

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá
2001



1110000455



***"O Efeito do Satélite Pan nos
Anéis da Falha
de Encke"***

MARCOS ALLAN FERREIRA GONÇALVES

146



O EFEITO DO SATÉLITE PAN NOS ANÉIS
DA FALHA DE ENCKE

MARCOS ALLAN FERREIRA GONÇALVES

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia de Guaratinguetá da
Universidade Estadual Paulista, para
a obtenção do título de Mestre em
Física.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Silvia Maria Giuliatti Winter

Guaratinguetá
2001



455

—455

24/01/02

R\$20,00

Doação

G635e

Gonçalves, Marcos Allan Ferreira

O efeito do satélite Pan nos anéis da Falha de Encke / Marcos Allan Ferreira Gonçalves. Guaratinguetá : [s.n.], 2001

110f. : il.

Bibliografia: f. 107-110

Inclui apêndice

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 1998.

Orientadora: Profª. Drª. Silvia Maria Giuliatti Winter

1. Mecânica Celeste I. Título

CDU 521.1 (043)

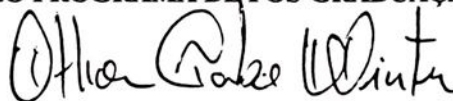
“O EFEITO DO SATÉLITE PAN NOS ANÉIS DA FALHA DE ENCKE”

MARCOS ALLAN FERREIRA GONÇALVES

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”**

ESPECIALIDADE: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof.ª Dr.ª SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER
Orientadora / Unesp-Feg



Prof. Dr. TADASHI YOKOYAMA
Unesp-Feg



Prof. Dr. DIETMAR WILLIAM FORYTA
UFPR/PR

Junho de 2001

DADOS CURRICULARES

MARCOS ALLAN FERREIRA GONÇALVES

NASCIMENTO	05.02.1971 – JANAÚBA/MG
FILIAÇÃO	Adelino da Costa Gonçalves Maria Aparecida Ferreira Gonçalves
1993/1998	Curso de Graduação Universidade Estadual Paulista - IBILCE – Campus de São José do Rio Preto
1999/2001	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, na Universidade Estadual Paulista – FEG – Campus de Guaratinguetá.

AGRADECIMENTOS

À Deus, como bem e fim de toda existência.

À minha orientadora, Prof. Dr.^a Maria Helena Caldas Winter, pela disponibilização e execução deste projeto. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria pouco mais do que um exercício.

À minha mãe Maria, o 'anjo' com quem fiz todos os estudos.

À Rosylene e Antônio Indício, os grandes responsáveis por minha vida maravilhosa.

À minha avó Laura, fonte de carinho.

Aos meus irmãos e sobrinhos, em especial ao Carlos (Bibi), pela força e incentivo.

Aos colegas de pós-graduação, que de várias formas colaboraram na execução deste projeto, em especial ao Renato pelo suporte na área computacional.

Aos professores da pós-graduação.

À Maria, Rosylene e Laura... luzes desta estrada chamada vida.

AGRADECIMENTOS

A Deus, sumo bem e fonte de toda essência.

À minha orientadora, *Prof.^a Dr.^a Silvia Maria Giuliatti Winter*, pela viabilização e execução deste projeto. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível.

À minha mãe Maria, o 'anjo' bom que me trouxe ao mundo.

A Rosylene e Antônio Inácio, os grandes responsáveis por minha vida universitária.

À minha avó Laura, fonte de carinho.

Aos meus irmãos e sobrinhos, em especial ao Carlos (Bolota), pela força e incentivo.

Aos colegas de pós-graduação, que de várias formas colaboraram na execução deste projeto, em especial ao Ernesto pelo suporte na área computacional.

Aos professores da pós-graduação.

Este trabalho contou com apoio da FAPESP (processo nº 99/11741-3) de 03/09/99 a 06/01/00.



"Que a força do mundo que tentou não me impede
de ver o que angústia. Que a morte de Deus que
me dá, não me impede de viver e amar a vida."

"Que não seja preciso ainda ver que uma
simples alegria possa me fazer esquecer a
existência."

Este trabalho contou com apoio da FAPESP (processo nº 99/11744-1) de 03/00 até
06/01

Sumário

1	Falhas de Enxerto	19
2	Diferentes Reações	24
2.1	Problemas Cerebrais: Pânico, Depressão e Crises	29
2.1.1	Episódios de Nervosismo	31
2.1.2	3 Ominosos de Jacobo	33
2.1.3	Problemas com os sentidos de equilíbrio, tato e audição	34
2.1.4	Atividade dos sentidos de equilíbrio	35
2.2	O medo	36
2.3	Libertação	39
2.4	Insatisfação	40
2.4.1	“... Que não seja preciso mais do que uma simples alegria para me fazer aquietar o espírito...”.	40
2.4.2	“Que a força do medo que tenho não me impeça de ver o que anseio. Que a morte de tudo que acredito, não me tape os ouvidos nem a boca...”.	41
2.4.3	Oswaldo Montenegro	41
2.4.4	“Que a força do medo que tenho não me impeça de ver o que anseio. Que a morte de tudo que acredito, não me tape os ouvidos nem a boca...”.	42
2.4.5	“Que a força do medo que tenho não me impeça de ver o que anseio. Que a morte de tudo que acredito, não me tape os ouvidos nem a boca...”.	42
2.4.6	“Que a força do medo que tenho não me impeça de ver o que anseio. Que a morte de tudo que acredito, não me tape os ouvidos nem a boca...”.	42
3	RESSONÂNCIAS	44

Sumário

1 Falha de Encke	19
2 Diferentes Regimes	28
2.1 Problema Circular, Planar, Restrito de 3 Corpos	29
2.1.1 Equações do Movimento	30
2.1.2 A Constante de Jacobi	33
2.1.3 Localização dos pontos de equilíbrio de Lagrange	34
2.1.4 Estabilidade dos pontos de equilíbrio	36
2.2 Formação de Ondas	41
2.3 Dinâmica das órbitas girino e de ferradura	43
2.4 Resultados numéricos	48
2.4.1 Centro Guiado	49
2.4.2 Simulações com o Centro Guiado	52
2.4.3 Região de Caos	56
2.4.4 Resultados numéricos	59
2.4.5 Discussão	62
3 RESSONÂNCIAS	64

3.1	Introdução	64
3.1.1	Teoria	65
3.1.2	Ressonância de Corrotação	67
3.1.3	Ressonância de Lindblad	69
3.1.4	Ressonâncias determinadas na falha de Encke	71
3.2	Torques na Falha de Encke	73
3.2.1	Simulação numérica	74
3.2.2	Efeito de um anel estreito nas bordas da falha de um anel principal	78
3.2.3	Discussão	81
4	Efeito do Arrasto de Poynting-Robertson nas partículas da Falha de Encke	84
4.1	Introdução	84
4.2	Pressão de Radiação Solar e Arrasto de Poynting-Robertson para o caso de órbitas planetocêntricas	85
4.3	Variação em a e e	88
4.4	Simulação numérica	89
4.4.1	Discussão	91
5	Discussão Geral	98
6	Apêndice A	101
7	Referências Bibliográficas	107

Lista de Figuras

- 1.1 Imagens mostrando os anéis internos na Falha de Encke. Na imagem a) FDS 4499014, vemos o anel interno e na imagem b) FDS 4499350 vemos o anel central. 24
- 1.2 FDS 4390459 e FDS 4390523, Imagens da Falha de Encke utilizadas por Showalter (1991) para identificar a existência do satélite Pan, 18° satélite de Saturno, conforme mostra o zoom no canto superior direito da imagem. 25
- 1.3 Reproduzido de Ferrari & Brahic (1997), ilustra a região fotografada pelas Voyagers 1 e 2. A região onde estão os paralelogramas, é a região fotografada pela Voyager 1, a região com linha é da Voyager 2 e o círculo indica a posição do satélite Pan. A numeração superior e inferior identificam as imagens das Voyagers 2 e 1, respectivamente. 26
- 2.1 Ilustração do sistema de referência inercial (ξ, η) para o sistema girante (x, y) onde μ_1, μ_2 indicam as massas dos corpos primários e P a partícula (extraído de Murray & Dermott, 1999). 30
- 2.2 Ilustra os pontos de equilíbrio de Lagrange L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 . . . 36
- 2.3 Mostra a borda externa da Falha de Encke perturbada pelo satélite Pan. As partículas se encontram com semi-eixo maior 133748 km, a mais interna, e as outras 1 km acima até 133758 km. Normalizando a distância até o satélite Pan igual a 1, a borda considerada encontra-se a aproximadamente 162 km do satélite. 42
- 2.4 Ilustração mostrando o comportamento de uma partícula próxima a um satélite. Quando do encontro com a partícula, o satélite exerce um impulso sobre a partícula que resultará na formação de uma onda senoidal. 43

- 2.5 Descreve a curva de velocidade zero para $C_J = 3.0000000098$. Este valor da constante de Jacobi foi obtido da simulação da partícula localizada em semi-eixo maior $a_p = 133588 \text{ km}$ e excentricidade $e_p = 0$ e $e_s = 10^{-4}$. O ângulo de soltura da partícula é $\theta_p = 3^\circ$, levando-se em consideração a razão de massa satélite-planeta como sendo 10^{-11} . A posição do satélite, na figura, é (0, 1). 47
- 2.6 Mostra a partícula perturbada pelo satélite em órbita de ferradura. A partícula se encontra a 17 km acima do semi-eixo maior do satélite, este semi-eixo maior pode ser considerado o limite da ferradura com a região caótica pois, colocando a partícula a 18 km acima do semi-eixo maior do satélite, quando da aproximação a partícula é lançada para a região caótica. Nesta simulação, a partícula possui um ângulo de fase inicial $\theta_p = -3^\circ$ em relação ao satélite. 49
- 2.7 Nesta simulação a partícula mais interna se encontra com semi-eixo maior $a = 133585 \text{ km}$, e a partícula externa com semi-eixo maior $a = 133595 \text{ km}$, ou seja, as partículas estão a no máximo 13 km do semi-eixo maior do satélite perturbador. O ângulo em que as partículas foram inicialmente soltas é $\theta_p = 3^\circ$ em relação ao satélite. O zoom mostra a região próxima ao satélite. 50
- 2.8 Relação entre a anomalia verdadeira f e a anomalia média M na aproximação do centro guiado. G denota o centro guiado, P a partícula, F o foco e F' o foco vazio. O centro guiado se move em um círculo de raio a centrado em F (extraído de Murray & Dermott, 1999). 50
- 2.9 A variação de (a) semi-eixo maior e de (b) raio orbital da partícula localizada a aproximadamente 20 km do satélite por um tempo de 800 anos. As condições iniciais são semi-eixo maior $a_p = 133603 \text{ km}$ e $a_s = 133583 \text{ km}$ e ângulo de fase inicial $\theta_p = 3^\circ$ e $\theta_s = 0$ da partícula e do satélite, respectivamente. 52
- 2.10 Posições da partícula devido a perturbação do satélite, por ocasião de sua aproximação. As condições iniciais são semi-eixo maior $a_p = 133603 \text{ km}$ e $a_s = 133583 \text{ km}$ e ângulo de soltura $\theta_p = 3^\circ$ e $\theta_s = 0$ da partícula e do satélite, respectivamente. 53
- 2.11 Posições do satélite a cada encontro com a partícula durante a evolução para o tempo de 120 anos. Temos o 1º e o 11º encontro nas coordenadas $(x, y) = (0, 0.9999)$ e assim por diante, até se completar um período de revolução em torno do centro guiado, conforme ilustra a figura (2.9). 54

- 2.12 Ilustração mostrando a preservação da periodicidade da partícula, onde o raio orbital da partícula está localizada a aproximadamente 20 km do satélite. As condições iniciais são semi-eixo maior $a_p = 133603 \text{ km}$ e $a_s = 133583 \text{ km}$ e ângulo de fase $\theta_p = -45^\circ$ e $\theta_s = 0$ da partícula e do satélite, respectivamente. 55
- 2.13 Variação do semi-eixo maior e do raio orbital da partícula localizada a aproximadamente 40 km do satélite. Ambos com órbitas excêntricas por um período de tempo de 150 anos. O ângulo de fase que os separa é de 3° em a) e 270° em b), respectivamente. . 55
- 2.14 Ilustração da posição da partícula quando sua excentricidade é igual a do satélite, $e_p = e_s = 10^{-4}$, e os ângulos de fase são $\theta_p = 3^\circ$ e $\theta_s = 0^\circ$. O movimento da partícula permanece confinado, porém, existe variação na excentricidade e consequentemente a variação em seu raio orbital, aumentando a possibilidade de colisões. 56
- 2.15 Ilustração da posição da partícula quando sua excentricidade igual é igual a do satélite, $e_p = e_s = 10^{-4}$, e os ângulos de fase são $\theta_p = 270^\circ$ e $\theta_s = 0^\circ$. A figura (2.15) mostra a partícula em órbita de ferradura, com uma variação maior na excentricidade da partícula e consequentemente a variação do seu raio orbital, aumentando ainda mais a possibilidade de colisões. 57
- 2.16 Diferentes variações dos semi-eixos maiores e dos raios orbitais de partículas colocadas em posições intermediárias das órbitas de ferradura. As partículas são colocadas a 5 km, 10 km e 15 km do satélite, respectivamente, para condições iniciais de $\theta_p = -3^\circ$ e $e_s = 10^{-4}$ com $e_p = 0$ e $e_s = 10^{-4}$ 58
- 2.17 Variação da distância d (em km) entre as ressonâncias (linha tracejada) e da amplitude da onda (linha cheia). O zero indica o semi-eixo maior do satélite, localizado no centro da Falha de Encke. . . 59
- 2.18 Esta figura mostra três partículas localizadas dentro da falha, distribuídas na órbita de ferradura, na região caótica e na borda externa da falha com excentricidade do satélite $e_{sat} = 0$ 60
- 2.19 Esta figura mostra as três partículas distribuídas com as mesmas condições das partículas da figura (2.20) porém, com a excentricidade do satélite $e_{sat} = 10^{-4}$ 60

- 2.20 Diferentes regiões que compõem a Falha de Encke: região de feradura, caos e formação de ondas. Para esta simulação, foram utilizadas 150 partículas distribuídas à partir do semi-eixo maior próximo ao satélite $a_p = 133585 \text{ km}$ até o semi eixo-maior da borda externa $a_p = 133746 \text{ km}$ e até o semi-eixo maior da borda interna $a_p = 133424 \text{ km}$, e compreendem aproximadamente a largura da Falha de Encke segundo os dados das Voyagers. 61
- 2.21 Simulações mostrando a evolução da partícula com semi-eixo maior variando entre $a_p = 133800 \text{ km}$ e $a_p = 133950 \text{ km}$, ângulo de fase $\theta_p = 3^\circ$ e excentricidade inicial $e_p = 0$. A excentricidade do satélite é $e_s = 10^{-4}$. Em a), b) e c) a partícula está localizada a 54 km, 154 km e 194 km dentro da borda externa do anel A, respectivamente. 62
- 3.1 Ilustração do confinamento azimutal de uma partícula de anel em ressonância de corrotação com um satélite externo. Este exemplo representa a ressonância 3:2 (adaptado de Murray & Dermott, 1994). 68
- 3.2 Ilustração da dinâmica da ressonância de Lindblad (3:2) de uma partícula de anel em rotação com o mesmo centro de referência do satélite perturbador (adaptado de Murray & Dermott, 1994). . . 70
- 3.3 Ilustração da localização dos anéis da Falha de Encke e das ressonâncias de Corrotação e de Lindblad devido aos satélites Prometeu e Atlas. Nota-se na figura que tanto uma ressonância de Lindblad como de corrotação, devido ao satélite Atlas, encontra-se próxima a borda do anel interno. 72
- 3.4 Os resultados apresentados mostram uma pequena variação no semi-eixo maior da partícula (da ordem de 12 quilômetros). Porém, essa variação é devido ao achatamento do planeta. Os dados iniciais apresentados referentes ao satélite Atlas são $a_A = 137670 \text{ km}$ e $e_A = 10^{-4}$, e referentes a partícula $a = 133499 \text{ km}$ e $e = 0$. Durante a simulação foi variado o ângulo de fase da partícula em $\theta = -3^\circ$, $\theta = -15^\circ$ e $\theta = -45^\circ$ 76
- 3.5 Simulação com as mesmas condições iniciais de (3.4), exceção feita ao achatamento, considerado $J_2 = 0$ a partícula deixa de sofrer variações. 76

- 3.6 Os resultados apresentados mostram uma pequena variação no semi-eixo maior da partícula (da ordem de 12 quilômetros). Porém, essa variação é devido ao achatamento do planeta. Os dados iniciais apresentados são mantidos em relação a simulação mostrada em (3.4), mudando somente o semi-eixo maior da partícula, $a = 133549$ km. 77
- 3.7 Simulação com as mesmas condições iniciais de (3.6), exceção feita ao achatamento, considerado $J_2 = 0$ a partícula deixa de sofrer variações. 77
- 3.8 Simulação considerando a partícula em semi-eixo maior $a_p = 133499$ km, com ângulos de fase para $\theta_p = -3^\circ$ e $\theta_p = -15^\circ$, para uma razão de massa do satélite $\mu = 10^{-7}$. Com essa razão de massa para Atlas, o semi-eixo maior da partícula sofre variação de aproximadamente 50 km. 78
- 3.9 Pode-se verificar nesta simulação a variação do semi-eixo maior da partícula, para diferentes ângulos de fase entre o satélite Pan e a partícula, $\theta_p = -3^\circ$, $\theta_p = -15^\circ$ e $\theta_p = -45^\circ$. As condições iniciais são semi-eixo maior $a_p = 133499$ km e $a_s = 133583$ km, excentricidade $e_p = 0$ e $e_s = 10^{-4}$. Pela simulação, a partícula tende a ser espalhada logo no primeiro encontro com o satélite. . . 79
- 3.10 Foi considerado o problema de quatro corpos. Na simulação a excentricidade dos dois satélites é igual a 10^{-4} . Pelos resultados aqui apresentados, podemos verificar que a ação de Atlas apenas consegue minimizar a ação do satélite Pan que está mais próximo do anel. 80
- 3.11 Reproduzido de Ferrari & Brahic (1997), ilustra a região fotografada pelas Voyagers 1 e 2. A região onde estão os paralelogramas, é a região fotografada pela Voyager 1, a região com linha é da Voyager 2 e o círculo indica a posição do satélite Pan. 82
- 4.1 Caminho da partícula se movendo em órbita de ferradura em torno de anel-satélite de razão de massa $\frac{m_{sat}}{M_p} = 10^{-9}$ (caso para órbita circular). O semi-eixo maior a é plotado em função da separação angular θ da partícula e do satélite. A linha pontilhada refere-se ao caminho da partícula com a ausência do arrasto, e a linha escura o efeito de uma força de arrasto é levado em consideração. Ambos os caminhos são simétricos em torno da linha onde a é igual a 1. . 85

4.2	Esta simulação mostra a variação do semi-eixo maior em função do tamanho da partícula para o caso do anel central e do anel interno da Falha de Encke. As duas curvas estão sobrepostas devido à proximidade dos anéis. Verificou-se que uma partícula de 1μ leva aproximadamente 3 anos para deixar o anel.	89
4.3	Esta simulação mostra a variação do semi-eixo maior em função do tamanho da partícula para o caso do anel central e do anel interno da Falha de Encke. As duas curvas estão sobrepostas devido à proximidade dos anéis. Verificou-se que uma partícula de 50μ leva aproximadamente 100 anos para deixar o anel.	90
4.4	Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula de raio $s = 1\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$	91
4.5	Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula de raio $s = 3\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$	92
4.6	Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula de raio $s = 5\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$	92
4.7	Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula de raio $s = 10\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$	93
4.8	Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula, utilizando o segundo caso proposto, de raio $s = 1\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$. Esta partícula é a mais afetada devido a força atuante, chegando a não completar a ferradura em alguns casos, mas ainda é mantida em confinamento neste intervalo de tempo.	93
4.9	Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula, utilizando o 2º caso proposto, de raio $s = 3\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$. Para essas partículas, apesar das oscilações, o modelo de confinamento proposto por Dermott é confirmado.	94

- 4.10 Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula, utilizando o 2º caso proposto, de raio $s = 5\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$. Esta partícula sofre menor variação da força atuante de arrasto de Poynting-Robertson. Ela Mantem-se confinada em ferradura. 94
- 4.11 Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula, utilizando o segundo caso proposto, de raio $s = 10\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$. Esta é a partícula que menos sofre variação devida a força atuante. Ela mantém-se confinada em ferradura. 95
- 4.12 Simulação mostrando as oscilações no semi-eixo maior da partícula de $s = 3\mu m$, bem como a variação do raio e do ângulo θ em relação ao tempo para a) $\theta = 15^\circ$ e b) $\theta = 90^\circ$ 95
- 4.13 Simulação mostrando as oscilações no semi-eixo maior da partícula de $s = 3\mu m$, bem como a variação do raio e do ângulo θ em relação ao tempo para a) $\theta = 180^\circ$ e b) $\theta = 270^\circ$ 96
- 4.14 Simulação mostrando o confinamento da partícula de $10\mu m$, podemos verificar pouca oscilação no semi-eixo maior da partícula, tanto em relação ao ângulo θ em função do tempo para a) $\theta = 15^\circ$ e b) $\theta = 90^\circ$ 96
- 4.15 Simulação mostrando o confinamento da partícula de $10\mu m$, podemos verificar pouca oscilação no semi-eixo maior da partícula, tanto em relação ao ângulo θ em função do tempo para a) $\theta = 180^\circ$ e b) $\theta = 270^\circ$ 97
- 6.1 (FDS 3494018) Imagem feita pela Voyager 1, mostra o anel A de Saturno, a Falha de Encke e o anel F. Esta imagem, feita de um ângulo de 142.3 graus, possui um tempo de exposição de 0.96 segundos (cortesia C. D. Murray). 102
- 6.2 FDS 3495410 - Imagem da Voyager 1, onde pode-se verificar o anel central. Imagem com ângulo de fase de 130.3 graus e tempo de exposição de 1.92 segundos (cortesia C.D. Murray). 102
- 6.3 FDS 3495655 - Imagem da voyager 1, onde verificamos a Falha de Encke, e contornando o anel A, o anel F. Esta imagem com ângulo de fase de 148.3 , possui um tempo de exposição de 2.88 segundos 103

- 6.4 FDS 4397032 - Imagem da Voyager 2, mostrando a Falha de Encke, a Falha de Keeler, próximo a borda externa do anel A, e o anel F. Esta imagem com ângulo de fase 31.0 graus, possui um tempo de exposição de 0.96 segundos. 103
- 6.5 FDS 4399014 - Imagem da Voyager 2, onde pode-se verificar o anel interno da Falha de Encke. Esta imagem com ângulo de fase de 20.6 graus, possui um tempo de exposição de 0.96 segundos. . . . 104
- 6.6 FDS 4399014 (Ampliada) - Imagem da Voyager 2, onde pode-se verificar o anel interno da Falha de Encke. Esta imagem ampliada com ângulo de fase de 20.6 graus, possui um tempo de exposição de 0.96 segundos. 104
- 6.7 FDS 4399350 - Imagem da Voyager 2, onde pode-se ver o anel central da Falha de Encke. Esta imagem com ângulo de fase de 48.3 graus, possui um tempo de exposição de 0.72 segundos. . . . 105
- 6.8 FDS 4399350-b (Ampliada) - Imagem da Voyager 2, ampliação da FDS 4399350, onde pode-se ver os arcos do anel central da Falha de Encke. Com ângulo de fase de 48.3 graus, esta imagem possui um tempo de exposição de 0.72 segundos (cortesia C.D. Murray). 105
- 6.9 FDS 4400747 - Imagem da Voyager 2, mostra o anel interno da Falha de Encke. Com ângulo de fase de 145.7 graus, possui um tempo de exposição de 0.72 segundos (cortesia C.D. Murray). . . . 106
- 6.10 FDS 4400759 - Imagem da Voyager 2, onde pode-se notar o anel interno da Falha de Encke. Este não é um anel homogêneo como pode-se notar na imagem. Com ângulo de fase de 145.7 graus, possui um tempo de exposição de 0.96 segundos. 106

Gonçalves, M. A. F. *O Efeito do Satélite Pan nos Anéis da Falha de Encke*. Guaratinguetá, 2001, p. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia, Câmpus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

Resumo

A Falha de Encke, localizada no anel A de Saturno, contém 2 anéis estreitos e um satélite denominado Pan, coorbital ao anel central. Neste trabalho foram analisadas as perturbações causadas pelo satélite Pan, responsável pela formação de diferentes regimes na falha. Esse satélite produz ondas nas bordas do anel A e provoca regiões de ferradura e caótica. Os efeitos desse satélite, em órbita excentrica reduz a largura do anel central e aumenta a região caótica.

Para verificar a existência do anel interno, localizado na região caótica, foram verificadas ressonâncias existentes na Falha de Encke entre uma partícula e os 18 satélites de Saturno conhecidos até então. Apesar da ressonância devido a Atlas estar localizada próxima a borda externa do anel interno, ela não é responsável por sua existência, e o tempo de vida desse anel é menor que a idade do Sistema Solar, devido às colisões que tendem a espalhar os anéis estreitos.

O anel central tem uma grande concentração de pequenas partículas, que são perturbadas por forças dissipativas, como exemplo o arrasto de Poynting-Robertson, responsável pelo decaimento orbital das partículas. No entanto, um satélite coorbital pode confinar partículas em órbita de ferradura. Esse é um dos modelos de confinamento para explicar a estabilidade de anéis estreitos. Simulações numéricas confirmam esse mecanismo e mostram que a largura das órbitas de ferradura dependem do tamanho da partícula.

Palavras-chaves: Dinâmica de anéis Planetários; Ressonância; Arrasto de Poynting-Robertson; Simulações numéricas.

Gonçalves, M. A. F. *The effects of the Satellite Pan in the Encke Gap ringlets*. Guaratinguetá, 2001, p. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia, Câmpus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

ABSTRACT

The Encke Gap, located in the A ring of Saturn, keeps two narrow ringlets and, at least, one satellite named Pan, coorbital to the central ringlet. In this work has been analyzed the Encke Gap ringlets and the perturbations caused by the satellite Pan, responsible for the formation of different regimes in the Gap. Pan can produce waves in the edges of the A ring and gives rise to chaotic and horseshoe regions. The effects of this satellite, on an eccentric orbit, can reduce the width of the central ringlet and increase the width of the chaotic region.

In order to analyze the existence of the inner ringlet, which lies in the chaotic region, resonances positions were derived between a particle localized in the Encke Gap and the Saturnian satellites. Despite the resonance due to Atlas, lying close to the outer edge of the inner ringlet, the lifetime of this ring is less than the age of the Solar System.

The central ringlet has a large population of small particles which is disturbed by dissipative forces, such as the Poynting-Robertson Drag which induces the orbital decay of the particle. However a coorbital satellite can keep the particle in a horseshoe orbit. This is one of the confinement models propose to explain the stability of narrow rings. Numerical simulation have shown that the width of the horseshoe orbits depends on the size of the particle and for a long period of time this configuration is stable.

Keywords: Planetary Rings Dynamics, Resonance, Poynting-Robertson Drag, Numerical simulation.

Capítulo 1

Falha de Encke

É sabido que os quatro maiores planetas do sistema solar possuem sistema de anéis. Essa afirmação para Júpiter, Urano e Netuno é um fato recente, ao contrário de Saturno que data desde a era Galileo, e desde então, é o que realmente tem chamado a atenção.

Desde 1610, quando os exuberantes anéis de Saturno foram observados pela primeira vez pelo italiano Galileo Galilei, usando para isto uma rudimentar luneta construída por ele mesmo, muito se tem aprendido sobre o sistema de anéis devido ao grande interesse que esses conseguiram despertar na comunidade científica desde então. A natureza, do então fenômeno foi, originalmente, interpretado como duas luas orbitando o planeta. Porém, por volta de 1612, Galileo provoca surpresas ao mostrar que tal fenômeno havia desaparecido e somente reaparecendo mais tarde. Somente em 1659, Huygens atribuiu corretamente que a variação da aparência das observações tratava-se de um disco rígido em torno do planeta. Novamente a teoria do fenômeno viria a mudar com Maxwell em 1859, provando matematicamente que o anel não era sólido, e sim, composto por partículas orbitando o planeta.

Sabemos que os principais anéis de Saturno apresentam vários anéis estreitos situados em suas falhas. Podemos citar a Falha de Maxwell, no anel C, abrigando o anel Titã e a Falha de Encke, no anel A, com dois anéis, o central e o interno. A tabela (1.1) mostra a composição do sistema de anéis de Saturno, com suas localizações radiais a partir do centro de Saturno, suas dimensões e profundidade ótica (σ) dos anéis (Cuzzi *et al.*, 1984).

A profundidade ótica (σ) é a maneira de medir a intensidade de luz capaz de atravessar um meio consistente de partículas, decrescendo de forma exponencial com a distância sem ser interrompida sua propagação, ou seja, a quantidade de luz que consegue atravessar o meio de um lado a outro.

Nome	Localização (km)	Largura (km)	σ
Anel D	67000-74500	7500	0.01
Anel C	74500-92000	17500	0.08
Falha de Maxwell	87500	270	
Anel B	92000-117500	25500	1.21
Divisão de Cassini	117500-122200	4700	0.12
Anel A	122200-136800	14600	0.70-0.57
Falha de Encke	133570	325	0.70
Falha de Keeler	136530	35	
Anel F	140185	30-500	0.01-1
Anel G	166000-173000	7000	$10^{-6} - 10^{-8}$
Anel E	180000-480000	300000	$10^{-6} - 10^{-7}$

Tabela 1.1 - Mostra a composição do sistema de anéis de Saturno

A dinâmica dos anéis planetários estreitos difere da dinâmica dos anéis largos, pois esses anéis têm um tempo de vida menor do que a idade do sistema solar, devido às colisões que tendem a espalhar os anéis estreitos. Os anéis de Urano desafiam este processo, pois eles têm as bordas bem definidas e, apesar dos satélites pastores confinarem o anel ϵ , os outros anéis não estão em ressonância com nenhum satélite ‘conhecido’ de Urano. Murray & Thompson (1990) sugeriram que satélites, não detectados pelas Voyagers, poderiam ser os responsáveis pelo confinamento desses anéis. Levando-se em conta o princípio da não casualidade, ou seja, os estreitos anéis existem e necessitam de uma certa estrutura que funcione como uma fonte que possa suprir o material existente em seu interior e os mantêm confinados.

Antes de apresentarmos algumas imagens é importante ressaltarmos alguns pontos relevantes relacionados ao tratamento de imagens enviadas pelas sondas. As sondas Voyager 1 e 2 fazem parte de uma classe de sondas destinadas à exploração do Sistema Solar exterior, carregando equipamentos para a realização de um total de onze investigações científicas, entre elas a obtenção de imagens. As câmeras e instrumentos necessários para as imagens estão fixos em uma plataforma, que inclui também sensores responsáveis pela obtenção de outros dados. Essa plataforma pode rotacionar em dois eixos, elevação e azimute, e os sensores sempre apontam em uma direção comum. Os três computadores

a bordo estão interconectados e controlam a orientação, a operação dos instrumentos e o movimento da plataforma. Um desses computadores, o "Flight Data System" (FDS) é o responsável pelo controle das imagens. Existem duas câmeras: a "narrow angle camera" (NA) com um campo de visão de $0^{\circ}.42$ e a "wide angle camera" (WA) com campo de visão de $3^{\circ}.21$. Os eixos dessas duas câmeras são concêntricos, apontando na mesma direção. Portanto, a imagem tirada pela NA está contida no centro da imagem tirada pela WA câmera. O tempo de exposição é controlado por computador, com duração de 0.05 a 15 segundos, dependendo do brilho do corpo a ser fotografado. A imagem, sem tratamento, é disposta em uma matriz formada por (800×800) de pixels ("picture elements"). A intensidade de luz do corpo medida em cada pixel é designada por um número (DN) que varia de 0 a 255. Para determinar a localização do corpo é necessário navegar a imagem para corrigir os erros de apontamento das câmeras. Esses erros são originários da vibração e atitude das câmeras e de incertezas na trajetória das sondas. Essas correções são facilmente realizadas se as imagens contêm corpos com localização já conhecida, como, por exemplo, estrelas ou a borda do planeta ou de um anel. Outra correção que se faz necessária diz respeito à distorção geométrica na imagem causada pelos instrumentos, que após essa correção a imagem passa a ser representada por uma matriz formada por (1000×1000) pixels.

As imagens que discutiremos foram enviadas pelas sondas espaciais Voyagers 1 e 2 e encontram-se no apêndice A deste trabalho e compõem um conjunto de 19 imagens (cortesia de C. Murray). As imagens são representadas pelas iniciais FDS acompanhadas por um número, que quando iniciadas pelo número 3 representam as imagens enviadas pela Voyager 1 e as que se iniciam pelo número 4 são imagens enviadas pela Voyager 2. Estas imagens apresentam uma resolução de 50 km por pixel.

A existência da divisão de Encke, foi estabelecida pelas observações de um eclipse do satélite Iapetus com os anéis (Reitsema, 1978) e confirmado pela Pioneer 11 (Gehrels *et al.*, 1980). As imagens das Voyagers 1 e 2, que alcançaram Saturno em 12 de novembro 1980 e 25 de agosto de 1981, respectivamente (Ferrari & Brahic, 1997) revelaram as bordas da Falha de Encke, porém não se tratava de uma falha sem estrutura interna. Os dados enviados pelas sondas Voyagers 1 e 2 revelaram ainda, as bordas bem definidas da Falha de Encke, como pode ser visto nas imagens FDS 4396845, FDS 4396845, FDS 3493608, FDS 3493608, FDS 3495357 e FDS 4397032, seus dois anéis estreitos, fracos, aglomerados e

retorcidos e o décimo oitavo satélite de Saturno, denominado Pan (‘deus’ grego dos pastores) (Showalter, 1991).

A Falha de Encke é a segunda maior falha dentre os anéis mais densos de Saturno (A, B e C) com aproximadamente 325 km de largura, sendo apenas menor que a divisão de Cassini, que separa os anéis A e B. Pan mantém a falha, cria ondas em suas bordas, gera rastros no material do anel, e provavelmente influencia um anel retorcido não circular no centro da falha (Horn, Showalter & Russel, 1996). Esse anel pode ser visto ao analisarmos as imagens FDS 4399350, FDS 3495655, FDS 3495416 e FDS 3495410. A influência de Pan talvez possa afetar o anel interno que está localizado numa região considerada caótica devido a sua perturbação. Esse anel pode ser visto ao analisarmos as imagens FDS 4400759, FDS 4400747, FDS 4399014, FDS 4397032.

O anel interno, identificado pelo subscrito (*i*), está localizado aproximadamente à 50 km da borda interna da Falha, com semi-eixo maior $a_i \approx 133474$ km e excentricidade $e_i \geq 1.1 \pm 0.3 \times 10^{-4}$. O anel central, identificado pelo subscrito (*c*), é coorbital ao satélite Pan e está no semi-eixo maior $a_c \approx 133583$ km e excentricidade $e_c < 0.9 \pm 0.3 \times 10^{-4}$, (Ferrari & Brahic, 1997). Estes por sua vez, são descontínuos e aglomerados (Smith *et al.*, 1982).

A tabela 1.2 apresenta os elementos orbitais dos anéis estreitos (Ferrari & Brahic, 1997) e de Pan (Showalter, 1991), onde *a* é o semi-eixo maior, *e* é a excentricidade e *n* o movimento médio. A massa de Pan é da ordem de 1.0×10^{-11} da massa do planeta, admitindo um satélite com 10 km de raio e densidade de superfície volumétrica de 1.2 g/cm^3 .

Parametros	Anel central	Anel interno	Pan
<i>a</i> (km)	133583 ± 10	133483 ± 10	133583 ± 10
<i>e</i>	$0.9 (\pm 0.3) \times 10^{-4}$	$1.1 (\pm 0.3) \times 10^{-4}$	0
<i>n</i> (graus/dia)	626.04 (±0.08)	626.74 (±0.07)	626.04 (±0.08)

Tabela 1.2 - Paramêtros referentes às estruturas encontradas na Falha de Encke

As estruturas de pequenos anéis retorcidos, no anel F e na Falha de Encke, são provavelmente uma manifestação das perturbações gravitacionais, devido ao efeito provocado pelos satélites próximos.

As estruturas e propriedades das partículas dos anéis de Saturno são

obtidas a partir de observações feitas pelas sondas espaciais Voyagers 1 e 2 e dos dados de outros instrumentos de observação. As partículas do anel são primariamente formadas de gelo sujo, entretanto, sua possível composição pode variar em diferentes regiões do material, podemos citar como exemplo ferro (Cuzzi *et al.*, 1984). Segundo o trabalho de Ferrari & Brahic (1997), parte do material existente nos anéis internos à Falha de Encke, difere do material existente no anel A. Uma das possibilidades pode ser devido a disruptura de pequenas luas existentes dentro da Falha e não detectadas pelas sondas Voyagers, ou bombardeamento de meteoros e cometas ou ainda por colisões provenientes das bordas do anel A de Saturno. Essas partículas variam em seus tamanhos, que vão desde 1 cm até 5 m de raio. As estruturas dos anéis são, em geral, dominadas pela dinâmica gravitacional e por colisões (Cuzzi *et al.*, 1984).

A população de partículas dos anéis internos da Falha de Encke é formada por mistura de poeira ($< 20 \mu\text{m}$) e partículas ($> 20 \mu\text{m}$). Aproximadamente 80% dessa população é formada por 'fração' de poeira ($< 0.1 \mu\text{m}$) (Ferrari & Brahic, 1997).

O material do anel interno pode ser composto por partículas migradas do anel central (Ferrari & Brahic, 1997). Para essa hipótese, pode-se levar em consideração o 'escape' das partículas devido à perturbação de Pan ou do arrasto de Poynting-Robertson devido à absorção e reemissão não isotrópica de radiação solar que faz decair a órbita da partícula.

Distorções em arcos estão associados com aglomerados locais do anel, devido à perturbação de satélites próximos. Segundo Ferrari & Brahic (1997) estes aglomerados estão associados a objetos com 2 a 3 km de raio e internos ao anel. Essas distorções podem ser vistas ao se analisar as imagens das sondas espaciais Voyagers 1 e 2. Na escala de intervalo longitudinal $[317.6^\circ, 319^\circ]$ podemos ver estas distorções no anel interno na imagem FDS 4399014 onde atinge um comprimento de aproximadamente 5 km entre aglomerados. Em relação ao anel central, estas distorções podem ser vistas ao analisar a imagem FDS 4399350 com intervalo longitudinal $[89.8^\circ, 90.8^\circ]$ onde vemos as distorções no anel central. Estas distorções são associadas com os aglomerados e atingem um comprimento de aproximadamente 15 km.

Os dois anéis estreitos da Falha de Encke apresentam estruturas semelhantes as do anel F. Esses anéis têm ao longo de sua extensão aglomerados de

partículas, formação de dobras, além das ondas provocadas por satélites próximos.

A detecção de ondas ao longo das bordas da Falha por Cuzzi & Scargle (1985) e dos rastros no anel A por Showalter *et al.* (1986), foram o grande passo para a descoberta do pequeno satélite, Pan, orbitando a um raio de 133583 km, coincidente com o raio do estreito anel central.

Na figura (1.1), FDS 4399014 e FDS 4399350, podemos ver os anéis da Falha de Encke.

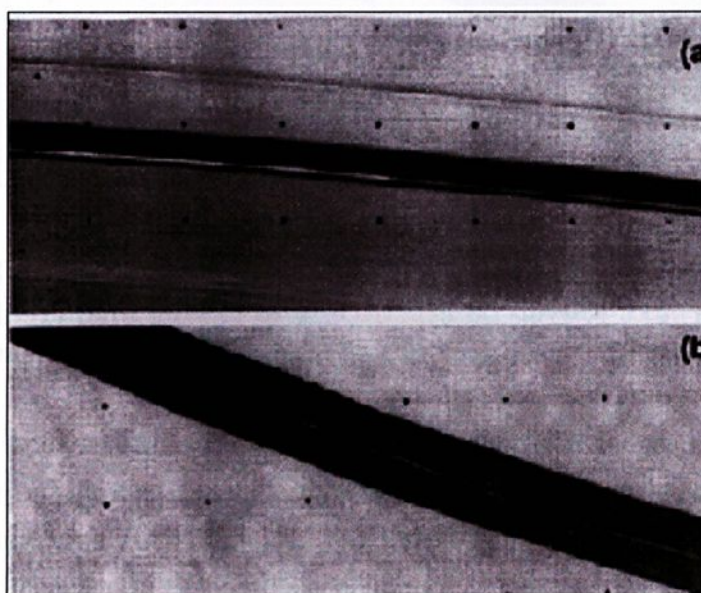


Figura 1.1: Imagens mostrando os anéis internos na Falha de Encke. Na imagem a) FDS 4499014, vemos o anel interno e na imagem b) FDS 4499350 vemos o anel central.

Na figura (1.2), FDS 4390459 e FDS 4390523, vemos um conjunto de imagens utilizadas por Showalter (1991) onde é indicada a existência do satélite Pan. Na figura (1.2), temos tanto em a) quanto em b), um pixel que indica um objeto com mesmo semi-eixo maior em tempos diferentes. Na região ampliada da figura (1.2), vemos um pixel ligando as duas bordas da Falha, seria então esse pixel a comprovação da existência do satélite.

Neste trabalho iremos discutir a dinâmica envolvida na Falha de Encke entre os dois anéis estreitos e o satélite Pan. Para tanto, primeiro faremos uma análise do trabalho de Ferrari & Brahic (1997). Neste trabalho foram determinadas as variações azimutais e os elementos orbitais desses anéis estreitos. Ferrari

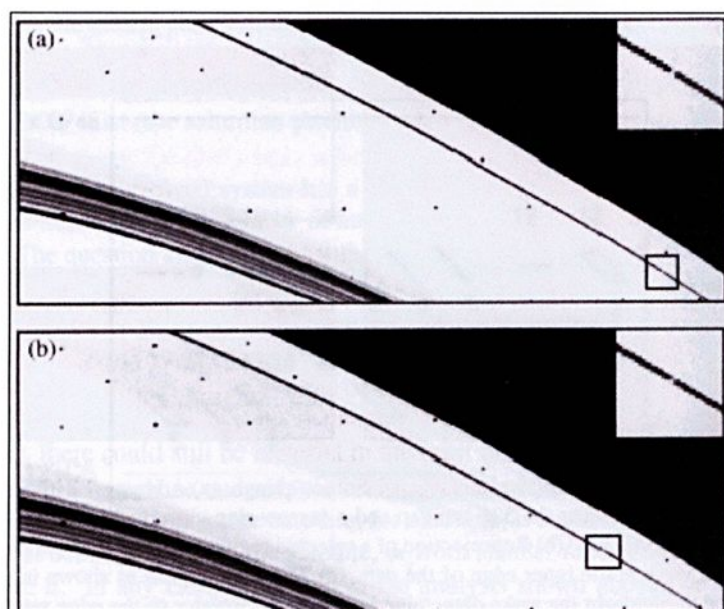


Figura 1.2: FDS 4390459 e FDS 4390523, Imagens da Falha de Encke utilizadas por Showalter (1991) para identificar a existência do satélite Pan, 18º satélite de Saturno, conforme mostra o zoom no canto superior direito da imagem.

& Brahic (1997) analisaram um conjunto de 20 imagens enviadas pelas Voyagers e verificaram que os aglomerados de partículas formados nos anéis central e interno não apresentam uma periodicidade, provavelmente por não serem originários somente da perturbação de um satélite próximo. Algumas das análises de Ferrari & Brahic (1997) serão tomadas como comparação em relação aos resultados obtidos, principalmente no que diz respeito à existência do anel interno.

As imagens das Voyagers 1 e 2, analisados por Ferrari & Brahic (1997), mostram os anéis interno e central e Pan transferidos para a mesma época (agosto de 1980). Isto pode ser verificado na figura (1.3), onde o círculo representa a posição do satélite Pan, os paralelogramos representam as imagens obtidas pela Voyager 1 e as linhas representam as imagens obtidas pela Voyager 2. Lembrando que a diferença entre os paralelogramos e as linhas só é válida em relação a ângulos. Radialmente as estruturas se mantêm.

Em relação a este trabalho, o que se segue é um estudo com base na literatura existente à respeito dos anéis estreitos dentro da Falha de Encke, e a análise via simulação numérica do comportamento das partículas de um anel planetário quando perturbadas por satélites dentro e fora deste anel. Os resultados obtidos nessas simulações serão comparados aos resultados encontrados na literatura, e

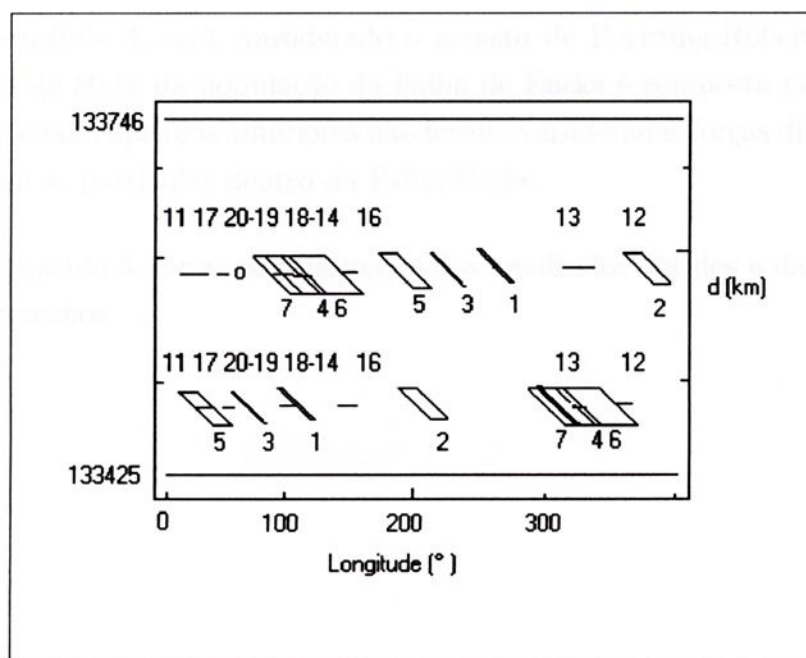


Figura 1.3: Reproduzido de Ferrari & Brahic (1997), ilustra a região fotografada pelas Voyagers 1 e 2. A região onde estão os paralelogramas, é a região fotografada pela Voyager 1, a região com linha é da Voyager 2 e o círculo indica a posição do satélite Pan. A numeração superior e inferior identificam as imagens das Voyagers 2 e 1, respectivamente.

com as imagens obtidas pelas Voyagers.

No capítulo 2, será feito uma análise das diferentes regiões formadas dentro da Falha de Encke. Inicialmente usando uma teoria desenvolvida por Dermott (1981), o estudo será feito em relação à formação de ondas nas partículas dentro da Falha. Num segundo passo, o estudo será feito em relação à órbita de 'ferradura' imposta ao anel central da Falha de Encke pelo satélite Pan. O terceiro passo, será em relação à região caótica dentro da Falha de Encke e a existência do anel interno da Falha situado nessa região.

No capítulo 3, serão analisadas as possíveis ressonâncias com os 18 satélites conhecidos de Saturno com a partícula localizada na Falha de Encke. Verificado quais satélites estão em ressonância com a partícula dentro da Falha, iremos verificar as distâncias entre as ressonâncias e se as ressonâncias são de Corrotação ou de Lindblad. As localizações das ressonâncias serão estudadas a fim de verificar a possível estabilidade do anel interno. Será feita uma breve análise da interação entre anel interno e borda da Falha de Encke.

No capítulo 4, será considerado o arrasto de Poynting-Robertson uma vez que cerca de 80 % da população da Falha de Encke é composta por poeira, lembrando que nos capítulos anteriores não foram consideradas forças dissipativas atuantes sobre as partículas dentro da Falha Encke.

No capítulo 5, faremos a discussão dos resultados obtidos e das possibilidades de trabalhos.

Diferentes Regimes

Capítulo 2

Diferentes Regimes

O efeito gravitacional de um satélite pode originar a formação de regiões distintas dentro de um anel planetário. Estas regiões dependerão da localização do satélite, ou seja, a maneira como ele poderá influenciar na formação dessas regiões. Essa perturbação sofrida pelas partículas, provoca o aparecimento de diferentes regiões no anel, que vão desde a formação de ondas até a formação de uma região caótica, que posteriormente resulta em uma região vazia de matéria.

As imagens obtidas pelas sondas Pioneer 11 e Voyagers 1 e 2 mostram que os anéis de Saturno apresentam estruturas variadas que possivelmente possam ser causadas pelas perturbações dos satélites nas partículas desses anéis.

Neste capítulo serão analisados os diferentes regimes que são apresentados nas estruturas da Falha de Encke. Iremos abordar cada regime separadamente, apresentando os resultados obtidos via simulações numéricas, bem como usaremos a teoria existente como parâmetro, para verificarmos os resultados aqui obtidos.

O primeiro regime a ser analisado será o de surgimento de ondas nas bordas do anel A, tanto externa como internamente. Foi através da formação dessas ondas nas bordas da Falha de Encke que Cuzzi & Scargle (1985) previram a existência de um satélite. Mais tarde, Showalter (1991) analisando as imagens das Voyagers veio a descobrir Pan, o 18º satélite de Saturno. O mecanismo de formação de ondas a ser analisado é o proposto por Dermott (1984), onde é apresentado que através da amplitude e do comprimento de onda, observadas nas imagens é possível obter a massa, a partir da densidade de superfície média, e a localização do satélite que venha a provocar o surgimento de tal onda. Da

simulação numérica será verificada a variação da posição das partículas, devido a perturbação de um satélite.

O segundo regime a ser analisado é o regime de ferradura, que é um dos mecanismos de confinamento proposto por Dermott (1979) para evitar o espalhamento do material do anel devido às colisões e a outros efeitos dissipativos, tais como o arrasto de Poynting Robertson. Esse mecanismo de confinamento envolvendo um satélite e um anel em órbita de ferradura foi verificado com a descoberta de Pan. Segundo Showalter (1991), Pan seria o responsável pela Falha de Encke, e pelo anel mantido em órbita de ferradura. Nesse regime, iremos estudar o comportamento das partículas desse anel interno na Falha de Encke levando em consideração a sua existência devido a um satélite em sua órbita.

O terceiro e último regime a ser estudado, será o surgimento da região de caos. Nesta parte será analisado, via simulação numérica, o comportamento das partículas de um anel estreito perturbadas por um satélite coorbital a este anel, e consequentemente, o surgimento da região caótica. O estudo teórico de Wisdom (1980) será analisado para o estudo da largura da região caótica, proveniente da sobreposição de ressonâncias. As larguras das regiões caótica e da órbita de ferradura serão comparadas às imagens obtidas pelas Voyagers do sistema da Falha de Encke.

O estudo teórico, a seguir, baseia-se no trabalho de Murray & Dermott (1999).

2.1 Problema Circular, Planar, Restrito de 3 Corpos

O Problema Circular Restrito de 3 Corpos descreve o movimento de uma partícula sujeita a ação de duas massas. Se três corpos de massa μ_1 , μ_2 e P se movem sob a interação gravitacional mútua, tem-se o problema de três corpos. Considerando que a massa do terceiro corpo P é muito pequena em relação aos outros dois corpos de massa μ_1 e μ_2 , de tal forma a ser considerada desprezível para afetar o movimento dos outros dois corpos, a isso chamamos de restrito.

Porém, impondo a condição de que as duas massas primárias estão se movendo em órbitas circulares ao redor de seu centro de massa comum, com a distância que as separa bem como a velocidade angular tomadas como fixas, e o movimento dos três corpos esteja num plano comum, tem-se o problema circular, planar, restrito de três corpos.

Aqui serão apresentadas as equações do movimento, a localização e estabilidade dos pontos de equilíbrio.

2.1.1 Equações do Movimento

A figura (2.1) mostra as coordenadas do sistema inercial (ξ, η) e as coordenadas do sistema rotacional (x, y) da partícula no ponto P . A origem, O , está localizada no baricentro dos dois corpos (Murray & Dermott, 1999). Algumas considerações:

(ξ, η) : Sistema de referência inercial;

(x, y) : Sistema de referência rotacional;

m_1 : Massa do Planeta;

m_2 : Massa do Satélite;

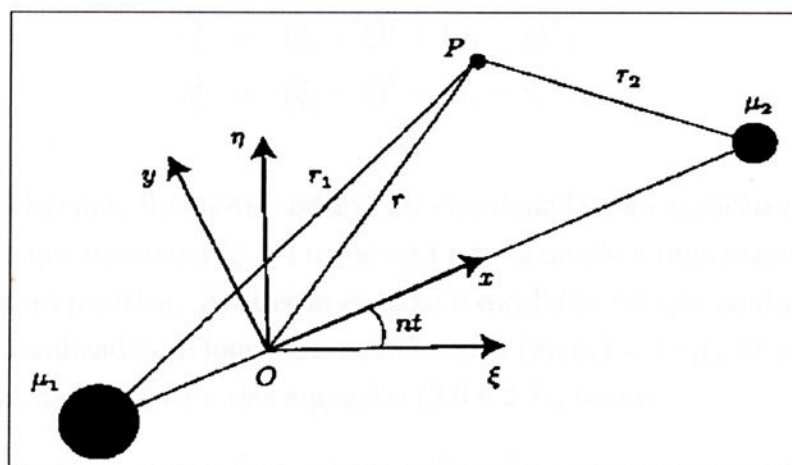


Figura 2.1: Ilustração do sistema de referência inercial (ξ, η) para o sistema girante (x, y) onde μ_1, μ_2 indicam as massas dos corpos primários e P a partícula (extraído de Murray & Dermott, 1999).

Vamos assumir uma unidade de distância fixa que separa as duas massas primárias (isto é, $a = 1$) e a unidade de massa $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$. A velocidade angular das massas com centro de massa comum também é unitária, $n = 1$.

Vamos assumir que $m_1 > m_2$, então:

$$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.1)$$

O sistema de unidades das duas massas é:

$$\mu_1 = Gm_1 = 1 - \bar{\mu} \quad \text{e} \quad \mu_2 = Gm_2 = \bar{\mu}, \quad (2.2)$$

onde $\bar{\mu} < \frac{1}{2}$, e a soma dessas unidades é $\mu_1 + \mu_2 = 1$.

A força resultante sobre a partícula P é:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ m_3 \ddot{\vec{\xi}} &= Gm_1 m_3 \frac{\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2}{\vec{r}_1^3} + Gm_2 m_3 \frac{\vec{\xi}_2 - \vec{\xi}}{\vec{r}_2^3}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Reorganizando estas equações e analogamente para η :

$$\ddot{\vec{\xi}} = \mu_1 \frac{\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2}{\vec{r}_1^3} + \mu_2 \frac{\vec{\xi}_2 - \vec{\xi}}{\vec{r}_2^3}, \quad (2.4)$$

$$\ddot{\vec{\eta}} = \mu_1 \frac{\vec{\eta}_1 - \vec{\eta}_2}{\vec{r}_1^3} + \mu_2 \frac{\vec{\eta}_2 - \vec{\eta}}{\vec{r}_2^3}, \quad (2.5)$$

onde

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2, \quad (2.6)$$

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2. \quad (2.7)$$

Consideremos um novo sistema de coordenadas em rotação que tem a mesma origem que o sistema (ξ, η) e que está rotacionando a uma razão uniforme $n = 1$ na direção positiva. A direção do eixo é escolhido tal que as duas massas estão sempre localizadas ao longo das coordenadas $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$ e $(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$. Assim, da Figura 1 e das equações (2.6 e 2.7), temos:

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2, \quad (2.8)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2, \quad (2.9)$$

onde (x, y) são as coordenadas da partícula no sistema sinódico (rotacional). Estas coordenadas estão relacionadas às coordenadas no sistema sideral (inercial)

por uma rotação,

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Embora nesse sistema de unidades $n = 1$, é mantido n nas equações para se fazer uma análise que se aplique a qualquer sistema rotacional. Diferenciando cada componente na equação (2.10) duas vezes:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Usando estas substituições das equações (2.12) em (2.4) e (2.5), obtém-se:

$$(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \cos nt - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \sin nt \quad (2.13)$$

$$= \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \cos nt + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \sin nt$$

$$(\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x) \sin nt - (\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y) \cos nt \quad (2.14)$$

$$= \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] \sin nt + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \cos nt$$

Multiplicando-se a equação (2.13) por $\cos nt$ e a equação (2.14) por $\sin nt$ e depois multiplicando-se a equação (2.13) por $-\sin nt$ e a equação (2.14) por $\cos nt$, as equações do sistema rotacional ficam:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = -\mu_1 \frac{x_1 + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3}, \quad (2.15)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) y. \quad (2.16)$$

Estas acelerações podem também ser escritas como um gradiente de uma função escalar:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (2.17)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (2.18)$$

que são as equações do movimento da partícula no sistema em rotação. O “pseudo potencial”, $U = U(x, y)$ é dado por

$$U = \frac{n^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (2.19)$$

Os termos $-2n\dot{y}$ e $2n\dot{x}$ das equações (2.17) e (2.18) são os termos de Coriolis, o qual dependem da velocidade da partícula no sistema de referência em rotação. Estes termos aparecem devido a não inercialidade do sistema de referência adotado.

2.1.2 A Constante de Jacobi

No Problema Restrito de três corpos a energia e o momento angular do sistema não se conservam. Este fato se deve à aproximação feita de que a partícula P possui massa desprezível. Com isso o movimento da partícula é afetado pelas massas consideradas primárias, mas não afeta o movimento delas, o que contradiz a *lei de ação e reação*. Porém existe uma grandeza neste sistema que se conserva, a integral de *Jacobi*.

Multiplicando a equação (2.15) por $\dot{x}$, a equação (2.16) por $\dot{y}$, somando-se os resultados, integrando no tempo, obtém-se

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.20)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2U - C \quad (2.21)$$

onde C é a constante de integração, chamada de constante de Jacobi. Sendo

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2 \quad (2.22)$$

temos:

$$v^2 = 2U - C \quad (2.23)$$

ou

$$C = n^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - \dot{x} - \dot{y} \quad (2.24)$$



Esta é a integral de Jacobi ou constante de Jacobi. A integral de Jacobi é a única integral 1ª do Problema Circular Restrito de 3 Corpos e significa que o problema não pode ser resolvido de forma completa. A expressão para C também pode ser escrita em termos da posição e da velocidade da partícula no sistema inercial.

2.1.3 Localização dos pontos de equilíbrio de Lagrange

Sabe-se que o Problema Circular Restrito de 3 corpos não possui uma solução algébrica, isto é, não se consegue obter uma solução analítica para a equação diferencial. Entretanto, informações podem ser obtidas a respeito do movimento da partícula através da constante de Jacobi e das curvas de velocidade zero bem como obter os pontos de equilíbrio do sistema onde a velocidade e a aceleração da partícula são nulas no sistema de referência rotacional.

Os pontos foram obtidos com base no trabalho de Brouwer & Clemence (1961). Da definição de r_1 e r_2 das equações (2.8 e 2.9) e usando o fato de $\mu_1 + \mu_2 = 1$, obtém-se:

$$\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 = x^2 + y^2 + \mu_1 \mu_2 \quad (2.25)$$

O 'pseudo-potencial' U , pois escrito em um sistema de referência não inercial e é dependente da velocidade, pode ser escrito como:

$$U = \mu_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{n^2 r_1^2}{2} \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{n^2 r_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2 n^2 \quad (2.26)$$

Considerando a aceleração e a velocidade como sendo nulas, as equações (2.17) e (2.18) podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = 0 \quad (2.28)$$

A análise das equações (2.27) e (2.28), mostra a existência de uma solução da forma:

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} = \frac{\partial U}{\partial r_2} = 0 \quad (2.29)$$

Com a qual se obtém a normalização das distâncias $r_1 = r_2 = 1$, sendo que $n = 1$. Assim as equações (2.8) e (2.9) são reescritas na forma:

$$\begin{aligned}(x + \mu_2)^2 + y^2 &= 1 \\ (x - \mu_1)^2 + y^2 &= 1\end{aligned}\quad (2.30)$$

da qual obtém-se duas soluções:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} - \mu_2 \\ y &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\quad (2.31)$$

As soluções mostradas em (2.31) dos dois pontos de equilíbrio da partícula sendo estes dois pontos denominados de pontos de equilíbrio triangulares de Lagrange que por convenção são chamados de L_4 e L_5 , conforme mostra a figura (2.2).

Os outros três pontos de equilíbrio de Lagrange L_1 , L_2 e L_3 , que estão situados ao longo do eixo x podem ser obtidos através de algumas manipulações algébricas tal como foram realizadas para o cálculo dos pontos L_4 e L_5 .

Para se obter o ponto L_1 considera-se $r_1 + r_2 = 1$ e utilizando o mesmo procedimento realizado anteriormente e definindo α como:

$$\alpha = \left(\frac{\mu_2}{3\mu_1} \right)^{1/3} \quad (2.32)$$

obtém-se através de algumas manipulações algébricas a localização de L_1 como:

$$\begin{aligned}r_2 &= \alpha + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1/3)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{d\alpha^{j-1}} [\Phi(\alpha)]^j \\ &= \alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{23}{81}\alpha^4 + O(\alpha^5)\end{aligned}\quad (2.33)$$

onde $\Phi(\alpha) = \alpha^2 + \alpha^3 + \frac{53}{27}\alpha^4 + O(\alpha^5)$.

Para obtenção de L_2 considera-se $r_1 - r_2 = 1$ e através de manipulações algébricas obtém-se:

$$\alpha = r_2 + \frac{1}{3}r_2^2 - \frac{1}{3}r_2^3 - \frac{1}{81}r_2^4 + O(r_2^5) \quad (2.34)$$

$$r_2 = \alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{31}{81}\alpha^4 + O(\alpha^5) \quad (2.35)$$

Para obtenção de L_3 considera-se agora $r_2 - r_1 = 1$ e definindo $r_1 = 1 + \beta$ e $r_2 = 2 + \beta$, obtém-se:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = -\frac{12}{7}\beta + \frac{144}{49}\beta^2 - \frac{1567}{343}\beta^3 + O(\beta^4) \quad (2.36)$$

$$\beta = -\frac{7}{12}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{7}{12}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 - \frac{13223}{20739}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^3 + O\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^4 \quad (2.37)$$

Pode-se observar na figura (2.2) que o ponto L_1 separa as possíveis trajetórias que a partícula pode ter ao redor de uma das duas massas. O ponto L_2 é considerado um ponto de sela pois, uma partícula com $C_J < C_{L_2}$, pode orbitar no interior ou no exterior das regiões do plano. Os pontos de equilíbrio triangulares L_4 e L_5 têm o mais baixo valor da constante de Jacobi $C_J = 2.84$, se a partícula tem uma $C_J < C_{L_{4,5}}$, então não existem regiões no plano que seja excluída. L_3 é considerado como uma separatriz.

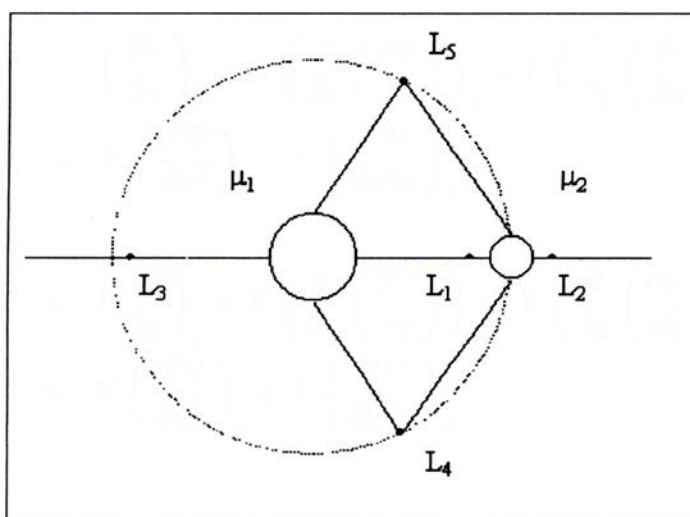


Figura 2.2: Ilustra os pontos de equilíbrio de Lagrange L_1 , L_2 , L_3 , L_4 e L_5 .

2.1.4 Estabilidade dos pontos de equilíbrio

Determinados os pontos de equilíbrio do sistema, faz-se necessário a verificação da estabilidade desses pontos. Exemplo de equilíbrio estável pode-se citar o movimento oscilatório, cuja solução é dado por séries de senos e cossenos. E como equilíbrio instável pode-se citar uma função exponencial, que diverge dos pontos.

Um deslocamento na posição inicial da partícula localizada em um certo ponto (P) faz-se necessário para analisar a estabilidade de um ponto. Logo depois reescreve-se as equações do movimento para o problema Circular Planar Restrito de 3 Corpos. Primeiramente:

$$X = X_0 + X^* \quad (2.38)$$

e

$$Y = Y_0 + Y^* \quad (2.39)$$

onde X_0 e Y_0 são pequenos deslocamentos realizados na posição inicial da partícula.

Em seguida, substitue-se X e Y nas equações do movimento (2.17) e (2.18) e expandindo em séries obtém-se:

$$\begin{aligned} \ddot{X} - 2n\dot{Y} &\approx \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 + X \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right)_0 + Y \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right)_0 \\ &\approx X \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_0 + Y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)_0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Y} - 2n\dot{X} &\approx \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 + X \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right)_0 + Y \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right)_0 \\ &\approx Y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_0 + X \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right)_0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Usando o fato que $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = 0$, onde o subscrito 0 está relacionado ao deslocamento inicial realizado na posição de equilíbrio da partícula, indica que estamos interessados somente no movimento próximo à vizinhança do ponto de equilíbrio, então estamos aptos a negligenciarmos os termos de alta ordem pois, estamos trabalhando sempre com pequenas quantidades, ou seja considerando apenas pequenos deslocamentos.

Lembrando-se que $n = 1$, pode-se reescrever as equações (2.40) e (2.41) como:

$$\begin{aligned} \ddot{X} - 2n\dot{Y} &= XU_{xx} + YU_{yx} \\ \ddot{Y} - 2n\dot{X} &= XU_{xy} + YU_{yy} \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde U_{xx} , U_{xy} e U_{yy} são constantes definidas como:

$$\begin{aligned} U_{xx} &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \\ U_{xy} &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) \\ U_{yy} &= \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

A equação (2.42) representa uma equação diferencial linear, resolvida utilizando-se neste estudo o método matricial. Assim a equação (2.42) pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \ddot{X} \\ \ddot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

A equação (2.44) pode ser representada de uma maneira mais simplificada

$$\dot{X} = AX \quad (2.45)$$

onde A é uma matriz de constantes $n \times n$ e X é uma matriz de vetor.

Se algum vetor x satisfaz a seguinte equação (2.46)

$$Ax = \lambda x \quad (2.46)$$

onde λ é um escalar constante, logo x será um auto vetor da matriz A e λ corresponderá a um auto valor.

As definições são usadas para resolver a equação (2.45). Após algumas manipulações algébricas, obtém-se a solução desta equação:

$$X = \sum_{j=1}^4 \bar{\alpha}_j e^{\lambda_j t} \quad (2.47)$$

$$\dot{X} = \sum_{j=1}^4 \bar{\alpha}_j \lambda_j e^{\lambda_j t}$$

$$Y = \sum_{j=1}^4 \bar{\beta}_j e^{\lambda_j t} \quad (2.48)$$

$$\dot{Y} = \sum_{j=1}^4 \bar{\beta}_j \lambda_j e^{\lambda_j t}$$

onde $\bar{\beta}_j$ e $\bar{\alpha}_j$ são constantes e λ é dado pelas equações:

$$\lambda_{1,2} = \pm \left\{ \frac{1}{2} (U_{xx} + U_{yy} - 4) - \frac{1}{2} [(4 - U_{xx} - U_{yy})^2 - 4 (U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (2.49)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm \left\{ \frac{1}{2} (U_{xx} + U_{yy} - 4) + \frac{1}{2} [(4 - U_{xx} - U_{yy})^2 - 4 (U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2)]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (2.50)$$

Derivando as equações (2.47) e (2.48) e substituindo na equação (2.45), obtém-se:

$$\sum (\bar{\alpha}_j \lambda_j^2 - 2\bar{\beta}_j \lambda_j - U_{xx} \bar{\alpha}_j - U_{xy} \bar{\beta}_j) e^{\lambda_j t} = 0 \quad (2.51)$$

onde a solução é:

$$\bar{\beta}_j = \frac{\lambda_j^2 - U_{xx}}{2\lambda_j + U_{xy}} \bar{\alpha}_j \quad (2.52)$$

Substituindo as equações (2.47) e (2.48) na equação (2.45) e sabendo os valores de $\bar{\beta}_j$ e $\bar{\alpha}_j$, pode-se obter a solução para o sistema de equações lineares a qual é representada pela equação (2.42).

A estabilidade dos pontos de equilíbrio pode ser determinada analisando os auto valores.

Definidas as quantidades:

$$\bar{A} = \frac{\mu_1}{(r_1^3)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^3)_0} \quad (2.53)$$

$$\bar{B} = 3 \left[\frac{\mu_1}{(r_1^5)_0} + \frac{\mu_2}{(r_2^5)_0} \right] y_0^2 \quad (2.54)$$

$$\bar{C} = 3 \left[\mu_1 \frac{(x_0 + \mu_2)}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(x_0 - \mu_1)}{(r_2^5)_0} \right] y_0 \quad (2.55)$$

$$\bar{D} = 3 \left[\mu_1 \frac{(x_0 + \mu_2)^2}{(r_1^5)_0} + \mu_2 \frac{(x_0 - \mu_1)^2}{(r_2^5)_0} \right] \quad (2.56)$$

e, em termos das constantes $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ e $\bar{D}$ definidas no conjunto de equações acima, pode-se escrever:

$$U_{xx} = 1 - \bar{A} + \bar{D} \quad (2.57)$$

$$U_{yy} = 1 - \bar{A} + \bar{B} \quad (2.58)$$

$$U_{xy} = \bar{C} \quad (2.59)$$

A forma geral do auto valor é obtida a partir das equações (2.49) e (2.50), que são equações que explicitam os auto valores em relação às equações (2.57), (2.58) e (2.59) e sabendo que estas equações são quantidades reais, temos também que X e Y serão quantidades reais.

Assim, após algumas substituições adequadas, pode-se reescrever os auto valores como sendo:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm (j_1 + k_1 i) \\ \lambda_{3,4} &= \pm (j_2 + k_2 i) \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde j_1 , j_2 , k_1 e k_2 são quantidades reais e $i = \sqrt{-1}$.

Obteve-se então uma solução simplificada para a velocidade e a posição dos vetores relativos ao ponto de equilíbrio.

Sabendo-se então que λ pode ser positivo ou negativo e que este valor está elevado a um exponencial, pode-se concluir que quando $j = 0$ então $\lambda = ki$, logo $e^{\pm kit}$; assim a solução será reduzida a um oscilador em termos de senos e cossenos. Agora, obter-se a um crescimento exponencial, podendo ser tanto positivo quanto negativo, se j for positivo. Conclui-se portanto que se j for positivo, obter-se a uma solução instável.

Os pontos Lagrangianos colineares L_1 , L_2 e L_3 são os pontos de equilíbrio instáveis, e os pontos Lagrangianos triangulares L_4 e L_5 são os pontos de equilíbrio estáveis.

Quando um sistema está sujeito a uma força derivada de um potencial, a soma das energias cinética e potencial permanece constante. Desta maneira, um sistema de movimento estável ocorre em posições de equilíbrio cujo potencial é mínimo, como em L_4 e L_5 . Objetos colocados nestas posições permanecerão na vizinhança, ainda que venham a sofrer pequenos deslocamentos.

2.2 Formação de Ondas

Quando temos um meio em estado de inércia, imaginamos que este meio esteja armazenando energia cinética. Quando este mesmo meio é perturbado de maneira que haja propagação de energia e momento sem que com isso haja transporte simultâneo de matéria, por meio de campos elétricos, magnéticos ou gravitacionais, estamos falando da formação de ondas.

Quando de sua propagação, a onda faz com que as partículas desse meio comecem a oscilar. Os elementos de uma onda são: o comprimento de onda l , que é a distância mais curta na qual a onda se repete completamente (para tempos constantes), e a amplitude A , que é o deslocamento máximo possível da posição de equilíbrio. As equações são Dermott (1984):

$$l = \frac{a\mathcal{U}}{n/2\pi} = 3\pi\Delta a_0 \quad (2.61)$$

onde $\mathcal{U}$ é a velocidade angular relativa da partícula em relação ao satélite, dado por $\mathcal{U} = 3n\frac{\Delta a_0}{2a}$. A amplitude é dada por

$$A = ea \quad (2.62)$$

onde $e = \frac{4}{3}\frac{m'}{M}\left(\frac{a}{\Delta a_0}\right)^2$, e a variação do elemento orbital é dada pela equação de Gauss (Brouwer & Clemence, 1961),

$$\dot{e} = \frac{(1 - e^2)^{1/2}}{na} [R \sin f + S (\cos u + \cos f)] \quad (2.63)$$

onde R e S são as componentes da perturbação: R é a componente na direção do raio vetor e S é a componente perpendicular a R no plano orbital.

Quando há o encontro entre um anel de partículas e um satélite interno que descrevem órbitas circulares, estes se interagem com uma força de atração instantânea, produzida pelo campo gravitacional do satélite sobre o anel. Como o movimento médio do satélite é maior que o movimento médio do anel, temos a formação da crista depois do satélite ter passado pela região que é deformada. No processo de interação, há a troca de momento angular entre o satélite e as partículas de anel, ou seja, o momento angular do satélite diminui, o que produz uma diminuição em seu semi-eixo maior. No caso do anel o momento angular aumenta produzindo um aumento em seu semi-eixo maior, justificando o afastamento das partículas em relação ao satélite.

Os subscritos p e s , que serão utilizados a seguir, indicam a partícula e o satélite, respectivamente.

Utilizando as equações (2.61) e (2.62), e tomando as condições iniciais da partícula com semi-eixo maior $a_p = 133746$ km, e excentricidade $e_s = 2.38 \times 10^{-4}$, teoricamente, o satélite gera uma onda com amplitude total $A = 26,8$ km, e comprimento $l = 1531,53$ km. Na simulação da figura (2.3), a amplitude da onda é $A = 26,8$ km e o comprimento de onda $l = 1337,5$ km. A diferença pode ser devida ao fato do semi-eixo maior da partícula, na análise teórica, ser tomado como semi-eixo maior médio, e na simulação a amplitude foi medida pela distância entre as partículas postadas mais interna e externamente.

Na figura (2.3), pode-se ver o comportamento das partículas posicionadas na borda externa da Falha de Encke após a perturbação do satélite interno. Esta perturbação faz com que haja a variação no semi-eixo maior e na excentricidade da partícula. A figura (2.3) representa o movimento de 10 partículas, soltas em semi-eixo maiores $a_p = 133746$ km até $a_p = 133756$ km, fase $\theta_p = 3^\circ$ e excentricidades $e_p = 0$ e $e_s = 10^{-4}$. Podem ainda ser observadas as frentes de choque, caracterizadas pelos aglomerados.

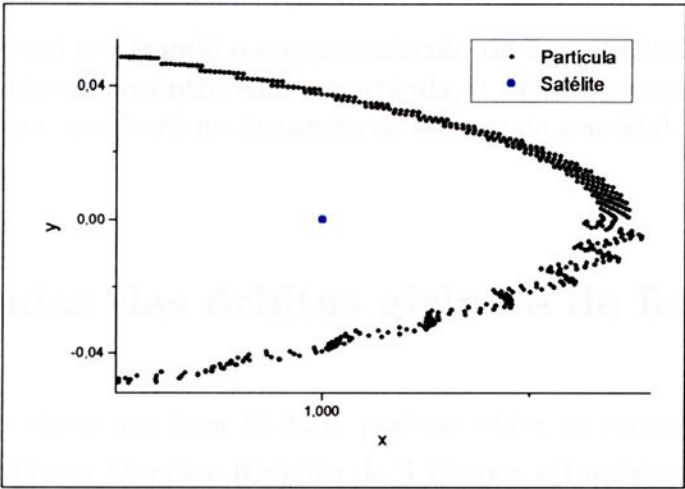


Figura 2.3: Mostra a borda externa da Falha de Encke perturbada pelo satélite Pan. As partículas se encontram com semi-eixo maior 133748 km, a mais interna, e as outras 1 km acima até 133758 km. Normalizando a distância até o satélite Pan igual a 1 , a borda considerada encontra-se a aproximadamente 162 km do satélite.

Cada partícula de anel, que inicialmente se movimenta em uma órbita

circular, tem alterada sua excentricidade e seu semi-eixo maior (figura 2.4), ou seja, em cada encontro o satélite exerce um impulso sobre o anel que resultará, em princípio, na formação de uma onda senoidal, cuja amplitude é proporcional à variação da excentricidade e do semi-eixo maior do anel, onde a excentricidade é obtida através das equações de Gauss, equação (2.63), as quais determinam a variação da excentricidade em relação ao tempo devido às perturbações exercidas pelo satélite.

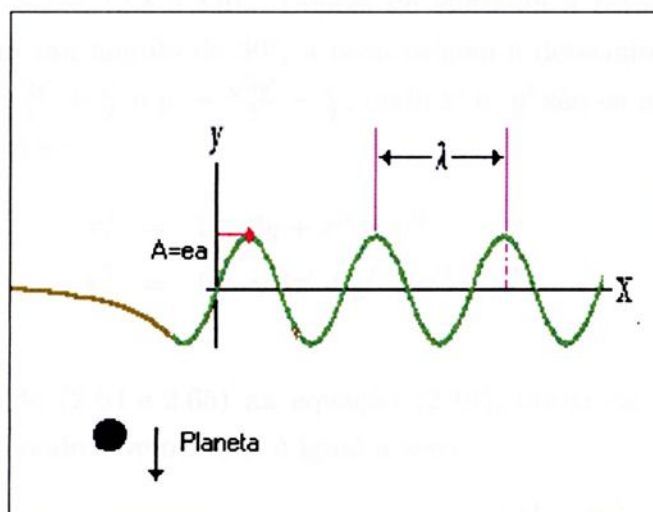


Figura 2.4: Ilustração mostrando o comportamento de uma partícula próxima a um satélite. Quando do encontro com a partícula, o satélite exerce um impulso sobre a partícula que resultará na formação de uma onda senoidal.

2.3 Dinâmica das órbitas girino e de ferradura

Como vimos no item (2.2.2), pode-se obter as equações do movimento para o Problema Circular Restrito de 3 Corps e também a integral de Jacobi, que fornece as curvas de velocidade zero, bem como os pontos de equilíbrio Lagrangiano L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5 e sua estabilidade. Para descrever este item, usaremos o artigo de Dermott & Murray (1981).

Em torno dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 , uma partícula pode descrever uma órbita girino ou uma órbita de ferradura. Se o ponto L_3 estiver fora do caminho da partícula, funcionando como uma separatriz, temos uma órbita girino. Se o ponto L_3 estiver interno ao caminho da partícula, temos uma órbita de

ferradura.

Esses tipos de órbitas estão relacionadas à constante de Jacobi C_J e pode-se determinar através dela possíveis regiões de ferradura e girino.

Pode-se citar como exemplo o ponto L_4 para $x = \frac{1}{2-\mu_2}$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A translação da origem é determinada com a substituição $x \rightarrow \left(\frac{1}{2-\mu_2}\right) + x$ e $y \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y$ nas equações (2.8 e 2.9). Depois de efetuada a rotação do sistema de coordenadas em um ângulo de 30° , a nova origem é determinada através da substituição $x \rightarrow \frac{\sqrt{3}x'}{2} + \frac{y'}{2}$ e $y \rightarrow \frac{\sqrt{3}y'}{2} - \frac{x'}{2}$, onde x' e y' são os novos valores de x e y . Assim obtém-se:

$$r_1^2 = 1 + 2y + x'^2 + y'^2 \quad (2.64)$$

$$r_2^2 = 1 - \sqrt{3}x' + y' + x'^2 + y'^2 \quad (2.65)$$

Substituindo (2.64 e 2.65) na equação (2.19), obtêm-se a constante de Jacobi para o caso onde a velocidade é igual a zero:

$$C_J = 1 - \mu_2 - \sqrt{3}\mu_2 x' + (2 - \mu_2)y' + x'^2 + y'^2 + 2 \left(\frac{(1 - \mu_2)}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) \quad (2.66)$$

onde os termos de $O(\mu_2^2)$ foram negligenciados. Expandindo a equação (2.66) em torno da nova origem, temos:

$$C_J \approx 3 - \mu_2 + \frac{9}{4}\mu_2 x'^2 + 3y'^2 \quad (2.67)$$

Nesta expansão foram negligenciados os termos de ordem superior a três, bem como os termos envolvendo $\mu_2 y'$, pois μ_2 é uma quantidade pequena o que sugere, em extensão radial, pequenas curvas de velocidade zero.

Para o caso da formação de uma órbita girino, a constante de Jacobi é dado por:

$$C_J = 3 - \beta\mu_2 \quad (2.68)$$

onde,

$$3 \leq \beta \leq 5 \quad (2.69)$$

Para o caso da formação de uma órbita de ferradura, a constante de Jacobi é dada por:

$$C_J = 3 + \alpha \sqrt[3]{\mu_2} + O(\mu_2) \quad (2.70)$$

onde,

$$0 \leq \alpha \leq \sqrt[3]{3^4} \quad (2.71)$$

Neste caso, o limite inferior de α corresponde aos valores de C_J (para $O(\mu_2)$) no ponto L_3 e o limite superior corresponde aos valores C_J nos pontos L_1 e L_2 . Por isso, pode-se dizer que os valores de β e α servem para parametrizar a natureza das curvas de velocidade zero das órbitas de girino e de ferradura.

Utilizando a equação:

$$U = \mu_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{n^2 r_1^2}{2} \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{n^2 r_2^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \mu_1 \mu_2 n^2 \quad (2.72)$$

e fazendo $n = 1$ obtém-se:

$$2U = 2\frac{\mu_1}{r_1} + \mu_1 r_1^2 + 2\frac{\mu_2}{r_2} + \mu_2 r_2^2 - \mu_1 \mu_2 \quad (2.73)$$

Fazendo o uso das coordenadas polares (r, θ) obtém-se a equação da velocidade como sendo:

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = 2U - C_J \quad (2.74)$$

desde que se considere $\mu_2 \ll 1$ e não se faça distinção entre r_1 e r .

Considerando agora uma órbita quase circular :

$$r = 1 + \delta r \quad (2.75)$$

onde $\delta r \ll 1$. Nestas circunstâncias $|\dot{r}| < |r\dot{\theta}|$ exceto na volta perto dos pontos de equilíbrio onde temos $\dot{\theta} = 0$ mas $\dot{r} \neq 0$. Portanto:

$$v \approx r\dot{\theta} = -\frac{3}{2}\delta r \quad (2.76)$$

Através de algumas substituições adequadas obtém-se:

$$2U = 3 + \delta r^2 + \mu_2 H \quad (2.77)$$

onde H é uma função de r , dada por

$$H = \frac{2}{r_2} + r_2^2 - 1 \quad (2.78)$$

Entretanto, substituindo as equações (2.76) e (2.77) na equação (2.74), obtém-se:

$$\frac{9}{2}\delta r^2 = 3 + \delta r^2 + \mu_2 H - C_J \quad (2.79)$$

onde a equação (2.79) descreve o caminho percorrido pela partícula.

Antes mesmo de falarmos da órbita de ferradura, vamos descrever as curvas de velocidade zero.

As curvas de velocidade zero se constituem numa importante ferramenta de análise de trajetórias no Problema Restrito de Três Corpos, pois fornecem resultados que permitem determinar regiões proibidas para o movimento da partícula. Essa análise se inicia assumindo que a velocidade da partícula se anule.

Para se obter a equação para a curva de velocidade zero, toma-se $v^2 = 0$, a qual é definida por:

$$0 = 3 + 3\delta r_z^2 + H_z \mu_2 - C_J \quad (2.80)$$

onde o subscrito 'z' está relacionado à curva de velocidade zero e não à órbita.

A figura (2.5) mostra a curva de velocidade zero para uma razão de massa $\mu_2 = 10^{-11}$ e o valor crítico para a constante de Jacobi $C_J = 3.0000000098$. Este valor de constante de Jacobi foi retirado da simulação da partícula colocada em semi-eixo maior $a_p = 133588$ km, excentricidade $e_p = 0$ e $e_s = 10^{-4}$ do satélite e da partícula, respectivamente. O ângulo de fase da partícula é $\theta_p = 3^\circ$.

De uma forma geral, o movimento de uma partícula para um determinado valor da constante de Jacobi só é permitido nas regiões onde $2U \geq C_J$, caso contrário, a velocidade ao quadrado terá valor negativo.

Considerando o caso da órbita de ferradura, obtém-se substituindo a equação (2.70) na equação (2.74):

$$3 + \alpha \sqrt[3]{\mu_2^2} + O(\mu_2) = \frac{3}{4}\delta r^2 + 3 + \mu_2 H \quad (2.81)$$

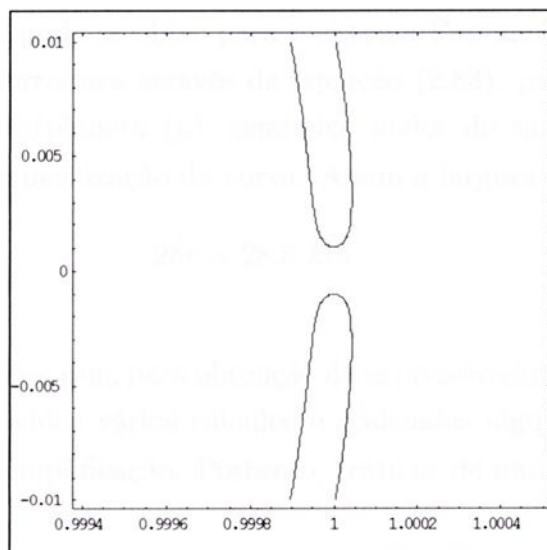


Figura 2.5: Descreve a curva de velocidade zero para $C_J = 3.0000000098$. Este valor da constante de Jacobi foi obtido da simulação da partícula localizada em semi-eixo maior $a_p = 133588 \text{ km}$ e excentricidade $e_p = 0$ e $e_s = 10^{-4}$. O ângulo de soltura da partícula é $\theta_p = 3^\circ$, levando-se em consideração a razão de massa satélite-planeta como sendo 10^{-11} . A posição do satélite, na figura, é $(0, 1)$.

Substituindo a equação (2.70) na equação (2.80), obtém-se:

$$3 + \alpha \sqrt[3]{\mu_2^2} + O(\mu_2) = 3\delta r_z^2 + 3 + \mu_2 H_z \quad (2.82)$$

Portanto, desde que $\sqrt[3]{\mu_2^2} \ll \mu_2$ para pequenos valores de μ_2 , obtém-se:

$$\delta r = 2\delta r_z = 2\sqrt{\frac{\alpha}{3}} \sqrt[3]{\mu_2} \quad (2.83)$$

onde δr é a largura radial.

Logo, pode-se afirmar que a largura radial da órbita de ferradura é duas vezes a largura associada à curva de velocidade zero.

Considerando o caso da órbita girino, obtém-se também a largura radial utilizando o procedimento aplicado para órbita de ferradura, logo:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\delta r^2 + 3 + \mu_2 H &= 3 + \beta\mu_2 \\ 3\delta r_z^2 + 3 + \mu_2 H_z &= 3 + \beta\mu_2 \end{aligned} \quad (2.84)$$

e portanto,

$$\delta r \approx 2\delta r_z = \sqrt{2[(\beta - H)/3]}\sqrt{\mu_2} \quad (2.85)$$

Teoricamente, pode-se obter para o sistema Pan-anel central o valor da largura da órbita de ferradura através da equação (2.83), para isto utiliza-se a razão de massa satélite/planeta (μ), semi-eixo maior do satélite e α que está relacionado com a parametrização da curva. Assim a largura da órbita é:

$$2\delta r = 28.8 \text{ km} \quad (2.86)$$

Embora saibamos que, para obtenção da expressão simplificada da equação (2.83), foram desenvolvidos vários cálculos e realizadas algumas considerações, que auxiliaram nesta simplificação. Portanto, trata-se de um valor aproximado.

2.4 Resultados numéricos

Dermott *et al.* (1979) propôs que cada anel estreito contém um pequeno satélite de tal modo que mantém suas partículas em estabilidade, ou seja, em órbita de ferradura próximas aos pontos de equilíbrio de Langrange L_3 , L_4 e L_5 . Neste sessão foram realizadas simulações, das órbitas de ferradura que libram em torno destes pontos de equilíbrio. Foi utilizado o integrador Radau para as simulações desta sessão.

A figura (2.6) descreve o caminho percorrido pela partícula em regime de ferradura levando-se em consideração um período orbital da partícula, onde $a_p = 133607 \text{ km}$ e $a_{sat} = 133583 \text{ km}$, são os semi-eixos da partícula e do satélite, respectivamente. Dadas as condições iniciais, a excentricidade é $e = 0$ para ambos. A fase da partícula é $\theta_p = -3^\circ$ em relação ao satélite

Na simulação mostrada na figura (2.6) a partícula se encontra com semi-eixo maior 17 km acima do satélite. Este semi-eixo maior pode ser considerado o limite da ferradura com a região caótica pois, aproximadamente 1 km acima, esta partícula é lançada para a região caótica quando se aproxima do satélite.

Na figura (2.7) tem-se as partículas distribuídas ao longo de um intervalo de 10 km. A partícula mais interna se encontra com semi-eixo maior $a = 133585 \text{ km}$, e a partícula mais externa com semi-eixo maior $a = 133595 \text{ km}$, ou seja, as partículas estão a no máximo 13 km do semi-eixo maior do satélite perturbador. O ângulo de fase em que as partículas foram inicialmente soltas é $\theta_p = -3^\circ$ em

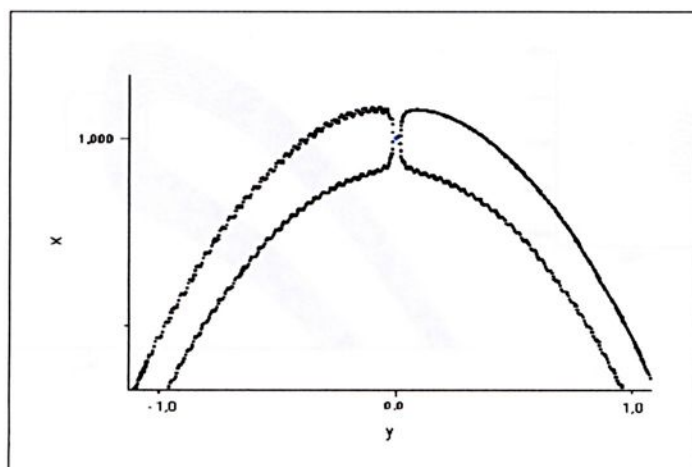


Figura 2.6: Mostra a partícula perturbada pelo satélite em órbita de ferradura. A partícula se encontra a 17 km acima do semi-eixo maior do satélite, este semi-eixo maior pode ser considerado o limite da ferradura com a região caótica pois, colocando a partícula a 18 km acima do semi-eixo maior do satélite, quando da aproximação a partícula é lançada para a região caótica. Nesta simulação, a partícula possui um ângulo de fase inicial $\theta_p = -3^\circ$ em relação ao satélite.

relação ao satélite. A largura dessa ferradura, dadas as condições iniciais, é de 26 km para a partícula mais externa.

A largura da região de ferradura, considerando o semi eixo maior $a_s = 133583$ km e a excentricidade $e_s = 0$ do satélite, segundo a teoria é de 28.8 km para o sistema Pan-anel central (Dermott & Murray, 1981). Pelas simulações numéricas, essa região seria de aproximadamente 34 km, conforme mostra a simulação (2.7). Esta discrepância pode estar relacionada a não inclusão da excentricidade do satélite, que faria com que essa região diminuísse. Essa diminuição estaria relacionada ao aumento das colisões, podendo gerar acreção espalhamento entre partículas.

2.4.1 Centro Guiado

Em muitas aplicações da dinâmica do Sistema Solar a excentricidade é muito pequena e a utilização de aproximações da ordem de e são muito úteis.

Na aproximação do centro guiado, o movimento da partícula P movendo-se em órbita elíptica em torno do foco F (figura 2.8), é visto no sistema de

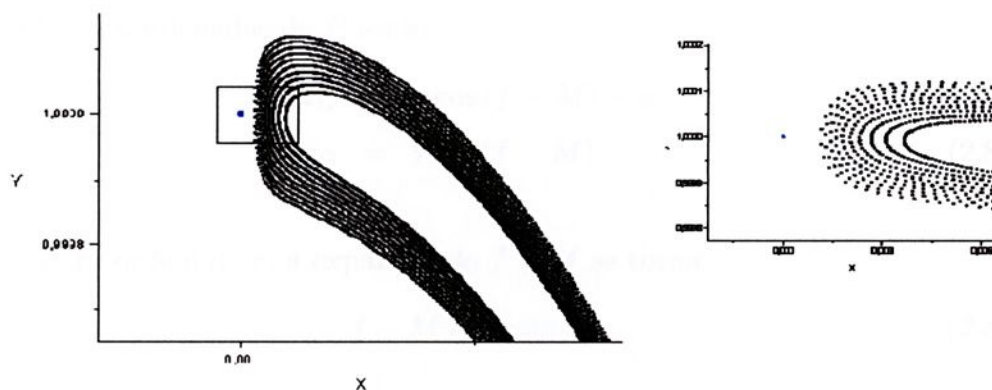


Figura 2.7: Nesta simulação a partícula mais interna se encontra com semi-eixo maior $a = 133585$ km, e a partícula externa com semi-eixo maior $a = 133595$ km, ou seja, as partículas estão a no máximo 13 km do semi-eixo maior do satélite perturbador. O ângulo em que as partículas foram inicialmente soltas é $\theta_p = 3^\circ$ em relação ao satélite. O zoom mostra a região próxima ao satélite.

referência que é centrado no ponto G , o centro guiado, que rotaciona ao redor do foco em um círculo de raio a igual ao semi-eixo maior da partícula, com velocidade angular igual ao movimento médio da partícula n .

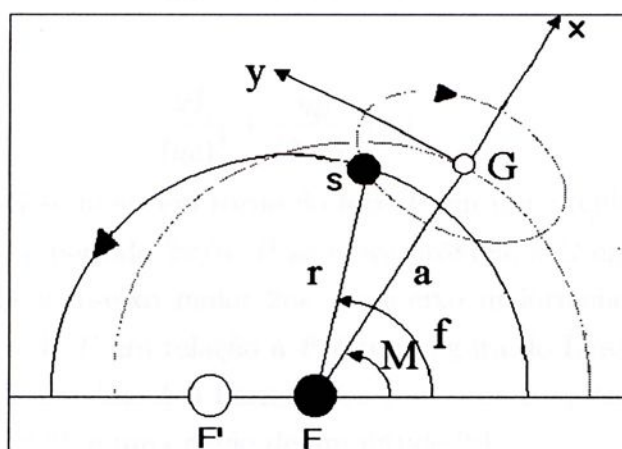


Figura 2.8: Relação entre a anomalia verdadeira f e a anomalia média M na aproximação do centro guiado. G denota o centro guiado, P a partícula, F o foco e F' o foco vazio. O centro guiado se move em um círculo de raio a centrado em F (extraído de Murray & Dermott, 1999).

Se transformarmos para um sistema de coordenadas retangulares centra-

do em G , as coordenadas de P serão:

$$x_G = r \cos(f - M) - a \quad (2.87)$$

$$y_G = r \sin(f - M) \quad (2.88)$$

Para ordem de e , a expansão de $f - M$ se torna:

$$f - M \approx 2e \sin M. \quad (2.89)$$

Pela relação:

$$r_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2, \quad (2.90)$$

$$r_2^2 = (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2. \quad (2.91)$$

Como a direção do eixo é escolhido tal que as duas massas estão sempre localizadas ao longo das coordenadas $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$ e $(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$ e da análise geométrica da figura (2.8), temos:

$$x_G \approx -ae \cos M \quad (2.92)$$

$$y_G \approx 2ae \sin M \quad (2.93)$$

e

$$\frac{x_G^2}{(ae)^2} + \frac{y_G^2}{(2ae)^2} \approx 1. \quad (2.94)$$

Se o centro guiado G se move em torno do foco F em um círculo de raio a , com movimento médio n e período $2\pi/n$, P se move próximo a G em sentido oposto a uma elipse 2:1 de semi-eixo maior $2ae$, semi-eixo maior menor ae , e período $2\pi/n$. O movimento de P em relação a F é uma figura de Lissajou obtida pela superposição de dois movimentos harmônicos com uma frequência comum n , a diferença de fase de $\pi/2$, e uma razão de amplitude 2:1.

A nova expressão para a força com inclusão do centro guiado é:

$$F_1 = 2n\dot{y} + x - \left(\mu_1 \left(\frac{\mu_2 + x}{r_1^3} \right) - \mu_2 \left(\frac{x - x_G}{r_2^3} \right) \right) \quad (2.95)$$

$$F_2 = -2n\dot{x} + y - \left(\frac{\mu_1 y}{r_1^3} \right) - \left(\mu_2 \left(\frac{y - y_G}{r_2^3} \right) \right) \quad (2.96)$$

onde

$$r_1^2 = (-\mu_2 - x)^2 + (-y)^2 \quad (2.97)$$

$$r_2^2 = (x_G - x)^2 + (y_G - y)^2 \quad (2.98)$$

2.4.2 Simulações com o Centro Guiado

Nesse ítem foram feitas simulações com objetivo de analisar o movimento da partícula quando submetida à presença de um satélite com órbita excêntrica para verificar se, nesse caso, a região de ferradura é diminuída. Essa análise é estendida colocando a partícula com órbita excêntrica e, em seguida, para o caso onde ambos estão em órbitas excêntricas.

Na figura (2.9) é mostrada a variação do semi-eixo maior e do raio orbital da partícula por um tempo de 800 anos. Na simulação numérica mostrada na figura (2.9), as condições iniciais são semi-eixo maior $a_p = 133603$ km e $a_s = 133583$ km e ângulo de fase inicial $\theta_p = 3^\circ$ e $\theta_s = 0$ da partícula e do satélite, respectivamente. A partícula é confinada em uma região coorbital, por um período sinódico de aproximadamente 120 anos, por mais que a variação da excentricidade induza uma variação no raio orbital. A figura (2.9) mostra a amplitude desta variação após um período de aproximadamente 800 anos.

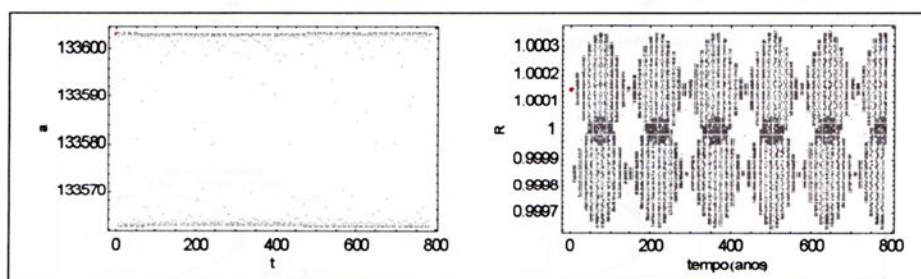


Figura 2.9: A variação de (a) semi-eixo maior e de (b) raio orbital da partícula localizada a aproximadamente 20 km do satélite por um tempo de 800 anos. As condições iniciais são semi-eixo maior $a_p = 133603$ km e $a_s = 133583$ km e ângulo de fase inicial $\theta_p = 3^\circ$ e $\theta_s = 0$ da partícula e do satélite, respectivamente.

Na figura (2.10) pode-se verificar a posição, onde são apresentadas 10 órbitas, da partícula e suas diferentes configurações, uma vez que existe grandes variações devido a perturbação do satélite. As condições iniciais são semi-eixo maior $a_p = 133603$ km e $a_s = 133583$ km, excentricidade $e_p = 0$ e $e_s = 10^{-4}$, $\theta_p = 3^\circ$ e $\theta_s = 0$, para partícula e satélite, respectivamente. Esta configuração é periódica, figura (2.9), talvez este fato esteja relacionado à existência de uma ressonância entre a partícula e o satélite.

Na figura (2.11) pode-se verificar as posições do centro guiado com o

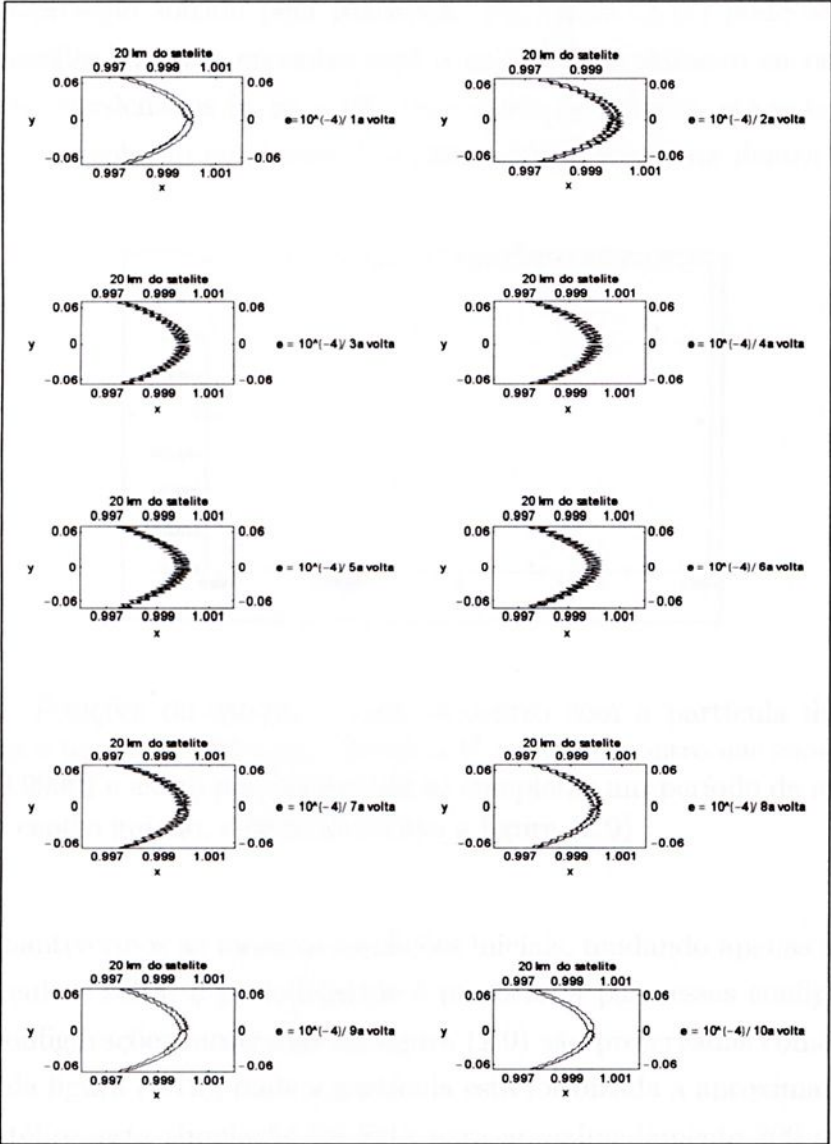


Figura 2.10: Posições da partícula devido a perturbação do satélite, por ocasião de sua aproximação. As condições iniciais são semi-eixo maior $a_p = 133603\text{ km}$ e $a_s = 133583\text{ km}$ e ângulo de soltura $\theta_p = 3^\circ$ e $\theta_s = 0$ da partícula e do satélite, respectivamente.

passar do tempo, esta configuração está relacionada às condições iniciais descritas na simulação mostrada nas figuras (2.9) e (2.10). Cada ponto ilustrado na figura (2.11) representa o encontro do satélite com a partícula quando as condições iniciais ambos são iguais, a ação desses encontros é descrita na figura (2.12) que ilustra a perturbação sofrida pela partícula. Na figura (2.13) pode-se notar a posição do satélite em cada encontro com a partícula, o primeiro encontro esta relacionado às coordenadas $(x, y) = (0, -1)$ e assim por diante, até se completar um período de revolução em torno do centro guiado conforme ilustra a figura (2.9).

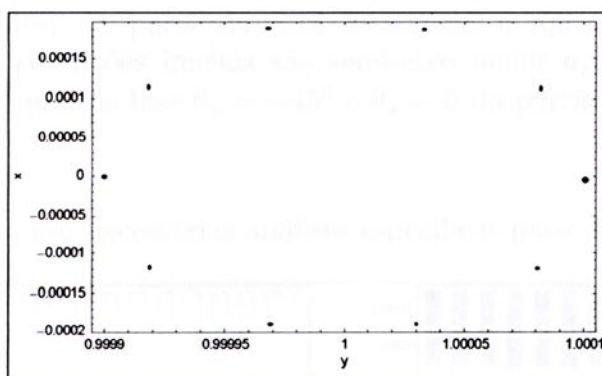


Figura 2.11: Posições do satélite a cada encontro com a partícula durante a evolução para o tempo de 120 anos. Temos o 1^o e o 11^o encontro nas coordenadas $(x, y) = (0, 0.9999)$ e assim por diante, até se completar um período de revolução em torno do centro guiado, conforme ilustra a figura (2.9).

Se mantivermos as mesmas condições iniciais, mudando apenas a fase de onde a partícula é solta, a periodicidade é preservada para essas configurações, ou seja, as configurações mostradas na figura (2.9) são preservadas como mostra a simulação da figura (2.12), onde a partícula está localizada a aproximadamente 20 km do satélite, esta simulação foi feita para aproximadamente 300 anos. As condições iniciais são semi-eixo maior $a_p = 133603$ km e $a_s = 133583$ km e ângulo de fase $\theta_p = -45^\circ$ e $\theta_s = 0$ da partícula e do satélite, respectivamente.

Porém, se incluirmos a excentricidade da partícula tal qual a do satélite, $e_{sat} = e_{part} = 10^{-4}$, esta também é confinada na região de ferradura conforme mostram a figura (2.13). A medida em que aumentarmos a excentricidade da partícula e do satélite, as colisões poderão ocorrer. A inclusão da excentricidade do satélite, faz com que a região estável da ferradura possa vir a diminuir, podendo haver acreção entre as partículas, no caso quando suas velocidades relativas forem

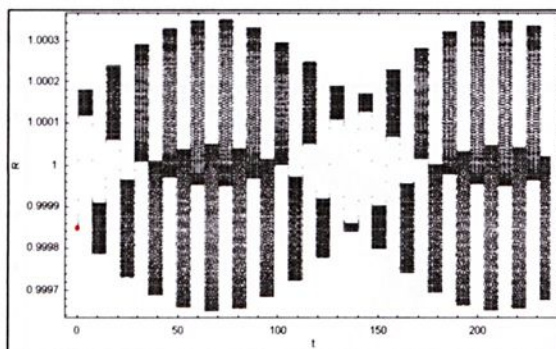


Figura 2.12: Ilustração mostrando a preservação da periodicidade da partícula, onde o raio orbital da partícula está localizada a aproximadamente 20 km do satélite. As condições iniciais são semi-eixo maior $a_p = 133603 \text{ km}$ e $a_s = 133583 \text{ km}$ e ângulo de fase $\theta_p = -45^\circ$ e $\theta_s = 0$ da partícula e do satélite, respectivamente.

pequenas. Entretanto são necessárias análises específicas para esta verificação.

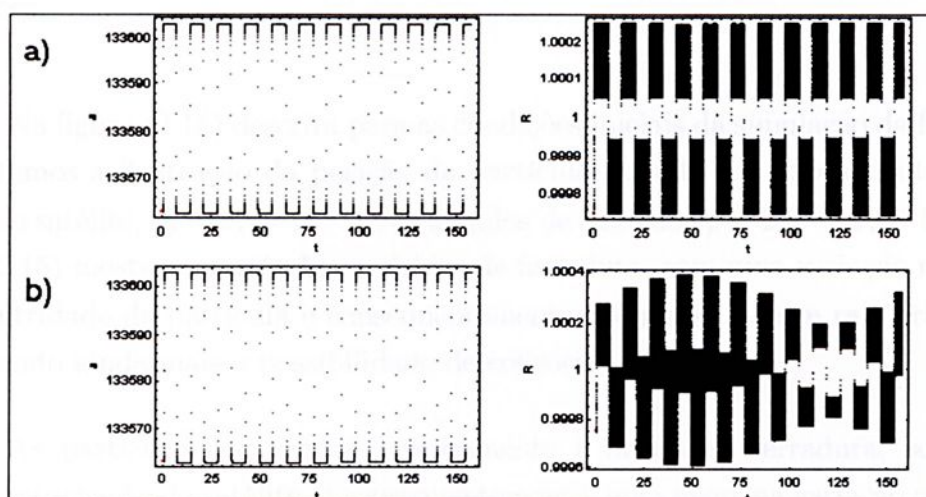


Figura 2.13: Variação do semi-eixo maior e do raio orbital da partícula localizada a aproximadamente 40 km do satélite. Ambos com órbitas excêntricas por um período de tempo de 150 anos. O ângulo de fase que os separa é de 3° em a) e 270° em b), respectivamente.

Na figura (2.14) descrita para as condições iniciais da simulação da figura (2.13), observa-se a ilustração da posição da partícula quando sua excentricidade é igual a do satélite, $e_p = e_s = 10^{-4}$, e os ângulos de fase são $\theta_p = 3^\circ$ e $\theta_s = 0^\circ$. O movimento da partícula permanece confinado, porém, existe variação na excentricidade e consequentemente a variação em seu raio orbital, aumentando a

possibilidade de colisões.

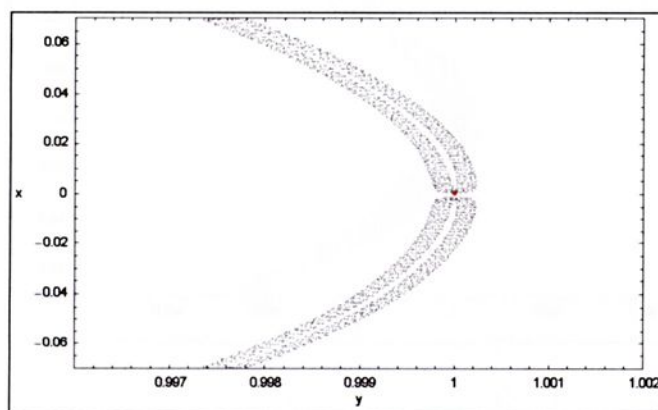


Figura 2.14: Ilustração da posição da partícula quando sua excentricidade é igual a do satélite, $e_p = e_s = 10^{-4}$, e os ângulos de fase são $\theta_p = 3^\circ$ e $\theta_s = 0^\circ$. O movimento da partícula permanece confinado, porém, existe variação na excentricidade e consequentemente a variação em seu raio orbital, aumentando a possibilidade de colisões.

Na figura (2.15) descrita para as condições iniciais da simulação da figura (2.13), temos a ilustração da posição da partícula quando sua excentricidade é igual a do satélite, $e_p = e_s = 10^{-4}$, e os ângulos de fase são $\theta_p = 270^\circ$ e $\theta_s = 0^\circ$. A figura (2.15) mostra a partícula em órbita de ferradura, com uma variação maior na excentricidade da partícula e consequentemente a variação do seu raio orbital, aumentando ainda mais a possibilidade de colisões.

As partículas localizadas internamente à órbita de ferradura, sofrem menor perturbação do satélite, e consequentemente, uma pequena variação na excentricidade e em seu raio orbital. Na figura (2.16), têm-se um mosaico mostrando as diferentes variações dos semi-eixos maiores e dos raios orbitais de partículas colocadas em posições intermediárias das órbitas de ferradura. As partículas são colocadas a 5 km, 10 km e 15 km do satélite, para o ângulo de fase da partícula $\theta_p = -3^\circ$ e excentricidade do satélite $e_s = 10^{-4}$.

2.4.3 Região de Caos

A formação da região caótica está relacionada com as ressonâncias entre partículas do anel e satélites, bem como as colisões entre as partículas. Esta região

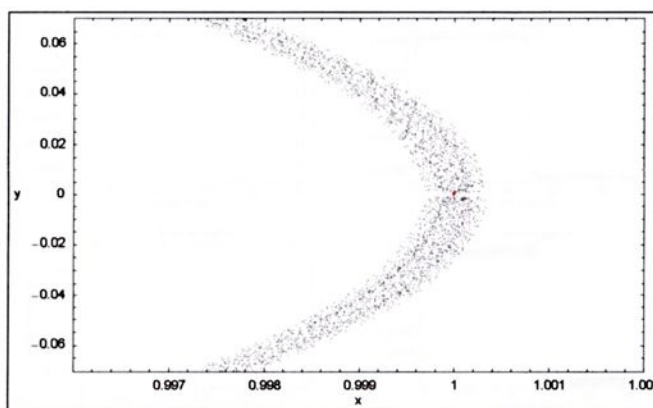


Figura 2.15: Ilustração da posição da partícula quando sua excentricidade igual é igual a do satélite, $e_p = e_s = 10^{-4}$, e os ângulos de fase são $\theta_p = 270^\circ$ e $\theta_s = 0^\circ$. A figura (2.15) mostra a partícula em órbita de ferradura, com uma variação maior na excentricidade da partícula e conseqüentemente a variação do seu raio orbital, aumentando ainda mais a possibilidade de colisões.

está localizada próximo às órbitas de ferradura e consiste de partículas que devido a “grande aproximação” com o satélite sofreram uma grande variação em sua órbita.

Com relação às ressonâncias, as temos isoladas, quando as distâncias entre elas é maior que a amplitude de onda. A distância entre elas, dada por (Goldreich & Tremaine, 1980), é

$$s = \left| \frac{dx}{dm} \right| = \frac{3x^2}{2a} \quad (2.99)$$

onde x é a distância entre o satélite e a partícula e a é o semi-eixo maior do satélite. No caso onde não existe sobreposição de ressonâncias, a distância entre as ressonâncias é maior que a amplitude das ondas. Porém, quando se dá o inverso, e temos amplitude de ondas maior que as distâncias entre as ressonâncias, ocasionando uma sobreposição, surge a formação da região caótica devido ao espalhamento de partículas e também devido às colisões entre elas. No entanto se analisarmos a separação entre as ressonâncias dada pela equação (2.99) e a amplitude das ondas formadas ($A = e_{anel} a_{anel}$) (Dermott, 1981) veremos que existe uma sobreposição na região próxima a Pan que se estende até o interior do anel A (figura 2.17), onde x é a distância entre o satélite e a partícula e a_{anel} e e_{anel} são o semi-eixo maior e a excentricidade do anel.

A figura (2.17) mostra a variação da amplitude e da distância entre as

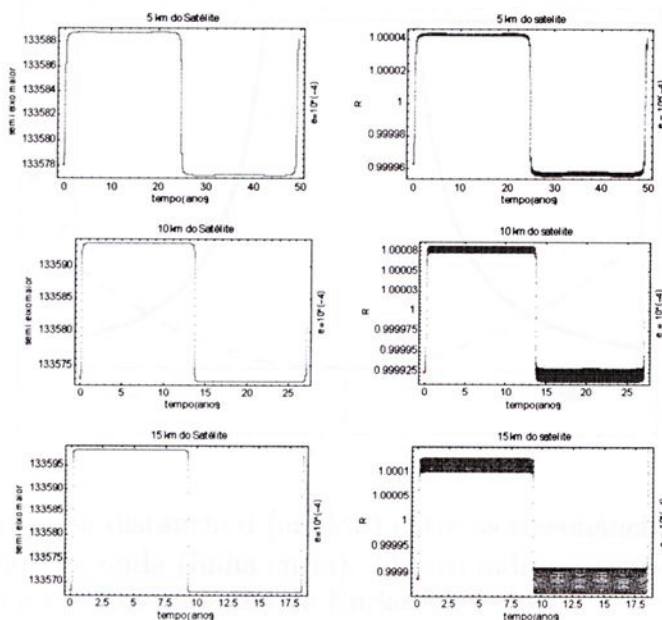


Figura 2.16: Diferentes variações dos semi-eixos maiores e dos raios orbitais de partículas colocadas em posições intermediárias das órbitas de ferradura. As partículas são colocadas a 5 km, 10 km e 15 km do satélite, respectivamente, para condições iniciais de $\theta_p = -3^\circ$ e $e_s = 10^{-4}$ com $e_p = 0$ e $e_s = 10^{-4}$.

ressonâncias na região da Falha de Encke. Teoricamente a Falha de Encke deveria começar na interseção entre as linhas cheias (amplitude) e as linhas tracejadas (distância entre as ressonâncias), ou seja, possuindo aquele intervalo como largura, pois a partir daí a amplitude fica maior que a distância entre as ressonâncias, constituindo uma região onde não poderia, teoricamente, existir matéria depois de um período de tempo.

A região de caos tem a largura dada por:

$$W = 2 \times 1,3\mu^{\frac{2}{7}}a_{Sat} \quad (2.100)$$

valor estimado por Wisdom (1980) para ressonâncias sobrepostas no problema circular, planar, restrito de três corpos, onde μ é a razão de massa entre o satélite e o planeta, a é o semi-eixo maior do satélite.

Usando a equação proposta por Wisdom (1980), para o sistema Pan-Falha de Encke, a largura seria de aproximadamente 250 km. Segundo as imagens obtidas pelas sondas Voyagers 1 e 2 seria de aproximadamente 325 km.

Como pode-se perceber ao analisar a figura (2.17), a distância entre as

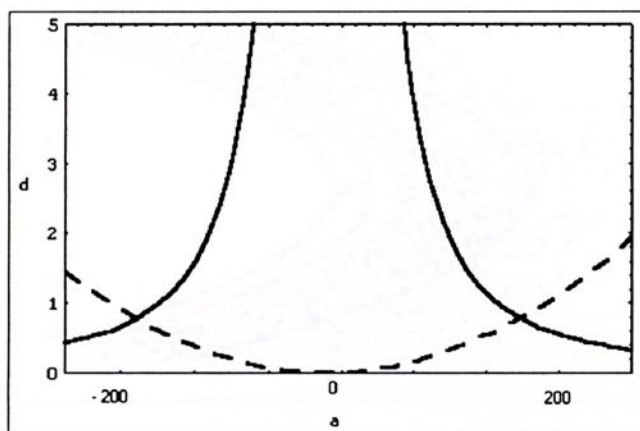


Figura 2.17: Variação da distância d (em km) entre as ressonâncias (linha tracejada) e da amplitude da onda (linha cheia). O zero indica o semi-eixo maior do satélite, localizado no centro da Falha de Encke.

ressonâncias é menor que 1 km na Falha de Encke. Como a variação de semi-eixo maior é maior que este valor, há a sobreposição de ressonâncias, e por fim o surgimento da região caótica.

2.4.4 Resultados numéricos

Neste terceiro e último regime, relacionado ao surgimento da região caótica, buscou-se verificar a largura da região caótica comparando com os resultados do estudo teórico de Wisdom (1980) e aos obtidos com as imagens das Voyagers.

A figura (2.18) mostra três partículas localizadas dentro da falha, distribuídas na órbita de ferradura para $a_p = 133603$ km, na região caótica para $a_p = 133673$ km, e na borda externa da falha para $a_p = 133753$ km, com excentricidade do satélite $e_s = 0$ e ângulo de fase da partícula $\theta_p = 3^\circ$. Nesta simulação pode-se verificar que as partículas da região caótica se espalham por toda a falha, chegando até a borda. A figura (2.19) ilustra a situação das partículas descritas na figura (2.20), porém, com a excentricidade do satélite $e_{Sat} = 10^{-4}$. Pode-se verificar nesta simulação o espalhamento das partículas das três regiões analisadas dentro da falha.

A diferença entre as simulações mostradas nas figuras (2.18) e (2.19) está na excentricidade inserida nos dados iniciais do satélite, que por sua vez faz com que as partículas se espalhem pelas três regiões. A partícula em órbita de ferradu-

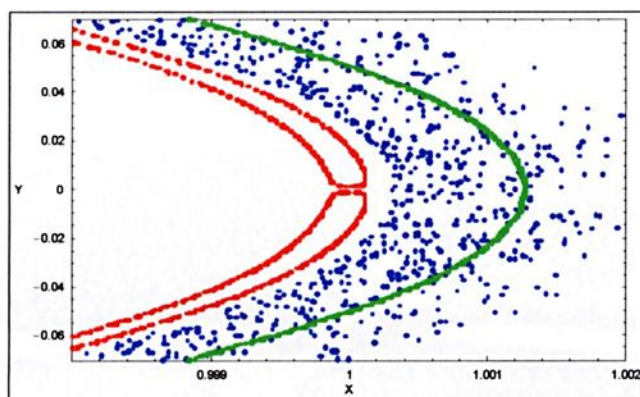


Figura 2.18: Esta figura mostra três partículas localizadas dentro da falha, distribuídas na órbita de ferradura, na região caótica e na borda externa da falha com excentricidade do satélite $e_{Sat} = 0$.

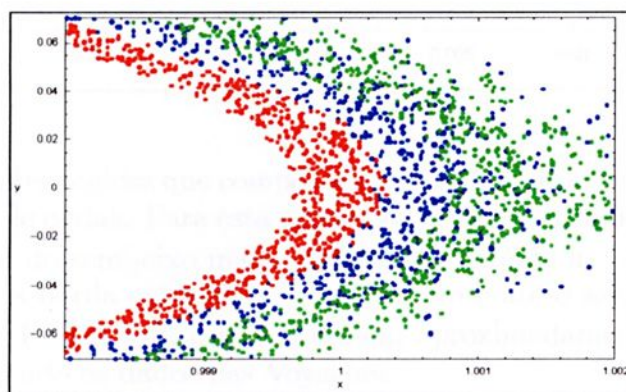


Figura 2.19: Esta figura mostra as três partículas distribuídas com as mesmas condições das partículas da figura (2.20) porém, com a excentricidade do satélite $e_{Sat} = 10^{-4}$.

ra, como visto permanecem confinadas, porém, existe variação na excentricidade da partícula e consequentemente a variação do seu raio orbital, aumentando a possibilidade de colisões.

Na figura (2.20), podemos verificar as diferentes regiões que compõem à Falha de Encke: região de ferradura, caos e formação de ondas. Para esta simulação, foram utilizadas 150 partículas distribuídas a partir do semi-eixo maior próximo ao satélite $a_p = 133585$ km até o semi eixo-maior da borda externa $a_p = 133746$ km e até o semi-eixo maior da borda interna $a_p = 133424$ km, e compreendem aproximadamente a largura da Falha de Encke segundo os dados das Voyagers.

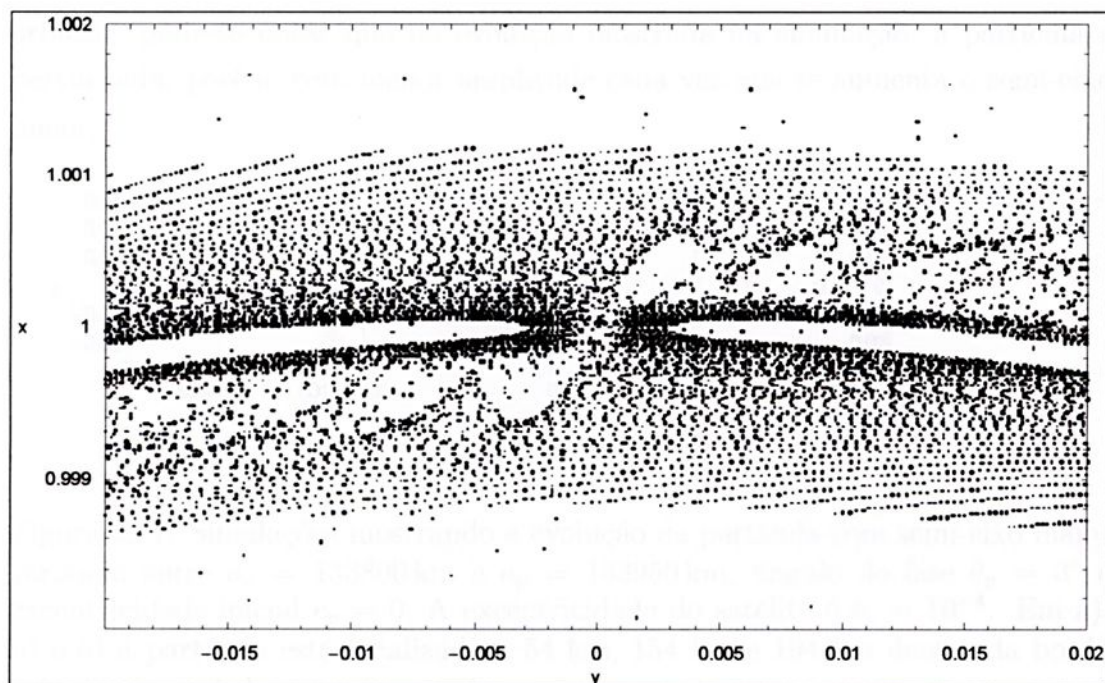


Figura 2.20: Diferentes regiões que compõem a Falha de Encke: região de ferradura, caos e formação de ondas. Para esta simulação, foram utilizadas 150 partículas distribuídas a partir do semi-eixo maior próximo ao satélite $a_p = 133585 \text{ km}$ até o semi eixo-maior da borda externa $a_p = 133746 \text{ km}$ e até o semi-eixo maior da borda interna $a_p = 133424 \text{ km}$, e compreendem aproximadamente a largura da Falha de Encke segundo os dados das Voyagers.

Segundo a teoria apresentada por Wisdom (1980), essa largura é de aproximadamente 125 km, porém, esse é um valor teórico e apresenta simplificações. Segundo os dados obtidos pela análise das imagens das Voyagers, essa largura seria de aproximadamente 162,5 km.

Dos dados apresentados, vemos que a largura da região caótica obtida pela simulação numérica é menor do que a obtida pelas imagens das sondas. Possivelmente exista um mecanismo adicional que mantenha a Falha com esta largura. Existem evidências de que outros satélites possam coorbitar com os anéis estreitos, contribuindo para a manutenção da Falha (Ferrari & Brahic, 1997).

Na figura (2.21) as simulações mostram as posições da partícula com semi-eixo maior variando entre $a_p = 133800 \text{ km}$ e $a_p = 133950 \text{ km}$, ângulo de fase $\theta_p = 3^\circ$ e excentricidade inicial $e_p = 0$. A excentricidade do satélite é $e_s = 10^{-4}$. Em (2.21-a), (2.21-b) e (2.21-c) a partícula está localizada a 54 km, 54 km e 194 km dentro da borda externa do anel A, respectivamente. Após 2.615 períodos

orbitais, pode-se notar que na evolução mostrada na simulação, a partícula é perturbada, porém, com menor amplitude cada vez que se aumenta o semi-eixo maior.

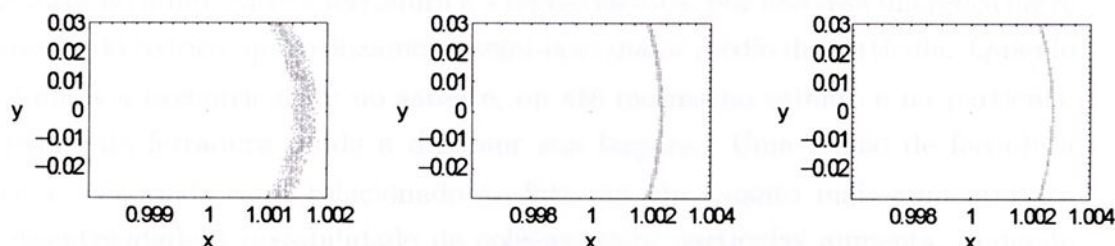


Figura 2.21: Simulações mostrando a evolução da partícula com semi-eixo maior variando entre $a_p = 133800$ km e $a_p = 133950$ km, ângulo de fase $\theta_p = 3^\circ$ e excentricidade inicial $e_p = 0$. A excentricidade do satélite é $e_s = 10^{-4}$. Em a), b) e c) a partícula está localizada a 54 km, 154 km e 194 km dentro da borda externa do anel A, respectivamente.

Analisando as simulações apresentadas no mosaico (2.21), na tentativa de verificar em qual semi-eixo maior a partícula se estabilizaria, podemos notar que a região caótica é um pouco maior, ou seja, além da região caótica proveniente da falha, a partícula seria espalhada dentro da borda por pelo menos 190 km. Como consideramos o caso para as bordas interna e externa simétricas, somando a região da falha com o de espalhamento dentro das bordas, a região caótica chegaria a 700 km.

2.4.5 Discussão

Em relação ao surgimento de ondas nas bordas da falha, verificou-se que dadas as condições iniciais da partícula, teoricamente, o satélite gera uma onda com amplitude $A = 13,37$ km, e comprimento $l = 1531,53$ km. Na simulação da figura (2.3), a amplitude da onda é $A = 26,8$ km e o comprimento de onda $l = 1337,5$ km. A diferença pode ser devida ao fato do semi-eixo maior da partícula, na análise teórica, ser tomado como semi-eixo maior médio, e na simulação a amplitude ter sido tomada pela distância entre as partículas postadas mais interna e externamente.

Na região de ferradura, considerando o satélite e a partícula em órbitas

circulares, o resultado apresentado segundo a teoria é de 28.8 km e segundo a simulação numérica é de 34 km. Como a largura é uma função do semi-eixo, na simulação podemos controlar o semi-eixo maior até uma situação em que este se encontre no limite entre a ferradura e a região caótica, por isso essa diferença entre o resultado teórico, que utilizamos o semi-eixo maior médio da partícula. Quando incluímos a excentricidade no satélite, ou até mesmo no satélite e na partícula, a região de ferradura tende a diminuir sua largura. Uma região de ferradura menor, isto pode estar relacionado ao fato em que quanto mais aumentarmos a excentricidade a possibilidade de colisões entre partículas aumenta, podendo haver acreção ou mesmo dissipação por parte do material.

Com relação à região caótica, as simulações mostraram uma variação nos diferentes regimes apresentados, quando se inclui a excentricidade no satélite. Pode-se verificar que a partícula localizada na região caótica é extremamente perturbada pelo satélite, e após alguns períodos orbitais ela tende a ser removida dessa região. Do mesmo modo, a partícula colocada nas bordas da falha, continua a sofrer variações até aproximadamente 190 km dentro das bordas, onde por sua vez começa a se estabilizar. Comparativamente, as configurações que apresentamos no trabalho mostra que quando a excentricidade do satélite é incluída, a região caótica é bem maior do que se acreditava até então. Se considerarmos a perturbação sofrida pela partícula até que ela tenha um comportamento estável, a região de caos se aproxima dos 700 km, diferente dos 250 km apresentados pela teoria e dos 325 km apresentados pelos dados das Voyagers. Entretanto, nessa consideração, não foi incluído o anel A (anel denso), o qual tornaria o efeito sobre as bordas diferente.

Capítulo 3

RESSONÂNCIAS

3.1 Introdução

Como sugerido por Kirkwood em 1867, perturbações ressonantes influenciam não somente as falhas no Cinturão Principal de Asteróides, mas também as estruturas encontradas no sistema de anéis planetários de Saturno. Os anéis estreitos apresentam um tempo de vida inferior a idade do Sistema Solar, sendo portanto necessário mecanismos de confinamento que evitem o espalhamento do anel devido às colisões e a outros efeitos dissipativos, tais como o arrasto de Poynting Robertson. No caso de anéis planetários duas ressonâncias contribuem para o confinamento dos anéis estreitos: a ressonância de Lindblad, que confina os anéis radialmente e a ressonância de corrotação, que os confina azimutalmente. Exemplos dos efeitos dessas ressonâncias são encontrados nos anéis de Urano e Netuno. Nos anéis de Urano, a descoberta de dois satélites ‘pastores’, Cordélia e Ofélia, confirmou o mecanismo de pastoreamento proposto por Goldreich & Tremaine (1979).

Na Falha de Encke de Saturno existem dois anéis estreitos, o anel central e o anel interno, e o satélite Pan (Showalter, 1991). Segundo Showalter (1991), Pan é responsável pela Falha de Encke e pelo anel estreito que mantém em órbita de ferradura (ver diferentes regimes, capítulo 2). O anel interno está situado na região caótica gerada pela sobreposição de ressonâncias devido ao satélite Pan, portanto, ou o anel interno foi formado recentemente ou existe algum mecanismo que o confina nesta região. O anel central está em um regime de ferradura, também devido ao satélite Pan.

Neste capítulo serão localizadas as ressonâncias com cada satélite de Saturno atentando se alguma delas está localizada dentro da Falha de Encke, o tipo de ressonância, o semi-eixo maior ressonante, bem como calcular os torques devido a estes satélites no intuito de verificar se o confinamento do anel interno pode estar relacionado à ação de ressonâncias.

3.1.1 Teoria

Consideremos o caso de uma partícula de anel em órbita circular ao redor de um planeta achatado, com raio r e velocidade angular n em um plano equatorial $z = 0$.

Esta partícula sofre perturbações, ou seja, oscila na direção vertical e horizontal, gerando três frequências naturais e características destas oscilações: a frequência horizontal $k(r)$, a frequência vertical $\mu(r)$ e a frequência tangencial $\Omega(r)$, onde $\mu^2 + k^2 = 2\Omega^2$ (Shu, 1984). Se o planeta fosse perfeitamente esférico, μ , k , e Ω seriam iguais; entretanto, porque $\mu \neq k \neq \Omega$, uma órbita não circular em um sistema de referência inercial geralmente não é fechada. Com $\mu > \Omega$ e $k < \Omega$, temos a precessão nodal e apsidal, que são entendidas e interpretadas em termos dessas três frequências naturais do movimento da partícula próxima ao planeta achatado. As equações dessas frequências podem ser escritas (Lissauer & Cuzzi, 1982):

$$n^2 = \frac{(GM_P)}{r^3} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_P}{r} \right)^2 - \frac{15}{8} J_4 \left(\frac{R_P}{r} \right)^4 \right) \quad (3.1)$$

$$k^2 = \frac{(GM_P)}{r^3} \left(1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_P}{r} \right)^2 + \frac{45}{8} J_4 \left(\frac{R_P}{r} \right)^4 \right) \quad (3.2)$$

onde $k = n - \dot{\omega}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = & \left(\frac{(GM_P)}{r^3} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_P}{r} \right)^2 - \frac{15}{8} J_4 \left(\frac{R_P}{r} \right)^4 \right) \right)^{\frac{1}{2}} - \\ & - \left(\frac{(GM_P)}{r^3} \left(1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_P}{r} \right)^2 + \frac{45}{8} J_4 \left(\frac{R_P}{r} \right)^4 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde M_P é a massa do planeta, r é o raio da partícula orbitando o planeta, e os valores dos coeficientes de gravidade são $J_2 = 16,299.1 \pm 18 \times 10^{-6}$ e $J_4 = -916.7 \pm 38 \times 10^{-6}$ (Cuzzi *et al.*, 1984) para o planeta Saturno.

Considere um segundo corpo a perturbar a partícula do anel. O satélite descreve uma órbita circular de raio r' , e também perturba a partícula fazendo com que ela oscile, gerando assim duas novas frequências, horizontal $k'(r)$ e vertical $\mu'(r)$ que podemos descrever novamente como (Lissauer & Cuzzi, 1982):

$$(n')^2 = \frac{(GM_P)}{r'^3} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_P}{r'} \right)^2 - \frac{15}{8} J_4 \left(\frac{R_P}{r'} \right)^4 \right) \quad (3.4)$$

$$(k')^2 = \frac{(GM_P)}{r'^3} \left(1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_P}{r'} \right)^2 + \frac{45}{8} J_4 \left(\frac{R_P}{r'} \right)^4 \right) \quad (3.5)$$

onde $k' = n' - \dot{\omega}'$,

$$\begin{aligned} \dot{\omega}' = & \left(\frac{(GM_P)}{r'^3} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_P}{r'} \right)^2 - \frac{15}{8} J_4 \left(\frac{R_P}{r'} \right)^4 \right) \right)^{\frac{1}{2}} - \\ & - \left(\frac{(GM_P)}{r'^3} \left(1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_P}{r'} \right)^2 + \frac{45}{8} J_4 \left(\frac{R_P}{r'} \right)^4 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde r' é o raio do satélite orbitando o planeta.

Considere o satélite orbitando o planeta de massa M_P e raio R_P . Este satélite possui uma pequena excentricidade em plano inclinado por um pequeno ângulo i em relação ao plano equatorial do planeta $z = 0$. As coordenadas do satélite são dadas pelas coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) e está centrado no planeta, onde r é a distância radial e ϕ é a longitude.

Como as equações relacionadas ao satélite estão sendo expandidas por estar sendo considerada uma pequena excentricidade e e inclinação i , o potencial perturbador é periódico em relação ao tempo (t) e longitude (ϕ), e os termos podem ser decompostos na forma (Shu, 1984):

$$\Phi_{mnp}(r, z) e^{i(\omega t - m\phi)} \quad (3.7)$$

onde a frequência perturbadora ω é a soma das combinações de Ω_{mnp} , μ_{mnp} e κ_{mnp} ,

$$\omega_{Sat} = m\Omega_{Sat} \pm n\mu_{Sat} \pm p\kappa_{Sat} \quad (3.8)$$

onde m e n e p são inteiros não negativos, e o índice *Sat* refere-se ao satélite.

A partícula pode estar em ressonância se a frequência relativa a qual ela é perturbada pelo satélite é igual para todas as frequências naturais de sua oscilação (Shu, 1984). Ressonâncias de corotação são localizadas onde $n = \Omega_P$ e as ressonâncias de Lindblad são localizadas onde $\kappa_P = \pm m(n - \Omega_P)$ (Shu, 1984).

3.1.2 Ressonância de Corotação

As ressonâncias de corotação são localizadas onde a diferença entre n e Ω_{Sat} é igual a zero, ou seja, $n = \Omega_{Sat}$. Dermot (1984) interpretou o confinamento azimutal como uma variação no momento angular de uma partícula em ressonância com um satélite, a qual fica librando em torno de seu centro de referência. Se considerarmos uma partícula deslocada de seu ponto de equilíbrio em direção ao planeta, seu movimento médio será maior do que o movimento médio ressonante.

Na figura (3.1) (exemplo da ressonância 3:2, extraído de Murray & Dermott, 1999) vemos um satélite exterior, se movendo translacionalmente com o mesmo movimento médio da partícula. Os pontos na região A_1 e A_2 correspondem ao apocentro da órbita do satélite. Na figura os pontos em A_1 e A_2 estão sobrepostos, isto se deve ao fato da velocidade do satélite ser menor que no pericentro. Na figura (3.1) podemos verificar que os pontos estão mais espaçados no pericentro, devido a maior velocidade do satélite nesta região.

O efeito sofrido pela partícula em A_1 faz que esta ganhe energia e momento angular, e como consequência a partícula aumenta seu semi-eixo maior. Em A_2 a partícula se encontra novamente com o satélite, o efeito é o contrário do que ocorre em A_1 , a partícula perde energia e momento angular, diminuindo seu semi-eixo maior. Devido a esses encontros, a partícula começa a librar.

Dermott & Murray (1983) deduziram a equação para a largura máxima do arco de libração desenvolvido pela partícula. Para o caso geral de ressonância

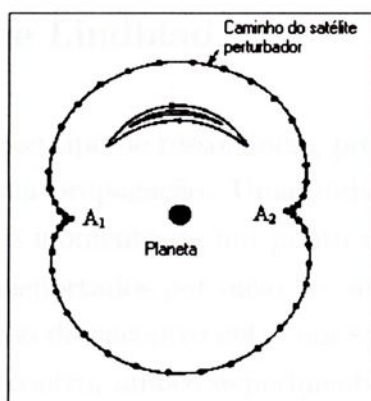


Figura 3.1: Ilustração do confinamento azimutal de uma partícula de anel em ressonância de corotação com um satélite externo. Este exemplo representa a ressonância 3:2 (adaptado de Murray & Dermott, 1994).

temos (Murray & Dermott, 1999):

$$(p + q) \lambda' - p \lambda - q \varpi' = \phi \quad (3.9)$$

onde λ e λ' são respectivamente, a longitude média da partícula e do satélite perturbador, ϖ' é o pericentro do satélite perturbador em órbita excêntrica, p e q são inteiros e ϕ é o ângulo ressonante. Em uma configuração estável ϕ está librando, isto é, está oscilando próximo a π . O desvio máximo do seu movimento médio é dado por:

$$\delta n = \pm \left(\frac{12\mu |S|}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

onde $S = f(a, e, I)$ é deduzido do potencial perturbador $R = \mu \sum S \cos \Phi$ devido a massa do corpo secundário.

Assim, a largura máxima (W_c) do arco de libração desenvolvido pela partícula é dada por (Dermott & Murray, 1983):

$$W_c = 2\delta a = \pm 8 \left(\frac{\mu |S|}{3n^2 a^2} \right)^2 a. \quad (3.11)$$

onde a é o semi-eixo maior da partícula do anel, μ a razão de massa do corpo perturbador com o corpo central, n é o movimento médio e S é o termo da função perturbadora associada com o argumento ressonante (Dermott & Murray, 1983).

3.1.3 Ressonância de Lindblad

Para descrevermos esse tipo de ressonância, precisamos retornar ao item sobre formação de ondas e sua propagação. Uma onda é como um sinal propagado transportando energia e momento de um ponto a outro. No nosso caso a energia e o momento são transportados por meio de campo gravitacional. Podemos citar como exemplo o caso do encontro entre um satélite e uma partícula de anel. Quando ocorre esse encontro, ambos experimentam uma força de atração produzida pela ação do campo gravitacional que o satélite exerce sobre o anel, o que resulta numa aproximação entre anel e satélite. Cada partícula do anel, que inicialmente está se movimentando em uma órbita circular, experimenta uma pequena alteração em sua excentricidade e em seu semi-eixo maior, ou seja, a cada encontro o satélite exerce um impulso sobre o anel que resultará na formação de uma onda senoidal (ver diferentes regimes, capítulo 2). A amplitude (A) é proporcional à variação da excentricidade do anel:

$$A = ea$$

onde $ea = \delta a$ é o deslocamento em relação às condições iniciais para o semi-eixo maior. A excentricidade é obtida através das equações de Gauss (ver diferentes regimes, capítulo 2), as quais determinam a variação da excentricidade em relação ao tempo devido as perturbações do satélite.

Partículas de anel em uma ressonância de Lindblad com o satélite sofrem oscilações radiais. Considere o movimento médio de uma partícula em translação com o movimento médio do satélite perturbador em um mesmo sistema de referência, se a órbita da partícula é fechada, então uma ressonância de Lindblad acontece. A figura (3.2) mostra as partículas do anel caminhando de forma corrotacional em relação ao mesmo centro de referência que o satélite (Dermott, 1984). As linhas com formato senoidal, mostram o caminho da partícula no mesmo sistema de referência do satélite. As linhas que se sobrepõem como indicado na figura (3.2), indica a posição do semi-eixo maior ressonante. Para partículas interiores à ressonância exata, a conjunção ocorre no pericentro. A propriedade básica da ressonância de Lindblad é permitir uma troca secular de energia e momento angular entre o satélite e a partícula (Goldreich e Tremaine, 1980).

Assim, a largura da ressonância de Lindblad (W_L) (Dermott & Murray,

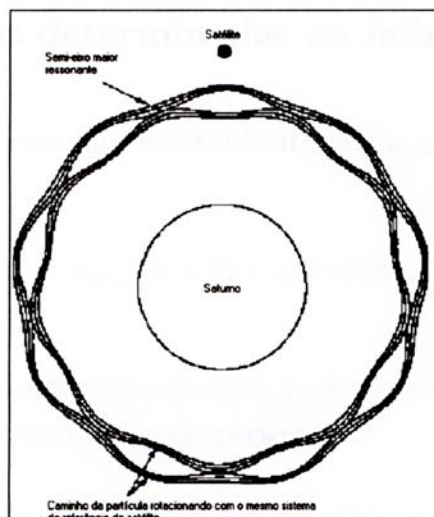


Figura 3.2: Ilustração da dinâmica da ressonância de Lindblad (3:2) de uma partícula de anel em rotação com o mesmo centro de referência do satélite perturbador (adaptado de Murray & Dermott, 1994).

1983) pode ser descrita por:

$$W_L = 4\delta a = 2.96 (m'_{sat})^{\frac{1}{2}} a \quad (3.13)$$

onde $\delta a = ea$ é o deslocamento do semi-eixo maior ressonante e m'_{sat} é a massa do satélite dividido pela massa do planeta. Se a ressonância de Lindblad ocorre, temos o comprimento de onda (λ), então encontramos m (distância do satélite até o semi-eixo maior da partícula do anel), dado por (Dermott 1981):

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = \frac{2r}{3x} = m. \quad (3.14)$$

A distância entre as ressonâncias (Goldreich e Tremaine, 1982):

$$s = \left| \frac{dx}{dm} \right| = \frac{3x^2}{2a}. \quad (3.15)$$

Se a_i e a_0 ilustram as bordas interna e externa do anel para $|a_i - a_0| \gg \frac{|a_0 - a_{sat}|^2}{a_{sat}}$, então muitas destas ressonâncias são interiores ao anel, e m pode ser aproximada a uma variável contínua (Goldreich & Tremaine, 1982).

3.1.4 Ressonâncias determinadas na falha de Encke

O semi-eixo maior ressonante é obtido através da equação geral de ressonância para o caso planar:

$$n(m - q) - n_{sat}(m + k) + q\dot{\varpi} + k\dot{\varpi}_{sat} = 0 \quad (3.16)$$

onde m é um inteiro positivo diferente de zero, q e k são inteiros, n é o movimento médio e $\dot{\varpi}$ é a variação do argumento do pericentro.

A ressonância de corrotação, responsável pelo confinamento azimutal das partículas do anel, corresponde a $k = \pm 1$ e $q = 0$, e a ressonância de Lindblad, responsável pelo confinamento radial das partículas do anel, corresponde a $k = 0$ e $q = \pm 1$. A relação ± 1 corresponde a dizer se a ressonância é interna ou externa, isto é, corresponde a dizer se a partícula se encontra interna ou externamente em relação ao satélite.

Para determinar as ressonâncias, o primeiro passo foi utilizar um valor inicial para semi-eixo maior ressonante, através da 3ª lei de Kepler:

$$n^2 a^3 = n_{sat}^2 a_{sat}^3 \quad (3.17)$$

e assumindo que $a_{sat}^3 = 1$, o valor inicial para o semi-eixo maior ressonante se torna:

$$a = \left(\frac{m - q}{m + q} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.18)$$

Depois de determinado o semi-eixo maior inicial, usaremos este valor na equação (3.16) para termos o semi-eixo maior ressonante da partícula em relação aos satélites considerados em nosso problema. O semi-eixo maior ressonante a_{res} foi obtido usando o método de Newton-Raphson.

O segundo passo foi analisar quais desses semi-eixos maiores ressonantes estavam localizados dentro da Falha de Encke.

Na tabela (3.1) apresentamos os semi-eixos maiores ressonantes dentro da Falha (apenas para ressonâncias de 1ª ordem), o satélite responsável por este semi-eixo maior ressonante, o tipo de ressonância (Corrotação ou Lindblad) e a

distância (s) entre as ressonâncias.

Tabela 3.1	Ressonâncias	
	Corrotação - s (km)	Lindblad - s (km)
Atlas-partícula (22:21)	$a_{res}=133499.1$ (195.5)	$a_{res}=133501.0$ (195.3)
Atlas-partícula (23:22)	$a_{res}=133683.6$ (178.5)	$a_{res}=133684.0$ (178.0)
Prometeu-partícula (16:15)	$a_{res}=133529.1$ (381.0)	$a_{res}=133533.4$ (380.0)

Na figura (3.3) (Giuliatti Winter & Gonçalves, 2000), temos a ilustração da localização dos anéis da Falha de Encke e das ressonâncias de Corrotação e Lindblad devido aos satélites Prometeu e Atlas.

Da figura (3.3) vemos que somente uma ressonância se aproxima da borda do anel interno, se admitirmos o erro de 10 km no semi-eixo maior do anel. É uma ressonância de Corrotação e de Lindblad devido ao satélite Atlas. Se verificarmos na tabela (3.1) veremos que a diferença entre as duas ressonâncias é pequena (< 1 km).

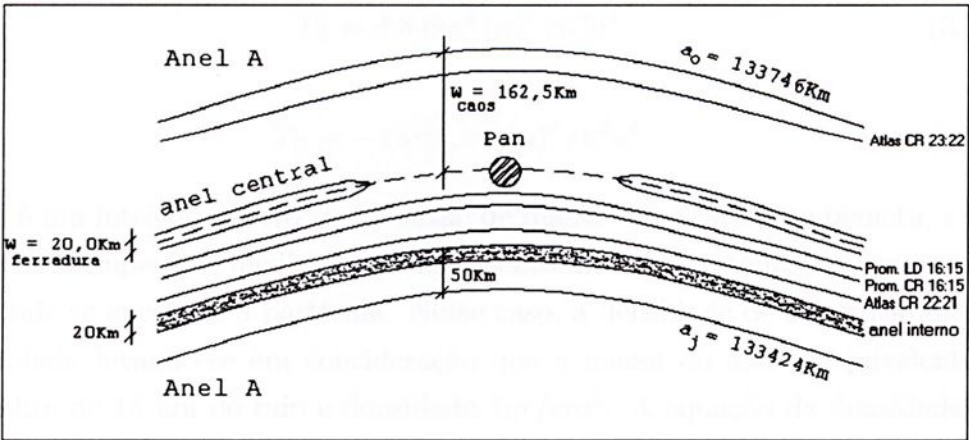


Figura 3.3: Ilustração da localização dos anéis da Falha de Encke e das ressonâncias de Corrotação e de Lindblad devido aos satélites Prometeu e Atlas. Nota-se na figura que tanto uma ressonância de Lindblad como de corrotação, devido ao satélite Atlas, encontra-se próxima a borda do anel interno.

Quando a distância entre as ressonâncias é maior que a amplitude das ondas e não há sobreposição dessas ressonâncias, chamamos de ressonâncias isoladas. Caso contrário, quando a amplitude de onda é maior que as distâncias entre as ressonâncias, chamamos de sobreposição e como consequência, o surgimento da região de caos (ver diferentes regimes). Essa ‘ação’ de sobreposição é

exercida pelo satélite Pan, interior à Falha de Encke, e responsável pela região caótica onde se encontra o anel interno, no entanto, as ressonâncias devido a Atlas não se sobrepõem.

3.2 Torques na Falha de Encke

Aqui, a análise do torque se dá com base nos semi-eixos maiores ressonantes do sistema satélite-partícula, ou seja, será analisado o torque devido as ressonâncias de corotação e de Lindblad. Para a análise será considerada a ressonância isolada (exercidas pelos satélites exteriores à Falha de Encke) e ressonância sobreposta (exercida pelo satélite Pan).

As expressões usadas para se calcular o torque dos satélites numa ressonância de corotação (T_C) e de Lindblad (T_L), ambas de primeira ordem e tomando a forma apropriada para $m \gg 1$ (Goldreich & Porco, 1987), são respectivamente:

$$T_L = \pm 8.6 m^2 (\mu)^2 \varepsilon n^2 a^4 \quad (3.19)$$

$$T_C = -13 e_{sat}^2 m^3 (\mu)^2 \varepsilon n^2 a^4 \quad (3.20)$$

onde m é um inteiro positivo, μ é a razão de massa entre satélite e planeta, ε é a densidade de superfície média, n é o movimento médio do satélite e a o semi-eixo maior onde se encontra a partícula. Nesse caso, a densidade de superfície média foi calculada levando-se em consideração que a massa do anel é equivalente a um satélite de 15 km de raio e densidade 1 gr/cm^3 . A equação da densidade de superfície média (Showalter *et al.*, 1992):

$$\varepsilon = \frac{m_{anel}}{\pi (a_0^2 - a_i^2)} \quad (3.21)$$

onde a_0 e a_i correspondem aos semi-eixos maiores das bordas interna e externa do anel.

A expressão para o torque devido a Pan (Goldreich & Tremaine, 1982) é:

$$T \cong -f \left(\frac{M_S}{M_P} \right)^2 \frac{\varepsilon \Omega^2 r^7 \Delta r}{x^4} \quad (3.22)$$

onde M_S e M_P são as massas do satélite e do planeta, Ω é a velocidade angular da partícula, r é o raio do satélite equivalente, Δr a largura do anel, x a distância do satélite perturbador à partícula e f é um coeficiente numérico (fator de normalização) o qual é igual à 8.46 para $m \gg 1$ (Borderies *et al.*, 1982). A equação (3.22) mostra o torque total sobre um anel estreito de largura Δr o qual é separado da órbita do satélite por uma distância $x = a_s - a_p \ll a_p$, então $f = 2.51$ (Borderies *et al.*, 1982). A unidade do torque é $g\,cm^3/seg^2$.

Tabela 3.2		Torques	
	Corrotação	Lindblad	Sobreposição
Atlas	-70.43	80.88	—
Prometeu	-78.10	86.55	—
Pan	—	—	19.71

Dos dados apresentados pela tabela (3.2), vemos que os torques exercidos pelos satélites exteriores são maiores do que o exercido por Pan que está dentro da Falha e bem mais próximo desse anel interno. Isto é um indício que o confinamento desse anel possa ser feito por Atlas, que possui semi-eixo maior ressonante próximo à borda e exerce um torque maior que o de Pan.

Na tabela (3.3) temos a largura de cada ressonância devida ao satélite Atlas. Essas larguras são menores que a largura do anel interno, que é de aproximadamente 20 km. Logo, Atlas não é responsável pelo confinamento do anel interno.

Tabela 3.3		Larguras	
Tipo de ressonância	Corrotação	Lindblad	
Largura	~ 1km	~ 4km	

3.2.1 Simulação numérica

Como o anel interno da Falha de Encke encontra-se em uma região considerada caótica, devido a ação do satélite Pan, tentou-se explicar, nestas simulações, a existência do anel interno por meio de ressonâncias entre satélites exteriores com partículas interiores à falha. Foi encontrada uma ressonância devida a Atlas, próxima à borda do anel interno, e como o torque exercido por Atlas sobre a partícula do anel é maior que o exercido por Pan, que está bem próximo

ao anel e é responsável pela região caótica, começou-se as simulações no intuito de verificarmos o efeito destes sobre a partícula.

Na primeira análise, para problema restrito de três corpos incluindo o achatamento do planeta, foi considerada a ação de cada satélite individualmente. Em seguida consideramos o problema de quatro corpos, para Saturno, Pan, Atlas e partícula.

A partícula foi colocada no semi-eixo maior ressonante com Atlas para verificar sua possível variação, a fim de se analisar a possibilidade do confinamento da borda do anel interno ser devido à ressonância com esse satélite.

Na figura (3.4), os dados iniciais apresentados referentes ao satélite Atlas são $a_A = 137670$ km e $e_A = 10^{-4}$, e referentes à partícula $a = 133499$ km e $e = 0$. Durante a simulação foi variado o ângulo de fase da partícula em $\theta = -3^\circ$, $\theta = -15^\circ$ e $\theta = -45^\circ$. Os resultados apresentados mostram uma pequena variação em seu semi-eixo maior (da ordem de 12 quilômetros). Porém, essa variação é devido ao achatamento do planeta. Ao serem analisados os resultados com as mesmas condições iniciais, exceção feita ao achatamento, considerado $J_2 = 0$, a partícula deixa de sofrer variações, conforme figura (3.5). Pelos resultados, considerando apenas o problema de três corpos para Atlas, a partícula estaria confinada neste semi-eixo maior ressonante. Porém, analisando simulações com semi-eixos maiores próximos do semi-eixo maior ressonante, $a = 133549$ km, e as demais condições iniciais mantidas, foi visto que Atlas não chega a perturbar a partícula, conforme figura (3.6) e (3.7). A variação mostrada na figura (3.6), é devido ao achatamento. Em 50 anos, tempo da integração, a partícula passou por Atlas pelo menos 60 vezes.

Insistindo na possibilidade de Atlas não estar sequer perturbando a partícula, foi aumentada sua massa até a razão $\mu = 10^{-8}$ sem que houvesse variação no semi-eixo maior conforme ilustrado nas figuras (3.4), (3.5), (3.6) e (3.7). Porém, quando essa razão de massa foi aumentada para $\mu = 10^{-7}$, com semi-eixo maior da partícula $a_p = 133499$ km, houve o espalhamento da partícula logo a partir do primeiro encontro com o satélite em 22 dias, como pode ser visto na figura (3.8). A partícula foi solta com ângulos de fases $\theta_p = -3^\circ$ e $\theta_p = -15^\circ$.

Na figura (3.9), os dados iniciais referentes ao satélite Pan são $a_A = 133583$ km e $e_A = 10^{-4}$, e referentes a partícula $a = 133499$ km e $e = 0$. Durante

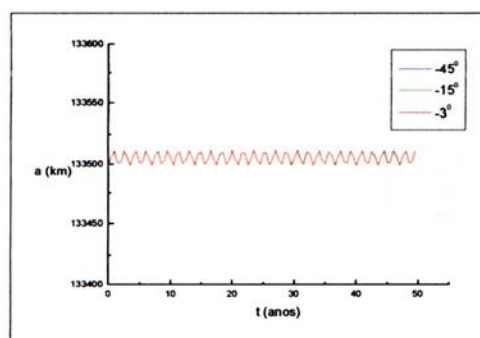


Figura 3.4: Os resultados apresentados mostram uma pequena variação no semi-eixo maior da partícula (da ordem de 12 quilômetros). Porém, essa variação é devido ao achatamento do planeta. Os dados iniciais apresentados referentes ao satélite Atlas são $a_A = 137670$ km e $e_A = 10^{-4}$, e referentes a partícula $a = 133499$ km e $e = 0$. Durante a simulação foi variado o ângulo de fase da partícula em $\theta = -3^\circ$, $\theta = -15^\circ$ e $\theta = -45^\circ$.

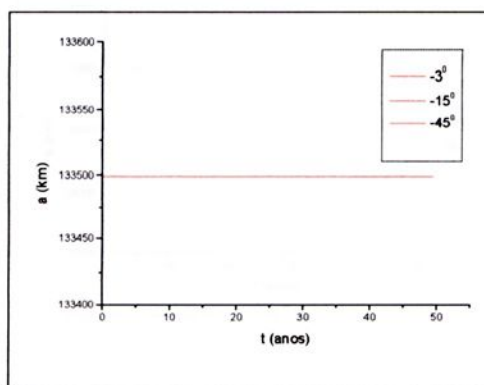


Figura 3.5: Simulação com as mesmas condições iniciais de (3.4), exceção feita ao achatamento, considerado $J_2 = 0$ a partícula deixa de sofrer variações.

a simulação foi variado o ângulo de fase da partícula em $\theta = -3^\circ$, $\theta = -15^\circ$ e $\theta = -45^\circ$. Os resultados das simulações apresentam grandes variações no semi-eixo maior da partícula, a começar por ocasião do primeiro encontro aproximadamente 465 dias para a partícula com ângulo de fase $\theta_p = -3^\circ$. A perturbação do satélite faz com que esta partícula tenda a se espalhar, conforme mostra a figura (3.9). Dependendo do ângulo de fase entre o satélite e a partícula a aproximação acontece em um tempo menor, como é o caso mostrado pela simulação. Pela ordem, $\theta_p = -45^\circ$ é perturbada primeiro, $\theta_p = -15^\circ$ em seguida, e por último quando $\theta = -3^\circ$.

Para o problema de 4 corpos foi utilizada a equação do movimento para

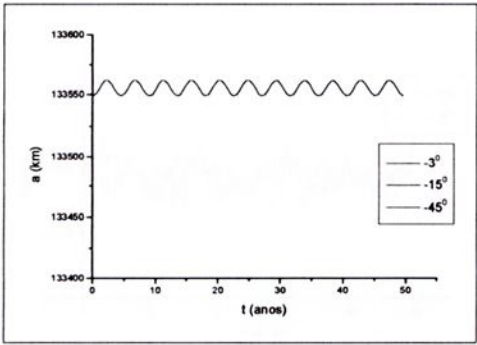


Figura 3.6: Os resultados apresentados mostram uma pequena variação no semi-eixo maior da partícula (da ordem de 12 quilômetros). Porém, essa variação é devido ao achatamento do planeta. Os dados iniciais apresentados são mantidos em relação a simulação mostrada em (3.4), mudando somente o semi-eixo maior da partícula, $a = 133549$ km.

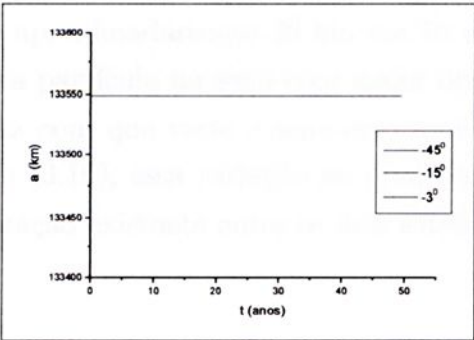


Figura 3.7: Simulação com as mesmas condições iniciais de (3.6), exceção feita ao achatamento, considerado $J_2 = 0$ a partícula deixa de sofrer variações.

o problema de n -corpos dado por (Roy, 1988):

$$m_i \ddot{R}_i = G \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} r_{ij} \quad (j \neq i, \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

Na figura (3.10) foi considerado $e_A = e_s = 10^{-4}$ e as mesmas condições iniciais para a partícula citadas anteriormente. A partícula é fortemente perturbada e tende a ser espalhada no primeiro encontro com o satélite Pan, que ocorre aproximadamente em 465 dias. O primeiro encontro entre satélite-partícula ocorre com Atlas, porém, a perturbação deste é insuficiente para fazer a partícula se espalhar durante os encontros. Pelos resultados aqui apresentados, pode-se verificar que a ação de Atlas, apesar de individualmente ser insignificante, faz com que a partícula leve um tempo maior para sofrer a ação da perturbação devida

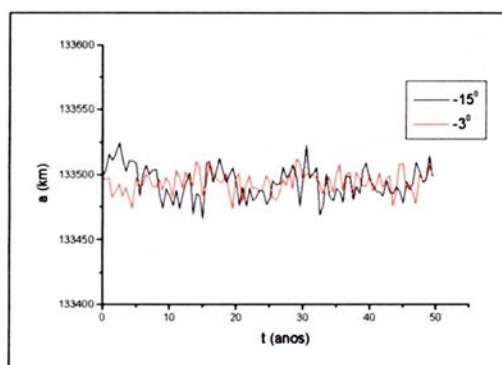


Figura 3.8: Simulação considerando a partícula em semi-eixo maior $a_p = 133499$ km, com ângulos de fase para $\theta_p = -3^\circ$ e $\theta_p = -15^\circ$, para uma razão de massa do satélite $\mu = 10^{-7}$. Com essa razão de massa para Atlas, o semi-eixo maior da partícula sofre variação de aproximadamente 50 km.

ao satélite Pan, variando aproximadamente 30 km em 15 anos. Entretanto não é suficiente para confinar a partícula no semi-eixo maior onde está localizada. A ação de Pan é maior e faz com que varie o semi-eixo maior da partícula. Pela simulação apresentada em (3.10), essa variação no semi-eixo maior da partícula é mais sutil devido a interação existente entre os dois satélites.

3.2.2 Efeito de um anel estreito nas bordas da falha de um anel principal

O estudo do efeito dos estreitos anéis internos da Falha de Encke sobre as bordas foi uma tentativa de explicar o surgimento da Falha de Encke, caso o efeito do satélite Pan não fosse suficiente para manter esta falha. Os resultados apresentados no capítulo 2 mostraram que Pan pode formar uma falha de aproximadamente 250 km, segundo a teoria apresentada por Wisdom (1980). Essa teoria está baseada no problema circular restrito de três corpos e portanto algumas simplificações foram adotadas.

Segundo as imagens das Voyagers, a Falha de Encke possui uma largura de 325 km, valor superior ao obtido pela análise teórica. Porém, caso o satélite apresente uma excentricidade, como sugerido por Spahn *et al.* (1993) para explicar as inúmeras colisões existentes dentro do sistema Pan-anel central, essa largura aumenta em aproximadamente 190 km. É importante lembrar também que existe a possibilidade da existência de pequenos satélites no anel central, o

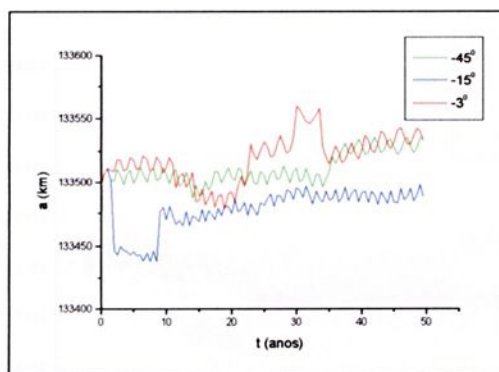


Figura 3.9: Pode-se verificar nesta simulação a variação do semi-eixo maior da partícula, para diferentes ângulos de fase entre o satélite Pan e a partícula, $\theta_p = -3^\circ$, $\theta_p = -15^\circ$ e $\theta_p = -45^\circ$. As condições iniciais são semi-eixo maior $a_p = 133499$ km e $a_s = 133583$ km, excentricidade $e_p = 0$ e $e_s = 10^{-4}$. Pela simulação, a partícula tende a ser espalhada logo no primeiro encontro com o satélite.

que aumentaria a largura da Falha de Encke.

Como visto no capítulo 2, a Falha de Encke foi gerada e é mantida pelo satélite Pan, sendo que o efeito dos anéis internos à falha não são necessários para esse confinamento. Salientando que Rappaport (1998) aplicou a teoria para o caso de uma anel localizado a $1.470 R_p$ em uma largura igual a 30 km. Neste caso, o anel está mais próximo à borda do anel C, a aproximadamente 10 km, do que o anel central da Falha de Encke em relação à borda do anel A, a aproximadamente 150 km, o que diminuiria o torque exercido pelo anel.

Faremos agora um breve relato do artigo de Rappaport (1998). A maioria dos anéis planetários estão em órbitas circulares ao redor do corpo central. Os anéis em órbitas excêntricas podem com o decorrer do tempo tornar-se circulares. No entanto, existem vários anéis estreitos e excêntricos que também apresentam uma variação linear entre a largura e o raio orbital, como exemplo temos os anéis ϵ , α e β , pertencentes ao sistema de anéis de Urano, que são mais estreitos no pericentro e mais largos no apocentro. Várias teorias tentam explicar essa relação, a mais recente foi proposta por Chiang & Goldreich (2000).

Saturno contém no mínimo sete anéis estreitos. Entre eles estão os anéis Titan e Maxwell localizados na parte interna do anel C e os anéis $1.470 R_p$ e $1.495 R_p$, também pertencentes ao anel C. Cada anel está localizado em uma falha. O anel $1470 R_p$ possui uma largura média de 16 km e se localiza em uma falha

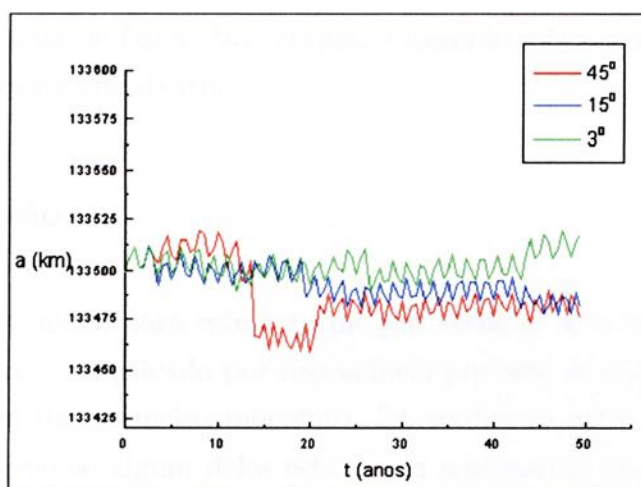


Figura 3.10: Foi considerado o problema de quatro corpos. Na simulação a excentricidade dos dois satélites é igual a 10^{-4} . Pelos resultados aqui apresentados, podemos verificar que a ação de Atlas apenas consegue minimizar a ação do satélite Pan que está mais próximo do anel.

de 30 km de largura, ou seja, ocupa quase toda a falha. Seus elementos orbitais são: $a = 88716$ km, $e = 2.3 \times 10^{-5}$ e $I = 0$. Não são conhecidos satélites imersos ou pastoreando esses anéis, permitindo assim seu confinamento.

O trabalho de Rappaport (1998) analisa o confinamento das bordas da falha que circunda o anel $1.470 R_p$. São analisadas as perturbações sofridas por uma partícula na borda da falha devido ao anel estreito e a um satélite afastado (em ressonância com a partícula da borda). As bordas da Falha de Encke não estão em ressonância com nenhum satélite conhecido. Talvez a falha possa estar em processo de evolução. Para cada perturbação foram derivados os torques exercidos.

O torque exercido por um anel excêntrico em uma partícula localizada na borda de uma falha pode ser dado na forma (Goldreich & Tremaine, 1978)

$$T_r = -\frac{\pi^2 m \sum_E}{\left[r \left(\frac{dD}{dr}\right)\right]} \left\{ \frac{GM_r e}{a} \left[r \frac{dB_1}{dr} + \frac{2\omega}{(\omega - \omega_p)} B_1 \right] \right\}^2$$

onde $\sum_E$ é a densidade de superfície do anel na proximidade das bordas, $\left[r \left(\frac{dD}{dr}\right)\right] = 21/2\omega^2 \left(\frac{R_p}{a}\right)^2 J_2$, B_1 é função dos coeficientes de Laplace e m é número de onda.

Os resultados obtidos mostraram que o anel $1.470 R_p$ é responsável por

manter a borda interna da falha. No entanto, a questão sobre o confinamento da borda externa continua em aberto.

3.2.3 Discussão

A proposta inicial para este capítulo era verificar se o confinamento do anel interno poderia ser explicado por ressonância por este se encontrar em uma região caótica. Em um primeiro momento, foi verificado entre os 18 satélites conhecidos de Saturno se algum deles estaria em ressonância com as partículas dentro da Falha de Encke. Foram encontradas três ressonâncias, duas devido ao satélite Atlas e uma devido ao satélite Prometeu. Em seguida foram analisados os torques exercidos por esses satélites e por Pan. Uma das ressonâncias devido a Atlas se encontra próximo à borda do anel interno, e o torque exercido por este satélite é maior que o exercido por Pan que está bem próximo ao anel, até então uma boa possibilidade para explicar o confinamento do anel interno. Porém, a simulação numérica mostrou que Atlas sequer chega a perturbar a partícula. A largura da ressonância encontrada é de aproximadamente 1 km, insuficiente para confinar o anel interno que possui uma largura de 20 km.

A simulação veio mostrar ainda que a partícula sofre forte perturbação e tende a se espalhar logo no primeiro encontro com o satélite Pan, por volta de 465 dias. Pelos resultados aqui apresentados, podemos verificar que a ação de Atlas faz com que a partícula leve mais tempo nessa tendência de espalhamento. Entretanto, essa ação devido a Atlas não é suficiente para confinar a partícula no semi-eixo maior onde foi colocada. A ação de Pan é maior e faz com que varie o semi-eixo maior da partícula em aproximadamente 30 km em 15 anos, podendo com isso, causar a destruição do arco interno somente devido à perturbação de Pan. Ressaltando ainda, que não foi levado em consideração o efeito das forças dissipativas, por exemplo, o arrasto de Poynting-Robertson, que causa o decaimento da partícula.

O estudo do efeito dos estreitos anéis internos da Falha de Encke sobre as bordas foi uma tentativa de explicar o surgimento da Falha de Encke, caso o efeito do satélite Pan não fosse suficiente para manter esta falha. Pelo capítulo 2, pode-se verificar que a Falha de Encke foi gerada e é mantida pelo satélite Pan, sendo que o efeito dos anéis internos à falha não são necessários para esse

confinamento.

A figura (3.11) é um esboço construído com base nas imagens das Voyagers (Ferrari & Brahic, 1997) e mostram os anéis interno e central e o satélite Pan.

Como se pode ver através da figura (3.11) (Reproduzido de Ferrari & Brahic, 1997), após nove meses, tempo que separa a passagem das Voyagers I e II, o anel interno está no mesmo semi-eixo maior. Na figura (3.11), o círculo representa a posição do satélite Pan, os paralelogramos representam a passagem da Voyager I e as linhas representam a passagem da Voyager II. Para montar essa figura (3.11) fez-se necessário que as imagens fossem transportadas para um mesmo tempo da Voyager, para se ter a localização dos anéis no mesmo semi-eixo maior. Pode-se notar ainda que encontra-se sobreposição das imagens das Voyagers I e II.

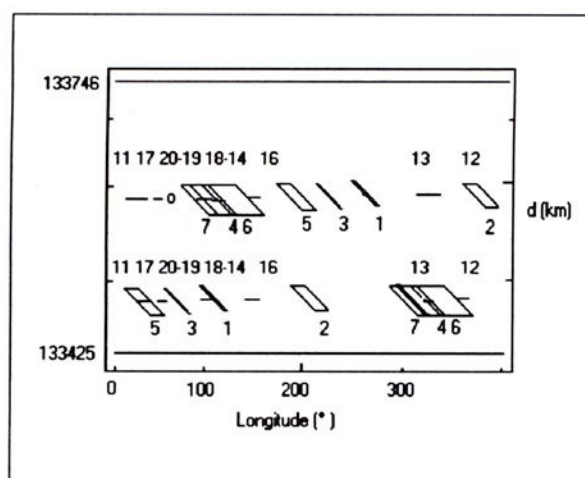


Figura 3.11: Reproduzido de Ferrari & Brahic (1997), ilustra a região fotografada pelas Voyagers 1 e 2. A região onde estão os paralelogramas, é a região fotografada pela Voyager 1, a região com linha é da Voyager 2 e o círculo indica a posição do satélite Pan.

Como podemos ver na figura (3.10), resultado da simulação numérica, após o período de 9 meses, não existe variação no semi-eixo maior da partícula, devido a ação do satélite Pan, pois este faz com que a partícula se espalhe apenas após o primeiro encontro, que ocorre após 465 dias, ou seja após 15 meses. Foi considerado o problema de 4 corpos. Pela simulação numérica e devido as condições iniciais adotadas, a existência do anel interno se mantém durante os

nove meses conforme sugere o trabalho de Ferrari & Brahic (1997). Nove meses é o tempo de intervalo entre as passagens das duas Voyagers.

Capítulo 4

Efeito do Arrasto de
Poynting-Robertson nas
partículas da Falha de Encke

1.1 Introdução

De acordo com a teoria da gravitação newtoniana, as partículas da Falha de Encke permanecem em órbitas estáveis ao redor do Sol. No entanto, a radiação solar exerce uma força de arrasto sobre as partículas, fazendo com que elas migrem para órbitas com menor semieixo maior.

De acordo com a teoria da gravitação newtoniana, as partículas da Falha de Encke permanecem em órbitas estáveis ao redor do Sol. No entanto, a radiação solar exerce uma força de arrasto sobre as partículas, fazendo com que elas migrem para órbitas com menor semieixo maior. Este efeito é conhecido como arrasto de Poynting-Robertson.

Na Figura 1.1, vemos que a força de arrasto de Poynting-Robertson atua sobre as partículas da Falha de Encke, fazendo com que elas migrem para órbitas com menor semieixo maior. Este efeito é conhecido como arrasto de Poynting-Robertson.

Capítulo 4

Efeito do Arrasto de Poynting-Robertson nas partículas da Falha de Encke

4.1 Introdução

No desenvolvimento deste trabalho, até o presente momento, não foi considerado qualquer tipo de força dissipativa atuante sobre as partículas dentro da Falha de Encke.

Dermott *et al.* (1979,1980), quando propõe o mecanismo de confinamento de um anel em órbita de ferradura supõem que este anel contém um pequeno satélite, o qual mantém partículas confinadas em órbitas de ferradura em torno dos pontos de equilíbrio de Lagrange L_4 , L_5 e L_3 . Eles têm mostrado que, se o sistema anel-satélite possui uma órbita excêntrica, o semi-eixo maior das partículas do anel antes e depois do encontro com o satélite são perfeitamente simétricas (figura (4.1)).

Na figura (4.1) são apresentados os caminhos da partícula (em órbita de ferradura) sob a influência de um satélite com massa $\mu = 10^{-9}$ para o caso sem o arrasto (linha tracejada) e com o arrasto de Poynting-Robertson (linha cheia). Dermott *et al.* (1980) propuseram que devido à simetria que ocorre para esse valor de massa a partícula continuaria em órbita de ferradura apesar do efeito do arrasto de Poynting-Robertson.

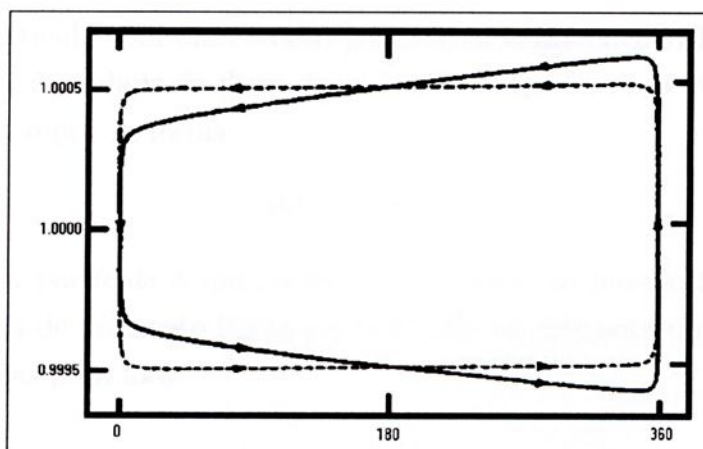


Figura 4.1: Caminho da partícula se movendo em órbita de ferradura em torno de anel-satélite de razão de massa $\frac{m_{sat}}{M_p} = 10^{-9}$ (caso para órbita circular). O semi-eixo maior a é plotado em função da separação angular θ da partícula e do satélite. A linha pontilhada refere-se ao caminho da partícula com a ausência do arrasto, e a linha escura o efeito de uma força de arrasto é levado em consideração. Ambos os caminhos são simétricos em torno da linha onde a é igual a 1.

No trabalho de Murray (1994) foi analisado a estabilidade dos pontos de equilíbrio para uma partícula, em órbita heliocêntrica, sob o arrasto de Poynting-Robertson. Foi verificado que os pontos lagrangeanos L_4 e L_5 se tornam pontos instáveis. Entretanto, segundo Murray (1994), essa estabilidade foi analisada para pequenos deslocamentos, não sendo válida para grandes deslocamentos, como por exemplo órbitas de ferradura. Além do fato de que as forças de pressão de radiação também são importantes e causam o deslocamento dos pontos L_4 e L_5 .

Em virtude disso iremos analisar o efeito do arrasto de Poynting-Robertson nas partículas do anel central da Falha de Encke, sendo este coorbital ao satélite Pan.

4.2 Pressão de Radiação Solar e Arrasto de Poynting-Robertson para o caso de órbitas planetocêntricas

Para partículas da ordem de micron, as forças dissipativas tais como o arrasto de Poynting-Robertson e a Pressão de Radiação Solar são importantes.

Uma partícula com uma secção geométrica transversal A localizada em um ponto onde a densidade do fluxo de radiação é S poderá interceptar energia por unidade de tempo, da forma:

$$\Delta E = SA \quad (4.1)$$

Assumindo que a partícula é um perfeito absorvedor, ao mesmo tempo ocorre uma transferência de momento linear e a partícula experimenta um conjunto de forças direcionadas para fora.

A força da pressão de radiação é dada pela expressão,

$$\vec{F} = \frac{SA}{c} Q_{PR} \vec{s} \quad (4.2)$$

onde Q_{pr} é o coeficiente da pressão de radiação, S a densidade do fluxo solar, A é a seção de choque, c a velocidade da luz e $\vec{s}$ é o vetor unitário que une a partícula ao Sol.

Combinando essa equação com o arrasto de Poynting-Robertson, temos (Burns *et al.*, 1979)

$$\vec{F} = m\vec{v} = \frac{SA}{c} Q_{PR} \left[\left(1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) \vec{s} - \frac{\vec{v}}{c} \right] \quad (4.3)$$

onde $\vec{r} = \vec{v} \cdot \vec{s}$ é a velocidade radial e $\vec{v}$ é a velocidade da partícula ao redor da fonte.

Para um partícula com raio r , densidade ρ e localizada a uma distância R do Sol, tomando F_G e F_{PR} respectivamente como sendo a força gravitacional e a força de radiação que atuam sobre as partículas no meio solar, temos:

$$F_G = \frac{GM4\pi r^3 \rho}{3R^2} \quad (4.4)$$

$$F_{PR} = \frac{S\pi r^2}{c} Q_{pr} = \frac{L}{4\pi R^2} \frac{\pi r^2}{c} Q_{PR} \quad (4.5)$$

onde M e L são a massa solar e a luminosidade, respectivamente. Devido ao fato de ambas as forças reduzirem-se ao inverso do quadrado da distância ao Sol, sua razão depende somente das propriedades da partícula. Tem-se para isto a seguinte razão:

$$\beta = \frac{F_{PR}}{F_G} = \frac{3L}{16\pi G M c} \frac{Q_{PR}}{\rho s} \quad (4.6)$$

ou numericamente, $\beta = 0.6 \frac{Q_{pr}}{\rho r}$ com ρ dado em $g.cm^{-3}$ e s em μm . Sendo β um coeficiente adimensional dependente da densidade e do raio da partícula.

Segundo Mignard (1984) a força de arrasto para o caso planetocêntrico é da forma:

$$\vec{F} = m\vec{v} = \frac{SA}{c} Q_{PR} \left\{ \left[1 - \frac{\vec{r}_{sp}}{r_{sp}} \left(\frac{v_p}{c} + \frac{v}{c} \right) \right] \frac{\vec{r}_{sp}}{r_{sp}} - \frac{\vec{v} + \vec{v}_p}{c} \right\} \quad (4.7)$$

onde o primeiro termo da equação se refere à pressão de radiação, $\frac{v}{c}$ no segundo termo se refere ao efeito Doppler e o último termo da equação se refere ao arrasto de Poynting-Robertson, $\vec{v}_p$ é a velocidade do planeta em relação ao Sol, $\vec{r}_{sp}$ é o raio vetor que liga o planeta ao Sol e $\vec{v}$ é a velocidade da partícula ao redor do planeta.

Se consideramos um sistema de referência com origem no planeta (sistema planetocêntrico) rotacionando com o movimento médio do satélite, as componentes da força na equação (4.7) são reescritas na forma:

$$F_x = \frac{\alpha}{c} \left\{ (\dot{x} - y + \dot{x}_{Sol}) + \left\{ [(\dot{x} - y) (\cos^2 n_{Sol} t)] + [(\dot{y} + x) (\sin n_{Sol} t \cos n_{Sol} t)] \right\} \right\} \quad (4.8)$$

$$F_y = \frac{\alpha}{c} \left\{ (\dot{y} + x + \dot{y}_{Sol}) + \left\{ [(\dot{x} - y) (\sin n_{Sol} t \cos n_{Sol} t)] + [(\dot{y} + x) (\sin^2 n_{Sol} t)] \right\} \right\} \quad (4.9)$$

onde $\alpha = -\beta \frac{GM_{Sol}}{r_{sp}^2}$. A posição e velocidade do Sol são dadas por:

$$x_{Sol} = -\vec{r}_{sp} \cos n_{Sol} t \quad (4.10)$$

$$y_{Sol} = -\vec{r}_{sp} \sin n_{Sol} t$$

$$\dot{x}_{Sol} = \vec{r}_{sp} n_{Sol} \sin n_{Sol} t \quad (4.11)$$

$$\dot{y}_{Sol} = -\vec{r}_{sp} n_{Sol} \cos n_{Sol} t$$

onde n_{Sol} é o movimento médio do Sol.

E por fim, as equações do movimento da partícula ao redor do planeta no sistema girante são dadas por:

$$\ddot{x} = 2n\dot{y} + n^2x - \frac{\mu_1}{r^3}x - \left[\frac{\mu_2(x-1)}{r_2^3} \right] - \mu_2 + F_x; \quad (4.12)$$

$$\ddot{y} = -2n\dot{x} + n^2y - \frac{\mu_1}{r^3}y + \frac{\mu_2}{r_2^3} + F_y. \quad (4.13)$$

4.3 Variação em a e e

A variação em a e e a qual nos referimos, nada mais é que a evolução no tempo do semi-eixo maior e da excentricidade. Partindo da equação da energia orbital e da equação correspondente ao momento angular, temos:

$$E = -\frac{\mu}{2a} \quad (4.14)$$

$$H^2 = \mu a (1 - e^2) \quad (4.15)$$

onde $\mu = GM_p$ é o produto da constante gravitacional com a massa do planeta. A variação secular do semi-eixo maior a e da excentricidade e são:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{a}{t_{pr}} \frac{5 + \cos^2 i}{6} \quad (4.16)$$

e

$$\frac{de}{dt} = 0. \quad (4.17)$$

A excentricidade orbital é secularmente estável enquanto que o semi-eixo maior exibe um decaimento. Na equação (4.13) t_{pr} apresenta-se como um decaimento característico com o tempo e pode ser expresso em termos do coeficiente β (equação (4.6))

$$t_{pr} = \frac{1}{3\beta} \frac{a_p}{c} \frac{a_p}{\frac{GM}{c^2}} \quad (4.18)$$

ou numericamente, $t_{pr} = 530 \frac{a_p^2}{\beta}$ em anos, onde a_p é a distância Sol-planeta expressa em unidades astronômicas. Em movimento planetário o arrasto de Poynting-Robertson causa o decaimento da órbita da partícula. Para uma órbita circular começando com $a = a_0$, temos:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{3t_{pr}} \frac{a_0^2}{a} \quad (4.19)$$

A figura (4.2) mostra a variação do semi-eixo maior em função do tamanho da partícula para o caso do anel central e do anel interno da Falha de Encke. Podemos verificar que partículas menores possuem um decaimento maior. As duas curvas estão sobrepostas devido à proximidade dos anéis. Pela figura (4.2) verificou-se que uma partícula de 1μ leva aproximadamente 3 anos para deixar o anel, enquanto que uma partícula de 50μ , figura (4.3), leva aproximadamente 100 anos. Esses valores são bem menores do que a idade do Sistema Solar.

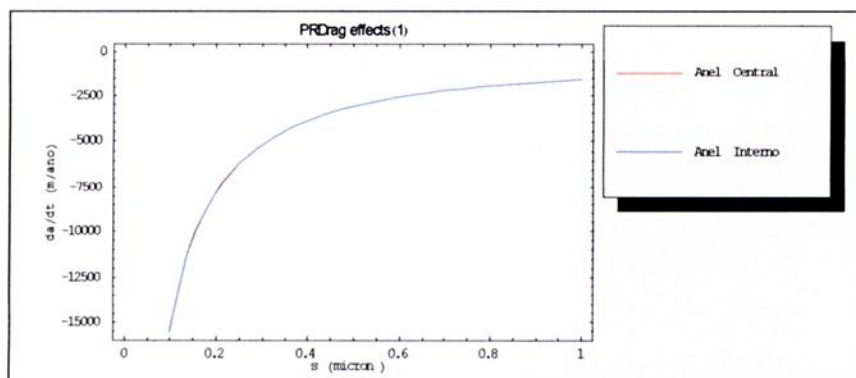


Figura 4.2: Esta simulação mostra a variação do semi-eixo maior em função do tamanho da partícula para o caso do anel central e do anel interno da Falha de Encke. As duas curvas estão sobrepostas devido à proximidade dos anéis. Verificou-se que uma partícula de 1μ leva aproximadamente 3 anos para deixar o anel.

4.4 Simulação numérica

Nessa seção serão apresentados os resultados da simulação numérica, utilizando o programa elaborado por A.H.F. Guimarães, para uma partícula localizada no anel central sob o efeito de Pan e do arrasto de Poynting-Robertson no intuito de verificar a teoria proposta por Dermott *et al* (1980) a respeito do confinamento de um anel estreito. Serão considerados 3 casos, variando o tamanho e a posição da partícula em relação ao satélite, onde:

- 1º Caso: Será considerado o último termo da equação (4.7) sem levar em consideração a velocidade do planeta ao redor do Sol ($\vec{v}_p$);
- 2º Caso: Análogo ao 1º caso, porém, considerando a velocidade do planeta ao redor do Sol ($\vec{v}_p$);
- 3º Caso: Será considerado o segundo caso acrescido do Efeito Doppler.

Nas figuras (4.4), (4.5), (4.6) e (4.7) pode-se verificar o decaimento do semi-eixo maior em relação a posição do satélite, quando utilizado o primeiro caso proposto. Pode-se verificar que quanto maior for o tamanho da partícula, menor será o efeito do arrasto de Poynting-Robertson e consequentemente menor será o decaimento orbital.

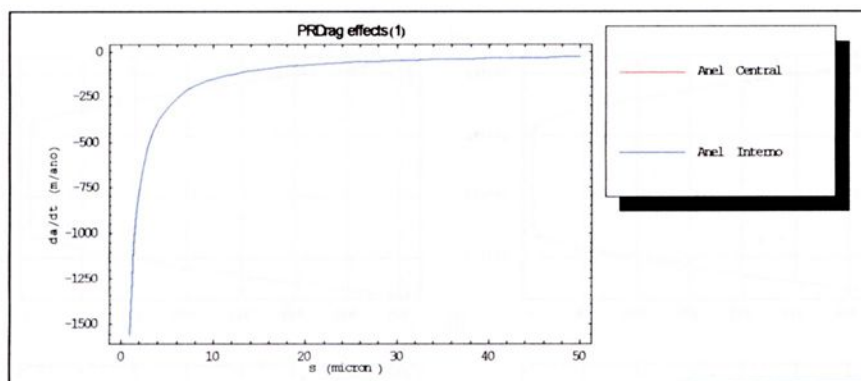


Figura 4.3: Esta simulação mostra a variação do semi-eixo maior em função do tamanho da partícula para o caso do anel central e do anel interno da Falha de Encke. As duas curvas estão sobrepostas devido à proximidade dos anéis. Verificou-se que uma partícula de 50μ leva aproximadamente 100 anos para deixar o anel.

As condições iniciais são $a_p = 133593$ km e $a_s = 133583$ km para todas as simulações, variando o raio e a posição da partícula. Na figura (4.4), o raio $s = 1\mu m$ e a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$. As considerações da figura (4.4), mudando somente o valor de s , são válidas para as figuras (4.5) $s = 3\mu m$, (4.6) $s = 5\mu m$ e (4.7) $s = 10\mu m$. O primeiro caso confirma o mecanismo de confinamento proposto por Dermott (1980).

As figuras (4.8), (4.9), (4.10) e (4.11), ilustram as simulações descritas no segundo caso. As condições iniciais das partículas são as mesmas descritas nas figuras relacionadas ao primeiro caso. Neste segundo caso, as simulações apresentam oscilações devido as diferentes configurações do ângulo θ , quanto maior for o tamanho da partícula, menor a oscilação. Apesar dessas oscilações, a partícula é confinada em órbita de ferradura, como proposto por Dermott (1980).

Nas figuras (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15) pode-se verificar a variação do semi-eixo maior em função do ângulo θ , o raio em função do tempo e θ em função do tempo das partículas de $3\mu m$ e $10\mu m$. Essas partículas permanecem confinadas na órbita de ferradura, conforme mostram os mosaicos. Pode-se verificar as oscilações nos semi-eixos maiores, verificando os picos nos gráficos onde aparecem a configuração do raio e quando a partícula não chega a completar a órbita de ferradura, pode ser visualizado o gráfico que indica a variação do θ em relação ao tempo.

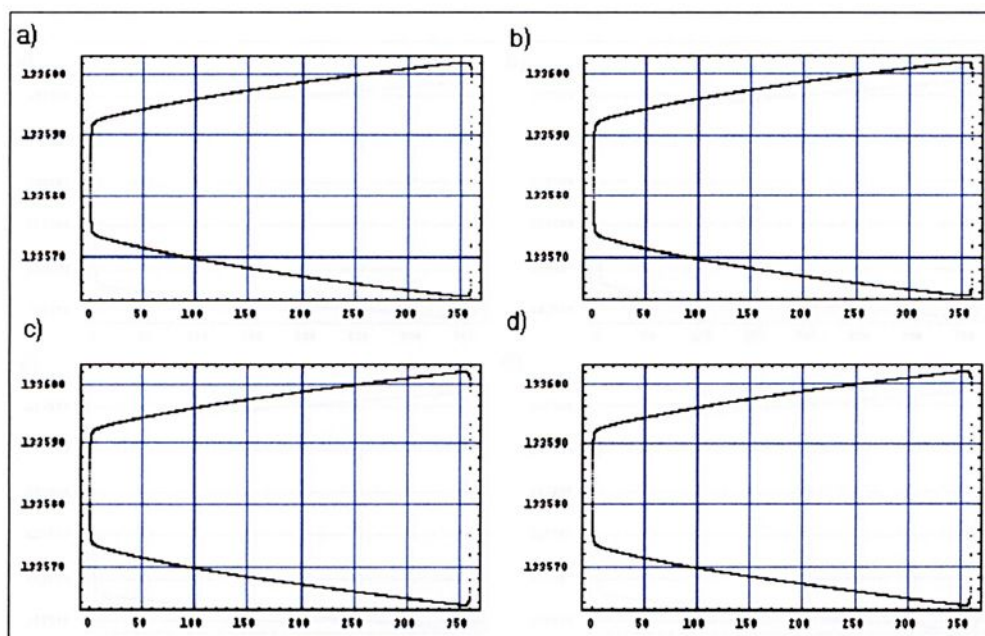


Figura 4.4: Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula de raio $s = 1\mu\text{m}$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$.

4.4.1 Discussão

Dermott *et al.* (1980) sugere que anéis que contenham pequenos satélites, mantêm as pequenas partículas em órbita de ferradura estável em torno dos pontos de equilíbrio de Lagrange, apesar do arrasto de Poynting-Robertson. Neste ítem foi mostrado que o modelo proposto por Dermott *et al.* (1980) para anéis coorbitais a satélites com razão de massa $\mu = 10^{-11}$ se verifica com variações no semi-eixo maior, considerando os três casos propostos.

As simulações para partículas de diferentes tamanhos possuem variações no semi-eixo maior em relação ao tempo e à posição em relação ao satélite. Pode-se verificar que quanto maior for o tamanho da partícula menor será o efeito do arrasto de Poynting-Robertson e consequentemente menor será o decaimento orbital. Portanto, o anel central apesar da concentração de partículas pequenas, se mantém na órbita de ferradura estável, ao contrário do anel interno, que não possui um satélite coorbital conhecido, evitando seu decaimento orbital.

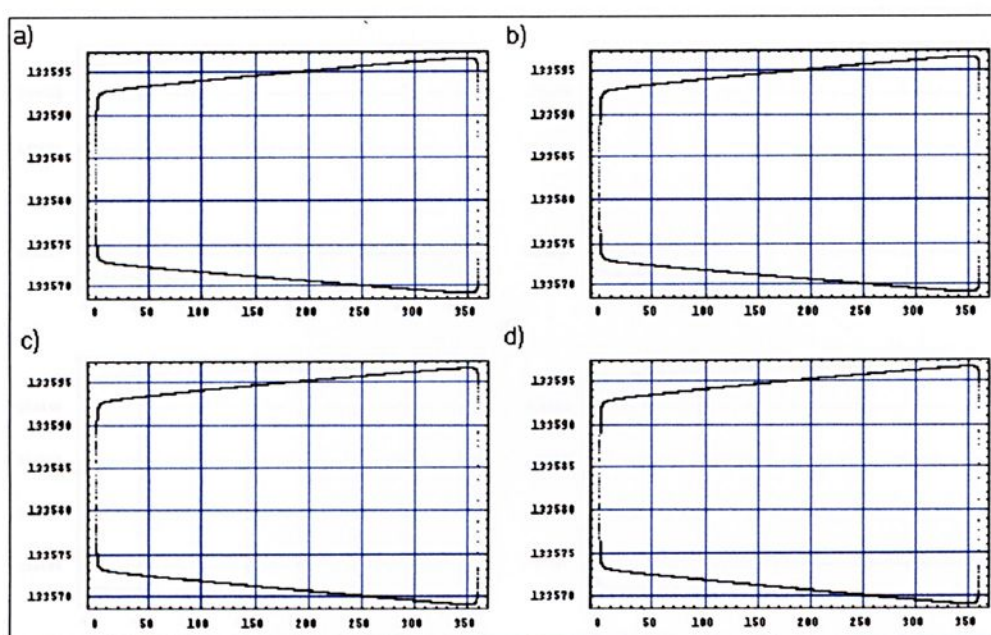


Figura 4.5: Verificação dvariação do semi-eixo maior da partícula de raio $s = 3\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$.

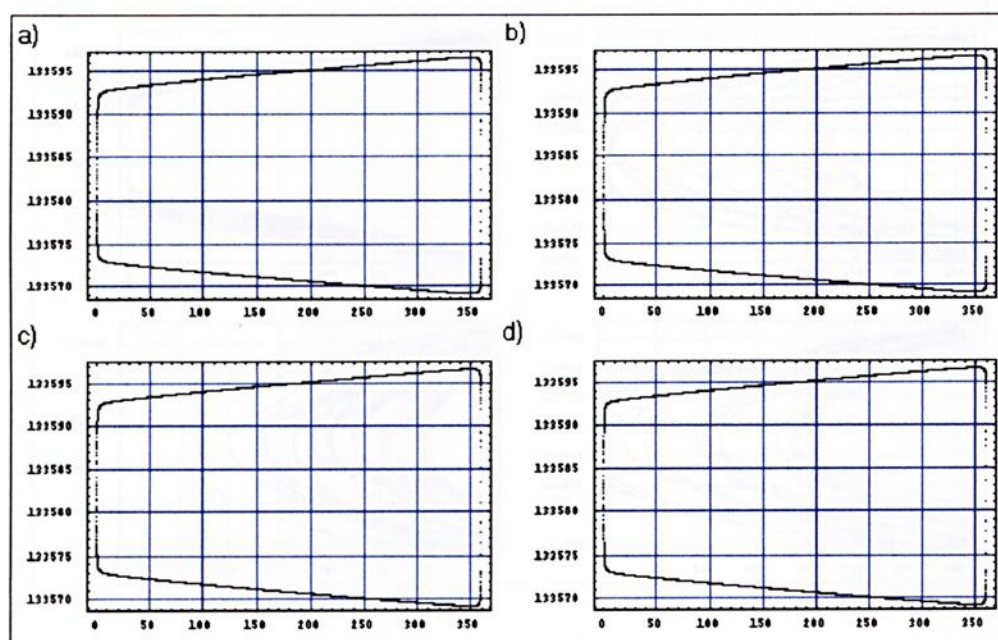


Figura 4.6: Verificação dvariação do semi-eixo maior da partícula de raio $s = 5\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$.

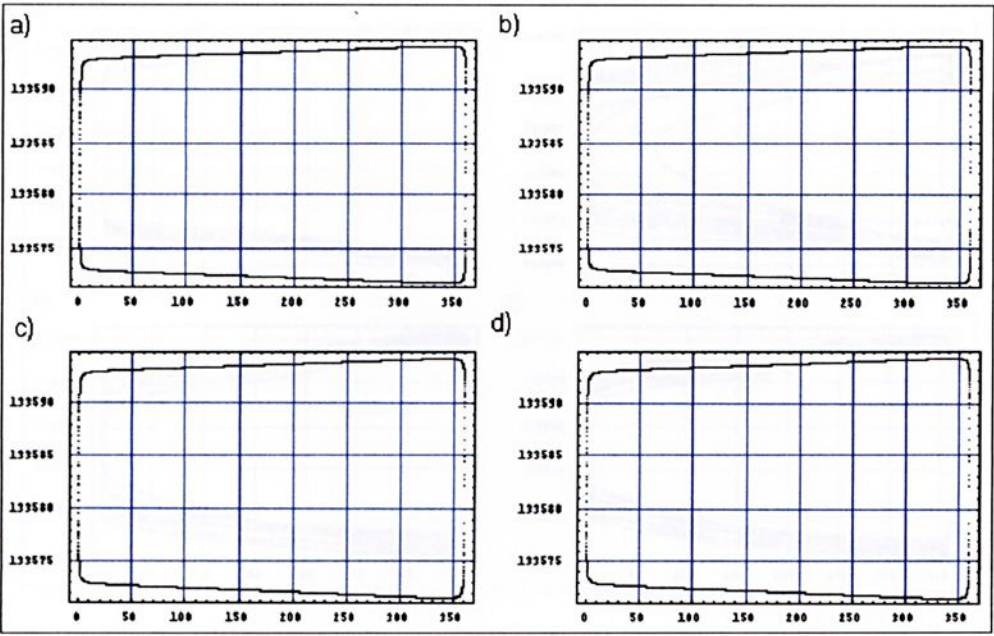


Figura 4.7: Verificação dvariação do semi-eixo maior da partícula de raio $s = 10\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$.

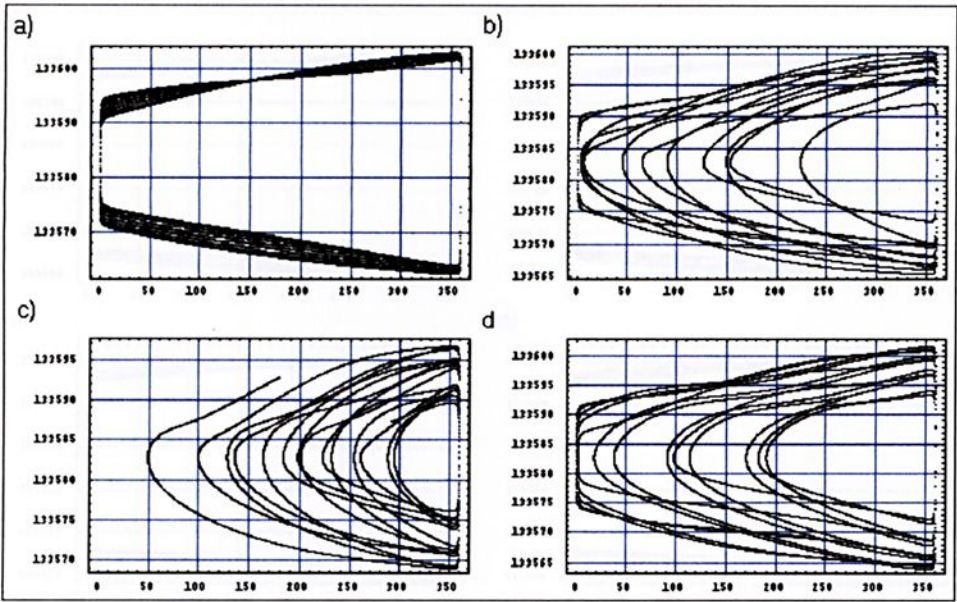


Figura 4.8: Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula, utilizando o segundo caso proposto, de raio $s = 1\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$. Esta partícula é a mais afetada devido a força atuante, chegando a não completar a ferradura em alguns casos, mas ainda é mantida em confinamento neste intervalo de tempo.

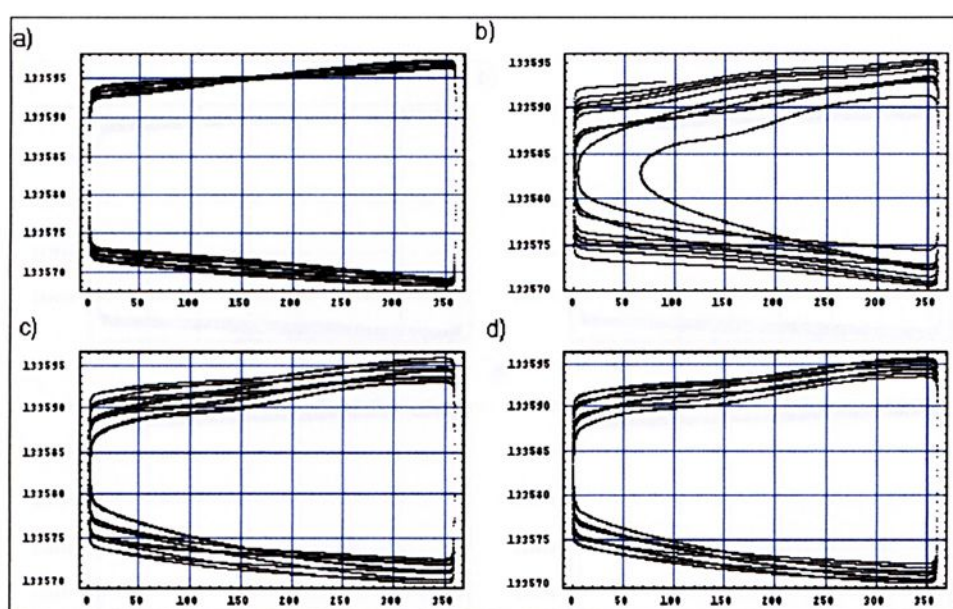


Figura 4.9: Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula, utilizando o 2º caso proposto, de raio $s = 3\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$. Para essas partículas, apesar das oscilações, o modelo de confinamento proposto por Dermott é confirmado.

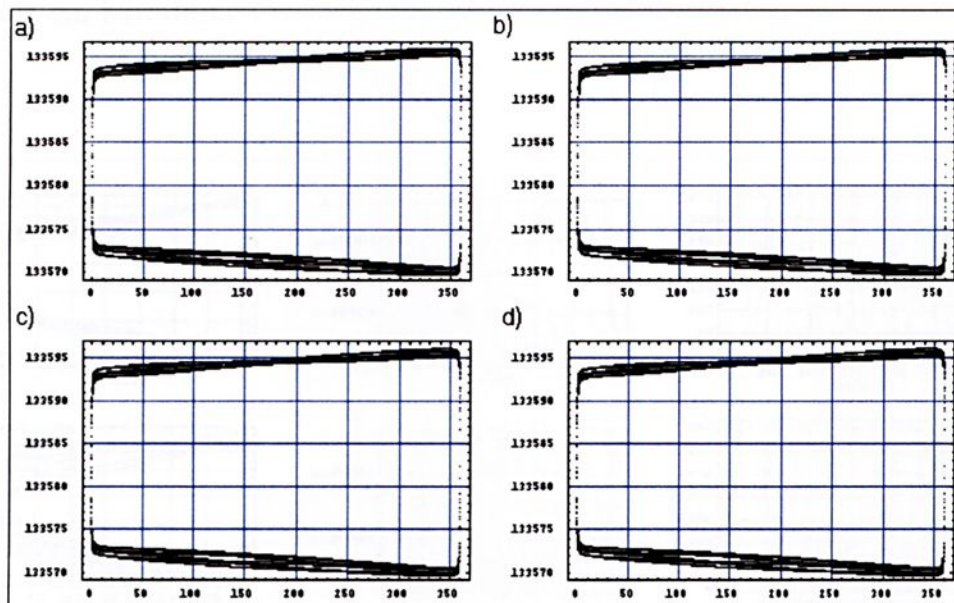


Figura 4.10: Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula, utilizando o 2º caso proposto, de raio $s = 5\mu m$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$. Esta partícula sofre menor variação da força atuante de arrasto de Poynting-Robertson. Ela Mantem-se confinada em ferradura.

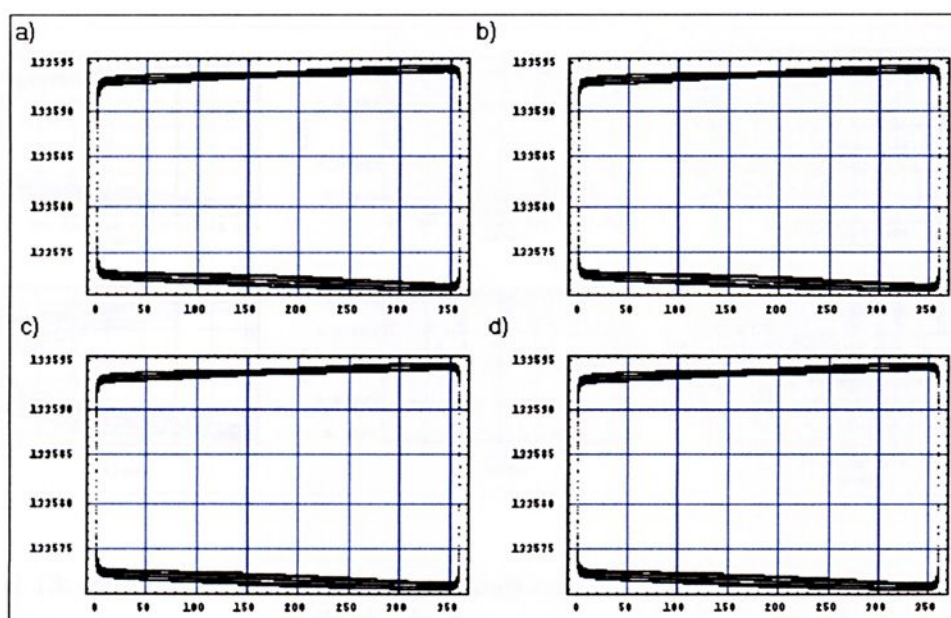


Figura 4.11: Verificação da variação do semi-eixo maior da partícula, utilizando o segundo caso proposto, de raio $s = 10\mu\text{m}$ e variação angular em relação ao satélite para os casos: a) $\theta = 15^\circ$, b) $\theta = 90^\circ$, c) $\theta = 180^\circ$ e d) $\theta = 270^\circ$. Esta é a partícula que menos sofre variação devida a força atuante. Ela mantém-se confinada em ferradura.

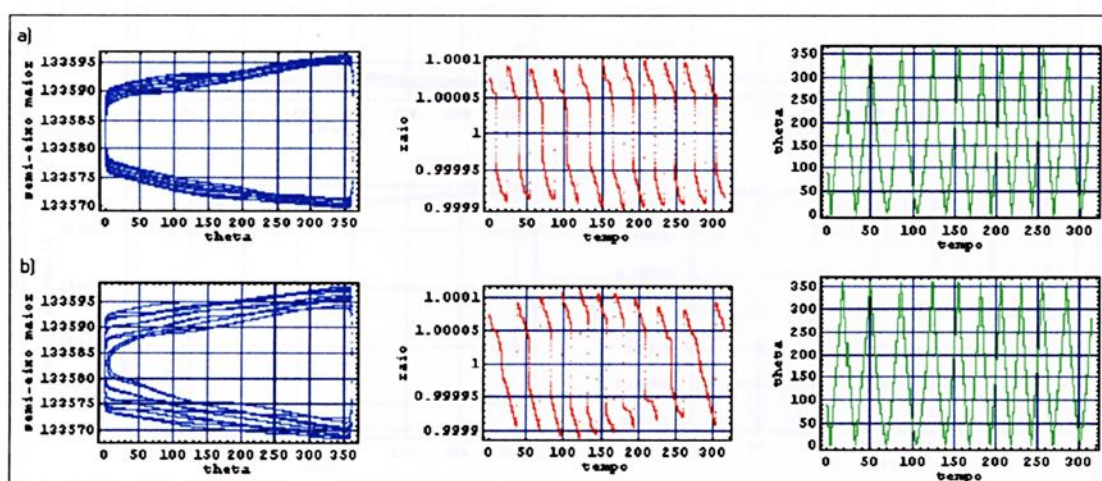


Figura 4.12: Simulação mostrando as oscilações no semi-eixo maior da partícula de $s = 3\mu\text{m}$, bem como a variação do raio e do ângulo θ em relação ao tempo para a) $\theta = 15^\circ$ e b) $\theta = 90^\circ$.

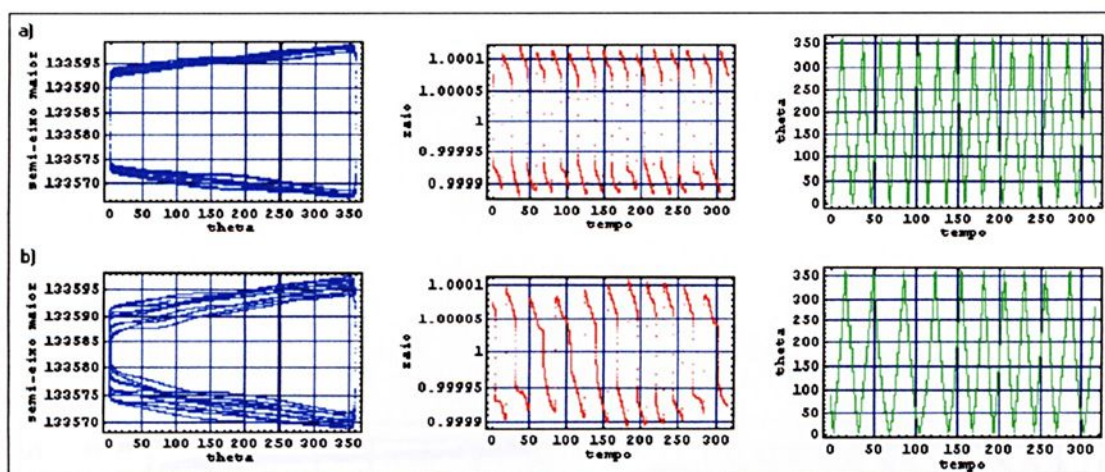


Figura 4.13: Simulação mostrando as oscilações no semi-eixo maior da partícula de $s = 3\mu m$, bem como a variação do raio e do ângulo θ em relação ao tempo para a) $\theta = 180^\circ$ e b) $\theta = 270^\circ$.

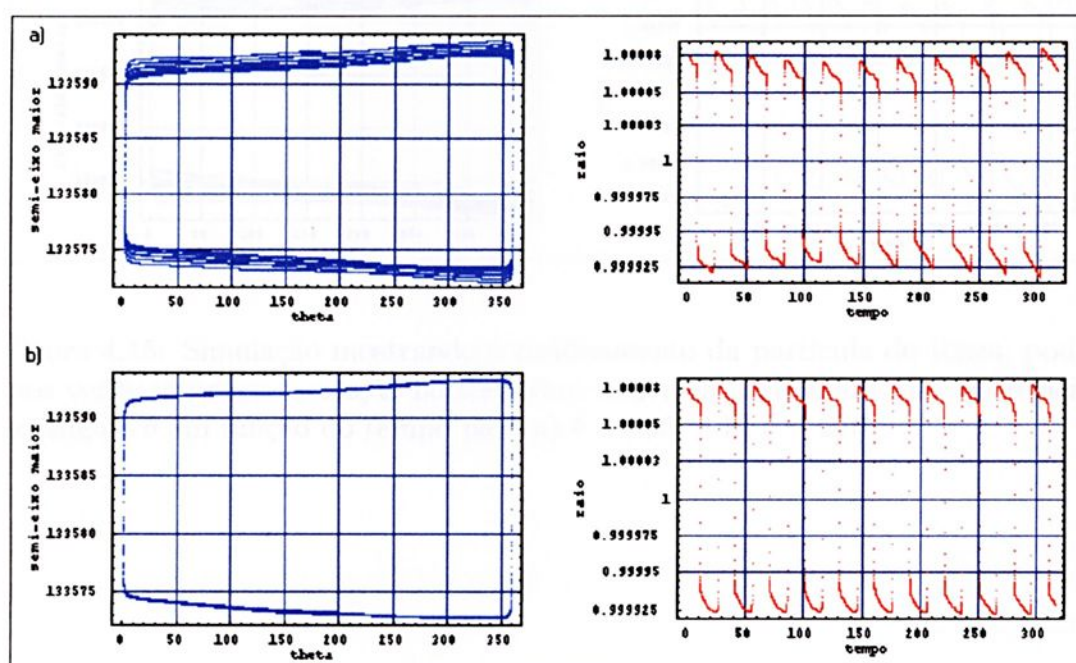


Figura 4.14: Simulação mostrando o confinamento da partícula de $10\mu m$, podemos verificar pouca oscilação no semi-eixo maior da partícula, tanto em relação ao ângulo θ em função do tempo para a) $\theta = 15^\circ$ e b) $\theta = 90^\circ$.

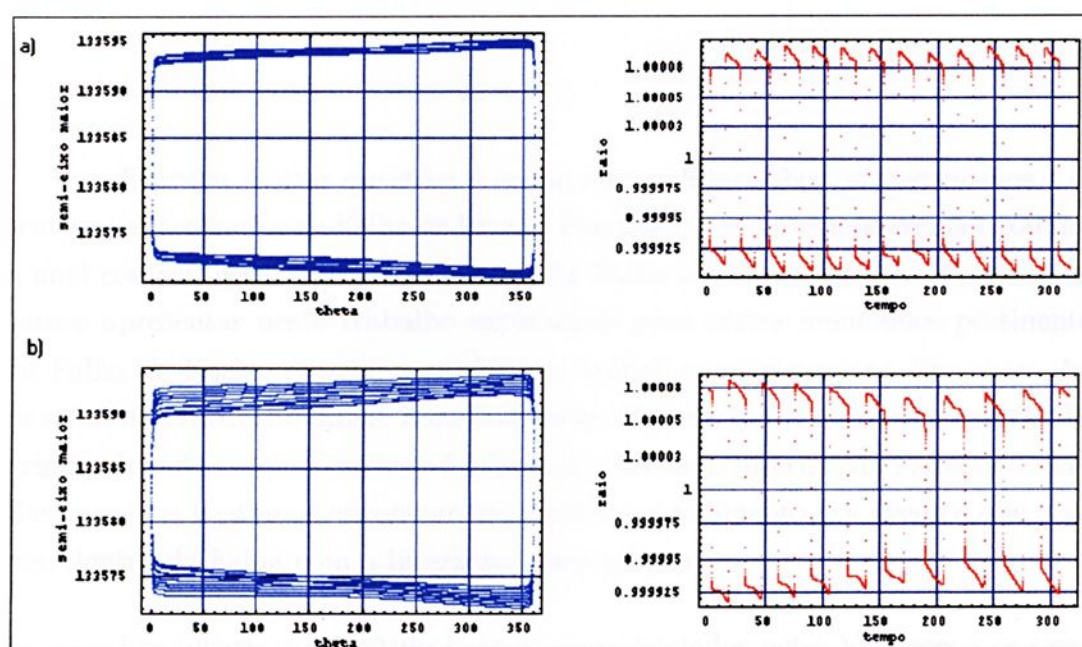


Figura 4.15: Simulação mostrando o confinamento da partícula de $10\mu\text{m}$, podemos verificar pouca oscilação no semi-eixo maior da partícula, tanto em relação ao ângulo θ em função do tempo para a) $\theta = 180^\circ$ e b) $\theta = 270^\circ$.

Capítulo 5

Discussão Geral

Existem muitas questões a serem respondidas sobre os mecanismos e estruturas encontrados na Falha de Encke. Pan parece ser o responsável por confinar o anel central, gerar ondas nas bordas da Falha e no anel interno. Porém, buscamos apresentar neste trabalho explicações para certos fenômenos pertinentes na Falha de Encke, em comparação com trabalhos existentes na literatura, hora refazendo estes trabalhos, hora buscando respostas para certos acontecimentos principalmente no que concerne à existência dos anéis internos da Falha de Encke. Basicamente, tentamos encontrar um melhor entendimento dos eventos que ocorrem dentro da Falha com a interação anéis-satélite.

Em relação ao capítulo 1, as imagens enviadas pelas Voyagers e os resultados apresentados por Ferrari & Brahic (1997), vieram a abrir uma possibilidade de existência de satélites menores dentro da Falha de Encke, e que seriam estes talvez os responsáveis pela existência do material do anel interno, uma vez que devido a ação de Pan, conforme capítulo 3, a existência do anel interno estaria comprometida.

Em relação ao surgimento de ondas nas bordas da falha, verificou-se que dadas as condições iniciais da partícula, teoricamente, o satélite gera uma onda com amplitude $A = 13,37$ km, e comprimento $l = 1531,53$ km. Na simulação da figura (2.3), a amplitude da onda é $A = 26,8$ km e o comprimento de onda $l = 1337,5$ km. A diferença pode ser devida ao fato do semi-eixo maior da partícula, na análise teórica, ser tomado como semi-eixo maior médio, e na simulação a amplitude ter sido tomado pela distância entre as partículas postadas mais interna



e externamente.

Na região de ferradura, considerando o satélite e a partícula em órbitas circulares, o resultado apresentado segundo a teoria é de 28.8 km e segundo a simulação numérica é de 34 km. Como a largura é uma função do semi-eixo maior, na simulação podemos controlar o semi-eixo maior até uma situação em que este se encontre no limite entre a ferradura e a região caótica, por isso essa diferença entre o resultado teórico, que utilizamos o semi-eixo maior médio da partícula. Quando incluímos a excentricidade no satélite, ou até mesmo no satélite e na partícula, a região de ferradura tende a diminuir sua largura. Uma região de ferradura menor, pode estar relacionado ao fato em que quanto mais aumentarmos a excentricidade a possibilidade de colisões entre partículas aumenta, podendo haver acreção ou mesmo dissipação por parte do material.

Com relação à região caótica, as simulações mostraram uma variação nos diferentes regimes apresentados, quando se inclui a excentricidade no satélite. Pode-se verificar que a partícula localizada na região caótica é extremamente perturbada pelo satélite, e após alguns períodos orbitais ela tende a ser removida dessa região. Do mesmo modo, a partícula colocada nas bordas da falha, continua a sofrer variações até aproximadamente 190 km dentro das bordas, onde por sua vez começa a se estabilizar. Comparativamente, as configurações que apresentamos no trabalho mostra que quando a excentricidade do satélite é incluída, a região caótica é bem maior do que se acreditava até então. Se considerarmos a perturbação sofrida pela partícula até que ela tenha um comportamento estável, a região de caos se aproxima dos 700 km, diferente dos 250 km apresentados pela teoria e dos 325 km apresentados pelos dados das Voyagers. Ressaltando ainda, e de suma importância, que nas simulações, onde se nota esse aumento da região caótica, não foram consideradas colisões entre partículas nas bordas do anel A, a qual requer uma dinâmica que envolva tal consideração.

Uma das possibilidades quando se começou este trabalho, era explicar que a estabilidade do anel interno fosse resultado de uma ressonância. Foram encontradas três ressonâncias, duas devido ao satélite Atlas e uma devido ao satélite Prometeu. Em seguida foram analisados os torques exercidos por esses satélites e por Pan. Uma das ressonâncias devido a Atlas se encontra próximo à borda do anel interno, e o torque exercido por este satélite é maior que o exercido por Pan que está bem próximo ao anel, até então uma boa possibilidade

para explicar o confinamento do anel interno. Porém, a simulação numérica mostrou que Atlas sequer chega a perturbar a partícula. A largura da ressonância encontrada é de aproximadamente 1 km, insuficiente para confinar o anel interno que possui uma largura de 20 km.

A simulação veio mostrar ainda que a partícula sofre forte perturbação e tende a se espalhar logo no primeiro encontro com o satélite Pan, por volta de 465 dias. Pelos resultados aqui apresentados, podemos verificar que a ação de Atlas faz com que a partícula leve mais tempo nessa tendência de espalhamento. Entretanto, essa ação devido a Atlas, não é suficiente para confinar a partícula no semi-eixo maior onde foi colocada. A ação de Pan é maior e faz com que varie o semi-eixo maior da partícula em aproximadamente 30 km em 15 anos, podendo com isso, causar a destruição do arco interno somente devido à perturbação de Pan. Ressaltando ainda, que não foi levado em consideração o efeito das forças dissipativas, por exemplo, o arrasto de Poynting-Robertson, que causa um decaimento da órbita da partícula. Além do que, as larguras de ressonâncias de corotação e de Lindblad devidas a Atlas são menores que a largura do anel, portanto, Atlas não é responsável pelo confinamento azimutal do anel e radial dos arcos.

No capítulo sobre arrasto de Poynting-Robertson, foi mostrado que o modelo proposto por Dermott *et al.* (1980) para anéis coorbitais a satélites com razão de massa $\mu = 10^{-11}$ se verifica. Simulações para partículas de diferentes tamanhos possuem variações no semi-eixo maior e na posição em relação ao tempo. Foi verificado que quanto maior for o tamanho da partícula menor será o efeito do arrasto de Poynting-Robertson e consequentemente menor será o decaimento orbital. Portanto, o anel central, apesar da concentração de partículas pequenas, é mantido na órbita de ferradura, ao contrário do anel interno que não possui um satélite coorbital conhecido.

Com relação aos trabalhos futuros, podemos destacar a evolução orbital das partículas dos anéis interno e central, incluindo os possíveis pequenos satélites (2 à 3 km de raio) existentes na Falha de Encke. Para o caso geral, o efeito de colisões em anéis orbitais e a possibilidade de acreção e espalhamento no anel central quando considerada a excentricidade diferente de zero (dependendo da densidade do anel).

Capítulo 6

Apêndice A

Apresentamos aqui as imagens das Voyagers 1 e 2 usadas em nosso trabalho, onde apresentamos na tabela o tempo de exposição e o ângulo de fase. Estas imagens foram gentilmente cedidas por C. D. Murray.

Voyager	FDS	Ângulo de Fase (°)	Tempo de Exposição (s)
1	3493409	47.7	0.96
1	3493608	26.7	0.96
1	3494018	71.6	1.44
1	3494808	142.3	0.72
1	3495357	155.8	0.72
1	3495655	148.3	2.88
1	3497358	129.7	1.92
1	3497404	130.0	1.92
1	3497410	130.3	1.92
1	3497416	130.6	1.92
2	4396845	13.6	0.96
2	4397032	13.6	0.96
2	4399014	20.6	0.96
2	4399339	47.6	0.48
2	4399350	48.3	0.72
2	4399832	31.0	0.96
2	4399903	10.3	0.72
2	4399915	50.0	0.72
2	4400747	145.7	0.72
2	4400759	145.7	0.96





Figura 6.1: (FDS 3494018) Imagem feita pela Voyager 1, mostra o anel A de Saturno, a Falha de Encke e o anel F. Esta imagem, feita de um ângulo de 142.3 graus, possui um tempo de exposição de 0.96 segundos (cortesia C. D. Murray).



Figura 6.2: FDS 3495410 - Imagem da Voyager 1, onde pode-se verificar o anel central. Imagem com ângulo de fase de 130.3 graus e tempo de exposição de 1.92 segundos (cortesia C.D. Murray).



Figura 6.3: FDS 3495655 - Imagem da voyager 1, onde verificamos a Falha de Encke, e contornando o anel A, o anel F. Esta imagem com ângulo de fase de 148.3, possui um tempo de exposição de 2.88 segundos

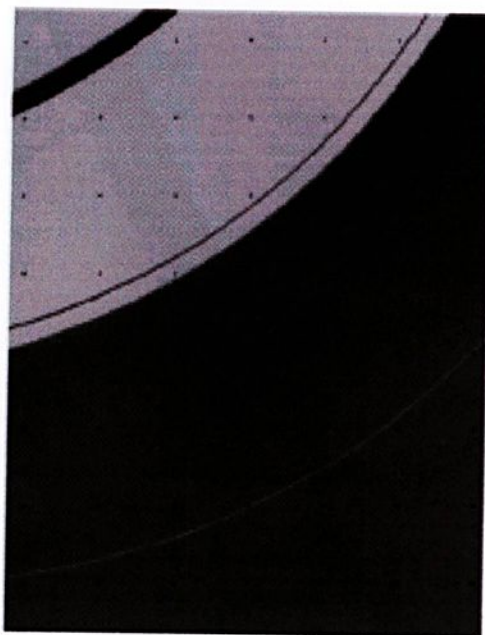


Figura 6.4: FDS 4397032 - Imagem da Voyager 2, mostrando a Falha de Encke, a Falha de Keeler, próximo a borda externa do anel A, e o anel F. Esta imagem com ângulo de fase 31.0 graus, possui um tempo de exposição de 0.96 segundos.



Figura 6.5: FDS 4399014 - Imagem da Voyager 2, onde pode-se verificar o anel interno da Falha de Encke. Esta imagem com ângulo de fase de 20.6 graus, possui um tempo de exposição de 0.96 segundos.

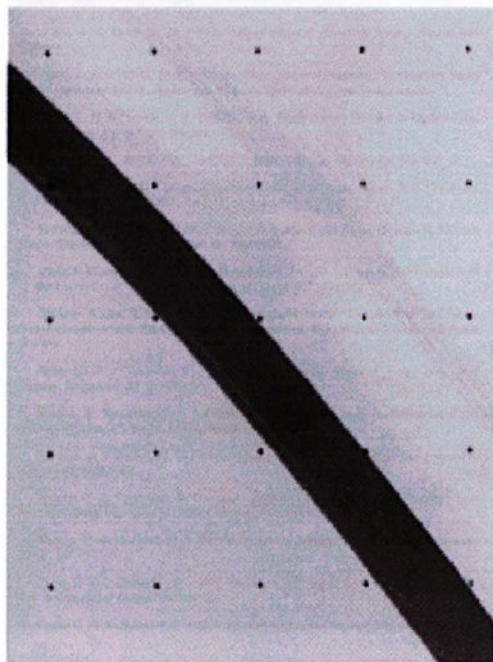


Figura 6.6: FDS 4399014 (Ampliada) - Imagem da Voyager 2, onde pode-se verificar o anel interno da Falha de Encke. Esta imagem ampliada com ângulo de fase de 20.6 graus, possui um tempo de exposição de 0.96 segundos.

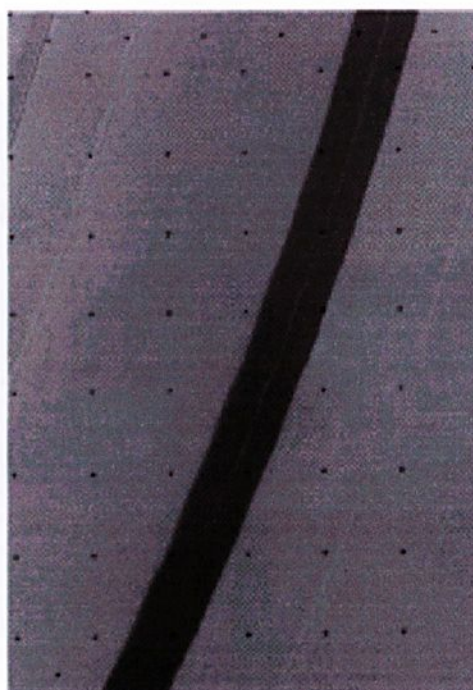


Figura 6.7: FDS 4399350 - Imagem da Voyager 2, onde pode-se ver o anel central da Falha de Encke. Esta imagem com ângulo de fase de 48.3 graus, possui um tempo de exposição de 0.72 segundos.



Figura 6.8: FDS 4399350-b (Ampliada) - Imagem da Voyager 2, ampliação da FDS 4399350, onde pode-se ver os arcos do anel central da Falha de Encke. Com ângulo de fase de 48.3 graus, esta imagem possui um tempo de exposição de 0.72 segundos (cortesia C.D. Murray).

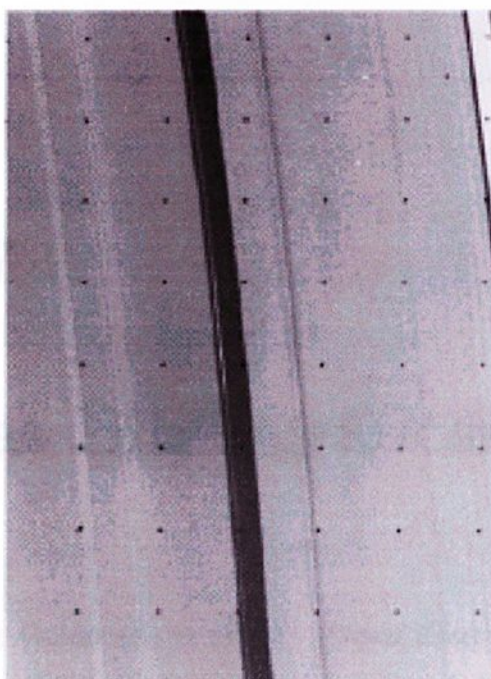


Figura 6.9: FDS 4400747 - Imagem da Voyager 2, mostra o anel interno da Falha de Encke. Com ângulo de fase de 145.7 graus, possui um tempo de exposição de 0.72 segundos (cortesia C.D. Murray).

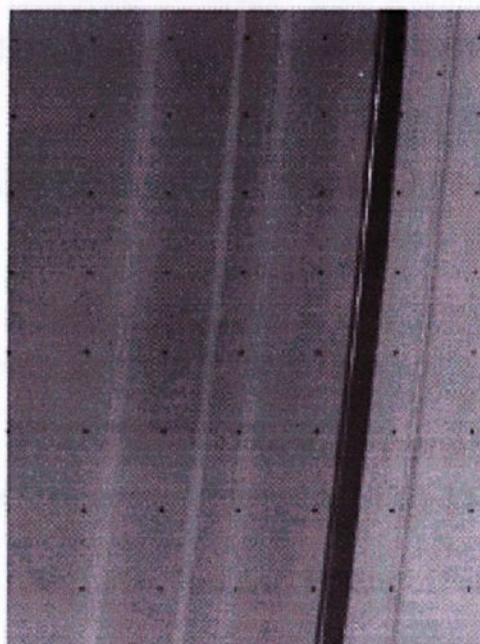


Figura 6.10: FDS 4400759 - Imagem da Voyager 2, onde pode-se notar o anel interno da Falha de Encke. Este não é um anel homogêneo como pode-se notar na imagem. Com ângulo de fase de 145.7 graus, possui um tempo de exposição de 0.96 segundos.

Capítulo 7

Referências Bibliográficas

Borderies, N. & Goldreich, P. (1982). Sharp Edges of Planetary Rings. *Nature* 299, 209-211.

Brouwer, D. & Clemence, G. M. (1961). *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press, Inc.

Chiang, E. I. & Goldreich, P. (2000). Apse Alignment of Narrow Eccentric Planetary Rings. *The Astrophysical Journal* 540, 1084-1090.

Cuzzi, J. et al (1984). Saturn's Rings: Properties and Processes. In *Planetary Rings* (R. J. Greenberg and A. Brahic, Eds.) 73-199. Univ. of Arizona Press, Tucson.

Cuzzi, J. N. & Scargle, J. D. (1985). Wavy Edges Suggest Moonlet in Encke's Gap. *The Astrophysical Journal* 292, 276-290.

Dermott, S. F., Gold, T., & Sinclair, A. T. (1979). The rings of Uranus - Nature and origin. *The Astronomical Journal* 84, 1225-1232.

Dermott, S. F. (1981). The "Braided" F-Ring of Saturn. *Nature* 290, 284-324.

Dermott, S. F. (1984). Dynamics of narrow rings. In *Planetary Rings* (R. J. Greenberg and A. Brahic, Eds.), 589-637. Univ. of Arizona Press, Tucson.

Dermott, S. F. & Murray, C. (1981). The dynamics of tadpole and



horseshoe orbits. I - Theory. II - The coorbital satellites of Saturn. *Icarus* 48, 1-22.

Dermott, S. F. & Murray, C. (1981). Nature of the Kirkwood gaps in the asteroid belt. *Nature* 301, 201-205.

Ferrari, C., & Brahic, A. (1997). Arcs and Clumps in the Encke Division of Saturn's Rings. *Planetary and Space Science* 45, 1051-1067.

Gehrels, T. *et al.* (1980). Imaging photopolarimeter on Pioneer Saturn. *Science* 207, 434-439.

Giuliatti Winter, S. M. (1994). The Dynamics of Saturn's F Rings. PhD Thesis, University of London, UK.

Giuliatti Winter, S. M., Murray, C. & Gordon, M. (2000). Perturbations to Saturn's F ring strands at their closest approach to Prometheus. *Planetary & Space Science* 48, 817-827.

Giuliatti Winter, S. M. & Gonçalves, M. A. F. (2000). Pan e a Falha de Encke. *Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira*, vol. 19, 31-37.

Goldreich, P. & Tremaine, S. (1978). The Formation of Cassini Division in Saturn's Rings. *Icarus* 34, 240-253.

Goldreich, P. & Tremaine, S. (1979). Towards a theory for the Uranian rings. *Nature* 277, 97-99.

Goldreich, P. & Tremaine, S. (1980). Disk-satellite interactions. *Astrophysical Journal* 241, Part 1, 425-441.

Goldreich, P. & Tremaine, S. (1982). The dynamics of planetary rings. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 20, 249-283.

Guimarães, A. H. F. (2001). Relatório Final do projeto de iniciação científica, FEG/UNESP.

Horn, L. J., Showalter, M. R. & Russell, C. T. (1996). Detection and Behavior of Pan Wakes in Saturn's A Rings. *Icarus* 124, 663-676.

Lissauer, J. J. & Cuzzi, J. N. (1982). Resonances in Saturn's Rings. *The Astronomical Journal* 87, 1051-1058.

Murray, C. & Thompson, R. P. (1990). Orbits of Shepherd Satellites deduced from the Structure of the Rings of Uranus. *Nature* 348, 499-502.

Murray, C. & Dermott, S. (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press.

Porco, C. C. & Goldreich, P. (1987). Shepherding of the Uranian Rings I. Kinematics. *The Astronomical Journal* 93, 724-729.

Porco, C. C. & Goldreich, P. (1987). Shepherding of the Uranian Rings II. Dynamics. *The Astronomical Journal* 93, 730-737.

Porco, C. C. (1991). An explanation for Neptune's rings arcs. *Science* 253, 995-1001.

Rappaport, N. (1998). Ring-Ringlet Interactions. *Icarus* 132, 36-42.

Reitsema, H. J. (1978). Photometric confirmation of the Encke division in Saturn's ring A. *Nature* 272, 601-602.

Roy, A. E. (1988). *Orbital Motion*. Third edition. Adam Hilger imprint by IOP Publishing Ltda, pag. 113.

Showalter, M. R. *et al.* (1986). Satellite 'Wakes' and the orbit of the Encke Gap Moonlet. *Icarus* 66, 297-323.

Showalter, M. R. (1991). The Visual Detection of 1981S13 and its Role in the Encke Gap. *Nature* 351, 709-713.

Shu, F. H. (1984). Waves in Planetary Rings (R. J. Greenberg and A. Brahic, Eds.), 513-561. Univ. of Arizona Press, Tucson.

Smith, B. *et al.* (1982). Encounter with Saturn: Voyager 1 Imaging Science Results. *Science* 212, 163-190.

Wisdom, J. (1980). The Resonance Overlap Criterion and Onset of Stochastic Behavior in the Restricted Three-Body Problem. *The Astronomical*



Journal, v. 85, N°.8.



