



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.008/02

Um Estudo Sobre o Fator de Forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$  Usando Regras de Soma da QCD

Leandro Batista Holanda

Orientador

Dr. Gastão Inácio Krein

Co-Orientadora

Dr<sup>a</sup>. Marina Nielsen

Maio de 2002

*Aos meus avós,  
João, Ernestina e Dolores.*

## Agradecimentos

Aos meus orientadores Profs. Gastão Inácio Krein e Marina Nielsen pela orientação nos meus estudos e trabalho no dia-a-dia do Mestrado.

À Prof<sup>a</sup> Marina Nielsen um agradecimento em especial pela disposição, empenho e paciência em me ensinar o método das Regras de Soma da QCD e acompanhamento dos cálculos.

À Dr<sup>a</sup> Raquel Marques de Carvalho pelas discussões e ajuda com o método das Regras de Soma da QCD.

Ao Sergio Antunes, pela ajuda com os cálculos numéricos.

Aos demais colegas de grupo, Patrícia, Victor e Wanderson pelo convívio e discussões sempre úteis.

Agradeço a todos os funcionários do Instituto de Física Teórica pelo auxílio.

Aos demais estudantes do Instituto por tornarem o ambiente de trabalho agradável.

Em especial, à minha amada Elaine por ser a fonte das minhas inspirações.

Agradeço, finalmente, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro que tornou possível a realização desta dissertação.

---

## Resumo

As Regras de Soma da QCD foram usadas para a obtenção do fator de forma no vértice  $KK^*\pi$  e das constantes de decaimento,  $f_K$  e  $f_{K^*}$ . O método das Regras de Soma da QCD se baseia no princípio da dualidade no qual assume-se que é possível descrever simultaneamente um hádron em dois níveis: em termos dos graus de liberdade de quarks e glúons (chamado de lado da QCD) e em termos de graus de liberdade hadrônicos (chamado de lado fenomenológico). As constantes de decaimento ficaram de acordo com os resultados experimentais. Entretanto, nosso trabalho mostrou que a corrente axial, usada para descrever o káon, não é apropriada para descrever o fator de forma.

**Palavras Chaves:** Cromodinâmica Quântica; Regras de Soma; Constantes de Decaimento  $f_K$  e  $f_{K^*}$ ; Fator de Forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$ .

**Áreas do conhecimento:** 1.05.03.00-5

---

## Abstract

The QCD Sum Rules had been used to evaluate the form factor in the vertex  $KK^*\pi$  and the decay constants,  $f_K$  and  $f_{K^*}$ . The method of QCD Sum Rules is based on the duality principle in which it is assumed that the hadrons can simultaneously be described in two levels: quarks and hadrons. The decay constants obtained are in good agreement with the experimental results. However, this work showed that the axial current, used to describe the meson  $K$  is not appropriate to study the form factor.

**Key words:** Quantum Chromodynamics; Sum Rules.  $f_K$  and  $f_{K^*}$  Decay Constants;  $g_{KK^*\pi}(q^2)$  Form Factor.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Os Mésons . . . . .	3
1.2	As Regras de Soma da QCD . . . . .	4
<b>2</b>	<b>As Regras de Soma da QCD</b>	<b>8</b>
2.1	O Método das Regras de Soma da QCD . . . . .	9
2.1.1	O Lado Fenomenológico . . . . .	9
2.1.2	O Lado da QCD . . . . .	10
2.2	Aplicando as Regras de Soma . . . . .	12
<b>3</b>	<b>A Constante de Decaimento dos Mésons <math>K^*</math> e <math>K</math></b>	<b>16</b>
3.1	A constante de decaimento $f_{K^*}$ . . . . .	17
3.1.1	O Lado Fenomenológico . . . . .	17
3.1.2	O Lado da QCD . . . . .	17
3.1.3	As Regras de Soma . . . . .	22
3.2	Cálculo do $f_K$ usando corrente axial-vetorial . . . . .	22
3.2.1	O Lado Fenomenológico . . . . .	22
3.2.2	O Lado da QCD . . . . .	24
3.2.3	As Regras de Soma . . . . .	26
3.3	Cálculo do $f_K$ usando corrente pseudoescalar . . . . .	27
3.3.1	O Lado Fenomenológico . . . . .	27
3.3.2	O Lado da QCD . . . . .	27
3.3.3	As Regras de Soma . . . . .	28
<b>4</b>	<b>O fator de forma <math>g_{KK^*\pi}(q^2)</math></b>	<b>29</b>
4.1	O fator de forma $g_{KK^*\pi}(q^2)$ . . . . .	30
4.2	O Lado Fenomenológico . . . . .	30
4.3	O Lado da QCD . . . . .	31
4.3.1	Termo Perturbativo . . . . .	31
4.3.2	Condensado do quark $s$ . . . . .	33

---

4.4	As Regras de Soma . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Resultados e Conclusões</b>	<b>34</b>
5.1	A constante de decaimento $f_{K^*}$ . . . . .	35
5.2	A constante de decaimento $f_K$ . . . . .	35
5.3	O fator de forma $g_{KK^*\pi}(q^2)$ . . . . .	37
5.4	Conclusões e perspectivas . . . . .	40
<b>A</b>	<b>Contribuições Perturbativas e Não-Perturbativas</b>	<b>41</b>
A.1	Contribuições Perturbativas . . . . .	41
A.2	Contribuições Não-Perturbativas . . . . .	44
<b>B</b>	<b>Duplas Descontinuidades</b>	<b>45</b>
	<b>Referências</b>	<b>49</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Os Mésons

Pode-se dizer que a idéia da existência dos mésons surgiu em 1934 quando Yukawa assumiu que o próton e o nêutron são atraídos um pelo outro por algum tipo de *campo*, assim como o elétron é atraído pelo núcleo através do campo elétrico e a Lua pela Terra através do campo gravitacional. Yukawa perguntou-se, então: Uma vez que este campo deve ser quantizado, quais deveriam ser as propriedades de seu *quantum*? - a partícula (análoga ao fóton) cuja troca é responsável pelas características da força forte? Por exemplo, qual deveria ser a massa e alcance desse *quantum*? Yukawa calculou a massa dessa partícula e, devido à grandeza dessa massa ( próxima de 300 vezes a do elétron quase 1/7 da massa do próton ) a partícula de Yukawa ficou conhecida como *méson* (o que significa “peso intermediário”).

Em 1946, Powell e seus colaboradores [1] descobriram a partícula - que eles chamaram  $\pi$  (ou pión) - de peso intermediário quando estudavam raios cósmicos.

A descoberta do méson  $K$ , ou káon, data de dezembro de 1947, quando Rochester e Butler [2] publicaram uma fotografia de uma câmara de bolhas. A fotografia apresentava o seguinte decaimento:

$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (1.1)$$

Em 1949, Powell e colaboradores [3] publicaram uma fotografia mostrando o decaimento de um káon carregado:

$$K^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \quad (1.2)$$

O  $K^0$  foi primeiro chamado de  $V^0$  e mais tarde de  $\theta^0$ ; o  $K^+$  foi originalmente chamado de  $\tau^+$ . Suas identificações como versões de neutra e carregada de uma mesma partícula não era completamente estabelecida até o ano de 1956, quando Lee e Yang [4] resolveram o problema sugerindo que a paridade não era conservada

em um dos decaimentos. O estudo de processos de decaimento envolvendo os káons foi um dos que levaram à descoberta do quark  $s$  além da conservação e violação da estranheza.

Fizemos essa breve história dos mésons  $K$  e  $\pi$  pois é o fator de forma do vértice  $K$ ,  $K^*$  e  $\pi$  à partir das Regras de Soma da QCD (QCDSR) que iremos estudar. O fator de forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$  tem uma importante função nos modelos fenomenológicos para a força nuclear e matéria nuclear. Hoje acredita-se muito que a QCD é a teoria fundamental da interação forte. Já o comportamento complicado da QCD não-perturbativa causa a obtenção, por primeiros princípios, das propriedades hadrônicas altamente não trivial. Assim, um cálculo quantitativo do fator de forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$  com uma aproximação teórica tratável e confiável torna-se valioso. Assim, nos capítulos que se seguem estudaremos esse fator de forma.

## 1.2 As Regras de Soma da QCD

As QCDSR foram primeiramente formuladas por M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, e V. I. Zakharov [5] há mais de 20 anos. Aplicada originalmente para características hadrônicas estáticas mais simples como massas, larguras leptônicas, etc., elas também foram usadas para calcular funções mais complicadas como funções de onda hadrônicas e fatores de forma.

Para começar, vamos discutir brevemente as questões básicas

- O que são as QCDSR?
- Como as QCDSR funcionam?
- Por que nós precisamos das QCDSR?

O método das QCDSR pode ser resumido como se segue:

- Uma função de correlação é construída em termos das propriedades dos hádrons, quando são introduzidas características hadrônicas como massas e constantes de acoplamento. Este é o chamado lado fenomenológico das QCDSR.
- Esta função de correlação também é calculada em termos dos graus de liberdade dos quarks e dos glúons. Este é o lado teórico (ou lado da QCD) e é obtido quando fazemos uma expansão do produto de operadores de Wilson, *operator-product expansion* - OPE [6, 7], da função de correlação e tomamos seu valor esperado com respeito ao vácuo físico. O operador unitário nos dá a contribuição perturbativa e os valores esperados no vácuo dos demais operadores nos fornecem as contribuições não-perturbativas.

- Relacionando os dois lados, obtemos informações das propriedades hadrônicas em termos de parâmetros que caracterizam o vácuo da QCD.

O método é extremamente útil para calcular propriedades dos estados fundamentais hadrônicos de mais baixa massa. Como a interação total da QCD é fortemente não-perturbativa, alguns tentam separar as contribuições em perturbativas e em não-perturbativas, descrevendo a última por um conjunto de regras de Feynman efetivas fenomenologicamente.

O ponto de partida para as QCDSR, é a função de correlação. No caso de uma função de dois pontos, o operador a ser expandido na OPE é o produto de duas correntes ordenadas temporalmente:

$$i \int dx e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ j_\Gamma(x) j_\Gamma(0) \} | 0 \rangle = C_I^\Gamma + \sum_n C_n^\Gamma(q) O_n, \quad (1.3)$$

onde os coeficientes  $C^\Gamma$  carregam as informações das flutuações de campos em pequenas escalas; as flutuações em larga escala estão representadas nos elementos de matriz dessa série de operadores locais  $O_n$ .

As QCDSR partem do fato de que o tensor de polarização do vácuo pode ser descrito num nível hadrônico, isto é, em termos de hádrons e de ressonâncias. O teorema ótico expressa que a seção de choque total de uma certa reação iguala a parte imaginária com sua amplitude de espalhamento para a frente (*forward-scattering amplitude*). Isto pode ser entendido pelo fato que a seção de choque é proporcional ao quadrado de alguma amplitude.

A amplitude de espalhamento para a frente corresponde ao tensor de polarização do vácuo. Daí, para um acoplamento vetorial nós poderemos escrever

$$\text{Im}[\Pi^V(s = q^2)] = \frac{9}{64\pi^2 \alpha^2} s \sigma(e^+ + e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hádrons}). \quad (1.4)$$

Para uma virtualidade baixa do fóton, há apenas contribuição quando  $q^2$  é exatamente o quadrado da massa de uma ressonância hadrônica com números quânticos do fóton, isto é, uma ressonância  $1^{--}$ . (Aqui 1 é o spin, o primeiro '-' representa a paridade interna, e o segundo '-', C paridade). Portanto o tensor de polarização do vácuo pode ser pensado como uma soma de funções delta tipo  $\delta(q^2 - m_R^2)$ . Na realidade os estados hadrônicos são preferencialmente largos, mas aqui eles podem ser aproximados por funções delta. Como  $\Pi^V$  é adimensional, este deve ser multiplicado pela única quantidade dimensional  $s = m_R^2$ . Todas outras constantes aparecendo aqui são absorvidas num parâmetro  $g_R$ , e nós temos:

$$\text{Im}[\Pi^V(s = q^2)] = \sum_q \frac{\pi}{e_q^2} \sum_R \frac{m_R^2}{g_{qR}^2} \delta(s - m_R^2). \quad (1.5)$$

Na eq.(1.5) a soma sobre ressonâncias foi dividida em somas de ressonâncias que requerem a criação de um par  $\bar{q}q$  de sabor  $q$ . Para  $q = c$  estes são, por exemplo,  $J/\Psi$ ,  $\Psi'$ ,  $\Psi''$ ,... Para virtualidades do fóton altas o suficiente, mais do que uma partícula pode ser criada, e ressonâncias discretas são substituídas por estados contínuos. Para virtualidades pouco acima do limiar do contínuo, a seção de choque pode ser expressa numa forma simples geral. Acima do limiar do contínuo isto é possível, desde que a seção de choque elementar  $e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q}$  possa ser inserida.

$$\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hádrons}) = \frac{4\pi \alpha^2}{3s} \sum_q e_q^2 . \quad (1.6)$$

A ressonância do  $\rho$  a 770 MeV é bastante perceptível, enquanto que as ressonâncias superiores misturam-se com o contínuo. Assumindo que o limiar do contínuo seja dado por  $s_{0f}$ , a eq.(1.5) pode ser reescrita como

$$\text{Im}[\Pi^V(s = q^2)] = \frac{3\pi}{e_f^2} \sum_q \frac{m_R^2}{g_R^2} \delta(s - m_R^2) + \sum_f \frac{9}{16\pi} e_f^2 \Theta(s - s_{0f}) . \quad (1.7)$$

Onde cada sabor  $f$  foi contado três vezes, já que existem três cores. Os limiares do contínuo  $s_{0f}$  para os diferentes sabores  $f$  podem ser tomados como parâmetros de ajuste livre. Em nosso caso nós tomamos apenas quarks  $u$  e  $d$  nos cálculos, escolhemos  $s = s_{0u} = s_{0d} \approx 1.3\text{GeV}$  e negligenciamos todas ressonâncias do  $\rho$  no primeiro termo do lado direito da eq.(1.7). Como já mencionado, a aproximação, do lado direito dessa equação, pela seção de choque de quarks livres é pobre perto do limiar do contínuo, e cuida-se de minimizar os erros resultantes dela pelo ajuste conveniente de  $s_{0f}$ . Na sequência, expandiremos o correlador na eq.(1.3) na estrutura da OPE e deste modo obteremos uma representação de  $\Pi^V$  como uma função de valores esperados de certos geradores. Por outro lado, a parte imaginária de  $\Pi^V$  pode, como discutida acima, ser parametrizada por ressonâncias discretas e uma contribuição do contínuo. Isto nos permitirá expressar a massa da ressonância mais leve em termos do valores esperados mencionados acima. Esta aproximação pode ser repetida para cada canal  $J^{PC}$  tal que muitas massas (e constantes de acoplamento) são ajustadas essencialmente por três valores esperados. Nossa confiança neste procedimento é baseada principalmente em seus sucessos: QCDSR descrevem consistentemente um grande número de medidas hadrônicas, todas com uma exatidão ao redor de 20 por cento.

Os valores esperados ajustados

$$\langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} | 0 \rangle = (360 \pm 20\text{MeV})^4 ,$$

$$\begin{aligned}
\langle 0|\bar{u}u|0\rangle &= \langle 0|\bar{d}d|0\rangle = -(225 \pm 25\text{MeV})^3, \\
\langle 0|m_s\bar{s}s|0\rangle &= -(210 \pm 5\text{MeV})^4 \\
\langle 0|m\bar{q}q|0\rangle &= -(100\text{MeV})^4, \quad m = \frac{m_u + m_d}{2}, \\
\langle 0|\bar{q}g\sigma_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}q|0\rangle &= 0.436\text{GeV}^5,
\end{aligned} \tag{1.8}$$

têm implicações físicas do estado fundamental da QCD não-perturbativa e dão, por exemplo, a densidade de energia do vácuo.

Os efeitos não-perturbativos da quebra dinâmica da simetria quiral levam a formação de condensados de quarks. As QCDSR fazem uso destes condensados como parâmetros, - não são calculados, mas sim fitados a partir do cálculo de massas e outras propriedades hadrônicas. Além dos condensados de quarks, as QCDSR fazem uso de condensados de glúons, que também são fitados fenomenologicamente. Em princípio, todos os condensados, que refletem a estrutura não-perturbativa da QCD devem ser considerados.

Até agora vimos de uma maneira geral como as QCDSR funcionam. No próximo capítulo - capítulo 2 - veremos com mais profundidade alguns de seus aspectos. Já no capítulo 3 aplicaremos as QCDSR para obter as constantes de decaimento dos mésons  $K$  e  $K^*$ ,  $f_K$  e  $f_{K^*}$  respectivamente, cujos resultados serão usados para calcularmos o fator de forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$  - no capítulo 4. Por fim, apresentaremos no capítulo 5 os resultados numéricos e concluiremos sobre os resultados obtidos.

## Capítulo 2

### As Regras de Soma da QCD

## 2.1 O Método das Regras de Soma da QCD

Os cálculos das regras de soma [5] se centralizam no operador de polarização (função de correlação) dado por

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ j(x) j^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \quad (2.1)$$

onde  $j(x)$  é o campo interpolante do hádron,  $T$  é o operador ordenação temporal e  $|0\rangle$  é o vácuo da QCD.

O campo interpolante é construído a partir de operadores de campos de quarks combinados de forma a obtermos os mesmos números quânticos da partícula em questão. No caso de mésons, por exemplo o  $K^*$ , o campo interpolante tem a forma geral

$$j_\mu(x) = \bar{s}_a(x) \gamma_\mu q_a(x), \quad (2.2)$$

onde  $q(x)$  e  $s(x)$  são operadores de campo de um quark leve e do quark estranho respectivamente, com o índice de cor  $a$ . A matriz  $\gamma_\mu$  representa a matriz de Dirac.

A suposição fundamental do método da regra de soma é o princípio da dualidade. Ou seja, assume-se que existe um intervalo sobre o qual um hádron possa ser equivalentemente descrito em ambos os níveis: quarks e hádrons. Assim, o procedimento básico do método é o seguinte: um dos níveis considera os graus de liberdade da QCD e o outro, os graus de liberdade hadrônicos. No lado da QCD utilizamos a OPE que introduz na função de correlação contribuições não-perturbativas, correspondentes aos condensados de quarks, de glúons e de quarks e glúons. No lado fenomenológico, a função de correlação é relacionada à densidade espectral hadrônica através de um conjunto completo de estados do hádron. Deste modo, o hádron em questão é descrito de dois modos distintos, que quando combinados, relacionam propriedades espectrais fenomenológicas do hádron a quantidades características da QCD.

### 2.1.1 O Lado Fenomenológico

No lado fenomenológico, a função de correlação pode ser avaliada pela inserção de uma série completa de estados físicos hadrônicos intermediários que se acoplam à corrente  $j(x)$ , assim, teremos para a função de correlação:

$$\Pi^{phen}(p) = \sum_{spins} \frac{\langle 0 | j | H(p) \rangle \langle H(p) | j^\dagger | 0 \rangle}{p^2 - M_H^2} + \text{ressonâncias} \quad (2.3)$$

onde  $|H(p)\rangle$  representa o estado hadrônico.

As propriedades analíticas da função de correlação podem ser obtidas através de uma representação espectral, escrita para cada uma de suas estruturas invariantes,

que localiza todas as singularidades em  $p^2$  no eixo real positivo

$$\Pi^{phen}(p^2) = \int_0^\infty ds \frac{\rho_{phen}(s)}{s - p^2} + \dots \quad (2.4)$$

onde  $\rho_{phen}(s)$  é a densidade espectral, que contém as propriedades espectrais dos hádrons e as reticências representam os termos de subtração (polinômios em  $p^2$  com coeficientes desconhecidos) que asseguram que a contribuição do contorno de integração no infinito se anula. Se calcularmos a parte imaginária da eq.(2.4) teremos

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \Pi^{phen}(s) \quad (2.5)$$

e, portanto

$$\Pi(p^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im} \Pi^{phen}(s)}{s - p^2} + \dots \quad (2.6)$$

### 2.1.2 O Lado da QCD

A estrutura complexa do vácuo da QCD leva-nos a empregar a OPE de Wilson. O lado teórico é obtido com a aplicação da OPE e tomando seu valor esperado no vácuo físico. Observando a função de correlação para o lado da QCD

$$\Pi^{QCD}(p) = i \int d^4x e^{ip \cdot x} \Pi^{QCD}(x) , \quad (2.7)$$

onde

$$\Pi^{QCD}(x) = \langle 0 | T \{ j(x) j^\dagger(0) \} | 0 \rangle . \quad (2.8)$$

Nosso objetivo é obter o valor esperado no vácuo da QCD do produto ordenado temporalmente do campo interpolante do hádron. É neste ponto que a OPE pode ser utilizada. Ela escreve o produto ordenado no tempo de dois operadores  $A(x)$  e  $B(y)$  na forma

$$T[A(x)B(y)] = \sum_i C_i(x-y) \hat{O}_i \left[ \frac{1}{2}(x+y) \right], \quad (2.9)$$

onde  $O_i$  é o conjunto que inclui todos os operadores locais invariantes de *gauge* expressos em termos dos campos de quarks e glúons. Todas as singularidades deste produto no limite  $x \rightarrow y$  são carregadas pelos coeficientes  $C_i(x-y)$ , também chamados coeficientes de Wilson. Estes coeficientes fornecem as contribuições de pequenas distâncias enquanto que os operadores  $O_i$ , as de longa distância [8].

O coeficiente do operador unitário nos dá a contribuição perturbativa e o valor esperado no vácuo dos demais operadores nos fornece as contribuições não-perturbativas, onde são introduzidos os condensados de quarks, de glúons e de quarks e glúons. Deste modo, obtemos uma função de correlação escrita como se segue

$$\Pi^{QCD} = \Pi^{Pert} + \sum \Pi^{Non\ Pert} . \quad (2.10)$$

No lado da QCD a função de correlação será escrita em termos dos propagadores dos quarks que constituem o méson com o qual estamos trabalhando. Estes propagadores são o valor esperado no vácuo da QCD do produto ordenado no tempo do campo desses quarks. Utilizando o teorema de Wick, podemos escrevê-los da forma:

$$\langle 0|T\{q_\alpha^a(x)\bar{q}_\beta^b(0)\}|0\rangle = {}_p\langle 0|T\{q_\alpha^a(x)\bar{q}_\beta^b(0)\}|0\rangle_p + \langle 0| : q_\alpha^a(x)\bar{q}_\beta^b(0) : |0\rangle, \quad (2.11)$$

onde  $|0\rangle$  é o vácuo da QCD e  $|0\rangle_p$  o vácuo perturbativo. O segundo termo desta soma é a ordem normal dos operadores dos campos dos quarks. No vácuo perturbativo, estes termos se anulariam, mas, no vácuo da QCD ele introduz as informações não-perturbativas do mesmo (os condensados).

Com o uso do teorema de Wick nos propagadores existentes na expressão para a função de correlação, esta toma a forma da OPE. Assim, poderemos observar explicitamente o termo do operador unitário, que é a contribuição perturbativa; e os demais termos, que vem da ordem normal dos operadores e são os condensados de quarks, de glúons e de quarks e glúons.

As contribuições não-perturbativas aparecem da ordenação normal dos operadores dos campos dos quarks, que aparecem na eq.(2.11). Se expandirmos  $q_\alpha^a(x)$  para um  $x$  pequeno:

$$q_\alpha^a(x) = q_\alpha^a(0) + x^\mu (\partial_\mu q_\alpha^a)_{x=0} + \frac{1}{2}x^\mu x^\nu (\partial_\mu \partial_\nu q_\alpha^a)_{x=0} + \dots \quad (2.12)$$

No *gauge* de ponto fixo temos  $x^\mu B_\mu = 0$  [9, 10], portanto podemos escrever

$$x^\mu D_\mu = x^\mu \partial_\mu - ig_s x^\mu B_\mu = x^\mu \partial_\mu, \quad (2.13)$$

ou seja, podemos substituir as derivadas ordinárias por derivadas covariantes

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s B_\mu. \quad (2.14)$$

Assim, teremos

$$q_\alpha^a(x) = q_\alpha^a(0) + x^\mu (D_\mu q_\alpha^a)_{x=0} + \frac{1}{2}x^\mu x^\nu (D_\mu D_\nu q_\alpha^a)_{x=0} + \dots \quad (2.15)$$

Deste modo, o produto normal na eq.(2.11) fica

$$\begin{aligned} : q_\alpha^a(x)\bar{q}_\beta^b(0) : &= : q_\alpha^a(0)\bar{q}_\beta^b(0) : + x^\mu : (D_\mu q_\alpha^a)_{x=0}, \bar{q}_\beta^b(0) : \\ &+ \frac{1}{2}x^\mu x^\nu : (D_\mu D_\nu q_\alpha^a)_{x=0}\bar{q}_\beta^b(0) : + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

O coeficiente de  $\langle \bar{q}q \rangle$  surge do valor esperado no vácuo do primeiro termo da expansão na eq.(2.16), que pode ser escrito do modo

$$\langle 0 : q_\alpha^a(0)\bar{q}_\beta^b(0) : 0 \rangle = N\delta^{ab}\delta_{\alpha\beta}, \quad (2.17)$$

com  $N$  sendo um fator de normalização. Se multiplicarmos a eq.(2.17) por  $\delta^{ba}\delta_{\beta\alpha}$  e reordenarmos os operadores dos quarks, teremos:

$$-\langle\bar{q}q\rangle = 12N . \quad (2.18)$$

Assim, cada linha de condensado, dos diagramas que possuem condensados de quarks, é escrita como

$$S_{ab}(x) = -\frac{1}{12}\langle\bar{q}q\rangle\delta_{ab} . \quad (2.19)$$

Na fig. (A.1) do Apêndice A fornecemos a representação gráfica de um propagador que esteja num diagrama do lado teórico (ou QCD). O valor numérico de  $\langle\bar{q}q\rangle$  é obtido da relação de Gell-Mann-Oakes-Renner [11]

$$(m_u + m_d)\langle\bar{q}q\rangle = -m_\pi^2 f_\pi^2 . \quad (2.20)$$

Se tomarmos a massa do pión como sendo  $m_\pi = 138$  MeV, a constante de decaimento do pión  $f_\pi = 93$  MeV e ainda, usando os valores usuais para as massas dos quarks  $u$  e  $d$ ,  $m_u + m_d = 14 \pm 4$  MeV, teremos

$$\langle\bar{q}q\rangle \simeq -(0.225 \text{ GeV})^3 \quad (2.21)$$

Os demais condensados aparecem de forma análoga e [12] é uma boa referência onde a OPE do propagador dos quarks é feita até condensados de dimensão sete. No Apêndice A forneceremos as expressões dos propagadores perturbativo e não-perturbativo, que serão usados nos cálculos que faremos.

## 2.2 Aplicando as Regras de Soma

Na obtenção das Regras de Soma, devemos igualar o lado fenomenológico com o lado da QCD. Porém, algumas dificuldades surgem ao fazermos esta igualdade. No lado fenomenológico, os estados excitados do méson são suprimidos devido à presença da massa dos mesmos no denominador. Mas isto não é suficiente para que o estado fundamental domine. Como pretendemos estudar o estado fundamental do méson, isto se torna um problema. No lado da QCD, as contribuições dos operadores da OPE de dimensões mais altas não são suprimidas o suficiente para nos fornecer uma razão convincente de truncagem. É justamente para eliminar estas dificuldades que fazemos uso da transformada de Borel definida como:

$$\begin{aligned} B[F(P^2)] &= \hat{F}(M^2) \\ &= \lim_{P^2, n \rightarrow \infty} \frac{(P^2)^{n+1}}{n!} \left( -\frac{\partial}{\partial P^2} \right)^n F(P^2), \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde  $F$  é uma função do momento externo  $p^2$ , com  $P^2 = -p^2$ . Esta função será, agora, dependente da massa de Borel (ou parâmetro de Borel),  $M^2 = P^2/n$ , uma quantidade finita. A dupla transformada de Borel, será definida como:

$$\begin{aligned} B_{P^2} B_{P'^2} \left[ F(P^2, P'^2) \right] &= \hat{F}(M^2, M'^2) \\ &= \lim_{P^2, P'^2, n, m \rightarrow \infty} \left[ \frac{(P^2)^{n+1} (P'^2)^{m+1}}{n! m!} \right. \\ &\quad \left. \left( -\frac{\partial}{\partial P^2} \right)^n \left( -\frac{\partial}{\partial P'^2} \right)^m F(P^2, P'^2) \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

aonde  $M^2 = P^2/n$ ,  $M'^2 = P'^2/m$ , sendo  $M^2$  e  $M'^2$  quantidades finitas.

No lado fenomenológico a transformada de Borel irá suprimir as contribuições dos estados excitados do méson. Se olharmos para a relação de dispersão (2.4) podemos notar a presença do denominador  $1/(s - p^2)$ . A aplicação de uma transformada de Borel [13] para este denominador reescreve a relação de dispersão de modo tal que a contribuição do estado fundamental seja mais favorecida. Mais explicitamente,

$$\begin{aligned} B \left[ \frac{1}{(s + P^2)} \right] &= \lim_{P^2, n \rightarrow \infty} \frac{(P^2)^{n+1}}{n!} \left( -\frac{d}{dP^2} \right)^n \frac{1}{(s + P^2)} \\ &= \lim_{P^2, n \rightarrow \infty} \frac{(P^2)^{n+1}}{n!} \frac{n!}{(s + P^2)^{n+1}} \\ &= \lim_{P^2, n \rightarrow \infty} \left( \frac{P^2}{s + P^2} \right)^n \\ &= \lim_{P^2, n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} s^k (P^2)^{-k}} \\ &= \lim_{P^2, n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} s^k \left( \frac{P^2}{n} \right)^{-k}} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \frac{s}{M^2} \right)^{-k}} \\ &= e^{-s/M^2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Assim, os estados de maior massa são suprimidos por uma exponencial (em vez de serem suprimidos por uma potência) e, conseqüentemente, o estado fundamental pode ser melhor descrito.

No lado da QCD, a transformada de Borel melhora a convergência da OPE quando suprime a contribuição dos operadores de dimensão mais alta. Isto pode ser melhor observado se notarmos que a função de correlação pode ser escrita de uma forma geral (de acordo com sua dependência do momento) como sendo

$$\Pi(p^2)^{Non\ Pert} \simeq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{(p^2)^k}. \quad (2.25)$$

Quanto maior o  $k$ , maior a ordem do operador.

Analisando a dependência em  $p^2$  com a aplicação da transformada de Borel

$$\begin{aligned}
 B\left[\frac{1}{(P^2)^k}\right] &= \lim_{P^2, n \rightarrow \infty} \frac{(P^2)^{n+1}}{n!} \left(-\frac{d}{dP^2}\right)^n \frac{1}{(P^2)^k} \\
 &= \lim_{P^2, n \rightarrow \infty} \frac{(P^2)^{n+1}}{n!} \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!} \frac{1}{(P^2)^{k+n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{P^2}\right)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!} \\
 &= \frac{1}{(k-1)!(M^2)^{k-1}}, \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

podemos perceber uma maior supressão dos operadores de ordem mais alta devido ao aparecimento da quantidade  $(k-1)!$ .

Na tabela 2.1 apresentamos a transformada de Borel de algumas funções que aparecerão nos nossos cálculos.

Tabela 2.1: Transformadas de Borel.

Função	Transformada de Borel
$\frac{1}{q^2} = -\frac{1}{Q^2}$	$-1$
$\frac{1}{s-q^2} = \frac{1}{s+Q^2}$	$e^{-s/M^2}$
$\frac{1}{q^4} = \frac{1}{Q^4}$	$\frac{1}{M^2}$
$\ln(-q^2) = \ln(Q^2)$	$-M^2$
$q^2 \ln(-q^2) = -Q^2 \ln(Q^2)$	$-M^4$

Outra vantagem da utilização da transformada de Borel é a remoção de qualquer polinômio em  $P^2$ , devido à derivação infinita. Deste modo, as subtrações polinomiais que surgem em (2.4) são naturalmente eliminadas.

O ideal, seria encontrarmos uma região de  $M^2$  em que ocorresse tanto a supressão dos operadores de ordem mais alta, quanto uma melhor descrição do estado fundamental. Isto resultaria numa boa superposição do lado fenomenológico com o da QCD. De uma forma mais ideal ainda, o resultado deveria ser independente

das massas de Borel. Na verdade, estamos à procura de um resultado, o mais independente dessas massas possível, que nos forneça uma comparação razoável entre os dois lados das Regras de Soma.

Outro problema a ser considerado é o modelo que será adotado para a função  $\rho(s)$ . Devemos lembrar que os campos interpolantes se acoplam não apenas ao estado fundamental, mas a todas as partículas com esses mesmos números quânticos. Portanto, no lado fenomenológico devemos considerar também a contribuição desses estados.

Nas regras de soma, o modelo adotado para a densidade espectral  $\rho(s)$ , como motivado no capítulo anterior, é

$$\rho(s) = \lambda\delta(s - M_H^2) + \rho_{OPE} \theta(s - s_0), \quad (2.27)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro que indica o quanto o campo interpolante se acopla ao estado fundamental (de largura nula) de massa  $M_H$  e o segundo termo do lado direito da equação corresponde à contribuição dos estados do contínuo, sendo aproximada pelo obtido do lado da QCD, acima de um certo limiar  $s_0$ .

Desta forma, teremos, no lado fenomenológico, após a aplicação da transformada de Borel:

$$B[\Pi^{phen}(p^2)] = \lambda e^{-\frac{M_H^2}{M^2}} + \int_{s_0}^{\infty} ds \rho_{OPE} e^{-\frac{s}{M^2}}. \quad (2.28)$$

Do lado da QCD podemos escrever a relação de dispersão, após a aplicação de uma transformada de Borel, do modo:

$$B[\Pi^{QCD}(p^2)] = \int_0^{\infty} ds \rho_{OPE} e^{-\frac{s}{M^2}}, \quad (2.29)$$

onde  $\rho_{OPE}$  representa a contribuição, tanto do estado fundamental, quanto dos estados excitados da partícula em estudo.

Ao igualarmos o lado da QCD com o lado fenomenológico, e passarmos o segundo termo de (2.28) para o lado da QCD, obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda e^{-\frac{M_H^2}{M^2}} &= \int_0^{\infty} ds \rho_{OPE} e^{-\frac{s}{M^2}} - \int_{s_0}^{\infty} ds \rho_{OPE} e^{-\frac{s}{M^2}} \\ &= \int_0^{s_0} ds \rho_{OPE} e^{-\frac{s}{M^2}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

No capítulo seguinte aplicaremos as Regras de Soma da QCD para encontrar as constantes de decaimentos dos mésons  $K^*$  e  $K$ .

## Capítulo 3

### A Constante de Decaimento dos Mésons $K^*$ e $K$

Até agora vimos o que são, como funcionam e porque precisamos das QCD SR. Nas seções seguintes desse capítulo calcularemos as constantes de decaimento dos mésons  $K$  e  $K^*$ ,  $f_K$  e  $f_{K^*}$  respectivamente. No capítulo seguinte calcularemos o fator de forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$ .

### 3.1 A constante de decaimento $f_{K^*}$

#### 3.1.1 O Lado Fenomenológico

Para obtermos o lado fenomenológico, partimos da definição da função de correlação geral:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ j_\mu(x) j_\nu^\dagger(0) \} | 0 \rangle , \quad (3.1)$$

inserindo os estados do méson  $K^*$

$$\Pi_{\mu\nu}^{fen}(q) = i \sum_{pol.} \langle 0 | j_\mu(q) | K^*(q) \rangle \frac{i}{q^2 - m_{K^*}^2} \langle K^*(q) | j_\nu^\dagger(q) | 0 \rangle + \dots , \quad (3.2)$$

onde a somatória é sobre as polarizações. A constante de decaimento é definida como:

$$\langle K^*(q) | j_\nu^\dagger | 0 \rangle = m_{K^*} f_{K^*} \varepsilon_\nu = \lambda_{K^*} , \quad (3.3)$$

onde  $\varepsilon_\nu$  é o vetor de polarização do méson  $K^*$ . Então:

$$\Pi_{\mu\nu}^{fen}(q) = -m_{K^*}^2 f_{K^*}^2 \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_{K^*}^2} \right) \frac{1}{q^2 - m_{K^*}^2} + \dots . \quad (3.4)$$

Nós usamos aqui o fato de que  $\sum_{pol.} \varepsilon_\mu^* \varepsilon_\nu = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_{K^*}^2}$  Definindo:

$$\Pi_{\mu\nu}^{fen}(q) = (-g_{\mu\nu} m_{K^*}^2 + q_\mu q_\nu) \Pi^{fen}(q^2) + \dots , \quad (3.5)$$

obtemos

$$\Pi^{fen}(q^2) = -f_{K^*}^2 \frac{1}{q^2 - m_{K^*}^2} + \dots . \quad (3.6)$$

#### 3.1.2 O Lado da QCD

O lado da QCD é obtido á partir da função de correlação , eq. (3.1), onde  $j_\nu$  é uma corrente vetorial e que tem os números quânticos do méson  $K^*$ :

$$j_\mu(x) = \bar{s}_a(x) \gamma_\mu q_a(x) , \quad (3.7)$$

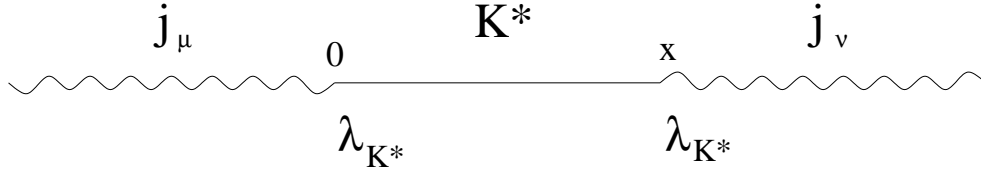


Figura 3.1: Diagrama do lado hadrônico de um decaimento

e claramente:

$$j_\nu^\dagger(0) = \bar{q}_a(0)\gamma_\nu s_a(0). \quad (3.8)$$

Sustituindo  $j_\nu$  e  $j_\nu^\dagger$  na eq.(3.1), obtemos:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ \bar{s}_a(x) \gamma_\mu q_a(x) \bar{q}_{a'}(0) \gamma_\nu s_{a'}(0) \} | 0 \rangle, \quad (3.9)$$

ou seja:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -i \int d^4x e^{iq \cdot x} \text{Tr}[\gamma_\mu S_{aa'}^q(x) \gamma_\nu S_{a'a}^s(-x)], \quad (3.10)$$

onde

$$S_{ab}^q(x-y) = {}_p \langle 0 | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(y) \} | 0 \rangle_p. \quad (3.11)$$

Para o termo perturbativo, veja o diag. 3.1 da fig.(3.2),  $S_{ab}^q(x)$ , como mostrado no apêndice A, é dado por:

$$S_{ab}^q(x) = \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} \delta_{ab}. \quad (3.12)$$

Substituindo-o na eq.(3.10), obtemos:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{i}{4\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^8} \text{Tr}[\gamma_\mu \not{x} \gamma_\nu \not{x} \delta_{aa'} \delta_{a'a}]. \quad (3.13)$$

Como a corrente vetorial é conservada, a estrutura tensorial de  $\Pi_{\mu\nu}$  é dada por:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (-q^2 g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu) \Pi(q^2), \quad (3.14)$$

então:

$$\Pi(q^2) = -\frac{1}{3q^2} \Pi_\mu{}^\mu(q), \quad (3.15)$$

lembrando que

$$\delta_{aa'} \delta_{a'a} = 3 \quad (3.16)$$

e

$$\text{Tr}[\gamma_\mu \not{x} \gamma^\mu \not{x}] = -8x^2 \quad (3.17)$$

da eq.(3.13), obtemos

$$\Pi_\mu^\mu(q^2) = \frac{6i}{\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^6} . \quad (3.18)$$

Realizando essa integral, tabela (A.1) no apêndice A e utilizando a relação (3.15), obtemos finalmente

$$\Pi^{pert}(q^2) = -\frac{1}{4\pi^2} \ln(-q^2) , \quad (3.19)$$

Posteriormente, faremos a transformada de Borel desse termo.

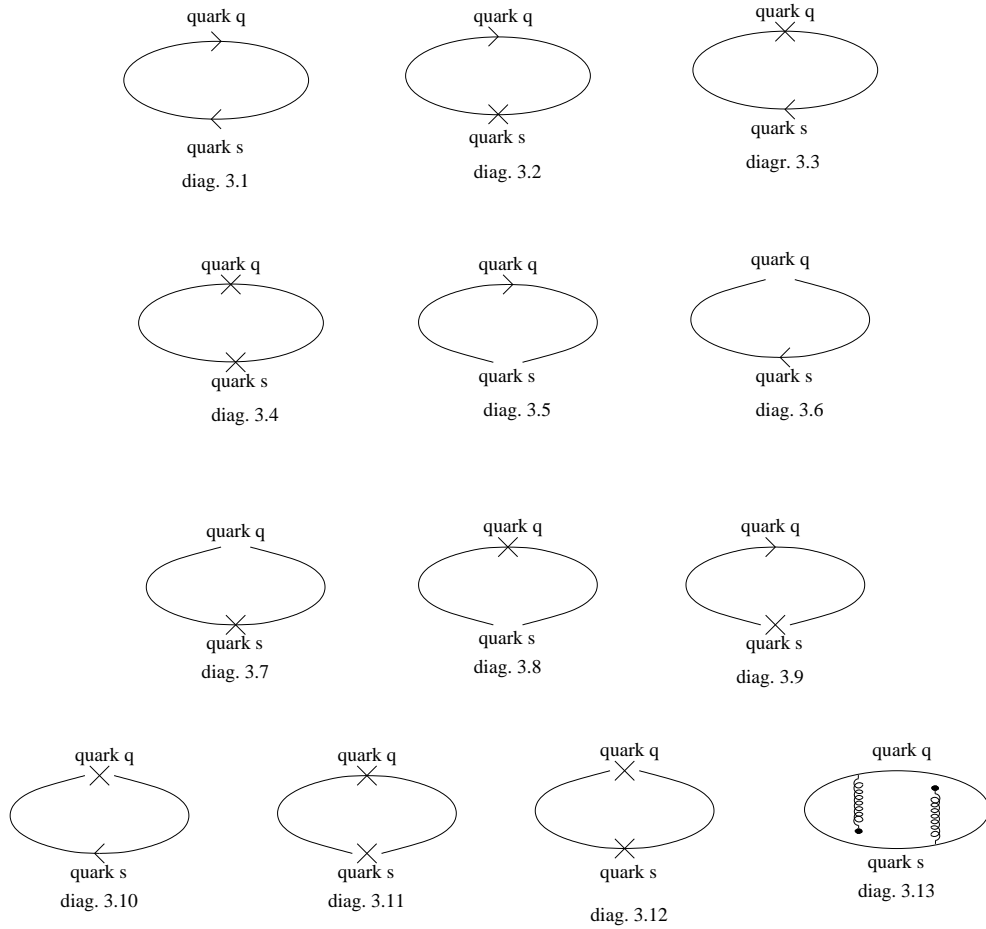


Figura 3.2: Diagramas do lado hadrônico de um decaimento

Calcularemos agora as contribuições dos termos de massa. Veja o diag. 3.2 da fig.(3.2).  $S_{ab}^q(x)$ , da seção A.1 do Apêndice A, será:

$$S_{ab}^q(x) = -\frac{m_q}{4\pi^2 x^2} \delta_{ab} . \quad (3.20)$$

Substituindo a eq.(3.20), representando o termo de massa do quark  $s$  ( $q = s$ ), e a eq.(3.12), representando quark  $u$  ou  $d$  ( $q = u$  ou  $d$ ) na eq.(3.10), teremos:

$$\Pi(q) = 0 . \quad (3.21)$$

Logo, tanto para o diag. 3.2, quanto para o diag. 3.3 da fig.(3.2) não há contribuição (o traço de um número ímpar de matrizes gama é nulo).

O diag. 3.4 que contém dois termos de massa, não contribui, devido à aproximação que faremos:

$$m_q \rightarrow 0 \quad \text{para } q = u \text{ ou } q = d . \quad (3.22)$$

Isso porque  $m_s \gg m_q$ .

Para os diag. 3.5 e 3.6, que representam os condensados de quark  $s$  e  $u$ (ou  $d$ ), para  $S_{ab}^q(x)$ , eq.(2.19):

$$S_{ab}^q(x) = -\frac{1}{12} \langle \bar{q}q \rangle \delta_{ab} . \quad (3.23)$$

Substituindo esta equação e a eq.(3.12) na eq.(3.10), obtemos

$$\Pi(q) = 0 . \quad (3.24)$$

Para calcular a contribuição do diag. 3.7 usamos as eq.(3.20) para  $q = s$  e eq.(3.23) para  $q = u$ (ou  $d$ ) na eq.(3.10):

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{i}{4\pi^2} m_s \langle \bar{q}q \rangle g_{\mu\nu} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^2}, \quad (3.25)$$

realizando a integral em  $x$ , que no Apêndice A fizemos no espaço dos momentos, eq.(A.4), e usando a eq.(3.15), obtemos

$$\Pi^{\langle \bar{q}q \rangle}(q^2) = \frac{4m_s \langle \bar{q}q \rangle}{3q^4} . \quad (3.26)$$

O diag. 3.8 não contribui devido à aproximação, eq.(3.22). Outra contribuição é a representada pelo diag. 3.9 onde, para  $S_{ab}^q(x)$  usamos (conforme mostrado na seção A.2 do Apêndice A):

$$S_{ab}^q(x) = \frac{i}{48} m_q \langle \bar{q}q \rangle \not{x} \delta_{ab} . \quad (3.27)$$

Usando essa equação, com  $q = s$ , e substituindo juntamente com a eq.(3.12) com  $q = u$  ou  $d$  na eq.(3.10), temos:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{i m_s \langle \bar{s}s \rangle}{96\pi^2} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^4} \text{Tr}[\gamma_\mu \not{x} \gamma_\nu \not{x} \delta_{aa'} \delta_{a'a}] . \quad (3.28)$$

Usando as eq.(3.16) e eq.(3.17) obtemos:

$$\Pi_{\mu}^{\mu}(q) = \frac{im_s \langle \bar{s}s \rangle}{4\pi^2} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^2}. \quad (3.29)$$

Efetuada a integral, analogamente à eq.(A.4) e usando eq.(3.15), chegamos a:

$$\Pi^{\langle \bar{s}s \rangle}(q) = \frac{-m_s \langle \bar{s}s \rangle}{3q^4}. \quad (3.30)$$

Como a contribuição referente ao diag. 3.10 é proporcional a  $m_q$  ( $q = u$  ou  $d$ ) e estamos adotando a aproximação eq.(3.22), então:

$$\Pi(q) = 0. \quad (3.31)$$

Também não há contribuição referente aos diag. 3.11 e 3.12.

Vamos calcular agora a contribuição dos condensados de glúons (diag. 3.13 da fig.(3.2). Para cada linha do diag. que contenha condensado de glúons,  $S_{ab}^q(x)$  é (conforme mostrado no final da seção A.2 do Apêndice A):

$$S_{ab}^q(x) = \frac{-i}{2^5 \pi^2 x^2} g_s G_{\mu\nu}^A t_{ab}^A (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x}). \quad (3.32)$$

( $t^A = \lambda^A/2$ , onde  $\lambda^A$  são as matrizes de Gell-Mann). Substituindo na eq.(3.10), e usando a propriedade:

$$g_s^2 G_{\mu\nu}^A G_{\alpha\beta}^B t_{aa'}^A t_{bb'}^B = t_{aa'}^A t_{bb'}^B \frac{\delta^{AB}}{96} \langle g_s^2 G^2 \rangle (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}), \quad (3.33)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= \frac{-i \langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^{15} 3\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^4} t_{aa'}^A t_{a'a}^A \\ &\times \{ \text{Tr}[\gamma_{\mu}(\not{x} \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \not{x}) \gamma_{\nu}(\not{x} \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} \not{x})] \\ &- \text{Tr}[\gamma_{\mu}(\not{x} \sigma^{\alpha\beta} + \sigma^{\alpha\beta} \not{x}) \gamma_{\nu}(\not{x} \sigma_{\beta\alpha} + \sigma_{\beta\alpha} \not{x})] \}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Lembrando-se que  $\sigma^{\alpha\beta} = -\sigma^{\beta\alpha}$ , e que

$$t_{ab}^A t_{cd}^A = \frac{1}{2} [\delta_{ad} \delta_{bc} - \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd}], \quad (3.35)$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= \frac{-i \langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^{12} 3\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^4} \\ &\times \{ \text{Tr}[\gamma_{\mu} \not{x} \sigma^{\alpha\beta} \gamma_{\nu} \not{x} \sigma_{\alpha\beta}] + \text{Tr}[\gamma_{\mu} \not{x} \sigma^{\alpha\beta} \gamma_{\nu} \sigma_{\alpha\beta} \not{x}] \\ &+ \text{Tr}[\gamma_{\mu} \sigma^{\alpha\beta} \not{x} \gamma_{\nu} \not{x} \sigma_{\alpha\beta}] + \text{Tr}[\gamma_{\mu} \sigma^{\alpha\beta} \not{x} \gamma_{\nu} \sigma_{\alpha\beta} \not{x}] \}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Como  $\sigma^{\alpha\beta}\gamma_\mu\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}\gamma_\mu\sigma^{\alpha\beta} = 0$ , então:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= \frac{-i\langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^{12} 3\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq\cdot x}}{x^4} \\ &\times \{ \text{Tr}[\gamma_\mu \not{x} \sigma^{\alpha\beta} \gamma_\nu \not{x} \sigma_{\alpha\beta}] + \text{Tr}[\gamma_\mu \sigma^{\alpha\beta} \not{x} \gamma_\nu \sigma_{\alpha\beta} \not{x}] \}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Sabemos que  $\text{Tr}[\gamma_\mu \not{x} \sigma^{\alpha\beta} \gamma^\mu \not{x} \sigma_{\alpha\beta}] = \text{Tr}[\gamma_\mu \sigma^{\alpha\beta} \not{x} \gamma^\mu \sigma_{\alpha\beta} \not{x}] = 96x^2$ , assim:

$$\Pi_\mu^\mu(q) = -\frac{i\langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^6 \pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq\cdot x}}{x^2}. \quad (3.38)$$

Resolvendo a integral, que é a mesma que aparece na eq.(3.25) do Apêndice A, e usando eq.(3.15), obtemos:

$$\Pi^{\langle g_s^2 G^2 \rangle}(q) = \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{48 \pi^2 q^4}. \quad (3.39)$$

### 3.1.3 As Regras de Soma

Para obtermos as regras de soma, devemos proceder do modo mostrado na seção 2.2, aplicando a transformada de Borel tanto do lado da QCD, quanto do fenomenológico, ou seja:

$$B[\Pi^{fen}(q)] = B[\Pi^{QCD}(q)], \quad (3.40)$$

onde  $B[\Pi^{QCD}(q)] = B[\Pi^{pert}(q)] + B[\Pi^{\langle \bar{q}q \rangle}(q)] + B[\Pi^{\langle \bar{s}s \rangle}(q)] + B[\Pi^{\langle g_s^2 G^2 \rangle}(q)]$ . Então, fazendo  $q^2 \rightarrow -Q^2$  e consultando a tabela (2.1) para obter as transformadas de Borel das eq.(3.6), (3.19), (3.26), (3.30) e (3.39) obtém-se

$$f_{K^*}^2(M^2) = \left( \frac{M^2}{4\pi^2} E_0 + \frac{4m_s \langle \bar{q}q \rangle}{3M^2} - \frac{m_s \langle \bar{s}s \rangle}{3M^2} + \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{48\pi^2 M^2} \right) e^{m_{K^*}^2/M^2}, \quad (3.41)$$

com  $E_0$ , inserido para subtrair os estados excitados das partículas com esses mesmos números quânticos conforme vimos na seção 2.2, sendo:

$$E_0 = 1 - e^{-s_0/M^2}. \quad (3.42)$$

## 3.2 Cálculo do $f_K$ usando corrente axial-vetorial

### 3.2.1 O Lado Fenomenológico

Para obtermos o lado fenomenológico, partimos da função de correlação geral:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq\cdot x} \langle 0 | T \{ j_\mu(x) j_\nu^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \quad (3.43)$$

inserindo os estados do méson  $K$ , teremos:

$$\Pi_{\mu\nu}^{fen}(q) = i \langle 0 | j_\mu | K(q) \rangle \frac{i}{q^2 - m_K^2} \langle K(q) | j_\nu^\dagger | 0 \rangle + \dots \quad (3.44)$$

A constante de decaimento é definida como:

$$\langle K(q) | j_\nu^\dagger | 0 \rangle = f_K q_\nu , \quad (3.45)$$

logo:

$$\Pi_{\mu\nu}^{fen}(q) = -f_K^2 q_\mu q_\nu \frac{1}{q^2 - m_K^2} + \dots \quad (3.46)$$

O problema de descrever o méson  $K$ , uma partícula pseudoescalar de  $J^P = 0^-$ , com a corrente axial é que esta corrente também se acopla com as partículas pseudovetoriais, no caso o  $K_1(1270)$ , de  $J^P = 1^+$ . Portanto, devemos incluir também sua contribuição na regra de soma. Assim,

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{fen}(q) &= -f_K^2 \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 - m_K^2} + i \sum_{pol.} \langle 0 | j_\mu(q) | K_1(q) \rangle \\ &\quad \times \frac{i}{q^2 - m_{K_1}^2} \langle K_1(q) | j_\nu^\dagger(q) | 0 \rangle + \dots , \end{aligned} \quad (3.47)$$

onde

$$\langle K_1(q) | j_\nu^\dagger | 0 \rangle = \frac{m_{K_1}^2}{g_{K_1}} \varepsilon_\nu , \quad (3.48)$$

consequentemente:

$$\Pi_{\mu\nu}^{fen}(q) = -f_K^2 \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 - m_K^2} + \frac{m_{K_1}^4}{g_{K_1}^2} \frac{1}{m_{K_1}^2 - q^2} \left( -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_{K_1}^2} \right) + \dots , \quad (3.49)$$

assim obtemos:

$$\Pi_{\mu\nu}^{fen}(q^2) = f_K^2 \frac{q_\mu q_\nu}{m_K^2 - q^2} + \frac{m_{K_1}^2}{g_{K_1}^2} \frac{q_\mu q_\nu}{m_{K_1}^2 - q^2} - \frac{m_{K_1}^4}{g_{K_1}^2} \frac{g_{\mu\nu}}{m_{K_1}^2 - q^2} + \dots \quad (3.50)$$

Devido à tal acoplamento entre as partículas pseudoescalar e pseudovetorial, devemos separar as cotribuições tanto do lado fenomenológico quanto do lado da QCD, como:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \Pi_1 g_{\mu\nu} + \Pi_2 q_\mu q_\nu , \quad (3.51)$$

para então fazermos a transformada de Borel dessas estruturas.

Ou seja, a transformada de Borel para cada uma das estruturas, tabela (2.1) será:

$$B[\Pi_1^{fen}] = -\frac{m_{K_1}^4}{g_{K_1}^2} e^{-m_{K_1}^2/M^2} , \quad (3.52)$$

$$B[\Pi_2^{fen}] = f_K^2 e^{-m_K^2/M^2} + \frac{m_{K_1}^2}{g_{K_1}^2} e^{-m_{K_1}^2/M^2} , \quad (3.53)$$

### 3.2.2 O Lado da QCD

Partindo da função de correlação, eq.(3.43), usando as correntes axiais que carregam os números quânticos do méson  $K$ ,

$$j_\mu(x) = \bar{s}_a(x)\gamma_\mu\gamma_5 u_a(x), \quad (3.54)$$

e

$$j_\nu^\dagger(0) = \bar{u}_a(0)\gamma_\nu\gamma_5 s_a(0), \quad (3.55)$$

obtemos:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ \bar{s}_a(x)\gamma_\mu\gamma_5 u_a(x) \bar{u}_{a'}(0)\gamma_\nu\gamma_5 s_{a'}(0) \} | 0 \rangle. \quad (3.56)$$

Assim,

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -i \int d^4x e^{iq \cdot x} \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_5 S_{aa'}^u(x)\gamma_\nu\gamma_5 S_{a'a}^s(-x)]. \quad (3.57)$$

Para calcularmos o termo perturbativo, devemos usar a eq.(3.12). Substituindo-a na eq.(3.57), teremos:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{i}{4\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^8} \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_5 \not{x}\gamma_\nu\gamma_5 \not{x}\delta_{aa'}\delta_{a'a}]. \quad (3.58)$$

Sabemos que  $\text{Tr}[\gamma_\mu \not{x}\gamma_\nu \not{x}] = 2x_\mu x_\nu - g_{\mu\nu}x^2$ , assim obtemos:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{6i}{\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^8} x_\mu x_\nu + \frac{3i}{\pi^4} g_{\mu\nu} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^6}, \quad (3.59)$$

que pode ser reescrito como

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{6i}{\pi^4} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^8} + \frac{3i}{\pi^4} g_{\mu\nu} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^6}. \quad (3.60)$$

Resolvendo as integrais, tabela (A.1), obtemos:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{4\pi^2} g_{\mu\nu} q^2 \left[ \ln(-q^2) - \frac{1}{4} \right] - \frac{1}{4\pi^2} q_\mu q_\nu \left[ \ln(-q^2) + \frac{5}{4} \right]. \quad (3.61)$$

Separando as contribuições, eq.(3.51), e fazendo as transformadas de Borel, tabela (2.1):

$$B[\Pi_1] = -\frac{M^4}{4\pi^2} \quad (3.62)$$

e

$$B[\Pi_2] = \frac{M^2}{4\pi^2}. \quad (3.63)$$

Para os diag. não-perturbativos de ordem mais baixa, que contém condensado de quark  $u$ , apenas o diag. 3.7 da fig.(3.2) contribui. Substituindo na eq.(3.57) a eq.(3.20), para  $q=s$ , e a eq.(3.23), para  $q=u$ :

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{im_s\langle\bar{q}q\rangle}{48\pi^2} \int d^4x \frac{e^{iq\cdot x}}{x^2} \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_5\gamma_\nu\gamma_5\delta_{aa'}\delta_{a'a}]. \quad (3.64)$$

Assim,

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{m_s\langle\bar{q}q\rangle}{q^2} g_{\mu\nu}, \quad (3.65)$$

e, após separar as contribuições e fazendo a transformada de Borel:

$$B[\Pi_1] = -m_s\langle\bar{q}q\rangle. \quad (3.66)$$

Para calcular a contribuição, indicada pelo diag. 3.9, usamos as eq.(3.12) e eq.(3.27) na eq.(3.57):

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{im_s\langle\bar{s}s\rangle}{96\pi^2} \int d^4x \frac{e^{iq\cdot x}}{x^4} \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_5\not{x}\gamma_\nu\gamma_5\not{x}\delta_{aa'}\delta_{a'a}], \quad (3.67)$$

assim, teremos:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = -\frac{im_s\langle\bar{s}s\rangle}{8\pi^2} \int d^4x \frac{e^{iq\cdot x}}{x^4} (2x_\mu x_\nu - g_{\mu\nu}x^2), \quad (3.68)$$

e, realizando a integral, temos

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{m_s\langle\bar{s}s\rangle}{q^4} q_\mu q_\nu. \quad (3.69)$$

Portanto:

$$B[\Pi_2(q^2)] = \frac{m_s\langle\bar{s}s\rangle}{M^2}. \quad (3.70)$$

A contribuição do condensado de glúons é calculada pelo mesmo caminho que obtivemos (3.39), ou seja, substituímos as eq.(3.32), usando a eq.(3.33) e a eq.(3.35), na eq.(3.57):

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= \frac{-i\langle g_s^2 G^2\rangle}{2^{12} 3\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq\cdot x}}{x^4} \\ &\times \{ \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_5\not{x}\sigma^{\alpha\beta}\gamma_\nu\gamma_5\not{x}\sigma_{\alpha\beta}] + \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_5\not{x}\sigma^{\alpha\beta}\gamma_\nu\gamma_5\sigma_{\alpha\beta}\not{x}] \\ &+ \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_5\sigma^{\alpha\beta}\not{x}\gamma_\nu\gamma_5\not{x}\sigma_{\alpha\beta}] + \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_5\sigma^{\alpha\beta}\not{x}\gamma_\nu\gamma_5\sigma_{\alpha\beta}\not{x}] \}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Como  $\sigma^{\alpha\beta}\gamma_\mu\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}\gamma_\mu\sigma^{\alpha\beta} = 0$ , e  $\sigma^{\alpha\beta} = i[\gamma^\mu\gamma^\nu - g^{\mu\nu}]$ , então:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= \frac{-i\langle g_s^2 G^2\rangle}{2^{10} 3\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq\cdot x}}{x^4} x^\lambda x^\theta \\ &\times \{ \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\theta\gamma_\nu] + 2g_{\theta\nu} \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\lambda] \\ &+ \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\theta] + 2g_{\nu\lambda} \text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\theta] \}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Calculando os traços, obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(q) &= \frac{-i \langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^{10} 3\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^4} x^\lambda x^\theta \\ &\quad \times \{8g_{\mu\nu} g_{\lambda\theta} + 8g_{\mu\lambda} g_{\theta\nu} + 8g_{\mu\theta} g_{\nu\lambda}\}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Portanto:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{-i \langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^7 3\pi^4} \int d^4x \frac{e^{iq \cdot x}}{x^4} \{g_{\mu\nu} x^2 + 2x_\mu x_\nu\}, \quad (3.74)$$

e realizando a integral:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^4 3\pi^2} \left\{ -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^4} \right\}. \quad (3.75)$$

Finalmente, obtemos:

$$B[\Pi_1(q^2)] = \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^4 3\pi^2}, \quad (3.76)$$

e

$$B[\Pi_2(q^2)] = \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^4 3\pi^2} \frac{1}{M^2}. \quad (3.77)$$

### 3.2.3 As Regras de Soma

Devemos igualar o lado fenomenológico da estrutura  $\Pi_1$ , eq.(3.52), com o lado da QCD da mesma estrutura, eq.(3.62), eq.(3.66) e eq.(3.76). Então:

$$-\frac{m_{K_1}^4}{g_{K_1}^2} e^{-m_{K_1}^2/M^2} = -\frac{M^4}{4\pi^2} E_1 - m_s \langle \bar{q}q \rangle + \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^4 3\pi^2}, \quad (3.78)$$

com  $E_1$ , inserido para subtrair os estados excitados do lado da QCD, sendo

$$E_1 = 1 - e^{-s_0/M^2} \left( 1 + \frac{s_0}{M^2} \right). \quad (3.79)$$

Devemos também igualar o lado fenomenológico da estrutura  $\Pi_2$ , eq.(3.53), com o lado da QCD da mesma estrutura, eq.(3.63), eq.(3.70) e eq.(3.77). Então:

$$f_K^2 e^{-m_K^2/M^2} + \frac{m_{K_1}^2}{g_{K_1}^2} e^{-m_{K_1}^2/M^2} = \frac{M^2}{4\pi^2} E_0 + \frac{m_s \langle \bar{s}s \rangle}{M^2} + \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^4 3\pi^2} \frac{1}{M^2}, \quad (3.80)$$

Onde  $E_0$  foi definido na eq.(3.42). Assim, multiplicando a eq.(3.78) por  $1/m_{K_1}^2$  e adicionando-a na eq.(3.80), obtemos finalmente

$$\begin{aligned} f_K^2(M^2) &= \left[ \frac{M^2}{4\pi^2} E_0 - \frac{M^4}{4\pi^2} \frac{E_1}{m_{K_1}^2} - \frac{m_s \langle \bar{q}q \rangle}{m_{K_1}^2} + \frac{m_s \langle \bar{s}s \rangle}{M^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^4 3\pi^2} \left( \frac{1}{M^2} + \frac{1}{m_{K_1}^2} \right) \right] e^{m_K^2/M^2}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

### 3.3 Cálculo do $f_K$ usando corrente pseudoescalar

#### 3.3.1 O Lado Fenomenológico

A função de correlação para uma corrente pseudoescalar é:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ j_5(x) j_5^\dagger(0) \} | 0 \rangle , \quad (3.82)$$

sendo as correntes pseudoescalares para o méson  $K$  iguais a:

$$j_5(x) = i \bar{s}_a(x) \gamma_5 u_a(x) \quad (3.83)$$

e

$$j_5^\dagger(0) = i \bar{u}_a(0) \gamma_5 s_a(0) . \quad (3.84)$$

Procedimento análogo ao da seção 3.2.1, com  $m_u \rightarrow 0$ , leva a

$$\Pi(q) = \frac{m_K^4 f_K^2}{m_s^2} \frac{1}{m_K^2 - q^2} , \quad (3.85)$$

uma vez que

$$\langle K(q) | j_5^\dagger | 0 \rangle = \frac{m_K^2 f_K}{m_s + m_u} . \quad (3.86)$$

Fazendo  $q^2 \rightarrow -Q^2$  e efetuando a transformada de Borel:

$$B[\Pi^{fen}] = \frac{m_K^4 f_K^2}{m_s^2} e^{-m_K^2/M^2} , \quad (3.87)$$

#### 3.3.2 O Lado da QCD

Partindo da função de correlação, eq. (3.82), substituindo nela as correntes pseudoescalares, eq. (3.83) e eq. (3.84), e fazendo cálculos análogos aos da seção 3.1.2, chegamos em

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \text{Tr}[\gamma_5 S_{aa'}^q(x) \gamma_5 S_{a'a}^s(-x)] , \quad (3.88)$$

e obtemos as seguintes relações:

$$\Pi^{pert}(q) = -\frac{3q^2}{8\pi^2} \ln(-q^2) , \quad (3.89)$$

para o termo perturbativo;

$$\Pi^{\langle \bar{q}q \rangle}(q) = \frac{m_s \langle \bar{q}q \rangle}{q^2} , \quad (3.90)$$

relativo ao termo com condensado de quark leve ( $u$  ou  $d$ ) de ordem mais baixa;

$$\Pi^{\langle \bar{s}s \rangle}(q) = -\frac{m_s \langle \bar{s}s \rangle}{2q^2}, \quad (3.91)$$

do termo com condensado de quark  $s$  de ordem mais baixa, e

$$\Pi^{\langle g_s^2 G^2 \rangle}(q) = -\frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{32 \pi^2 q^2}, \quad (3.92)$$

para o termo com condensado de glúons.

### 3.3.3 As Regras de Soma

Procedendo de forma análoga ao da seção 3.1.3 chegamos finalmente a

$$f_K^2(M^2) = \left[ \frac{3M^4}{8\pi^2} E_1 + m_s \left( \frac{\langle \bar{s}s \rangle}{2} - \langle \bar{q}q \rangle \right) + \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{32\pi^2} \right] \left( \frac{m_s^2}{m_K^4} \right) e^{m_K^2/M^2}. \quad (3.93)$$

$E_1$  foi definido anteriormente, eq.(3.79).

## Capítulo 4

O fator de forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$

## 4.1 O fator de forma $g_{KK^*\pi}(q^2)$

Vimos no capítulo anterior como calcular as constantes de decaimento  $f_K$  e  $f_{K^*}$ . Para tal, usamos a função de correlação de dois pontos. Desta vez, para obtermos o fator de forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$ , usaremos a função de correlação de três pontos:

$$A_{\mu\nu}(p, p', q) = \int d^4y d^4x e^{ip' \cdot x} e^{iq \cdot y} \times \langle 0 | T \{ j_\nu(x) j_5(y) j_\mu^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \text{ com } p' = p - q. \quad (4.1)$$

## 4.2 O Lado Fenomenológico

No lado fenomenológico, para isolar o fator de forma, nós inserimos estados intermediários do  $K$ ,  $K^*$  e  $\pi$  na eq.(4.1) e obtemos:

$$A_{\mu\nu}(p, p', q) = -\frac{i m_{K^*} m_\pi^2 f_\pi f_K f_{K^*} p'_\nu q^\alpha (-g_{\mu\alpha} + p_\mu p_\alpha / m_{K^*}^2)}{(m_u + m_d)(p'^2 - m_K^2)(p^2 - m_{K^*}^2)(q^2 - m_\pi^2)} g_{KK^*\pi}(q^2) + \text{estados excitados}, \quad (4.2)$$

onde as constantes de decaimento dos mésons são definidas, como no capítulo anterior, pelos elementos de matrizes:

$$\langle 0 | j_\nu(p') | K(p') \rangle = f_K p'_\nu, \quad (4.3)$$

$$\langle K^*(p) | j_\mu^\dagger(p) | 0 \rangle = m_{K^*} f_{K^*} \varepsilon_\mu^*. \quad (4.4)$$

e

$$\langle 0 | j_5(q) | \pi(q) \rangle = \frac{m_\pi^2 f_\pi}{m_u + m_d}, \quad (4.5)$$

e o fator de forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$  para um pión *off-shell* é definido através de:

$$\langle \pi(q) K(-p') K^*(p) \rangle = g_{K^*K\pi}(q^2) q_\alpha \varepsilon^\alpha. \quad (4.6)$$

Como  $p' = p - q$ , podemos escrever  $p \cdot q = (p^2 + q^2 - p'^2)/2$ ; fazendo  $p'^2 = p'^2 + m_K^2 - m_K^2$  e  $p^2 = p^2 + m_{K^*}^2 - m_{K^*}^2$ , podemos reescrever a eq.(4.2) como

$$A_{\mu\nu}^{fen}(p, p', q) = -\frac{i m_{K^*} m_\pi^2 f_\pi f_K f_{K^*} g_{KK^*\pi}(q^2)}{(m_u + m_d)(p'^2 - m_K^2)(p^2 - m_{K^*}^2)(q^2 - m_\pi^2)} \left[ -p'_\nu p'_\mu + \frac{-q^2 + m_K^2 + m_{K^*}^2}{2m_{K^*}^2} p'_\nu p_\mu \right] + \text{estados excitados}. \quad (4.7)$$

onde omitimos os termos diretamente proporcionais a  $p'^2 - m_K^2$  e  $p^2 - m_{K^*}^2$ , pois eles serão eliminados pela dupla transformada de Borel, eq.(2.23).

### 4.3 O Lado da QCD

Os dois processos de ordem mais baixa que contribuem para o lado da QCD estão representados nos diag. 4.1 e 4.2 da fig.(4.1). Trata-se dos termos perturbativo e condensado de quark  $s$ . Os diagramas proporcionais aos condensados de quarks  $u$  e  $d$  são eliminados pela dupla transformada de Borel.

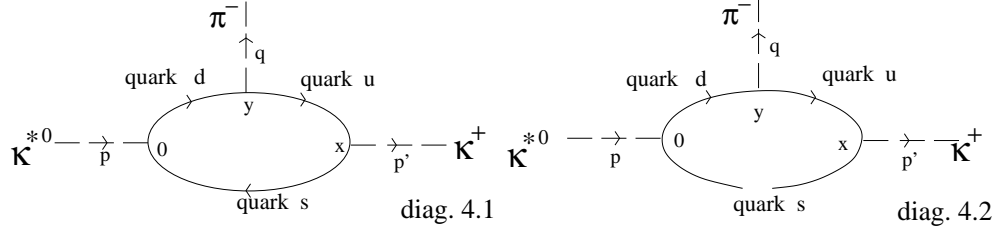


Figura 4.1: Diagramas do lado da QCD

#### 4.3.1 Termo Perturbativo

Do lado da QCD, partimos da eq.(4.1), usando as correntes  $j_\nu(x) = \bar{s}(x)\gamma_\nu\gamma_5 u(x)$ ,  $j_5(y) = i\bar{u}(y)\gamma_5 d(y)$  e  $j_\mu^\dagger(0) = \bar{d}(0)\gamma_\mu s(0)$  para os mésons  $K$ ,  $\pi$  e  $K^*$  respectivamente, e obtemos:

$$A_{\mu\nu}(p, p', q) = i \int d^4 y d^4 x e^{ip'.x} e^{iq.y} \times \langle 0 | T \{ \bar{s}(x) \gamma_\nu \gamma_5 u(x) \bar{u}(y) \gamma_5 d(y) \bar{d}(0) \gamma_\mu s(0) \} | 0 \rangle . \quad (4.8)$$

Da definição de  $S_{ab}^q(x-y)$  do capítulo 3, eq.(3.11), segue

$$A_{\mu\nu}(p, p', q) = -i \int d^4 y d^4 x e^{ip'.x} e^{iq.y} \times \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_5 S_{ab}^u(x-y) \gamma_5 S_{bc}^d(y) \gamma_\mu S_{ca}^s(-y)] . \quad (4.9)$$

Como

$$S(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip.x} S(p) , \quad (4.10)$$

e

$$S(-x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{ip.x} S(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip.x} S(-p) , \quad (4.11)$$

na eq.(4.9), teremos:

$$A_{\mu\nu}(p, p', q) = - \frac{i}{(2\pi)^{12}} \int d^4 y d^4 x d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 p_3 e^{ip'.x} e^{iq.y} e^{-ip_1.(x-y)} e^{-ip_2.y} e^{-ip_3.x} \times \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_5 S_{ab}^u(p_1) \gamma_5 S_{bc}^d(p_2) \gamma_\mu S_{ca}^s(-p_3)] . \quad (4.12)$$

Usando

$$\int d^4x e^{ix \cdot (p' - p_1 - p_3)} = (2\pi)^4 \delta^4(p' - p_1 - p_3), \quad (4.13)$$

e

$$\int d^4y e^{iy \cdot (q + p_1 - p_2)} = (2\pi)^4 \delta^4(q + p_1 - p_2), \quad (4.14)$$

podemos escrever a eq.(4.12) como

$$A_{\mu\nu}(p, p', q) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_5 S_{ab}^u(p' - k) \gamma_5 S_{bc}^d(p - k) \gamma_\mu S_{ca}^s(-k)] \quad (4.15)$$

O propagador fermiônico perturbativo no espaço dos momentos pode ser aproximado para massas pequenas como:

$$S_{ab}^q(p) = i \frac{\not{p} + m_q}{p^2}, \quad (4.16)$$

Uma vez que  $\delta_{ab}\delta_{bc}\delta_{ca} = 3$  então:

$$A_{\mu\nu}(p, p', q) = -\frac{3}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{\text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_5 (\not{p}' - \not{k}) \gamma_5 (\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu (-\not{k} + m_s)]}{(p' - k)^2 (p - k)^2 k^2}. \quad (4.17)$$

Como

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_5 (\not{p}' - \not{k}) \gamma_5 (\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu (-\not{k} + m_s)] &= m_s [\gamma_\nu (\not{k} - \not{p}') (\not{p} - \not{k}) \gamma_\mu] \\ &= 4m_s [(k - p')_\nu (p - k)_\mu + (k - p') \cdot (p - k) g_{\mu\nu} - (p - k)_\nu (k - p')_\mu] \\ &= 4m_s [(p + p') \cdot k - k^2 - p \cdot p'] g_{\mu\nu} + k_\nu (p_\mu - p'_\mu) + k_\mu (p'_\nu - p_\nu) - p'_\nu p_\mu + p_\nu p'_\mu \\ &= 4m_s \{ [(p + p') \cdot k - k^2 - p \cdot p'] g_{\mu\nu} + k_\nu (p_\mu - p'_\mu) + k_\mu (p'_\nu - p_\nu) - p'_\nu p_\mu + p_\nu p'_\mu \} \end{aligned} \quad (4.18)$$

substituindo o valor do traço na eq.(4.17) temos:

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}(p, p', q) &= -\frac{12m_s}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{(p' - k)^2 (p - k)^2 k^2} \{ [(p + p') \cdot k - k^2 - p \cdot p'] g_{\mu\nu} \\ &\quad + q_\mu k_\nu - q_\nu k_\mu - p'_\nu p_\mu + p_\nu p'_\mu \}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Como mostrado no Apêndice B podemos reescrever essa função de correlação através de uma dupla relação de dispersão para cada estrutura invariante. Na estrutura  $p_\mu p'_\nu$  obtemos:

$$A_{p p'}(p, p', q) = -\frac{1}{4\pi^2} \int \int ds du \frac{DD[A_{p p'}]}{(p^2 - s)(p'^2 - u)}. \quad (4.20)$$

onde

$$DD[A_{p p'}(p, p', q)] = -\frac{3im_s}{\lambda^{3/2}(s, u, t)} t(s - t + u). \quad (4.21)$$

e

$$\lambda(s, u, t) = s^2 + u^2 + t^2 - 2su - 2st - 2ut \quad (4.22)$$

### 4.3.2 Condensado do quark s

Vamos calcular agora a contribuição do condensado do quark s, veja diag. 4.2 da fig.(4.1). Para tanto usamos

$$S_{ab}^s(-y) = -\frac{1}{12}\langle\bar{s}s\rangle\delta_{ab}, \quad (4.23)$$

substituímos essa equação na eq.(4.12) e obtemos:

$$A_{\mu\nu} = \frac{i}{2^6 3 \pi^4}\langle\bar{s}s\rangle\delta_{ab}\delta_{bc}\delta_{ca}\int d^4x d^4y d^4p_1 d^4p_2 e^{ip'\cdot x} e^{iq\cdot y} \times e^{-ip_1\cdot(x-y)} e^{-ip_2\cdot y} \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_5 S^u(p_1) \gamma_5 S^d(p_2) \gamma_\mu]. \quad (4.24)$$

Como

$$\int d^4x e^{ix\cdot(p'-p_1)} = (2\pi)^4\delta^4(p'-p_1) \quad (4.25)$$

e

$$\int d^4y e^{iy\cdot(q+p_1-p_2)} = (2\pi)^4\delta^4(q+p_1-p_2), \quad (4.26)$$

teremos:

$$A_{\mu\nu} = \frac{i\langle\bar{s}s\rangle}{4}\int d^4p_1 d^4p_2 \frac{\delta^4(p'-p_1)\delta^4(q+p_1-p_2)}{p_1^2 p_2^2} \times \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_5 \not{p}_1 \gamma_5 \not{p}_2 \gamma_\mu] \quad (4.27)$$

onde usamos  $S^q(p) = i \not{p} / p^2$ . Sabendo que  $\text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_5 \not{p}_1 \gamma_5 \not{p}_2 \gamma_\mu] = -4[p_{1\nu}p_{2\mu} + p_1\cdot p_2 g_{\mu\nu} - p_{1\mu}p_{2\nu}]$ . Obtemos:

$$A_{\mu\nu} = -\frac{i\langle\bar{s}s\rangle}{p^2 p'^2}[p_\mu p'_\nu + p\cdot p' g_{\mu\nu} - p'_\mu p_\nu]. \quad (4.28)$$

## 4.4 As Regras de Soma

Fazendo a dupla transformada de Borel, eq.(2.23), da eq.(4.20) e para a estrutura  $p_\mu p'_\nu$  da eq.(4.28) e comparando com a dupla transformada de Borel do termo proporcional à mesma estrutura no lado fenomenológico, da eq.(4.7), obtemos:

$$g_{KK^*\pi}(Q^2, M^2, M'^2) = -\frac{m_{K^*}^2(m_u + m_d)(Q^2 + m_\pi^2)}{2\pi^2 m_\pi^2 f_\pi f_K(M'^2) f_{K^*}(M^2) m_{K^*}(Q^2 + m_K^2 + m_{K^*}^2)} \times e^{m_{K^*}^2/M^2} e^{m_K^2/M'^2} \left\{ 3m_s \left[ \int_0^{s_0} ds \int_0^{u_0} du e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} \times \frac{t(s-t+u)}{\lambda^{3/2}(s,u,t)} \right] - 4\pi^2\langle\bar{s}s\rangle \right\}. \quad (4.29)$$

Nesta equação estamos usando para os mésons  $K$  e  $K^*$ , suas constantes de decaimento dadas nas eq.(3.81) e eq.(3.41), respectivamente, e no caso do pión, o valor experimental, uma vez que o pión é o méson *off-shell* no nosso cálculo.

## Capítulo 5

### Resultados e Conclusões

Vimos até agora como aplicar as QCDSR para estimar constantes de decaimento,  $f_{K^*}$  e  $f_K$ , e para estimar o fator de forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$ . Neste capítulo mostraremos os resultados numéricos bem como a análise desses resultados.

Os valores esperados dos condensados, bem como os valores das massas do quark  $s$  e dos mésons  $K$ ,  $K_1$  e  $K^*$ , que foram usados estão listados na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Valores dos parâmetros usados nos cálculos do lado da QCD das regras de soma.

$m_s$	$m_K$	$m_{K_1}$	$m_{K^*}$	$\langle \bar{q}q \rangle$	$\langle \bar{s}s \rangle$	$\langle g^2 G^2 \rangle$
$0,15 \text{ GeV}$	$0,494 \text{ GeV}$	$1.270 \text{ GeV}$	$0,89 \text{ GeV}$	$(-0,23 \text{ GeV})^3$	$0,8 \langle \bar{q}q \rangle$	$0,5 \text{ GeV}^4$

## 5.1 A constante de decaimento $f_{K^*}$

Na seção 3.1.3 obtivemos a regra de soma para a constante de decaimento  $f_{K^*}$ :

$$f_{K^*}^2(M^2) = \left( \frac{M^2}{4\pi^2} E_0 + \frac{4m_s \langle \bar{q}q \rangle}{3M^2} - \frac{m_s \langle \bar{s}s \rangle}{3M^2} + \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{48\pi^2 M^2} \right) e^{m_{K^*}^2/M^2}. \quad (3.41)$$

Usando os valores da tabela 5.1 e o intervalo  $0,8 \text{ GeV}^2 \leq M^2 \leq 1,0 \text{ GeV}^2$ , obtemos o gráfico da figura 5.1 (com o limiar do contínuo  $s_0 = (m_{K^*} + 0,5 \text{ GeV})^2$  que é o fator usado para subtrair a contribuição do contínuo, conforme explicamos nas seções 1.2 e 2.2). Vemos por esse gráfico que o termo perturbativo (pontos) é o dominante e que os termos devido aos condensados de quarks (pontos e traços) e de glúons (traços) contribuem para que o resultado final (linha sólida) seja bem estável como função de  $M^2$ .

O resultado da regra de soma para  $f_{K^*}$  é a raiz quadrada da eq.(3.41). Obtemos  $f_{K^*} = 0,21 \pm 0,01 \text{ GeV}$ , em excelente acordo com o resultado experimental,  $f_{K^*}^{exp} = 0,21 \pm 0,02 \text{ GeV}$  [14].

## 5.2 A constante de decaimento $f_K$

Na seção 3.2 obtivemos a regra de soma para o  $f_K$  usando a corrente axial-vetorial e na seção 3.3 usamos a pseudoescalar. Nesta seção discutiremos os resultados de cada uma, começando pelo resultado na aplicação da corrente pseudoescalar.

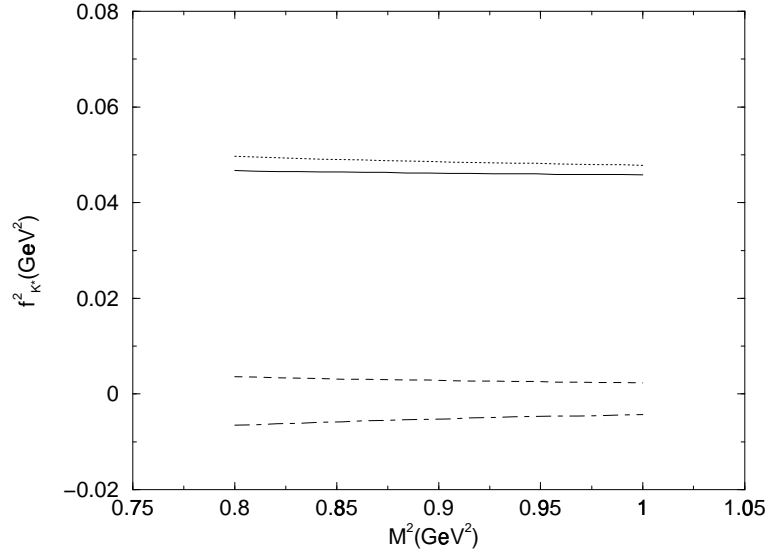


Figura 5.1: Gráfico da eq.(3.41). A linha sólida representa  $f_K^2$ . O termo perturbativo está representado pela linha pontilhada. A linha pontilhada e tracejada e a linha tracejada representam os condensados de quarks e de glúons respectivamente.

Obtivemos anteriormente a seguinte equação:

$$f_K^2(M^2) = \left[ \frac{3M^4}{8\pi^2} E_1 + m_s \left( \frac{\langle \bar{s}s \rangle}{2} - \langle \bar{q}q \rangle \right) + \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{32\pi^2} \right] \left( \frac{m_s^2}{m_K^4} \right) e^{m_K^2/M^2}. \quad (3.93)$$

Substituindo os valores da tabela 5.1 e usando desta vez o intervalo  $0,6 \text{ GeV}^2 \leq M^2 \leq 1,0 \text{ GeV}^2$  para a massa de Borel e limiar do continuum  $s_0 = (m_K + 0,5 \text{ GeV})^2$ , obtemos o gráfico da figura 5.2.

O intervalo do quadrado da massa de Borel ( $M^2$ ) que costuma ser usado é o quadrado da massa da partícula, que é o méson  $K$  nesse caso. Mas, como o quadrado da massa do méson  $K$  acaba sendo um valor pequeno (tal que os termos não-perturbativos acabam tendo uma contribuição maior que o perturbativo), usamos o quadrado da massa do méson  $\rho$  ( $m_\rho^2 \approx 0,6 \text{ GeV}^2$ ).

A raiz quadrada da eq.(3.93) mostra o resultado das regras de soma para o  $f_K$  usando corrente pseudoescalar. Obtemos  $f_K = 0,075 \pm 0,005 \text{ GeV}$ , o que ficou em desacordo com o resultado experimental,  $f_K^{exp} \approx 0,16 \text{ GeV}$  [14].

É sabido entretanto que a contribuição dos instantons é importante no canal pseudoescalar. Quando a contribuição dos instantons é incluída [15, 16], o valor obtido para  $f_K$  fica compatível com o valor experimental.

Nosso próximo passo foi estudar  $f_K$  usando a corrente axial-vetorial. Para tal, usamos o intervalo  $0,6 \text{ GeV}^2 \leq M^2 \leq 1,0 \text{ GeV}^2$ . Nesse caso, o limiar do contínuo começa acima de  $m_{K_1}^2$ , já que esse méson está sendo explicitamente levado em conta.

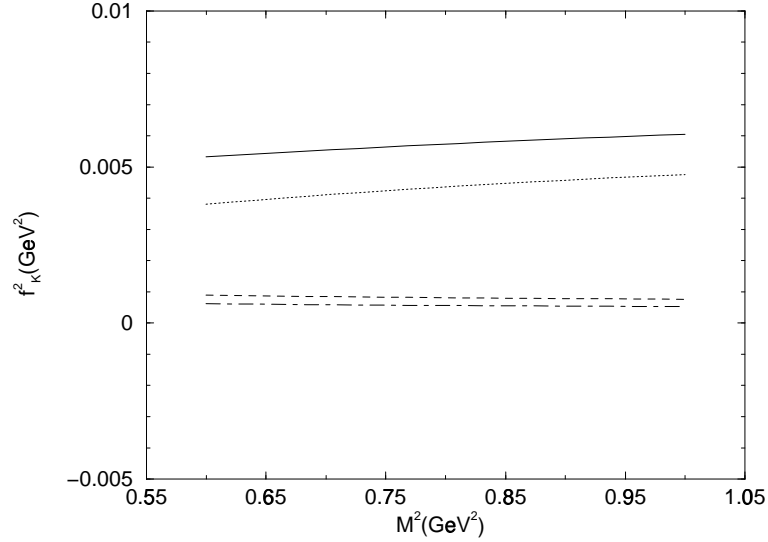


Figura 5.2: Gráfico da eq.(3.93). A linha sólida representa  $f_K^2$ . O termo perturbativo está representado pela linha pontilhada. A linha pontilhada e tracejada e a linha tracejada representam os condensados de quarks e de glúons respectivamente.

Assim, tomaremos  $s_0 = 1,4\text{GeV}^2$ . Da equação obtida na seção 3.2.3:

$$f_K^2(M^2) = \left[ \frac{M^2}{4\pi^2} E_0 - \frac{M^4}{4\pi^2} \frac{E_1}{m_{K_1}^2} - \frac{m_s \langle \bar{q}q \rangle}{m_{K_1}^2} + \frac{m_s \langle \bar{s}s \rangle}{M^2} + \frac{\langle g_s^2 G^2 \rangle}{2^4 3\pi^2} \left( \frac{1}{M^2} + \frac{1}{m_{K_1}^2} \right) \right] e^{m_K^2/M^2}, \quad (3.81)$$

obtemos o gráfico da figura 5.3.

Vemos por esse gráfico que o termo perturbativo (pontos) é o dominante sobre o de condensado de quarks (pontos e traços) e o de glúons (traços). Assim, o termo total  $f_K^2$  (linha sólida) é apenas uma correção do termo perturbativo dentro desse intervalo da massa de Borel  $M^2$ .

Vemos que o valor obtido foi  $f_K = 0,13 \pm 0,01 \text{ GeV}$ , o que ficou em de acordo com a literatura [17, 18] e, dentro dos 20% de erro das regras de soma, ficou de acordo com o resultado experimental  $f_K^{exp} \approx 0,16\text{GeV}$  [14].

### 5.3 O fator de forma $g_{KK^*\pi}(q^2)$

Vamos agora estudar a regra de soma para o fator de forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$ . No estudo desse fator nós usamos uma função de correlação de três pontos. A equação obtida foi:

$$g_{KK^*\pi}(Q^2, M^2, M'^2) = - \frac{m_{K^*}^2 (m_u + m_d) (Q^2 + m_\pi^2)}{2\pi^2 m_\pi^2 f_\pi f_K(M'^2) f_{K^*}(M_m^2) m_{K^*} (Q^2 + m_K^2 + m_{K^*}^2)}$$

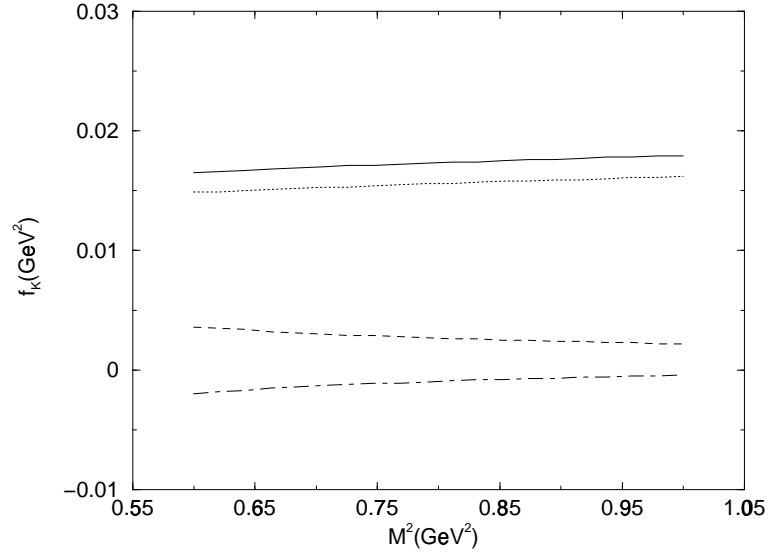


Figura 5.3: Gráfico da eq.(3.81). A linha sólida representa  $f_K^2$ . O termo perturbativo está representado pela linha pontilhada. A linha pontilhada e tracejada e a linha tracejada representam os condensados de quarks e de glúons respectivamente.

$$\times e^{m_{K^*}^2/M^2} e^{m_K^2/M'^2} \left\{ 3m_s \left[ \int_0^{s_0} ds \int_0^{u_0} du e^{-s/M^2} e^{-u/M'^2} \frac{t(s-t+u)}{\lambda^{3/2}(s,u,t)} \right] - 4\pi^2 \langle \bar{s}s \rangle \right\}, \quad (4.29)$$

onde  $t = -Q^2$ .

Para minimizar a dependência dos resultados com as massas de Borel costuma-se usar:

$$M_m^2 = \frac{M^2}{2}, e$$

$$M'_m{}^2 = \frac{M'^2}{2}$$

na equação acima [19]. As massas de Borel,  $M^2$  e  $M'^2$ , são completamente independentes. Entretanto, por simplicidade, usaremos a seguinte relação entre elas:

$$\frac{M^2}{m_{K^*}^2 - m_s^2} = \frac{M'^2}{m_\rho^2}, \quad (5.1)$$

onde  $m_\rho$  funciona como escala mínima nas regras de soma.

Finalmente, para o gráfico da equação (4.29), usaremos o intervalo de  $1.6 \text{ GeV}^2 \leq M^2 \leq 4.0 \text{ GeV}^2$ . Esse intervalo é duas vezes o usado para o  $f_{K^*}$  devido a mudança que fizamos ao usar  $M^2 = 2M_m^2$  e  $M'^2 = M'_m{}^2$ .

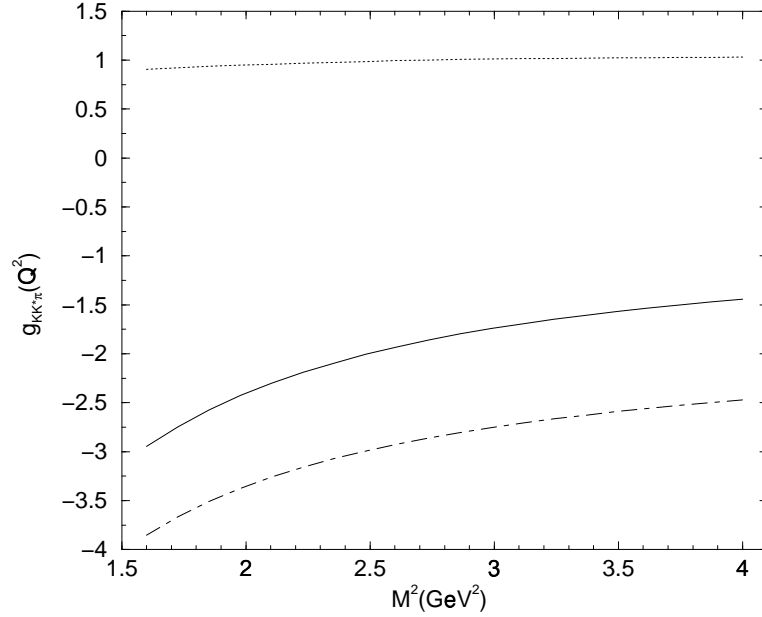


Figura 5.4: Na linha sólida temos  $g_{KK^*\pi}(q^2)$ . Na pontilhada temos o termo perturbativo. Na pontilhada e tracejada temos o condensado de quark s.

Para os demais parâmetros que aparecem na eq. (4.29) usaremos os valores:  $m_u + m_d = 0,012 \text{ GeV}$ ,  $m_\pi = 0,14 \text{ GeV}$ ,  $f_\pi = 0,093 \sqrt{2} \text{ GeV} \approx 132 \text{ MeV}$ ,  $u_0 \approx m_{K_1}^2$  e  $s_0 = (m_{K^*} + 0,5)^2$ . Fixando  $Q^2$  em  $2.0 \text{ GeV}^2$  obtemos o gráfico da figura 5.4. Desta figura vemos que o termo proporcional ao condensado de quarks é predominante. Isso é devido ao fato de que ao usarmos a corrente axial para o káon e o termo perturbativo ficou proporcional a massa do quark s. Além disso, vemos dessa figura que o termo perturbativo é muito mais estável como função de  $M^2$ , enquanto que o resultado final não o é.

Esperava-se que o fator de forma  $g_{KK^*\pi}(Q^2)$  fosse aproximadamente constante como função da massa de Borel. Se assim fosse, poderíamos fixar qualquer valor da massa de Borel para estudarmos a variação de  $g_{KK^*\pi}(Q^2)$  com  $Q^2$ . Porém, vemos que o fator de forma  $g_{KK^*\pi}(Q^2)$  não é aproximadamente constante, gráfico 5.4.

Esses dois fatos: falta de estabilidade de  $g_{KK^*\pi}(Q^2)$  e contribuição não-perturbativa superar a perturbativa, nos sugerem que a expansão (OPE) neste caso não está sob controle e teríamos que considerar necessariamente mais termos na expansão.

## 5.4 Conclusões e perspectivas

Vimos que a corrente axial descreve a função de dois pontos muito bem enquanto que a pseudoescalar não. Já na função de três pontos vimos que a corrente axial não é apropriada visto que o termo perturbativo é menor que o próximo termo da série.

Como continuação desse trabalho, podemos usar a corrente pseudoescalar para obter o fator de forma  $g_{KK^*\pi}(Q^2)$ . Embora tenhamos visto que essa corrente não descreve bem a função de dois pontos, talvez incluindo as contribuições dos instantons [15, 16] possa-se solucionar esses problemas.

Continuar o trabalho usando corrente axial e as contribuições de ordem mais alta dos operadores não é uma boa idéia. Quando se aplica as regras de soma espera-se que, entre outras coisas, que o termo perturbativo seja predominante e os não-perturbativos sejam apenas correções dele. Assim, usar a corrente pseudoescalar considerando as contribuições dos instantons seria o melhor caminho.

# Apêndice A

## Contribuições Perturbativas e Não-Perturbativas

### A.1 Contribuições Perturbativas

As contribuições não-perturbativas aparecem da ordenação normal dos operadores dos campos dos quarks da eq.(2.11). O propagador perturbativo do quark é o primeiro termo do lado direito dessa equação. Mas ele pode ser escrito também como a transformada de Fourier do propagador perturbativo no espaço dos momentos, ou seja:

$$S_{ab}^q(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \delta_{ab} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{\not{p} + m_q}{p^2 + m_q^2}. \quad (\text{A.1})$$

Estamos estudando mésons compostos de quark ( $u$ ,  $d$  e  $s$ ) e faremos a seguinte aproximação:

$$S_{ab}^q(x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \delta_{ab} \int d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{\not{p} + m_q}{p^2}. \quad (\text{A.2})$$

Teremos que calcular apenas uma integral,  $\int d^4p e^{-ip \cdot x} / p^2$ , já que

$$\int d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{\not{p}}{p^2} = i \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \int d^4p \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2}. \quad (\text{A.3})$$

Podemos resolver essa integral fazendo uma rotação de Wick, [20]:

$$\begin{aligned} \int d^4p \frac{e^{-ip \cdot x}}{p^2} \Big|_{\text{Esp. Eucl.}} &= -i \int d^4p \frac{e^{ip \cdot x}}{p^2} = -i \int d^4p \int_0^\infty d\alpha e^{ip \cdot x} e^{-\alpha p^2} \\ &= -i \int_0^\infty d\alpha \int d^4p e^{-\alpha(p - ix/2\alpha)^2} e^{-x^2/4\alpha} \\ &= -i\pi^2 \int_0^\infty d\alpha \frac{e^{-x^2/4\alpha}}{\alpha^2} = -\frac{4i\pi^2}{x^2} \Big|_{\text{Minkowski}} = \frac{4i\pi^2}{x^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

E, como  $\partial_\mu(1/x^2) = -2x_\mu/x^4$ , temos:

$$S_{ab}^q(x) = \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} \delta_{ab} - \frac{m_q}{4\pi^2 x^2} \delta_{ab}. \quad (\text{A.5})$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima, é representado graficamente como mostrado no diag.A1.1 da fig.(A.1); enquanto que o segundo termo do lado direito está representado graficamente no diag.A1.2 da fig.(A.1).

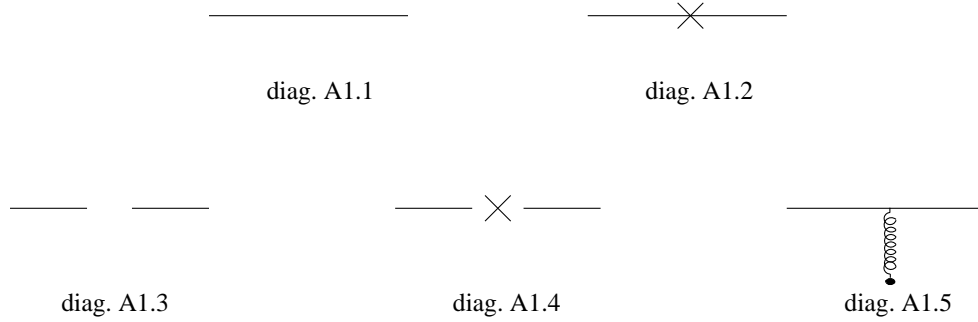


Figura A.1: Representação gráfica usual de um propagador nas QCD

A segunda contribuição perturbativa que consideraremos é a do diagrama que representa a interação de um glúon, diag. A1.5 da fig.(A.1).

Uma vez que o campo de glúons aparece num valor esperado no vácuo, é conveniente escrever esse campo,  $B_\mu^a(x)$ , em termos do campo tensorial  $G_{\mu\nu}^a(x)$  fornecendo uma forma invariante de *gauge* para os resultados. Por conveniência, nós usaremos o *gauge* de ponto fixo definido por:

$$(x^\mu - x_0^\mu)B_\mu^a(x) = 0, \quad (\text{A.6})$$

onde  $x_0$  é um ponto arbitrário fixo no espaço-tempo, usualmente escolhido como zero. Pode-se escrever, [9], nesse *gauge*

$$B_\mu(x) \simeq -\frac{1}{2} G_{\mu\nu}(0)x^\nu, \quad (\text{A.7})$$

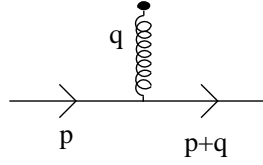
válido no limite de baixos momentos de glúon transferidos. Nessa equação,  $B_\mu = B_\mu^a t^a$  é o campo de glúons e  $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a t^a$  é o tensor campo de glúons, com  $t^a$  representando uma matriz de Gell-Mann.

No espaço dos momentos, e nesse *gauge*, o campo de glúons é dado por

$$\begin{aligned} B_\mu(p) &= \int d^4x e^{ip \cdot x} B_\mu(x) \\ &= -\frac{1}{2} G_{\mu\nu} \int d^4x e^{ip \cdot x} x^\nu \\ &= \frac{i}{2} (2\pi)^4 G_{\mu\nu} \partial^\nu \delta(p). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

O vértice de glúons é dado por  $-ig_s \gamma^\mu B_\mu$ , onde  $g_s$  é a constante de acoplamento forte. A contribuição referente ao diag.A2.1 da fig.(A.2) é dada por

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{\not{p} + \not{q} - m_q} \left( -ig_s \gamma^\mu \frac{i}{2} (2\pi)^4 G_{\mu\nu} \partial^\nu \delta(q) \right) \frac{i}{\not{p} - m_q}. \quad (\text{A.9})$$



diag. A2.1

Figura A.2: Contribuição perturbativa de um glúon

Fazendo  $m_q = 0$ , usando o fato de que  $G_{\mu\nu}$  é antissimétrico e integrando por partes, obtemos:

$$-\frac{ig_s}{4} G_{\mu\nu} \frac{1}{p^4} (\sigma^{\mu\nu} \not{p} + \not{p} \sigma^{\mu\nu}) . \quad (\text{A.10})$$

Um resultado genérico útil, [21, 10], é:

$$\int d^4x \frac{e^{-iq \cdot x}}{(x^2)^n} = \frac{i \pi^2 (-1)^n 2^{4-2n}}{(n-1)! (n-2)!} (q^2)^{n-2} \ln(-q^2) , \text{ para } n \geq 2 . \quad (\text{A.11})$$

Usando-a para calcular a transformada de Fourier da eq.(A.10), obtemos:

$$-\frac{ig_s}{2^5 \pi^2 x^2} G_{\mu\nu}^A t_{ab}^A ( \not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x} ) . \quad (\text{A.12})$$

Ficaremos até essa ordem das contribuições perturbativas para calcularmos o fator de forma  $g_{KK^*\pi}(q^2)$ .

À partir da eq.(A.11) geramos a seguinte tabela:

Tabela A.1: Resultados da eq.(A.11) para alguns n.

n	Resultado da integral
2	$i\pi^2 \ln(-q^2)$
3	$-\frac{i\pi^2}{8} q^2 \ln(-q^2)$
4	$\frac{i\pi^2}{192} q^4 \ln(-q^2)$

## A.2 Contribuições Não-Perturbativas

No final da seção 2.1.2 obtemos o termo não-perturbativo de ordem mais baixa a partir do primeiro termo do lado direito da eq.(2.12) quando o substituímos no segundo termo do lado direito da eq.(2.11). O diagrama que o representa é o diag.A1.3 da fig.(A.1).

Consideremos o segundo termo na expansão (o segundo termo do lado direito da eq.(2.12) substituído no segundo termo do lado direito da eq.(2.11)):

$$\langle 0 | : (D_\mu q_\alpha^a)_{x=0} \bar{q}_\beta^b(0) : | 0 \rangle = N(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \delta^{ab} . \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando ambos os lados por  $(\gamma_\mu)_{\beta\alpha} \delta^{ab}$ :

$$-\langle \bar{q} Dq \rangle = N , \quad (\text{A.14})$$

e usando a equação de movimento

$$Dq_\alpha^a = -im_q q_\alpha^a , \quad (\text{A.15})$$

obtemos:

$$-\langle \bar{q} Dq \rangle = im_q \langle \bar{q} q \rangle = 48N . \quad (\text{A.16})$$

Portanto:

$$N = \frac{i}{48} m_q \langle \bar{q} q \rangle . \quad (\text{A.17})$$

O termo está contraído ainda com  $x^\mu$ . Assim, a contribuição relativa ao diag.A1.4 da fig.(A.1) será:

$$S_{ab}^q = \frac{i}{48} m_q \langle \bar{q} q \rangle \not{x} \delta_{ab} . \quad (\text{A.18})$$

## Apêndice B

### Duplas Descontinuidades

Usando as regras de Cutkosky, [22, 23]

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \rightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0) , \quad (\text{B.1})$$

a dupla descontinuidade de  $A_{\mu\nu}(p, p', q)$ , eq.(4.19), será dada por:

$$\begin{aligned} DD[A_{\mu\nu}(p, p', q)] &= -\frac{3.4im_s}{2\pi} \int \bar{d}^4 k \{[(p + p') \cdot k - k^2 - p \cdot p'] g_{\mu\nu} \\ &\quad + q_\mu k_\nu - q_\nu k_\mu - p'_\nu p_\mu + p_\nu p'_\mu\} \delta(k^2) \delta((p - k)^2) \\ &\quad \times \delta((p' - k)^2) \theta(k_0) \theta(p_0 - k_0) \theta(p'_0 - k_0) . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

No referencial do  $K^*$  podemos escolher

$$\begin{aligned} p &= (\sqrt{s}, \mathbf{0}) ; p^2 = s , \\ p' &= (p'_0, 0, 0, |\vec{p}'|) ; p'^2 = u , \\ q^2 = t = (p - p')^2 &= s + u - 2p \cdot p' ; p \cdot p' = (s + u - t)/2 = \sqrt{s} p'_0 , \\ |\vec{p}'|^2 &= \frac{1}{4s} \lambda(s, u, t) , \text{ onde} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\lambda(s, u, t) = s^2 + u^2 + t^2 - 2su - 2st - 2ut$$

Como

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|} \delta(x - x_0) , \quad (\text{B.4})$$

onde  $x_0$  é tal que  $f(x_0) = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 \delta(k^2) &= \delta(k_0^2 - \vec{k}^2) \\
 \delta((p - k)^2) &= \delta(s + k^2 - 2\sqrt{s}k_0) = \frac{1}{2\sqrt{s}}\delta\left(k_0 - \frac{\sqrt{s}}{2}\right) \\
 \delta((p' - k)^2) &= \delta(u + k^2 - 2p' \cdot k) = \delta(u - 2p'_0 k_0 + 2|\vec{p}'||\vec{k}|\cos\theta) \\
 &= \frac{1}{2|\vec{p}'||\vec{k}|}\delta(\cos\theta - \overline{\cos\theta}) ,
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

onde  $\overline{\cos\theta} = (2p'_0 k_0 - u)/(2|\vec{p}'||\vec{k}|)$  e devemos introduzir a restrição  $\overline{\cos\theta}^2 \leq 1$ .

As funções  $\theta$  fornecem os limites

$$\begin{aligned}
 \theta(k_0) &\Rightarrow s \geq 0 ; \\
 \theta(p_0 - k_0) &\Rightarrow \sqrt{s} > \sqrt{s}/2 , \text{ que está sendo obedecida ;} \\
 \theta(1 - \overline{\cos\theta}^2) &\Rightarrow u \geq 0 \\
 \theta(p'_0 - k_0) &\Rightarrow (u + s - t)/(2\sqrt{s}) > \sqrt{s}/2 ; u > t ; t \leq 0 ,
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

assim

$$\begin{aligned}
 DD[A_{\mu\nu}(p, p', q)] &= -\frac{6im_s}{\pi} \int dk_0 d\cos\theta d\varphi \frac{|\vec{k}|}{2} d\vec{k}^2 \delta(\vec{k}^2 - k_0^2) \frac{1}{2\sqrt{s}} \\
 &\times \delta\left(k_0 - \frac{\sqrt{s}}{2}\right) \frac{1}{2|\vec{p}'||\vec{k}|} \delta(\cos\theta - \overline{\cos\theta}) \theta(s) \theta(u) \\
 &\times \left\{ \left(\frac{s+u}{2} - p \cdot p'\right) g_{\mu\nu} + q_\mu k_\nu - q_\nu k_\mu - p'_\nu p_\mu + p_\nu p'_\mu \right\} ,
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

e, como da eq.(B.3) temos  $\sqrt{\lambda(s, u, t)} = 2|\vec{p}'|\sqrt{s}$  e  $p \cdot p' = (s + u - t)/2$ , assim

$$DD[A_{\mu\nu}(p, p', q)] = -\frac{3im_s}{2\pi\sqrt{\lambda(s, u, t)}} \left\{ 2\pi \left[ \frac{t}{2} g_{\mu\nu} - p'_\nu p_\mu + p_\nu p'_\mu \right] + q_\mu I_\nu - q_\nu I_\mu \right\} , \tag{B.8}$$

com

$$I_\alpha = \int dk_0 d\cos\theta d\varphi d\vec{k}^2 k_\alpha \delta(\vec{k}^2 - k_0^2) \delta\left(k_0 - \frac{\sqrt{s}}{2}\right) \delta(\cos\theta - \overline{\cos\theta}) . \tag{B.9}$$

Parametrizando:

$$I_\alpha = 2\pi[Ap_\alpha + Bp'_\alpha] ; \quad (\text{B.10})$$

obtemos através das eq.(B.9) e eq.(B.10):

$$I_0 = (A\sqrt{s} + Bp'_0) = 2\pi\bar{k}_0 = \pi\sqrt{s} ,$$

$$I_1 = I_2 = 0 \text{ e} \quad (\text{B.11})$$

$$I_3 = 2\pi B|\vec{p}'| = 2\pi|\vec{k}|\overline{\cos\theta} \Rightarrow B = (\overline{\cos\theta}\sqrt{s}) / (2|\vec{p}'|) .$$

Assim

$$A = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\overline{\cos\theta}}{|\vec{p}'|} p'_0 \right] \quad (\text{B.12})$$

e

$$B = \frac{\overline{\cos\theta}\sqrt{s}}{2|\vec{p}'|} p'_\alpha , \quad (\text{B.13})$$

portanto

$$DD \left[ A_{\mu\nu}(p, p', q) \right] = -\frac{3im_s}{\sqrt{\lambda(s, u, t)}} \left\{ \frac{t}{2} g_{\mu\nu} - p'_\nu p_\mu + p_\nu p'_\mu \right. \\ \left. + (p - p')_\mu [Ap_\nu + Bp'_\nu] \right. \\ \left. - (p - p')_\nu [Ap_\mu + Bp'_\mu] \right\} , \quad (\text{B.14})$$

rearranjando, obtemos

$$DD \left[ A_{\mu\nu}(p, p', q) \right] = -\frac{3im_s}{\sqrt{\lambda(s, u, t)}} \left\{ \frac{t}{2} g_{\mu\nu} + (A + B - 1)p'_\nu p_\mu - (A + B - 1)p_\nu p'_\mu \right\} . \quad (\text{B.15})$$

Na estrutura  $p_\mu p'_\nu$ , temos

$$DD \left[ A_{p p'}(p, p', q) \right] = -\frac{3im_s}{\sqrt{\lambda(s, u, t)}} (A + B - 1) , \quad (\text{B.16})$$

sendo que

$$(A + B - 1) = (-|\vec{p}'| - \overline{\cos\theta} p'_0 + \overline{\cos\theta}\sqrt{s}) / (2|\vec{p}'|) = \frac{t(s - t + u)}{\lambda(s, u, t)} . \quad (\text{B.17})$$

Portanto

$$DD \left[ A_{p p'}(p, p', q) \right] = -\frac{3im_s}{\sqrt{\lambda^3(s, u, t)}} t(s - t + u) , \quad (\text{B.18})$$

e a função de correlação é obtida da dupla descontinuidade através da dupla relação de dispersão:

$$A_{p p'}(p, p', q) = -\frac{1}{4\pi^2} \int \int ds du \frac{DD[A_{p p'}]}{(p^2 - s)(p'^2 - u)}. \quad (\text{B.19})$$

## Referências

- [1] C.M.G. Lattes et al. *Nature*, **159**, 694 (1950); **160**, 453, 486 (1947).
- [2] G.D. Rochester and C.C. Butler. *Nature*, **160**, 855, (1947).
- [3] C.F. Powell, P.H. Fowler, and D.H. Perkins. *Rep. Prog. Phys.*, **13**, 384 (1950).
- [4] T.D. Lee and C.N. Yang. *Phys. Rev.*, **104**, 254 (1956).
- [5] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov. *Nucl. Phys.*, **B147**, 385 (1979); **B147**, 448 (1979).
- [6] K. Wilson. *Phys. Rev.*, **179**, 1499 (1969).
- [7] K. Wilson and J. Kogut. *Phys. Rep.*, **12**, 75 (1974).
- [8] T. Muta. *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Cingapura, (1987), p.224, 234, 249.
- [9] M. A. Shifman. *Nucl. Phys.*, **B173**, 13 (1980).
- [10] T. M. Aliev e M. A. Shifman. *Sov. J. Nucl. Phys.*, **36**, 891 (1982).
- [11] M. Gell-Mann, R. Oakes, and B. Renner. *Phys. Rev.*, **175**, 2195 (1968).
- [12] K.-C. Yang, W.-Y.P. Hwang, E.M. Henley, and L.S. Kisslinger. *Phys. Rev.*, **D47**, 3001 (1993).
- [13] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov. *Nucl. Phys.*, **B147**, 385 (1979).
- [14] Particle Data Group. *Eur. Phys. Jour.*, **C15**, 1 (2000).
- [15] E. V. Shuryak. *Nucl. Phys.*, **B214**, 237-252 (1983).
- [16] E. V. Shuryak. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, **34**, 107-112 (1994).
- [17] S. L. Zhu. *Eur.Phys.J.*, **A4**, 277-281 (1999).

- 
- [18] E. V. Shuryak. *Rev. Mod. Phys.*, **65**, 1 (1993).
- [19] R. S. Marques de Carvalho. *Regras de Soma da QCD para o Decaimento Semileptônico de Bárions Pesados*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2000.
- [20] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge CB2 IRP, 1985.
- [21] H. Rubinstein e S. Yazaki L. J. Reinders. *Phys. Rep.*, **127**, 1 (1985).
- [22] B.L. Ioffe and A.V. Smilga. *Nucl. Phys.*, **B232**, 109 (1984).
- [23] B.L. Ioffe and A.V. Smilga. *Nucl. Phys.*, **B216**, 373-407 (1983).