



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**

Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Câmpus de Presidente Prudente

# Soluções numéricas de escoamentos viscoelásticos complexos com viscosidade dependendo da pressão

Maria Carolina Barbosa de Souza

Orientadora: Profa. Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Setembro de 2020



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Soluções numéricas de escoamentos  
viscoelásticos complexos com viscosidade  
dependendo da pressão**

Maria Carolina Barbosa de Souza

Orientadora: Profa. Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Setembro de 2020

S729s

Souza, Maria Carolina Barbosa de

Soluções numéricas de escoamentos viscoelásticos complexos com viscosidade dependendo da pressão / Maria Carolina Barbosa de Souza. -- Presidente Prudente, 2020

81 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente

Orientadora: Gilcilene Sanchez de Paulo

1. Modelos viscoelásticos. 2. Viscosidade dependendo da pressão. 3. Diferenças finitas. 4. Método da projeção. 5. Escoamento de Poiseuille. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Soluções numéricas de escoamentos viscoelásticos complexos com viscosidade dependendo da pressão

**AUTORA: MARIA CAROLINA BARBOSA DE SOUZA**

**ORIENTADORA: GILCILENE SANCHEZ DE PAULO**

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:

Profa. Dra. GILCILENE SANCHEZ DE PAULO

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

**VIDEOCONFERÊNCIA**

Prof. Dr. FERNANDO LUIZ PIO DOS SANTOS

Departamento de Bioestatística / Instituto de Biociências de Botucatu

**VIDEOCONFERÊNCIA**

Prof. Dr. CÁSSIO MACHIAVELI OISHI

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Presidente Prudente, 30 de setembro de 2020

*Aos meus pais, meus amigos e meu amor.*

---

# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha orientadora Profa. Dra. Gilcilene, que desde a graduação sempre me inspirou e me serviu de guia nesta jornada, acreditando em mim até quando eu mesma não acreditava.

Ao Fernando Pacanelli, que me amparou diversas vezes, sempre de maneira muito solícita, paciente e compreensiva, como por exemplo, quando me ensinou a usar o cluster e fez o Freeflow funcionar no meu computador durante a pandemia mesmo depois de 72 e-mails.

A todos os meus companheiros de Mestrado, em especial ao Luiz Haines que me ajudou sempre que pedia socorro.

Ao meu companheiro Thiago que, em conjunto com minha família, me aguentou durante todo este tempo, fazendo de tudo para que sobrasse tempo para que eu pudesse estudar, e não menos importante ajudando-me a manter a sanidade mental.

Às minhas amigas que sempre me deram apoio moral, em especial a Ariane que me auxilia muito com o português que, como todos que me conhecem sabem, não é o meu forte.

A minha chefe Adalgisa, que sempre me apoiou e me deu forças para continuar, financiou o meu curso de inglês, me liberou para fazer as aulas, ir em palestras, estudar nas semanas difíceis, sem descontar um centavo do meu pagamento e ainda promovia momentos de descontração quando percebia que não estava bem, sem o seu apoio sei que isso teria sido impossível.

A Univesp pelo apoio financeiro.

Por fim, o meu muito obrigada a todos que me ajudaram nessa jornada desde a graduação até os dias atuais.

*"Se é de batalhas  
Que se vive a vida  
Tente outra vez!"*  
***Raul Seixas***

# Resumo

---

A presente dissertação de Mestrado se insere na área de simulação numérica de escoamentos complexos de fluidos viscoelásticos. Este trabalho considera uma modelagem bidimensional para escoamentos isotérmicos de fluidos viscoelásticos em que a viscosidade varia de acordo com a pressão a fim de realizar estudos numéricos para o problema do canal e da cavidade. O modelo viscoelástico modificado, pela modelagem da viscosidade em função da pressão, é o modelo FENE-CR (*Finite Extendable Non-linear Elastic – Chilcott and Rallison*). Uma modelagem exponencial da viscosidade com relação a pressão é adotada, conforme proposta na literatura existente. O método numérico utilizado é baseado no método da projeção para desacoplar velocidade e pressão nas equações de Navier-Stokes e, posteriormente calcula-se o tensor conformação pela equação constitutiva na forma diferencial. As equações são discretizadas em uma malha deslocada do tipo MAC (*Marker-And-Cell*) pela técnica de diferenças finitas, predominantemente aproximações de ordem 2 para as derivadas espaciais, para os tensores a integração temporal foi realizada pelo método Runge-Kutta (RK) de ordem 2. Os resultados numéricos gerados a partir do modelo viscoelástico usual FENE-CR, em conjunto com os resultados do modelo viscoelástico em que a viscosidade aumenta exponencialmente com a pressão são comparados para destacar a influência e relevância dessa modelagem pouco utilizada. Tais simulações evidenciaram o aumento das forças no escoamento para a nova modelagem proposta, além do decaimento do erro ao utilizar malhas mais refinadas.

Palavras-Chave: Modelos viscoelásticos, Viscosidade dependendo da pressão, Diferenças finitas, Método da projeção, Escoamento de Poiseuille, Problema da Cavidade.



# Abstract

---

This Master's thesis takes part in the area of numerical simulation of complex viscoelastic fluid flows. This work considers a two-dimensional modeling for isothermal viscoelastic fluids flow where the viscosity varies according to the pressure in order to perform numerical studies for the channel and lid-driven cavity flow problems. The viscoelastic model to be modified by the modeling of viscosity as a function of pressure is the FENE-CR model (Finite Extendable Nonlinear Elastic - Chilcott and Rallison). An exponential modeling of pressure-dependent viscosity is adopted, as proposed in the existent literature. The numerical method used is based on the projection method to decouple velocity and pressure in the Navier-Stokes equations, after which the conformation tensor is calculated by the constitutive equation in the differential form. The equations are discretized in a Marker-And-Cell (MAC) grid by the finite difference technique, predominantly second order approximations for spatial derivatives, RK2 for conformation tensor A. The numerical results obtained from the usual FENE-CR viscoelastic model and from the viscoelastic model whose viscosity increases exponentially according to the pressure are compared to highlight the influence and relevance of this underused modeling. These simulations evidenced a rise on the forces of the flow for the new modelling proposal, moreover, the error decay as refined meshes are employed.

Keywords: *Viscoelastic Modelling, Pressure Dependet Viscosity, Finite Difference, Projection Method, Poiseuille Flow, Lid-driven Cavity Flow.*



---

## Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                                       |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Exemplos ilustrativos do comportamento da tensão de cisalhamento para fluidos newtonianos e não-newtonianos em função da taxa de deformação. .        | 20 |
| 2.1  | Exemplos ilustrativos para a extensibilidade das moléculas. . . . .                                                                                   | 25 |
| 2.2  | Gráfico da comparação do termo $(1 - \beta)$ com a equação da viscosidade polimérica em função da pressão. . . . .                                    | 30 |
| 3.1  | Representação de uma célula deslocada. . . . .                                                                                                        | 34 |
| 3.2  | Classificação das células em um domínio computacional para um escoamento confinado. . . . .                                                           | 34 |
| 4.1  | Esboço e dimensões da geometria para o escoamento de Poiseuille. . . . .                                                                              | 41 |
| 4.2  | Refinamento da malha computacional para o escoamento de Poiseuille: (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. . . . .                            | 42 |
| 4.3  | Refinamento da malha computacional para o escoamento de Poiseuille: (a) Tensor $T^{xx}$ . (b) Tensor $T^{xy}$ . . . . .                               | 43 |
| 4.4  | Comparação do modelo usual FENE-CR e o modelo com a viscosidade variando exponencialmente com a pressão, com $\gamma = 1.0E^{-3}Pa^{-1}$ . . . . .    | 46 |
| 4.5  | Variação do Coeficiente $\gamma$ para $Re = 0.1$ : (a) Componente $u$ da velocidade. (b) Pressão. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . . | 47 |
| 4.6  | Variação do Coeficiente $\gamma$ para $Re = 0.5$ : (a) Componente $u$ da velocidade. (b) Pressão. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . . | 48 |
| 4.7  | Variação do Coeficiente $\gamma$ para $Re = 1.0$ : (a) Componente $u$ da velocidade. (b) Pressão. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . . | 49 |
| 4.8  | Variação do $Re$ para $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . .       | 50 |
| 4.9  | Variação do $Re$ para $\gamma = 1.0E^{-6}$ : (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . .       | 51 |
| 4.10 | Variação do $Wi$ para $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . .       | 52 |
| 4.11 | Variação do $Wi$ para $\gamma = 1.0E^{-6}$ : (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . .       | 53 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.12 | Comparação do modelo FENE-CR <i>Standard</i> e o modelo com a viscosidade variando exponencialmente com a pressão, com $EL = 0.05$ para $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . .                                                                              | 54 |
| 4.13 | Comparação do modelo FENE-CR <i>Standard</i> e o modelo com a viscosidade variando exponencialmente com a pressão, com $EL = 1.0$ para $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . .                                                                               | 55 |
| 4.14 | Comparação do modelo FENE-CR <i>Standard</i> e o modelo com a viscosidade variando exponencialmente com a pressão, com $EL = 5.0$ para $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . .                                                                               | 56 |
| 4.15 | Variação do Parâmetro $L$ para $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . .                                                                                                                                                                                       | 57 |
| 4.16 | Variação do Parâmetro $L$ para $\gamma = 1.0E^{-6}$ : (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . .                                                                                                                                                                                       | 58 |
| 4.17 | Variação do Parâmetro $\beta$ para $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . .                                                                                                                                                                                   | 59 |
| 4.18 | Variação do Parâmetro $\beta$ para $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Pressão. (b) Componente $u$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . . . . .                                                                                                                                                                                   | 60 |
| 4.19 | Esboço e dimensões da cavidade com tampa móvel . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 61 |
| 4.20 | Configuração das células para a tampa da cavidade. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 62 |
| 4.21 | Refinamento de malha em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com $Wi = 0.01$ , $Re = 10.0$ , $\beta = 0.1$ , $L = 100$ e $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Componente $u$ da velocidade. (b) Componente $v$ da velocidade. (c) Tensor $T^{xx}$ . (d) Tensor $T^{xy}$ . (e) Tensor $T^{yy}$ . . . . . | 63 |
| 4.22 | Comparação do modelo <i>Standard</i> e o modelo com a viscosidade variando com a pressão para cavidade com $\gamma = 1.0E^{-5}$ em $y = 0.5$ e $0 \leq x \leq 1$ : (a) Componente $u$ da velocidade. (b) Componente $v$ da velocidade. . . . .                                                                                                 | 64 |
| 4.23 | Comparação do modelo <i>Standard</i> e o modelo com a viscosidade variando com a pressão para cavidade com $\gamma = 1.0E^{-5}$ em $y = 0.5$ e $0 \leq x \leq 1$ : (a) Pressão. (b) Tensor $T^{xx}$ . (c) Tensor $T^{xy}$ . (d) Tensor $T^{yy}$ . . . . .                                                                                      | 65 |
| 4.24 | Variação de $\gamma$ em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com $Wi = 0.15$ , $Re = 0.05$ , $\beta = 0.1$ e $L = 100$ : (a) Componente $u$ da velocidade. (b) Componente $v$ da velocidade. . . . .                                                                                          | 66 |
| 4.25 | Variação de $\gamma$ em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com $Wi = 0.15$ , $Re = 0.05$ , $\beta = 0.1$ e $L = 100$ : (a) Tensor $T^{xx}$ . (b) Zoom tensor $T^{xx}$ . (c) Tensor $T^{xy}$ . (d) Zoom tensor $T^{xy}$ . (e) Tensor $T^{yy}$ . (f) Zoom tensor $T^{yy}$ . . . . .           | 67 |
| 4.26 | Linhas de corrente em uma cavidade utilizando o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão: (a) $Re = 0.01$ . (b) $Re = 100$ . para $\gamma = 1.0E^{-5}$ . . . . .                                                                                                                                                      | 68 |

- 4.27 Variação de  $Re$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0,01$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Componente  $v$  da velocidade. . . . . 69
- 4.28 Variação de  $Re$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0,01$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Tensor  $T^{xx}$ . (b) *Zoom* tensor  $T^{xx}$ . (c) Tensor  $T^{xy}$ . (d) *Zoom* tensor  $T^{xy}$ . (e) Tensor  $T^{yy}$ . (f) *Zoom* tensor  $T^{yy}$ . . . . . 70
- 4.29 Linhas de corrente em uma cavidade utilizando o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão: (a)  $Wi = 0.01$ . (b)  $Wi = 0.15$ . para  $\gamma = 1.0E^{-5}$ . . . . . 71
- 4.30 Variação de  $Wi$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Re = 0,25$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Componente  $v$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ . (e) Tensor  $T^{yy}$ . . . . . 72
- 4.31 Variação de  $L$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0.01$ ,  $Re = 0,01$ ,  $\beta = 0.1$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Componente  $v$  da velocidade. . . . . 73
- 4.32 Variação de  $L$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0.01$ ,  $Re = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Tensor  $T^{xx}$ . (b) *Zoom* tensor  $T^{xx}$ . (c) Tensor  $T^{xy}$ . (d) Tensor  $T^{yy}$ . . . . . 74
- 4.33 *Zoom* das linhas de corrente no canto inferior esquerdo de uma cavidade utilizando o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão. . . . . 75
- 4.34 Variação de  $\beta$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0.01$ ,  $Re = 0.01$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Componente  $v$  da velocidade. . . . . 75
- 4.35 Variação de  $\beta$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0.01$ ,  $Re = 0.01$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Tensor  $T^{xx}$ . (b) Tensor  $T^{xy}$ . (c) Tensor  $T^{yy}$ . . . . . 76



---

## Lista de Tabelas

|     |                                                  |    |
|-----|--------------------------------------------------|----|
| 4.1 | Definição das malhas e dos refinamentos. . . . . | 42 |
| 4.2 | Erro Relativo. . . . .                           | 43 |
| 4.3 | Ordem de convergência espacial. . . . .          | 44 |
| 4.4 | Malhas computacionais para Cavidade. . . . .     | 62 |



---

## Lista de Siglas

CFL: *Courant-Friedrichs-Lewy*

EE: Euler Explícito

EDP: Equações Diferenciais Parciais

EI: Euler Implícito

FENE-CR: *Finite Extendable Non-linear Elastic - Chilcott and Rallison*

GENSMAC: *Generalized Simplified Marker-and-Cell*

MAC: *Marker-and-Cell*

MF: Mecânica dos Fluidos

MFC: Mecânica dos Fluidos Computacionais

NS: Navier-Stokes

RK: Runge-Kutta

SMAC: *Simplified Marker-and-Cell*



---

# Sumário

|                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Resumo</b>                                                             | <b>5</b>  |
| <b>Abstract</b>                                                           | <b>7</b>  |
| <b>Lista de Figuras</b>                                                   | <b>8</b>  |
| <b>Lista de Tabelas</b>                                                   | <b>11</b> |
| <b>Lista de Siglas</b>                                                    | <b>15</b> |
| <b>1 Introdução</b>                                                       | <b>19</b> |
| <b>2 Modelagem Matemática</b>                                             | <b>23</b> |
| 2.1 Equações Governantes . . . . .                                        | 23        |
| 2.1.1 Equação Constitutiva FENE-CR . . . . .                              | 24        |
| 2.1.2 Modelo da viscosidade variando com a pressão . . . . .              | 26        |
| 2.2 Adimensionalização . . . . .                                          | 27        |
| 2.2.1 Adimensionalização das equações . . . . .                           | 29        |
| 2.3 Condições de Fronteira . . . . .                                      | 31        |
| 2.3.1 Condições de contorno rígido . . . . .                              | 31        |
| 2.3.2 Condições de contorno no injetor . . . . .                          | 32        |
| 2.3.3 Condições de contorno no ejetor . . . . .                           | 32        |
| <b>3 Modelagem Numérica</b>                                               | <b>33</b> |
| 3.1 Malha computacional . . . . .                                         | 33        |
| 3.2 Método baseado no Método da Projeção . . . . .                        | 35        |
| 3.3 Algoritmo Computacional e discretização temporal . . . . .            | 36        |
| 3.4 Breve descrição sobre a discretização espacial das equações . . . . . | 38        |
| 3.4.1 Condição CFL ( <i>Courant-Friedrichs-Lewy</i> ) . . . . .           | 39        |
| <b>4 Resultados Numéricos</b>                                             | <b>41</b> |

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.1      | Verificação da Metodologia . . . . .                               | 41        |
| 4.2      | Escoamento de Poiseuille . . . . .                                 | 44        |
| 4.2.1    | Comparação entre os Modelos . . . . .                              | 45        |
| 4.2.2    | Variação do Coeficiente da Viscosidade Dependendo da Pressão . . . | 45        |
| 4.2.3    | Variação do Número de Reynolds . . . . .                           | 50        |
| 4.2.4    | Variação do Número de Weissenberg . . . . .                        | 52        |
| 4.2.5    | Variação do Número de Elasticidade . . . . .                       | 54        |
| 4.2.6    | Variação do Parâmetro de Extensibilidade . . . . .                 | 57        |
| 4.2.7    | Variação do Parâmetro $\beta$ . . . . .                            | 59        |
| 4.3      | Cavidade . . . . .                                                 | 61        |
| 4.3.1    | Refinamento de Malha: verificação qualitativa . . . . .            | 62        |
| 4.3.2    | Comparação entre os Modelos . . . . .                              | 64        |
| 4.3.3    | Variação do Coeficiente da Viscosidade Dependendo da Pressão . . . | 66        |
| 4.3.4    | Variação do Número de Reynolds . . . . .                           | 68        |
| 4.3.5    | Variação do Número de Weissenberg . . . . .                        | 71        |
| 4.3.6    | Variação do Parâmetro de Extensibilidade . . . . .                 | 73        |
| 4.3.7    | Variação do Parâmetro $\beta$ . . . . .                            | 75        |
| <b>5</b> | <b>Conclusão</b>                                                   | <b>77</b> |
|          | <b>Referências</b>                                                 | <b>77</b> |

# Introdução

Vários fenômenos da natureza podem ser representados por modelos matemáticos, desde os mais simples problemas presentes em nosso cotidiano até os mais complexos envolvendo fenômenos físicos, de modo que quando o modelo representa o problema de forma criteriosa, é possível obter informações importantes sobre o episódio em questão.

A representação do comportamento dos fluidos por modelos matemáticos, obteve notoriedade no século XIX, a partir dos trabalhos de Claude Navier [22], Simeon Poisson [28] e George Stokes [29], nos quais as equações de Navier-Stokes (NS) surgiram, possibilitando sua reformulação a partir das propriedades do fluido e do escoamento.

Contudo, buscar formas para solucionar essas modelagens ainda é um desafio para os matemáticos, em razão de que estes fenômenos são descritos por Equações Diferenciais Parciais (EDP's) que envolvem termos não-lineares. Logo, garantir a existência e a unicidade de tais modelos de forma teórica é extremamente complexo e frequentemente impraticável, mesmo que fisicamente o problema aparenta ser bem definido.

A Mecânica dos Fluidos (MF) se encontra neste cenário, onde a teoria é muito complexa e a realização de experimentos pode gerar custos exorbitantes, além de que em muitos casos a reprodução em laboratório é inviável, mesmo que em escala reduzida, tornando assim a Mecânica dos Fluidos Computacionais (MFC) viável e sendo amplamente utilizada desde a segunda metade do século XX, com o advento da informática, pois apesar dos erros envolvidos como em qualquer técnica numérica, é possível melhorar os resultados deixando-os mais precisos, desde que se esteja ciente dos custos computacionais envolvidos, de modo que, caso seja bem estudado, é extremamente vantajoso pelo “baixo custo” e a possibilidade de repetição dos experimentos.

Ao usar as equações de NS, o entendimento sobre as propriedades do fluido é essencial para o estudo de sua dinâmica, dentre estas temos a viscosidade ( $\eta$ ), uma propriedade física que pode ser definida como a resistência de um fluido ao escoamento, ou seja, quanto maior for a viscosidade, menor será a velocidade com que o fluido se movimenta dada uma mesma força para gerar o escoamento. Os fluidos que possuem essa constante de proporcionalidade, na relação  $\left(\tau = \eta \frac{du}{dy}\right)$  entre a taxa de deformação do fluido  $\left(\frac{du}{dy}\right)$  e a tensão cisalhante ( $\tau$ ), onde  $u$  utilizado para velocidade do escoamento e  $y$  a distância perpendicular entre as placas, são denominados fluidos Newtonianos. Desta forma, os fluidos cuja viscosidade varia de acordo com as condições do escoamento são designados como fluidos não-Newtonianos, a Figura (1.1) exemplifica tal relação.

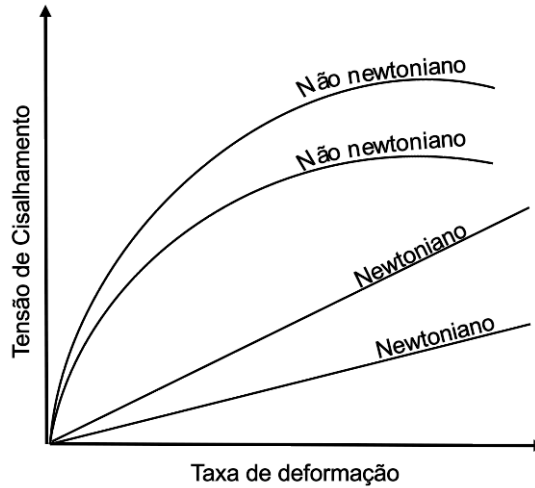


Figura 1.1: Exemplos ilustrativos do comportamento da tensão de cisalhamento para fluidos newtonianos e não-newtonianos em função da taxa de deformação.

Os fluidos não-Newtonianos apresentam comportamento mais complexos, a viscosidade pode ser influenciada por diversas variáveis, como a taxa de cisalhamento, taxa de elongação, temperatura e pressão, por exemplo. Embora a variação da viscosidade com a taxa de cisalhamento ou a variação de temperatura sejam as mais difundidas na área, uma abordagem bastante atual é o conceito da viscosidade dependendo da pressão. Na literatura é possível encontrar estudos recentes referentes ao tema abordado, tais como Marušić-Paloka [20] e Kalogirou [19] que fez esta análise para os fluidos newtonianos no escoamento de Poiseuille, a comunidade científica vem difundindo tal abordagem através do estudo teórico da solução analítica, como é possível ver em [16, 17], em Hron [18] é possível ver um estudo amplo das diferentes possibilidades de aplicações de tal formulação, porém ainda há muitas questões em aberto na comunidade científica pela carência de estudos deste tema.

Stokes, em 1845, reconheceu em [29] a existência de uma relação entre a viscosidade e a pressão. Posteriormente, Barus ([4],[5]) mostrou experimentalmente o crescimento da viscosidade com o aumento da pressão e sugeriu modelagens exponencial e linear, dadas respectivamente por,

$$\eta(p) = \eta_0 e^{\gamma p}, \quad (1.1)$$

$$\eta(p) = \eta_0 (1 + \gamma p), \quad (1.2)$$

onde  $\eta(p)$  é a viscosidade à uma pressão  $p$  acima do ambiente,  $\eta_0$  é a viscosidade a uma pressão de referência,  $\gamma$  é uma constante com unidade  $Pa^{-1}$  e  $p$  é a pressão expressa em  $Pa$ .

Logo, o presente trabalho tem por objetivo analisar numericamente o comportamento de escoamentos viscoelásticos bidimensionais (2D) de fluidos incompressíveis e isotérmicos descritos pelo modelo FENE-CR com variação da viscosidade polimérica com a pressão, com foco na comparação dos resultados obtidos pelo modelo *Standard* [8] (que não considera o efeito da viscosidade variando com a pressão).

Para desacoplar a velocidade e a pressão das equações de Navier-Stokes foi utilizada a ideia do método da projeção, e, de modo segregado, foi adicionado o tratamento da equação constitutiva do tensor não-Newtoniano. Nas equações governantes são resolvidas pela técnica de diferenças finitas e a discretização é feita em uma malha deslocada, pelo

método Marker-And-Cell (MAC) [21], obtendo simulações numéricas do problema de interesse.

Esta nova modelagem e os estudos numéricos realizados neste trabalho foram implementados no Sistema Freeflow2D [21], que é um pacote computacional de alto desempenho que encontra-se bem desenvolvido e robusto para simulação de escoamentos Newtonianos e não-Newtonianos complexos com ou sem interfaces móveis. O interessante é que esta plataforma permite que o usuário insira novas rotinas, escritas em linguagem C de programação, possibilitando a este modelar, simular e visualizar os escoamentos. Neste trabalho, para a etapa de pós-processamento dos dados foi utilizado o software ParaView. O ParaView é uma aplicação multiplataforma, *open-source*, desenvolvida para visualização de dados, capaz de utilizar memória distribuída e compartilhada, podendo assim trabalhar tanto com conjunto pequeno quanto um conjunto muito grande de dados [1, 3].

Os conteúdos estudados estão divididos em capítulos e estruturados da seguinte maneira: Capítulo 2 - modelagem matemática, define as equações que descrevem o modelo estudado, além da adimensionalização das equações ; Capítulo 3 - modelagem numérica, apresenta o tipo de malha computacional utilizada, em conjunto com o algoritmo computacional; Capítulo 4 - resultados e em seguida a conclusão.



# Modelagem Matemática

## 2.1 Equações Governantes

As equações de Navier-Stokes tem como objetivo modelar o escoamento de um fluido, traduzindo para a linguagem matemática os princípios físicos. Logo, assumindo o escoamento como isotérmico e incompressível, as equações que descrevem este escoamento são as equações da continuidade (2.1) e da conservação da quantidade de movimento (2.2), apresentadas na forma conservativa [12] por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) = \nabla \cdot \sigma, \quad (2.2)$$

sendo as variáveis  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}$ , em coordenadas cartesianas bidimensionais, é o vetor velocidade,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $t$  o tempo e  $\sigma$  o tensor tensão total definido por

$$\sigma = -p\mathbf{I} + \mathbf{T} + \mathbf{T}_N, \quad (2.3)$$

no qual  $p = p(x, y, t)$  é a pressão,  $\mathbf{I}$  é o operador identidade e  $(\mathbf{T} + \mathbf{T}_N)$  carrega as informações da viscoelasticidade do fluido, sendo  $\mathbf{T}_N = 2\eta_s \mathbf{D}$  o tensor Newtoniano, onde  $\eta_s$  é a viscosidade do solvente e  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger]$  é o tensor deformação, em que  $\nabla \mathbf{u}$  em coordenadas cartesianas bidimensionais é expresso da seguinte maneira

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

e  $\mathbf{T}$  é o tensor não-Newtoniano, a parcela com a contribuição viscoelástica do fluido.

Ao aplicarmos o divergente em (2.3), substituímos em (2.2) e considerarmos a hipótese (2.1) obtemos

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) = -\nabla p + \eta_s \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T}. \quad (2.5)$$

Neste trabalho, nos restringiremos à simplificação de resolver numericamente apenas problemas planares. Assim, adotaremos as equações (2.1) e (2.5) em coordenadas cartesianas bidimensionais, escrevendo-as como o sistema (2.6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

### 2.1.1 Equação Constitutiva FENE-CR

#### Equação de Evolução do Tensor Conformação

Para modelar a viscoelasticidade do fluido, será utilizado neste trabalho o modelo FENE-CR em termos do tensor conformação  $\mathbf{A}$ . A equação de evolução para o tensor conformação [8] é dada por

$$\lambda \overset{\nabla}{\mathbf{A}} = -f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - I), \quad (2.7)$$

sendo  $\overset{\nabla}{\mathbf{A}}$  a derivada convectiva do tensor conformação. O tensor não-Newtoniano, ou tensor extra-tensão, é obtido explicitamente pela expressão algébrica de Kramers [6]

$$\mathbf{T} = \frac{\eta_p}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - I), \quad (2.8)$$

sendo  $\lambda$  o tempo de relaxação do fluido e  $\eta_p$  a viscosidade do polímero.

Considerando a definição da derivada convectiva e substituindo em (2.7), obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^t \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - I). \quad (2.9)$$

Isolando a derivada temporal obtém-se a equação de evolução do tensor conformação na forma dimensional,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - I), \quad (2.10)$$

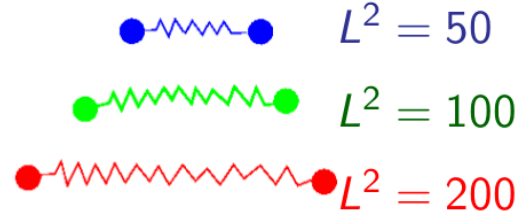
sendo  $f$  a função que depende do traço de  $\mathbf{A}$ , dada no modelo FENE-CR por

$$f(tr(\mathbf{A})) = \frac{L^2}{L^2 - tr(\mathbf{A})}, \quad (2.11)$$

em que  $L$  é o parâmetro de extensibilidade das moléculas do fluido, ou seja, afere os efeitos elongacionais das moléculas, de modo que se a distância entre as moléculas for alta o valor de  $L$  também será, como observa-se na ilustração da Figura 2.1.



(a) Ilustração de uma molécula.  
Fonte: www.gettyimages.pt .



(b) Esboço da extensibilidade das moléculas.

Figura 2.1: Exemplos ilustrativos para a extensibilidade das moléculas.

Note que podemos reescrever a equação (2.11) por

$$f(\text{tr}(\mathbf{A})) = \frac{1}{1 - \frac{\text{tr}(\mathbf{A})}{L^2}}. \quad (2.12)$$

Logo, quanto maior  $L$  mais próximo de 1 a função se aproxima, passando assim a ser o modelo Oldroyd-B [25].

Considerando  $\nabla \mathbf{u}$  como em (2.4), permite-nos assim escrever cada termo da equação supracitada (2.10) na forma cartesiana bidimensional, procedendo como a seguir:

$$\nabla \cdot (\mathbf{uA}) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \begin{bmatrix} A^{xx} & A^{xy} \\ A^{xy} & A^{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + A^{xx} \frac{\partial v}{\partial y} & A^{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + A^{xy} \frac{\partial v}{\partial y} \\ A^{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + A^{xy} \frac{\partial v}{\partial y} & A^{yy} \frac{\partial u}{\partial x} + A^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} A^{xx} & A^{xy} \\ A^{xy} & A^{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + A^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} & A^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + A^{xy} \frac{\partial v}{\partial y} \\ A^{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + A^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} & A^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + A^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

$$(\nabla \mathbf{u})^\dagger \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{xx} & A^{xy} \\ A^{xy} & A^{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + A^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} & A^{xy} \frac{\partial u}{\partial x} + A^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \\ A^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + A^{xy} \frac{\partial v}{\partial y} & A^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + A^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Sendo assim, pode-se substituir (2.13), (2.14) e (2.15) em (2.10), a hipótese (2.1) permite a simplificação de alguns termos, obtendo então

$$\frac{\partial A^{xx}}{\partial t} = -\frac{\partial(uA^{xx})}{\partial x} - \frac{\partial(vA^{xx})}{\partial y} + 2 \left( A^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + A^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(A^{xx} - 1) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial A^{xy}}{\partial t} = -\frac{\partial(uA^{xy})}{\partial x} - \frac{\partial(vA^{xy})}{\partial y} + A^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + A^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(A^{xy}), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial A^{yy}}{\partial t} = -\frac{\partial(uA^{yy})}{\partial x} - \frac{\partial(vA^{yy})}{\partial y} + 2 \left( A^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + A^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(A^{yy} - 1). \quad (2.18)$$

### Equação do Tensor extra-tensão

Como vimos anteriormente, a equação do tensor extra-tensão na forma dimensional é dada pela equação

$$\mathbf{T} = \frac{\eta_p}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}). \quad (2.19)$$

Pelo fato de neste trabalho estarmos avaliando casos bidimensionais, temos que o  $T^{zz} = T^{xz} = T^{yz} = 0$ . Sendo assim, temos que

$$\begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} & 0 \\ T^{xy} & T^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\eta_p}{\lambda} f(tr(\mathbf{A})) \begin{bmatrix} A^{xx} - 1 & A^{xy} & A^{xz} \\ A^{xy} & A^{yy} - 1 & A^{yz} \\ A^{xz} & A^{yz} & A^{zz} - 1 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Logo,

$$T^{xx} = \frac{\eta_p}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(A^{xx} - 1), \quad (2.21)$$

$$T^{xy} = \frac{\eta_p}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))A^{xy}, \quad (2.22)$$

$$T^{yy} = \frac{\eta_p}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(A^{yy} - 1). \quad (2.23)$$

Conjuntamente o sistema (2.20) permite concluir que  $A^{xz} = A^{yz} = 0$  e  $A^{zz} = 1$ , pois  $\frac{\eta_p}{\lambda} \neq 0$  e  $f(tr(A)) \neq 0$ . Logo,  $tr(\mathbf{A}) = 1 + A^{xx} + A^{yy}$ .

Até o presente momento, apresentamos as equações do modelo FENE-CR, o qual denominaremos por FENE-CR *Standard*. Nas próximas seções, apresentaremos a modelagem da viscosidade polimérica em função da pressão e como essa modelagem se insere no FENE-CR *Standard*.

#### 2.1.2 Modelo da viscosidade variando com a pressão

Seguindo a proposta da literatura, sinalizando que a viscosidade polimérica varia de acordo com a pressão, a equação constitutiva para o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão é dada por

$$\mathbf{T} = \frac{\eta_p(p)}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (2.24)$$

sendo  $\eta_p(p)$  dada pela equação da viscosidade dependendo da pressão (1.2) sugerida por Barus,

$$\eta_P(p) = \eta_P(p_{ref}) e^{\gamma(p-p_{ref})}, \quad (2.25)$$

sendo  $p_{ref}$  a pressão de referência.

O tempo de relaxação  $\lambda$  também deveria ser modelado de acordo com a pressão, entretanto, neste trabalho faremos uma simplificação, considerando apenas a modelagem da viscosidade.

## 2.2 Adimensionalização

Nesta seção abordaremos o estudo da adimensionalização de equações dimensionais, permitindo desta maneira otimizar os recursos e o tempo utilizado. Isto ocorre pois a grandeza adimensional expressa apenas o valor numérico, facilitando assim a repetição de experimentos com diferentes características físicas [12].

As escalas de grandezas utilizadas para o escoamento de um fluido são  $H$ ,  $U$ ,  $\eta$  e  $\rho$ , que representam, respectivamente, o comprimento, a velocidade, a viscosidade do escoamento e a densidade do fluido.

Sendo assim, as variáveis adimensionais apresentadas ao longo deste trabalho, estão relacionadas com as seguintes variáveis dimensionais (retratadas com índice  $*$ ) :

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_*}{H}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_*}{U}, \quad t = \frac{t_* U}{H}, \quad p = \frac{p_*}{\rho U^2}, \quad \gamma = \gamma_* \rho U^2, \quad \mathbf{T} = \frac{\mathbf{T}_*}{\rho U^2}. \quad (2.26)$$

Em consequência é possível realizar o agrupamento de algumas variáveis, formando os números adimensionais, segue abaixo alguns destes:

- Número de Reynolds ( $Re$ ): razão entre as forças inerciais e as forças viscosas operantes no escoamento

$$Re = \frac{\rho U H}{\eta_0} = \frac{U H}{\nu_0}, \quad (2.27)$$

sendo  $\eta_0$  é:

(i) a viscosidade total , para o modelo FENE-CR *Standard*:

$$\eta_0 = \eta_S + \eta_P .$$

(ii) a viscosidade total a uma pressão de referência para o modelo FENE-CR que considera a influência da pressão sobre a viscosidade polimérica:

$$\eta_0 = \eta_S + \eta_P(p_{ref}) .$$

Neste trabalho, adotou-se  $p_{ref} = 0$ . A viscosidade cinemática é dada por  $\nu_0 = \frac{\eta_0}{\rho}$

Observe que o número de Reynolds mostra a importância das forças inerciais ( $Re > 1$ ) e das forças viscosas ( $Re < 1$ ) para o escoamento.

- Número de Weissenberg ( $Wi$ ): razão entre a escala de tempo do fluido e escala de tempo do escoamento

$$Wi = \frac{\lambda U}{H}. \quad (2.28)$$

Note que  $Wi$  caracteriza um fluido viscoelástico, ou seja, quanto maior  $Wi$  mais intensa é a viscoelasticidade do fluido.

- Parâmetro  $\beta$ : razão entre a viscosidade do solvente com a viscosidade total do fluido

$$\beta = \frac{\eta_S}{\eta_0}. \quad (2.29)$$

Note que  $\beta$  está no intervalo  $(0, 1)$  e fornece o controle sobre a contribuição do solvente Newtoniano, ou seja, quanto menor  $\beta$ , menor a quantidade de solvente adicionada ao fluido viscoelástico.

A partir da equação (2.29) tem-se que

$$\eta_S = \beta \eta_0. \quad (2.30)$$

Em particular, para os casos (i) e (ii), tem-se respectivamente:

$$\eta_P = (1 - \beta) \eta_0, \quad (2.31)$$

e

$$\eta_P(p_{ref}) = (1 - \beta) \eta_0. \quad (2.32)$$

De fato, faremos a manipulação algébrica para o caso (ii), seguindo de maneira análoga o caso (i),

$$\beta = \frac{\eta_S}{\eta_0} = \frac{\eta_S + \eta_P(p_{ref}) - \eta_P(p_{ref})}{\eta_0} = \frac{\eta_0 - \eta_P(p_{ref})}{\eta_0} = 1 - \frac{\eta_P(p_{ref})}{\eta_0}, \quad (2.33)$$

e, portanto, obtém-se a equação (2.32).

- Função  $N_P$ : é a função viscosidade polimérica que varia de acordo com a pressão na forma adimensional. É definida pela razão entre a viscosidade do polímero e a viscosidade total do fluido, dada por

$$N_P(p) = \frac{\eta_P(p)}{\eta_0}, \quad (2.34)$$

onde  $\eta_0$  é dado por (ii) e  $\eta_P$  é dada por (2.25).

- Número de Elasticidade ( $EL$ ): razão entre o números de  $Re$  e  $Wi$

$$EL = \frac{Wi}{Re}. \quad (2.35)$$

Expressa a importância dos efeitos elásticos a efeitos inerciais. Brujan [7] menciona que conforme a velocidade do escoamento aumenta, os efeitos elásticos se tornam mais fortes causando o aumento de ( $Wi$ ). Entretanto, o número Reynolds ( $Re$ ) aumenta da mesma maneira, de modo que os efeitos inerciais também se tornam mais importantes.

A seguir, as equações governantes serão reescritas de acordo com os parâmetros de adimensionalização exibidos nesta seção.

### 2.2.1 Adimensionalização das equações

#### Equação do Momento e Equação da Continuidade

Temos que a equação (2.5) após a substituição das grandezas dimensionais pelas adimensionais no processo de adimensionalização, é dado por

$$\frac{U^2}{L} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right) = \frac{U^2}{L} \left( -\nabla p + \frac{\eta_s}{\rho UL} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T} \right). \quad (2.36)$$

Logo, substituindo pelos números adimensionais, temos que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (2.37)$$

que conjuntamente com a equação da continuidade em coordenadas cartesianas bidimensionais, admite a forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.38)$$

#### Equação de Evolução do Tensor Conformação $\mathbf{A}$

Para a equação de evolução do tensor dada por (2.10), temos que após o processo de adimensionalização passará a ser escrito da forma

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (2.39)$$

ou ainda, em coordenadas cartesianas bidimensionais,

$$\frac{\partial A^{xx}}{\partial t} = -\frac{\partial(uA^{xx})}{\partial x} - \frac{\partial(vA^{xx})}{\partial y} + 2 \left( A^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + A^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{A}))(A^{xx} - 1) \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial A^{xy}}{\partial t} = -\frac{\partial(uA^{xy})}{\partial x} - \frac{\partial(vA^{xy})}{\partial y} + A^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} + A^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{A}))(A^{xy}), \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial A^{yy}}{\partial t} = -\frac{\partial(uA^{yy})}{\partial x} - \frac{\partial(vA^{yy})}{\partial y} + 2 \left( A^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + A^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{A}))(A^{yy} - 1) \quad (2.42)$$

#### Equação da Viscosidade Dependendo da Pressão

Considere a equação (2.25) da viscosidade dependendo da pressão observada na subseção 2.1.2. Como a unidade de medida de  $\gamma$  é inversa a unidade de medida da pressão, o expoente da modelagem não sofre nenhuma alteração para a escrita adimensional. Vamos então, normalizar a viscosidade polimérica pela viscosidade total, dividindo ambos os membros por  $\eta_0$ , obtendo,

$$N_P(p) = \frac{\eta_P(p)}{\eta_0} = \frac{\eta_P(p_{ref})}{\eta_0} e^{\gamma(p-p_{ref})}. \quad (2.43)$$

Substituindo a equação (2.32) na última igualdade obtemos assim,

$$N_P(p) = (1 - \beta)e^{\gamma(p-p_{ref})}. \quad (2.44)$$

Portanto,  $N_P(p)$ , como expresso na equação (2.44), representa a modelagem da viscosidade polimérica em função da pressão na forma adimensional. A Figura 2.2 a seguir apresenta a importância do parâmetro  $\gamma$  para a nova modelagem, pois tal parâmetro provoca o crescimento da viscosidade no escoamento.

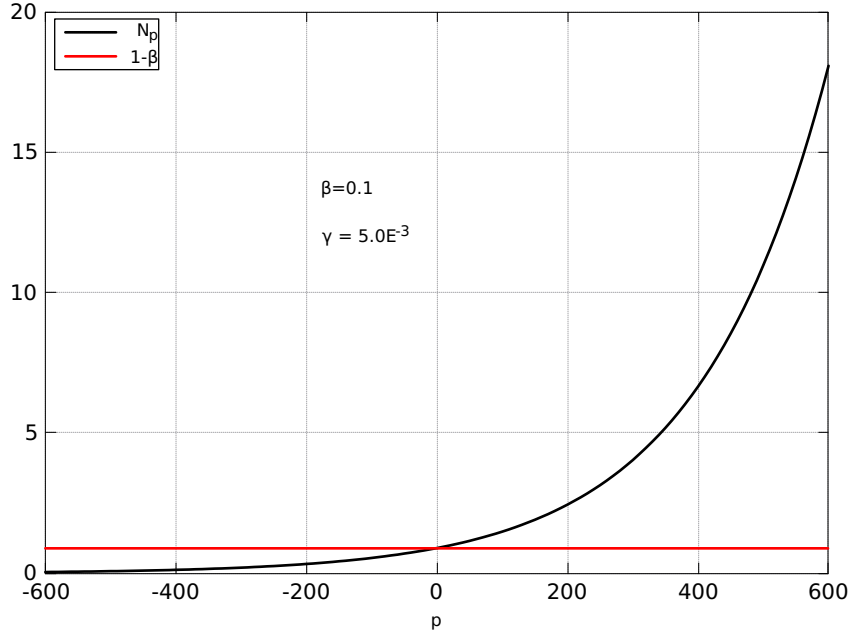


Figura 2.2: Gráfico da comparação do termo  $(1 - \beta)$  com a equação da viscosidade polimérica em função da pressão.

### Equação do Tensor $\mathbf{T}$

A equação constitutiva para o modelo FENE-CR *Standard* dada por

$$\mathbf{T}_* = \frac{\eta_p}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}). \quad (2.45)$$

Trocando a grandeza dimensional pela adimensional, temos que

$$\mathbf{T}\rho U^2 = \frac{\eta_p}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}). \quad (2.46)$$

Multiplicando o lado direito da equação por  $L/L$ , em seguida substituindo a igualdade (2.32), e por fim isolando  $\mathbf{T}$ , a equação (2.46), pode ser reescrita como segue

$$\mathbf{T} = \frac{(1 - \beta)}{ReWi} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}). \quad (2.47)$$

Atenção que a equação (2.47) corresponde a modelagem usual do tensor  $\mathbf{T}$  para o modelo FENE-CR. A seguir, será desenvolvido em detalhes os cálculos para adimensio-

nalização do tensor  $\mathbf{T}$  quando se considera a modelagem da viscosidade polimérica em função da pressão.

Dada a equação (2.24) em que a viscosidade polimérica varia de acordo com a pressão, como

$$\mathbf{T}_* = \frac{\eta_p(p)}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}) . \quad (2.48)$$

Para a adimensionalização, vamos utilizar a primeira igualdade da equação (2.43) em que vale  $\eta_p(p) = N_P(p)\eta_0$ , e então, temos que:

$$\mathbf{T}_\rho U^2 = \frac{N_P(p)\eta_0}{\lambda} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}) , \quad (2.49)$$

e de maneira análoga a anterior, obtém-se

$$\mathbf{T} = \frac{N_P(p)}{ReWi} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}). \quad (2.50)$$

Por simplicidade, pode-se unir as duas modelagens, FENE-CR *Standard* e FENE-CR com viscosidade polimérica dependendo da pressão, na própria equação (2.50), com a seguinte ressalva na equação (2.44)

$$N_P(p) = (1 - \beta)e^{\theta\gamma(p-p_{ref})} , \quad (2.51)$$

em que variável  $\theta$  é uma variável binária que aciona os casos requeridos:

$\theta = 0$  obtemos o modelo FENE-CR *Standard* (ver eqs. (2.51), (2.47) e (2.50)), e

$\theta = 1$  introduzimos a nova modelagem (ver eqs. (2.51), (2.50) e (2.44)).

Observe também, que se  $\gamma = 0$  a nova modelagem simplifica-se ao FENE-CR *Standard*.

## 2.3 Condições de Fronteira

Como buscamos que o modelo tenha solução única para os sistemas lineares gerados deve-se adicionar condições auxiliares ao sistema de equações, dentre elas temos as condições iniciais (que nos fornece informações sobre o início do problema estudado) e as condições de fronteira (que disponibiliza informações sobre as bordas do domínio).

Neste trabalho será adotada a condição inicial nula para a velocidade  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Conforme descrito na seção 2.1.1, o tensor conformação  $\mathbf{A}$  será inicializado pelo tensor identidade,  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ .

Para explicitação do tema, será apresentado a seguir com maior descrição os tipos de condições de fronteiras mais comuns na literatura [23, 27] e também utilizadas neste trabalho.

### 2.3.1 Condições de contorno rígido

As células das paredes rígidas que possuem contato com o fluido necessitam de imposição de condições de fronteira. Logo, para que a fronteira seja impermeável, a componente

normal da velocidade deve ser nula por toda extensão da mesma

$$u_{\vec{n}} = 0. \quad (2.52)$$

Além da condição *no-slip* que é empregada com o propósito de aderir o fluido à fronteira, tomando a velocidade tangencial nula

$$u_{\vec{t}} = 0. \quad (2.53)$$

Para o calculo dos tensores foi utilizado uma extrapolação de ordem 2.

### 2.3.2 Condições de contorno no injetor

A fronteira do injetor é a encarregada da entrada do fluido no domínio, onde a velocidade normal será igual a velocidade de entrada do fluido no escoamento, além da velocidade tangencial que será nula, ou seja, a fronteira estará em repouso

$$u_{\vec{n}} = u_{inflow}, \quad (2.54)$$

$$u_{\vec{t}} = 0. \quad (2.55)$$

Conjuntamente com o tensor conformação, que para termos a tensão nula devemos impor que  $\mathbf{A}=\mathbf{I}$ .

### 2.3.3 Condições de contorno no ejeto

A fronteira do ejeto é a encarregada da saída do fluido do domínio, impondo então a condição de Neumann homogênea para a velocidade e para o tensor

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \vec{n}} = \mathbf{0}, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \vec{n}} = \mathbf{0}. \quad (2.57)$$

# Modelagem Numérica

Este Capítulo traz comentários sobre o desacoplamento da velocidade e pressão nas equações do momento e sobre a discretização das equações pelo método de diferenças finitas em uma malha deslocada. O método utilizado no presente trabalho é inspirado no método *Marker-and-Cell* (MAC), que foi desenvolvido por Harlow e Welch [15] que difundiu o uso de malha deslocada e o uso de partículas marcadoras para identificar a posição do fluido o que resolveu algumas dificuldades na discretização dos escoamentos incompressíveis. Em [14], Harlow e Amsden sugeriram o método *Simplified MAC* (SMAC) eliminando os problemas das condições de fronteira para a equação de Poisson e reduzindo o custo computacional. Posteriormente, a metodologia *Generalized Simplified Marker-and-Cell* (GENSMAC), apresentada por Tomé e Mackee [30], que tem como principal característica armazenar apenas as partículas que descrevem a superfície livre, foi sendo melhorada do ponto de vista de métodos numéricos bem como aplicações [21, 23, 24, 27, 31]. De certa forma, o presente trabalho vem contribuir com a comunidade científica estendendo-se as funcionalidades do FREEFLOW2D, possibilitando simulações de fluidos viscoelásticos incorporando os efeitos da pressão na viscosidade do fluido.

## 3.1 Malha computacional

Ao contrário do que parece, a escolha de uma malha adequada para o escoamento pode se tornar mais complexa do que calcular o próprio escoamento do fluido, principalmente quando se trata de regiões com obstáculos, quinas ou tridimensionais.

Neste trabalho, as equações resultantes são discretizadas utilizando o método de diferenças finitas a partir de uma malha euleriana, onde  $\delta x = \delta y$ , ou seja, tem-se uma malha de espaçamento uniforme, onde as componentes da velocidade  $u$  e  $v$  são aproximadas nos pontos  $(i + \frac{1}{2}, j)$  e  $(i, j + \frac{1}{2})$ , respectivamente.

Como podemos ver na Figura 3.1, as células do escoamento são deslocadas, onde as componentes  $\mathbf{u}$  são calculadas no centro da face da célula e as outras grandezas ( $\phi$ ) são calculadas no centro da célula.

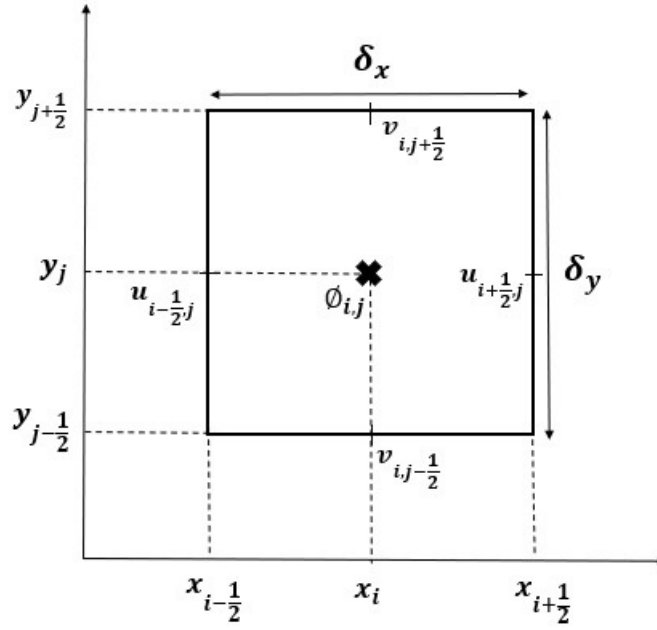


Figura 3.1: Representação de uma célula deslocada.

Como foi supracitado o conceito do método GENSMAC permite visualizar e localizar a superfície do fluido, portanto, é possível resolver escoamentos com superfícies livres através desta metodologia. Entretanto, para este trabalho, vamos nos restringir aos casos de escoamentos confinados.

Desta forma, é dada a seguir a classificação das células conforme a posição do fluido, a Figura 3.2 ilustra a classificação das células no domínio computacional para o escoamento confinado em um canal bidimensional.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | O |
| I | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F | O |
| I | F | F | F | F | F | F | F | F | F | F | O |
| B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | O |

Figura 3.2: Classificação das células em um domínio computacional para um escoamento confinado.

Tal classificação é feita da seguinte maneira:

- Células vazias **E**: *empty* - são as células que não possuem fluido em seu interior;
- Células cheias **F**: *full* - são as células que estão cheias de fluido e que não possuem faces em comum com células vazias (**E**);
- Células de superfície **S**: *surface* - são as células que contém fluido e possuem pelo menos uma face em contato com célula vazia (**E**);
- Células de fronteira **B**: *boundary* - são as células do contorno rígido;

- Células do injetor **I**: *inflow* - são as células de entrada do fluido no domínio;
- Células do ejetor **O**: *outflow* - são as células de saída do fluido.

Para o presente trabalho não teremos os casos de células **S** ou **E**.

## 3.2 Método baseado no Método da Projeção

Como foi visto anteriormente, as equações que descrevem um escoamento de um fluido viscoelástico incompressível e isotérmico, considerando as equações do tipo FENE-CR que inclui também os efeitos da pressão na viscosidade, são dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{T} = \frac{N_P(p)}{ReWi} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}), \quad (3.2)$$

$$f(tr(\mathbf{A})) = \frac{L^2}{L^2 - tr(\mathbf{A})}, \quad (3.3)$$

$$N_P(p) = (1 - \beta)e^{\theta(\gamma p)}, \quad (3.4)$$

conjuntamente com as equações da continuidade e da quantidade de movimento (2.1) e (2.37).

A formulação para este problema estudado é baseada no método da projeção, originalmente proposto por Chorin [9] e Temam [32]. A ideia central é desacoplar velocidade e pressão nas equações de Navier-Stokes e resolver essas variáveis separadamente, respaldado pelo Teorema da Decomposição de Helmholtz-Hodge.

### Teorema 1 (Decomposição de Helmholtz-Hodge)

Seja  $\Omega$  uma região com fronteira suave  $\partial\Omega$  e  $\tilde{\mathbf{u}}$  um campo vetorial definido em  $\Omega$ . Nestes termos, a decomposição de  $\tilde{\mathbf{u}}$  na forma

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \nabla \psi, \quad (3.5)$$

existe e é única, sendo  $\psi$  um campo escalar também definido em  $\Omega$ . Já o campo vetorial  $\mathbf{u}$  é solenoidal e paralelo a  $\partial\Omega$ , isto é,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.6)$$

e, ao longo de  $\partial\Omega$

$$\mathbf{u} \cdot \vec{n} = 0, \quad (3.7)$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor normal a  $\partial\Omega$ .

A demonstração do Teorema 1 pode ser visto em [9].

Desta forma, o método tem como essência determinar um campo de velocidade intermediária  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Utilizando a formulação semi-implícita proposta por Oishi [23], temos então

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \nabla \tilde{p} + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad (3.8)$$

com  $p \neq \tilde{p}$ , sendo  $\tilde{p}$  o campo de tentativa.

Como  $\tilde{\mathbf{u}}$  não necessariamente é solenoidal, aplica-se o divergente no Teorema 1, expresso na equação (3.5),

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla^2 \psi. \quad (3.9)$$

Da equação da continuidade (3.6), tem-se que  $\psi$  é determinada pela equação de Poisson

$$\nabla^2 \psi = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3.10)$$

sendo (3.11) a condição de fronteira nos contornos rígidos e no *inflow* e (3.12) a condição de fronteira para o *outflow*

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (3.11)$$

$$\psi = 0. \quad (3.12)$$

Após determinado  $\psi$ , a velocidade  $u$  pode ser calculada pela expressão abaixo

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} - \nabla \psi. \quad (3.13)$$

Logo, aplicando a equação (3.13) em (3.8), depois de discretizada por diferenças finitas de forma semi-implícita e comparando com a equação (2.37), obtém-se a atualização para o campo de pressão

$$p = \tilde{p} + \frac{\psi}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \psi, \quad (3.14)$$

sendo  $\delta t$  o espaçamento temporal.

### 3.3 Algoritmo Computacional e discretização temporal

Este algoritmo é baseado no trabalho [27].

**Passo 1:** obter os valores para  $\mathbf{A}$  e o tensor extra-tensão  $\mathbf{T}$ , note que (3.1) pode ser escrito como

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{A}), \quad (3.15)$$

onde,

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{A}) = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{Wi} f(tr(\mathbf{A}))(\mathbf{A} - \mathbf{I}). \quad (3.16)$$

Logo, aplicando primeiro passo do Runge-Kutta de ordem 2, em (3.15), podemos calcular o tensor conformação  $\bar{\mathbf{A}}^{n+1}$  por:

$$\bar{\mathbf{A}}^{n+1} = \mathbf{A}^n + \delta t \mathbf{F}(\mathbf{u}^n, \mathbf{A}^n), \quad (3.17)$$

sendo  $\delta t$  o espaçamento temporal.

Em seguida, podemos calcular o tensor  $\bar{\mathbf{T}}^{n+1}$

$$\bar{\mathbf{T}}^{n+1} = \frac{N_P(p^n)}{ReWi} f(tr(\bar{\mathbf{A}}^{n+1}))(\bar{\mathbf{A}}^{n+1} - \mathbf{I}). \quad (3.18)$$

**Passo 2:** calcular uma velocidade provisória  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  usando o método implícito, seguindo os passos do método da projeção visto na seção 3.2.

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u})^n - \nabla \tilde{p}^{n+1} + \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}^{n+1}. \quad (3.19)$$

Para  $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$  utiliza-se as mesmas condições de fronteira de  $\mathbf{u}^{n+1}$ ,  $p^n$  será uma aproximação para  $\tilde{p}^{n+1}$ . Desta forma, obtém-se assim um sistema linear da forma  $\mathcal{A}\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = b$ , onde  $\mathcal{A}$  é uma matriz simétrica e esparsa,  $\tilde{\mathbf{u}}$  é o vetor incógnita velocidade intermediária e  $b$  a matriz dos termos independentes, podendo então resolver o sistema linear pelo método dos gradientes conjugados.

**Passo 3:** resolver a equação de Poisson para  $\psi^{n+1}$

$$\nabla^2 \psi^{n+1} = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}. \quad (3.20)$$

Nas células próximas ao contorno rígido e ao *inflow* consideramos a condição de contorno do tipo Neumann, discretizando  $\psi$  por diferenças centradas, em conjunto para o *outflow* considera-se (3.12). Deste modo, obtemos um sistema linear do tipo  $\mathcal{B}\psi = c$ , onde  $\mathcal{B}$  é uma matriz simétrica e esparsa dada pelos coeficientes,  $\psi$  é o vetor dado pelo campo escalar e  $c$  a matriz dos termos independentes, que também se resolve pelo método dos gradientes conjugados.

**Passo 4:** calcular a velocidade final pela equação

$$\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \nabla \psi^{n+1}. \quad (3.21)$$

**Passo 5:** calcular a pressão final resolvendo a equação

$$p^{n+1} = p^n + \frac{\psi^{n+1}}{\delta t} - \frac{\beta}{Re} \nabla^2 \psi^{n+1}. \quad (3.22)$$

**Passo 6:** calcular a viscosidade dependendo da pressão  $N_P(p^{n+1})$

$$N_P(p^{n+1}) = (1 - \beta)e^{\theta(\gamma p^{n+1})}. \quad (3.23)$$

Observe que para  $\theta = 1$  introduz-se a nova modelagem considerando a viscosidade variando com a pressão e para  $\theta = 0$  obtém-se o modelo FENE-CR *Standard*. Também é possível observar que quando  $\gamma = 0$  a nova modelagem recai na usual.

**Passo 7:** último passo do Runge-Kutta de ordem 2

$$\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n + \frac{\delta t}{2} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{u}^n, \mathbf{A}^n) + \mathbf{F}(\mathbf{u}^{n+1}, \bar{\mathbf{A}}^{n+1}) \right], \quad (3.24)$$

$$\mathbf{T}^{n+1} = \frac{N_P(p^n)}{ReWi} f(tr(\mathbf{A}^{n+1}))(\mathbf{A}^{n+1} - \mathbf{I}). \quad (3.25)$$

As condições de contorno vão sendo atualizadas durante este processo.

### 3.4 Breve descrição sobre a discretização espacial das equações

Nesta seção iremos comentar sobre as discretizações espaciais das equações (3.15) - (3.23) descritas utilizando o método de diferenças finitas e analisando conjuntamente na seção 3.3 os contornos.

A discretização para a equação da continuidade procedeu-se utilizando diferenças centradas na célula computacional na coordenada  $(i, j)$ .

A equação da quantidade de movimento na direção  $x$ , para a variável  $u$ , é avaliada na posição  $(i + \frac{1}{2}, j)$ , e na direção  $y$ , para a variável  $v$ , a discretização é realizada na posição  $(i, j + \frac{1}{2})$ , ou seja, avaliando as equações na face em que a componente está localizada. Os termos convectivos estão sendo aproximados pelo método CUBISTA [2]. Basicamente, as outras derivadas espaciais destas equações são discretizadas por diferenças finitas de ordem 2, sendo o gradiente de pressão e os termos difusivos discretizados por diferenças centradas. A discretização do divergente dos tensores segue conforme posição da célula no domínio. No interior domínio nas células **[F]** tratamos o cálculo dos tensores em três casos:

- Caso 1 - Células centrais: quando a célula **[F]** tem apenas células **[F]** em sua vizinhança. Desta forma, os tensores são discretizados utilizando diferenças centradas, note que o tensor não possui valor armazenado na face da célula, desta forma é feita uma aproximação por média aritmética das quatro células de sua vizinhança.
- Caso 2 - Células com vizinhança à direita ou superior: quando a célula **[F]** tem células do tipo **[B]**, **[I]** ou **[O]** em contato a direita ou na parte superior a célula. Assim, os tensores são discretizados utilizando diferença atrasada, e analogamente é feito uma média aritmética nos pontos centrais das duas células de sua vizinhança.
- Caso 3 - Células com vizinhança à esquerda ou inferior: quando a célula **[F]** tem células do tipo **[B]**, **[I]** ou **[O]** em contato a esquerda ou na parte inferior a célula. Logo, utiliza-se na discretização dos tensores diferença avançada, e de forma análoga é feito uma média dos dois pontos de sua vizinhança.

A equação de evolução para o tensor conformação é avaliada na posição  $(i, j)$ . Os termos convectivos também são aproximados pelo método CUBISTA, os termos que possuem derivadas cruzadas  $\left(\frac{\partial u}{\partial y} \text{ ou } \frac{\partial v}{\partial x}\right)$  são discretizados também utilizando diferenças centradas. Note que cada uma destas componentes da velocidade não possui valor armazenado na face da célula. Desta forma, é feito uma média aritmética das quatro células de sua vizinhança, exceto nos casos em que a face da célula **[F]** é uma interface de contorno **[I]** ou **[B]**, em que a velocidade tangencial nesta interface é tomada como zero.

Como o método CUBISTA é utilizado para os termos convectivos na equação de evolução para o tensor é necessário conhecer os valores do tensor no centro das células de contorno (**[I]**, **[O]** ou **[B]**). No caso do tensor no injetor utilizamos uma média aritmética para extrapolar o valor do tensor,  $\mathbf{A}|_{[I]} = 2\mathbf{I} - \mathbf{A}|_{[F]}$ , distintivamente do ejetor, que considera as condições de Neumann como visto em 2.3.3 utiliza-se diferença centrada para determinar os tensores. Nas células **[B]** utiliza-se extrapolação de ordem 2, por exemplo o caso de um contorno rígido paralelo ao eixo  $-x$  como sendo uma parede inferior,

$$\mathbf{A}_{i,j} = 3\mathbf{A}_{i,j+1} - 3\mathbf{A}_{i,j+2} + \mathbf{A}_{i,j+3}. \quad (3.26)$$

Dado que a equação de Poisson é utilizada para determinar  $\psi$ , a discretização da mesma é feita utilizando-se diferenças centradas de segunda ordem para as células **[F]**, para as células que tem como vizinhança as condições de contorno do tipo **[B]** ou **[I]**, dispõe da condição de contorno do tipo Neumann  $\psi$  que será discretizada por diferenças centradas na face da célula **[F]**. Porém para as células em contato com **[O]**, utiliza-se a condição (3.12).

A utilização do método da projeção faz com que tenhamos que resolver a equação da velocidade solenoidal (3.21) e campo de pressão (3.22), em que utiliza-se diferenças centradas para as derivadas envolvendo  $\psi$ .

Para maiores detalhes de todas as configurações juntamente com ilustrações ver [26].

### 3.4.1 Condição CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*)

A equação é (3.2), do Passo 2, mostra que a discretização temporal é na verdade semi-implícita, pois os termos convectivos são considerados no tempo  $t_n$ . Desta forma, é necessário respeitar a condição CFL, dada por

$$\delta t_{CFL} = \min\{\delta t_{CFL_x}, \delta t_{CFL_y}\}, \quad (3.27)$$

sendo,

$$\delta t_{CFL_x} \leq \frac{\delta x}{\max\{|u^n|\}} \quad \text{e} \quad \delta t_{CFL_y} \leq \frac{\delta y}{\max\{|v^n|\}}, \quad (3.28)$$

ao longo das direções  $x$  e  $y$  respectivamente.



## Resultados Numéricos

Neste Capítulo serão estudados o escoamento de Poiseuille e o problema da cavidade. Foi realizada uma verificação qualitativa e quantitativa da metodologia numérica, conjuntamente com a análise dos resultados para um fluido viscoelástico capturando a influência da pressão na viscosidade. A plataforma de simulação utilizada foi o FreeFlow2D, que possibilitou a comparação dos dados obtidos com o modelo FENE-CR *Standard* e do modelo proposto. Para o pós processamento de dados foi utilizado o *software* ParaView 5.8.0. As simulações foram realizadas utilizando o cluster disponibilizado pela Unesp, processador  $2 \times$  Intel (R) Xeon(R) E5-2690 - 2,90 GHz e  $4 \times$  8GB RAM DDR3 ECC de memória.

### 4.1 Verificação da Metodologia

As simulações numéricas, para investigar computacionalmente o problema proposto, foram realizadas considerando um escoamento de Poiseuille. Um esboço com as dimensões do canal é apresentado na Figura 4.1 seguinte.

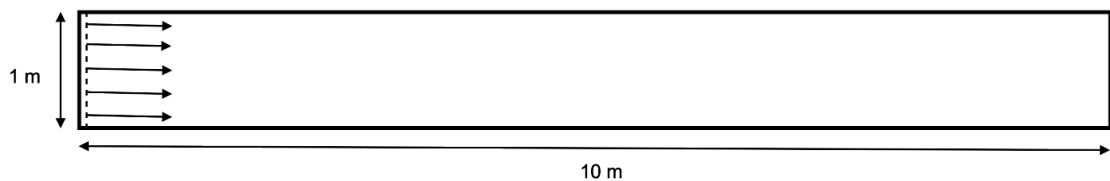


Figura 4.1: Esboço e dimensões da geometria para o escoamento de Poiseuille.

Para esta simulação foram adotados os seguintes parâmetros:

- Viscosidade cinemática de referência ( $\nu_0 = \frac{\eta_0}{\rho}$ ):  $1.0 \text{ m}^2/\text{s}$ ;
- Velocidade média do escoamento ( $U$ ):  $1.0 \text{ ms}^{-1}$ ;
- Comprimento característico do escoamento ( $H$ ):  $1 \text{ m}$ ;
- Tempo final ( $t_{\text{stop}}$ ):  $150 \text{ s}$ ;

- Espaçamento temporal ( $dt$ ):  $1E^{-4}$ ;
- Número de Weissenberg ( $Wi$ ): 0.1;
- Número de Reynolds ( $Re$ ): 1.0;
- Parâmetro ( $\beta$ ): 0.1;
- Parâmetro de extensibilidade ( $L$ ): 100;
- Coeficiente da viscosidade dependendo da pressão ( $\gamma$ ):  $2.0E^{-6}\text{Pa}^{-1}$ .

Para as simulações numéricas serão consideradas cinco malhas com  $dx = dy$ , conforme a Tabela 4.1 seguinte.  $M_5$  será adotada como a malha com solução de referência para o escoamento viscoelástico modelado pela equação constitutiva FENE-CR com viscosidade em função da pressão, possibilitando assim a realização da análise de convergência da solução numérica.

Tabela 4.1: Definição das malhas e dos refinamentos.

| Malha | Células           | Espaçamento ( $dx = dy$ ) |
|-------|-------------------|---------------------------|
| $M_1$ | $100 \times 10$   | 0.1                       |
| $M_2$ | $200 \times 20$   | 0.05                      |
| $M_3$ | $400 \times 40$   | 0.025                     |
| $M_4$ | $800 \times 80$   | 0.0125                    |
| $M_5$ | $1600 \times 160$ | 0.00625                   |

Comparações qualitativas dos resultados nas malhas supracitadas são mostradas nas Figuras 4.2 e 4.3.

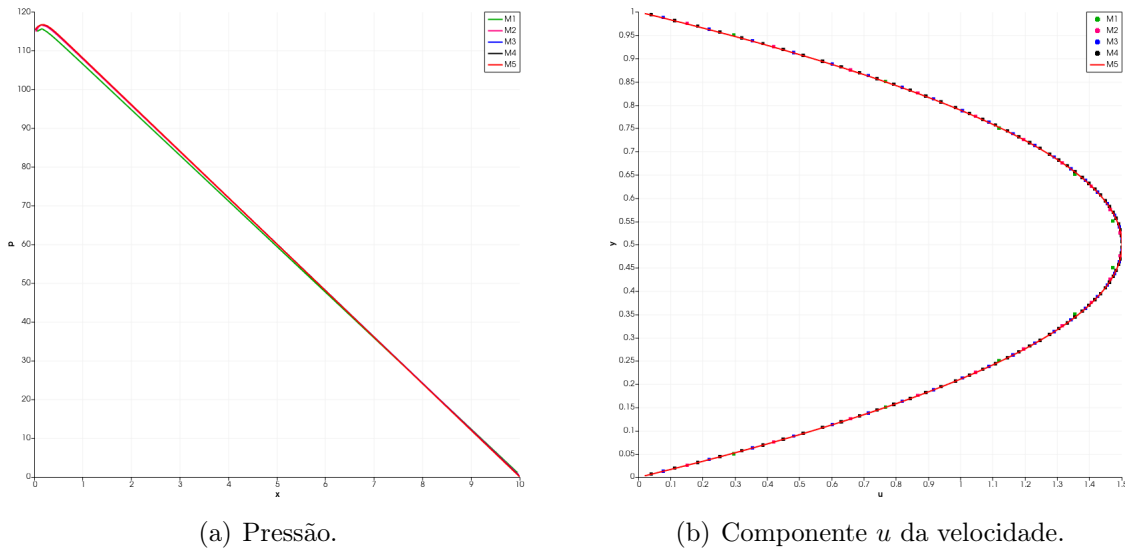


Figura 4.2: Refinamento da malha computacional para o escoamento de Poiseuille: (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade.

Para a análise quantitativa, temos que o erro relativo considerando a norma  $L_2$ , é dado por:

$$\|E_h(\epsilon)\|_2 = \frac{\|\epsilon_{ref} - \epsilon_{M_i}\|_2}{\|\epsilon_{ref}\|_2}. \quad (4.1)$$

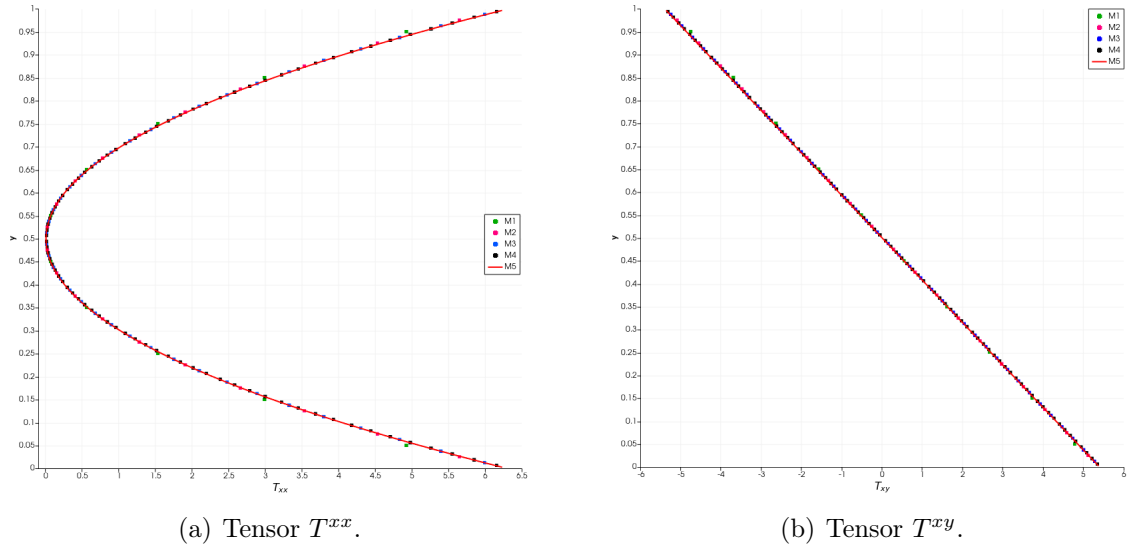


Figura 4.3: Refinamento da malha computacional para o escoamento de Poiseuille: (a) Tensor  $T^{xx}$ . (b) Tensor  $T^{xy}$ .

Tomando como  $\epsilon_{ref}$  a solução numérica para a malha  $M_5$ , e  $\epsilon_{M_i}$  a solução numérica para as malhas precedentes, obtém-se os dados da Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Erro Relativo.

|       | $E(u)$          | $E(T_{xx})$     | $E(T_{xy})$     |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $M_1$ | $1.89780E^{-2}$ | $3.85529E^{-2}$ | $1.95184E^{-2}$ |
| $M_2$ | $4.89761E^{-3}$ | $6.72454E^{-3}$ | $4.89072E^{-3}$ |
| $M_3$ | $1.17067E^{-3}$ | $1.60774E^{-3}$ | $1.16741E^{-3}$ |
| $M_4$ | $2.34715E^{-4}$ | $3.20973E^{-4}$ | $2.33261E^{-4}$ |

A estimativa para o comportamento do erro é dado por

$$\|E_h\|_2 \cong Ch^p, \quad (4.2)$$

sendo  $h$  o espaçamento espacial da malha,  $C$  constante e  $p$  fixos independentes da malha,  $p$  fornece a ordem de convergência do método. Sendo assim, de (4.2), tem-se

$$p \approx \frac{\ln \left( \frac{\|E_{h_i}\|_2}{\|E_{h_j}\|_2} \right)}{\ln \left( \frac{h_i}{h_j} \right)}, \quad (4.3)$$

em que  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $j = i + 1$ .

Logo, para um refinamento de malha da forma que  $h_i = 2h_j$ , obtém-se

$$p \approx \frac{\ln \left( \frac{\|E_{h_i}\|_2}{\|E_{h_j}\|_2} \right)}{\ln 2}. \quad (4.4)$$

O cálculo da ordem de convergência espacial do método numérico, está disposto na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Ordem de convergência espacial.

|                  | $u$     | $T_{xx}$ | $T_{xy}$ |
|------------------|---------|----------|----------|
| $p_{(M_1, M_2)}$ | 1.95418 | 2.51933  | 1.99672  |
| $p_{(M_2, M_3)}$ | 2.06475 | 2.06441  | 2.06673  |
| $p_{(M_3, M_4)}$ | 2.31835 | 2.32451  | 2.32330  |

Estes resultados, tanto qualitativos quanto quantitativos, eram esperados, pois como vimos na seção 3.4 as discretizações tomadas eram majoritariamente de ordem 2.

## 4.2 Escoamento de Poiseuille

As simulações para o escoamento de Poiseuille, apresentadas nesta seção, foram realizadas na geometria caracterizada pela Figura 4.1, com aplicação das condições de contorno descritas na seção 2.3. Foram adotados os parâmetros subsequentes como fixos,

- Viscosidade cinemática de referência ( $\nu_0 = \frac{\eta_0}{\rho}$ ):  $1.0 \text{ m}^2/\text{s}$ ;
- Velocidade média do escoamento ( $U$ ):  $1.0 \text{ ms}^{-1}$ ;
- Comprimento característico do escoamento ( $H$ ):  $1 \text{ m}$ ;
- Tempo final ( $t_{\text{stop}}$ ):  $150 \text{ s}$ ;
- Espaçamento temporal ( $dt$ ):  $2.5E^{-3}$ .

Para a análise dos resultados foi realizado um corte transversal no meio do canal em  $x = 5.0$  para a análise da velocidade e dos tensores envolvidos no escoamento, e também um corte longitudinal em  $y = 0.50$  para a observação da pressão e da função  $N_P$ , no estado estacionário do escoamento.

### 4.2.1 Comparação entre os Modelos

Nesta subseção será abordada a comparação dos modelos FENE-CR *Standard* e a modelagem proposta pelo trabalho em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com intuito de observar as influências geradas por tal modelagem. A malha computacional utilizada foi a *M2*, que nos permite observar com clareza os resultados e não apresenta um custo computacional elevado, diminuindo o tempo de processamento. Considera-se os seguintes parâmetros,

- Número de Weissenberg ( $Wi$ ): 1.0;
- Número de Reynolds ( $Re$ ): 0.2;
- Parâmetro ( $\beta$ ): 0.1;
- Parâmetro de extensibilidade ( $L$ ):100.

Os dados obtidos foram dispostos na Figura 4.4 para comparação.

Analisando o comportamento da pressão na Figura 4.4 (a) é possível constatar que no *inflow* temos o máximo da pressão, ou seja, a pressão na entrada do escoamento é maior do que em todo domínio, em contrapartida no *outflow* a pressão é nula. Assim como no modelo FENE-CR *Standard* a nova modelagem proposta apresenta um decrescimento da pressão ao longo do canal, mas note que a modelagem usual apresenta um perfil mais baixo, em contrapartida a nova modelagem apresenta valores mais altos para a pressão. Em consequência deste aumento na pressão também podemos constatar um aumento nos tensores para a nova modelagem.

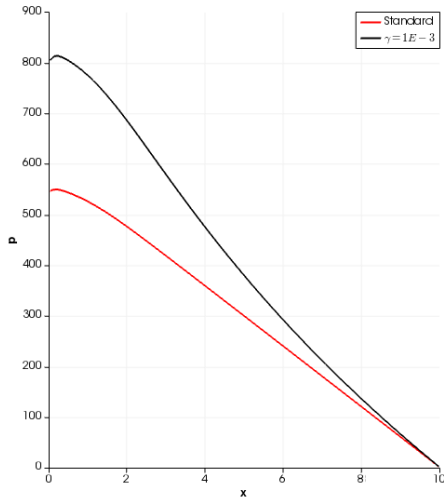
### 4.2.2 Variação do Coeficiente da Viscosidade Dependendo da Pressão

Esta seção tem como objetivo analisar os resultados do escoamento para cada valor de  $\gamma$  utilizado. A variação do parâmetro  $\gamma$  é essencial para estudar o comportamento do escoamento, pois o seu aumento implica no aumento direto da pressão, para a modelagem proposta.

Considera-se os parâmetros fixos,  $\beta = 0.1$ ,  $Wi = 0.5$  e  $L = 100$ , para  $dt = 2.5E^{-3}$ . A variação de  $\gamma$  se dará para os casos em que  $Re = 0.1, 0.5$  e  $1.0$ .

Com base nas Figuras 4.5, 4.6 e 4.7, é possível notar que o aumento de  $\gamma$  acarreta em um aumento das forças presentes no escoamento. O que de fato é compreensível pois a função exponencial dada por (3.4) tem como base  $e$  que é maior que 1 e  $\gamma$  multiplica o expoente, logo o aumento de  $\gamma$  propicia um aumento da pressão e consequentemente dos tensores, em contrapartida quando  $\gamma \rightarrow 0$  a função tende a 1, restando apenas  $(1 - \beta)$  que equivale ao modelo usual.

Com a repetição exaustiva das simulações, foi possível observar que o número de elasticidade ( $EL$ ) é um ótimo parâmetro a se utilizar, pois quanto maior o  $EL$  mais evidente fica a influência da pressão nos resultados.



(a) Pressão.

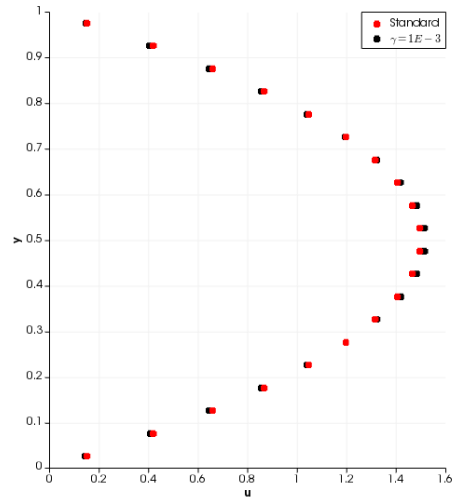
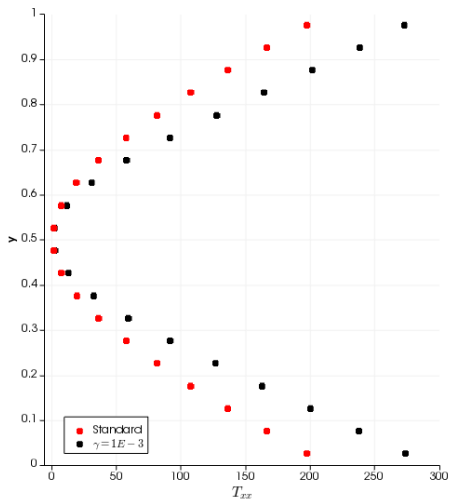
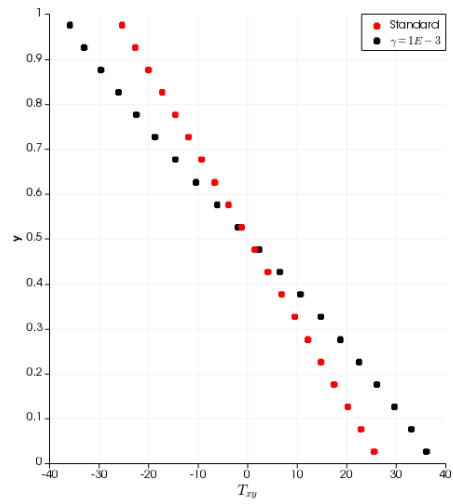
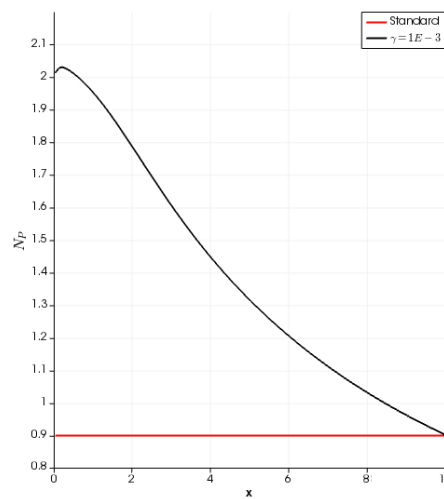
(b) Componente  $u$  da velocidade.(c) Tensor  $T^{xx}$ .(d) Tensor  $T^{xy}$ .(e)  $N^p$ .

Figura 4.4: Comparação do modelo usual FENE-CR e o modelo com a viscosidade variando exponencialmente com a pressão, com  $\gamma = 1.0E^{-3} Pa^{-1}$ .

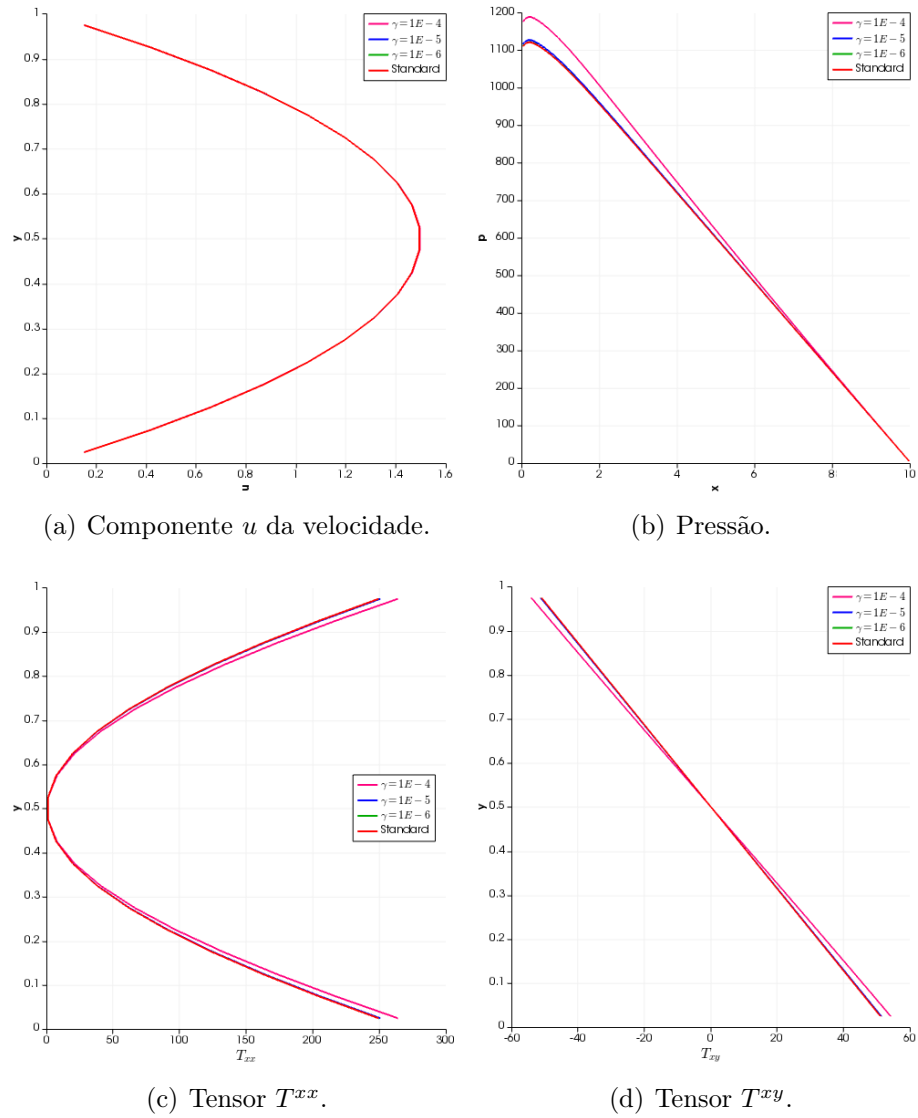
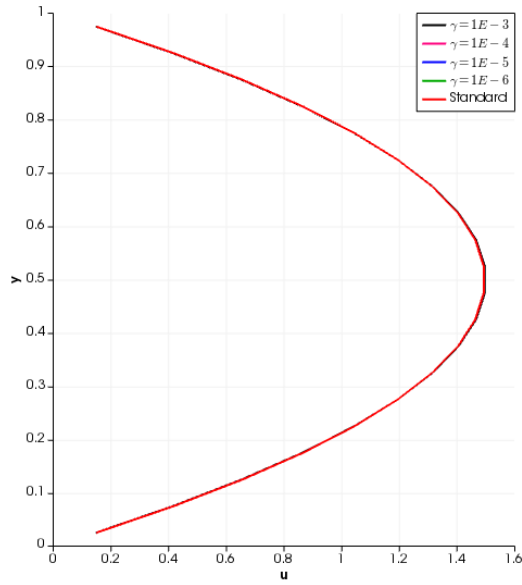
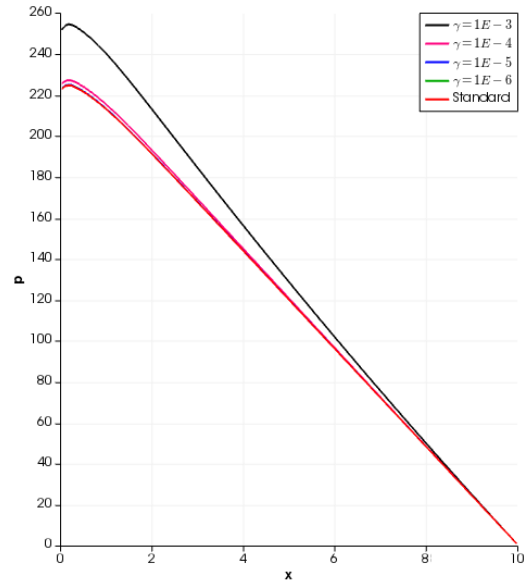


Figura 4.5: Variação do Coeficiente  $\gamma$  para  $Re = 0.1$  : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Pressão. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

(a) Componente  $u$  da velocidade.

(b) Pressão.

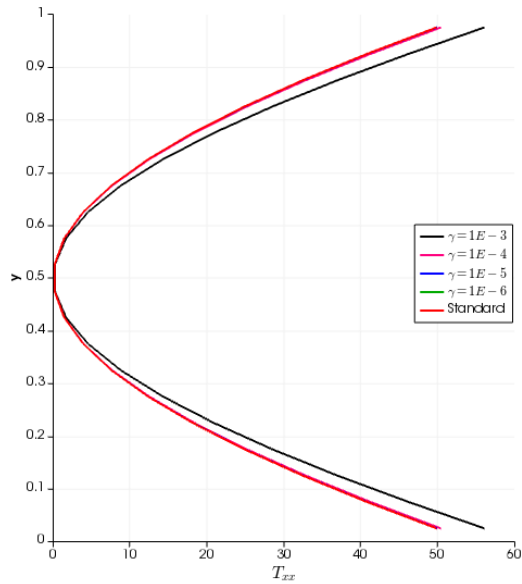
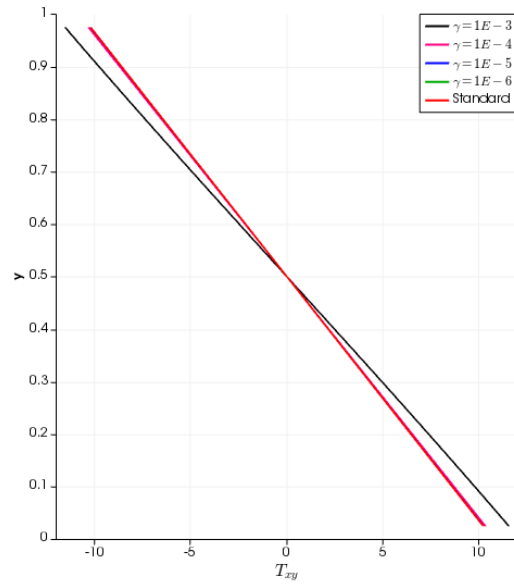
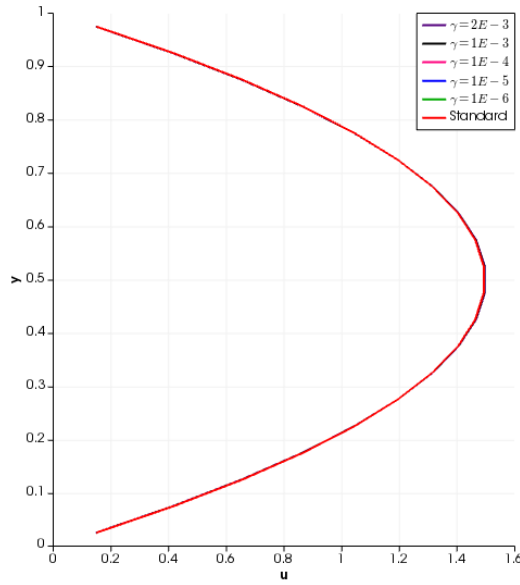
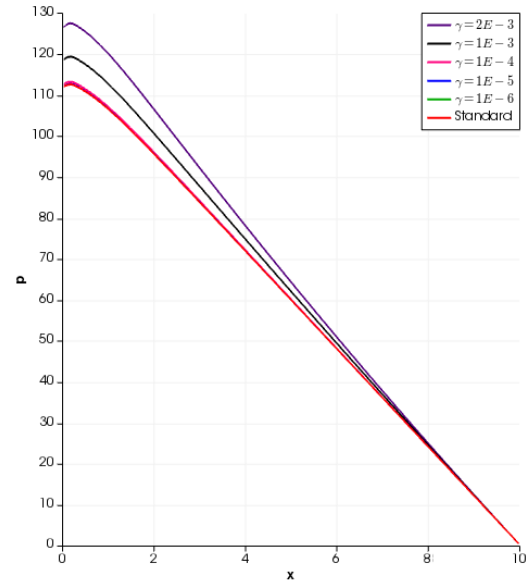
(c) Tensor  $T^{xx}$ .(d) Tensor  $T^{xy}$ .

Figura 4.6: Variação do Coeficiente  $\gamma$  para  $Re = 0.5$ : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Pressão. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

(a) Componente  $u$  da velocidade.

(b) Pressão.

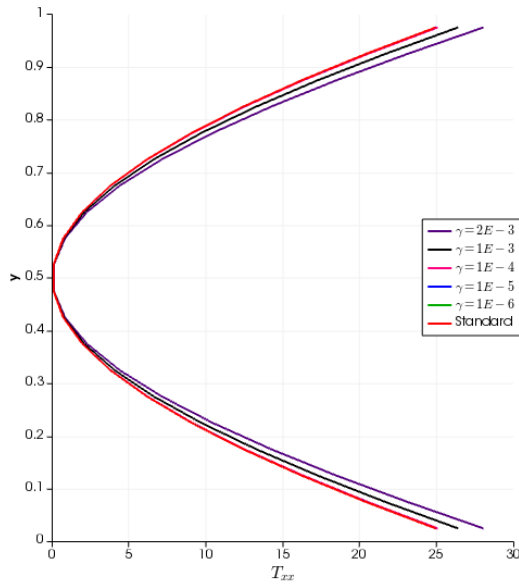
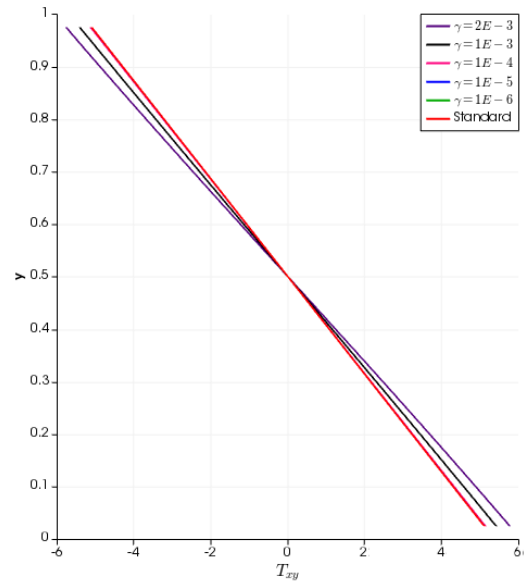
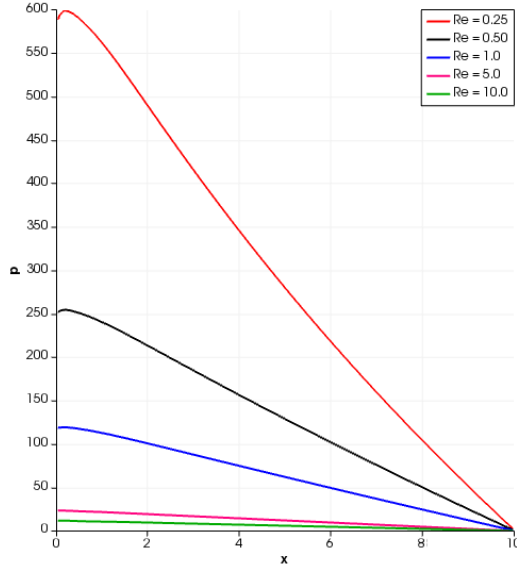
(c) Tensor  $T^{xx}$ .(d) Tensor  $T^{xy}$ .

Figura 4.7: Variação do Coeficiente  $\gamma$  para  $Re = 1.0$  : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Pressão. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

### 4.2.3 Variação do Número de Reynolds

Nesta seção serão apresentados os resultados variando o número de Reynolds. Considera-se os parâmetros  $Wi = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$  e  $L = 100$ , para  $dt = 2.5E^{-3}$  como fixos, para  $\gamma = 1.0E^{-3}$  e  $1.0E^{-6}$ , respectivamente.



(a) Pressão.

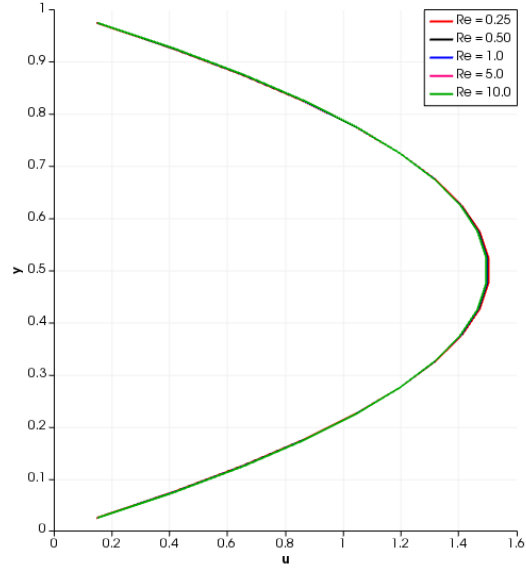
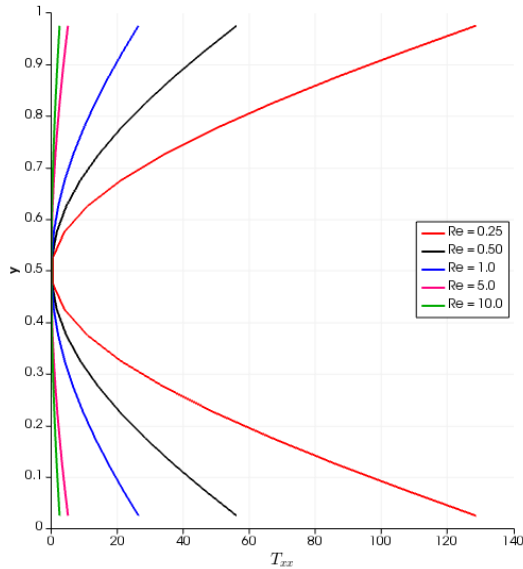
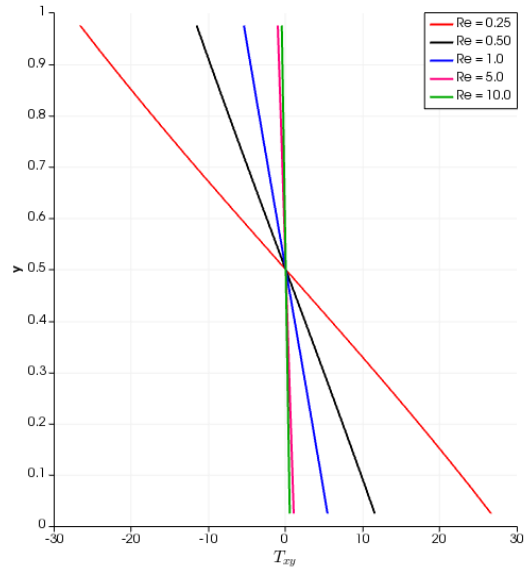
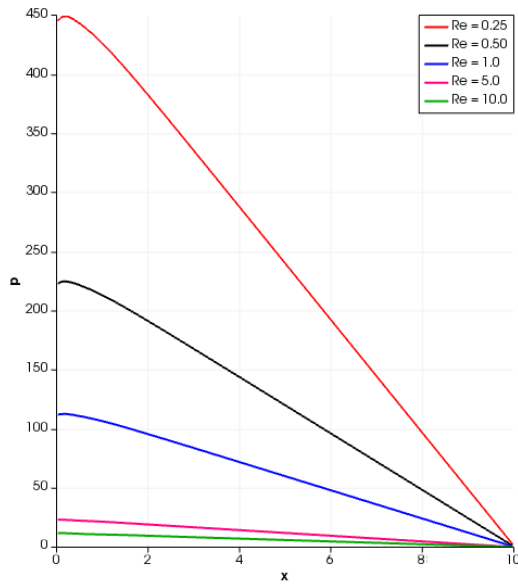
(b) Componente  $u$  da velocidade.(c) Tensor  $T_{xx}$ .(d) Tensor  $T_{xy}$ .

Figura 4.8: Variação do  $Re$  para  $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade. (c) Tensor  $T_{xx}$ . (d) Tensor  $T_{xy}$ .

As Figuras 4.8 e 4.9 permitem a constatação de que quanto menor o número de Reynolds, maiores serão as forças envolvidas no escoamento. Condizente com o que foi visto no Capítulo 2, pois como os valores de  $\rho, U$  e  $H$  são fixos, apenas  $\eta_0$  se altera. Como  $\eta_0$  e  $Re$  são inversamente proporcionais, quanto menor o número de Reynolds maior é a viscosidade do fluido e com uma viscosidade maior é necessário um aumento das forças envolvidas no escoamento para manter a velocidade média imposta no injetor.



(a) Pressão.

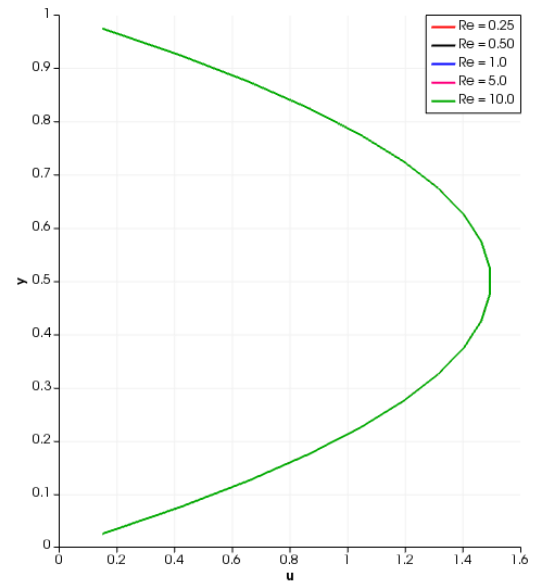
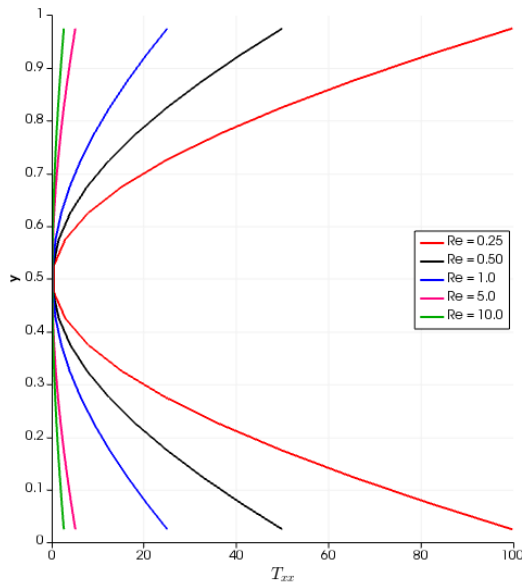
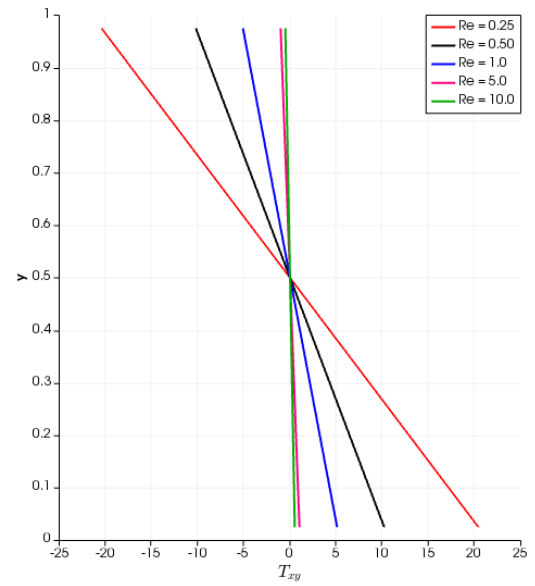
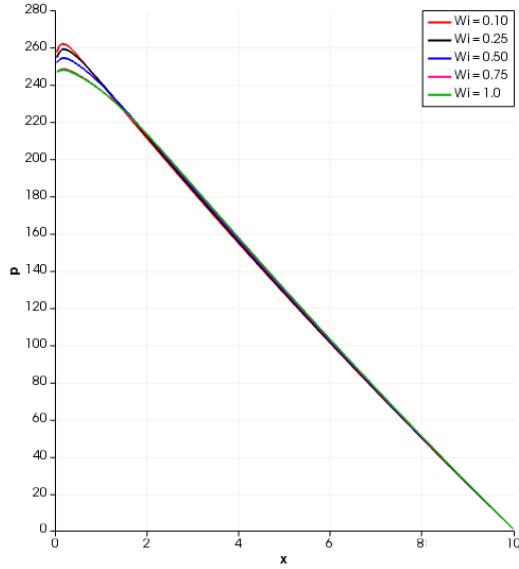
(b) Componente  $u$  da velocidade.(c) Tensor  $T^{xx}$ .(d) Tensor  $T^{xy}$ .

Figura 4.9: Variação do  $Re$  para  $\gamma = 1.0E^{-6}$ : (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

### 4.2.4 Variação do Número de Weissenberg

Nesta seção será estudada a influência do número de Weissenberg, utilizando a nova modelagem. Considera-se agora  $Re = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$  e  $L = 100$ , para  $dt = 2.5E^{-3}$  como fixos, para  $\gamma = 1.0E^{-3}$  e  $1.0E^{-6}$ , respectivamente.



(a) Pressão.

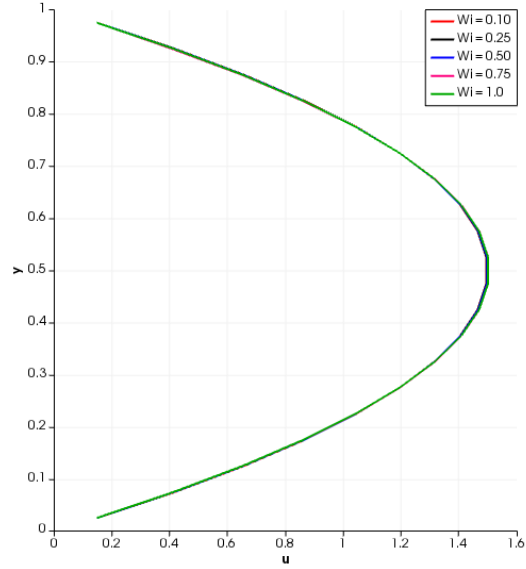
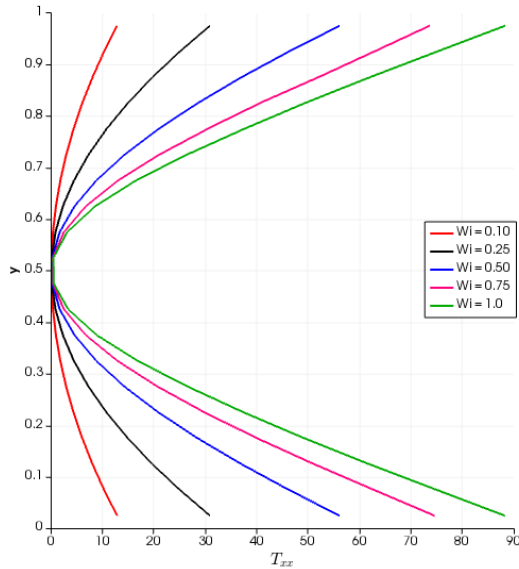
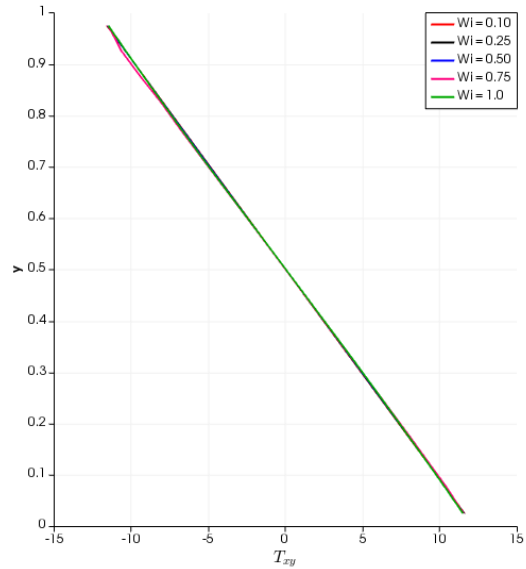
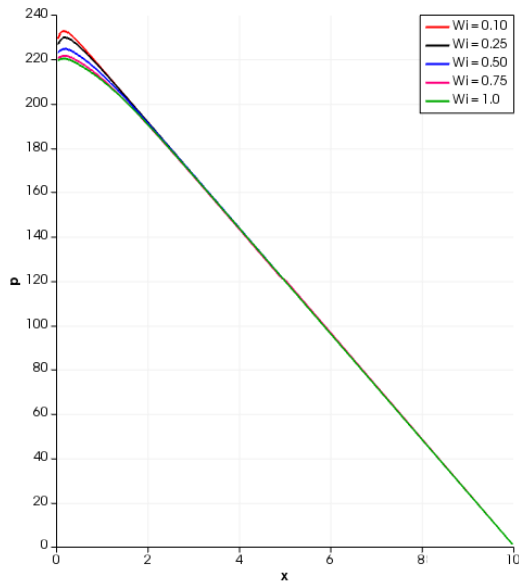
(b) Componente  $u$  da velocidade.(c) Tensor  $T^{xx}$ .(d) Tensor  $T^{xy}$ .

Figura 4.10: Variação do  $Wi$  para  $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

Nas Figuras 4.10 e 4.11 pode-se notar uma pequena variação no *inflow* da pressão. Além disso pode-se observar que, apesar da pressão não ter grandes variações para a alteração do número de  $Wi$  ao alterar  $\gamma$ , a pressão aumenta significativamente. Na variação do número de  $Wi$  a força que possui as maiores variações é o tensor  $T^{xx}$ , onde o crescimento de  $Wi$  acarreta em maiores valores para tal tensor.



(a) Pressão.

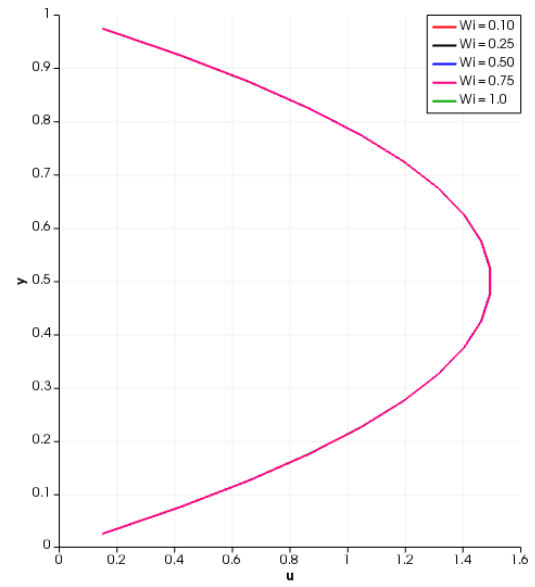
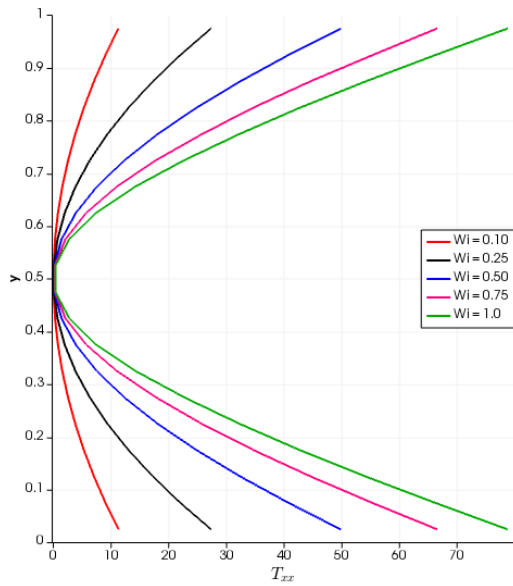
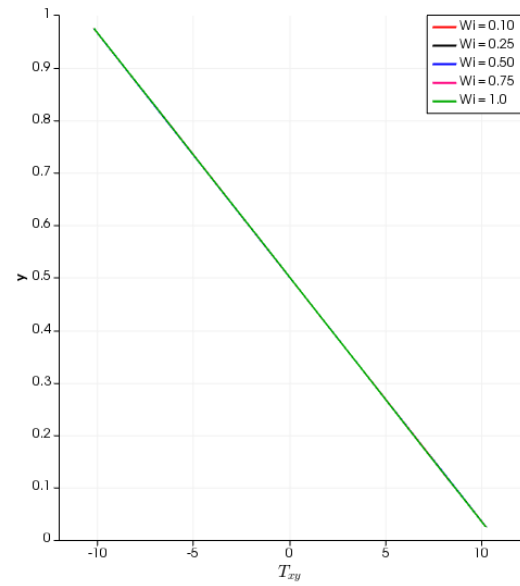
(b) Componente  $u$  da velocidade.(c) Tensor  $T^{xx}$ .(d) Tensor  $T^{xy}$ .

Figura 4.11: Variação do  $Wi$  para  $\gamma = 1.0E^{-6}$ : (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

### 4.2.5 Variação do Número de Elasticidade

Nesta subseção será abordado a comparação dos modelos FENE-CR *Standard* e a modelagem proposta pelo trabalho em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, para diferentes valores de  $EL$ .

Considera-se os parâmetros adimensionais fixos,  $Wi = 0.5$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-3}$ , para  $EL = 0.05$ , 1.0 e 5.0, respectivamente.

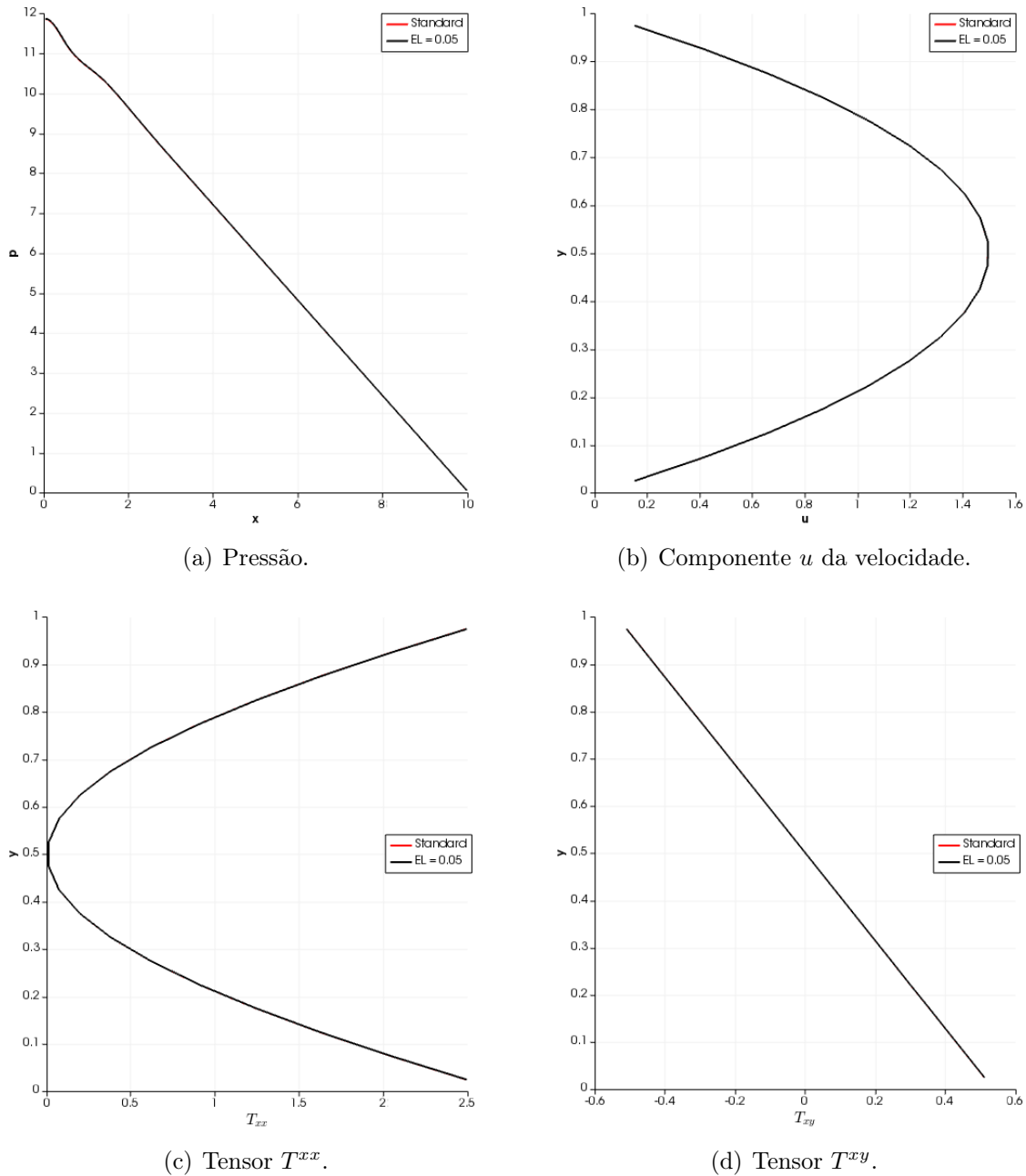


Figura 4.12: Comparação do modelo FENE-CR *Standard* e o modelo com a viscosidade variando exponencialmente com a pressão, com  $EL = 0.05$  para  $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

As Figuras 4.12, 4.13 e 4.14 nos permite observar que o aumento do  $EL$  acarretará em um aumento nas forças envolvidas para a nova modelagem. Conjuntamente é importante ressaltar a relação do parâmetro  $\gamma$  com  $EL$ , para altos valores de  $EL$  o valor de  $\gamma$  deve

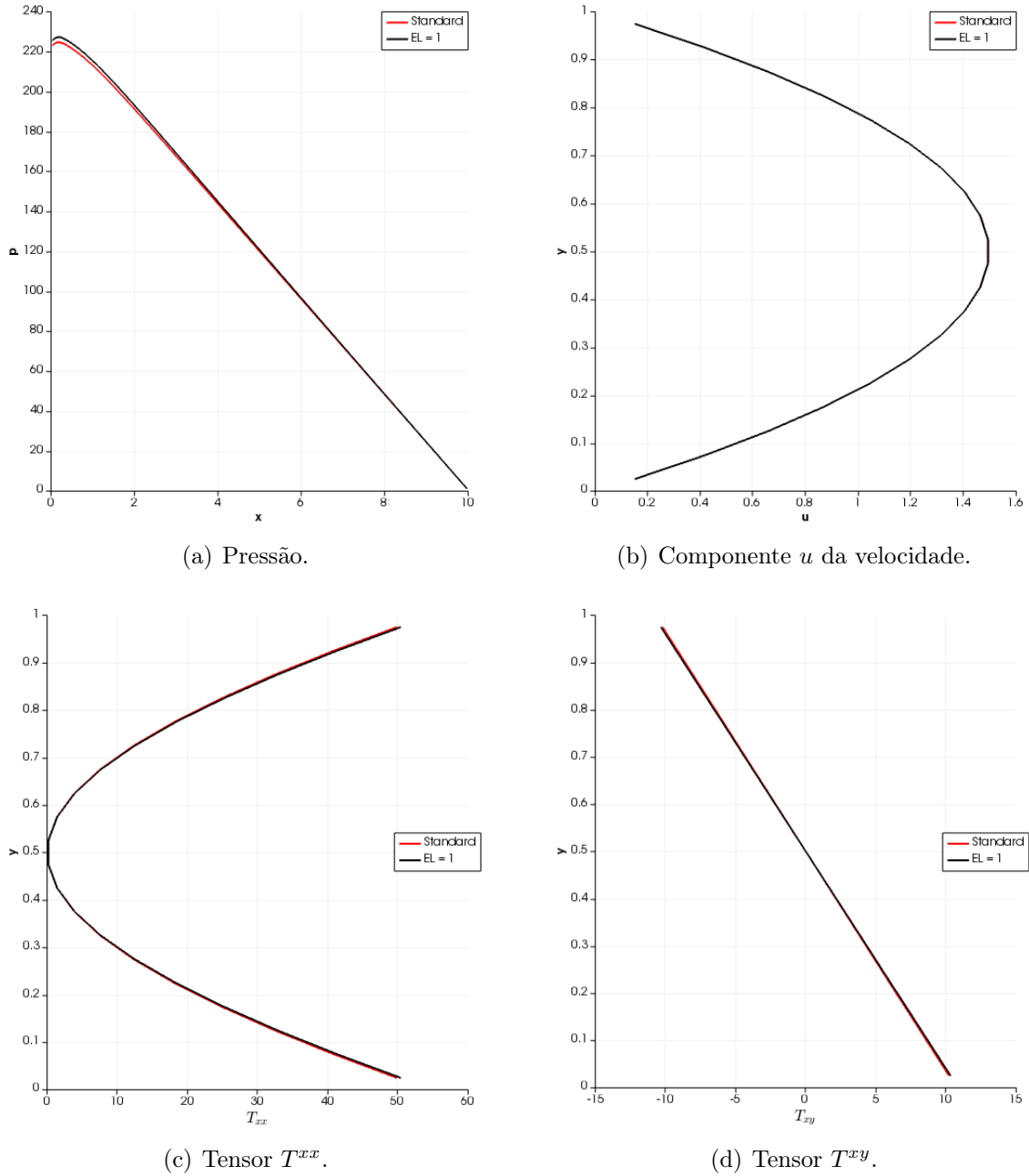
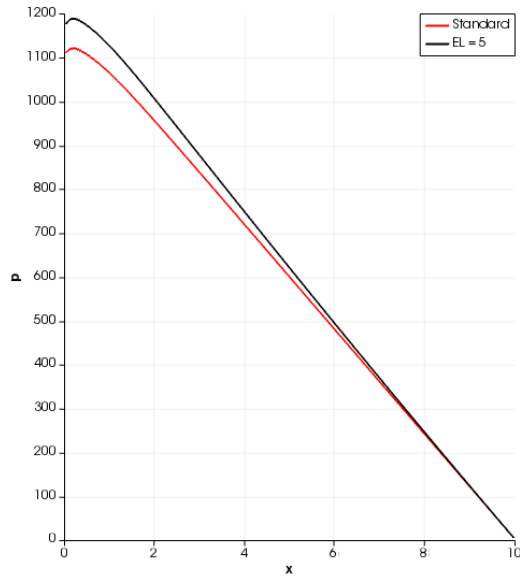


Figura 4.13: Comparação do modelo FENE-CR *Standard* e o modelo com a viscosidade variando exponencialmente com a pressão, com  $EL = 1.0$  para  $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

ser menor para manter a estabilidade. O que de fato é coerente, pois como a variação de  $Wi$  é limitada, para que  $EL$  mude significativamente, as alterações são feitas no número de  $Re$ . Logo, para que  $EL$  seja alto,  $Re$  deve ser pequeno, o que faz com que as forças viscosas envolvidas no escoamento sejam maiores, como  $\gamma$  amplifica tais forças, ocorre um aumento nas instabilidades.



(a) Pressão.

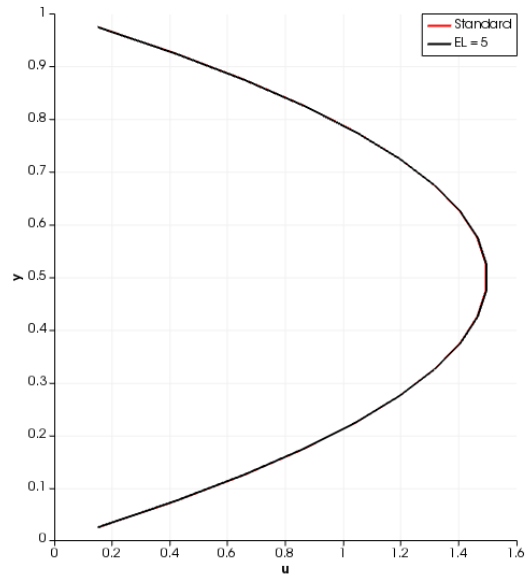
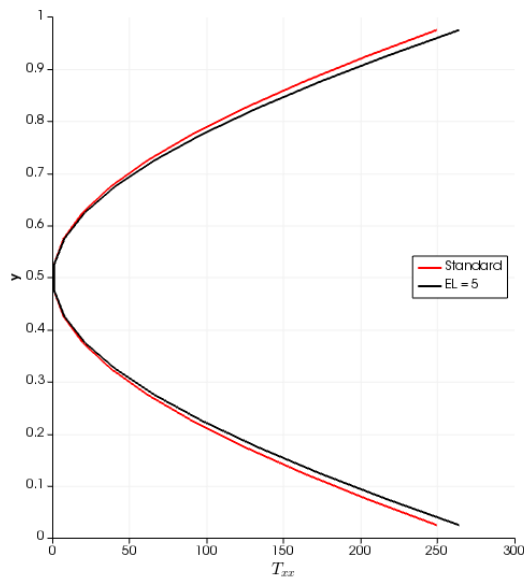
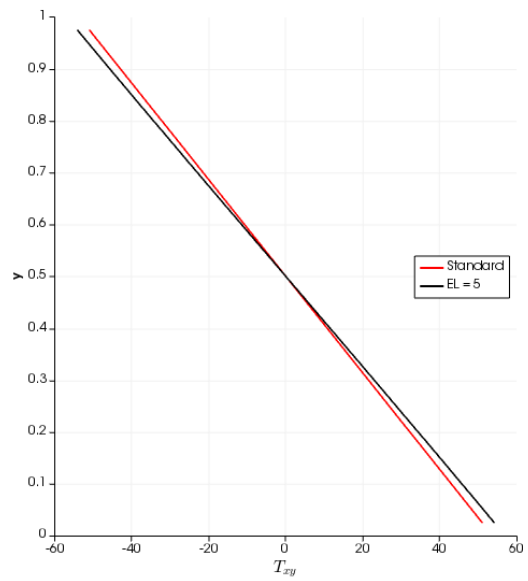
(b) Componente  $u$  da velocidade.(c) Tensor  $T^{xx}$ .(d) Tensor  $T^{xy}$ .

Figura 4.14: Comparação do modelo FENE-CR *Standard* e o modelo com a viscosidade variando exponencialmente com a pressão, com  $EL = 5.0$  para  $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

### 4.2.6 Variação do Parâmetro de Extensibilidade

Esta seção tem como objetivo analisar os resultados do escoamento para cada valor de  $L$  utilizado. Os parâmetros adimensionais fixos serão,  $\beta = 0.1$ ,  $Re = 0.5$  e  $Wi = 0.5$ , para  $\gamma = 1.0E^{-3}$  e  $1.0E^{-6}$ .

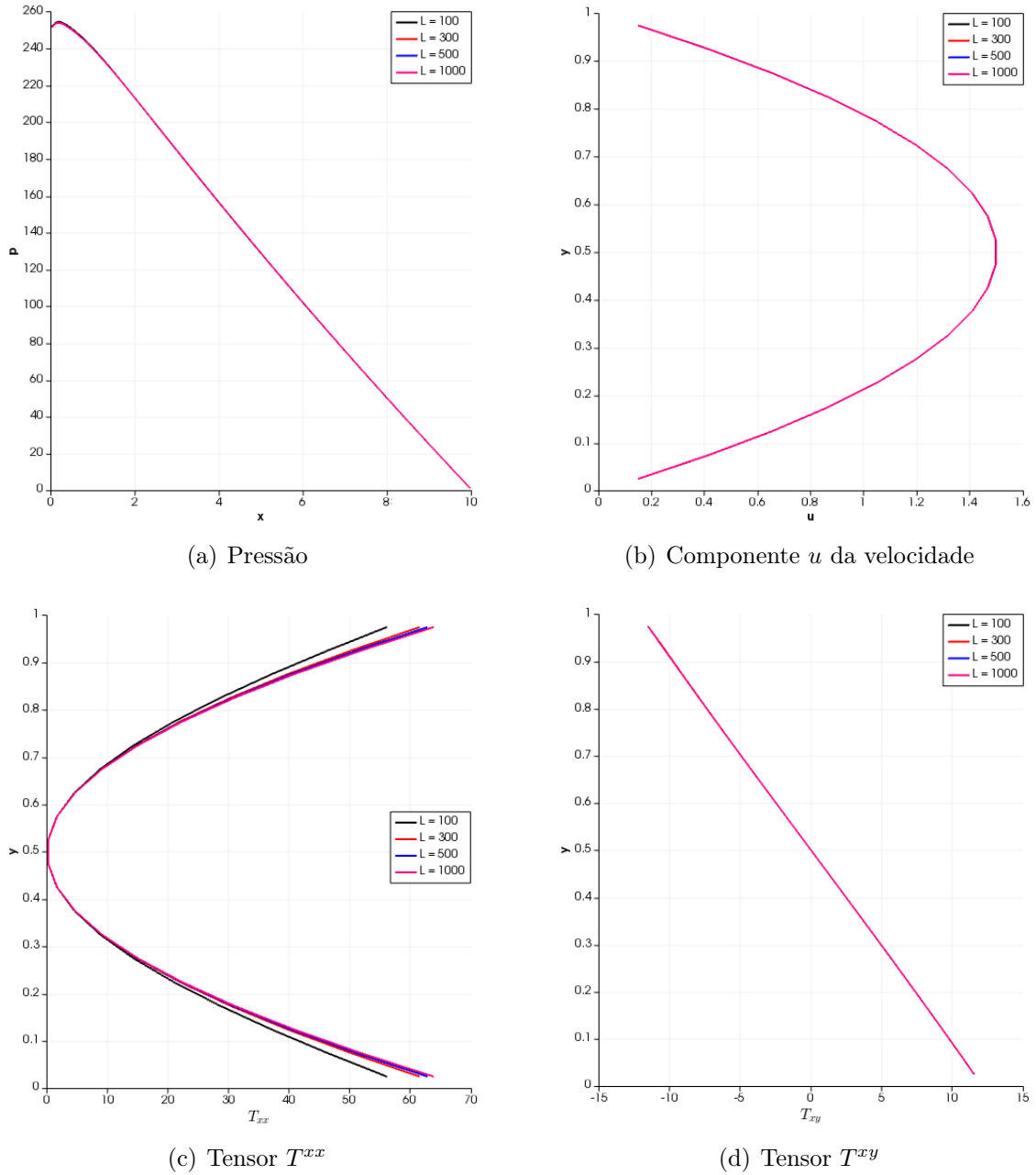


Figura 4.15: Variação do Parâmetro  $L$  para  $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

Com base nas Figuras 4.15 e 4.16, nota-se que o aumento de  $L$  não provoca grandes alterações nas forças deste escoamento. Para o tensor  $T^{xx}$  ocorre uma pequena alteração, onde o aumento de  $L$  acarreta o aumento de  $T^{xx}$ .

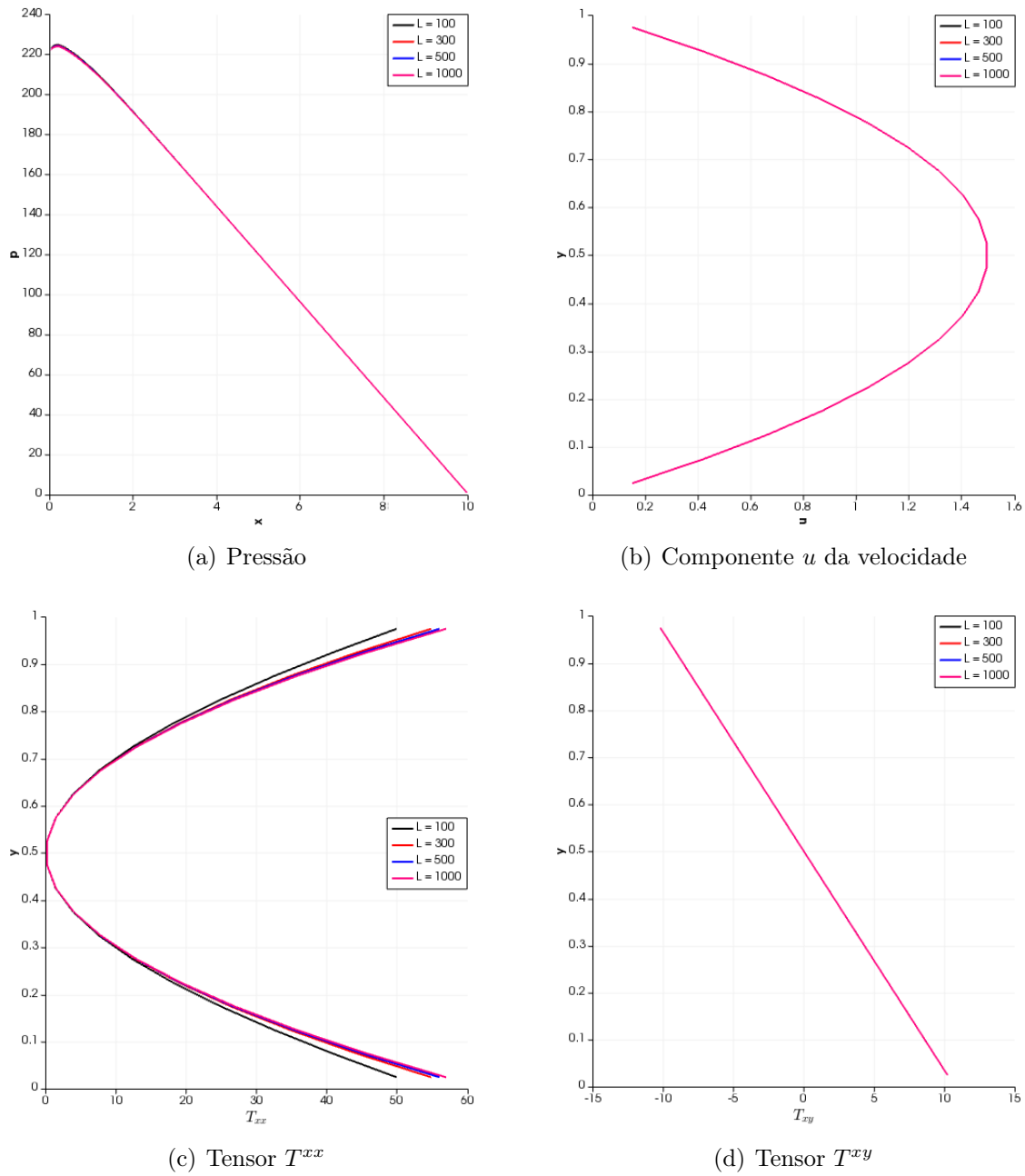


Figura 4.16: Variação do Parâmetro  $L$  para  $\gamma = 1.0E^{-6}$ : (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

### 4.2.7 Variação do Parâmetro $\beta$

Nesta seção serão apresentados os resultados para a variação do parâmetro  $\beta$ , tomando os parâmetros  $Wi = 0.5$ ,  $Re = 0.5$  e  $L = 100$ , para  $dt = 2.5E^{-3}$  como fixos, para  $\gamma = 1.0E^{-3}$  e  $1.0E^{-5}$ , respectivamente.

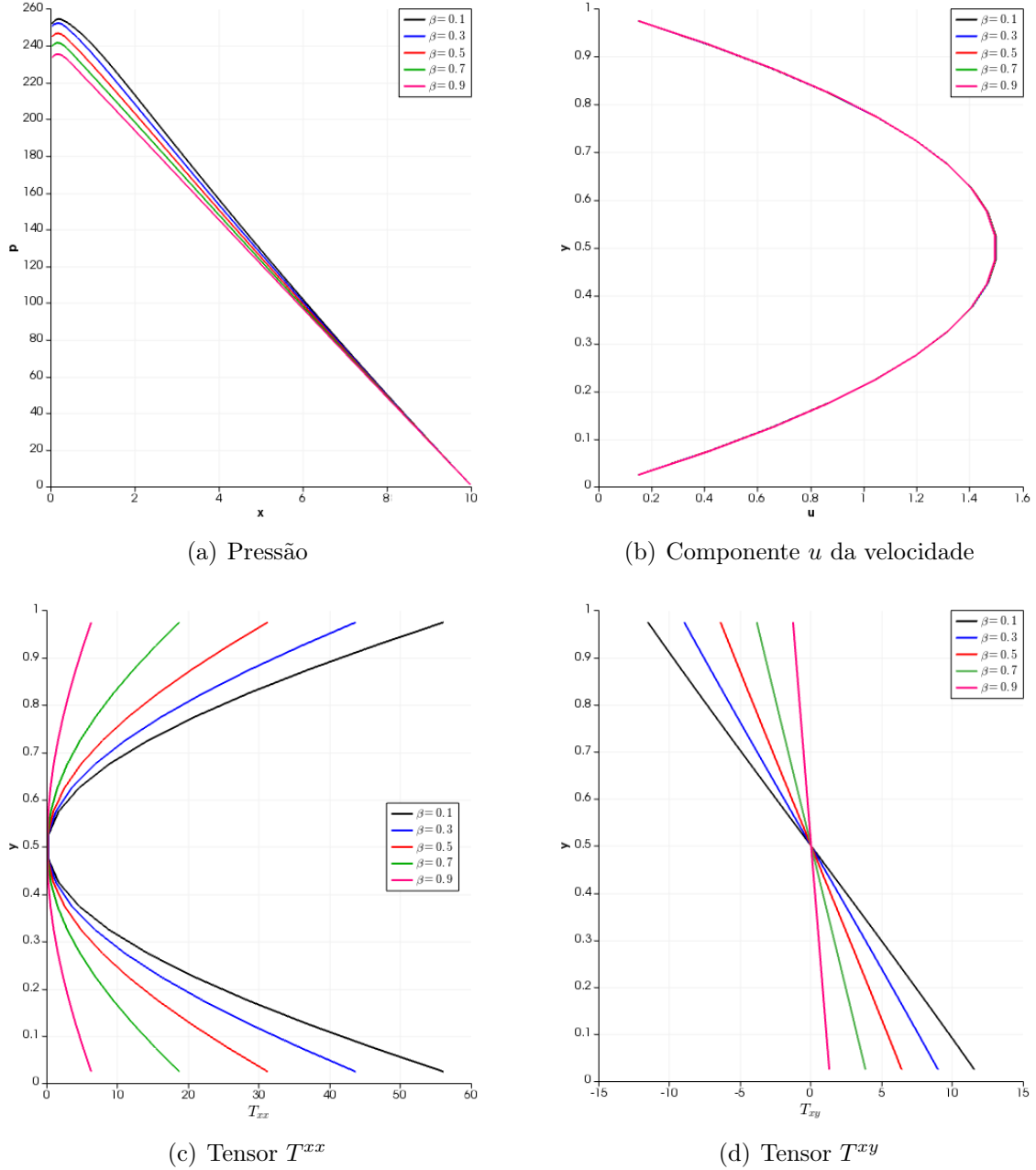
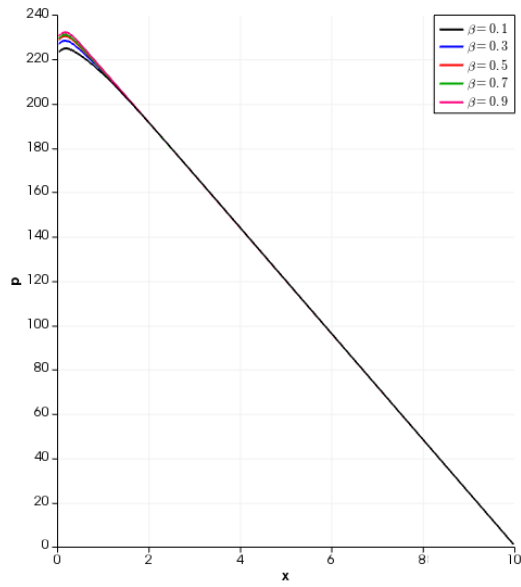


Figura 4.17: Variação do Parâmetro  $\beta$  para  $\gamma = 1.0E^{-3}$ : (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

As figuras 4.17 e 4.18 nos permite reconhecer que o aumento do parâmetro  $\beta$  acarreta em uma diminuição nas forças envolvidas no escoamento. O que de fato é coerente, pois, como foi visto na seção 2.2 quando o parâmetro  $\beta \rightarrow 1$ , a contribuição viscosa do solvente é maior, fazendo com que o fluido seja mais Newtoniano.



(a) Pressão

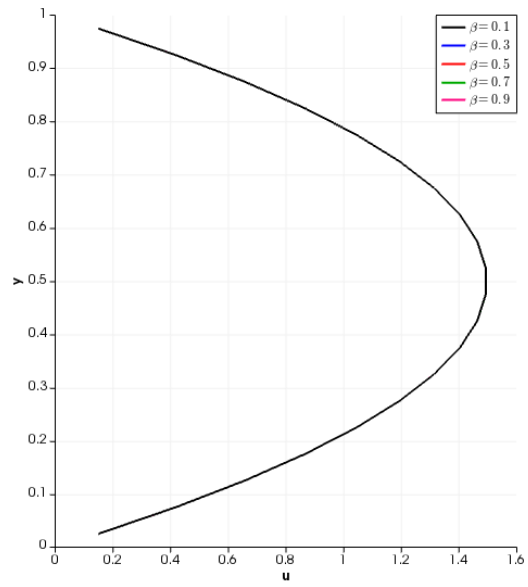
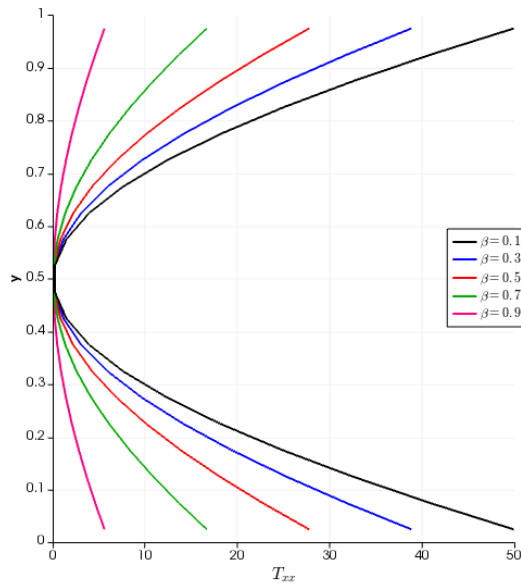
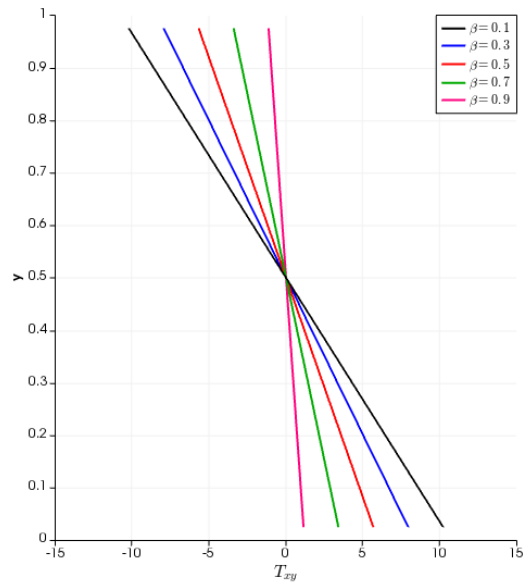
(b) Componente  $u$  da velocidade(c) Tensor  $T^{xx}$ (d) Tensor  $T^{xy}$ 

Figura 4.18: Variação do Parâmetro  $\beta$  para  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Pressão. (b) Componente  $u$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ .

### 4.3 Cavidade

Nesta seção temos como objetivo analisar o comportamento do problema da cavidade, para o modelo FENE-CR com a viscosidade variando com pressão. Considere uma cavidade como na Figura 4.19, o interior da cavidade é totalmente preenchido de fluido, em um primeiro momento a tampa e o fluido estão em repouso. No instante  $t_0$  a tampa da cavidade é acelerada para a velocidade  $u_0 > 0$ , originando assim o escoamento [12].

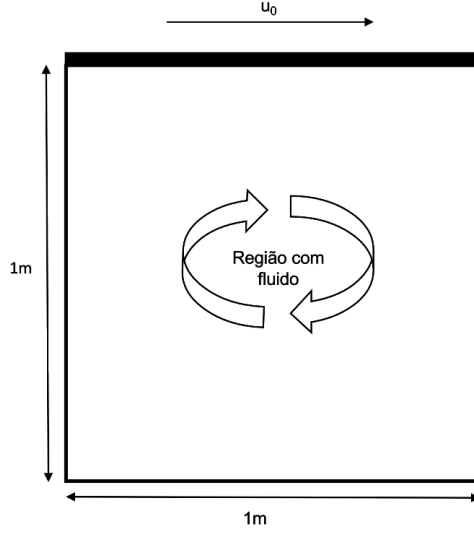


Figura 4.19: Esboço e dimensões da cavidade com tampa móvel

Tal geometria é estudada como uma simplificação para o problema de cavidades abertas, muito comum nas engenharias. Os trabalhos [10] e [11], fazem uma análise para o uso dos parâmetros  $Re$  e  $Wi$  para tal geometria.

Para as condições de fronteira, temos algumas alterações neste caso. Sobre as paredes laterais e a inferior que estão em repouso, utiliza-se as condições descritas na seção 2.3, mas neste caso temos uma parede em movimento em relação ao fluido que permanece no interior da cavidade. Logo, o fluido na parede superior tem componente tangencial de velocidade  $u_0$ .

Considera-se a configuração das células na tampa da cavidade como na Figura 4.20. Sendo assim ao discretizar obtemos

$$u_{i+\frac{1}{2},j+1} = 2u_0 - u_{i+\frac{1}{2},j}, \quad (4.5)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{u_0 - u_{i,j-\frac{1}{2}}}{\delta y}, \quad (4.6)$$

onde

$$u_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1} + u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{4}. \quad (4.7)$$

A equação 4.5 utiliza-se para o cálculo da velocidade intermediária, onde é feita uma média aritmética dos pontos no entorno de  $u_0$  na face da célula, a equação 4.6 é utilizada na resolução da equação do momento, onde o cálculo da derivada é determinado por diferença centrada e para determinar  $u_{i,j-\frac{1}{2}}$  utiliza-se a média aritmética dos quatro pontos no entorno.

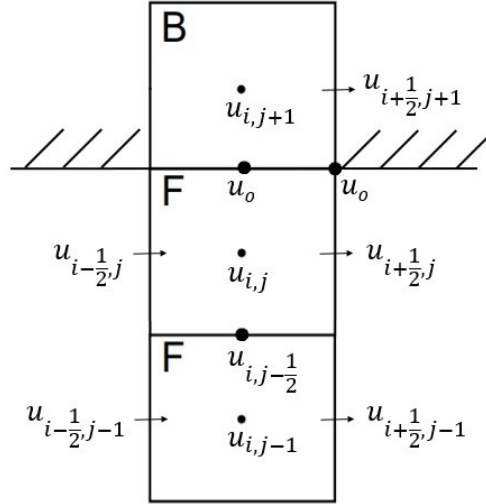


Figura 4.20: Configuração das células para a tampa da cavidade.

Para esta geometria foram analisados os fluidos não-Newtonianos para o modelo FENE-CR *Standard* e para o modelo com a viscosidade variando de acordo com a pressão. Foi adotada a malha *M50* de espaçamento uniforme,  $50 \times 50$  células, logo,  $\delta x = \delta y = 0.02$ . Para possibilitar a análise das forças envolvidas no escoamento, foi feito um corte paralelo ao eixo  $x$ , em  $y = 0.5$ . Os parâmetros adotados para estas simulações foram

- Viscosidade cinemática de referência ( $\nu_0 = \frac{\eta_0}{\rho}$ ):  $1.0 \text{ m}^2/\text{s}$ ;
- Velocidade média do escoamento ( $U$ ):  $1.0 \text{ ms}^{-1}$ ;
- Comprimento característico do escoamento ( $H$ ):  $1 \text{ m}$ ;
- Tempo final ( $t_{\text{stop}}$ ):  $150 \text{ s}$ ;
- Espaçamento temporal ( $dt$ ):  $1.0E^{-4}$ .

#### 4.3.1 Refinamento de Malha: verificação qualitativa

Nesta seção será apresentada uma análise de convergência qualitativa utilizando o refinamento de malha em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão.

A Tabela 4.4 possui as especificações sobre as malhas eulerianas utilizadas.

Tabela 4.4: Malhas computacionais para Cavidade.

| Malha       | Células          | Espaçamento ( $dx = dy$ ) |
|-------------|------------------|---------------------------|
| <i>M25</i>  | $25 \times 25$   | 0.04                      |
| <i>M50</i>  | $50 \times 50$   | 0.02                      |
| <i>M100</i> | $100 \times 100$ | 0.01                      |

Considera-se os parâmetros adimensionais  $Wi = 0.01$ ,  $Re = 10.0$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$  para  $dt = 5.0E^{-5}$ .

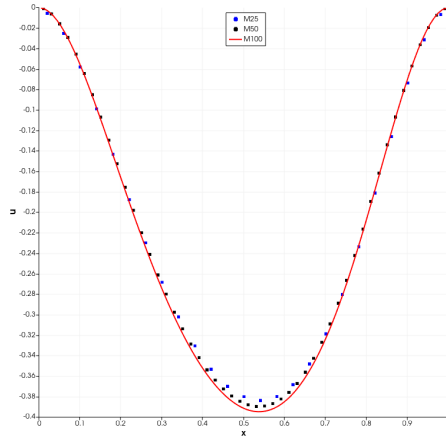
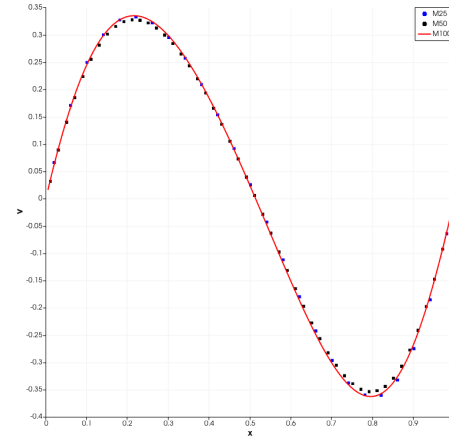
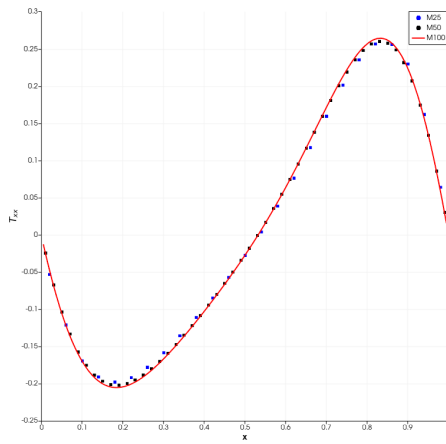
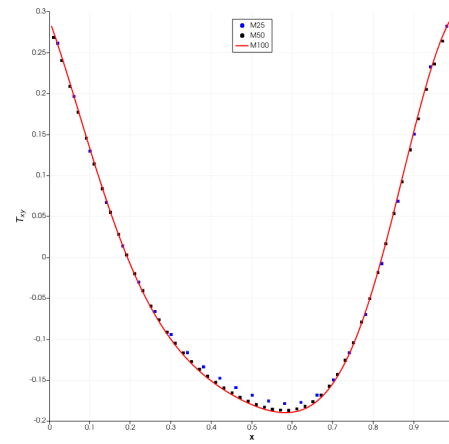
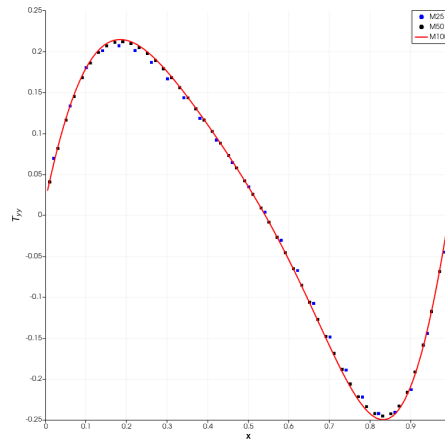
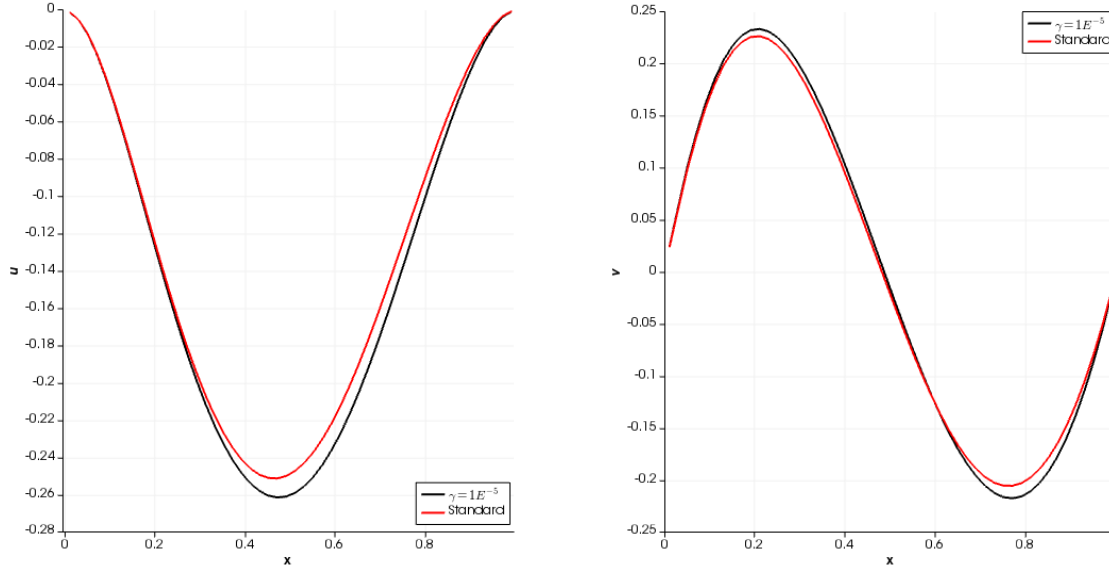
(a) Componente  $u$  da velocidade.(b) Componente  $v$  da velocidade.(c) Tensor  $T^{xx}$ .(d) Tensor  $T^{xy}$ .(e) Tensor  $T^{yy}$ .

Figura 4.21: Refinamento de malha em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0.01$ ,  $Re = 10.0$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Componente  $v$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ . (e) Tensor  $T^{yy}$ .

A Figura 4.21 e indica uma melhor aproximação dos dados quando a malha é refinada, o que nos mostra qualitativamente uma convergência, portanto obtemos resultados robustos para os próximos estudos.

### 4.3.2 Comparação entre os Modelos

Para comparar as duas modelagens foram utilizados os parâmetros adimensionais  $Re = 0.05$ ,  $Wi = 0.15$ ,  $L = 100$  e  $\beta = 0.1$ , para o modelo em que a viscosidade varia de acordo com a pressão foi considerado  $\gamma = 1.0E^{-5}$ .



(a) Componente u da velocidade.

(b) Componente v da velocidade.

Figura 4.22: Comparação do modelo *Standard* e o modelo com a viscosidade variando com a pressão para cavidade com  $\gamma = 1.0E^{-5}$  em  $y = 0.5$  e  $0 \leq x \leq 1$ : (a) Componente u da velocidade. (b) Componente v da velocidade.

As Figuras 4.22 e 4.23 apresentam os resultados da comparação entre os dois modelos no tempo  $t = 150$  para o corte em  $y = 0.5$ , em que pode-se notar que a nova modelagem provoca um aumento no valor absoluto das variáveis velocidade tensão, enquanto a pressão sofre uma diminuição.

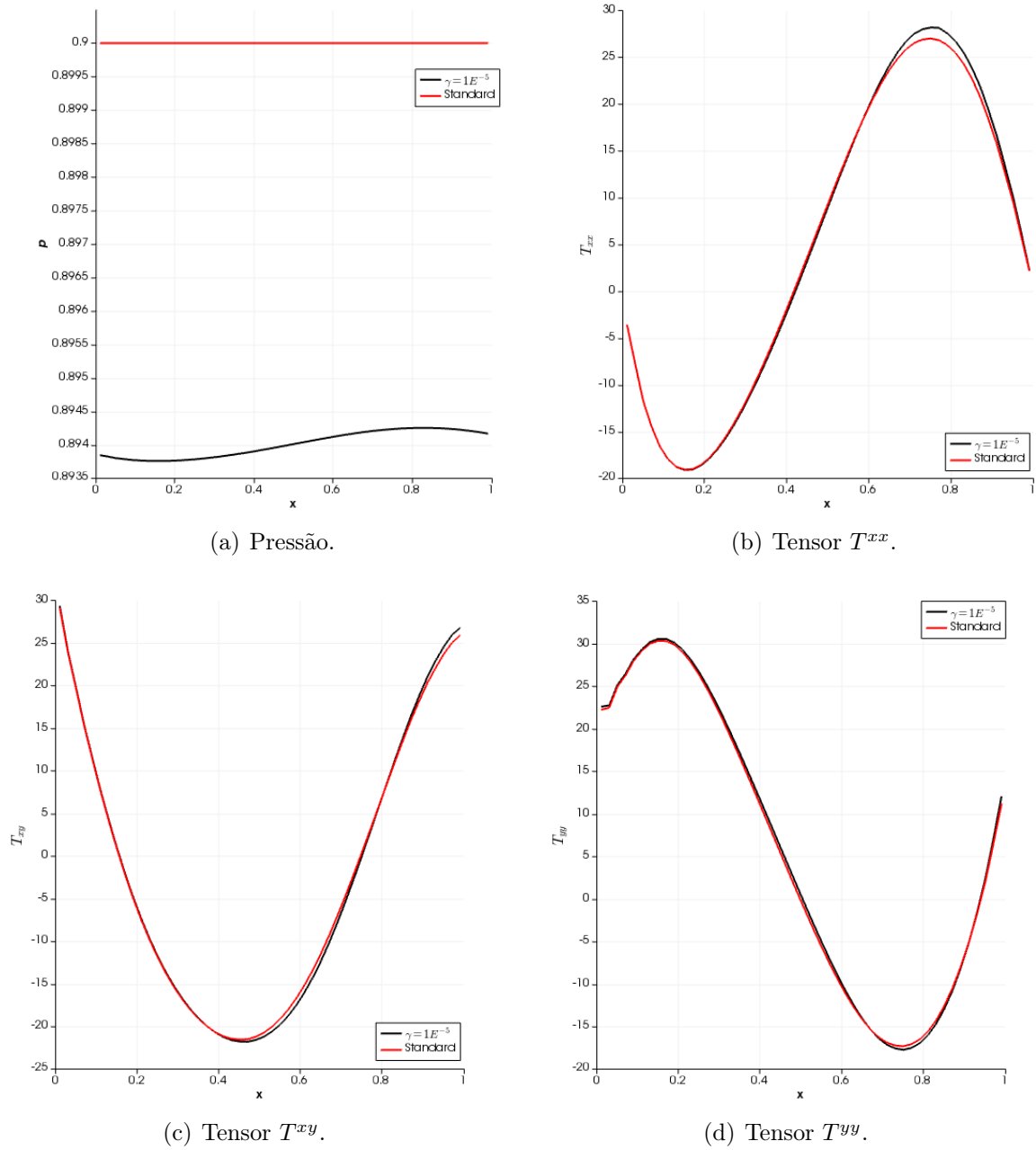


Figura 4.23: Comparação do modelo *Standard* e o modelo com a viscosidade variando com a pressão para cavidade com  $\gamma = 1.0E^{-5}$  em  $y = 0.5$  e  $0 \leq x \leq 1$ : (a) Pressão. (b) Tensor  $T^{xx}$ . (c) Tensor  $T^{xy}$ . (d) Tensor  $T^{yy}$ .

### 4.3.3 Variação do Coeficiente da Viscosidade Dependendo da Pressão

Nesta seção serão apresentados os resultados variando o coeficiente da viscosidade dependendo da pressão. Considera-se os parâmetros fixos,  $Re = 0.05$ ,  $Wi = 0.15$ ,  $\beta = 0.1$  e  $L = 100$ , para  $dt = 1.0E^{-4}$ .

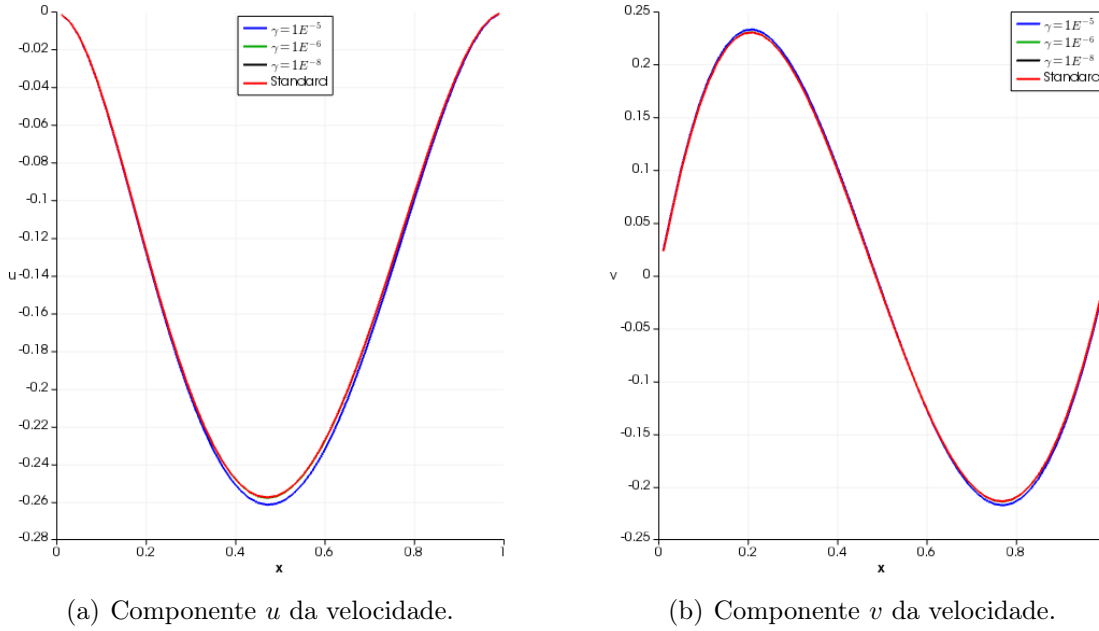


Figura 4.24: Variação de  $\gamma$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0.15$ ,  $Re = 0.05$ ,  $\beta = 0.1$  e  $L = 100$ : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Componente  $v$  da velocidade.

As Figuras 4.24 e 4.25 nos permite constatar que o aumento de  $\gamma$  acarretará em um aumento das forças do escoamento.

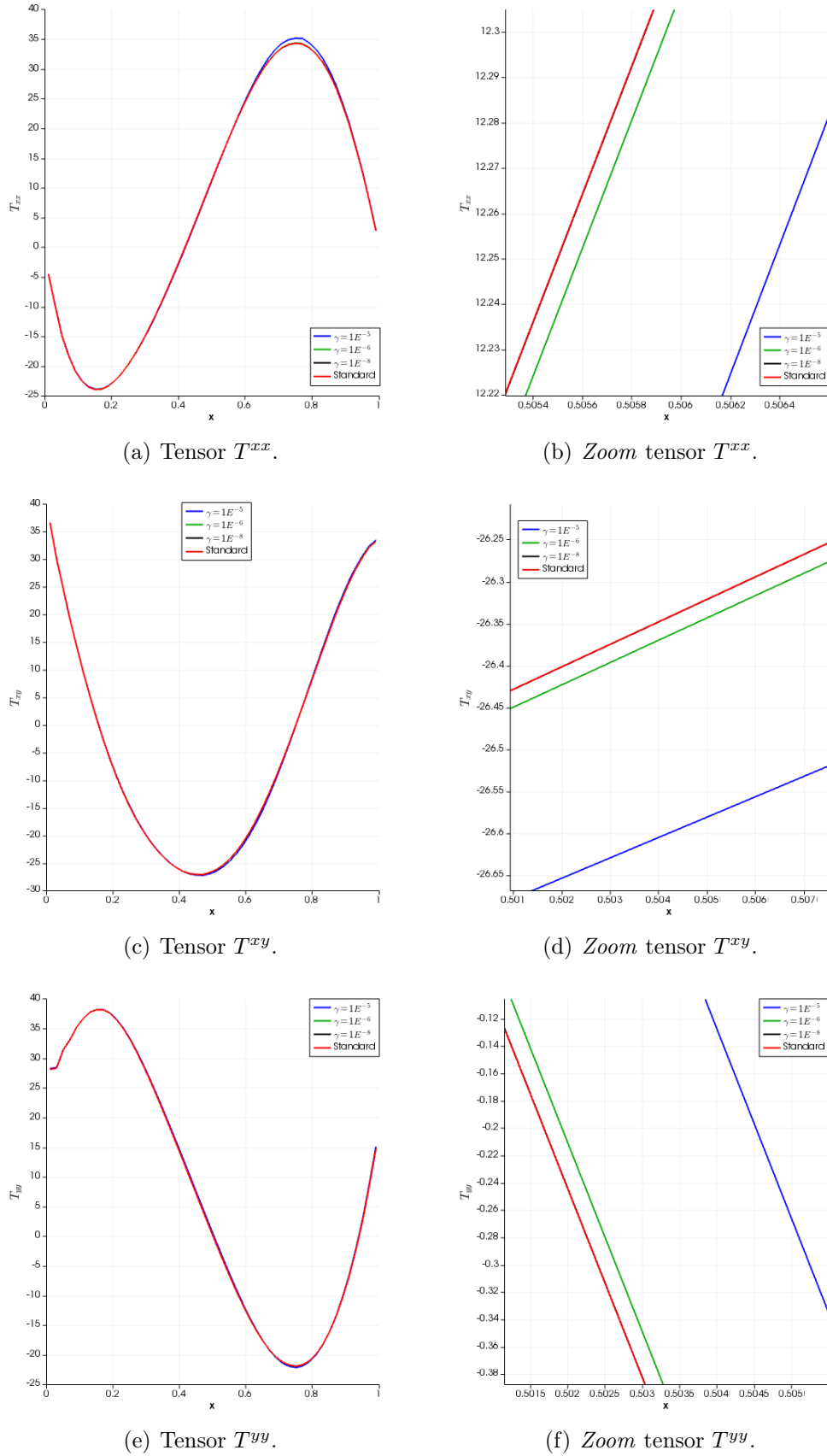


Figura 4.25: Variação de  $\gamma$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0.15$ ,  $Re = 0.05$ ,  $\beta = 0.1$  e  $L = 100$ : (a) Tensor  $T^{xx}$ . (b) Zoom tensor  $T^{xx}$ . (c) Tensor  $T^{xy}$ . (d) Zoom tensor  $T^{xy}$ . (e) Tensor  $T^{yy}$ . (f) Zoom tensor  $T^{yy}$ .

### 4.3.4 Variação do Número de Reynolds

O escoamento em uma cavidade é caracterizado por zonas de recirculação, o tamanho destas áreas variam de acordo com o número de Reynolds [12]. Por este motivo esta avaliação é tão importante para tal geometria.

Na Figura 4.26 temos as linhas de corrente para dois casos utilizando o modelo FENE-CR com a viscosidade variando com pressão, em ambos temos os parâmetros  $Wi = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$  e  $L = 100$  para  $\gamma = 1.0E^{-5}$ , em (a) temos  $Re = 0.01$  e em (b) temos  $Re = 100$ . Note que quando o número de Reynolds é alto como em (b), ocorre um aumento no tamanho dos vórtices que se formam nos cantos da cavidade.

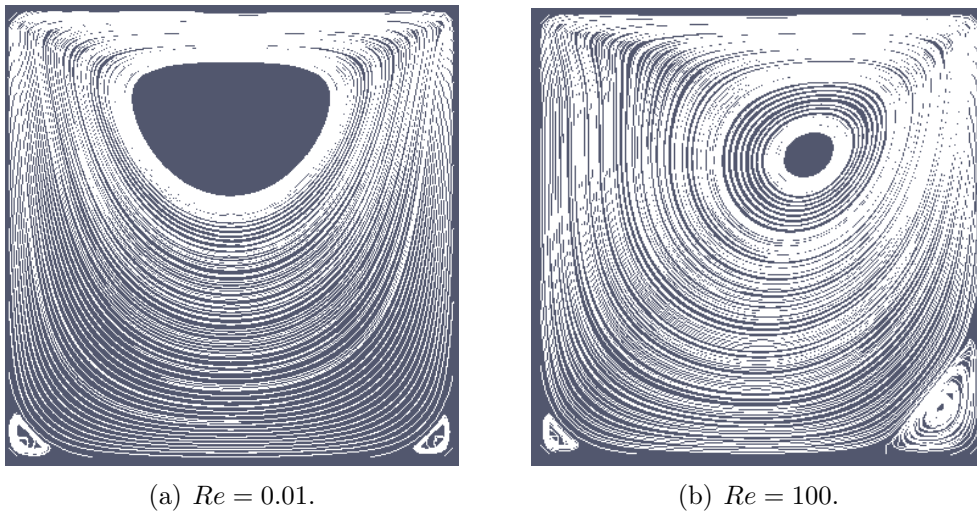


Figura 4.26: Linhas de corrente em uma cavidade utilizando o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão: (a)  $Re = 0.01$ . (b)  $Re = 100$ . para  $\gamma = 1.0E^{-5}$ .

Considerando-se fixo os parâmetros  $Wi = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$  foram adotados os valores de  $Re = 0.01, 0.1, 0.25, 0.5, 1.0, 5.0, 10.0$  e  $100.0$ , para o modelo FENE-CR com a viscosidade variando de acordo com a pressão, obtendo os seguintes resultados.

As Figuras 4.27 e 4.28 apresentam os resultados obtidos para o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão para diversos valores de Reynolds em um corte no centro da cavidade paralelo ao eixo  $x$  em  $y = 0.5$ , as imagens (b),(d) e (f) de 4.28 foram feitas desprezando  $Re = 0.01$  e  $Re = 100$ , para melhorar a visualização dos padrões de tal variação. Através da análise das componentes de velocidade, pode-se afirmar que se trata de uma área de recirculação por haver presença de velocidade negativa, para os tensores pode-se notar que o número de Reynolds baixo causa uma elevação nas forças envolvidas no escoamento.

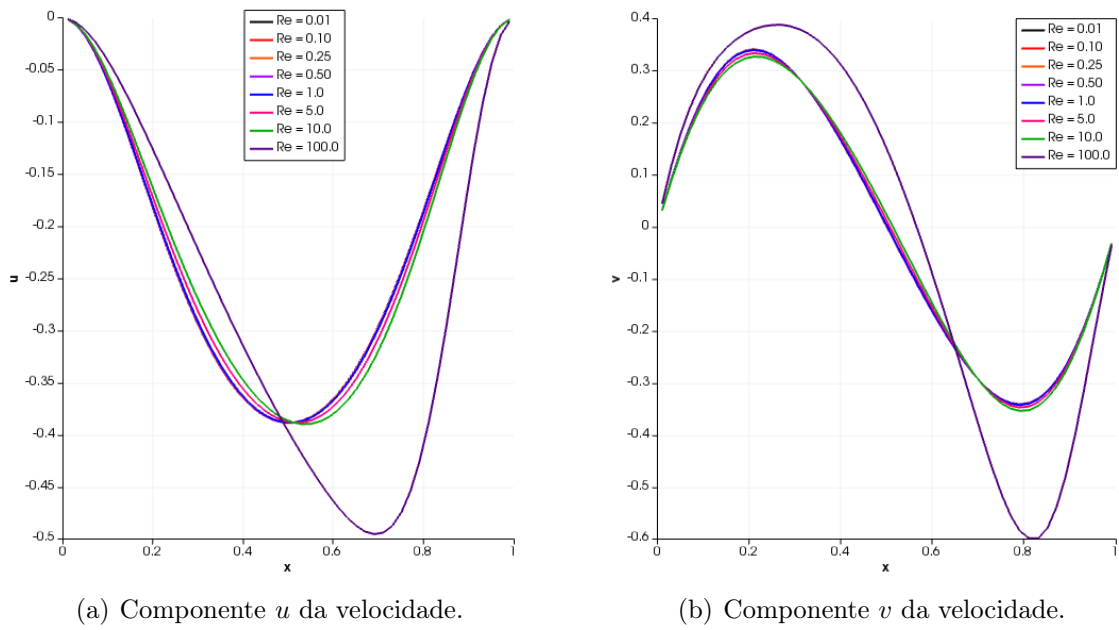


Figura 4.27: Variação de  $Re$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0,01$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Componente  $v$  da velocidade.

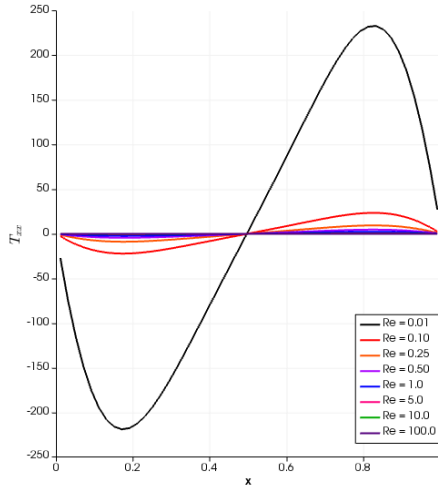
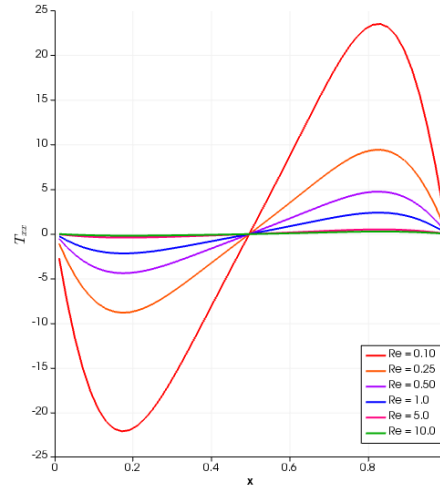
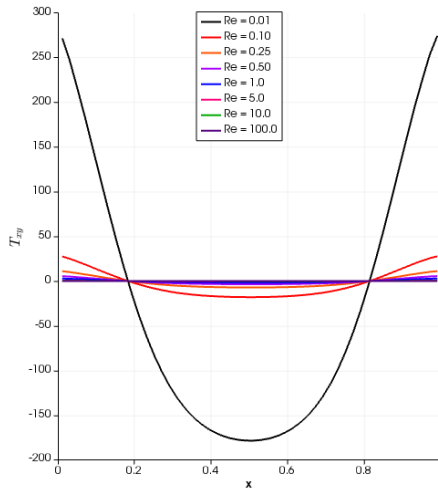
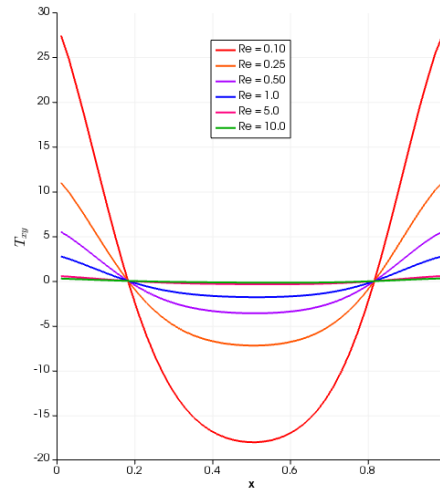
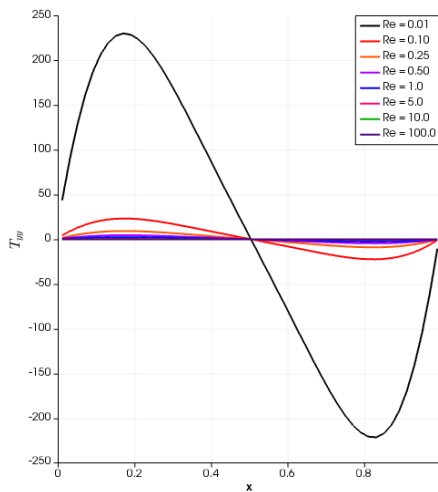
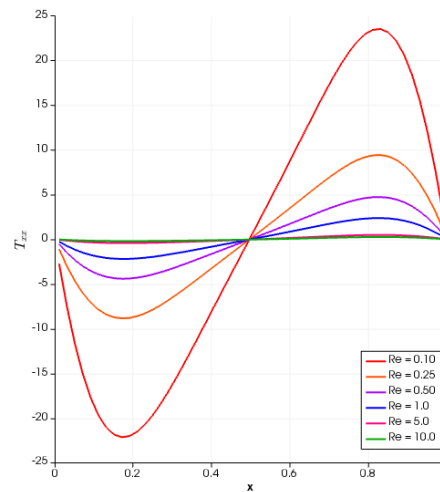
(a) Tensor  $T^{xx}$ .(b) Zoom tensor  $T^{xx}$ .(c) Tensor  $T^{xy}$ .(d) Zoom tensor  $T^{xy}$ .(e) Tensor  $T^{yy}$ .(f) Zoom tensor  $T^{yy}$ .

Figura 4.28: Variação de  $Re$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0,01$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Tensor  $T^{xx}$ . (b) Zoom tensor  $T^{xx}$ . (c) Tensor  $T^{xy}$ . (d) Zoom tensor  $T^{xy}$ . (e) Tensor  $T^{yy}$ . (f) Zoom tensor  $T^{yy}$ .

### 4.3.5 Variação do Número de Weissenberg

A grande dificuldade desta geometria é estabelecer parâmetros que produzam resultados coerentes e estáveis (ver por exemplo [11, 13]). Grillet [13] fez um estudo de cavidades usando elementos finitos e determinou um  $Wi$  crítico para tal geometria, além de estabelecer relações das instabilidade com o formato da cavidade. Posteriormente [11], *log-conformation* foi utilizado para alcançar a estabilidade nas simulações numéricas e possibilitar a obtenção de valores mais altos para  $Wi$ . Baseando-se nestes estudos fizemos uma seleção previa de tais parâmetros.

Na Figura 4.29 temos as linhas de corrente para dois casos utilizando o FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, em ambos temos os parâmetros  $Re = 0.25$ ,  $\beta = 0.1$  e  $L = 100$  para  $\gamma = 1.0E^{-5}$ , em (a) temos  $Wi = 0.01$  e em (b) temos  $Wi = 0.15$ . Note que quando o número de Weissenberg é maior como em (b), as instabilidades ficam maiores.

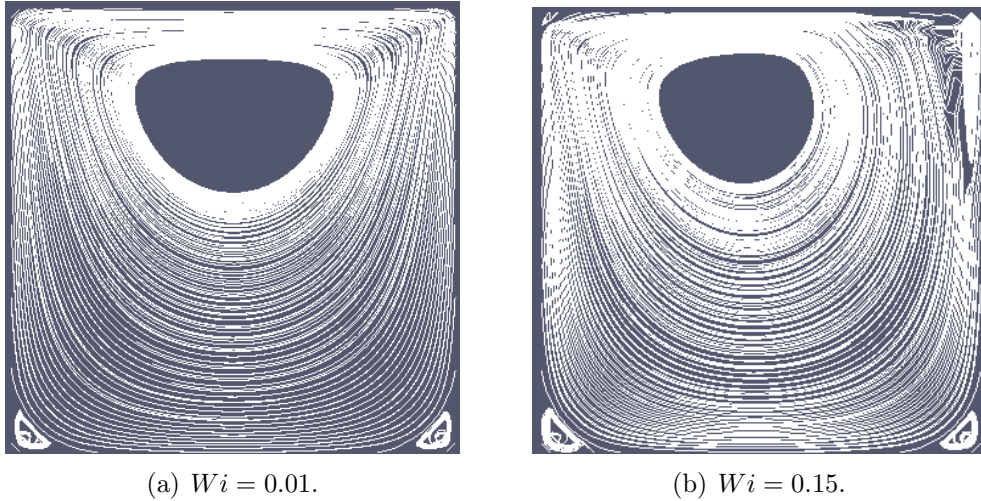


Figura 4.29: Linhas de corrente em uma cavidade utilizando o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão: (a)  $Wi = 0.01$ . (b)  $Wi = 0.15$ . para  $\gamma = 1.0E^{-5}$ .

Desta forma, considerando-se fixo os parâmetros  $Re = 0.25$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ , para  $Wi = 0.005, 0.01, 0.03$  e  $0.05$ , para o modelo FENE-CR em que a viscosidade muda de acordo com a pressão, obtendo os seguintes resultados.

A Figura 4.30 nos permite observar que o número de Weissenberg é extremamente importante para esta geometria, pois quanto menor for o  $Wi$ , a modelagem com a viscosidade variando com a pressão faz com que haja uma amplificação nas instabilidades, nos obrigando a usar  $Wi$  ainda menores do que o modelo FENE-CR *Standard*, pois como vimos em 4.3.2 os tensores para a nova modelagem são maiores do que para o modelo *Standard*.

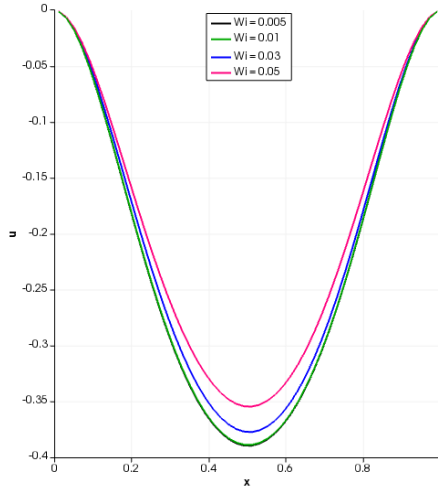
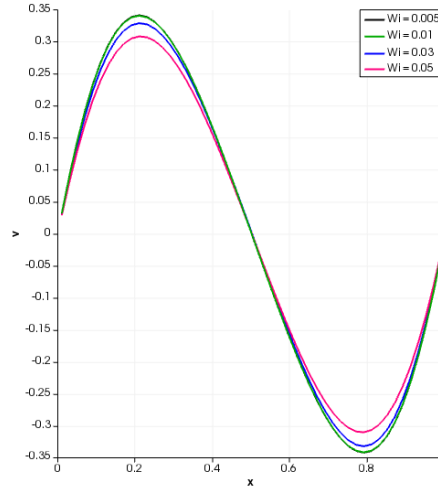
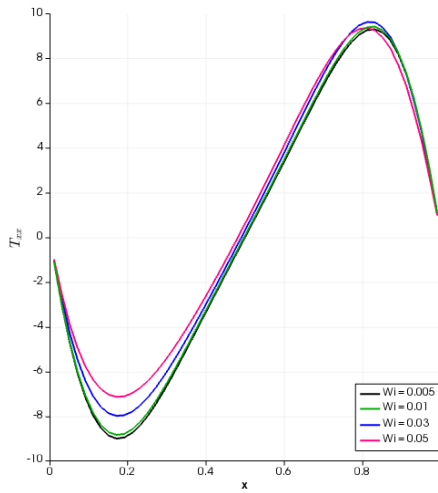
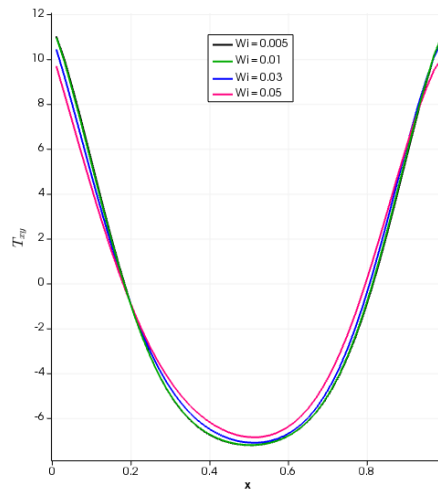
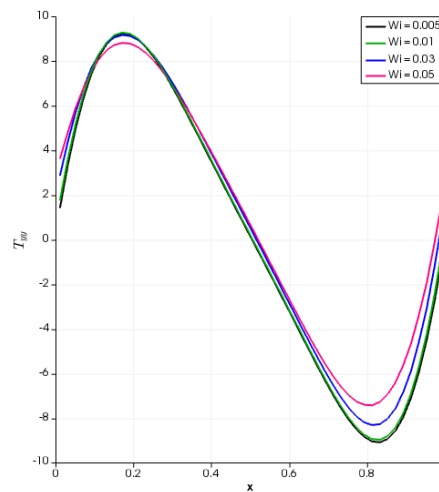
(a) Componente  $u$  da velocidade.(b) Componente  $v$  da velocidade.(c) Tensor  $T^{xx}$ .(d) Tensor  $T^{xy}$ .(e) Tensor  $T^{yy}$ .

Figura 4.30: Variação de  $Wi$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Re = 0,25$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Componente  $v$  da velocidade. (c) Tensor  $T^{xx}$ . (d) Tensor  $T^{xy}$ . (e) Tensor  $T^{yy}$ .

### 4.3.6 Variação do Parâmetro de Extensibilidade

Nesta subseção será abordado a influência do parâmetro de extensibilidade  $L$ . Considerando-se fixo os parâmetros  $Re = 0.01$ ,  $Wi = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$  para  $L = 100, 300, 500$  e  $1000$ , para o modelo FENE-CR em que a viscosidade muda de acordo com a pressão, obtendo os seguintes resultados para  $0 \leq x \leq 1$  em  $y = 0.5$ .

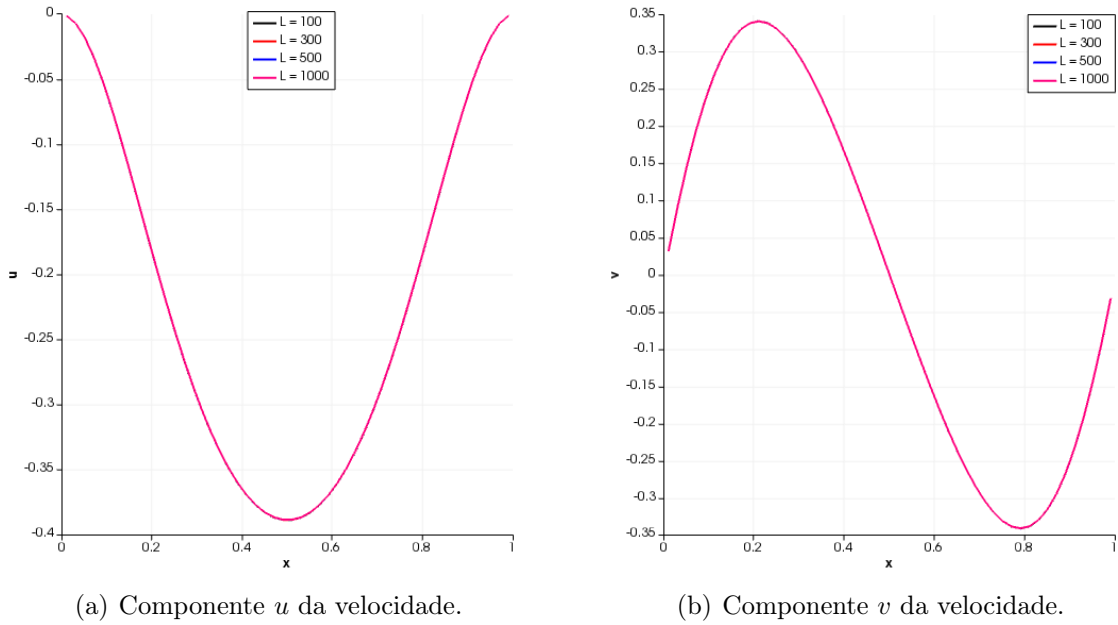


Figura 4.31: Variação de  $L$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0.01$ ,  $Re = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Componente  $v$  da velocidade.

As Figuras 4.31 e 4.32 nos permite observar que a mudança do parâmetro  $L$  não acarreta em grandes alterações, nem para a velocidade nem para os tensores. Porém, ao observar o *zoom* do tensor  $T^{xx}$  em (b) da Figuras 4.32 pode-se notar que o aumento de  $L$  provoca um aumento do tensor.

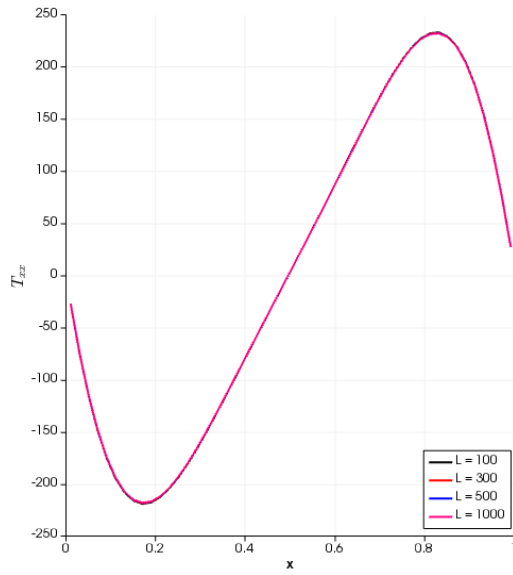
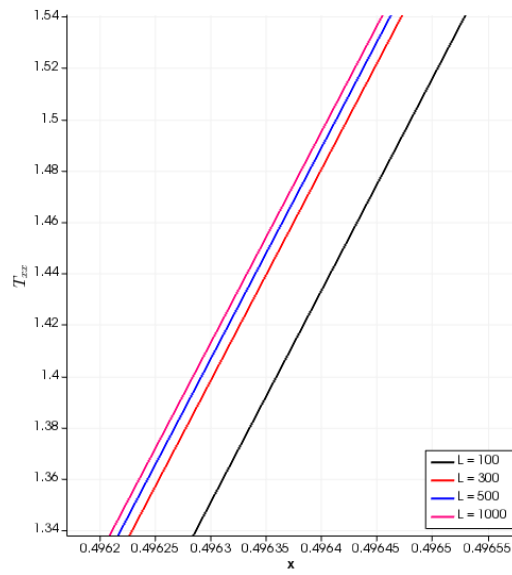
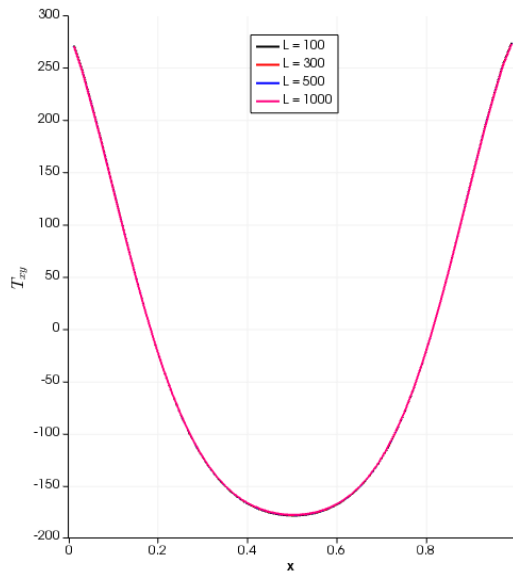
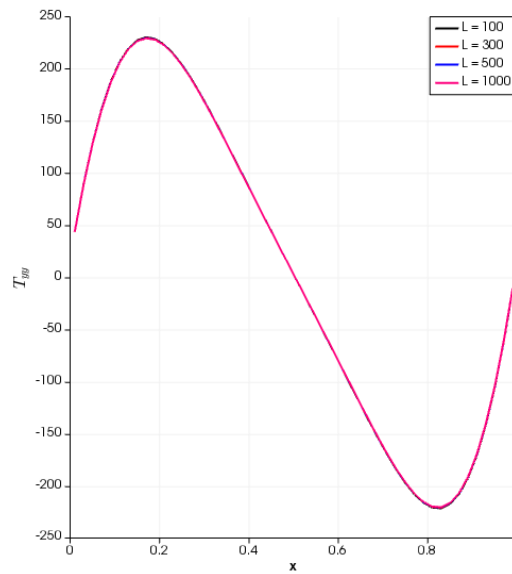
(a) Tensor  $T^{xx}$ .(b) Zoom tensor  $T^{xx}$ .(c) Tensor  $T^{xy}$ .(d) Tensor  $T^{yy}$ .

Figura 4.32: Variação de  $L$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0.01$ ,  $Re = 0.01$ ,  $\beta = 0.1$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Tensor  $T^{xx}$ . (b) Zoom tensor  $T^{xx}$ . (c) Tensor  $T^{xy}$ . (d) Tensor  $T^{yy}$ .

### 4.3.7 Variação do Parâmetro $\beta$

Nesta subseção temos a análise do parâmetro  $\beta$  para a nova modelagem proposta.

Na Figura 4.33 temos as linhas de corrente para dois casos utilizando o FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, em ambos temos os parâmetros  $Re = 0.01$ ,  $Wi = 0.01$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ , em (a) temos  $\beta = 0.1$  e em (b) temos  $\beta = 0.9$ . A variação do parâmetro  $\beta$  nos permite visualizar uma formação diferente dos vórtices.

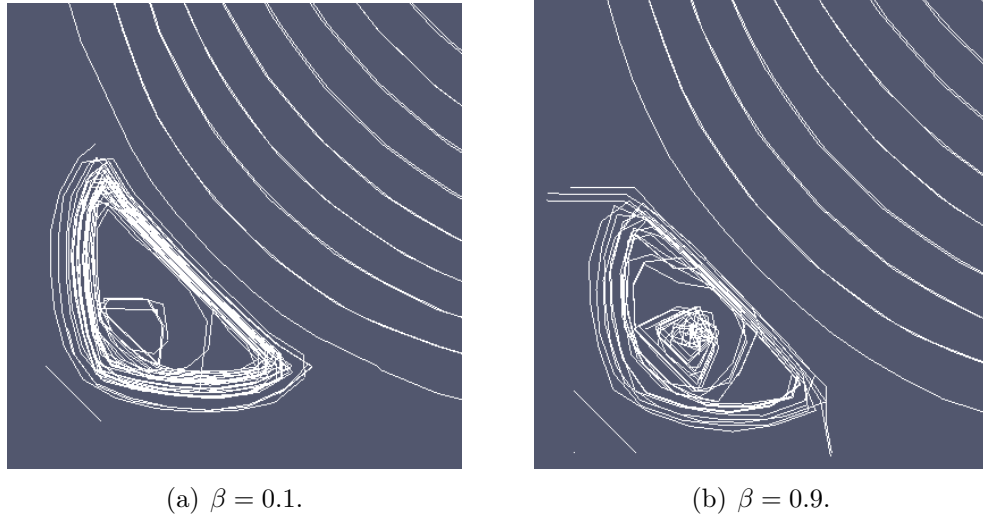


Figura 4.33: *Zoom* das linhas de corrente no canto inferior esquerdo de uma cavidade utilizando o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão.

Considerando-se fixo os parâmetros  $Re = 0.01$ ,  $Wi = 0.01$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$  para  $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$  e  $0.9$ , para o modelo FENE-CR em que a viscosidade muda de acordo com a pressão, obtendo os seguintes resultados.

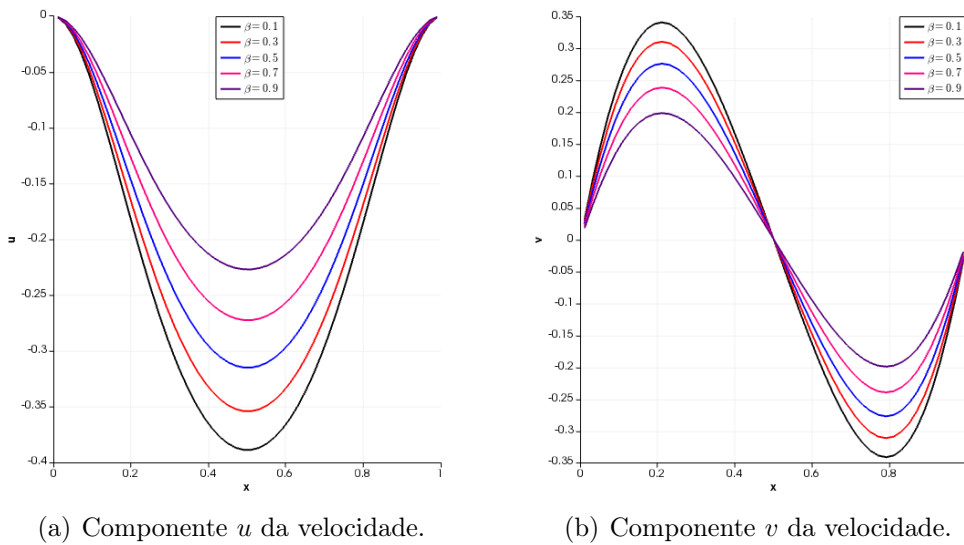


Figura 4.34: Variação de  $\beta$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0.01$ ,  $Re = 0.01$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Componente  $u$  da velocidade. (b) Componente  $v$  da velocidade.

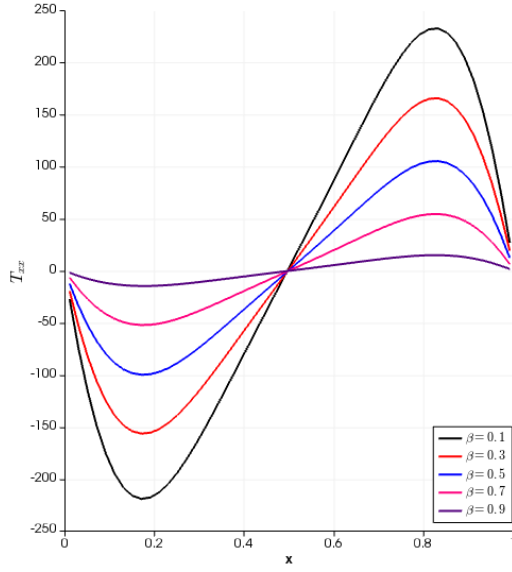
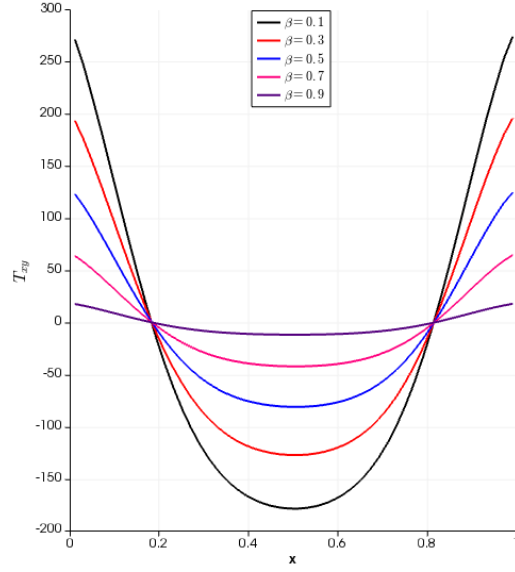
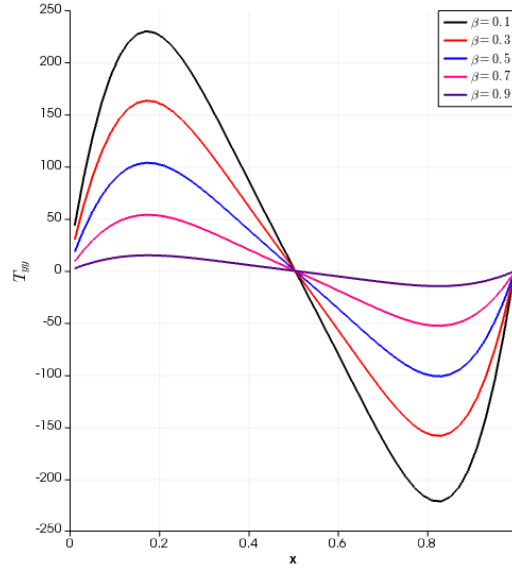
(a) Tensor  $T^{xx}$ .(b) Tensor  $T^{xy}$ .(c) Tensor  $T^{yy}$ .

Figura 4.35: Variação de  $\beta$  em uma cavidade com o modelo FENE-CR em que a viscosidade varia de acordo com a pressão, com  $Wi = 0.01$ ,  $Re = 0.01$ ,  $L = 100$  e  $\gamma = 1.0E^{-5}$ : (a) Tensor  $T^{xx}$ . (b) Tensor  $T^{xy}$ . (c) Tensor  $T^{yy}$ .

As Figuras 4.34 e 4.35 nos permite constatar que a diminuição do parâmetro  $\beta$  acarreta em um aumento nos valores absolutos tanto dos tensores quanto das componentes da velocidade.

## Conclusão

O foco deste trabalho foi apresentar uma modelagem matemática para escoamentos viscoelásticos com viscosidade variando de acordo com a pressão. Aplicamos a modelagem exponencial para a viscosidade no escoamento de Poiseuille e no problema da cavidade. Nesta modelagem quando o parâmetro  $\gamma \rightarrow 0$  o modelo aproxima-se do modelo *Standard*.

Foi utilizada a plataforma FreeFlow2D de maneira ampliar as funcionalidades da mesma, onde as discretizações são feitas em uma malha deslocada pela técnica de diferenças finitas, tendo majoritariamente as aproximações de ordem 2 para as derivadas espaciais e aproximação de ordem 1 para as derivadas temporais.

As simulações realizadas forneceram resultados coerentes, se aproximando do usual quando  $\gamma \rightarrow 0$ . Na verificação da metodologia, houve o decaimento do erro ao utilizar malhas mais refinadas. Na comparação das duas modelagens para diversos parâmetros foi possível perceber a influência da viscosidade variando com a pressão nos escoamento estudados. No problema do canal, há um aumento das tensões quando utiliza-se a nova modelagem. Foi possível perceber nos nossos estudos que o aumento mais acentuado ocorreu com o tensor  $T_{xx}$  para variação de Reynolds. Esta variação de Reynolds implica diretamente na variação do número de Elasticidade ( $EL$ ), o qual exerce maior influência quanto maior for. Já o parâmetro menos influente neste escoamento com a nova modelagem foi o parâmetro  $L$ . Em conformidade o problema da cavidade apresentou o mesmo padrão, onde o número de Reynolds acentua as variações nas forças do escoamento e o parâmetro  $L$  não provoca grandes mudanças para tal geometria.

A metodologia numérica aplicada neste trabalho é apta à simular escoamentos viscoelásticos com variação da viscosidade dependendo da pressão, utilizando como base o modelo FENE-CR.

Sendo assim, tal trabalho amplia as possibilidades para trabalhos futuros. Um próximo passo é considerar  $\lambda$  o tempo de relaxação, também variando com a pressão, para uma modelagem mais completa dentro desta questão. A partir disso, estudos paramétricos mais detalhados para estes e outros problemas podem gerar importantes *benchmarks* para a literatura.



---

## Referências

- [1] J. Ahrens; B. Geveci; C. Law. Paraview: An end-user tool for large data visualization. *Elsevier*, 2005. ISBN-13: 978-0123875822, <https://www.paraview.org>.
- [2] M.A. Alves; P.J. Oliveira; F.T. Pinho. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, 41:47–75, 2003.
- [3] U. Ayachit. The paraview guide: A parallel visualization application. *Kitware*, 2015. ISBN 978-1930934306, <https://www.paraview.org>.
- [4] C. Barus. Note on the dependence of viscosity on pressure and temperature. *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, 27:13–18, 1891.
- [5] C. Barus. Isothermals, isopiestic and isometrics relative to viscosity. *American Journal of Science*, 45:87–96, 1893.
- [6] R.B. Bird; R.C. Armstrong; O. Hassager. Dynamics of polymeric liquids. *Kinetic Theory*, 2, 1987.
- [7] E.A. Brujan. *Cavitation in Non-Newtonian Fluids*. Springer, 2011.
- [8] M.D. Chilcott; J.M. Rallison. Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 29:381–432, 1988.
- [9] A.J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *American Mathematical Society*, 22:745–762, 1968.
- [10] H. Demir. Numerical modelling of viscoelastic cavity driven flow using finite difference simulations. *Applied Mathematics and Computation*, 166(1):64–83, 2005.
- [11] R. Fattal; R. Kupferman. Time-dependent simulation of viscoelastic flows at high Weissenberg number using the log-conformation representation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 126(1):23–37, 2005.
- [12] A. O. Fortuna. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Flúidos*. Edusp, 2 edition, 2012.
- [13] A.M. Grillet; B. Yang; B. Khomami; E.S.G. Shaqfeh. Modeling of viscoelastic lid driven cavity flow using finite element simulations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 88(1-2):99–131, 1999.
- [14] F.H. Harlow; A.A. Amsden. A simplified mac technique for incompressible fluid flow calculations. *Journal of Computational Physics*, 6(2):322–325, 1970.

- [15] F.H. Harlow; J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8:2182–2189, 1965.
- [16] K. D. Housiadas. An exact analytical solution for viscoelastic fluids with pressure-dependent viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 223:147–156, 2015.
- [17] K.D. Housiadas; G.C. Georgiou. Analytical solution of the flow of a Newtonian fluid with pressure-dependent viscosity in a rectangular duct. *Applied Mathematics and Computation*, 322:123–128, 2018.
- [18] J. Hron; J. Málek. Simple flows of fluids with pressure-dependent viscosities. *Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 457(2011):1603–1622, 2001.
- [19] A. Kalogirou; S. Poyiadji; G.C. Georgiou. Incompressible Poiseuille flows of Newtonian liquids with a pressure-dependent viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166:413–419, 2011.
- [20] E. Marušić-Paloka; I. Pažanin. A note on the pipe flow with a pressure-dependent viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 197:5–10, 2013.
- [21] S. McKee; M. F. Tomé; V. G. Ferreira; J. A. Culminato; A. Castelo; F. S. Souza; N. Mangiavacchi. The mac method. *Computers & Fluids*, 37(8):907 – 930, 2008.
- [22] C.L.M.H. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, 6:389–416, 1822.
- [23] C.M. Oishi; F.P. Martins; M.F. Tomé; J.A. Cuminato; S. McKee. Numerical solution of the eXtended Pom-Pom model for viscoelastic free surface flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(3):165–179, 2011.
- [24] C.M. Oishi; F.P. Martins; M.F. Tomé; M.A. Alves. Numerical simulation of drop impact and jet buckling problems using the eXtended Pom-Pom model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 169-170:91–103, 2012.
- [25] P.J. Oliveira. Alternative derivation of differential constitutive equations of the oldroyd-b type. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 160(1):40–46, 2009.
- [26] F.M. Pacanelli. Desenvolvimento de um método numérico implícito para a simulação de escoamentos viscoelásticos com superfícies livres. Master's thesis, ICMC-USP, São Carlos, 2009.
- [27] G.S. Paulo; C.M. Oishi; M.F. Tomé; M.A. Alves; F.T. Pinho. Numerical solution of the FENE-CR model in complex flows. *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 204:50–61, 2014.
- [28] S.D. Poisson. Mémoire sur les Équations générales de l'Équilibre et du mouvement des corps solides Élastiques et des fluids. *Journal de l'Ecole Polytechnique de Paris*, 13:139–166, 1831.
- [29] G.G. Stokes. On the theory of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 8:287–305, 1845.

- 
- [30] M.F. Tome; S. McKee. Gensmac: A computational marker and cell method for free surface flows in general domains. *Journal of Computational Physics*, 110(1):171 – 186, 1994.
  - [31] M. F. Tomé; A. Castelo; J. M. Nóbrega; O. S. Carneiro; G.S. Paulo; F. T. Pereira. Numerical and experimental investigations of three-dimensional container filling with newtonian viscous fluids. *Computers & Fluids*, 90:172–185, 2014.
  - [32] R. Témam. Sur l’approximation de la solution des equations de navier-stokes par la methode de pas fractionnaires (ii). *Archieves of Rational Mechanics and Analysis*, 33:377–385, 1969.