



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Regina Litz Lamblém

Polinômios Tipo Szegő

Tese de Doutorado

Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, São Paulo, Brasil
Telefone: (17) 3221-2444. Fax: (17) 3221-2445

Regina Litz Lamblém

Polinômios Tipo Szegő

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga.

São José do Rio Preto

2011

Lamblém, Regina Litz.

Polinômios tipo Szego/ Regina Litz Lamblém. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2011.

68 f.: il. ; 30 cm.

Orientador: Alagacone Sri Ranga

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Polinômios. 2. Polinômios ortogonais. 3. Polinômios de Szego.
I. Ranga, Alagacone Sri II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.587

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

REGINA LITZ LAMBLÉM

Polinômios Tipo Szegő

Tese apresentada para obtenção do título de doutor em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga
Professor Titular/ UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov
Professor Titular/ UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
Professor Livre Docente/ UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Lúcio Tunes dos Santos
Professor Livre Docente/ UNICAMP - Campinas

Prof. Dr. Luís Gustavo Nonato
Professor Livre Docente/ USP - São Carlos

São José do Rio Preto, 25 de Fevereiro de 2011.

Ao meu querido esposo, Davi.

Dedico.

Agradecimentos

A Deus por conceder-me mais estes anos de vida, nos quais tive a oportunidade de conhecer pessoas com quem muito aprendi.

Um agradecimento muito especial ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, pelo apoio desde o curso de nivelamento realizado em 2005, pela orientação deste trabalho, pela amizade, incentivo e exemplo de pesquisador.

Aos professores Marcelo Polezzi (in memória) e Wilson que me incentivaram a galgar os primeiros passos rumo à carreira científica.

A todos os professores que contribuíram com minha carreira acadêmica e científica em especial à Prof^a. Dr^a. Eliana Xavier Linhares de Andrade, Prof^a. Dr^a. Cleonice Fátima Bracciali e Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov.

À minha família, pelo apoio e compreensão de minha ausência nos tempos de estudos.

Ao meu querido Davi, pela companhia, por partilhar comigo momentos de júbilo e melancolia, pela compreensão, pelas palavras de conforto e sobretudo pelo apoio.

Ao Sr. Roberto, Sr^a. Nanci e família pelo apoio.

Ao Sr. João e Sr^a. Diná pelo tempo de abrigo em vossa casa.

Aos amigos Alyne, Cristiane, Fábio, Fernando, Heron, Manuela, Marcos, Marisa, Meire, Miquênia, Mirela, Mirna, Silvia, Vanessa, Wallace e a todos os outros que um dia caminharam comigo na estrada da vida e proporcionaram momentos de descontrações.

A todas as pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

À UEMS (Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul), em especial aos caros colegas Adilson, Jaqueline, Luiz Oreste, Marco e Rildo, pelo apoio na nova etapa de minha carreira profissional, a qual foi conciliada com a etapa final deste trabalho.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Dada uma sequência de números complexos $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, consideramos a sequência de polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfazendo a L-ortogonalidade $\mathcal{M}[z^{-n+m}Q_n(z)] = 0$, $0 \leq m \leq n-1$, com relação a um funcional linear $\mathcal{M}$, definido no espaço dos polinômios de Laurent por $\mathcal{M}[z^n] = \mu_{-n}$, para $n \in \mathbb{Z}$. Impondo algumas condições ao funcional de momento, os polinômios Q_n existem e satisfazem a uma relação de recorrência de três termos. Dessa forma, consideramos três classes especiais de tais funcionais de momento (S-tipo, MS-tipo e PO-tipo) e caracterizamos essas classes em termos dos coeficientes da relação de recorrência de três termos associada. O objetivo deste trabalho também é estudar os polinômios tipo Szegő, $S_n(z) = z^n Q_n(1/z)/Q_n(0)$, que satisfazem a ortogonalidade de Szegő

$$\mathcal{M}[z^{-m}S_n(z)] = 0, \quad 0 \leq m < n, \quad n \geq 1,$$

com relação ao funcional linear $\mathcal{M}$ da classe MS-tipo, ou seja, quando $\mathcal{M}$ é tal que $\mu_{-n} = \mu_n$, para $n \geq 1$ e os determinantes de Toeplitz Δ_n , associados aos momentos μ_n , são tais que $\Delta_n \neq 0$ para $n \geq 0$.

Palavras-chave: Funções hipergeométricas, polinômios L-ortogonais, polinômios tipo Szegő, polinômios para-ortogonais.

Abstract

Given a double sequence $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ of complex numbers, we consider the sequence of polynomials $\{Q_n\}$ satisfying the L-orthogonality $\mathcal{M}[z^{-n+m}Q_n(z)] = 0$, $0 \leq m \leq n-1$, with respect to a linear functional $\mathcal{M}$ defined on the space of Laurent polynomials by $\mathcal{M}[z^n] = \mu_{-n}$, for $n \in \mathbb{Z}$. Under certain restriction on the moment functional these polynomials exist and also satisfy a three term recurrence relation. We consider three special classes of such moment functionals (S-type, MS-type and PO-type) and characterize them in terms of the coefficients of the associated three term recurrence relations. The purpose of this work is also to study Szegő type polynomials, $S_n(z) = z^n Q_n(1/z)/Q_n(0)$, which are the polynomials satisfying the Szegő orthogonality

$$\mathcal{M}[z^{-m}S_n(z)] = 0, \quad 0 \leq m < n, \quad n \geq 1,$$

with respect to moment functional of the MS-type class, in other words, when $\mathcal{M}$ is such that $\mu_{-n} = \mu_n$, for $n \geq 1$ and the Toeplitz determinants Δ_n , associated with the moments μ_n , are such that $\Delta_n \neq 0$ for $n \geq 0$.

Keywords: Hypergeometric functions, L-orthogonal polynomials, Szegő type polynomials, para-orthogonal polynomials.

Sumário

Introdução	8
1 Preliminares	13
1.1 Função gama e função beta	13
1.2 Séries hipergeométricas	14
1.3 Frações contínuas	15
1.4 Determinantes de Hankel e de Toeplitz	18
1.5 Sobre polinômios ortogonais na reta real	19
2 Uma Caracterização dos Polinômios L-ortogonais	22
2.1 Polinômios L-ortogonais	22
2.2 A caracterização	26
3 Polinômios Tipo Szegő e Polinômios Para-ortogonais	35
3.1 Polinômios tipo Szegő	35
3.2 Polinômios para-ortogonais obtidos a partir de polinômios tipo Szegő . . .	40
3.3 Polinômios tipo Szegő obtidos a partir de polinômios para-ortogonais . . .	44
3.4 Exemplos envolvendo funções hipergeométricas	58
Considerações Finais	64
Referências Bibliográficas	66

Introdução

Para um par de números inteiros (p, q) , $-\infty \leq p \leq q \leq \infty$, $p, q \in \mathbb{Z}$, as funções definidas por

$$l_{p,q}(z) = \sum_{k=p}^q c_k z^k, \quad z, c_k \in \mathbb{C}$$

são conhecidas como polinômios de Laurent (L-polinômios). O espaço dos polinômios de Laurent será denotado por Λ .

Dada uma sequência $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complexos, seja $\mathcal{M}$ um funcional de momento linear definido em Λ por

$$\mathcal{M}[z^m] = \mu_{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Como $m \in \mathbb{Z}$, o funcional de momento $\mathcal{M}$ é chamado de funcional de momento forte.

Sejam Δ_n e $\Delta_n^{(1)}$ os determinantes de Toeplitz e os determinantes de Toeplitz deslocados, respectivamente, dados por

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_n^{(1)} = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \mu_2 & \mu_1 & \cdots & \mu_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{n+1} & \mu_n & \cdots & \mu_1 \end{vmatrix},$$

para $n \geq 1$, onde $\Delta_0 = \mu_0$ e $\Delta_0^{(1)} = \mu_1$.

Os polinômios S_n , tal que

$$\mathcal{M}[z^{-s} S_n(z)] = 0, \quad \text{para } 0 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 1, \quad \mu_{-n} = \bar{\mu}_n \text{ e } \Delta_n > 0, \quad n \geq 0,$$

são conhecidos por polinômios de Szegő ou polinômios ortogonais no círculo unitário.

Segundo Wikipédia, Szegő nasceu em Kunhegyes, Hungria, numa família judaica. Em 1912, iniciou seus estudos em física e matemática na Universidade de Budapest, com visitas de verão na Universidade de Berlin e na Universidade de Göttingen, onde assistiu

palestras de Frobenius e Hilbert, entre outras. Em 1915, seus estudos foram interrompidos por causa da I Guerra Mundial, na qual ele serviu na infantaria, artilharia e força aérea. Em 1918, Szegő obteve o doutorado pela Universidade de Viena por seu trabalho sobre os determinantes de Toeplitz. Os trabalhos mais importantes de Szegő foram em análise. Ele foi um dos analistas mais notáveis de sua geração e teve contribuições fundamentais para a teoria das matrizes Toeplitz e polinômios ortogonais.

Com as publicações [28] e [29], no início do século XX, Szegő introduziu os polinômios ortogonais no círculo unitário. Para resultados interessantes sobre esses polinômios referimos ao clássico livro de Szegő [27]. Os polinômios de Szegő tem sido estudados por muitos, por exemplo, Cachafeiro, Marcellán, Pérez [7], Jones, Njåstad e Thron [18], Simon [25] e [26] e Van Assche [30].

Nosso objetivo, neste trabalho, é estudar os polinômios tipo Szegő, os quais são polinômios que estão sob menores condições de restrições que os polinômios de Szegő, conforme veremos. Além disso, considerando uma sequência de polinômios L-ortogonais, ou seja, uma sequência de polinômios mônicos $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por

$$\mathcal{M}[z^{-n+m}Q_n(z)] = 0, \quad 0 \leq m \leq n-1, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

com Q_n , $n \geq 0$, de grau exatamente n , temos também como objetivo dar uma caracterização ao funcional de momento $\mathcal{M}$ e aos polinômios L-ortogonais, acima definidos.

Se $\mathcal{M}$ é tal que $\Delta_n^{(1)} \neq 0$ e $\Delta_n \neq 0$, $n \geq 0$, então a sequência de polinômios mônicos $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ existe, é única e satisfaz a uma relação de recorrência de três termos, conforme veremos no Capítulo 2 deste trabalho.

Observando que para $\lambda \neq 0$ o funcional $\mathcal{L}$ dado por $\mathcal{L}[f(z)] = \lambda \mathcal{M}[f(z)]$, para todo polinômio de Laurent f , gera a mesma sequência de polinômios L-ortogonais que o funcional $\mathcal{M}$, suponhamos sem perda de generalidade que $\mu_0 = 1$.

Dizemos que o funcional de momento $\mathcal{M}$ é um funcional de momento forte quase-definido normalizado quando

$$\mu_0 = 1, \quad \Delta_n^{(1)} \neq 0 \quad \text{e} \quad \Delta_{n+1} \neq 0, \quad n \geq 0.$$

Consideremos as seguintes subclasses do funcional de momento forte quase-definido:

- Classe S-tipo: $\Delta_n^{(1)} \neq 0, \quad \Delta_{n+1} \neq 0 \quad \text{e} \quad \mu_{-n} = \bar{\mu}_n, \quad n \geq 0;$
- Classe MS-tipo: $\Delta_n^{(1)} \neq 0, \quad \Delta_{n+1} \neq 0 \quad \text{e} \quad \mu_{-n} = \mu_n, \quad n \geq 0;$

- Classe PO-tipo: $\Delta_n^{(1)} \neq 0$ e $\mu_{n+1} = -\mu_{-n}$, $n \geq 0$.

Na classe S-tipo (classe dos polinômios tipo Szegő), os polinômios recíprocos

$$S_n(z) = \frac{Q_n^*(z)}{Q_n(0)} = \frac{z^n \overline{Q}_n(1/z)}{Q_n(0)},$$

onde $Q_n(0) \neq 0$ e $\overline{Q}_n$ é o próprio Q_n com os coeficientes conjugados, são polinômios que satisfazem a ortogonalidade de Szegő

$$\mathcal{M}[z^{-s} S_n(z)] = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad n \geq 1. \quad (2)$$

No caso particular, $\Delta_n > 0$, $n \geq 0$, os funcionais de momento são chamados de positivo-definido e os polinômios S_n associados e que satisfazem (2) são os polinômios de Szegő, conforme vimos anteriormente. Neste caso, $\mathcal{M}$ pode ser representado por uma integral de Stieltjes em relação a uma distribuição no círculo unitário, denotado por $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, isto é, $\mathcal{M}$ pode ser representado por uma integral de Stieltjes em relação a uma função $\psi(z)$, com $\psi(e^{i\theta})$ real, não decrescente em $[0, 2\pi]$, limitada, com infinitos pontos de aumento em $[0, 2\pi]$ e tal que os momentos

$$\mu_n = \int_C z^{-n} d\psi(z) = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\psi(e^{i\theta}), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

existem.

Os polinômios mônicos de Szegő são caracterizados por satisfazerem a uma relação de recorrência com coeficientes de reflexão, $S_n(0)$, menores que 1 em módulo. Veja, por exemplo, Jones, Njåstad e Thron [18], Simon [25] e [26], Szegő [27] e Van Assche [30].

No caso particular, $(-1)^{n(n+1)/2} \Delta_n > 0$, $n \geq 0$, os polinômios S_n associados ao funcional $\mathcal{M}$ e que satisfazem (2) possuem coeficientes de reflexão maiores que 1 em módulo. Este caso foi objeto de estudo de meu trabalho de Mestrado, ver Lamblém [20].

Na classe MS-tipo (classe dos polinômios tipo Szegő modificados), os polinômios inversos

$$S_n(z) = \frac{Q_n^\bullet(z)}{Q_n(0)} = \frac{z^n Q_n(1/z)}{Q_n(0)},$$

onde $Q_n(0) \neq 0$, são polinômios que satisfazem a ortogonalidade de Szegő (2). Neste caso, os polinômios S_n associados ao funcional $\mathcal{M}$ e que satisfazem (2) são os polinômios tipo Szegő. Veremos, no Capítulo 3 deste trabalho, que os polinômios tipo Szegő satisfazem a uma relação de recorrência com coeficientes de reflexão apenas diferentes de ± 1 .

Quando os momentos são reais, as classes S-tipo e MS-tipo coincidem. Além disso, no caso particular, $(-1)^{n(n+1)/2}\Delta_n > 0$, $n \geq 0$, os polinômios S_n associados ao funcional $\mathcal{M}$ e que satisfazem (2) são bem conhecidos e $\mathcal{M}$ pode ser representado por uma integral de Stieltjes associada a uma medida positiva (ou negativa), ou seja, $\mathcal{M}$ pode ser representado por uma integral de Stieltjes associada a uma função ψ definida em $[a, b]$, real, limitada, não decrescente (não crescente), com infinitos pontos de aumento em $[a, b]$ e tal que os momentos

$$\mu_n = \int_a^b z^{-n} d\psi(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

existem. Veja, por exemplo, os trabalhos de Andrade, McCabe e Sri Ranga [4], Bracciali, McCabe e Sri Ranga [6], Common e McCabe [9], Lamblém [20] e Vinet e Zhedanov [31].

Na classe PO-tipo (classe dos polinômios para-ortogonais), não escrevemos $\Delta_{n+1} \neq 0$, pois $\Delta_{n+1} = (-1)^n \Delta_{n+1}^{(1)}$ para $n \geq 0$. Neste caso, os polinômios $Q_n(z)$ são os polinômios para-ortogonais

$$\frac{S_n^\bullet(z) + S_n(z)}{S_n^\bullet(0) + S_n(0)} \quad \text{ou} \quad \frac{S_n^\bullet(z) - S_n(z)}{S_n^\bullet(0) - S_n(0)},$$

onde os polinômios S_n satisfazem a ortogonalidade de Szegő com respeito a um funcional de momento da classe MS-tipo, conforme veremos no Capítulo 3 deste trabalho.

Para realização deste trabalho, organizamos nosso estudo da seguinte forma:

No Capítulo 1, introduzimos alguns conceitos sobre função gama, função beta, séries hipergeométricas, frações contínuas e polinômios ortogonais que são requisitos necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2, falamos sobre algumas das propriedades dos polinômios L-ortogonais, e, depois usando os coeficientes da relação de recorrência de três termos de Q_n , damos uma caracterização aos polinômios L-ortogonais e ao funcional de momento forte quase-definido $\mathcal{M}$. Os resultados sobre a caracterização dos polinômios L-ortogonais e do funcional de momento estão publicados em co-autoria com Bracciali, McCabe e Sri Ranga em [5].

No Capítulo 3, desenvolvemos o estudo sobre os polinômios tipo Szegő. Obtemos polinômios para-ortogonais através de polinômios tipo Szegő e vemos condições para obtermos polinômios tipo Szegő através de polinômios para-ortogonais. Fornecemos, também, alguns exemplos de funcionais de momento das classes PO-tipo e MS-tipo. Além disso, considerando a razão entre duas funções hipergeométricas que podem ser expressas em termos de frações contínuas, obtemos exemplos de polinômios para-ortogonais e tipo Szegő, que são funções hipergeométricas multiplicadas por fatores constantes. Estes

resultados estão publicados em co-autoria com McCabe, Piñar e Sri Ranga em [21].

Encerramos este trabalho com algumas considerações.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos de maneira sucinta os pré-requisitos necessários ao desenvolvimento deste trabalho. Apenas exporemos os resultados sem demonstrações. As principais referências utilizadas neste capítulo são as seguintes: Andrews, Askey e Roy [1], Chihara [8], Freud [14], Lorentzen e Waadeland [22], Szegő [27] e Wall [32].

1.1 Função gama e função beta

As definições e resultados que apresentaremos a seguir podem ser encontrados em Andrews, Askey e Roy [1], Slater [23] e Szegő [27].

Definição 1.1. O número, $(a)_n$, dado por

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1), & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

é denominado de fatorial deslocado ou fatorial generalizado ou, ainda, símbolo de Pochhammer, onde a pode ser um número real ou complexo.

Definição 1.2. Para todo complexo $x \neq 0, -1, -2, \dots$, a função gama, denotada por $\Gamma(x)$, é definida por

$$\Gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k! k^{x-1}}{(x)_k}.$$

Segue imediatamente da Definição 1.2 que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (1.1)$$

onde $\Gamma(1) = 1$.

Definição 1.3. Para $x, y \in \mathbb{C}$, $\Re(x) > 0$ e $\Re(y) > 0$ a função beta é definida pela integral

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{(x-1)}(1-t)^{y-1} dt.$$

As funções beta e gama estão relacionadas da seguinte forma:

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Teorema 1.1. [Fórmula de reflexão de Euler]

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

1.2 Séries hipergeométricas

As séries hipergeométricas são definidas por

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix} ; z \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j (a_2)_j \cdots (a_p)_j}{(b_1)_j (b_2)_j \cdots (b_q)_j} \frac{z^j}{j!}. \quad (1.2)$$

Em (1.2) os parâmetros do denominador $b_1, b_2, \dots, b_q$ não podem ser inteiros negativos. No entanto, se algum dos parâmetros do numerador $a_1, a_2, \dots, a_p$ é o valor negativo $-n$, então a série termina no n -ésimo termo, resultando em um polinômio de grau n .

As séries hipergeométricas com $p = 2$ e $q = 1$ são denotadas por

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; z \right) \quad \text{ou} \quad {}_2F_1(a, b; c; z) \quad (1.3)$$

e conhecidas como funções hipergeométricas.

Gauss definiu duas funções hipergeométricas como sendo contíguas se dois dos correspondentes parâmetros são iguais e o outro difere por uma unidade, por exemplo,

${}_2F_1(a, b; c; z)$ e ${}_2F_1(a, b+1; c; z)$. Além disso, Gauss denominou de relação contígua a relação entre uma função hipergeométrica e outra contígua. Porém, seguindo a nomenclatura usada por Andrews, Askey e Roy (ver [1], p. 94), usaremos a expressão relações contíguas quando os parâmetros diferirem por inteiros.

Existem várias relações contíguas interessantes. Há, por exemplo, conexão entre relações contíguas, frações contínuas e polinômios ortogonais. Vamos considerar as seguintes duas relações contíguas que podem ser encontradas em Andrews, Askey e Roy [1, p. 90 e 100]

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \left(1 + \frac{a-b+1}{c}z\right) {}_2F_1(a+1, b; c+1; z) \\ &\quad - \frac{(a+1)(c-b+1)}{c(c+1)}z {}_2F_1(a+2, b; c+2; z) \end{aligned} \quad (1.4)$$

e

$$\begin{aligned} (c-a) {}_2F_1(a-1, b; c; z) &= (c-2a-(b-a)z) {}_2F_1(a, b; c; z) \\ &\quad + a(1-z) {}_2F_1(a+1, b; c; z). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Em ambos os casos $c \neq 0, -1, -2, \dots$. As relações contíguas (1.4) e (1.5) serão usadas para obtermos exemplos de polinômios para-ortogonais e tipo Szegő.

1.3 Frações contínuas

Chamamos de fração contínua uma expressão do tipo

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots, \quad (1.6)$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são sequências arbitrárias de números reais ou complexos ou funções reais ou complexas, com $a_n \neq 0$. Os números, ou funções, a_n e b_n são chamados, respectivamente, n -ésimo numerador e denominador parciais. Uma fração contínua pode, também, ser denotada da seguinte forma:

$$b_0 + K_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right).$$

O valor

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}}$$

é chamado de n -ésimo convergente ou aproximante da fração contínua e pode ser denotado também por

$$f_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \quad \text{ou} \quad f_n = b_0 + K_{j=1}^n \left(\frac{a_j}{b_j} \right).$$

Podemos escrever

$$f_n = \frac{A_n}{B_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde

$$\begin{aligned} A_0 &= b_0, & B_0 &= 1, \\ A_1 &= b_0 b_1 + a_1, & B_1 &= b_1, \\ A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0. \end{aligned}$$

Assim, por indução, obtemos que os numeradores A_n e os denominadores B_n dos convergentes f_n da fração contínua (1.6) satisfazem

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

para $n \geq 1$, onde $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$ e $B_0 = 1$.

Definição 1.4. *Convergência clássica de uma fração contínua da forma (1.6) para um número $f \in \overline{\mathbb{C}} = (\mathbb{C} \cup \infty)$ (plano complexo estendido) significa a convergência da sequência de convergentes $\{f_n\}$ para f e, neste caso, o valor da fração contínua é o limite da sequência $\{f_n\}$. Então, podemos escrever*

$$f = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots.$$

Como existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano complexo estendido e a esfera de Riemann, aceitamos também o conceito de convergência para o infinito. Assim, dizemos que uma fração contínua diverge se a sequência $\{f_n\}$ converge para mais de um valor ou quando não converge para nenhum valor.

Definição 1.5. Se $(a_n, b_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ para todo n e a fração contínua $K\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge, então o conjunto Ω é chamado de conjunto de convergência da fração contínua.

Definição 1.6. Um conjunto de convergência condicional Ω é um conjunto de convergência onde a fração contínua $K\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge se, e somente se, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| b_n \prod_{k=1}^n a_k^{n-k+1} \right|$$

diverge.

Crerios de convergência para frações contínuas são frequentemente dados em termos de conjuntos de convergência.

Para a fração contínua $K\left(\frac{a_n}{1}\right)$, o conjunto de convergência Ω pode ser descrito como $\Omega = E \times \{1\}$, com $\{1\}$ sendo o conjunto constituído apenas pelo elemento 1. Para abreviar, é comum dizer que $E \subseteq \mathbb{C}$ é um conjunto de convergência para a fração contínua $K\left(\frac{a_n}{1}\right)$ se $\Omega = E \times \{1\}$ é um de seus conjuntos de convergência.

Definição 1.7. Dizemos que $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos de valores para a fração contínua $K\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ se

$$V_n \subseteq \overline{\mathbb{C}}, \quad V_n \neq \emptyset, \quad n \geq 0$$

e

$$s_n(V_n) \equiv \frac{a_n}{b_n + V_n} \subseteq V_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

A importância dos conjuntos de valores (ver, por exemplo, Lorentzen e Waadeland [22], p.110) é que eles contem os valores dos convergentes de $K\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 1.2. Se $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de conjuntos de valores para a fração contínua $K\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, então, para $n = 0, 1, 2, \dots$ e $k = 1, 2, \dots$,

$$S_n^{(n)}(w_{n+k}) = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} + \dots + \frac{a_{n+k}}{b_{n+k} + w_{n+k}} \in V_n,$$

para todo $w_{n+k} \in V_{n+k}$.

O Teorema da Parábola (ver, por exemplo, Lorentzen e Waadeland [22], p.130), entre outras afirmações, diz que se α é um número real fixo de $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, então a região

parabólica

$$E(\alpha) = \{z : |z| - \Re(z e^{-i2\alpha}) \leq \frac{1}{2} \cos^2 \alpha\}$$

é um conjunto de convergência condicional para a fração contínua $K\left(\frac{a_n}{1}\right)$ e que o semi-plano

$$V(\alpha) = \{z : \Re(z e^{-i\alpha}) \geq -\frac{1}{2} \cos \alpha\}$$

é o respectivo conjunto de valores.

Este resultado será usado quando procurarmos condições para obtermos polinômios tipo Szegő através de polinômios para-ortogonais.

Outras informações sobre frações contínuas podem ser encontradas em Chihara [8], Lorentzen e Waadeland [22], Jones e Thron [19] e Wall [32].

1.4 Determinantes de Hankel e de Toeplitz

Definição 1.8. *Os determinantes definidos por*

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.8)$$

são chamados *determinantes de Hankel*, onde $H_{-1}^{(m)} = 0$ e $H_0^{(m)} = 1$.

Esses determinantes possuem a importante propriedade dada abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em Henrici [16, p. 595]:

$$(H_n^{(m)})^2 - H_n^{(m-1)} H_n^{(m+1)} + H_{n+1}^{(m-1)} H_{n-1}^{(m+1)} = 0, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 1. \quad (1.9)$$

Essa propriedade é conhecida como identidade de Jacobi para determinantes de Hankel.

Definição 1.9. *Os determinantes definidos por*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix} \quad e \quad \Delta_n^{(1)} = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \mu_2 & \mu_1 & \cdots & \mu_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n+1} & \mu_n & \cdots & \mu_1 \end{vmatrix},$$

para $n \geq 1$, são chamados *determinantes de Toeplitz* e *determinantes de Toeplitz deslocados*, respectivamente, onde $\Delta_0 = \mu_0$ e $\Delta_0^{(1)} = \mu_1$.

Os determinantes de Hankel e os determinantes de Toeplitz estão relacionados da seguinte forma:

$$\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} H_{n+1}^{(-n)}.$$

Esses determinantes serão usados posteriormente.

1.5 Sobre polinômios ortogonais na reta real

Definição 1.10. *Seja $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de números complexos. Se $\mathcal{F}$ é um funcional com valores complexos definido no espaço vetorial Π de todos os polinômios por*

$$\mathcal{F}[x^n] = \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e

$$\mathcal{F}[\alpha_1 \pi_1(x) + \alpha_2 \pi_2(x)] = \alpha_1 \mathcal{F}[\pi_1(x)] + \alpha_2 \mathcal{F}[\pi_2(x)], \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \quad e \quad \forall \pi_1, \pi_2 \in \Pi,$$

então $\mathcal{F}$ é um funcional de momento determinado pela sequência de momentos $\{\mu_n\}$.

Observe que $\mathcal{F}$ é um funcional linear.

Definição 1.11. *Um funcional de momento $\mathcal{F}$ é chamado positivo-definido se $\mathcal{F}[\pi(x)] > 0$, para todo polinômio π satisfazendo $\pi(x) \geq 0$ e $\pi(x) \not\equiv 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.12. *Dizemos que $\{\mathcal{P}_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a um funcional de momento $\mathcal{F}$ se, para m, n inteiros e não-negativos, vale*

- (i) $\mathcal{P}_n$ é um polinômio de grau exatamente n ;
- (ii) $\mathcal{F}[\mathcal{P}_m(x)\mathcal{P}_n(x)] = 0$, para $m \neq n$;
- (iii) $\mathcal{F}[\mathcal{P}_n^2(x)] \neq 0$.

Uma condição necessária e suficiente (ver Chihara [8]) para a existência de uma sequência de polinômios ortogonais para $\mathcal{F}$ é que

$$H_n^{(0)} \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.10}$$

onde $H_n^{(0)}$ são os determinantes de Hankel definidos na seção anterior.

Definição 1.13. Dizemos que um funcional de momento $\mathcal{F}$ é simétrico se $\mu_{2k+1} = 0$ para $k = 0, 1, 2, \dots$.

Teorema 1.3. A sequência $\{\mathcal{P}_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais com relação a um funcional de momento simétrico $\mathcal{F}$, se, e somente se $\mathcal{P}_n(-x) = (-1)^n \mathcal{P}_n(x)$.

Definição 1.14. Seja ψ uma função real, não-decrescente, definida em $[a, b]$. Um ponto $\xi \in [a, b]$ é chamado de ponto de aumento de ψ se $\psi(\xi + \varepsilon) - \psi(\xi - \varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon > 0$.

Definição 1.15. Dizemos que $d\psi$ é uma medida positiva (distribuição) em $[a, b]$, se ψ é uma função definida em $[a, b]$, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento, tal que

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

são finitos.

Se os momentos existem para todo n inteiro (positivo e negativo), $d\psi(x)$ é uma distribuição forte. Se, além disso, $(a, b) \subset (0, \infty)$, $\psi(x)$ é uma distribuição forte de Stieltjes.

Todo funcional de momento $\mathcal{F}$, positivo-definido, pode ser representado por uma integral de Stieltjes associada a uma medida positiva (ver, por exemplo, Chihara ([8], p.57). O próximo teorema trata da relação de recorrência dos polinômios ortogonais.

Teorema 1.4. Seja $\{\mathcal{P}_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos em (a, b) relativamente à distribuição $d\psi(x)$. Então,

$$\mathcal{P}_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})\mathcal{P}_n(x) - d_{n+1}\mathcal{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.11)$$

com $\mathcal{P}_0(x) = 1$, $\mathcal{P}_{-1}(x) = 0$, $\beta_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, e

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \frac{\int_a^b x \mathcal{P}_n^2(x) d\psi(x)}{\int_a^b \mathcal{P}_n^2(x) d\psi(x)}, \quad n \geq 0, \\ d_{n+1} &= \frac{\int_a^b \mathcal{P}_n^2(x) d\psi(x)}{\int_a^b \mathcal{P}_{n-1}^2(x) d\psi(x)} > 0, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Se $d\psi(x) = w(x)dx$, chamamos $w(x)$ de função peso. Aqui, $w(x) \geq 0$ em (a, b) , mas não identicamente nula.

A proposição a seguir trata da relação de recorrência dos polinômios ortogonais simétricos.

Proposição 1.1. *Seja $\{\mathcal{P}_n\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com respeito à função peso positiva $w(x)$ definida em $[-b, b]$, onde $0 < b \leq \infty$. Suponhamos que a função peso satisfaz à simetria*

$$w(x) = w(-x),$$

então esses polinômios satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$\mathcal{P}_{n+1}(x) = x\mathcal{P}_n(x) - d_{n+1}\mathcal{P}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.13)$$

com $\mathcal{P}_0(x) = 1$ e $\mathcal{P}_1(x) = x$. Neste caso, $\mathcal{P}_n$ são chamados de polinômios ortogonais simétricos.

Impondo condições sobre d_{n+1} , veremos, mais adiante, que os coeficientes de reflexão dos polinômios tipo Szegő podem ser escritos em termos de d_{n+1} . Isto nos mostra que há uma conexão entre polinômios tipo Szegő e polinômios ortogonais simétricos.

Outras informações sobre polinômios ortogonais podem ser encontrados em Chihara [8], Freud [14] e Szegő [27].

Capítulo 2

Uma Caracterização dos Polinômios L-ortogonais

Neste capítulo, veremos algumas propriedades dos polinômios que são L-ortogonais com respeito a um certo funcional de momento, em seguida, daremos uma caracterização aos polinômios L-ortogonais e ao funcional de momento. O teorema da caracterização é o principal resultado deste capítulo e pode ser encontrado em Bracciali, Lamblém, McCabe e Sri Ranga [5].

2.1 Polinômios L-ortogonais

Para um par de números inteiros (p, q) , $-\infty \leq p \leq q \leq \infty$, as funções definidas por

$$l_{p,q}(z) = \sum_{k=p}^q c_k z^k, \quad z, c_k \in \mathbb{C}$$

são conhecidas como polinômios de Laurent (L-polinômios). O espaço dos polinômios de Laurent será denotado por Λ .

Dada a sequência $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complexos, sejam $\mathcal{M}$ funcional de momento no espaço dos polinômios de Laurent definido por

$$\mathcal{M}[t^m] = \mu_{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1)$$

e os determinantes de Toeplitz associados, Δ_n e $\Delta_n^{(1)}$, como definidos na seção 1.4 do

Capítulo 1.

Seja a sequência de polinômios mônicos $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ definida por

$$\mathcal{M}[z^{-n+s}Q_n(z)] = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1, \quad (2.2)$$

com Q_n , $n \geq 0$, de grau exatamente n .

Chamamos a ortogonalidade (2.2) de L-ortogonalidade, pois (2.2) é equivalente a ortogonalidade da sequência de polinômios de Laurent

$$Q_0(z), z^{-1}Q_1(z), z^{-1}Q_2(z), z^{-2}Q_3(z), z^{-2}Q_4(z), z^{-3}Q_5(z), \dots,$$

com respeito a $\mathcal{M}$, ou seja, (2.2) é equivalente a ortogonalidade

$$\mathcal{M}[Q_m(z)Q_n(z)] = 0, \quad n \neq m, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

com $Q_n(z) = z^{-\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} Q_n(z)$. Para informações sobre a ortogonalidade (2.3) veja, por exemplo, Hendriksen e Van Rossum [15].

Polinômios que satisfazem propriedades de L-ortogonalidade, por conveniência, são chamados de polinômios L-ortogonais, como pode ser observado, por exemplo, em Andrade, Bracciali e Sri Ranga [2], Andrade, Costa e Sri Ranga [3] e Bracciali, Lamblém, McCabe e Sri Ranga [5].

Assim, a sequência de polinômios mônicos $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ definida em (2.2) é denominada sequência de polinômios L-ortogonais com respeito a $\mathcal{M}$.

Veremos, agora, algumas propriedades dos polinômios L-ortogonais.

Teorema 2.1. *Se $\mathcal{M}$ é tal que $\Delta_n^{(1)} \neq 0$ e $\Delta_n \neq 0$, $n \geq 0$, então a sequência de polinômios mônicos $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ existe e é única. Além disso, para $n \geq 1$,*

$$\mathcal{M}[Q_n(z)] = (-1)^n \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}^{(1)}}, \quad \mathcal{M}[z^{-n-1}Q_n(z)] = \frac{\Delta_n^{(1)}}{\Delta_{n-1}^{(1)}}, \quad (2.4)$$

$$Q_n(z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\Delta_{n-1}^{(1)}} \begin{vmatrix} \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

$$\text{e } Q_n(0) = (-1)^n \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-1}^{(1)}}.$$

Demonstração: Escrevendo $Q_n(z) = \sum_{j=0}^n q_{n,j} z^j$ e usando (2.2) obtemos um sistema linear. Os resultados desse teorema são obtidos a partir desse sistema linear. ■

Definimos, agora, os polinômios P_n , por

$$P_0(z) = 0 \text{ e } P_n(z) = \mathcal{M} \left[\frac{Q_n(z) - Q_n(t)}{z - t} \right], \quad n \geq 1.$$

Dizemos que P_n são os polinômios associados a Q_n .

Teorema 2.2. *Se $\mathcal{M}$ é tal que $\Delta_n^{(1)} \neq 0$ e $\Delta_n \neq 0$, $n \geq 0$, então a sequência de polinômios P_n e Q_n satisfazem*

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) &= (z + \beta_{n+1})P_n(z) - \alpha_{n+1}zP_{n-1}(z), \\ Q_{n+1}(z) &= (z + \beta_{n+1})Q_n(z) - \alpha_{n+1}zQ_{n-1}(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (2.6)$$

com $P_0(z) = 0$, $Q_0(z) = 1$, $P_1(z) = \mu_0$ e $Q_1(z) = z + \beta_1$, onde $\beta_1 = -\mu_0/\mu_1$,

$$\alpha_{n+1} = \frac{\mathcal{M}[Q_n(z)]}{\mathcal{M}[Q_{n-1}(z)]} \quad \text{e} \quad \beta_{n+1} = \alpha_{n+1} \frac{\mathcal{M}[z^{-n}Q_{n-1}(z)]}{\mathcal{M}[z^{-n-1}Q_n(z)]}, \quad n \geq 1. \quad (2.7)$$

Demonstração: Primeiramente observemos que se $\Delta_n^{(1)} \neq 0$ e $\Delta_n \neq 0$ para $n \geq 0$, então

$$\mathcal{M}[Q_n(z)] = (-1)^n \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}^{(1)}} \neq 0,$$

para $n \geq 1$.

Para $n = 0$ basta observar que Q_n é mônico e para $n = 1$ usar o Teorema 2.1.

Para $n \geq 1$, como

$$Q_{n+1}(z) - zQ_n(z)$$

é um polinômio de grau n , podemos escolher β_{n+1} e α_{n+1} (de maneira não única) de modo que

$$Q_{n+1}(z) - zQ_n(z) = \beta_{n+1}Q_n(z) - \alpha_{n+1}zQ_{n-1}(z) + R_{n-1}(z), \quad (2.8)$$

onde $R_{n-1}(z)$ é de grau $n - 1$.

Escrevendo $R_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j^{(n-1)} z^j$, multiplicando-se (2.8) por z^{-n+s} e aplicando o funcional de momento $\mathcal{M}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[z^{-n+s}Q_{n+1}(z)] - \mathcal{M}[z^{-n+s+1}Q_n(z)] &= \beta_{n+1}\mathcal{M}[z^{-n+s}Q_n(z)] - \alpha_{n+1}\mathcal{M}[z^{-n+s+1}Q_{n-1}(z)] + \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} d_j^{(n-1)} \mathcal{M}[z^{-n+s+j}]. \end{aligned}$$

Fazendo $s = 0, 1, \dots, n-1$, respectivamente, na equação acima, obtemos o sistema linear

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_1 \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_2 & \mu_1 & \cdots & \mu_{-n+3} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} d_0^{(n-1)} \\ d_1^{(n-1)} \\ \vdots \\ d_{n-2}^{(n-1)} \\ d_{n-1}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\mathcal{M}[Q_n(z)] + \alpha_{n+1}\mathcal{M}[Q_{n-1}(z)] \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha_{n+1} = \frac{\mathcal{M}[Q_n(z)]}{\mathcal{M}[Q_{n-1}(z)]}$, então o sistema linear acima é homogêneo. Como $\det B = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta_{n-1}^{(1)} \neq 0$, o sistema linear homogêneo possui uma única solução, a saber, a solução trivial. Disso, segue que $R_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j^{(n-1)} z^j \equiv 0$. Consequentemente, $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ satisfaz a relação de recorrência de três termos

$$Q_{n+1}(z) = (z + \beta_{n+1})Q_n(z) - \alpha_{n+1}zQ_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.9)$$

onde $\alpha_{n+1} = \frac{\mathcal{M}[Q_n(z)]}{\mathcal{M}[Q_{n-1}(z)]}$.

Para demonstrar que $\beta_{n+1} = \alpha_{n+1} \frac{\mathcal{M}[z^{-n}Q_{n-1}(z)]}{\mathcal{M}[z^{-n-1}Q_n(z)]}$, $n \geq 1$, basta multiplicar a relação de recorrência (2.9) por z^{-n-1} e aplicar o funcional de momento $\mathcal{M}$.

Provemos agora a relação de recorrência de P_n . Usando a relação de recorrência (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) - Q_{n+1}(t) &= zQ_n(z) + \beta_{n+1}Q_n(z) - \alpha_{n+1}zQ_{n-1}(z) \\ &\quad - tQ_n(t) - \beta_{n+1}Q_n(t) + \alpha_{n+1}tQ_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Somando-se e subtraindo-se $zQ_n(t)$ e $\alpha_{n+1}zQ_{n-1}(t)$ no lado direito da equação acima, temos

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(z) - Q_{n+1}(t) &= (z + \beta_{n+1})[Q_n(z) - Q_n(t)] - \alpha_{n+1}z[Q_{n-1}(z) - Q_{n-1}(t)] \\ &\quad + (z - t)[Q_n(t) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}(t)]. \end{aligned}$$

Dividindo-se por $(z - t)$ e aplicando o funcional $\mathcal{M}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left[\frac{Q_{n+1}(z) - Q_{n+1}(t)}{(z - t)}\right] &= (z + \beta_{n+1})\mathcal{M}\left[\frac{Q_n(z) - Q_n(t)}{(z - t)}\right] \\ &\quad - \alpha_{n+1}z\mathcal{M}\left[\frac{Q_{n-1}(z) - Q_{n-1}(t)}{(z - t)}\right] + \mathcal{M}[Q_n(t)] - \alpha_{n+1}\mathcal{M}[Q_{n-1}(t)]. \end{aligned}$$

Da definição de polinômios associados aos L-ortogonais chegamos à seguinte relação

$$P_{n+1}(z) = (z + \beta_{n+1})P_n(z) - \alpha_{n+1}zP_{n-1}(z) + \mathcal{M}[Q_n(t)] - \alpha_{n+1}\mathcal{M}[Q_{n-1}(t)], \quad n \geq 1.$$

Mas, como $\alpha_{n+1} = \frac{\mathcal{M}[Q_n(t)]}{\mathcal{M}[Q_{n-1}(t)]}$, chegamos à relação procurada.

Agora, para $n = 0$ e $n = 1$, basta usar as condições iniciais de Q_n e a definição de polinômios associados aos L-ortogonais. ■

2.2 A caracterização

Nesta seção, usando os coeficientes da relação de recorrência de três termos de Q_n , damos uma caracterização aos polinômios L-ortogonais e ao funcional de momento $\mathcal{M}$.

Definição 2.1. Se $r_n(z) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}z^k$, então o seu polinômio recíproco é definido por $r_n^*(z) = z^n \bar{r}_n(1/z)$, onde $\bar{r}_n$ é o polinômio r_n com os coeficientes conjugados complexos, ou seja, $r_n^*(z) = z^n \bar{r}_n(1/z) = z^n \overline{r_n(1/\bar{z})}$.

Definição 2.2. Se $r_n(z) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}z^k$, então seu polinômio inverso é definido por $r_n^\bullet(z) = z^n r_n(1/z)$.

Sejam $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ as sequências de polinômios dadas por (2.6), com condições iniciais $P_0(z) = 0$, $Q_0(z) = 1$, $P_1(z) = \mu_0$ e $Q_1(z) = z + \beta_1$. Suponhamos que $\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1} \neq 0$, para $n \geq 1$. Consideremos as sequências $\{C_n\}$ e $\{D_n\}$ dadas por

$$C_n(z) = \frac{\bar{\beta}_n \hat{P}_n(z) - \bar{\alpha}_{n+1} z \hat{P}_{n-1}(z)}{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}} \quad \text{e} \quad D_n(z) = \frac{\bar{\beta}_n \hat{Q}_n(z) - \bar{\alpha}_{n+1} z \hat{Q}_{n-1}(z)}{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}}, \quad n \geq 1, \quad (2.10)$$

onde

$$\hat{Q}_n(z) = (\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \cdots \bar{\beta}_n)^{-1} Q_n^*(z) \quad \text{e} \quad \hat{P}_n(z) = (\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \cdots \bar{\beta}_n)^{-1} P_n^*(z)$$

são os polinômios mônicos recíprocos de $Q_n(z)$ e $P_n(z)$, respectivamente.

Observemos que como $\hat{Q}_n$ é um polinômio mônico de grau n , segue que D_n é também um polinômio mônico de grau n .

Lema 2.1. *As seqüências $\{C_n\}_{n=0}^\infty$ e $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ dadas em (2.10) satisfazem as relações de recorrência de três termos*

$$\begin{aligned} C_{n+1}(z) &= \left(z + \frac{1}{\bar{\beta}_n} \frac{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}}{\bar{\beta}_{n+1} - \bar{\alpha}_{n+2}} \right) C_n(z) - \frac{\bar{\alpha}_{n+1}}{\bar{\beta}_n \bar{\beta}_{n-1}} \frac{\bar{\beta}_{n-1} - \bar{\alpha}_n}{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}} z C_{n-1}(z), \\ D_{n+1}(z) &= \left(z + \frac{1}{\bar{\beta}_n} \frac{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}}{\bar{\beta}_{n+1} - \bar{\alpha}_{n+2}} \right) D_n(z) - \frac{\bar{\alpha}_{n+1}}{\bar{\beta}_n \bar{\beta}_{n-1}} \frac{\bar{\beta}_{n-1} - \bar{\alpha}_n}{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}} z D_{n-1}(z), \end{aligned} \quad n \geq 1.$$

com $C_0(z) = \tilde{C}_0(z) = 1$, $C_1(z) = (\bar{\beta}_1 - \bar{\alpha}_2)^{-1}$, $D_0(z) = 1$, $D_1(z) = z + (\bar{\beta}_1 - \bar{\alpha}_2)^{-1}$, $\beta_0 = 1$ e $\alpha_1 = 0$.

Demonstração: Vamos demonstrar a relação de recorrência para $\{D_n\}_{n=0}^\infty$.

De (2.6), obtemos que $\hat{Q}_n$ satisfaz a seguinte relação de recorrência

$$\hat{Q}_{n+1}(z) = \left(\frac{1}{\bar{\beta}_{n+1}} + z \right) \hat{Q}_n(z) - \frac{\bar{\alpha}_{n+1}}{\bar{\beta}_n \bar{\beta}_{n+1}} z \hat{Q}_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com $\hat{Q}_0(z) = 1$ e $\hat{Q}_1(z) = \frac{1}{\bar{\beta}_1} + z$.

De (2.10) e da relação de recorrência de $\hat{Q}_n$, podemos escrever

$$D_n(z) = \frac{\bar{\beta}_n \bar{\beta}_{n+1}}{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}} [\hat{Q}_{n+1}(z) - z \hat{Q}_n(z)], \quad n \geq 1. \quad (2.11)$$

Usando (2.10), (2.11) e a relação de recorrência de $\hat{Q}_n$, obtemos a relação de recorrência para $\{D_n\}_{n=0}^\infty$.

De maneira análoga pode-se demonstrar a relação de recorrência para $\{C_n\}_{n=0}^\infty$. ■

Como em (2.1) o funcional de momento $\mathcal{M}$ está definido para $m \in \mathbb{Z}$, dizemos que $\mathcal{M}$ é um funcional de momento forte.

Lembramos que o funcional de momento forte $\mathcal{M}$ é um funcional de momento quase-definido normalizado quando

$$\mu_0 = 1, \quad \Delta_n^{(1)} \neq 0 \quad \text{e} \quad \Delta_n \neq 0, \quad n \geq 0.$$

Consideremos as seguintes subclasses do funcional de momento forte quase-definido normalizado:

- Classe S-tipo: $\Delta_n^{(1)} \neq 0, \quad \Delta_{n+1} \neq 0 \quad \text{e} \quad \mu_{-n} = \bar{\mu}_n, \quad n \geq 0;$
- Classe MS-tipo: $\Delta_n^{(1)} \neq 0, \quad \Delta_{n+1} \neq 0 \quad \text{e} \quad \mu_{-n} = \mu_n, \quad n \geq 0;$

- Classe PO-tipo: $\Delta_n^{(1)} \neq 0$ e $\mu_{n+1} = -\mu_{-n}$, $n \geq 0$.

O teorema a seguir caracteriza os polinômios L-ortogonais e o funcional de momento forte quase-definido normalizado $\mathcal{M}$.

Teorema 2.3. *Seja $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ a sequência de polinômios dada pela relação de recorrência (2.6), com condições iniciais $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = z + \beta_1$. Dessa forma, existe um funcional de momento forte quase-definido normalizado $\mathcal{M}$ para o qual Q_n são os polinômios L-ortogonais definidos por (2.2) se, e somente se, $\alpha_{n+1} \neq 0$, $\beta_n \neq 0$ para $n \geq 1$. Além disso,*

A) $\mathcal{M}$ é da classe S-tipo se, e somente se,

$$|\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n|^2 = \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_{n+1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.12)$$

B) $\mathcal{M}$ é da classe MS-tipo se, e somente se,

$$(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)^2 = \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_{n+1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.13)$$

C) $\mathcal{M}$ é da classe PO-tipo se, e somente se,

$$\beta_n = 1, \quad n \geq 1.$$

Demonstração: Primeiramente mostraremos que se $\alpha_{n+1} \neq 0$ e $\beta_n \neq 0$, $n \geq 1$, então existe um funcional de momento forte quase definido para o qual Q_n são polinômios L-ortogonais.

Consideremos a sequência de polinômios $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ dada em (2.6), com condições iniciais $P_0(z) = 0$ e $P_1(z) = \mu_0 = 1$.

Do Teorema 2.2, podemos observar que Q_n e P_n são polinômios mônicos de grau n e $n - 1$, respectivamente.

Das duas relações de recorrência de três termos e condições iniciais, dadas no Teorema 2.2, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{P_1(z)}{Q_1(z)} &= \frac{1}{Q_1(z)} \quad \text{e} \\ \frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} &= \frac{P_{n+1}(z)Q_n(z) - Q_{n+1}(z)P_n(z)}{Q_n(z)Q_{n+1}(z)} = \frac{\alpha_2 \cdots \alpha_{n+1} z^n}{Q_n(z)Q_{n+1}(z)}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Assim, existem expansões em séries de potências

$$L_0(z) = \sum_{s=0}^{\infty} -\mu_{s+1} z^s \quad \text{e} \quad L_{\infty}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_{-s} z^{-s-1},$$

tais que

$$L_0(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{\alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}}{(\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)^2 \beta_{n+1}} z^n + O(z^{n+1}), \quad n \geq 1, \quad (2.14)$$

e

$$L_{\infty}(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \alpha_2 \cdots \alpha_{n+1} \frac{1}{z^{n+1}} + O((1/z)^{n+2}), \quad n \geq 1. \quad (2.15)$$

Escrevendo $Q_n(z) = \sum_{j=0}^n q_{n,j} z^j$ e $P_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j} z^j$, de (2.14) e (2.15), obtemos, respectivamente, um sistema linear triangular inferior e um sistema linear triangular superior, cuja soma é o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_1 & \mu_0 \\ \mu_{n+1} & \mu_n & \cdots & \mu_2 & \mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n,0} \\ q_{n,1} \\ \vdots \\ q_{n,n-1} \\ q_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \cdots \alpha_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{\alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n \beta_{n+1}} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Assim, se definirmos o funcional de momento $\mathcal{M}$ por $\mathcal{M}[t^m] = \mu_{-m}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, então, do sistema linear (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[z^{-n+m} Q_n(z)] &= 0, \quad 0 \leq m \leq n-1, \\ \mathcal{M}[z^{-n-1} Q_n(z)] &= -\frac{\alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{n+1}} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}[Q_n(z)] = \alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Além disso, como $\Delta_0 = \mu_0 = 1$, aplicando a regra de Cramer no sistema linear formado pelas $n+1$ primeiras linhas de (2.16), e depois Laplace, obtemos

$$\Delta_n = \gamma_{\infty}^{(n)} \Delta_{n-1} \neq 0, \quad n \geq 1,$$

onde $\gamma_{\infty}^{(n)} = \frac{\alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}}{\beta_n \cdots \beta_1}$. De maneira análoga, como $\Delta_1^{(1)} = -\frac{1}{\beta_1} \neq 0$, usando o sistema linear formado pela $n+1$ últimas linhas de (2.16), segue que

$$\Delta_n^{(1)} = \gamma_0^{(n)} \Delta_{n-1}^{(1)} \neq 0, \quad n \geq 1,$$

onde $\gamma_0^{(n)} = -\frac{\alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}}{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{n+1}}$. Assim, o funcional $\mathcal{M}$ é um funcional de momento forte quase-definido normalizado.

Para a demonstração da recíproca, basta observar que dado um funcional de momento quase definido $\mathcal{M}$, segue do Teorema 2.1 e de (2.7) que os polinômios Q_n definidos por (2.2), satisfazem a relação de recorrência de três termos (2.6) com $\alpha_{n+1} \neq 0$ e $\beta_n \neq 0$, $n \geq 1$.

Agora, vamos demonstrar a parte A).

Primeiramente, consideraremos (2.12) e mostraremos que $\mathcal{M}$ é da classe S-tipo.

De (2.12), segue que o quociente $\frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_{n+1}}$ é real, e daí

$$|\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n|^2 = \frac{\bar{\beta}_n}{\beta_n - \bar{\alpha}_{n+1}} \quad \text{e} \quad \frac{\bar{\alpha}_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n}, \quad n \geq 1.$$

Consequentemente,

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{\bar{\beta}_n} \frac{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}}{\bar{\beta}_{n+1} - \bar{\alpha}_{n+2}} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\bar{\alpha}_{n+1}}{\bar{\beta}_n \bar{\beta}_{n-1}} \frac{\bar{\beta}_{n-1} - \bar{\alpha}_n}{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.18)$$

De (2.18) e comparando as relações de recorrência de três termos para D_n e C_n , dadas no Lema 2.1, com as relações de recorrência para Q_n e P_n , dadas no Teorema 2.2, obtemos

$$D_n(z) = Q_n(z) \quad \text{e} \quad C_n(z) = Q_n(z) - zP_n(z), \quad \text{para } n \geq 1. \quad (2.19)$$

Segue de (2.10) e (2.19) que

$$\frac{C_n(z)}{D_n(z)} = \frac{\bar{\beta}_n \hat{P}_n(z) - \bar{\alpha}_{n+1} z \hat{P}_{n-1}(z)}{\bar{\beta}_n \hat{Q}_n(z) - \bar{\alpha}_{n+1} z \hat{Q}_{n-1}(z)} \quad \text{e} \quad \frac{C_n(z)}{D_n(z)} = 1 - z \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}, \quad n \geq 1. \quad (2.20)$$

Fazendo expansões em séries de potência sobre a origem, temos

$$\frac{\bar{\beta}_{n+1} \hat{P}_{n+1}(z) - \bar{\alpha}_{n+2} z \hat{P}_n(z)}{\bar{\beta}_{n+1} \hat{Q}_{n+1}(z) - \bar{\alpha}_{n+2} z \hat{Q}_n(z)} - \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_n(z)} = \bar{\alpha}_{n+1} \bar{\alpha}_n \cdots \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 z^n + O(z^{n+1})$$

e

$$\frac{\hat{P}_{n+1}(z)}{\hat{Q}_{n+1}(z)} - \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_n(z)} = \bar{\alpha}_{n+1} \bar{\alpha}_n \cdots \bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1 z^n + O(z^{n+1}),$$

daí,

$$\frac{\bar{\beta}_n \hat{P}_n(z) - \bar{\alpha}_{n+1} z \hat{P}_{n-1}(z)}{\bar{\beta}_n \hat{Q}_n(z) - \bar{\alpha}_{n+1} z \hat{Q}_{n-1}(z)} \quad \text{e} \quad \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_n(z)}$$

tem a mesma expansão em série de potência sobre a origem.

De (2.20),

$$\frac{\bar{\beta}_n \hat{P}_n(z) - \bar{\alpha}_{n+1} z \hat{P}_{n-1}(z)}{\bar{\beta}_n \hat{Q}_n(z) - \bar{\alpha}_{n+1} z \hat{Q}_{n-1}(z)} = 1 - z \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}, \quad n \geq 1,$$

assim, fazendo expansão em séries de potência (por exemplo, sobre a origem) de ambos os membros, obtemos $\mu_{-n} = \bar{\mu}_n$, para $n \geq 1$. O que mostra que $\mathcal{M}$ é da classe S-tipo.

Agora, consideraremos que $\mathcal{M}$ é de classe S-tipo e mostraremos que

$$|\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n|^2 = \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

Para isso, observemos que de (2.4) e (2.7),

$$\alpha_{n+1} = -\frac{\Delta_n \Delta_{n-2}^{(1)}}{\Delta_{n-1} \Delta_{n-1}^{(1)}} \quad \text{e} \quad \beta_{n+1} = -\frac{\Delta_n \Delta_{n-1}^{(1)}}{\Delta_{n-1} \Delta_n^{(1)}}, \quad n \geq 1.$$

Logo,

$$1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n} = \frac{(\Delta_{n-1})^2 - \Delta_n \Delta_{n-2}}{(\Delta_{n-1})^2} = \frac{(H_n^{(-n+1)})^2 + H_{n+1}^{(-n)} H_{n-1}^{(-n+2)}}{(H_n^{(-n+1)})^2}, \quad n \geq 1. \quad (2.21)$$

Aplicando a identidade de Jacobi para determinantes de Hankel em (2.21), dada na seção 1.4 do Capítulo 1, obtemos

$$1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n} = \frac{H_n^{(-n)} H_n^{(-n+2)}}{(H_n^{(-n+1)})^2}.$$

Observando que $\mu_{-n} = \bar{\mu}_n$, $n \geq 1$, implica $H_n^{(-m)} = \overline{H_n^{(m-2n+2)}}$ para $n \geq 1$ e qualquer m , então

$$\frac{\beta_n - \alpha_{n+1}}{\beta_n} = 1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n} = \frac{|H_n^{(-n)}|^2}{|H_n^{(-(n-1))}|^2} = \frac{|\Delta_{n-1}^{(1)}|^2}{|\Delta_{n-1}|^2} > 0, \quad n \geq 1.$$

Assim, $\beta_n - \alpha_{n+1} \neq 0$, $n \geq 1$, e podemos considerar os polinômios mônicos

$$D_n(z) = \frac{\bar{\beta}_n \hat{Q}_n(z) - \bar{\alpha}_{n+1} z \hat{Q}_{n-1}(z)}{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}} = \frac{\bar{\beta}_n \bar{\beta}_{n+1}}{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}} [\hat{Q}_{n+1}(z) - z \hat{Q}_n(z)], \quad n \geq 1. \quad (2.22)$$

Como a condição $\mu_{-n} = \bar{\mu}_n$, $n \geq 1$, também implica que o funcional é tal que $\mathcal{M}[z^{-m} p(z)] = \overline{\mathcal{M}[z^{-n+m} p^*(z)]}$, onde p é um polinômio de grau n . Obtemos, de (2.17),

$$\mathcal{M}[z^{-n+m} D_n(z)] = \delta_{n,m} \frac{\bar{\alpha}_2 \cdots \bar{\alpha}_{n+1}}{(\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \cdots \bar{\beta}_n)^2} \frac{\bar{\beta}_n}{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}}, \quad 0 \leq m \leq n. \quad (2.23)$$

Identificando (2.23) com (2.17), obtemos que $Q_n(z) = D_n(z)$, $n \geq 1$, e em particular

$$\alpha_2 \cdots \alpha_{n+1} = \frac{\bar{\alpha}_2 \cdots \bar{\alpha}_{n+1}}{(\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \cdots \bar{\beta}_n)^2} \frac{\bar{\beta}_n}{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}}, \quad n \geq 1.$$

Assim, tomando o módulo em ambos os membros da equação anterior, completamos a demonstração da parte A deste teorema.

Para demonstrar a parte B consideramos os polinômios

$$D_n(z) = \frac{\beta_n \hat{Q}_n(z) - \alpha_{n+1} z \hat{Q}_{n-1}(z)}{\beta_n - \alpha_{n+1}} \quad \text{e} \quad C_n(z) = \frac{\beta_n \hat{P}_n(z) - \alpha_{n+1} z \hat{P}_{n-1}(z)}{\beta_n - \alpha_{n+1}},$$

com $\hat{Q}_n(z) = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)^{-1} Q_n^\bullet(z)$ e $\hat{P}_n(z) = (\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)^{-1} P_n^\bullet(z)$, pois, $\mu_{-n} = \mu_n$, $n \geq 1$ implica $H_n^{(-m)} = H_n^{(m-2n+2)}$, para $n \geq 1$ e qualquer m . Daí

$$1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n} = \frac{(H_n^{(-n)})^2}{(H_n^{(-(n-1))})^2} = \frac{(\Delta_{n-1}^{(1)})^2}{(\Delta_{n-1})^2} \neq 0, \quad n \geq 1,$$

que nos fornece $\beta_n - \alpha_{n+1} \neq 0$, $n \geq 1$. Logo, procedendo de maneira análoga ao que fizemos na parte A , demonstramos a parte B .

Para completar a demonstração deste teorema, vamos demonstrar, agora, a parte C .

Do Teorema 2.1, temos

$$Q_n(0) = (-1)^n \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-1}^{(1)}}, \quad n \geq 1.$$

Da relação de recorrência de três termos para Q_n , obtemos $Q_n(0) = \beta_n \beta_{n-1} \cdots \beta_1$. Dessa forma, $\beta_n = 1$, para $n \geq 1$ se, e somente se, $Q_n(0) = 1$, para $n \geq 1$. Assim, $\beta_n = 1$, para $n \geq 1$ se, e somente se, $\Delta_{n-1} = (-1)^n \Delta_{n-1}^{(1)}$, para $n \geq 1$, o que nos fornece o resultado desejado. ■

Dado o parâmetro $\omega \in \mathbb{C}$, seja a sequência de polinômios $\{Q_n(\omega; \cdot)\}_{n=0}^\infty$ dada por

$$Q_0(\omega; z) = 1 \quad \text{e} \quad Q_n(\omega; z) = Q_n(z) - \omega Q_{n-1}(z), \quad n \geq 1.$$

Podemos observar que $Q_n(0; z) = Q_n(z)$ e para todo ω , $Q_n(\omega; 0) = (\beta_n - \omega) Q_{n-1}(0)$, $n \geq 1$.

No próximo teorema veremos algumas propriedades dos polinômios $Q_n(\omega; \cdot)$ quando o funcional de momento $\mathcal{M}$ é da classe S-tipo ou MS-tipo.

Teorema 2.4. *Seja $\kappa_n(w) = Q_n(0)(1 - w/\beta_n)$, $n \geq 1$.*

(1) *Se $\mathcal{M}$ é da classe S-tipo, então*

$$Q_n^*(\nu_n; z) = \overline{\kappa_n(\nu_n)} Q_n(\omega_n; z), \quad n \geq 1, \quad \text{onde} \quad \overline{\kappa_n(\nu_n)} \kappa_n(\omega_n) = 1;$$

(2) *se $\mathcal{M}$ é da classe MS-tipo, então*

$$Q_n^\bullet(\nu_n; z) = \kappa_n(\nu_n) Q_n(\omega_n; z), \quad n \geq 1, \quad \text{onde} \quad \kappa_n(\nu_n) \kappa_n(\omega_n) = 1.$$

Em particular,

(3) se $\mathcal{M}$ é da classe S-tipo, então para todo σ tal que $|\sigma| = 1$,

$$Q_n^*(\nu_n^{(\sigma)}; z) = \bar{\sigma} Q_n(\nu_n^{(\sigma)}; z), \quad n \geq 1, \quad \text{onde} \quad \nu_n^{(\sigma)} = (Q_n(0) - \sigma)/Q_{n-1}(0);$$

(4) se $\mathcal{M}$ é da classe MS-tipo, então com σ igual a $+1$ ou -1 ,

$$Q_n^\bullet(\nu_n^{(\sigma)}; z) = \sigma Q_n(\nu_n^{(\sigma)}; z), \quad n \geq 1, \quad \text{onde} \quad \nu_n^{(\sigma)} = (Q_n(0) - \sigma)/Q_{n-1}(0).$$

Demonstração: Considerando $\mathcal{M}$ da classe S-tipo, temos da demonstração da parte A do Teorema 2.3 que $Q_n(z) = D_n(z)$, $n \geq 1$. Daí, usando (2.22), obtemos

$$Q_n(z) = \frac{\bar{\beta}_n(\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2 \cdots \bar{\beta}_n)^{-1}Q_n^*(z) - \bar{\alpha}_{n+1}z(\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2 \cdots \bar{\beta}_{n-1})^{-1}Q_{n-1}^*(z)}{\bar{\beta}_n - \bar{\alpha}_{n+1}}, \quad n \geq 1. \quad (2.24)$$

De (2.24), segue que

$$\overline{Q_n(1/\bar{z})} = \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_{n+1}} \left[(\beta_1\beta_2 \cdots \beta_n)^{-1} \frac{1}{z^n} Q_n(z) - \alpha_{n+1} \frac{1}{z^n} (\beta_1\beta_2 \cdots \beta_{n-1})^{-1} \beta_n^{-1} Q_{n-1}(z) \right], \quad n \geq 1,$$

e, dessa forma, usando a parte A do Teorema 2.3 e a relação de recorrência de três termos de Q_n , obtemos

$$\begin{aligned} Q_n^*(z) &= |\beta_1\beta_2 \cdots \beta_n|^2 \left[(\beta_1\beta_2 \cdots \beta_n)^{-1} Q_n(z) - \alpha_{n+1} (\beta_1\beta_2 \cdots \beta_n)^{-1} Q_{n-1}(z) \right] \\ &= \overline{Q_n(0)} (Q_n(z) - \alpha_{n+1} Q_{n-1}(z)) \\ &= z^{-1} \overline{Q_n(0)} (Q_{n+1}(z) - \beta_{n+1} Q_n(z)), \end{aligned} \quad (2.25)$$

para $n \geq 1$.

Logo, de (2.25) e da definição de $Q_n(\omega; \cdot)$, temos

$$\begin{aligned} Q_n^*(\nu_n; z) &= Q_n^*(z) - \bar{\nu}_n z Q_{n-1}^*(z) \\ &= \overline{Q_n(0)} \left(1 - \frac{\bar{\nu}_n}{\beta_n} \right) \left(Q_n(z) - \frac{\bar{\beta}_n \alpha_{n+1} - \beta_n \bar{\nu}_n}{\bar{\beta}_n - \bar{\nu}_n} Q_{n-1}(z) \right) \\ &= \overline{\kappa_n(\nu_n)} Q_n(\omega_n; z), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

onde $\omega_n = \frac{\bar{\beta}_n \alpha_{n+1} - \beta_n \bar{\nu}_n}{\bar{\beta}_n - \bar{\nu}_n}$. O que demonstra a parte 1 deste teorema.

Usando o fato de que $\mathcal{M}$ é da classe MS-tipo, a demonstração da parte 2 deste teorema, segue de maneira análoga à demonstração da parte 1.

Para demonstrar a parte 3, consideremos $\omega_n = \nu_n$. Daí, $\overline{\kappa_n(\omega_n)} \kappa_n(\omega_n) = 1$, o que nos fornece $|Q_{n-1}(0)(\beta_n - \omega_n)| = 1$ e

$$\omega_n = \beta_n - \frac{1}{|Q_{n-1}(0)|^2(\bar{\beta}_n - \bar{\omega}_n)} = \frac{Q_n(0)}{Q_{n-1}(0)} - \frac{1}{Q_{n-1}(0)} \frac{1}{\overline{Q_{n-1}(0)}(\bar{\beta}_n - \bar{\omega}_n)}.$$

Assim,

$$v_n^{(\sigma)} = \omega_n = \frac{(Q_n(0) - \sigma)}{Q_{n-1}(0)},$$

onde $\sigma = \frac{1}{\overline{Q_{n-1}(0)}(\bar{\beta}_n - \bar{\omega}_n)}$.

O resultado segue observando que $\overline{\kappa_n(\nu_n^{(\sigma)})} = \bar{\sigma}$.

A demonstração da parte 4, é análoga à demonstração da parte 3. ■

No próximo capítulo, passaremos a estudar polinômios associados a funcionais de momento das classes MS-tipo e PO-tipo. Além disso, veremos alguns exemplos desses funcionais de momento.

Capítulo 3

Polinômios Tipo Szegő e Polinômios Para-ortogonais

Neste capítulo, consideraremos o funcional de momento da classe MS-tipo e estudaremos os polinômios tipo Szegő. Obteremos polinômios para-ortogonais através de polinômios tipo Szegő e veremos condições para obtermos polinômios tipo Szegő através de polinômios para-ortogonais. Forneceremos, também, alguns exemplos de funcionais de momento das classes PO-tipo e MS-tipo. Os resultados deste capítulo estão publicados em Lamblém, McCabe, Piñar e Sri Ranga [21].

3.1 Polinômios tipo Szegő

Dada uma sequência dupla $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números complexos, seja $\mathcal{M}$ o funcional de momento no espaço dos polinômios de Laurent definido por

$$\mathcal{M}[t^m] = \mu_{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Suponhamos que o funcional de momento $\mathcal{M}$ seja da classe MS-tipo. Assim, de (2.2) e do Teorema 2.1, obtemos

$$\mathcal{M}[z^{-s}Q_n^\bullet(z)] = \mathcal{M}[z^{-n+s}Q_n(z)] = \delta_{n,s}(-1)^n \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}^{(1)}}, \quad 0 \leq s \leq n, \quad n \geq 1. \quad (3.1)$$

Seja a sequência de polinômios mônicos $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$S_n(z) = \frac{Q_n^\bullet(z)}{Q_n(0)}, \quad n \geq 0. \quad (3.2)$$

Do Teorema 2.1, de (3.1) e de (3.2), segue que os polinômios mônicos S_n satisfazem a ortogonalidade de Szegő

$$\mathcal{M}[z^{-s}S_n(z)] = \delta_{n,s} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad 0 \leq s \leq n, \quad n \geq 1. \quad (3.3)$$

Como $\mathcal{M}$ é da classe MS-tipo, os polinômios S_n , definidos em (3.2), estão sob a restrição

$$\mu_{-n} = \mu_n \quad \text{e} \quad \Delta_n \neq 0, \quad n \geq 0. \quad (3.4)$$

Os polinômios S_n que estão sob a restrição (3.4), e que satisfazem (3.3) são chamados de polinômios tipo Szegő associados ao funcional de momento $\mathcal{M}$.

Usando (3.1), podemos verificar que os polinômios tipo Szegő satisfazem

$$\mathcal{M}[t^{-s}S_n(t)] = \mathcal{M}[t^{-n+s}S_n^\bullet(t)] = \delta_{n,s} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad 0 \leq s \leq n, \quad n \geq 1. \quad (3.5)$$

O próximo teorema trata da relação de recorrência dos polinômios tipo Szegő e nos mostra que os coeficientes de reflexão, $a_n = S_n(0)$, desses polinômios são apenas diferentes de ± 1 .

Teorema 3.1. *Se $a_n = S_n(0)$, para $n \geq 1$, onde S_n são os polinômios tipo Szegő mônicos associados ao funcional de momento $\mathcal{M}$, então, segue que*

1) *os polinômios S_n satisfazem as seguintes relações de recorrência*

$$\begin{aligned} S_n^\bullet(z) &= a_n z S_{n-1}(z) + S_{n-1}^\bullet(z), \\ S_n(z) &= a_n S_n^\bullet(z) + (1 - a_n^2) z S_{n-1}(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (3.6)$$

com as condições iniciais

$$S_0(z) = 1 \quad \text{e} \quad S_0^\bullet(z) = 1;$$

2) $a_n \neq \pm 1$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Para $n \geq 1$, considere

$$T_n(z) = S_n^\bullet(z) - \zeta_n z S_{n-1}(z) - S_{n-1}^\bullet(z),$$

$$\text{com } \zeta_n = -\frac{\mathcal{M}[z^{-n}S_{n-1}^\bullet(z)]}{\mathcal{M}[z^{-(n-1)}S_{n-1}(z)]}.$$

O coeficiente ζ_n está bem definido, pois

$$\mathcal{M}[z^{-(n-1)}S_{n-1}(z)] = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como estamos considerando S_n e S_{n-1} polinômios mônicos, então $T_n(0) = 0$. Consequentemente, $T_n^\bullet(z)$ é um polinômio de grau no máximo $n - 1$, $n \geq 1$.

Assim, podemos escrever

$$T_n^\bullet(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k S_k(z).$$

Logo, para $n \geq 1$,

$$T_n(z) = z^n T_n^\bullet(1/z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^n b_k S_k(1/z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^{n-k} S_k^\bullet(z).$$

A escolha de ζ_n assegura que

$$\mathcal{M}[z^{-n}T_n(z)] = \mathcal{M}[z^{-(n-1)}T_n(z)] = \dots = \mathcal{M}[z^{-1}T_n(z)] = 0.$$

Dessa maneira,

$$0 = \mathcal{M}[z^{-n}T_n(z)] = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \mathcal{M}[z^{-k}S_k^\bullet(z)] = b_0 \mu_0,$$

como $\mu_0 = \Delta_0 \neq 0$, então $b_0 = 0$. De maneira análoga, vemos que $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 0$, o que implica $T_n(z) \equiv 0$. Assim,

$$S_n^\bullet(z) = \zeta_n z S_{n-1}(z) + S_{n-1}^\bullet(z). \quad (3.7)$$

Comparando o coeficiente de z^n , em ambos os membros de (3.7), obtemos

$$\zeta_n = S_n(0) = a_n, \quad n \geq 1.$$

Portanto, $S_n^\bullet(z) = a_n z S_{n-1}(z) + S_{n-1}^\bullet(z)$.

De maneira análoga, tomando

$$\tilde{T}_n(z) = S_n(z) - a_n S_n^\bullet(z) - \tilde{\zeta}_n z S_{n-1}(z),$$

com $\tilde{\zeta}_n = \frac{\mathcal{M}[z^{-n}S_n(z)]}{\mathcal{M}[z^{-(n-1)}S_{n-1}(z)]}$, provamos que $S_n(z) = a_n S_n^\bullet(z) + (1 - a_n^2)z S_{n-1}(z)$, para $n \geq 1$.

Agora, multiplicando-se a segunda relação de recorrência de (3.6) por z^{-n} e aplicando-se o funcional de momento $\mathcal{M}$, obtemos

$$1 - a_n^2 = \frac{\mathcal{M}[z^{-n}S_n(z)]}{\mathcal{M}[z^{-(n-1)}S_{n-1}(z)]} = \frac{\Delta_n \Delta_{n-2}}{\Delta_{n-1}^2} \neq 0, \quad (3.8)$$

para $n \geq 1$, onde $\Delta_{-1} = 1$, o que completa a demonstração do teorema. $\blacksquare$

O próximo teorema é a recíproca do Teorema 3.1.

Teorema 3.2. *Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números complexos, tal que $a_n \neq \pm 1$ para $n \geq 1$. Seja a sequência de polinômios mônicos $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ gerada por (3.6), com $S_0(z) = 1$. Associado a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ existe um funcional de momento $\mathcal{M}$ com a propriedade (3.4), tal que $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ são os polinômios tipo Szegő satisfazendo (3.3).*

Demonstração: Consideremos os polinômios $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ dados por

$$\begin{aligned} [-R_n^{\bullet}(z)] &= a_n z R_{n-1}(z) + [-R_{n-1}^{\bullet}(z)], \\ R_n(z) &= a_n [-R_n^{\bullet}(z)] + (1 - a_n^2) z R_{n-1}(z), \end{aligned} \quad n \geq 1,$$

com $R_0(z) = \mu_0 \neq 0$.

Seja $F_n(z) = R_n^{\bullet}(z)S_n(z) + S_n^{\bullet}(z)R_n(z)$ para $n \geq 1$. Então, $F_1(z) = 2\mu_0(1 - a_1^2)z$ e, para $n \geq 2$, $F_n(z) = (1 - a_n^2)zF_{n-1}$.

Disso, segue que

$$\begin{aligned} \frac{R_{n+1}(z)}{S_{n+1}(z)} - \frac{R_n(z)}{S_n(z)} &= \frac{-a_{n+1}F_n(z)}{S_{n+1}(z)S_n(z)} \\ &= \frac{-2\mu_0 a_{n+1}(1 - a_1^2)(1 - a_2^2) \dots (1 - a_n^2)z^n}{S_{n+1}(z)S_n(z)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{R_n^{\bullet}(z)}{S_n^{\bullet}(z)} + \frac{R_n(z)}{S_n(z)} &= \frac{F_n(z)}{S_n^{\bullet}(z)S_n(z)} \\ &= \frac{2\mu_0(1 - a_1^2)(1 - a_2^2) \dots (1 - a_n^2)z^n}{S_n^{\bullet}(z)S_n(z)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

De (3.9), podemos concluir que existe uma série de potência formal

$$\hat{L}_{\infty}(z) = \mu_0 + \sum_{s=1}^{\infty} 2\mu_{-s}z^{-s},$$

tal que

$$\hat{L}_{\infty}(z) - \frac{R_n(z)}{S_n(z)} = -\frac{2\mu_0 a_{n+1}(1 - a_1^2)(1 - a_2^2) \dots (1 - a_n^2)}{z^{n+1}} + O\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{n+2}\right). \quad (3.11)$$

Agora, substituindo z por $\frac{1}{z}$ em (3.11), obtemos

$$\hat{L}_0(z) + \frac{R_n^{\bullet}(z)}{S_n^{\bullet}(z)} = 2\mu_0 a_{n+1}(1 - a_1^2)(1 - a_2^2) \dots (1 - a_n^2)z^{n+1} + O(z^{n+2}), \quad n \geq 1, \quad (3.12)$$

onde $\hat{L}_0(z) = -\mu_0 - \sum_{s=1}^{\infty} 2\mu_s z^s$, com $\mu_{-s} = \mu_s$, $n \geq 1$.

Subtraindo-se (3.10) de (3.12), segue que

$$\begin{aligned} \hat{L}_0(z) - \frac{R_n(z)}{S_n(z)} &= 2\mu_0 a_{n+1} (1 - a_1^2) \dots (1 - a_n^2) z^{n+1} \\ &\quad - \frac{2\mu_0 (1 - a_1^2) \dots (1 - a_n^2) z^n}{S_n^\bullet(z) S_n(z)} + O(z^{n+2}), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Escrevendo $S_n(z) = \sum_{i=0}^n s_{n,i} z^i$ e $R_n(z) = \sum_{i=0}^n r_{n,i} z^i$, de (3.11) obtemos

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & 2\mu_{-1} & 2\mu_{-2} & \cdots & 2\mu_{-n+1} & 2\mu_{-n} \\ 0 & \mu_0 & 2\mu_{-1} & \cdots & 2\mu_{-n+2} & 2\mu_{-n+1} \\ 0 & 0 & \mu_0 & \cdots & 2\mu_{-n+3} & 2\mu_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_0 & 2\mu_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n,0} \\ s_{n,1} \\ s_{n,2} \\ \vdots \\ s_{n,n-1} \\ s_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{n,0} \\ r_{n,1} \\ r_{n,2} \\ \vdots \\ r_{n,n-1} \\ r_{n,n} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

para $n \geq 1$, e de (3.13),

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2\mu_1 & \mu_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2\mu_2 & 2\mu_1 & \mu_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\mu_{n-1} & 2\mu_{n-2} & 2\mu_{n-3} & \cdots & \mu_0 & 0 \\ 2\mu_n & 2\mu_{n-1} & 2\mu_{n-2} & \cdots & 2\mu_1 & \mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n,0} \\ s_{n,1} \\ s_{n,2} \\ \vdots \\ s_{n,n-1} \\ s_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{n,0} \\ -r_{n,1} \\ -r_{n,2} \\ \vdots \\ -r_{n,n-1} \\ -r_{n,n} + 2\hat{\gamma}_n \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

para $n \geq 1$, onde $\hat{\gamma}_n = \mu_0(1 - a_1^2) \cdots (1 - a_n^2) \neq 0$.

Somando (3.14) e (3.15), temos

$$\begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 & \mu_{-1} \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_1 & \mu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n,0} \\ s_{n,1} \\ \vdots \\ s_{n,n-1} \\ s_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{\gamma}_n \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Agora, se definirmos o funcional de momento $\mathcal{M}$ por $\mathcal{M}[t^n] = \mu_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, de (3.16) obtemos

$$\mathcal{M}[t^{-m} S_n(t)] = \hat{\gamma}_n \delta_{n,m}, \quad 0 \leq m \leq n, \quad n \geq 1.$$

Ainda de (3.16) temos $\Delta_n = \hat{\gamma}_n \Delta_{n-1}$. Como $\mu_0 \neq 0$ e $\hat{\gamma}_n \neq 0$, segue que $\Delta_0 = \mu_0 \neq 0$ e $\Delta_n = \hat{\gamma}_n \Delta_{n-1} \neq 0$, $n \geq 1$. A condição $\Delta_n \neq 0$, $n \geq 0$, também garante a existência e unicidade da sequência de polinômios $\{S_n\}_{n=0}^\infty$. ■

Na próxima seção, a partir dos polinômios tipo Szegő (polinômios associados ao funcional de momento da classe MS-tipo), obteremos polinômios associados ao funcional de momento da classe PO-tipo.

3.2 Polinômios para-ortogonais obtidos a partir de polinômios tipo Szegő

Dada a sequência de polinômios tipo Szegő $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ com respeito ao funcional da classe MS-tipo, consideremos os polinômios mônicos $Q_n^{(1)}$ e $Q_n^{(2)}$ dados por

$$Q_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^\bullet(z)}{1 + a_n} \quad \text{e} \quad Q_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}(z) - S_{n+1}^\bullet(z)}{(z-1)(1-a_{n+1})}, \quad n \geq 0, \quad (3.17)$$

com $a_0 = 1$.

Seguindo a nomenclatura usada no caso dos polinômios clássicos de Szegő (ver, por exemplo, Jones, Njåstad e Thron [18]), referimos aos polinômios $S_n + \tau S_n^\bullet$, quando $|\tau| = 1$, como polinômios para-ortogonais.

Através de (3.17) podemos verificar que

$$Q_n^{(1)}(z) = z^n Q_n^{(1)}(1/z) \quad \text{e} \quad Q_n^{(2)}(z) = z^n Q_n^{(2)}(1/z), \quad n \geq 1. \quad (3.18)$$

Além disso,

$$2S_n(z) = (1 + a_n)Q_n^{(1)}(z) + (1 - a_n)(z-1)Q_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1. \quad (3.19)$$

Teorema 3.3. *Os polinômios mônicos $Q_n^{(1)}$ e $Q_n^{(2)}$ satisfazem*

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^{(1)}(z) &= (z+1)Q_n^{(1)}(z) - (1+a_{n-1})(1-a_n)zQ_{n-1}^{(1)}(z), \\ Q_{n+1}^{(2)}(z) &= (z+1)Q_n^{(2)}(z) - (1-a_n)(1+a_{n+1})zQ_{n-1}^{(2)}(z), \end{aligned} \quad n \geq 1,$$

com $Q_0^{(1)}(z) = Q_0^{(2)}(z) = 1$ e $Q_1^{(1)}(z) = Q_1^{(2)}(z) = z + 1$.

Demonstração: De (3.17) e do Teorema 3.1, obtemos

$$Q_n^{(1)}(z) = zS_{n-1}(z) + S_{n-1}^\bullet(z), \quad n \geq 1. \quad (3.20)$$

Para $n \geq 1$, de (3.20) e de (3.17), segue que

$$\begin{aligned} Q_{n+1}^{(1)}(z) + (1 + a_{n-1})(1 - a_n)zQ_{n-1}^{(1)}(z) &= zS_n(z) + S_n^\bullet(z) \\ &\quad + (1 - a_n)z[S_{n-1}(z) + S_{n-1}^\bullet(z)]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aplicando o Teorema 3.1, para $S_n(z)$ e $S_n^\bullet(z)$, em (3.21), temos

$$Q_{n+1}^{(1)}(z) + (1 + a_{n-1})(1 - a_n)zQ_{n-1}^{(1)}(z) = (z + 1)[zS_{n-1}(z) + S_{n-1}^\bullet(z)], \quad n \geq 1,$$

o que nos fornece

$$Q_{n+1}^{(1)}(z) = (z + 1)Q_n^{(1)}(z) - (1 + a_{n-1})(1 - a_n)zQ_{n-1}^{(1)}(z).$$

De maneira análoga, verifica-se que

$$Q_{n+1}^{(2)}(z) = (z + 1)Q_n^{(2)}(z) - (1 - a_n)(1 + a_{n+1})zQ_{n-1}^{(2)}(z).$$

■

Agora, consideramos os seguintes funcionais de momento associados, $\mathcal{N}^{(1)}$ e $\mathcal{N}^{(2)}$, definidos por

$$2\mathcal{N}^{(1)}[1] = \mathcal{M}[1], \quad \mathcal{N}^{(1)}[(z - 1)f(z)] = \mathcal{M}[zf(z)]$$

e

$$\mathcal{N}^{(2)}[f(z)] = \mathcal{M}[(1 - z)f(z)],$$

onde f é algum polinômio de Laurent. Na definição de $\mathcal{N}^{(1)}$, não precisamos supor a existência de $\mathcal{M}[f(z)/(z - 1)]$.

No próximo teorema veremos propriedades dos funcionais de momento $\mathcal{N}^{(1)}$ e $\mathcal{N}^{(2)}$.

Teorema 3.4. Para $\kappa = 1, 2$ e $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, se $\nu_{-n}^{(\kappa)} = \mathcal{N}^{(\kappa)}[z^n]$, então

$$\nu_n^{(\kappa)} = -\nu_{-n+1}^{(\kappa)}, \quad n \geq 1.$$

Além disso, para todo polinômio de Laurent f e para todo inteiro n ,

$$\mathcal{N}^{(\kappa)}[z^n f(z)] = -\mathcal{N}^{(\kappa)}[z^{-n-1} f(1/z)]. \quad (3.22)$$

Demonstração: Como $\mu_n = \mu_{-n}$, $n \geq 0$, a relação

$$\nu_n^{(2)} = -\nu_{-n+1}^{(2)}, \quad n \geq 1$$

segue imediatamente de

$$\mathcal{N}^{(2)}[f(z)] = \mathcal{M}[(1-z)f(z)].$$

Agora, de $2\mathcal{N}^{(1)}[1] = \mathcal{M}[1]$ e $\mathcal{N}^{(1)}[(z-1)f(z)] = \mathcal{M}[zf(z)]$ com $f(z) = z^{-1}$ obtemos

$$\nu_0^{(1)} + \nu_1^{(1)} = 0.$$

Substituindo $f(z) = z^{n-1}$ e $f(z) = z^{-n-1}$ em $\mathcal{N}^{(1)}[(z-1)f(z)] = \mathcal{M}[zf(z)]$, segue, respectivamente, que

$$\nu_{-n}^{(1)} - \nu_{-n+1}^{(1)} = \mu_{-n} \quad \text{e} \quad \nu_n^{(1)} - \nu_{n+1}^{(1)} = \mu_n.$$

Como $\mu_n = \mu_{-n}$, temos

$$\nu_{-n}^{(1)} + \nu_{n+1}^{(1)} = \nu_{-n+1}^{(1)} + \nu_n^{(1)}, \quad n \geq 1,$$

daí $\nu_n^{(1)} = -\nu_{-n+1}^{(1)}$, $n \geq 1$. ■

Lema 3.1. *Sejam $p_{n,s}(z) = (z-1)z^{s-1}$, $s = 1, 2, \dots, n-1$ e $p_{n,n}(z) = 1 + z^{n-1}$. Cada um dos monômios z^s , $0 \leq s \leq n-1$, $n \geq 2$, pode ser escrito como uma combinação linear da forma*

$$z^s = d_1^{(s)} p_{n,1}(z) + d_2^{(s)} p_{n,2}(z) + \dots + d_{n-1}^{(s)} p_{n,n-1}(z) + \frac{1}{2} p_{n,n}(z).$$

Demonstração: Para $s = 0$, temos

$$\frac{1}{2} p_{n,n}(z) - z^0 = \frac{1}{2} (z^{n-1} - 1) = \frac{1}{2} (z-1) \sum_{l=0}^{n-2} z^l.$$

Assim,

$$z^0 = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-1} p_{n,l}(z) + \frac{1}{2} p_{n,n}(z).$$

Para $s = 1, 2, \dots, n-1$,

$$\frac{1}{2} p_{n,n}(z) - z^s = \frac{1}{2} z^s (z^{n-1-s} - 1) + \frac{1}{2} (1 - z^s) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-s-1} p_{n,l+s} - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s p_{n,l}.$$

Portanto,

$$z^s = -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n-s-1} p_{n,l+s} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^s p_{n,l} + \frac{1}{2} p_{n,n}(z),$$

para $s = 1, 2, \dots, n-1$. ■

O próximo teorema nos mostrará que $Q_n^{(1)}$ e $Q_n^{(2)}$ são polinômios L-ortogonais com relação a $\mathcal{N}^{(1)}$ e $\mathcal{N}^{(2)}$, respectivamente.

Teorema 3.5. *Seja $Q_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, o polinômio definido por (3.17). Se*

$$\tilde{\gamma}_n^{(1)} = \frac{\Delta_n}{(1+a_n)\Delta_{n-1}} \quad e \quad \tilde{\gamma}_n^{(2)} = \frac{\Delta_{n+1}}{(1-a_{n+1})\Delta_n}, \quad \text{para } n \geq 1,$$

onde Δ_n são os determinantes de Toeplitz associados a $\mathcal{M}$, então, para $0 \leq s \leq n$, $n \geq 1$, os polinômios $Q_n^{(i)}$, $i = 1, 2$ satisfazem, respectivamente, as propriedades de L-ortogonalidade

$$\mathcal{N}^{(1)}[z^{-n+s}Q_n^{(1)}(z)] = \delta_{n,s}\tilde{\gamma}_n^{(1)}, \quad \text{para } 0 \leq s \leq n, \quad n \geq 1. \quad (3.23)$$

e

$$\mathcal{N}^{(2)}[z^{-n+s}Q_n^{(2)}(z)] = \delta_{n,s}\tilde{\gamma}_n^{(2)}, \quad \text{para } 0 \leq s \leq n, \quad n \geq 1. \quad (3.24)$$

Demonstração: De (3.5) e (3.17), com $n \geq 1$,

$$\mathcal{N}^{(2)}[z^{-(n+1)+s}Q_n^{(2)}(z)] = \mathcal{M}[z^{-(n+1)+s}(1-z)Q_n^{(2)}(z)] = 0, \quad 1 \leq s \leq n,$$

ou seja,

$$\mathcal{N}^{(2)}[z^{-n+m}Q_n^{(2)}(z)] = 0, \quad 0 \leq m \leq n-1,$$

onde $m = s-1$.

Além disso, temos

$$\mathcal{N}^{(2)}[Q_n^{(2)}(z)] = \mathcal{M}[(1-z)Q_n^{(2)}(z)] = \frac{\Delta_{n+1}}{(1-a_{n+1})\Delta_n},$$

o que completa a demonstração de (3.24).

Agora, para mostrar (3.23), novamente de (3.5) e (3.17),

$$\mathcal{M}\left[Q_n^{(1)}(z) \frac{z^{-n+s+1} - z^{-n+s}}{z-1}\right] = \mathcal{M}\left[Q_n^{(1)}(z) z^{-n+s}\right] = \delta_{n,s} \frac{\Delta_n}{(1+a_n)\Delta_{n-1}}, \quad (3.25)$$

para $n \geq 1$ e $1 \leq s \leq n$.

Para demonstrar (3.23) para $n = 1$, basta observar que, como $Q_n^{(1)}(z) = z^n Q_n^{(1)}(1/z)$, temos

$$\mathcal{N}^{(1)}[z^{-1}Q_1^{(1)}(z)] = \mathcal{N}^{(1)}[1 + z^{-1}] = 0.$$

e, de (3.25),

$$\mathcal{N}^{(1)}[z^{-1}(z-1)Q_1^{(1)}(z)] = \frac{\Delta_1}{(1+a_1)\Delta_0}.$$

Agora, de (3.25), obtemos

$$\mathcal{N}^{(1)}[z^{-n}p_{n,s}(z)Q_n^{(1)}(z)] = 0, \quad 1 \leq s \leq n-1, \quad (3.26)$$

onde $p_{n,s}(z) = (z-1)z^{s-1}$ para $s = 1, 2, \dots, n-1$ e

$$\mathcal{N}^{(1)}[z^{-n}(z^n - z^{n-1})Q_n^{(1)}(z)] = \frac{\Delta_n}{(1+a_n)\Delta_{n-1}}. \quad (3.27)$$

De (3.22) e (3.18),

$$\mathcal{N}^{(1)}[z^{-n}Q_n^{(1)}(z)] = -\mathcal{N}^{(1)}[z^{-1}Q_n^{(1)}(z)].$$

Logo, se tomarmos $p_{n,n}(z) = 1 + z^{n-1}$, então (3.26) também vale para $s = n$, pois a relação anterior pode ser escrita como

$$\mathcal{N}^{(1)}[z^{-n}(1 + z^{n-1})Q_n^{(1)}(z)] = 0.$$

Assim, podemos concluir a demonstração de (3.23) para $n \geq 2$, observando que a sequência $p_{n,s}$, $s = 0, 1, \dots, n-1$, $n \geq 2$, forma uma base para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a $n-1$. Para isso, basta notar que a sequência $p_{n,s}$, $s = 0, 1, \dots, n-1$, $n \geq 2$, é linearmente independente e usar o Lema 3.1. ■

Na próxima seção, estudaremos o problema inverso, ou seja, veremos condições para obtermos polinômios tipo Szegő a partir de polinômios para-ortogonais.

3.3 Polinômios tipo Szegő obtidos a partir de polinômios para-ortogonais

Nesta seção responderemos às seguintes questões:

1) Dado um funcional de momento $\mathcal{N}$, quais são as condições que devemos impor aos momentos para que exista uma sequência de polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ tal que a propriedade de L-ortogonalidade $\mathcal{N}[z^{-n+s}Q_n(z)] = \delta_{n,s}\tilde{\gamma}_n$, $0 \leq s \leq n$, $n \geq 1$, seja válida?

2) Dada uma sequência de polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ satisfazendo a relação de recorrência

$$Q_{n+1}(z) = (z+1)Q_n(z) - \alpha_{n+1}zQ_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (3.28)$$

com $Q_0(z) = 1$ e $Q_1(z) = z+1$, podemos garantir a existência de um funcional de momento $\mathcal{N}$ para o qual a propriedade de L-ortogonalidade $\mathcal{N}[z^{-n+s}Q_n(z)] = \delta_{n,s}\gamma_n$, para $0 \leq s \leq n$, $n \geq 1$, seja válida?

3) Dada uma sequência de polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ satisfazendo a relação de recorrência (3.28), podemos garantir a existência de uma sequência $\{S_n\}_{n=0}^\infty$ de polinômios tipo Szegő para a qual $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência associada de polinômios para-ortogonais $\{Q_n^{(1)}\}$ ou $\{Q_n^{(2)}\}$?

Para responder à primeira questão, consideremos $\mathcal{N}$ um funcional de momento tal que $\mathcal{N}[z^n] = \nu_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, com

$$\nu_{n+1} = -\nu_{-n} \quad \text{e} \quad \tilde{\Delta}_n \neq 0, \quad \text{para} \quad n \geq 0, \quad (3.29)$$

sendo $\tilde{\Delta}_0 = \nu_0$ e

$$\tilde{\Delta}_n = \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & \nu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 1,$$

os determinantes de Toeplitz associados aos momentos ν_n .

O próximo teorema fornece condições em relação a $\mathcal{N}$ para a existência de $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ que satisfaz a relação de recorrência (3.28), dando uma resposta à primeira questão.

Teorema 3.6. *Se o funcional de momento $\mathcal{N}$ satisfaz (3.29), então existe uma única sequência de polinômios mônicos $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ dada por*

$$\mathcal{N}[z^{-n+s}Q_n(z)] = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1$$

e

$$\mathcal{N}[Q_n(z)] = \frac{\tilde{\Delta}_n}{\tilde{\Delta}_{n-1}}, \quad Q_n(0) = 1, \quad n \geq 1.$$

Além disso, $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ satisfaz a relação de recorrência de três termos (3.28) onde

$$\alpha_{n+1} = \frac{\mathcal{N}[Q_n(z)]}{\mathcal{N}[Q_{n-1}(z)]} \neq 0, \quad n \geq 1.$$

Demonstração: Da simetria $\nu_{n+1} = -\nu_{-n}$, $n \geq 0$, temos $\tilde{\Delta}_0 = -\nu_1$ e

$$\tilde{\Delta}_n = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \nu_2 & \nu_1 & \cdots & \nu_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{n+1} & \nu_n & \cdots & \nu_1 \end{vmatrix}, \quad n \geq 1. \quad (3.30)$$

Além disso, como a sequência de polinômios mônicos $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ é dada por $\mathcal{N}[z^{-n+s}Q_n(z)] = 0$, $0 \leq s \leq n-1$, escrevendo $Q_n(z) = \sum_{j=0}^n q_j^{(n)} z^j$, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & \nu_0 \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} q_0^{(n)} \\ q_1^{(n)} \\ \vdots \\ q_{n-1}^{(n)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathcal{N}[Q_n(z)] \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Como $\det A = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} \tilde{\Delta}_n \neq 0$, aplicando a regra de Crammer e o Teorema de Laplace no sistema linear (3.31) e usando (3.30), obtemos que a sequência de polinômios mônicos existe unicamente e

$$\mathcal{N}[Q_n(z)] = \frac{\tilde{\Delta}_n}{\tilde{\Delta}_{n-1}}, \quad n \geq 1.$$

A demonstração de que Q_n satisfaz a relação de recorrência (3.28) é análoga à demonstração da primeira parte do Teorema 2.2. Além disso, substituindo-se a última linha do sistema linear (3.31) por $Q_n(z) = \sum_{j=0}^n q_j^{(n)} z^j$, como $\det A = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}} \tilde{\Delta}_n \neq 0$, de (3.30), obtemos $Q_n(0) = 1$, para $n \geq 1$. Logo, usando a relação de recorrência dada no Teorema 2.2, temos

$$\beta_{n+1} = \frac{Q_{n+1}(0)}{Q_n(0)}$$

para $n \geq 1$, e daí, nesse caso, $\beta_{n+1} = 1$, o que completa a demonstração deste teorema. ■

O próximo teorema responderá à segunda pergunta.

Teorema 3.7. *Seja $\{\alpha_n\}_{n=2}^{\infty}$ uma sequência de números complexos não nulos. Se $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ é a sequência de polinômios dada pela relação de recorrência de três termos (3.28), então existe um funcional de momento $\mathcal{N}$, cujos momentos satisfazem a propriedade (3.29) para seus momentos, tal que a sequência $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ é unicamente definida por*

$$\mathcal{N}[z^{-n+s}Q_n(z)] = \delta_{n,s}\tilde{\gamma}_n, \quad 0 \leq s \leq n-1 \quad n \geq 1,$$

onde $\tilde{\gamma}_n = \tilde{\Delta}_n/\tilde{\Delta}_n$.

Demonstração: De (3.28), podemos observar que Q_n é um polinômio mônico de grau n e $Q_n^{\bullet}(z) = Q_n(z)$.

Consideremos $\nu_0 \neq 0$ e a sequência de polinômios $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$P_{n+1}(z) = (z+1)P_n(z) - \alpha_{n+1}zP_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (3.32)$$

com $P_0(z) = 0$ e $P_1(z) = \nu_0$. Logo, $\nu_0^{-1}P_n$ é um polinômio mônico de grau $n-1$ tal que $P_n^{\bullet}(z) = P_n(z)$.

Das duas relações de recorrência de três termos, (3.28) e (3.32),

$$\frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{\tilde{\gamma}_n z^n}{Q_{n+1}(z)Q_n(z)}, \quad n \geq 1,$$

onde $\tilde{\gamma}_n = \nu_0 \alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}$. Assim, existem expansões em séries de potências

$$\tilde{L}_0(z) = \sum_{s=0}^{\infty} -\nu_{s+1}z^s \quad \text{e} \quad \tilde{L}_{\infty}(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \nu_{-s+1}z^{-s},$$

tais que

$$\tilde{L}_0(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \tilde{\gamma}_n z^n + O(z^{n+1}), \quad n \geq 1, \quad (3.33)$$

e

$$\tilde{L}_{\infty}(z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{\tilde{\gamma}_n}{z^{n+1}} + O((1/z)^{n+2}), \quad n \geq 1. \quad (3.34)$$

Agora, substituindo z por $1/z$ em (3.33), obtemos

$$(1/z)\tilde{L}_0(1/z) - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{\tilde{\gamma}_n}{z^{n+1}} + O((1/z)^{n+2}), \quad n \geq 1.$$

Logo, a expansão formal $(1/z)\tilde{L}_0(1/z)$ é a mesma que a expansão formal $\tilde{L}_{\infty}(z)$ e, daí,

$$\nu_{n+1} = -\nu_{-n}, \quad n \geq 0.$$

Escrevendo

$$Q_n(z) = \sum_{j=0}^n q_{n,j} z^j \quad \text{e} \quad P_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-1,j} z^j,$$

de (3.33) e (3.34), obtemos, respectivamente, um sistema linear triangular inferior e um sistema linear triangular superior, cuja soma é o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n+1} & \nu_{-n} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+2} & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_0 & \nu_{-1} \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & \nu_1 & \nu_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{n,0} \\ q_{n,1} \\ \vdots \\ q_{n,n-1} \\ q_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\gamma}_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Assim, se definirmos o funcional de momento $\mathcal{N}$ por $\mathcal{N}[t^n] = \nu_{-n}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, então, do sistema linear (3.35), temos

$$\mathcal{N}[z^{-n+s} Q_n(z)] = \delta_{n,s} \tilde{\gamma}_n, \quad 0 \leq s \leq n \quad n \geq 1.$$

Como $\nu_0 \neq 0$ e $\tilde{\gamma}_n \neq 0$, $n \geq 1$, por indução, obtemos

$$\tilde{\Delta}_0 = \nu_0 \neq 0 \quad \text{e} \quad \tilde{\Delta}_n = \tilde{\gamma}_n \tilde{\Delta}_{n-1} \neq 0, \quad n \geq 1,$$

o que completa a demonstração deste teorema. ■

O próximo teorema é uma consequência dos resultados dados nos Teoremas 3.3 a 3.7.

Teorema 3.8. *Dada uma sequência de números complexos $\{\mu_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tal que $\mu_{-n} = \mu_n$, $n \geq 1$, sejam $\{\nu_n^{(1)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ e $\{\nu_n^{(2)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ duas novas sequências de números complexos dadas por*

$$\nu_{-n-1}^{(1)} - \nu_{-n}^{(1)} = \mu_{-n-1} \quad \text{e} \quad \nu_{n+1}^{(1)} = -\nu_{-n}^{(1)}, \quad n \geq 0,$$

com $\nu_0^{(1)} = \mu_0/2$, e

$$\nu_{-n-1}^{(2)} = \mu_{-n-1} - \mu_{-n-2} \quad \text{e} \quad \nu_{n+1}^{(2)} = -\nu_{-n}^{(2)}, \quad n \geq 0,$$

com $\nu_0^{(2)} = \mu_0 - \mu_{-1}$. Se denotarmos por Δ_n e $\tilde{\Delta}_n^{(\kappa)}$, para $\kappa = 1, 2$ e $n \geq 0$, os determinantes de Toeplitz definidos por $\Delta_0 = \mu_0$, $\tilde{\Delta}_0^{(\kappa)} = \nu_0^{(\kappa)}$,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\Delta}_n^{(\kappa)} = \begin{vmatrix} \nu_0^{(\kappa)} & \nu_{-1}^{(\kappa)} & \cdots & \nu_{-n}^{(\kappa)} \\ \nu_1^{(\kappa)} & \nu_0^{(\kappa)} & \cdots & \nu_{-n+1}^{(\kappa)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n^{(\kappa)} & \nu_{n-1}^{(\kappa)} & \cdots & \nu_0^{(\kappa)} \end{vmatrix},$$

então, para algum $m \geq 1$,

$$\Delta_n \Delta_{n-1} = 2 \tilde{\Delta}_n^{(1)} \tilde{\Delta}_{n-1}^{(2)}, \quad n = 1, 2, \dots, m.$$

Logo, se $\Delta_n \neq 0$ para $n = 0, \dots, m$, então $\tilde{\Delta}_n^{(\kappa)} \neq 0$ para $n = 0, \dots, m+1-\kappa$. Em particular, se $\Delta_n > 0$ para $n = 0, \dots, m$, então $\tilde{\Delta}_n^{(\kappa)} > 0$ para $n = 0, \dots, m+1-\kappa$.

Demonstração: Como o Teorema 3.5 é um caso particular do Teorema 3.7, segue que

$$\mathcal{N}^{(1)}[Q_n^{(1)}(z)] = \tilde{\Delta}_n^{(1)} / \tilde{\Delta}_{n-1}^{(1)} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}^{(2)}[Q_n^{(2)}(z)] = \tilde{\Delta}_n^{(2)} / \tilde{\Delta}_{n-1}^{(2)}.$$

Logo,

$$\frac{\Delta_n}{(1+a_n)\Delta_{n-1}} = \frac{\tilde{\Delta}_n^{(1)}}{\tilde{\Delta}_{n-1}^{(1)}} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta_{n+1}}{(1-a_{n+1})\Delta_n} = \frac{\tilde{\Delta}_n^{(2)}}{\tilde{\Delta}_{n-1}^{(2)}}. \quad (3.36)$$

De (3.8) e (3.36), obtemos

$$\tilde{\Delta}_n^{(1)} \tilde{\Delta}_{n-1}^{(2)} = \frac{\Delta_n \tilde{\Delta}_{n-1}^{(1)}}{(1+a_n)\Delta_{n-1}} \frac{\Delta_n \tilde{\Delta}_{n-2}^{(2)}}{(1-a_n)\Delta_{n-1}} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-2}} \tilde{\Delta}_{n-1}^{(1)} \tilde{\Delta}_{n-2}^{(2)} = \frac{1}{2} \Delta_n \Delta_{n-1},$$

concluindo a demonstração do teorema. ■

Os dois próximos teoremas fornecem informações sobre a última questão.

Teorema 3.9. *Seja a sequência de polinômios L -ortogonais $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ com respeito ao funcional de momento $\mathcal{N}$ com a propriedade (3.29) satisfazendo a relação de recorrência de três termos (3.28). Se a sequência $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, gerada por*

$$a_n = 1 - \frac{\alpha_{n+1}}{1+a_{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad (3.37)$$

com $a_0 = 1$, existe e satisfaz $a_n \neq \pm 1$, $n \geq 1$, então os polinômios S_n que satisfazem (3.6) são os polinômios tipo Szegő com respeito ao funcional de momento $\mathcal{M}$ tal que

$$\mathcal{M}[z^n] = \mathcal{N}[z^n] - \mathcal{N}[z^{n-1}], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.38)$$

Uma condição suficiente para que a sequência $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ exista e satisfaça $a_n \neq \pm 1$, $n \geq 1$, é que os elementos $-\alpha_{n+1}/4$, $n \geq 1$, estejam na região parabólica

$$E(\alpha) = \{z : |z| - \Re(ze^{-i2\alpha}) \leq \frac{1}{2} \cos^2 \alpha\},$$

onde $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$.

Demonstração: Como a sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerada por (3.37) existe e satisfaz $a_n \neq \pm 1$, $n \geq 1$, pelo Teorema 3.2 existe uma única sequência de polinômios mônicos $\{S_n\}$ que são polinômios tipo Szegő associados a um funcional de momento $\mathcal{M}$ com a propriedade (3.4). Do Teorema 3.3 e de (3.37), os polinômios para-ortogonais associados $\{Q_n^{(1)}\}$ são iguais aos da sequência $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada em (3.28). Agora, observando que o Teorema 3.5 é um caso particular do Teorema 3.7, temos

$$\mathcal{M}[f(z)] = \mathcal{N}[(z-1)f(z)/z]$$

para todo polinômio de Laurent f , o que confirma as relações em (3.38).

Agora, de (3.37), obtemos a fração contínua

$$\frac{a_n - 1}{2} = \frac{-\alpha_{n+1}/4}{1} + \frac{-\alpha_n/4}{1} + \cdots + \frac{-\alpha_2/4}{1}, \quad n \geq 1.$$

Além disso, pelo Teorema da Parábola para frações contínuas, conforme pode ser observado no Capítulo 1, seção 1.3 ou ver, por exemplo, Jones e Thron [17] ou Lorentzen e Waadeland [22], se $-\alpha_{n+1}/4 \in E(\alpha)$, para $n \geq 1$, então

$$\frac{a_n - 1}{2} \in V(\alpha) = \left\{ z : \Re(z e^{-i\alpha}) \geq -\frac{1}{2} \cos \alpha \right\}, \quad n \geq 1.$$

Portanto, $a_n \neq -1$, para $n \geq 1$. Novamente de (3.37), $a_0 = 1$, $a_n \neq -1$, $n \geq 1$, e $\alpha_{n+1} \neq 0$, $n \geq 1$, o que fornece $a_n \neq 1$, $n \geq 1$. ■

Teorema 3.10. *Consideremos a sequência de polinômios L -ortogonais $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ com respeito ao funcional de momento $\mathcal{N}$ com a propriedade (3.29) satisfazendo a relação de recorrência de três termos (3.28). Vamos, também, supor que $\mathcal{N}$ é tal que $\mathcal{N}[(1-z)^{-1}]$ existe e é diferente de zero. Se a sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, gerada por*

$$a_{n+1} = -1 + \frac{\alpha_{n+1}}{1 - a_n}, \quad n \geq 1, \quad (3.39)$$

com $a_1 = -1 + \mathcal{N}[1]/\mathcal{N}[(1-z)^{-1}]$, existe e satisfaz $a_n \neq \pm 1$, $n \geq 1$, então os polinômios $\{S_n\}$ que satisfazem (3.6) são os polinômios tipo Szegő com respeito ao funcional de momento $\mathcal{M}$ tal que

$$\mathcal{M}[1] = \mathcal{N}\left[\frac{1}{1-z}\right], \quad \mathcal{M}[z^{n+1}] = \mathcal{M}[z^n] - \mathcal{N}[z^n], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Uma condição suficiente para que a sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ exista e satisfaça $a_n \neq \pm 1$, $n \geq 1$ é que $-(1 + a_1)/2$ e $-\alpha_{n+1}/4$, $n \geq 1$, estejam todos na região parabólica

$$E(\alpha) = \left\{ z : |z| - \Re(z e^{-i2\alpha}) \leq \frac{1}{2} \cos^2 \alpha \right\},$$

onde $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$.

Demonstração: Como a sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerada por (3.39) existe e satisfaz $a_n \neq \pm 1$, $n \geq 1$, pelo Teorema 3.2, existe uma única sequência de polinômios mônicos $\{S_n\}$ os quais são polinômios tipo Szegő associados a um funcional de momento $\mathcal{M}$ com a propriedade (3.4). Além disso, do Teorema 3.3 e de (3.39), os polinômios para-ortogonais associados $\{Q_n^{(2)}\}$ são como os polinômios da sequência $\{Q_n\}$.

Agora, para obter a condição suficiente, podemos observar que, de (3.39),

$$-\frac{a_{n+1} + 1}{2} = \frac{-\alpha_{n+1}/4}{1} + \cdots + \frac{-\alpha_2/4}{1} + \frac{-(1 + a_1)/2}{1}, \quad n \geq 1.$$

Portanto, pelo Teorema da Parábola, conforme pode ser observado no Capítulo 1, seção 1.3 ou ver, por exemplo, Jones e Thron [17] ou Lorentzen e Waadeland [22], quando $-\alpha_{n+1}/4$ e $-(1 + a_1)/2$ pertencem a $E(\alpha)$ para $n \geq 1$, então

$$\frac{-a_{n+1} - 1}{2} \in V(\alpha) = \left\{ z : \Re(z e^{-i\alpha}) \geq -\frac{1}{2} \cos \alpha \right\}, \quad n \geq 1.$$

Logo, o resultado segue usando o Teorema da Parábola e o fato de que $\alpha_{n+1} \neq 0$, para $n \geq 1$ e $a_1 = -1 + \mathcal{N}[1]/\mathcal{N}[(1 - z)^{-1}]$. ■

O lema a seguir pode ser encontrado em Sri Ranga [24] e nos auxiliará na demonstração do próximo teorema.

Lema 3.2. *Sejam $\mathcal{G}$ um funcional de momento simétrico e V_n um polinômio de grau exatamente n . Temos*

$$\mathcal{G}[x^s V_n(x)] = 0,$$

para $s = 0, 1, \dots, n - 1$, se, e somente se,

$$\mathcal{G} \left[\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-(n-1)+2s}}{\sqrt{x^2 - 1}} V_n(x) \right] = 0,$$

para $s = 0, 1, \dots, n - 1$.

Demonstração: Primeiramente, suponhamos que

$$\mathcal{G}\left[\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-(n-1)+2s}}{\sqrt{x^2 - 1}}V_n(x)\right] = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1,$$

e mostraremos que

$$\mathcal{G}[x^s V_n(x)] = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1.$$

Podemos observar que

$$(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{(x - \sqrt{x^2 - 1})}. \quad (3.40)$$

Note que, se

$$\mathcal{G}\left[\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-(n-1)+2s}}{\sqrt{x^2 - 1}}V_n(x)\right] = 0, \quad \text{para } s = 0, 1, \dots, n-1,$$

então, para $n = 2m$, segue que

$$\mathcal{G}\left[\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-2m+1+2s}}{\sqrt{x^2 - 1}}V_{2m}(x)\right] = 0, \quad \text{para } s = 0, 1, \dots, 2m-1. \quad (3.41)$$

Usando (3.40), podemos escrever (3.41) da seguinte maneira:

$$\mathcal{G}\left[\frac{(x \pm \sqrt{x^2 - 1})^{2l+1}}{\sqrt{x^2 - 1}}V_{2m}(x)\right] = 0, \quad \text{para } l = 0, 1, \dots, m-1. \quad (3.42)$$

Agora, através da expansão binomial e da simetria do funcional de momento $\mathcal{G}$, temos

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}\left[\left(\sum_{j=0}^{2l+1} \binom{2l+1}{j} x^{2l+1-j} (\pm \sqrt{x^2 - 1})^j\right) \frac{V_{2m}(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}\right] \\ &= \mathcal{G}\left[\left(\sum_{j=0}^l \binom{2l+1}{2j} x^{2l+1-2j} (\pm \sqrt{x^2 - 1})^{2j}\right) \frac{V_{2m}(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}\right] \\ &+ \mathcal{G}\left[\left(\sum_{j=0}^l \binom{2l+1}{2j+1} x^{2l-2j} (\pm \sqrt{x^2 - 1})^{2j+1}\right) \frac{V_{2m}(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}\right] \\ &= \mathcal{G}\left[\left(\sum_{j=0}^l \binom{2l+1}{2j+1} x^{2l-2j} (\pm \sqrt{x^2 - 1})^{2j}\right) V_{2m}(x)\right] \\ &= \mathcal{G}\left[\left(\sum_{j=0}^l \binom{2l+1}{2j+1} x^{2l-2j} (x^2 - 1)^j\right) V_{2m}(x)\right] = 0, \end{aligned}$$

para $l = 0, 1, \dots, m-1$.

Como

$$\sum_{j=0}^l \binom{2l+1}{2j+1} x^{2l-2j} (x^2 - 1)^j = \mathcal{R}_{2l}(x)$$

é uma função polinomial par de grau $2l$, onde $l = 0, 1, \dots, m-1$, segue que $\mathcal{R}_{2l}(x)$ é base para as funções polinomiais pares de grau $2l$. Assim, podemos escrever

$$x^{2l} = \sum_{j=0}^l d_j \mathcal{R}_{2j}(x), \quad l = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

e, daí

$$\mathcal{G}[x^{2l} V_{2m}(x)] = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m-1.$$

Para $n = 2m + 1$ o resultado segue de maneira análoga.

Portanto,

$$\mathcal{G}[x^s V_n(x)] = 0, \quad s = 0, 1, \dots, n-1.$$

A recíproca segue imediatamente. ■

Dissemos no capítulo 1 que há uma conexão entre os polinômios tipo Szegő e os polinômios ortogonais simétricos. O próximo teorema nos mostrará como ocorre esta conexão. Além disso, neste teorema, veremos exemplos de funcionais de momento das classes PO-tipo e MS-tipo.

Teorema 3.11. *Dado τ tal que $0 \leq |\tau| \leq \pi/2$, suponhamos que os coeficientes d_{n+1} em (1.13) satisfazem*

$$2d_{n+1} \leq \frac{1}{1 + \cos 2\tau}. \quad (3.43)$$

Denotemos por $\Gamma(\tau, b)$ a parte do segmento de reta de $-be^{i\tau}$ para $be^{i\tau}$ e seja $\Lambda(\tau, b)$ a imagem de $\Gamma(\tau, b)$ com respeito à transformação $z = (u + \sqrt{u^2 - 1})^2$. A raiz quadrada é escolhida tal que se $\Re(u) > 0$, então $|z| > 1$.

Para todo polinômio de Laurent f , seja o funcional linear $\mathcal{M}$ tal que

$$\mathcal{M}[f(z)] = \int_{\Lambda(\tau, b)} f(z)(1 - z^{-1})\nu(\tau; z)dz,$$

onde $\nu(\tau; z) = \frac{1}{2}z^{-1/2}\omega\left(\frac{z^{1/2}+z^{-1/2}}{2e^{i\tau}}\right)$. Então, $\mathcal{M}$ é um funcional com a propriedade (3.4) e os polinômios tipo Szegő associados S_n satisfazem a relação de recorrência (3.6), onde

$$a_n = 1 - \frac{4d_{n+1}e^{i2\tau}}{1 + a_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

com $a_0 = 1$.

Demonstração: Consideremos o funcional linear $\mathcal{O}$ definido por

$$\mathcal{O}[f] = \int_{\Gamma(\tau, b)} f(u) \omega(ue^{-i\tau}) du$$

e a sequência de polinômios mônicos $\{B_n(u)\}$ dados por

$$B_n(u) = e^{in\tau} \mathcal{P}_n(ue^{-i\tau}), \quad n \geq 0,$$

onde $\mathcal{P}_n$ são os polinômios ortogonais mônicos simétricos como na Proposição 1.1. Assim, da relação de recorrência (1.13), segue que

$$B_{n+1}(u) = uB_n(u) - d_{n+1}e^{i2\tau} B_{n-1}(u), \quad n \geq 1, \quad (3.44)$$

com $B_0(u) = 1$ and $B_1(u) = u$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}[u^s B_n(u)] &= \int_{\Gamma(\tau, b)} u^s B_n(u) \omega(ue^{-i\tau}) du \\ &= \int_{-be^{i\tau}}^{be^{i\tau}} u^s e^{in\tau} \mathcal{P}_n(ue^{-i\tau}) \omega(ue^{-i\tau}) du, \end{aligned}$$

que, através da mudança de variável $z = ue^{-i\tau}$, torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{O}[u^s B_n(u)] &= \int_{-b}^b (ze^{i\tau})^s e^{in\tau} \mathcal{P}_n(z) \omega(z) e^{i\tau} dz \\ &= e^{i(s+n+1)\tau} \int_{-b}^b z^s \mathcal{P}_n(z) \omega(z) dz \\ &= \delta_{n,s} \gamma_n e^{i(2n+1)\tau}, \quad 0 \leq s \leq n, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

onde $\gamma_n = d_2 d_3 \cdots d_{n+1} \int_{-b}^b \omega(u) du$

Devido à simetria, pelo Lema 3.2, segue que a relação de ortogonalidade anterior para B_n pode também ser dada na forma

$$\mathcal{O}\left[\frac{(u + \sqrt{u^2 - 1})^{-(n-1)+2s}}{\sqrt{u^2 - 1}} B_n(u)\right] = \delta_{n,s} 2^n \gamma_n e^{i(2n+1)\tau}, \quad 0 \leq s \leq n. \quad (3.45)$$

Logo, para

$$Q_n(z) = (4z)^{n/2} B_n(u), \quad n \geq 0,$$

onde $z = (u + \sqrt{u^2 - 1})^2$, de (3.44), temos

$$Q_{n+1}(z) = (z + 1)Q_n(z) - \alpha_{n+1}zQ_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com $Q_0(z) = 1$, $Q_1(z) = z + 1$ e $\alpha_{n+1} = 4d_{n+1}e^{i2\tau}$. Agora, de (3.45),

$$\mathcal{N}[z^{-n+s} Q_n(z)] = \delta_{n,s} 4^n \gamma_n e^{i(2n+1)\tau}, \quad 0 \leq s \leq n, \quad n \geq 1,$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{N}[f(z)] &= \mathcal{O}\left[f((u + \sqrt{u^2 - 1})^2) \frac{u + \sqrt{u^2 - 1}}{\sqrt{u^2 - 1}}\right], \\ &= \int_{\Lambda(\tau, b)} f(z) \nu(\tau; z) dz.\end{aligned}$$

Além disso, do Teorema 3.7, podemos observar que o funcional $\mathcal{N}$ satisfaz a propriedade (3.29).

De (3.43) segue que

$$-\alpha_{n+1}/4 \in E(0) = \left\{ z : |z| - \Re(z) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Logo, pelo Teorema 3.9, a sequência $\{a_n\}$, gerada por

$$a_n = 1 - \frac{\alpha_{n+1}}{1 + a_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

com $a_0 = 1$, existe e satisfaz $a_n \neq \pm 1$, $n \geq 1$. Além disso, os polinômios S_n que satisfazem (3.6) são os polinômios tipo Szegő com relação ao funcional de momento $\mathcal{M}$ tal que

$$\mathcal{M}[z^n] = \mathcal{N}[z^n] - \mathcal{N}[z^{n-1}], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Disto, decorre que

$$\mathcal{M}[f(z)] = \int_{\Lambda(\tau, b)} f(z) (1 - z^{-1}) \nu(\tau; z) dz,$$

onde f é algum polinômio de Laurent. ■

Exemplo 1. Consideremos os polinômios $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$ dados pela relação de recorrência de três termos (3.28), onde $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 6$, $\alpha_n = 1$, para $n \geq 4$.

Pelo Teorema 3.7, existe um funcional de momento $\mathcal{N}$, cujos momentos satisfazem (3.29), tal que os polinômios $\{Q_n\}$ são unicamente definidos por

$$\mathcal{N}[z^{-n+m} Q_n(z)] = \delta_{n,m} \tilde{\gamma}_n, \quad 0 \leq m \leq n-1, \quad n \geq 1,$$

onde $\tilde{\gamma}_n = \nu_0 \alpha_2 \cdots \alpha_{n+1}$.

Além disso, de (3.37), $a_2 = -1$ e, portanto, não podemos aplicar o Teorema 3.2 para obter um funcional de momento $\mathcal{M}$ para o qual a sequência $\{S_n\}$ é formada por polinômios tipo Szegő.

O exemplo a seguir nos fornece um exemplo de funcional de momento da classe PO-tipo.

Exemplo 2. Seja $a_n = i$, $n \geq 1$. Assim, $a_n \neq \pm 1$, $n \geq 1$, e, pelo Teorema 3.2, existe um funcional de momento $\mathcal{M}$ com a propriedade (3.4) tal que os polinômios S_n gerados por (3.6) são os respectivos polinômios tipo Szegő. Não foi possível obter nenhuma espécie de representação integral para o funcional $\mathcal{M}$. No entanto, o funcional de momento $\mathcal{N}^{(2)}$ tem uma boa representação integral, conforme veremos.

Do Teorema 3.3, os polinômios para-ortogonais associados, $Q_n^{(2)}$, satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$Q_{n+1}^{(2)}(z) = (z+1)Q_n^{(2)}(z) - 2zQ_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1,$$

com $Q_0^{(2)}(z) = 1$ e $Q_1^{(2)}(z) = z+1$.

Sabemos que os polinômios mônicos de Tchebyshev de segunda espécie

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{2^n \sin(\theta)}, \quad \text{com } x = \cos(\theta),$$

satisfazem

$$\int_{-1}^1 U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx = 0, \quad \text{para } m \neq n,$$

e

$$U_{n+1}(x) = xU_n(x) - \frac{1}{4}U_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = x$, fazendo a mudança de variáveis $u = x\sqrt{2}$ com $x \in [-1, 1]$, temos que

$$B_n(u) = (\sqrt{2})^n U_n\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right), \quad u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}],$$

satisfaz

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} B_m(u)B_n(u)\sqrt{2-u^2}du = 0, \quad \text{para } m \neq n, \quad (3.46)$$

e

$$B_{n+1}(u) = uB_n(u) - \frac{1}{2}B_{n-1}(u), \quad n \geq 1, \quad (3.47)$$

com $B_0(u) = 1$ e $B_1(u) = u$, o que significa que

$$B_n(u) = (\sqrt{2})^n U_n\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right), \quad u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}],$$

são os polinômios mônicos de Tchebyshev de segunda espécie modificados definidos em $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Além disso, para $u \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, consideremos

$$z(u) = (u + \sqrt{u^2 - 1})^2. \quad (3.48)$$

Observe que sua inversa é dada por

$$u(z) = \frac{1}{2}(z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}). \quad (3.49)$$

Assim, de

$$\frac{Q_{n+1}^{(2)}(z(u))}{(2\sqrt{z(u)})^{n+1}} = (z(u) + 1) \frac{Q_n^{(2)}(z(u))}{(2\sqrt{z(u)})^{n+1}} - 2z(u) \frac{Q_{n-1}^{(2)}(z(u))}{(2\sqrt{z(u)})^{n+1}}, \quad n \geq 1,$$

com $Q_0^{(2)}(z(u)) = 1$ e $Q_1^{(2)}(z(u)) = z(u) + 1$, obtemos

$$\frac{Q_{n+1}^{(2)}(z(u))}{(2\sqrt{z(u)})^{n+1}} = u \frac{Q_n^{(2)}(z(u))}{(2\sqrt{z(u)})^n} - \frac{1}{2} \frac{Q_{n-1}^{(2)}(z(u))}{(2\sqrt{z(u)})^{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad (3.50)$$

com $Q_0^{(2)}(z(u)) = 1$ e $\frac{Q_1^{(2)}(z(u))}{2\sqrt{z(u)}} = u$.

Comparando (3.47) e (3.50), temos

$$Q_n^{(2)}(z(u)) = (4z(u))^{\frac{n}{2}} B_n(u), \quad n \geq 0. \quad (3.51)$$

Seja $W(u) = \sqrt{2-u^2}$. Como $B_n(u) = (-1)^n B_n(-u)$, por (3.46) e pelo Lema 3.2, segue que

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{(u + \sqrt{u^2 - 1})^{-(n-1)+2s}}{\sqrt{u^2 - 1}} B_n(u) W(u) du = 0, \quad \text{para } 0 \leq s \leq n-1, \quad (3.52)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \frac{(u + \sqrt{u^2 - 1})^{-(n-1)+2s}}{\sqrt{u^2 - 1}} B_n(u) W(u) du &+ \int_{-1}^1 \frac{(u + \sqrt{u^2 - 1})^{-(n-1)+2s}}{\sqrt{u^2 - 1}} B_n(u) W(u) du \\ &+ \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(u + \sqrt{u^2 - 1})^{-(n-1)+2s}}{\sqrt{u^2 - 1}} B_n(u) W(u) du \\ &= 0, \quad \text{para } 0 \leq s \leq n-1. \end{aligned}$$

Podemos observar que

- (i) se $-\sqrt{2} \leq u \leq -1$, então $z \in \mathbb{R}$ e $(1 - \sqrt{2})^2 \leq z \leq 1$;
- (ii) se $-1 < u < 1$, então $z \in \mathcal{C}$;
- (iii) se $1 \leq u \leq \sqrt{2}$, então $z \in \mathbb{R}$ e $1 \leq z \leq (1 + \sqrt{2})^2$,

onde $\mathcal{C}$ é o círculo unitário dado por $z = e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$.

De (3.48), obtemos que

$$du = \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{2z} dz.$$

Assim, de (3.51), temos

$$\begin{aligned} \int_{(1-\sqrt{2})^2}^1 z^{-n+s} Q_n^{(2)}(z) \frac{W(u(z))}{2^{n+1}\sqrt{z}} dz &+ \int_C z^{-n+s} Q_n^{(2)}(z) \frac{W(u(z))}{2^{n+1}\sqrt{z}} dz \\ &+ \int_1^{(1+\sqrt{2})^2} z^{-n+s} Q_n^{(2)}(z) \frac{W(u(z))}{2^{n+1}\sqrt{z}} dz \\ &= 0, \text{ para } 0 \leq s \leq n-1. \end{aligned}$$

Consequentemente, segue que

$$\mathcal{N}^{(2)}[z^{-n+s} Q_n^{(2)}(z)] = 0, \quad 0 \leq s \leq n-1,$$

onde

$$\mathcal{N}^{(2)}[f] = \int_{(\sqrt{2}-1)^2}^1 f(z)w(z)dz + \int_C f(z)w(z)dz + \int_1^{(\sqrt{2}+1)^2} f(z)w(z)dz.$$

Aqui, $w(z) = \sqrt{[2 - u(z)^2]}/\sqrt{z}$, com $2u(z)$ dado por (3.49).

3.4 Exemplos envolvendo funções hipergeométricas

Nessa seção, veremos exemplos de polinômios para-ortogonais e tipo Szegő em termos de funções hipergeométricas e exemplos de funcionais de momento das classes MS-tipo e PO-tipo. Para isso, suponhamos que o parâmetro $b \in \mathbb{C}$ das funções hipergeométricas a seguir seja tal que $2b \neq 0, -1, -2, \dots$.

Dividindo a relação contígua (1.4) por ${}_2F_1(a+1, b; c+1; z)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{{}_2F_1(a, b; c; z)}{{}_2F_1(a+1, b; c+1; z)} &= \left(1 + \frac{a-b+1}{c}z\right) \\ &\quad - \frac{(a+1)(c-b+1)}{c(c+1)}z \frac{{}_2F_1(a+2, b; c+2; z)}{{}_2F_1(a+1, b; c+1; z)} \end{aligned}$$

Invertendo, temos

$$\begin{aligned} \frac{{}_2F_1(a+1, b; c+1; z)}{{}_2F_1(a, b; c; z)} &= \frac{1}{1 + \frac{a-b+1}{c}z - \frac{(a+1)(c-b+1)}{c(c+1)}z \frac{{}_2F_1(a+2, b; c+2; z)}{{}_2F_1(a+1, b; c+1; z)}}. \end{aligned}$$

Substituindo a por n , b por $-b+1$ e c por $b+n$ na relação anterior, segue que

$$R_n(b, z) = \frac{1}{(1+z) - \alpha_{n+2}(b)zR_{n+1}(z)},$$

onde

$$R_n(b; z) = \frac{{}_2F_1(n+1, -b+1; b+n+1; z)}{{}_2F_1(n, -b+1; b+n; z)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

e

$$\alpha_{n+2}(b) = \frac{(n+1)(2b+n)}{(b+n)(b+n+1)}, \quad n \geq 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} R_0(b, z) &= {}_2F_1(1, -b+1; b+1; z) \\ &= \frac{1}{z+1} - \frac{\alpha_2(b)z}{z+1} - \dots - \frac{\alpha_n(b)z}{z+1} - \frac{\alpha_{n+1}(b)zR_n(b, z)}{1}. \end{aligned}$$

Como $R_n(b; 0) = 1$, de acordo com a teoria das frações contínuas sobre convergentes ver, por exemplo, Capítulo 1 seção 1.3 ou as referências Chihara [8], Lorentzen e Waadeland [22], Jones e Thron [19] e Wall [32],

$${}_2F_1(1, -b+1; b+1; z) - \frac{P_n(b; z)}{Q_n(b; z)} = \alpha_2(b)\alpha_3(b) \cdots \alpha_{n+1}(b)z^n + O(z^{n+1}), \quad (3.53)$$

onde

$$\begin{aligned} P_n(b; z) &= (z+1)P_{n-1}(b; z) - \alpha_n(b)zP_{n-2}(b; z), \\ Q_n(b; z) &= (z+1)Q_{n-1}(b; z) - \alpha_n(b)zQ_{n-2}(b; z), \end{aligned} \quad n \geq 1,$$

com $P_0(z) = 0$, $Q_0(b; z) = 1$, $P_1(b; z) = 1$ e $Q_1(b; z) = z+1$.

Assim, pelo Teorema 3.7, existe um funcional de momento $\mathcal{N}[b; \cdot]$, cujos momentos $\nu_n(b) = \mathcal{N}[b; z^{-n}]$ satisfazem a propriedade (3.29), tal que a sequência de polinômios $\{Q_n(b; z)\}_{n=0}^\infty$ é unicamente determinada por

$$\mathcal{N}[b; z^{-n+s}Q_n(z)] = \delta_{n,s}\tilde{\gamma}_n(b), \quad 0 \leq s \leq n,$$

onde $\tilde{\gamma}_n(b) = \nu_0(b)\alpha_2(b) \cdots \alpha_{n+1}(b)$, com $\nu_0(b) = 1$.

No entanto, neste caso particular,

$$\tilde{L}_0(z) = \sum_{s=0}^{\infty} -\nu_{s+1}z^s = {}_2F_1(1, -b+1; b+1; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1)_j}{(b+1)_j} \frac{(-b+1)_j}{j!} z^j.$$

Consequentemente, os momentos satisfazem $\nu_0(b) = 1$ e

$$\nu_{-n}(b) = -\nu_{n+1}(b) = \frac{(-b+1)_n}{(b+1)_n}, \quad n \geq 1. \quad (3.54)$$

Observe que, substituindo z por $1-z$, c por $2b$ e a por $-n$ na relação contígua (1.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{(2b+n)}{b+n} {}_2F_1(-n-1, b; 2b; 1-z) &= (1+z) {}_2F_1(-n, b; 2b; 1-z) \\ &\quad - \frac{n}{b+n} z {}_2F_1(-n+1, b; 2b; 1-z). \end{aligned} \quad (3.55)$$

De (3.55), segue que

$$Q_n(b; z) = \frac{(2b)_n}{(b)_n} {}_2F_1(-n, b; 2b; 1 - z), \quad n \geq 0.$$

Podemos, também, tomar $b = 0$ admitindo $\alpha_2(0) = 2$ e $\alpha_n(0) = 1$, $n \geq 3$, o que nos fornece $Q_n(0; z) = z^n + 1$, $n \geq 1$.

Agora, se considerarmos $Q_n(b; z)$ como sendo os polinômios para-ortogonais $Q_n^{(1)}(z)$, pelo Teorema 3.9, obtemos os coeficientes independentes dos polinômios tipo Szegő associados

$$S_n(b; 0) = a_n(b) = \frac{b}{b+n}, \quad n \geq 1. \quad (3.56)$$

De (3.56) e do Teorema 3.3, segue que $\alpha_{n+1}^{(2)} = \alpha_{n+1}(b+1)$. Disso e comparando as relações de recorrência de $Q_n(b+1, z)$ e $Q_n^{(2)}(z)$, obtemos

$$Q_n^{(2)}(z) = Q_n(b+1; z) = \frac{(2b+2)_n}{(b+1)_n} {}_2F_1(-n, b+1; 2b+2; 1-z), \quad n \geq 0.$$

Usando (3.19), temos

$$\begin{aligned} 2S_n(b, z) &= \frac{2b+n}{b+n} \frac{(2b)_n}{(b)_n} {}_2F_1(-n, b; 2b; 1-z) \\ &\quad + \frac{n}{b+n} \frac{(2b+2)_{n-1}}{(b+1)_{n-1}} {}_2F_1(-(n-1), b+1; 2b+2; 1-z), \end{aligned}$$

que nos fornece os polinômios tipo Szegő

$$S_n(b; z) = \frac{(2b+1)_n}{(b+1)_n} {}_2F_1(-n, b+1; 2b+1; 1-z), \quad n \geq 0,$$

com respeito ao funcional de momento $\mathcal{M}[b; \cdot]$, cujos momentos $\mu_n(b) = \mathcal{M}[b; t^{-n}]$, satisfazem

$$\mu_0(b) = 2 \quad \text{e} \quad \mu_n(b) = \mu_{-n}(b) = 2 \frac{(-b)_n}{(b+1)_n}, \quad n \geq 1.$$

Além disso, do Teorema 3.5, temos que os determinantes de Toeplitz associados satisfazem

$$\frac{\Delta_n(b)}{\Delta_{n-1}(b)} = 2 \frac{n! (2b+1)_n}{[(b+1)_n]^2} \neq 0, \quad n \geq 1,$$

com $\Delta_0(b) = 2$

A seguir enunciaremos um teorema que é análogo a um resultado encontrado em Hendriksen e Van Rossum [15].

Teorema 3.12. Para $\Re(b) > 0$, sejam

$$\mathcal{N}^{(1)}[b; f(z)] = \int_{\mathcal{C}} f(z) \omega^{(1)}(b; z) dz, \quad \mathcal{N}^{(2)}[b; f(z)] = \int_{\mathcal{C}} f(z) \omega^{(2)}(b; z) dz$$

e

$$\mathcal{M}[b; f(z)] = \int_{\mathcal{C}} f(z) \omega(b; z) dz,$$

onde $\mathcal{C} = \{e^{i\theta} : 0 < \theta < 2\pi\}$ e $(-z)^{-1}(1-z)\omega^{(1)}(b; z) = \omega(b; z) = (1-z)^{-1}\omega^{(2)}(b; z)$ com

$$\omega(b; z) = \frac{-1}{\pi i} \frac{[\Gamma(b+1)]^2}{\Gamma(2b+1)} (-z)^{-b-1} (1-z)^{2b}.$$

Os respectivos cortes no plano complexo $(-z)^{-b}$ e $(1-z)^{2b-1}$ são escolhidos na semi reta positiva. Então, $S_n(z) = S_n(b; z)$, $n \geq 0$, são os polinômios tipo Szegő mônicos definidos com respeito ao funcional de momento $\mathcal{M}[b; \cdot]$.

Os polinômios mônicos $Q_n^{(1)}(z) = Q_n(b; z)$ e $Q_n^{(2)}(z) = Q_n(b+1; z)$, $n \geq 0$, são os polinômios para-ortogonais associados satisfazendo a propriedade de L -ortogonalidade do Teorema 3.5 com respeito aos funcionais de momento $\mathcal{N}^{(1)}[b; \cdot]$ e $\mathcal{N}^{(2)}[b; \cdot]$, respectivamente.

Demonstração: Vamos mostrar que o funcional de momento da classe MS-tipo $\mathcal{M}[b; \cdot]$ tem a representação integral

$$\int_{\mathcal{C}} z^n \gamma(b) (-z)^{-b-1} (1-z)^{2b} dz, \quad (3.57)$$

onde $\gamma(b) = \frac{-1}{\pi i} \frac{[\Gamma(b+1)]^2}{\Gamma(2b+1)}.$

Suponhamos que

$$\mu_{-n} = \gamma(b)(-1)^{-b-1} \int_{\mathcal{C}} (z)^{n-b-1} (1-z)^{2b} dz, \quad n \geq 1. \quad (3.58)$$

Fazendo integração por partes em (3.58), obtemos

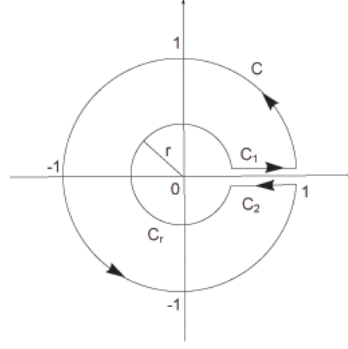
$$\mu_{-n} = \frac{(-b)_n}{(b+1)_n} \mu_0, \quad n \geq 1. \quad (3.59)$$

De (3.59), segue que

$$\mu_{-n} = 2 \frac{(-b)_n}{(b+1)_n} \frac{(b+1)_k}{2(-b)_k} \mu_{-k}, \quad n, k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.60)$$

Assim, se mostrarmos que $\mu_{-k} = 2 \frac{(-b)_k}{(b+1)_k}$ para algum valor particular de k , então

$$\mu_{-n} = 2 \frac{(-b)_n}{(b+1)_n}, \quad n \geq 1.$$

Figura 1: Curva Λ

Para $\Re(k-b) > 0$ e $\Re(b) > -\frac{1}{2}$, consideremos a curva Λ da Figura 1 e a integral da função $z^{k-b-1} (1-z)^{2b}$ sobre a curva Λ .

De (3.58), temos

$$\int_C z^{k-b-1} (1-z)^{2b} dz = \frac{\mu_{-k}}{\gamma(b)(-1)^{-b-1}}.$$

Além disso,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C(r)} z^{k-b-1} (1-z)^{2b} dz = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{C(1)} z^{k-b-1} (1-z)^{2b} dz + \int_{C(2)} (z)^{k-b-1} (1-z)^{2b} dz \right) \\ = (1 - e^{-i2\pi(b+1)}) \int_0^1 (y)^{k-b-1} (1-y)^{2b} dy. \end{aligned}$$

Como Λ é uma curva fechada e suave por partes

$$\int_{\Lambda} (z)^{k-b-1} (1-z)^{2b} dz = 0.$$

Assim, como

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} (z)^{k-b-1} (1-z)^{2b} dz &= \int_C (z)^{k-b-1} (1-z)^{2b} dz + \int_{C(r)} (z)^{k-b-1} (1-z)^{2b} dz \\ &+ \int_{C(1)} (z)^{k-b-1} (1-z)^{2b} dz + \int_{C(2)} (z)^{k-b-1} (1-z)^{2b} dz, \end{aligned}$$

usando a definição de função beta, a relação entre as funções beta e gama e a fórmula de reflexão de Euler, temos

$$\begin{aligned} \mu_{-k} &= \gamma(b) 2i \sin \pi b \int_0^1 (y)^{k-b-1} (1-y)^{2b} dy \\ &= \gamma(b) 2i \frac{\pi}{\Gamma(b)\Gamma(1-b)} \beta(k-b, 2b+1) \\ &= 2 \frac{(-b)_k}{(b+1)_k}, \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

conforme queríamos mostrar.

Agora, de (3.58), podemos observar que a representação integral segue também para μ_n . Assim, demonstramos que o funcional de momento $\mathcal{M}[b; \cdot]$ tem a representação integral (3.57).

De maneira análoga demonstra-se a representação integral para os funcionais de momento $\mathcal{N}^{(1)}[b; \cdot]$ e $\mathcal{N}^{(2)}[b; \cdot]$. ■

Podemos observar que a representação integral para $\mathcal{M}[b; \cdot]$ e $\mathcal{N}^{(2)}[b; \cdot]$ segue para $\Re(b) > -\frac{1}{2}$ e $\Re(b) > -1$, respectivamente.

Notemos, também, que tomando $z = e^{i\theta}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[b; f(z)] &= \frac{[\Gamma(b+1)]^2}{\pi\Gamma(2b+1)} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})^b(1 - e^{i\theta})^b d\theta \\ &= \frac{[\Gamma(b+1)]^2}{\pi\Gamma(2b+1)} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})^b(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})^b d\theta \\ &= \frac{2^{2b}}{\pi} \frac{[\Gamma(b+1)]^2}{\Gamma(2b+1)} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{2[\Re(b)+i\Im(b)]} d\theta. \end{aligned}$$

Assim, se b é real, então $S_n(b, z)$ são os polinômios de Szegő Gegenbauer (ver, por exemplo, Van Assche [30]).

Considerações Finais

Neste trabalho, conforme já dissemos, um de nossos objetivos foi estudar os polinômios tipo Szegő, ou seja, os polinômios mônicos inversos dos polinômios L-ortogonais associados ao funcional de momento da classe MS-tipo, cujos principais resultados estão resumidos no artigo: Szegő type polynomials and para-orthogonal polynomials, em co-autoria com A. Sri Ranga, J. H. McCabe e M. A. Piñar.

É interessante observar que, se tomarmos os momentos como sendo reais nas condições sob as quais os polinômios de Szegő são polinômios de Szegő com coeficientes de reflexão maiores que um em módulo ($\mu_{-n} = \bar{\mu}_n$, $n \geq 1$ e $(-1)^{n(n+1)/2} \Delta_n > 0$, $n \geq 0$), obtemos polinômios de Szegő reais, que é um caso particular dos polinômios tipo Szegő. Neste caso particular, temos informações sobre os zeros dos polinômios tipo Szegő (ver, por exemplo, Lamblém [20]). Não foi possível obter resultados sobre os zeros dos polinômios tipo Szegő como caso geral. No entanto, em outros aspectos encontramos resultados bem interessantes como, por exemplo, as condições sob as quais é possível obter polinômios tipo Szegő através de polinômios para-ortogonais.

Outros resultados interessantes são os exemplos de polinômios para-ortogonais e Szegő escritos em termos de funções hipergeométricas, a maneira explícita na qual escrevemos os funcionais de momento $\mathcal{N}^{(1)}[b; \cdot]$ e $\mathcal{N}^{(2)}[b; \cdot]$ da classe PO-tipo e o funcional $\mathcal{M}[b; \cdot]$ da classe MS-tipo e também suas representações integrais obtidas impondo condições sobre os parâmetros das funções hipergeométricas.

O estudo dos zeros dos polinômios tipo Szegő, como caso geral, levaria-nos a obter informações sobre os zeros dos polinômios hipergeométricos, dados como exemplos de polinômios tipo Szegő na seção 3.4 do Capítulo 3. O estudo dos zeros de polinômios hipergeométricos tem sido explorado com algumas restrições sobre os parâmetros, por exemplo, em Driver e Duren [10], [11], [12] e Driver e Jordaan [13].

Portanto, como desafio futuro, listamos duas propostas de trabalho. A primeira é

um estudo sobre os zeros dos polinômios tipo Szegő e, conseqüentemente, sobre os zeros dos polinômios hipergeométricos da seção 3.4 do Capítulo 3 deste trabalho. A segunda é um estudo sobre polinômios tipo Szegő e polinômios para-ortogonais em termos de funções hipergeométricas básicas (${}_2\phi_1(q^a, q^b; q^c; q; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q^a; q)_j (q^b; q)_j}{(q; q)_j (q^c; q)_j} z^j$). Alguns resultados interessantes com relação a segunda proposta já foram obtidos pelo nosso grupo de estudos, mas ainda há muito o que fazer, por isso, a continuidade a esses estudos é ainda um desafio futuro.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDREWS, G. E.; ASKEY, R.; ROY, R. **Special Functions**. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2000.
- [2] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F.; SRI RANGA, A. Another connection between orthogonal polynomials and L-orthogonal polynomials. **Mathematical Analysis and Applications**, v. 330, p. 114-132, 2007.
- [3] ANDRADE, E. X. L.; COSTA, M. S.; SRI RANGA, A. L-orthogonal polynomials associated with related measures. **Applied Numerical Mathematics**, v. 60, p. 1041-1052, 2010.
- [4] ANDRADE, E. X. L.; MCCABE, J.; SRI RANGA, A. Some consequences of symmetry in strong distributions. **Journal of Mathematical Analysis Applications**, v. 193, p. 158-168, 1995.
- [5] BRACCIALI, C. F.; LAMBLÉM, R. L.; MCCABE, J. H.; SRI RANGA, A. A characterization of L-orthogonal polynomials from three term recurrence relations. **Acta Applicandae Mathematicae**, v. 113, p. 1-16, 2011.
- [6] BRACCIALI, C. F.; MCCABE, J. H.; SRI RANGA, A. On a symmetry in strong distributions. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 105, p. 187-198, 1999.
- [7] CACHAFEIRO, A.; MARCELLÁN, F.; PÉREZ, C. Orthogonal polynomials with respect to the sum of Szegő arbitrary measure and Bernstein-Szegő measure. **Advances in Computational Mathematics**, v. 26, 2007.
- [8] CHIHARA, T. S. **An introduction to Orthogonal Polynomials**. Mathematics and its Applications Series, New York: Gordon and Breach, 1978.

- [9] COMMON, A. K.; MCCABE, J. H. The symmetric strong moment problem. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 67, p. 327-341, 1996.
- [10] DRIVER, K.; DUREN, P. Asymptotic zero distribution of hypergeometric polynomials. **Numerical Algorithms**, v. 21, p. 147-156, 1999.
- [11] DRIVER, K.; DUREN, P. Zeros of the hypergeometric polynomials $F(-n, b; 2b; z)$. **Indagationes Mathematicae**, v. 11, p. 43-51, 2000.
- [12] DRIVER, K.; DUREN, P. Trajectories of the zeros of hypergeometric polynomials $F(-n, b; 2b; z)$ for $b < -\frac{1}{2}$. **Constructive Approximation**, v. 17, p. 169-179, 2001.
- [13] DRIVER, K.; JORDAAN, K. Zeros of the hypergeometric polynomials $F(-n, b; c; z)$. **Algorithms for Approximation IV**, p. 436-445, 2008.
- [14] FREUD, G. **Orthogonal Polynomials**. New York: Pergamon Press, 1971.
- [15] HENDRIKSEN, E.; VAN ROSSUM, H. Orthogonal Laurent polynomials. **Indagationes Mathematicae** (ser. A), v. 48, p. 17-36, 1986.
- [16] HENRICI, P. **Applied and Computational Complex Analysis**. v. 1, New York: John Wiley and Sons, 1974.
- [17] JONES, W. B.; THRON, W. J. Continued Fractions: Analytic Theory and Applications. **Encyclopedia of Mathematics and its Applications**, 1980.
- [18] JONES, W. B.; NJÅSTAD, O.; THRON, W. J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle. **Bulletin of the London Mathematical Society**, v. 21, p. 113-152, 1989.
- [19] JONES, W. B.; THRON, W. J. **Continued Fractions Analytic Theory and Applications**. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, v.11, (Addison-Wesley, Reading, MA, 1980.
- [20] LAMBLÉM, R. L. **Polinômios de Szegő com Coeficientes de Reflexão Maiores que um em Módulo**. Dissertação (Mestrado) - IBILCE, UNESP, São José do Rio Preto, 2008.

- [21] LAMBLÉM, R. L., MCCABE, J. H., PIÑAR, M. A.; SRI RANGA, A. Szegő type polynomials and para-orthogonal polynomials. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 370, p. 30-41, 2010.
- [22] LORENTZEN, L.; WAADELAND, H. **Continued Fractions with Applications**. North-Holland, 1992.
- [23] SLATER, L.J. **Generalized Hypergeometric Functions**. Cambridge at the university Press, 1966.
- [24] SRI RANGA, A. Symmetric orthogonal polynomials and the associated orthogonal L-polynomials. **Proceedings of the American Mathematical Society** , v. 123, p. 3135-3141, 1995.
- [25] SIMON, B. **Orthogonal Polynomials on the Unit Circle**. Pat 1. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 54, part 1, Providence, RI, 2004.
- [26] SIMON, B. **Orthogonal Polynomials on the Unit Circle**. Pat 2. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 54, part 2, Providence, RI, 2004.
- [27] SZEGŐ, G. **Orthogonal Polynomials**. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 23, Providence, RI, USA, 1975.
- [28] SZEGŐ, G. Über Beiträge zur theorie der toeplitzschen formen. **Mathematische Zeitschrift** , v. 6, p. 167-202, 1920. MR1544404.
- [29] SZEGŐ, G. Über Beiträge zur theorie der toeplitzschen formen, II. **Mathematische Zeitschrift** , v. 9, p. 167-190, 1921. MR15444062.
- [30] VAN ASSCHE, W. Orthogonal polynomials in the complex plane and the real line. **Special Functions, q-series and Related Topics**, M. E. H. Ismail et al., Ed., Field Institute Communications, American Mathematical Society, v. 14, p. 211-245, 1997.
- [31] VINET, L.; ZHEDANOV, A. Szegő polynomials on the real axis. **Linear Algebra and Applied**, v. 8, p. 149-164, 1999.
- [32] WALL, H. S. **Analytic Theory of Continued Fractions**. American Mathematical Society, 1948.