndice B. Primeiro calculamos a soma das frequências para bósons. O caso de férmions será realizado logo em seguida.

A.1 SOMA DE FREQUÊNCIAS DE MATSUBARA PARA BÓSONS

Nosso objetivo é estabelecer o seguinte resultado:

$$\sum_n \frac{1}{i\omega_n - x} = \begin{cases} \frac{\beta}{e^{\beta x} - 1}, & \text{com } \omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} \text{ (férmions)} \\ \frac{-\beta}{e^{\beta x} - 1}, & \text{com } \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta} \text{ (bósons)} \end{cases}. \quad (\text{A.1})$$

Uma das formas de calcular essas somas, dentre outras, é através da integração de contorno que, por sua vez, faz uso do Teorema dos Resíduos. Por isso, é conveniente enunciá-lo agora:

Teorema 1 (Teorema dos Resíduos). *Seja $f(z)$ uma função analítica sobre e no interior de um contorno fechado C , exceto em um número finito de singularidades isoladas em $z = a_1, a_2, \dots, a_m$, todos situados no interior de C . Então:*

$$\oint_C g(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}g(a_j).$$

Demonstração. Este é um resultado clássico e sua demonstração pode ser encontrada em diversos livros-texto sobre funções complexas. Ver, por exemplo, §33 em (KNOPP, 1996). \square

Para se calcular os resíduos $\text{Res}g(a_j)$ usaremos dois métodos (BUTKOV, 1988):

- Para uma singularidade de ordem m em $z = a$:

$$\text{Res} [g(a)] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m g(z)]. \quad (\text{A.2})$$

- Se $g(z)$ for da forma $g(z) = \varphi(z)/\psi(z)$:

$$\text{Res} [g(a)] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}, \quad (\text{A.3})$$

onde $\psi' \equiv \frac{d\psi}{dz}$. Agora, suponha uma forma genérica para uma soma de frequências, do tipo

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = i\omega_n), \quad (\text{A.4})$$

onde $f(k_0)$ é uma função que não possui singularidades ao longo do eixo imaginário de k_0 , $T = \beta^{-1}$, $i\omega_n = 2\pi n T i = 2\pi n i / \beta$ e k_0 pode ser entendida como a quarta componente de um quadrivetor no espaço de Minkowski (KAPUSTA; GALE, 2006). Queremos mostrar que tal soma (A.4) é igual a:

$$\frac{T}{2\pi i} \oint_C dk_0 f(k_0) \frac{1}{2} \beta \coth\left(\frac{1}{2} \beta k_0\right), \quad (\text{A.5})$$

onde o contorno C no plano complexo de k_0 é da seguinte forma:

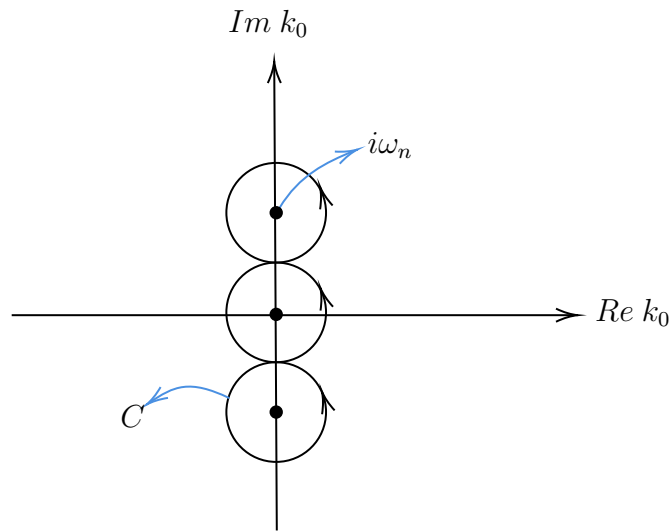


Figura 4 – Contorno da integração em (A.5).

As somas de frequência bosônicas podem ser convenientemente reescritas em termos da função cotangente hiperbólica em (A.5) porque ela tem polos em $k_0 = \frac{2\pi i n}{\beta} \equiv a_n$ (PEREIRA, 2007) e é analítica e limitada em todos os outros pontos. Isso é importante porque a abordagem por integração de contorno requer que a função a ser integrada seja meromorfa (FETTER; WALECKA, 2003). Além disso, para que essa prescrição funcione é necessário que $f(k_0)$ caia mais rápido que k_0^{-1} quando $k_0 \rightarrow \infty$ (BELLAC, 1996; FETTER; WALECKA, 2003; KAPUSTA; GALE, 2006; DIJKSTRA, 2019). Essa condição se mostrará necessária quando deformarmos os contornos da figura Figura 4. Note também que a função cotangente hiperbólica pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \beta \coth\left(\frac{1}{2} \beta k_0\right) = \frac{1}{2} \beta \left(\frac{1 + e^{-\beta k_0}}{1 - e^{-\beta k_0}} \right) = \frac{1}{2} \beta \left(-1 - \frac{2}{e^{-\beta k_0} - 1} \right) = \frac{1}{2} \beta \left(1 + \frac{2}{e^{\beta k_0} - 1} \right). \quad (\text{A.6})$$

Aplicando o Teorema 1 (Teorema dos Resíduos) em (A.5):

$$\frac{T}{2\pi i} \oint_C dz f(z) \frac{1}{2} \beta \coth\left(\frac{1}{2} \beta z\right) = T \sum_n \text{Res} \left[f(a_n) \frac{1}{2} \beta \coth\left(\frac{1}{2} \beta a_n\right) \right]. \quad (\text{A.7})$$

Podemos calcular os resíduos em (A.7) da seguinte maneira: definimos

$$\begin{aligned}\varphi(a_n) &:= f(a_n)(1 + e^{-\beta a_n}) \\ \psi(a_n) &:= (1 - e^{-\beta a_n}),\end{aligned}\tag{A.8}$$

com $\psi'(a_n) = \beta e^{-\beta a_n}$. Usando (A.3) temos

$$\begin{aligned}\text{Res} \left[f(a_n) \frac{1}{2} \beta \coth \left(\frac{1}{2} \beta a_n \right) \right] &= \frac{1}{2} \frac{\varphi(a_n)}{\psi'(a_n)} \\ &= \frac{f \left(\frac{2\pi i n}{\beta} \right) \frac{1}{2} \beta (1 + e^{-2\pi i n})}{\beta e^{-2\pi i n}}, \\ &= f \left(\frac{2\pi i n}{\beta} \right) \\ &= f(k_0 = i\omega_n)\end{aligned}\tag{A.9}$$

já que $e^{2\pi n i} = 1$, para $n \in \mathbb{Z}$. Substituindo (A.9) em (A.7) obtemos a relação que inicialmente queríamos demonstrar:

$$\frac{T}{2\pi i} \oint_C dk_0 f(k_0) \frac{1}{2} \beta \coth \left(\frac{1}{2} \beta k_0 \right) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = i\omega_n).\tag{A.10}$$

Prosseguindo, queremos mostrar agora a seguinte relação:

$$\begin{aligned}T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = i\omega_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 \frac{1}{2} [f(k_0) + f(-k_0)] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 [f(k_0) + f(-k_0)] \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}.\end{aligned}\tag{A.11}$$

Para tal, note que o contorno da Figura 4 pode ser deformado, de forma que temos

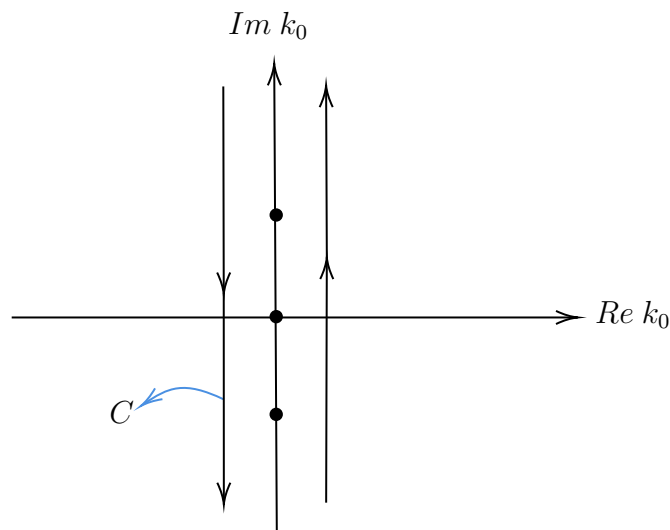


Figura 5 – Contorno de integração deformado.

Em termos dessa nova curva de contorno a integração em (A.10), usando (A.6), pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
\frac{T}{2\pi i} \oint_C dk_0 f(k_0) \frac{1}{2} \beta \coth\left(\frac{1}{2} \beta k_0\right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dk_0 f(k_0) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-\beta k_0} - 1}\right) \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 f(k_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}\right) + \\
\frac{1}{2\pi i} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dk_0 f(k_0) \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{\beta - k_0} - 1}\right) &+ \\
\frac{1}{2\pi i} \int_{+\epsilon}^{-\epsilon} dk_0 f(k_0) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}\right). &
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Visto que tomaremos $\epsilon \rightarrow 0$, as contribuições das extremidades superior e inferior (representadas pelos dois últimos termos em (A.12)) podem ser ignoradas daqui em diante. Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned}
\frac{T}{2\pi i} \oint_C dk_0 f(k_0) \frac{1}{2} \beta \coth\left(\frac{1}{2} \beta k_0\right) &= \frac{1}{2\pi i} \left[-\frac{1}{2} \int_{+i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dk_0 f(k_0) + \frac{1}{2} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 f(k_0) \right] \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \left[-\int_{+i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} \frac{dk_0 f(k_0)}{e^{-\beta k_0} - 1} + \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} \frac{dk_0 f(k_0)}{e^{\beta k_0} - 1} \right].
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Note que fazendo $k_0 \rightarrow -k_0$ na primeira e na terceira integral podemos reescrever (A.13) em termos apenas do caminho do lado direito da Figura 5:

$$\begin{aligned}
\frac{T}{2\pi i} \oint_C dk_0 f(k_0) \frac{1}{2} \beta \coth\left(\frac{1}{2} \beta k_0\right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{1}{2} [f(k_0) + f(-k_0)] \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 [f(k_0) + f(-k_0)] \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Lembrando que $f(k_0)$ não possui singularidades ao longo do eixo imaginário k_0 podemos realizar $\epsilon \rightarrow 0$ na primeira integral e finalmente obter a relação

$$\begin{aligned}
T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = i\omega_n) &= \frac{T}{2\pi i} \oint_C dk_0 f(k_0) \frac{1}{2} \beta \coth\left(\frac{1}{2} \beta k_0\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 \frac{1}{2} [f(k_0) + f(-k_0)] \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 [f(k_0) + f(-k_0)] \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1},
\end{aligned} \tag{A.15}$$

que é a relação que queríamos demonstrar (A.11). Note que a soma de frequências se divide naturalmente em duas partes: uma parte independente da temperatura, chamada de ‘parte de vácuo’ e outra contendo a distribuição de Bose-Einstein, chamada de ‘parte de matéria’ (KAPUSTA; GALE,

2006) ou 'contribuição térmica' (DIJKSTRA, 2019). Também vale ressaltar que, em certo sentido, a substituição de somas de frequências por integração de contorno é equivalente a substituição de um tempo imaginário (frequências discretas no espaço euclidiano) pelo tempo real (valores contínuos de energia no espaço de Minkowski) (KAPUSTA; GALE, 2006).

Demonstrada a relação (A.15), podemos agora tratar o caso em que f é da forma:

$$f(k_0) = -\frac{1}{k_0^2 - \omega^2}, \quad (\text{A.16})$$

ou seja, o caso em que f contém os termos do tipo $k_0^2 - \omega^2$ da soma de Matsubara que estamos interessados. Substituindo (A.16) em (A.15):

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-1}{k_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 \left(\frac{-1}{k_0^2 - \omega^2} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 \left(\frac{2}{k_0^2 - \omega^2} \right) \left(\frac{-1}{e^{\beta k_0} - 1} \right), \quad (\text{A.17})$$

A segunda integral pode ser feita se fechamos o caminho do lado direito da Figura 5 de forma que formemos um semi-círculo $C = l_1 + l_2$, como pode ser visto na figura Figura 6.

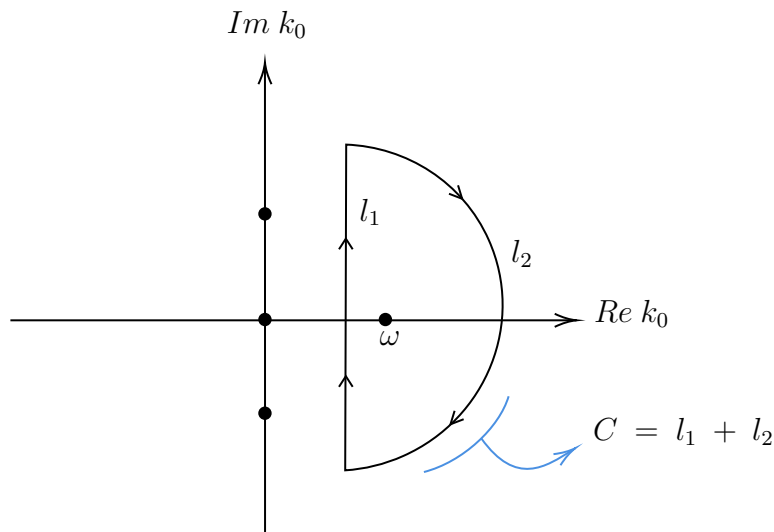


Figura 6 – Contorno C em forma de semi-círculo.

Fechamos o semi-círculo porque a segunda integral poderá ser calculada usando o Teorema dos Resíduos, visto que é um caminho fechado que possui apenas uma singularidade isolada. Pela Figura 6 vemos que precisamos fazer a segunda integral de (A.17) ao longo do caminho l_1 . Usando então o

Teorema dos Resíduos temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C dk_0 \left(\frac{2}{k_0^2 - \omega^2} \right) \left(\frac{-1}{e^{\beta k_0} - 1} \right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} dk_0 \left(\frac{2}{k_0^2 - \omega^2} \right) \left(\frac{-1}{e^{\beta k_0} - 1} \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} dk_0 \left(\frac{2}{k_0^2 - \omega^2} \right) \left(\frac{-1}{e^{\beta k_0} - 1} \right) \\ &= -2\pi i \sum_j \text{Res} [g(a_j)], \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde o sinal negativo dos resíduos é devido ao sentido anti-horário escolhido para orientar a curva C . Note que o único polo no plano semi-direito é o ponto $k_0 = \omega$, de segunda ordem. Portanto,

$$2\pi i \sum_j \text{Res} [g(a_j)] = 2\pi i \text{Res} [g(z = k_0)]. \quad (\text{A.19})$$

Agora, lembre-se da condição de que a função $f(k_0)$ deve ir a zero no limite $k_0 \rightarrow \infty$. Isso nos permitirá, através do Lema de Jordan, fechar os contornos em semi-círculos de modo que eles cubram todo o plano complexo nesse limite, com exceção do eixo imaginário. Enunciamos tal lema:

Lema 1 (Lema de Jordan). *Seja C_R um semi-círculo de raio R no semiplano superior complexo com centro na origem. Seja f uma função que tende uniformemente a zero mais rapidamente que z^{-1} , quando $|z| \rightarrow \infty$, para $\arg(z) \in [0, \pi]$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Então:*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0.$$

Demonstração. Veja (HASSANI, 2013), p.345. □

Já que $\beta k_0 = \beta i \omega_n$, vemos que $\beta \omega_n = \alpha > 0$ e então podemos usar o lema diretamente. Portanto, a contribuição da integral ao longo de l_2 é nula, o que nos deixa com:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} dk_0 \left(\frac{2}{k_0^2 - \omega^2} \right) \left(\frac{-1}{e^{\beta k_0} - 1} \right) = -2\pi i \text{Res} \left[-\frac{2}{2\pi i} \frac{1}{k_0^2 - \omega^2} \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Lembrando ainda que a singularidade $z = k_0$ é de segunda ordem e entendendo k_0 como uma variável

complexa $z \in \mathbb{C}$ podemos usar (A.3) e calcular o resíduo:

$$\begin{aligned}
-2\pi i \operatorname{Res} \left[-\frac{2}{2\pi i} \frac{1}{k_0^2 - \omega^2} \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1} \right] &= -2\pi i \lim_{z \rightarrow \omega} \frac{d}{dz} \left[(z - \omega)^2 \frac{-2}{2\pi i} \frac{1}{(z^2 - \omega^2)} \frac{1}{(e^{\beta z} - 1)} \right] \\
&= \frac{2\pi i}{\pi i} \lim_{z \rightarrow \omega} \left[\frac{1}{(z + \omega)} \frac{1}{(e^{\beta z} - 1)} - \frac{(z - \omega)}{(z + \omega)^2} \frac{1}{(e^{\beta z} - 1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(z - \omega)}{(z + \omega)} \frac{\beta e^{\beta z}}{(e^{\beta z} - 1)^2} \right] \\
&= \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\beta \omega} - 1} \\
&= -\frac{2}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dz \frac{1}{(z^2 - \omega^2)} \frac{1}{(e^{\beta z} - 1)},
\end{aligned} \tag{A.21}$$

onde retornamos aos limites originais em vez de usarmos l_1 . Para tratar da primeira integral em (A.17) realizamos a mudança de variáveis $ik_0 = k_4$ e $dk_0 = -idk_4$ de tal forma que temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dk_0 \left(\frac{-1}{k_0^2 - \omega^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_4^2 + \omega^2} dk_4. \tag{A.22}$$

Finalmente (A.17) fica

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-1}{k_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_4^2 + \omega^2} dk_4 + \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\beta \omega} - 1}, \tag{A.23}$$

onde novamente temos uma parte de vácuo (dependente de k_0) e uma parte de matéria (segundo termo). O termo de vácuo é divergente, mas pode ser renormalizado de forma que zeramos o primeiro termo (KAPUSTA; GALE, 2006).

A.2 SOMA DE FREQUÊNCIAS DE MATSUBARA PARA FÉRMIONS

O caso fermiônico é inteiramente análogo, seguindo-se os mesmos passos, os mesmos contornos, o teorema dos resíduos e o lema de Jordan. A relação análoga a (A.15) é

$$\begin{aligned}
T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(p_0 = i\omega_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dp_0 \frac{1}{2} [h(p_0) + h(-p_0)] \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dp_0 [h(p_0) + h(-p_0)] \frac{1}{e^{\beta p_0} + 1},
\end{aligned} \tag{A.24}$$

onde $\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$, $h(p_0)$ é uma função que não possui singularidades ao longo do eixo imaginário de p_0 (aos moldes de $f(k_0)$). O análogo de (A.5) é

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(p_0 = i\omega_n) = \frac{T}{2\pi i} \oint_C dp_0 h(p_0) \frac{1}{2} \beta \tanh \left(\frac{1}{2} \beta p_0 \right), \tag{A.25}$$

onde a função tangente hiperbólica possui polos em $p_0 = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}$. O caso em que h é da forma

$$h(p_0) = -\frac{1}{p_0^2 - \omega^2} \quad (\text{A.26})$$

nos leva a

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-1}{p_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p_4^2 + \omega^2} dp_4 - \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} + 1}. \quad (\text{A.27})$$

Os casos fermiônico e bosônico podem então ser combinados numa única expressão:

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-1}{k_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k_4^2 + \omega^2} dk_4 \pm \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{\beta\omega} \pm 1}, \quad (\text{A.28})$$

onde o sinal positivo indica o caso de bósons com $\omega_n = 2\pi n/\beta$ e o negativo o de férmions com $\omega_n = (2n + 1)\pi/\beta$.

A.3 SOMA DE FREQUÊNCIAS DE MATSUBARA COM POTENCIAIS QUÍMICOS

Para finalizar esse apêndice iremos apenas observar as mudanças que ocorrem quando levamos em consideração um potencial químico μ . No ensemble grande canônico a função $f(k_0)$ é uma função meromorfa de k_0 e, particularmente, regular em μ , i.e., ela é analítica e de uma única variável em μ e cai mais rápido que k_0^{-1} quando $k_0 \rightarrow \infty$ (BELLAC, 1996) (DIJKSTRA, 2019). O contorno relevante pode ser visto a seguir:

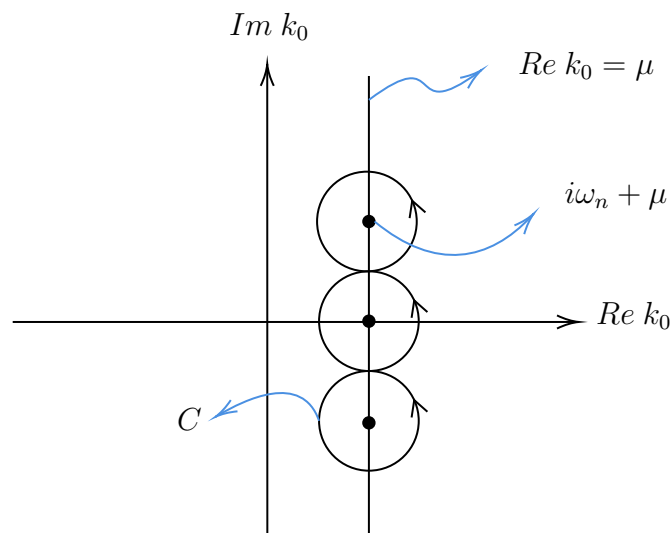


Figura 7 – Contorno para o caso com potencial químico μ .

Nesse caso o análogo de (A.13) é (BELLAC, 1996)

$$\begin{aligned}
T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = i\omega_n + \mu) &= \frac{T}{2\pi i} \oint_C dk_0 f(k_0) \frac{1}{2} \beta \coth \left[\frac{1}{2} (\beta k_0 - \mu) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left[-\frac{1}{2} \int_{+i\infty-\epsilon+\mu}^{-i\infty-\epsilon+\mu} dk_0 f(k_0) + \frac{1}{2} \int_{-i\infty+\epsilon+\mu}^{+i\infty+\epsilon+\mu} dk_0 f(k_0) \right] \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \left[-\int_{+i\infty-\epsilon+\mu}^{-i\infty-\epsilon+\mu} \frac{dk_0 f(k_0)}{e^{-\beta(k_0-\mu)} - 1} + \int_{-i\infty+\epsilon+\mu}^{+i\infty+\epsilon+\mu} \frac{dk_0 f(k_0)}{e^{\beta(k_0-\mu)} - 1} \right], \tag{A.29}
\end{aligned}$$

onde estamos usando as frequências de Matsubara para bósons $\omega_n = 2\pi n/\beta$. Note que essa função cotangente hiperbólica tem pólos em $k_0 = i\omega_n + \mu$ e é limitada e analítica em todas as regiões do plano complexo com exceção do eixo $\text{Re}k_0 = 0$ (veja Figura 7). Prosseguimos do mesmo modo que na seção A.1:

$$\begin{aligned}
T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = i\omega_n + \mu) &= \frac{T}{2\pi i} \oint_C dk_0 f(k_0) \frac{1}{2} \beta \coth \left[\frac{1}{2} (\beta k_0 - \mu) \right] \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\mu}^{+i\infty+\mu} dk_0 \frac{1}{2} [f(k_0) + f(-k_0)] \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon+\mu}^{+i\infty+\epsilon+\mu} dk_0 [f(k_0) + f(-k_0)] \frac{1}{e^{\beta(k_0-\mu)} - 1}. \tag{A.30}
\end{aligned}$$

Escolhemos a mesma função particular que (A.16), formamos um semi-círculo análogo ao da Figura 6, só que com o caminho l_1 agora a direita da reta $\text{Re}k_0 = \mu$. Após aplicar o Teorema dos Resíduos, usamos o lema de Jordan (que agora implica na condição $\beta k_0 > \mu$) e calculamos o resíduo com o método (A.3). Dessa forma chegamos a

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-1}{k_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\mu}^{+\infty+\mu} \frac{1}{k_4^2 + \omega^2} dk_4 + \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{(\beta\omega-\mu)} - 1}. \tag{A.31}$$

O caso de férmions é inteiramente análogo ao que fizemos com potencial químico nulo na seção A.2. As somas podem então ser combinadas, como em (A.28):

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-1}{k_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\mu}^{+\infty+\mu} \frac{1}{k_4^2 + \omega^2} dk_4 \pm \frac{1}{\omega} \frac{1}{e^{(\beta\omega-\mu)} \pm 1}, \tag{A.32}$$

Como uma última observação para encerrar essa seção é importante notar que quando $|\mu| = m$, entramos no caso de condensado de Bose-Einstein e outra análise deve ser realizada (BELLAC, 1996; KAPUSTA; GALE, 2006).

APÊNDICE B – INTEGRAÇÃO SOBRE VARIÁVEIS DE GRASSMAN

Nesse apêndice apresentamos com mais detalhes as integrais funcionais para férmions sobre as variáveis de Grassmann. O tratamento segue de perto as referências (BAILIN; LOVE, 1993; RAMOND, 1997; BEREZIN, 1966).

Considere o quadrvetor energia-momento para campos espinoriais (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\begin{aligned} P_\mu &= \int d^3x T_\mu^0 \\ &= \int \frac{d^3k}{2k_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\pm s} [a^*(k, s)a(k, s)k_\mu - b(k, s)b^*(k, s)k_\mu]. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Se prosseguirmos como o fazemos num campo escalar, devemos interpretar a quantidade

$$\frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} a^*(k, s)a(k, s) \quad (\text{B.2})$$

como sendo a modos com spin s e momento \mathbf{k} no elemento d^3k . O problema então surge quando nos direcionamos ao termo:

$$\frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} b(k, s)b^*(k, s), \quad (\text{B.3})$$

descrevendo assim um número b de modos tendo energia negativa. Em vez de tratarmos esses modos como estados de energia positiva de antipartículas como de costume, tomaremos as quantidades a, a^*, b, b^* como quantidades que *anticomutam* (BAILIN; LOVE, 1993):

$$\begin{aligned} \{a, a'\} &= \{a, a'^*\} = \{a, b'\} = \{a, b'^*\} \\ &= \{a^*, a'^*\} = \{a^*, b'\} = \{a^*, b'^*\} \\ &= \{b, b'\} = \{b, b'^*\} = \{b^*, b'^*\} = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$a = a(k, s), a' = a(k', s'), \text{ etc.} \quad (\text{B.5})$$

Acabamos de introduzir variáveis novas, não-comutativas: as chamadas *variáveis de Grassmann*. Formalmente, elas podem ser entendidas como elementos da *álgebra externa* sobre os números complexos (DEWITT, 1992). Note que essas variáveis *não* são números reais ou complexos em si e, portanto, não faz sentido tratar da positividade da energia se estipularmos que os campos são assim representados por elas (BAILIN; LOVE, 1993). Assim já podemos notar que essa abordagem para tratar de campos espinoriais é essencialmente não-clássica antes mesmo da introdução de integrais funcionais. De fato, essas variáveis compõem os chamados *supernúmeros*, estruturas que são usadas para definir espaços tratados em supersimetria (DEWITT, 1992), mas os detalhes estão fora do escopo dessa dissertação e por isso não trataremos especificamente desses números.

Considere duas variáveis de Grassman a, b :

$$\{a, a\} = \{a, b\} = \{b, b\} = 0, \quad a^2 = b^2 = 0. \quad (\text{B.6})$$

Para qualquer função das variáveis de Grassmann (a, b) podemos expandir $f(a, b)$ de tal forma que¹

$$\begin{aligned} f(a, b) &= f_0 + f_1 a + \tilde{f}_1 b + f_2 ab \\ &= f_0 + f_1 a + \tilde{f}_1 b - f_2 ba, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

onde $f_0, f_1, \tilde{f}_1, f_2$ são números ordinários. A derivada pode ser definida² como usualmente (BAILIN; LOVE, 1993):

$$\frac{\partial f}{\partial a} = f_1 + f_2 b, \quad (\text{B.8})$$

exceto que agora devemos respeitar a anticomutação de a, b , de tal forma que também obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial b} = f_1 - f_2 a, \quad (\text{B.9})$$

onde usamos a segunda forma em (B.7). Segue que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = -\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = -f_2. \quad (\text{B.10})$$

Para definir integrais, primeiro queremos que os ‘elementos infinitesimais’ sejam variáveis de Grassmann tais que

$$\{a, da\} = \{a, db\} = \{da, b\} = \{da, db\} = 0, \quad (\text{B.11})$$

e também que integrais múltiplas sejam interpretadas como integrais iteradas

$$\int da db f(a, b) \equiv \int da \left(\int db f(a, b) \right). \quad (\text{B.12})$$

Assim,

$$\left(\int da \right)^2 = \left(\int da \right) \left(\int db \right) = \int da db = - \int db da = - \left(\int da \right)^2, \quad (\text{B.13})$$

o que implica em³

$$\int da = 0, \quad \int daa = 1. \quad (\text{B.14})$$

Note que o operador $\int da \dots$ é introduzido formalmente e não deve ser interpretado como equivalente a integrais convencionais, pois o resultado de diferenciar e integrar uma função f de variáveis de Grassmann (B.7) é o mesmo! Para entender melhor considere uma função $f(a)$ que seja no máximo

¹ A série de Taylor é truncada pois os termos de maior ordem possuem termos $a^2 = b^2 = 0$.

² O operador diferencial d/da também pode ser definido através da relação $\left\{ \frac{d}{d\theta}, \theta \right\} = 1$ (RAMOND, 1997).

³ Como não há nenhuma restrição nas variáveis de Grassmann podemos definir $\int daa = 1$.

linear (visto que termos não lineares se cancelam em variáveis de Grassman) e que seja invariante por translação sob integração. Realizemos a integração

$$\int da(f_0 + f_1 a) = f_1, \quad \int da f(a + a_0) = da f(a). \quad (\text{B.15})$$

Agora considere a mesma função. A diferenciação resulta em

$$\frac{d}{da}(f_0 + f_1 a) = f_1. \quad (\text{B.16})$$

Portanto, não podemos interpretar essas integrais como tipos de somas e sim como um operador introduzido formalmente que tem algumas propriedades que gostaríamos de ter em integrais, a saber: uma operação linear, invariante sob translação e que o resultado não dependa da variável a ser integrada.

Suponha agora que queremos avaliar uma integral Gaussiana envolvendo uma variável de Grassman $d\theta$. Expandindo a exponencial obtemos

$$\int d\theta e^{-\frac{1}{2}a^2\theta} = \int d\theta \left(1 - \frac{a^2\theta}{2} + \frac{a^4\theta^2}{8} - \frac{a^6\theta^3}{48} + \dots \right) = \int d\theta = 0, \quad (\text{B.17})$$

o que não é muito útil para nós. Para obter uma integração não-nula devemos tratar de mais de uma variável. Para n variáveis de Grassmann $\theta_1, \dots, \theta_n$ temos

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0, \quad \int d\theta_i = 0, \quad \int d\theta_i \theta_i = 1, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{B.18})$$

Recorde que aqui *não* estamos somando sobre os índices i, j e as integrais múltiplas continuam sendo interpretadas como integrais iteradas. Agora considere uma integral gaussiana sobre n variáveis de Grassmann

$$I_n \equiv \int d\theta_1 \dots d\theta_n \exp\left(-\frac{1}{2}\Theta^T \mathbf{A} \Theta\right), \quad (\text{B.19})$$

onde \mathbf{A} é uma matriz real antisimétrica e Θ é o vetor coluna formado pelas componentes $(\theta_1, \dots, \theta_n)$. Da definição da integral (B.14) segue que (BEREZIN, 1966)

$$\int f(\theta) d\theta_n \dots d\theta_1 = n! f_n(1, \dots, n). \quad (\text{B.20})$$

Vamos colocar (B.19) na forma

$$I_n = \int \exp\left(\sum a_{ik} \theta_i \theta_k\right) d\theta_n \dots d\theta_1, \quad a_{ik} = -a_{ki}. \quad (\text{B.21})$$

Usamos o fato de que para uma transformação ortogonal própria $\|s_{ik}\|$ a matriz $\|a_{ik}\|$ pode ser posta

na forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

Considere a seguinte substituição de variáveis:

$$\theta_i = \sum s_{ik} y_k. \quad (\text{B.23})$$

Para uma mudança de variáveis por substituição na forma que fizemos, vale a seguinte relação (BEREZIN, 1966):

$$\int f(\theta) d\theta_n \cdots d\theta_1 = \det \|\tilde{a}_{ik}\| \int f[\theta(y)] dy_n \cdots dy_1, \quad (\text{B.24})$$

onde $\|\tilde{a}_{ik}\|$ é a inversa da matriz $\|a_{ik}\|$. Assim, aplicando (B.20) em (B.21):

$$I_n = \begin{cases} \int \exp [2 (\lambda_1 y_1 y_2 + \lambda_2 y_3 y_4 + \cdots + \lambda_{n/2} y_{n-1} y_n)] dy_n \cdots dy_1, & \text{para } n \text{ par} \\ \int \exp [2 (\lambda_1 y_1 y_2 + \cdots + \lambda_{(n-1)/2} y_{n-2} y_{n-1})] dy_n \cdots dy_1, & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}, \quad (\text{B.25})$$

onde $\det \|s_{ik}\| = 1$, já que $\|s_{ik}\|$ é uma matriz ortogonal própria. Usando (B.20):

$$I_n = 2^{n/2} \lambda_1 \cdots \lambda_n = \det (\|2a_{ik}\|)^{1/2}, \text{ para } n \text{ par}. \quad (\text{B.26})$$

O caso em que n é ímpar, temos $I = 0$, já que nesse caso há um número ímpar de fatores $d\theta$, o que implica em pelo menos um fator $\int d\theta_i$ com integrando 1 e portanto, por conta da definição de integral (B.14), temos que a integral se anula para n ímpar. Isso é consistente com o fato de que o determinante para qualquer matriz antisimétrica é nulo. Assim, a equação (B.21) fica (BEREZIN, 1966)

$$\int \exp \left(\sum a_{ik} \theta_i \theta_k \right) d\theta_n \cdots d\theta_1 = (\det \|2a_{ik}\|)^{1/2} \quad (\text{B.27})$$

E em forma matricial, expandindo a exponencial:

$$I_n = \int d\theta_1 \cdots d\theta_n \frac{1}{(n/2)!} \left(-\frac{1}{2} \Theta^T \mathbf{A} \Theta \right)^{n/2} = (\det \mathbf{A})^{1/2}. \quad (\text{B.28})$$

Note que aqui temos uma potência positiva do determinante, enquanto que no caso de um campo escalar ela era negativa⁴.

⁴ A raiz do determinante de uma matriz antisimétrica é chamada de *Pfaffiano*. A fórmula (B.27) é também válida para matrizes complexas (BEREZIN, 1966).

Generalizando para o caso em que a integração é realizada sobre um número infinito de componentes de uma função $\psi(x)$ de variáveis de Grassmann, obtemos a integral funcional (BAILIN; LOVE, 1993):

$$\int \mathcal{D}\psi \exp\left(-\frac{1}{2} \int dx' \int dx \psi(x') A(x', x) \psi(x)\right) = (\det \mathbf{A})^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{A}\right). \quad (\text{B.29})$$

Para variáveis de Grassmann complexas a generalização de (B.28) é (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\int d\theta_1^* d\theta_1 \dots \int d\theta_n^* d\theta_n \exp(-\Theta^\dagger \mathbf{A} \Theta) = \det \mathbf{A}, \quad (\text{B.30})$$

onde \mathbf{A} agora é uma matriz *anti-hermitiana* e a integração é definida por (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\int d\theta_i^* d\theta_i = 2 \int d(\text{Re } \theta_i) d(\text{Im } \theta_i). \quad (\text{B.31})$$

A integral funcional correspondente é dada por (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi \exp\left(-\int dx' \int dx \psi^*(x') A(x', x) \psi(x)\right) = \det \mathbf{A} = \exp(\text{Tr} \ln \mathbf{A}). \quad (\text{B.32})$$

Por fim se estamos trabalhando no espaço de Minkowski a integral funcional correspondente a (B.32) é (BAILIN; LOVE, 1993)

$$\int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi \exp\left(i \int d^4x' \int d^4x \psi^*(x') B(x', x) \psi(x)\right) = \det(i\mathbf{B}) = \exp \text{Tr} \ln(i\mathbf{B}). \quad (\text{B.33})$$

APÊNDICE C – RELAÇÃO DO TRAÇO DO LOGARÍTMO

Queremos estabelecer a relação:

$$\text{Tr} \ln(-\bar{\not{p}} + m\mathbf{I}_{4 \times 4}) = 2 \ln(m^2 - \bar{p}^2). \quad (\text{C.1})$$

Começamos calculando os termos dos momentos:

$$\begin{aligned} \bar{\not{p}} &= \gamma^\mu p_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} p_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_1 + \\ &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} p_3 \\ \bar{\not{p}} &= \begin{pmatrix} i\omega_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\omega_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\omega_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 & 0 \\ -p_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ip_2 \\ 0 & 0 & ip_2 & 0 \\ 0 & ip_2 & 0 & 0 \\ -ip_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_3 \\ -p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \bar{\not{p}} &= \begin{pmatrix} i\omega_n & 0 & p_3 & p_1 - ip_2 \\ 0 & i\omega_n & p_1 + ip_2 & -p_3 \\ -p_3 & -p_1 + ip_2 & -i\omega_n & 0 \\ -p_1 - ip_2 & p_3 & 0 & -i\omega_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Dessa forma

$$-\bar{\not{p}} + m\mathbf{I}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} -i\omega_n + m & 0 & -p_3 & -p_1 + ip_2 \\ 0 & -i\omega_n + m & -p_1 - ip_2 & p_3 \\ p_3 & p_1 - ip_2 & i\omega_n + m & 0 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & i\omega_n + m \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Agora faremos uso de uma identidade frequentemente usada em livros-texto de Teoria de Campos a Temperatura Finita que relaciona o logaritmo do traço de uma matriz com o logaritmo de seu determinante. Tal identidade é um corolário do seguinte teorema ((HALL, 2015), teorema 2.12):

Teorema 2. *Seja X uma matriz $N \times N$ com entradas em \mathbb{C} . Então:*

$$\det(e^X) = e^{\text{Tr}X}.$$

Demonstração. Ver (HALL, 2015). □

Uma consequência direta desse teorema é

Corolário 1. *Seja A uma matriz $N \times N$ com entradas em \mathbb{C} . Então:*

$$\ln \det A = \ln \text{Tr}A.$$

Demonstração. Defina $e^X = A$, então $\ln(e^X) = X = \ln A$ e o resultado segue imediatamente do teorema 2. □

Agora podemos fazer uso do Corolário 1 e estabelecer a seguinte identidade:

$$\text{Tr} \ln(-\bar{p} + m\mathbb{1}_{4 \times 4}) = \ln \det(-\bar{p} + m\mathbb{1}_{4 \times 4}). \quad (\text{C.4})$$

Para calcularmos o determinante, fazemos uso do teorema de expansão de Laplace (POOLE, 2011):

Teorema 3. *Seja A uma matriz $N \times N$ com entradas em \mathbb{C} . O determinante de A , com $N \geq 2$ pode ser dado por:*

$$\det A = \sum_{j=1}^N a_{ij} C_{ij} \text{ (expansão do cofator ao longo da } i\text{-ésima linha)}$$

ou

$$\det A = \sum_{i=1}^N a_{ij} C_{ij} \text{ (expansão do cofator ao longo da } j\text{-ésima coluna),}$$

Onde $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ é o cofator de A e M_{ij} é o menor, definido como o determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$, advinda de A , pela remoção da i -ésima linha e j -ésima coluna.

Demonstração. Veja seção 4.2 em (POOLE, 2011). □

Podemos prosseguir com o cálculo do determinante:

$$\begin{aligned}
\det(-\bar{\not{p}} + m\mathbb{1}_{4\times 4}) &= (-i\omega_n + m) \begin{vmatrix} -i\omega_n + m & -p_1 - ip_2 & p_3 \\ p_1 - ip_2 & i\omega_n + m & 0 \\ -p_3 & 0 & i\omega_n + m \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & -p_1 - ip_2 & p_3 \\ p_3 & i\omega_n + m & 0 \\ p_1 + ip_2 & 0 & i\omega_n + m \end{vmatrix} \\
&- p_3 \begin{vmatrix} 0 & -i\omega_n + m & p_3 \\ p_3 & p_1 - ip_2 & 0 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 & i\omega_n + m \end{vmatrix} - (-p_1 + ip_2) \begin{vmatrix} 0 & -i\omega_n + m & -p_1 - ip_2 \\ p_3 & p_1 - ip_2 & i\omega_n + m \\ p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-i\omega_n + m)(i\omega_n + m)^2 - (-p_1 - ip_2) [(p_1 - ip_2)(i\omega_n + m)] - p_3 [-p_3(i\omega_n + m)] \\
&+ p_3 \{ -(-i\omega_n + m)p_3(i\omega_n + m) + p_3 [-p_3^2 - (p_1 - ip_2)(p_1 + ip_2)] \} \\
&(-p_1 - ip_2) \{ (-i\omega_n + m)(i\omega_n + m)(p_1 + ip_2) + (-p_1 - ip_2) [-p_3^2 - (p_1 - ip_2)(p_1 + ip_2)] \} \\
&= (m^2 + \omega_n^2 + p^2)^2 = (m^2 - \bar{p}^2)^2.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Portanto,

$$\text{Tr} \ln(-\bar{\not{p}} + m\mathbb{1}_{4\times 4}) = \ln \det(-\bar{\not{p}} + m\mathbb{1}_{4\times 4}) = \ln [(m^2 - \bar{p}^2)^2] = 2 \ln(m^2 - \bar{p}^2). \tag{C.6}$$