UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

# ANÁLISE ESTÁTICA NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE PÓRTICOS ESPACIAIS

ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

1210001230

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do Título de Livre-Docente.

Ilha Solteira
Maio - 2001

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

# ANÁLISE ESTÁTICA NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA DE PÓRTICOS ESPACIAIS

ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do Título de Livre-Docente.

1210001230

Proc. 040/2001 - NDD 109/01
UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"
SERVIÇO TÉC. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO
DATA DE CHEGADA: 02/10/01 | DATA DE TOMBO: 30/10/01
RECEBIDO POR: Aileza | TOMBO: Te. 1230
AQUISIÇÃO: Doação Autor R$10,00 | CLASSIFICAÇÃO

30102006 ESTRUTURAS

Ilha Solteira
Maio - 2001

À minha esposa Luzia Marta
e à minha filha Maria Gabriela,
dedico este trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Aos Professores do Departamento de Engenharia Civil - DEC, da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS/UNESP, pelo incentivo no transcorrer do trabalho e pela confiança e amizade demonstrada.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente tornaram possível a elaboração deste trabalho.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....i

LISTA DE TABELAS.....ii

ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS.....iii

RESUMO.....iv

*ABSTRACT*.....v

**1 - INTRODUÇÃO**.....1
1.1 - Tema e motivação.....1
1.2 - Objetivos do trabalho.....4
1.3 - Apresentação do trabalho.....4

**2 - ANÁLISE ESTRUTURAL ESTÁTICA NÃO-LINEAR**.....6
2.1 - Aspectos principais.....6
2.2 - Discretização de um sistema estrutural contínuo.....7
2.2.1 - Sistema estrutural discreto.....8
2.2.2 - Elementos finitos.....9
2.2.2.1 - Elemento para pórtico espacial.....10
2.3 - Esforços atuantes em um sistema estrutural discreto.....12
2.3.1 - Esforços devidos ao meio externo.....13
2.3.1.1 - Esforços volumétricos.....13
2.3.1.2 - Esforços superficiais.....13
2.3.1.3 - Esforços concentrados.....13
2.3.1.4 - Dependência dos esforços externos.....14

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

2.4 - Princípios básicos.....15
2.4.1 - Estruturas em repouso.....15
2.4.1.1 - Princípio da Energia Potencial Estacionária..15
2.4.1.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais.....17
2.5 - Equação do equilíbrio para um sistema estrutural discreto.....18
2.5.1 - Equação de equilíbrio via P.T.V. .....18
2.5.2 - Relações básicas.....19
2.5.3 - Equação geral do equilíbrio.....20
2.6 - Algoritmos numéricos para resolução de sistemas não-lineares.....23
2.6.1 - Processos iterativos.....23
2.6.1.1 - Iteração de Newton-Raphson Modificado.....24
2.6.1.2 - Iteração de Newton-Raphson.....26
2.6.2 - Processo incremental.....27
2.7 - Método de Newmark para resolução numérica da equação de equilíbrio.....28
2.7.1 - Equacionamento básico.....28
2.7.2 - Algoritmo numérico para resolução do processo..30
2.8 - Aspectos computacionais.....33
2.8.1 - Esquema geral de cálculo.....33
2.8.2 - Descrição das subrotinas.....34

**3 - NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA NA ANÁLISE DE PÓRTICOS ESPACIAIS.....38**
3.1 - Generalidades.....38
3.2 - Sistemas de coordenadas.....38
3.2.1 - Pórtico espacial.....39
3.3 - Modelo elemental.....41
3.3.1 - Hipóteses básicas.....41
3.3.2 - Campo de deslocamentos e de deformações.....42
3.3.3 - Funções de forma.....45
3.3.3.1 - Pórtico espacial.....45
3.4 - Matriz de rigidez.....48

3.4.1 - Conceituação via formulação energética.....48
3.4.2 - Atualização de coordenadas.....56
3.4.3 - Elemento de barra para pórtico espacial.....58
3.4.3.1 - Energia de deformação.....58
3.4.3.2 - Matriz de rigidez secante.....66
3.4.3.3 - Matriz de rigidez tangente.....70
3.4.4 - Atualização das matrizes de rigidez.....71
3.4.4.1 - Pórtico espacial.....71
3.4.5 - Aspectos computacionais.....72

**4 - ANÁLISE NUMÉRICA**.....73
4.1 - Generalidades.....73
4.2 - Estrutura aporticada espacial.....73

**5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS**.....78
5.1 - Conclusões.....78
5.2 - Propostas de desenvolvimento.....79

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**.....80

**OBRAS CONSULTADAS**.....84

**APÊNDICE**.....87

# LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 - Elemento de barra para pórtico espacial...10
FIGURA 2.2 - Configuração de equilíbrio do elemento para pórtico espacial.....11
FIGURA 2.3 - Viga biengastada discretizada por elementos finitos.....12
FIGURA 2.4 - Viga em balanço discretizada por elementos finitos.....14
FIGURA 2.5 - Iteração de Newton-Raphson Modificado.....25
FIGURA 2.6 - Iteração de Newton-Raphson.....26
FIGURA 2.7 - Processo incremental / iterativo.....27
FIGURA 2.8 - Diagrama de blocos do método de Newmark...32
FIGURA 2.9 - Diagrama de blocos do esquema geral de cálculo.....34
FIGURA 3.1 - Sistema de coordenadas para pórtico espacial.....40
FIGURA 3.2 - Campo de deslocamentos.....42
FIGURA 3.3 - Comportamento não-linear. Matriz de rigidez secante, CORRÊA(1991).....53
FIGURA 3.4 - Comportamento não-linear. Matriz de rigidez tangente, CORRÊA(1991).....55
FIGURA 3.5 - Atualização de coordenadas para um elemento de pórtico espacial no plano "XY".....58
FIGURA 3.6 - Torção de trecho infinitesimal de barra...65
FIGURA 3.7 - Atualização da matriz de rigidez tangente para pórtico espacial no plano "XY".....72
FIGURA 4.1 - Pórtico espacial.....74
FIGURA 4.2 - Gráfico força x deslocamento do nó 6, na direção "Y".....75
FIGURA 4.3 - Gráfico força x deslocamento do nó 6, na direção "Y", HSIAO et al.(1987).....77
FIGURA 4.4 - Posição deslocada da estrutura.....77

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

# LISTA DE TABELAS

TABELA 4.1 - Características geométricas dos elementos.75
TABELA 4.2 - Dados numéricos.....76

# ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

As principais abreviaturas e siglas utilizadas neste trabalho são listadas a seguir:

MEF - Método dos Elementos Finitos.

Já os símbolos utilizados são identificados no transcorrer do trabalho, quando da sua primeira utilização ou quando se fizer necessário.

# RESUMO

RODRIGUES, R. O. (2001). *Análise estática não-linear geométrica de pórticos espaciais*. Ilha Solteira, 102p. Tese (Livre-Docência) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

Este trabalho trata da análise estática de pórticos espaciais, onde se estuda o efeito da não-linearidade geométrica de tais estruturas.

Neste contexto, define-se a equação geral que descreve o comportamento de estruturas discretizadas por elementos finitos, utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais para estruturas em repouso.

Para a consideração da não-linearidade geométrica define-se o campo de deformações através de uma função quadrática dos deslocamentos, que ocorrem ao longo de cada elemento finito, sendo desprezados os termos que contêm produtos de parcelas de ordem superior. Para descrever a posição de equilíbrio do sistema estrutural ao longo do processo de solução do problema, utiliza-se a formulação Lagrangeana atualizada que resulta na dedução das matrizes de rigidez incrementais secante e tangente.

Para finalizar, apresenta-se exemplo numérico com posterior análises qualitativa e quantitativa dos resultados.

Palavras-chave: Estática estrutural; Comportamento não-linear.

## *ABSTRACT*

RODRIGUES, R. O. (2001). *Geometrical non-linear static analyze of space frames.* Ilha Solteira, 102p. Tese (Livre-Docência) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

This work presents the space frames static analysis, where is studied the effect of the geometrical non-linearity.

In this context, a general equation that describes the behavior of structures approximated by finite elements is defined, through the Virtual Works Principle for structures in static equilibrium.

For the geometrical non-linear analysis, the deformation field is defined by assuming displacements approximated along each finite element using quadratic shape functions. All terms these functions representing higher order products are neglected. In order to describe the equilibrium position of the structural system, during the numeric resolution process, the updated Lagrangean formulation is used to give the secant and tangent incremental stiffness matrices.

Finally, numeric example is presented to illustrate the quality and accuracy of obtained results.

Keywords: Structural static; Non-linear behavior.

# CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

## 1.1 - Tema e motivação

A análise realista do comportamento estático e dinâmico de sistemas estruturais é, sem dúvida, um dos principais objetivos almejados pelo Engenheiro de Estruturas nas últimas quatro décadas.

Com a idealização do Método dos Elementos Finitos, que ocorreu na década de cinqüenta com os trabalhos de Argyris e Kelsey, publicados em 1954, e de Turner et al. publicado em 1956, os pesquisadores passaram a ter uma ferramenta poderosa que permite a modelação matemática de fenômenos envolvidos na análise estrutural, tais como os provenientes da alteração da geometria do sistema estrutural (não-linearidade geométrica) e da alteração das propriedades físicas dos materiais que compõem o mesmo (não-linearidade física).

Na década de sessenta, com o trabalho de Clough, publicado em 1960, inicia-se uma nova fase na Engenharia de Estruturas, onde procura-se empregar o MEF na análise estrutural com auxílio de computadores de grande porte, através da sua implementação via linguagem FORTRAN. Ao final da mesma década surgem alguns programas comerciais que fazem este tipo de análise, tais como o "STARDYNE", "NEST", "NASTRAN", "SAP", "ANSYS" e outros, como mostra BRASIL(1990), deflagrando, assim, uma corrida em busca de melhores programas computacionais, sempre baseados em modelos estruturais mais precisos e abrangentes.

Nas décadas de setenta e oitenta são publicados inúmeros trabalhos que tratam do assunto, vide CORRÊA(1991) e CILONI(1993), em especial aqueles que consideram a não-linearidade geométrica na análise estática de edifícios altos e a não-linearidade física para materiais usuais, como o aço e o concreto armado.

Com a disseminação da informática ocorrida no final da década de oitenta, e principalmente em função do aumento vertiginoso da capacidade de armazenamento, gerenciamento e processamento de dados aduzido pelos computadores de pequeno porte, o Engenheiro de Estruturas passa a ter acesso a equipamentos e programas computacionais que possibilitam uma análise estrutural baseada em modelos mais refinados, proporcionando um aumento da segurança e diminuição de custos dos projetos e das construções.

Já no início da década de noventa, alguns trabalhos que abordam este tipo de análise merecem destaque, a saber: BRASIL(1990) trata da não-linearidade geométrica utilizando a formulação Lagrangeana total na análise dinâmica de estruturas aporticadas planas, com termos não-lineares nas matrizes de massas e de amortecimento; CORRÊA(1991) trata da não-linearidade geométrica na análise estática de estruturas reticuladas planas e espaciais utilizando a formulação Lagrangeana atualizada; MAZZILLI et al.(1992) elaboram o programa computacional "ANDROS" para análise dinâmica não-linear geométrica de estruturas reticuladas planas; BRASIL et al.(1992) apresentam algumas simplificações relativas à análise dinâmica não-linear geométrica de estruturas reticuladas; CILONI(1993) trata da não-linearidade geométrica utilizando a formulação Lagrangeana atualizada e a não-linearidade física do concreto armado na análise estática de estruturas aporticadas planas; SOLER(1995) trata da análise não-linear de pórticos espaciais de concreto

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

armado utilizando uma formulação consistente baseada na teoria de grandes deslocamentos e deformações; SILVA(1996) trata da análise não-linear de pórticos planos de concreto armado utilizando um sistema corrotacional solidário ao elemento para a obtenção da matriz de rigidez; RODRIGUES(1997) trata da análise dinâmica bidimensional de treliças de aço e pórticos de concreto armado, onde na análise da não-linearidade geométrica utiliza a formulação Lagrangeana atualizada, que resulta na dedução das matrizes de rigidez incrementais secante e tangente, na análise da não-linearidade física do aço elabora uma modelagem numérica através da utilização de um diagrama tensão x deformação bilinear e na análise da não-linearidade física do concreto armado elabora uma modelagem numérica através da utilização dos modelos propostos pelo CEB e pelo ACI; e RODRIGUES et al.(1999) trata da análise dinâmica de treliças espaciais de aço, onde na análise da não-linearidade geométrica utiliza a formulação Lagrangeana atualizada e na análise da não-linearidade física do aço utiliza modelo numérico considerando um diagrama tensão x deformação bilinear.

Neste contexto, o autor deste trabalho sentiu-se motivado a analisar o comportamento estático de estruturas aporticadas espaciais considerando-se a não-linearidade geométrica, através da implementação, de forma aprimorada, da formulação Lagrangeana atualizada para descrever a posição de equilíbrio da estrutura.

Para esta finalidade, o autor desenvolveu programa computacional, em linguagem PASCAL, O'BRIEN (1992), que contempla as diversas possibilidades de análise estrutural. Cabe ressaltar que este tema faz parte de uma das linhas de pesquisa desenvolvidas no âmbito do Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de

Engenharia de Ilha Solteira, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP.

## 1.2 - Objetivos do trabalho

Este trabalho tem por objetivos:

- implementar a não-linearidade geométrica na análise estática estrutural utilizando-se a formulação Lagrangeana atualizada;

- aprimorar a formulação Lagrangeana atualizada existente para as estruturas reticuladas espaciais;

- elaborar um programa computacional que contemple as diversas possibilidades de análise estrutural;

- analisar o comportamento estático de pórticos espaciais considerando-se a não-linearidade geométrica.

## 1.3 - Apresentação do trabalho

Após a introdução deste capítulo, que tem por finalidade ilustrar o assunto a ser discutido, a seguir apresentam-se mais quatro capítulos, ressaltando-se que a parte teórica foi adaptada do trabalho elaborado por RODRIGUES(1997).

Dessa forma, no capítulo 2, descrevem-se os motivos da transformação de um sistema estrutural contínuo em um sistema estrutural discreto, através da utilização de elementos finitos previamente escolhidos em função do sistema estudado, e descrevem-se as forças que atuam em um sistema estrutural já discretizado. Apresentam-se,

também, os princípios básicos que regem o comportamento de estruturas em repouso, possibilitando, na continuidade do capítulo, a montagem da equação geral que descreve o equilíbrio de tais sistemas. Na seqüência, apresentam-se os métodos utilizados para a resolução numérica da equação de equilíbrio e os algoritmos utilizados na resolução de sistemas não-lineares. Adotando-se o método de Newmark, elabora-se o equacionamento pertinente e descreve-se o funcionamento do algoritmo numérico para resolução de tal método. Abordam-se, também, os aspectos computacionais necessários para a análise estrutural estática.

Já no capítulo 3, aborda-se a não-linearidade geométrica que ocorre em estruturas discretizadas por elementos de barra, utilizando-se a formulação Lagrangeana atualizada de forma aprimorada, através da consideração de novas parcelas da equação que define o campo de deformações de cada elemento estrutural. Para isso, adotam-se um sistema de coordenadas adequado e um modelo elemental compatível, propiciando-se a dedução das matrizes incrementais de rigidez secante e tangente para o elemento que compõe pórticos espaciais. Consideram-se, também, os aspectos computacionais pertinentes para a implementação dessas matrizes no programa computacional que foi desenvolvido.

No capítulo 4, encontra-se um exemplo relativo à análise estática não-linear geométrica de estruturas aporticadas espaciais, onde se procura fazer uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados encontrados, através da comparação de resultados obtidos por outro pesquisador.

Ao final deste trabalho, no capítulo 5, faz-se a conclusão do mesmo e descrevem-se as propostas de desenvolvimento que ainda podem ser realizadas nesta linha de pesquisa.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

# CAPÍTULO 2 - ANÁLISE ESTRUTURAL ESTÁTICA NÃO-LINEAR

## 2.1 - Aspectos principais

Uma análise estrutural estática tem por objetivo principal quantificar a magnitude dos esforços internos e dos deslocamentos que se manifestam em qualquer sistema estrutural, quando o mesmo é submetido a um carregamento arbitrário, cuja intensidade, direção ou sentido não variem com o tempo. Tal procedimento deverá fornecer uma ampla gama de resultados numéricos, compatíveis com o carregamento aplicado, cuja avaliação de forma qualitativa viabilizará a sua utilização na elaboração do projeto estrutural do sistema analisado.

Com relação ao tipo de análise que pode ser feita destacam-se a análise linear e a não-linear, sendo a linear proveniente da manutenção da geometria inicial como referência para a verificação do equilíbrio e da manutenção das propriedades físicas específicas do material da estrutura. Já a não-linear pode ser proveniente da alteração da geometria e/ou das propriedades físicas do material estrutural.

A seguir, destacam-se os vários níveis de decisão que estão envolvidos na elaboração deste trabalho:

a- discretização do sistema estrutural contínuo;
b- definição das forças atuantes no sistema estrutural;

unesp

c- escolha de um princípio para elaborar a equação de equilíbrio do sistema estrutural;
d- escolha do algoritmo para resolução do sistema de equações;
e- escolha do sistema de coordenadas;
f- definição do modelo elemental;
g- formalismo adotado na decomposição das matrizes de rigidez.

Na seqüência, cada um dos níveis de decisão descrito anteriormente será abordado de forma pormenorizada, enfatizando-se os subníveis que serão utilizados na elaboração deste trabalho.

## 2.2 - Discretização de um sistema estrutural contínuo

Define-se sistema estrutural como sendo uma associação de elementos estruturais formando um conjunto resistente, adequado a resistir a solicitações. Entende-se como esses elementos os corpos sólidos elástico-deformáveis, com capacidade de receber e transmitir esforços de uma forma geral.

Um meio contínuo resulta da distribuição homogênea da matéria no volume. Fisicamente, a hipótese do contínuo consiste em abstrair-se da composição molecular da matéria que compõe o meio, e da sua conseqüente descontinuidade.

Neste contexto, pode-se dizer que um sistema estrutural é contínuo desde que o menor elemento estrutural retirado do sistema possua as mesmas propriedades físicas específicas e não haja descontinuidade no conjunto.

A dificuldade decorrente da admissão de tal hipótese reside na formulação das equações consistentes que governam o sistema estrutural, uma vez que essas são equações diferenciais ou integrais e devem satisfazer as condições de contorno do mesmo. Cabe ressaltar que os sistemas estruturais contínuos possuem um número infinito de graus de liberdade, em função dessa continuidade.

### 2.2.1 - Sistema estrutural discreto

Para contornar o problema descrito ao final do item anterior, empregam-se métodos numéricos que transformam um sistema estrutural contínuo em um sistema estrutural discreto, através da divisão do modelo geométrico dos elementos estruturais em pequenas regiões chamadas de elementos finitos, sendo essas interconectadas entre si para formar o conjunto estrutural. Esse processo de discretização é a base do conceito dos métodos finitos.

Os métodos finitos permitem expressar a solução exata dos sistemas contínuos de uma forma aproximada, através da utilização de sistemas discretos que contém um número finito de graus de liberdade. Em problemas estáticos, este procedimento resulta um sistema de equações algébricas que pode ser facilmente resolvido com a ajuda de técnicas computacionais.

Com a obtenção desses sistemas de equações resolve-se o problema já citado, uma vez que tais sistemas facilitam a imposição das condições de contorno da estrutura. Por outro lado, a solução obtida passa a ser aproximada e para se obter uma resposta satisfatória, usualmente, deve-se escolher o tipo adequado de elemento finito, a quantidade e a disposição geométrica do mesmo.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

### 2.2.2 - Elementos finitos

A definição do tipo apropriado de elemento finito é dada em função do sistema estrutural que se deseja analisar. Para isso, os elementos finitos são classificados em:

- elementos lineares;
- elementos laminares;
- elementos sólidos.

Os elementos lineares, também conhecidos como elementos de barras, são elementos em que uma dimensão é muito maior do que as outras duas. Estes são subdivididos em elementos de pórticos planos e espaciais, de treliças planas e espaciais, de vigas e de grelhas.

Já os elementos laminares são elementos em que uma dimensão é muito menor do que as outras duas e são subdivididos em elementos de placa, de chapa, de membrana e de casca.

Os elementos sólidos são elementos em que as três dimensões têm a mesma ordem de grandeza e permitem obter uma distribuição qualquer de tensões na estrutura.

Para que estes elementos finitos possam se relacionar uns com os outros, os mesmos devem ser interconectados por meio de um número discreto de pontos comuns distribuídos no contorno. Esses pontos comuns são denominados pontos nodais ou, simplesmente, nós. Com isso, o comportamento estrutural de cada elemento pode ser definido somente em função de variáveis nodais, tais como: coordenadas, deslocamentos e carregamentos, permitindo-se a montagem dos sistemas de equações já mencionados no item anterior.

Uma vez definido o tipo e a disposição dos elementos finitos, deve-se estabelecer a quantidade a ser utilizada

na discretização da estrutura. Essa quantidade vai afetar a precisão da solução e o tempo de processamento numérico, visto que o tamanho dos sistemas de equações a serem resolvidos depende do número de nós existentes. Cabe ressaltar que a quantidade de nós define o número de graus de liberdade da estrutura.

Após a resolução desses sistemas de equações, utilizam-se funções de interpolação, também chamadas funções de forma, para descrever o comportamento estrutural genérico de cada elemento.

Na seqüência, destaca-se o tipo de elemento que será utilizado neste trabalho, mostrando-se as suas peculiaridades.

### 2.2.2.1 - Elemento para pórtico espacial

O elemento utilizado na análise estrutural de pórticos espaciais, com suas respectivas coordenadas locais, é mostrado na figura 2.1.

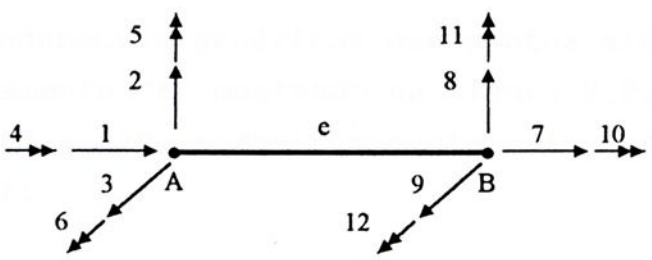


FIGURA 2.1 - Elemento de barra para pórtico espacial.

Já a figura 2.2 ilustra uma configuração qualquer de equilíbrio do elemento para pórtico espacial após a sua deformação.

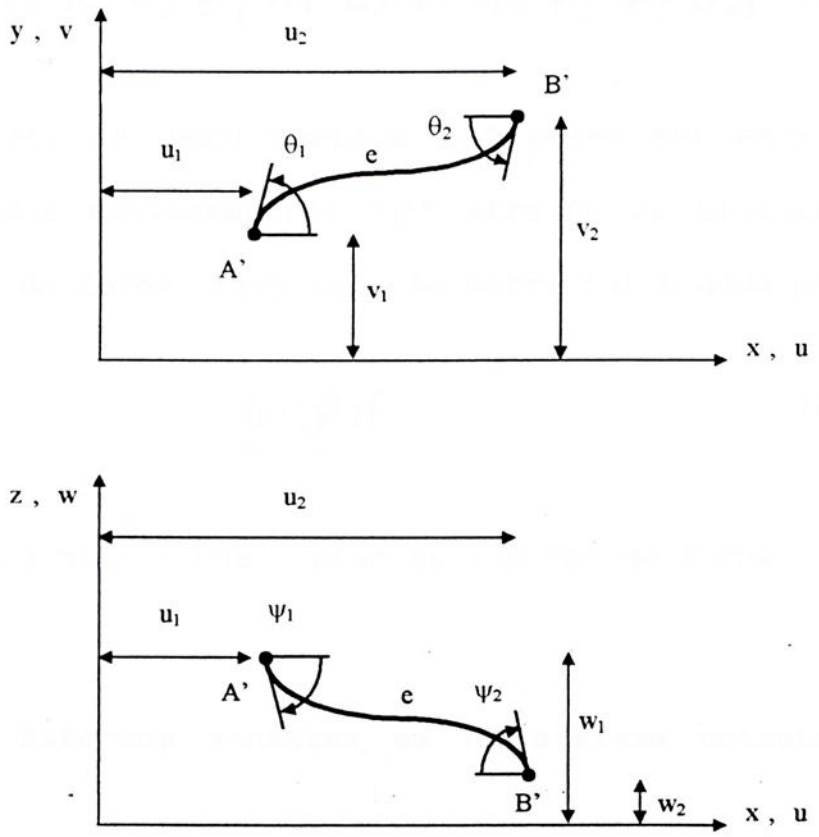


FIGURA 2.2 - Configuração de equilíbrio do elemento para pórtico espacial.

Os deslocamentos genéricos dos pontos situados sobre o eixo do elemento "e" mostrado na figura 2.2, segundo os eixos "x", "y" e "z", respectivamente, são dados na forma matricial por:

$$\underset{\sim}{u}^T = \{u \quad v \quad w\} \tag{2.1}$$

Já as componentes dos deslocamentos genéricos para cada nó do elemento, ver figura 2.2, são dadas na forma matricial pela equação (2.2).

$$\underset{\sim}{d}^T = \{u_1\ v_1\ w_1\ \phi_1\ \psi_1\ \theta_1\ u_2\ v_2\ w_2\ \phi_2\ \psi_2\ \theta_2\} \quad (2.2)$$

Com isso, os deslocamentos "$\underset{\sim}{u}$" podem ser escritos em função dos deslocamentos "$\underset{\sim}{d}$" através da utilização das funções de forma. Essa relação matricial é dada por:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\phi}\,\underset{\sim}{d} \quad (2.3)$$

onde "$\underset{\sim}{\phi}$" é a matriz que contém as funções de forma.

## 2.3 - Esforços atuantes em um sistema estrutural discreto

Dado um sistema estrutural arbitrário discretizado por uma série de elementos finitos, conforme ilustra a figura 2.3, pode-se isolar um cubo infinitesimal com volume "dV" de qualquer elemento, com a finalidade de se analisar os esforços atuantes no mesmo, de acordo com os itens subseqüentes.

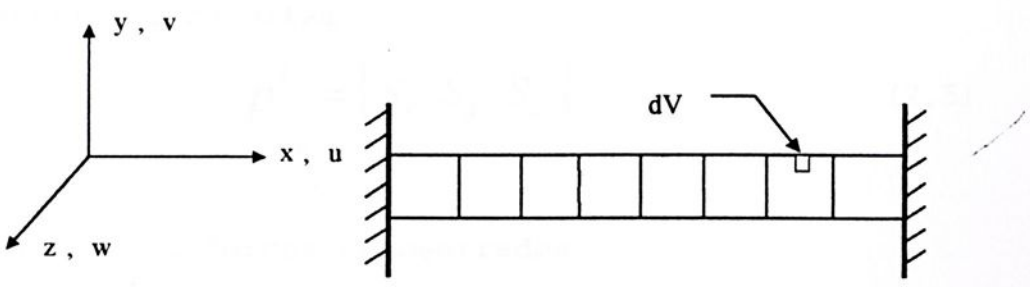


FIGURA 2.3 - Viga biengastada discretizada por elementos finitos.

### 2.3.1 - Esforços devidos ao meio externo

#### 2.3.1.1 - Esforços volumétricos

Os esforços volumétricos são aplicados em todos os pontos do material e tem dimensão de força por unidade de volume, uma vez que os momentos volumétricos não serão considerados. Esses podem ser provenientes de campos magnéticos, da gravidade, etc. Logo, sobre cada elemento diferencial de volume "dV" atuam as componentes dos esforços volumétricos, que organizadas na forma matricial resultam:

$$\underset{\sim Ve}{p^T} = \left\{ V_x \; V_y \; V_z \right\} \tag{2.4}$$

#### 2.3.1.2- Esforços superficiais

Os esforços superficiais são aplicados de forma distribuída nas superfícies externas dos elementos e tem dimensão de força por unidade de área, uma vez que os momentos superficiais não serão considerados. Esses podem ser provenientes da ação do vento, do peso próprio da alvenaria, das reações das lajes, etc. Logo, sobre cada elemento diferencial com área externa "dS" atuam as componentes dos esforços superficiais, que organizadas na forma matricial resultam:

$$\underset{\sim Se}{p^T} = \left\{ S_x \; S_y \; S_z \right\} \tag{2.5}$$

#### 2.3.1.3 - Esforços concentrados

Os esforços concentrados são, geralmente, aplicados nos nós dos elementos e têm dimensão de força e de força

vezes unidade métrica, visto que os momentos são incluídos nesta categoria de esforço. Esses podem ser provenientes das reações das vigas ou pilares, carregamentos pontuais, etc. Logo, sobre cada nó de um elemento finito atuam as componentes dos esforços concentrados, que organizadas na forma matricial resultam:

$$\underset{\sim C}{p}^{T} = \{C_x \; C_y \; C_z\} \tag{2.6}$$

#### 2.3.1.4 - Dependência dos esforços externos

Em virtude dos esforços externos apresentados nos itens anteriores possuírem módulo, direção e sentido, os mesmos podem depender da variação dos deslocamentos.

Como neste trabalho só serão considerados os esforços concentrados, essa dependência ficará restrita somente à variação do módulo e do sentido, de tal forma que a direção se mantenha constante.

A figura 2.4 ilustra tal dependência, mostrando uma viga em balanço, discretizada por uma série de elementos finitos lineares, na sua posição inicial e na sua posição deslocada.

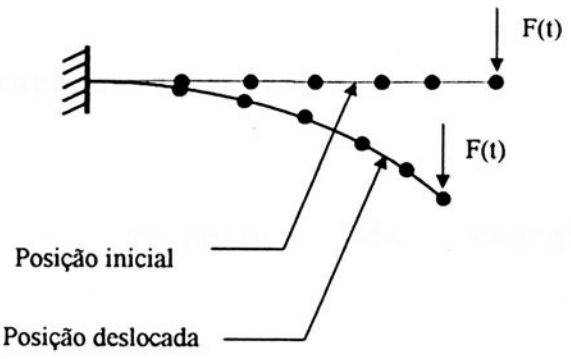


FIGURA 2.4 - Viga em balanço discretizada por elementos finitos.

Dessa forma, para que o módulo e o sentido sejam afetados por um fator multiplicativo, o módulo das forças será multiplicado por uma função "P", dada pela seguinte expressão:

$$P = A + B\,t + C\,t^2 + D\,sen(E\,t) + F\,cos(G\,t) + R\,exp(S\,t) \tag{2.7}$$

onde "A", "B", "C", "D", "E", "F", "G", "R" e "S" são constantes da função multiplicadora e "t" é o multiplicador em questão.

## 2.4 - Princípios básicos

Para descrever o comportamento de um sistema estrutural, através de uma equação de equilíbrio, é necessário formular o problema utilizando-se os princípios básicos da Mecânica dos Sólidos.

Esses princípios são divididos em diferenciais e integrais, podendo ser aplicados em problemas estáticos ou dinâmicos. Na seqüência, destacam-se os princípios que serão utilizados neste trabalho.

### 2.4.1 - Estruturas em repouso

#### 2.4.1.1 - Princípio da Energia Potencial Estacionária

Um sistema estrutural é chamado de conservativo desde que o trabalho dos esforços internos e o trabalho dos esforços externos independam do caminho percorrido

unesp

pela estrutura, quando da passagem da sua configuração de equilíbrio inicial para uma outra qualquer.

Essa configuração é definida como sendo o estabelecimento da posição de todas as partículas de uma estrutura, e essa é chamada de admissível desde que satisfaça a compatibilidade interna e as condições essenciais de contorno do sistema estrutural.

Com relação à energia potencial, também chamada de energia potencial total, essa é definida como sendo uma função "$\pi_p$" dada pela soma entre a energia de deformação "U", também chamada de energia potencial interna, e o potencial dos esforços externos "$\Omega$" que atuam sobre um sistema estrutural qualquer. Essa soma possibilita expressar a energia potencial contida no sistema em função de uma configuração deformada qualquer.

Após a descrição de tais definições, pode-se, finalmente, enunciar o Princípio da Energia Potencial Estacionária:

**Entre todas as configurações admissíveis de um sistema estrutural conservativo, aquela que satisfaz as condições de equilíbrio conduz a energia potencial a assumir um valor estacionário com relação à admissão de uma pequena variação de deslocamentos.** COOK et al. (1989).

Em outras palavras, para o equilíbrio de um sistema a função da energia potencial total "$\pi_p$" deve ser estacionária, ou seja, a sua variação deve-se igualar a zero, isto é:

$$\delta \pi_p = 0 \qquad (2.8)$$

Em termos de funções ordinárias, existe uma condição em que a derivada de uma função em relação a uma variável independente é nula e a função em si tem um máximo, um mínimo ou um valor constante. Se a condição de estacionaridade fornece uma relação mínima, então, o estado de equilíbrio é estável (Teorema de Lagrange).

#### 2.4.1.2 - Princípio dos Trabalhos Virtuais

Considerando-se um sistema estrutural qualquer submetido a esforços externos "F" ativos e reativos, com "n" componentes "$F_j$", o mesmo estará em equilíbrio se satisfizer à condição dada por:

$$\sum_{j}^{n} F_j = 0 \qquad (2.9)$$

Introduzido-se um deslocamento virtual "δu", sendo este infinitesimal e cinematicamente compatível com o sistema estrutural, com componentes em todas as "n" direções, pode-se calcular o trabalho virtual realizado pelo sistema através da equação (2.10).

$$\delta W = \sum_{j}^{n} F_j \delta u_j \qquad (2.10)$$

Para que o sistema continue em equilíbrio após a introdução do deslocamento virtual, é necessário que o trabalho realizado seja nulo, ou seja:

$$\delta W = 0 \qquad (2.11)$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Superpondo-se as equações (2.10) e (2.11), pode-se, finalmente, formular o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.), HURTY et al.(1967), para um sistema em repouso, dado pela equação (2.12).

$$\delta W = \sum_{j}^{n} F_j \, \delta u_j = 0 \qquad (2.12)$$

## 2.5 - Equação do equilíbrio para um sistema estrutural discreto

### 2.5.1 - Equação de equilíbrio via P.T.V.

A equação do equilíbrio que governa a resposta estática de um sistema estrutural discreto pode ser obtida utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais para estruturas em repouso, conforme visto no item 2.4.1.2 deste trabalho.

Aplicando-se, então, um deslocamento virtual arbitrário qualquer e lembrando-se que tal sistema está submetido às forças descritas no item 2.3, além das tensões restauradoras provocadas pela deformação do sistema, obtém-se a equação de equilíbrio para um elemento genérico do sistema, COOK et al.(1989), dada por:

$$\int_{Ve} \delta \underset{\sim}{u}^T \, \underset{\sim}{p}_{Ve} \, dV_e + \int_{Se} \delta \underset{\sim}{u}^T \, \underset{\sim}{p}_{Se} \, dS_e + \sum_{i}^{nc} \delta \underset{\sim i}{u}^T \, \underset{\sim}{p}_{Ci} = \int_{Ve} \delta \underset{\sim}{\varepsilon}^T \, \underset{\sim}{\sigma} \, dV_e \qquad (2.13)$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

onde

"$\delta_{\underset{\sim}{u}}$" é o vetor dos deslocamentos virtuais;

"$\delta_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$" é o vetor das deformações virtuais correspondentes à "$\delta_{\underset{\sim}{u}}$";

"$\underset{\sim}{\sigma}$" é o vetor das tensões restauradoras;

"$\delta_{\underset{\sim}{u_i}}$" é o vetor de deslocamentos virtuais correspondentes aos pontos onde os esforços do vetor "$p_{\underset{\sim}{Ci}}$" são aplicados;

"nc" é o número de pontos nodais do elemento.

A equação (2.13) fornece na primeira parte da igualdade o trabalho dos esforços externos, dado pelo produto dos esforços atuantes no elemento com os respectivos deslocamentos virtuais. Já a segunda parte fornece o trabalho total interno, dado pelo produto entre as deformações virtuais e as tensões restauradoras.

### 2.5.2 - Relações básicas

Conforme visto no item 2.2.2 deste trabalho, os deslocamentos genéricos dos pontos situados sobre o eixo de um elemento finito podem ser relacionados com os seus respectivos deslocamentos nodais, através da utilização da equação (2.3). Essa relação se dá através da utilização de funções de forma, que são dependentes apenas do espaço.

Outra relação básica importante é dada pela associação entre a deformação longitudinal "$\underset{\sim}{\varepsilon}$" e os deslocamentos axiais e transversais que ocorrem no

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

elemento finito. Admitindo-se que essa relação seja dada por uma função quadrática, obtém-se:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{u} \tag{2.14}$$

onde "$\underset{\sim}{L}$" é a matriz que contém os operadores diferenciais.

Substituindo-se a equação (2.3) na equação (2.14), obtém-se, também:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{\phi}\ \underset{\sim}{d}$$

ou

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B}\ \underset{\sim}{d} \tag{2.15}$$

onde

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{L}\ \underset{\sim}{\phi} \tag{2.16}$$

### 2.5.3 - Equação geral do equilíbrio

Para a obtenção da equação geral do equilíbrio de um sistema estrutural discreto, substituem-se as equações (2.3) e (2.15) na equação (2.13) resultando a equação (2.17).

unesp

$$\int_{Ve} \delta \underset{\sim}{d}^T \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p}_{Ve} dV_e + \int_{Se} \delta \underset{\sim}{d}^T \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p}_{Se} dS_e +$$

$$\sum_i^{nc} \delta \underset{\sim i}{d}^T \underset{\sim}{p}_{Ci} = \int_{Ve} \delta \underset{\sim}{d}^T \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{\sigma} dV_e$$

(2.17)

Colocando-se os deslocamentos nodais virtuais em evidência e rearrumando-se a equação (2.17), obtém-se:

$$\delta \underset{\sim}{d}^T \{ \int_{Ve} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p}_{Ve} dV_e + \int_{Se} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p}_{Se} dS_e + \sum_i^{nc} \underset{\sim}{p}_{Ci} -$$

$$\int_{Ve} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{\sigma} dV_e \} = 0$$

(2.18)

Para que o produto dado na equação anterior seja nulo, tendo em vista que os deslocamentos nodais virtuais são arbitrários, ou seja, não todos nulos, é necessário que seja mantida a seguinte igualdade:

$$\int_{Ve} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p}_{Ve} dV_e + \int_{Se} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p}_{Se} dS_e + \sum_i^{nc} \underset{\sim}{p}_{Ci} =$$

$$\int_{Ve} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{\sigma} dV_e$$

(2.19)

A expressão (2.19) fornece a equação do equilíbrio para um elemento finito genérico, que escrita de forma simplificada resulta:

unesp

$$\underset{\sim}{f_R}\left(\underset{\sim}{d}\right) = \underset{\sim}{f_E}(t) \tag{2.20}$$

onde

$$\underset{\sim}{f_R}\left(\underset{\sim}{d}\right) = \int_{Ve} \underset{\sim}{B}^T \; \underset{\sim}{\sigma} \, dV_e \tag{2.21}$$

$$\underset{\sim}{f_E}(t) = \int_{Ve} \underset{\sim}{\phi}^T \; \underset{\sim}{p_{Ve}} \, dV_e + \int_{Se} \underset{\sim}{\phi}^T \; \underset{\sim}{p_{Se}} \, dS_e + \sum_{i}^{nc} \underset{\sim}{p_{Ci}} \tag{2.22}$$

Para todo o sistema estrutural discreto utiliza-se o processo de expansão e acumulação, obtendo-se, finalmente, a equação geral do equilíbrio dada pelo sistema de equações (2.23), ARGYRIS et al. (1991).

$$\underset{\sim}{F_R}\left(\underset{\sim}{D}\right) = \underset{\sim}{F_E}(t) \tag{2.23}$$

Cabe ressaltar que na equação anterior os esforços externos "$\underset{\sim}{F_E}$" são dependentes apenas do multiplicador "t", conforme foi visto no item 2.3.1.4 deste trabalho. Já as forças restauradoras "$\underset{\sim}{F_R}$" são dependentes dos deslocamentos globais "$\underset{\sim}{D}$" e da relação tensão x deformação, conforme será visto no capítulo 3 deste trabalho.

Na seqüência, destacam-se os métodos numéricos para resolução da equação geral do equilíbrio e as técnicas computacionais para resolução de tal sistema de equações.

## 2.6 - Algoritmos numéricos para resolução de sistemas não-lineares

A utilização de algoritmos numéricos está relacionada com a necessidade de ter que se resolver sistema de equações não-lineares, originados pela discretização de estruturas que manifestam este tipo de comportamento, tendo em vista que a solução de tais sistemas só é possível com aplicação de procedimentos incrementais e/ou iterativos.

Assim sendo, destacam-se, na seqüência, os principais processos numéricos relacionados com o assunto em questão.

### 2.6.1 - Processos iterativos

Para a resolução da equação geral do equilíbrio de um sistema estrutural deve-se adotar um procedimento iterativo, visto que tal equação resulta um sistema de equações não-lineares.

A primeira relação importante para descrever tal procedimento é dada pelo equilíbrio estático ao longo de cada incremento de carregamento "$\Delta t$", que pode ser expressa através da adaptação da equação (2.23), conforme mostra a seguinte equação:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D_k}\right) = \underset{\sim}{F_E}(t) - \underset{\sim}{F_R}\left(\underset{\sim}{D_k}\right) \qquad (2.24)$$

unesp

onde "$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)$" é o resíduo das forças estáticas não equilibradas, em função de deslocamentos previstos "$\underset{\sim}{D}_k$".

A condição de equilíbrio ao final do incremento de carregamento "$n\,\Delta t$" para sistemas não-lineares é dada por:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k + \Delta\,\underset{\sim}{D}_k\right) = 0 \qquad (2.25)$$

onde "$\Delta\,\underset{\sim}{D}_k$" é o acréscimo de deslocamentos que ocorre durante o incremento de carregamento.

Com isso, pode-se iniciar um processo iterativo para o incremento de carregamento "$n\,\Delta t$", que consiste em uma sucessão de atualizações das forças internas, a partir de acréscimos de deslocamentos, até que a condição dada pela equação (2.25) seja satisfeita. A descrição detalhada deste procedimento será fornecida no item 2.7 deste trabalho.

Entre os vários processos iterativos pode-se destacar o processo de Newton-Raphson Modificado e o de Newton-Raphson, RUBERT(1993), MATTHIES **et al.**(1979) e OWEN **et al.**(1984). Na seqüência, os aspectos essenciais de cada processo serão mostrados de forma sucinta.

#### 2.6.1.1 - Iteração de Newton-Raphson Modificado

O processo iterativo de Newton-Raphson Modificado consiste na manutenção da rigidez da estrutura, obtida no início de cada incremento de carregamento, para o cálculo

das forças internas durante todas as iterações. Dessa forma, a representação gráfica desse procedimento é dada pela figura 2.5.

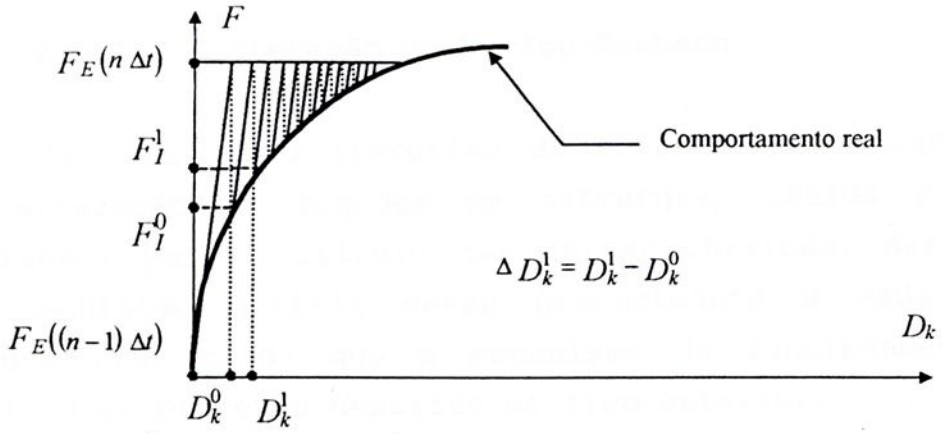


FIGURA 2.5 - Iteração de Newton-Raphson Modificado.

Desse modo, aplicando-se as forças "$F_E(n\,\Delta t)$" para uma dada rigidez estrutural inicial e resolvendo-se o sistema de equações, obtém-se os deslocamentos "$D_k^0$" e as respectivas forças internas "$F_I^0$" em função desses deslocamentos. Caso "$F_I^0$" seja diferente de "$F_E(n\,\Delta t)$", ou seja, resíduo não nulo, aplica-se a diferença de força "$F_E(n\,\Delta t) - F_I^0$" na estrutura já deformada e calcula-se o acréscimo de deslocamentos "$\Delta D_k^1$". Na seqüência, faz-se uma correção nos deslocamentos, onde obtém-se "$D_k^1$", e calculam-se as novas forças internas "$F_I^1$". Assim,

repete-se a sistemática já descrita até se atingir a igualdade entre as forças internas e externas. Portanto, quando o resíduo for nulo, obtém-se o equilíbrio estrutural procurado.

### 2.6.1.2 - Iteração de Newton-Raphson

Já o processo iterativo de Newton-Raphson consiste na alteração da rigidez da estrutura, obtida a cada iteração, para o cálculo das forças internas. Assim, a representação gráfica desse procedimento é dada pela figura 2.6, sendo que o mecanismo de funcionamento é análogo ao processo descrito no item anterior.

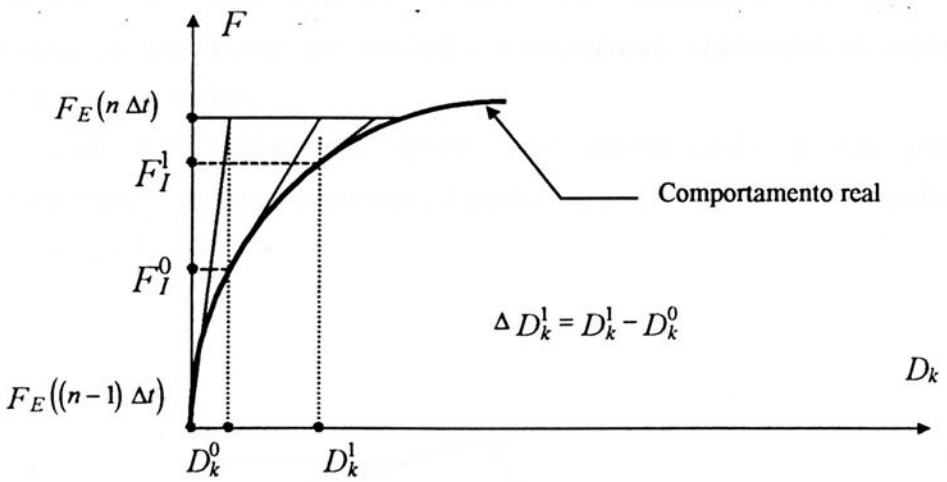


FIGURA 2.6 - Iteração de Newton-Raphson.

Comparando-se os processos já mencionados, deve-se ressaltar os seguintes aspectos: velocidade de convergência e esforço computacional envolvido.

Com relação à velocidade de convergência, o processo iterativo de Newton-Raphson é superior ao processo de

Newton-Raphson Modificado, visto que sua convergência é quadrática, CHEN et al.(1988). Já em relação ao esforço computacional envolvido, o processo de Newton-Raphson Modificado é menos trabalhoso, uma vez que a rigidez da estrutura não precisa ser atualizada a cada iteração. No cômputo geral, o processo iterativo de Newton-Raphson é mais eficiente, RUBERT(1993).

### 2.6.2 - Processo incremental

O procedimento incremental consiste na aplicação gradual do carregamento externo no sistema estrutural, através de pequenas parcelas do carregamento total. Este procedimento deve ser utilizado quando o nível de não-linearidade for elevado, de tal forma que se possa garantir o equilíbrio real e, também, respeitar as hipóteses básicas do modelo elemental durante o acréscimo de cada parcela.

Tal procedimento deve ser associado a um processo iterativo, cuja representação gráfica é mostrada pela figura 2.7.

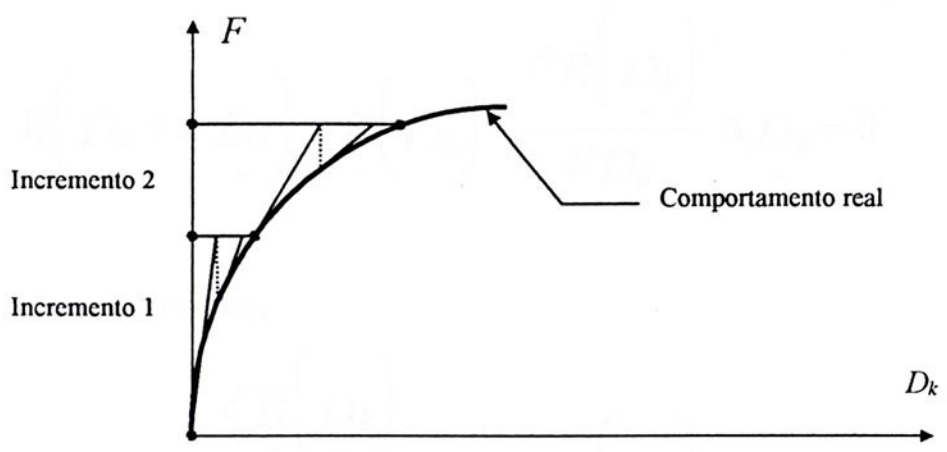


FIGURA 2.7 - Processo incremental / iterativo.

## 2.7 - Método de Newmark para resolução numérica da equação de equilíbrio

A idéia básica do método é dada pela previsão do valor dos deslocamentos ao final do incremento de carregamento que se deseja conhecer. Na seqüência, utiliza-se um processo iterativo, onde ao final de cada iteração, faz-se uma correção nos valores dos deslocamentos em função última resposta encontrada. Quando for atingida uma determinada tolerância para o resíduo das forças restauradoras, assume-se que os últimos valores obtidos estão corretos e inicia-se novamente o processo de resolução para o próximo incremento de carregamento.

Na seqüência, tal processo será descrito em detalhes.

### 2.7.1 - Equacionamento básico

Expandindo-se a função dada pela equação (2.25) pela relação linearizada de Taylor, obtém-se:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k + \Delta \underset{\sim}{D}_k\right) = \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right) + \frac{\partial \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)}{\partial \underset{\sim}{D}_k} \Delta \underset{\sim}{D}_k = 0 \qquad (2.26)$$

ou, simplesmente,

$$-\frac{\partial \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)}{\partial \underset{\sim}{D}_k} \Delta \underset{\sim}{D}_k = \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right) \qquad (2.27)$$

Derivando-se o resíduo, dado pela equação (2.24), em relação aos deslocamentos "$\underset{\sim}{D_k}$", chega-se a:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D_k}\right)}{\partial \underset{\sim}{D_k}} = + \frac{\partial \underset{\sim}{F_E}(t)}{\partial \underset{\sim}{D_k}} - \frac{\partial \underset{\sim}{F_R}\left(\underset{\sim}{D_k}\right)}{\partial \underset{\sim}{D_k}} \qquad (2.28)$$

Como os esforços externos são dependentes apenas do multiplicador "t", conforme foi visto no item 2.3.1.4 deste trabalho, tem-se:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{F_E}(t)}{\partial \underset{\sim}{D_k}} = 0 \qquad (2.29)$$

Substituindo-se as equações (2.29) na equação (2.28), obtém-se:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D_k}\right)}{\partial \underset{\sim}{D_k}} = - \frac{\partial \underset{\sim}{F_R}\left(\underset{\sim}{D_k}\right)}{\partial \underset{\sim}{D_k}} \qquad (2.30)$$

Logo, substituindo-se a equação anterior na equação (2.27), obtém-se a equação que fornecerá o acréscimo de deslocamentos "$\Delta \underset{\sim}{D_k}$", dada por (2.31), sendo esta

utilizada na correção dos deslocamentos que ocorrem ao longo de cada iteração.

$$\left\{\frac{\partial \underset{\sim}{F}_R\left(\underset{\sim}{D}_k\right)}{\partial \underset{\sim}{D}_k}\right\}\Delta \underset{\sim}{D}_k = \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right) \qquad (2.31)$$

### 2.7.2 - Algoritmo numérico para resolução do processo

O ponto de partida para deflagrar o processo de resolução está no conhecimento prévio das condições iniciais do problema no incremento t=0, dadas pelos deslocamentos "$\underset{\sim}{D}_0$".

Dando-se, então, início ao processo de resolução numérica ao longo de cada incremento de carregamento, deve-se fazer uma previsão dos deslocamentos para o primeiro incremento de carregamento "$n\,\Delta t$", com k=n=1, utilizando-se a seguinte equação:

$$\underset{\sim}{D}_k = \underset{\sim}{D}_{n-1} \qquad (2.32)$$

Com essa primeira aproximação calculam-se as forças restauradoras e, conseqüentemente, o resíduo das forças estáticas não equilibradas através da equação (2.24).

unesp

Para verificar o equilíbrio utiliza-se uma tolerância para o erro de cálculo "ε", dada pela seguinte relação:

$$\frac{\left\| \underset{\sim}{R}\left( \underset{\sim}{D}_k \right) \right\|}{\left\| \underset{\sim}{F}_E(n\,\Delta t) \right\|} < \varepsilon \qquad (2.33)$$

onde "$\left\| \underset{\sim}{R}\left( \underset{\sim}{D}_k \right) \right\|$" e "$\left\| \underset{\sim}{F}_E(n\,\Delta t) \right\|$" são as normas Eulerianas do resíduo e das forças externas, respectivamente.

Se a equação (2.33) for satisfeita, deve-se voltar para o início do processo e incrementar o valor de "k" e "n". Caso contrário, deve-se calcular o acréscimo de deslocamentos dado pela equação (2.31).

Com o valor do acréscimo de deslocamentos "$\Delta \underset{\sim}{D}_k$", faz-se uma correção nos valores dos deslocamentos da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{D}_{k\,(\text{corrigido})} = \underset{\sim}{D}_k + \Delta \underset{\sim}{D}_k \qquad (2.34)$$

Após a correção destas variáveis, volta-se novamente ao ponto onde o equilíbrio é verificado, concluindo-se, assim, o processo de resolução do sistema de equações.

Cabe ressaltar que o valor de cada incremento de carregamento "$\Delta t$" permanecerá constante ao longo de todo o processo de resolução.

Com a finalidade de ilustrar o método de Newmark, se apresenta na figura 2.8 um diagrama de blocos contendo apenas as equações básicas, onde se pode visualizar de forma global todos os passos descritos anteriormente.

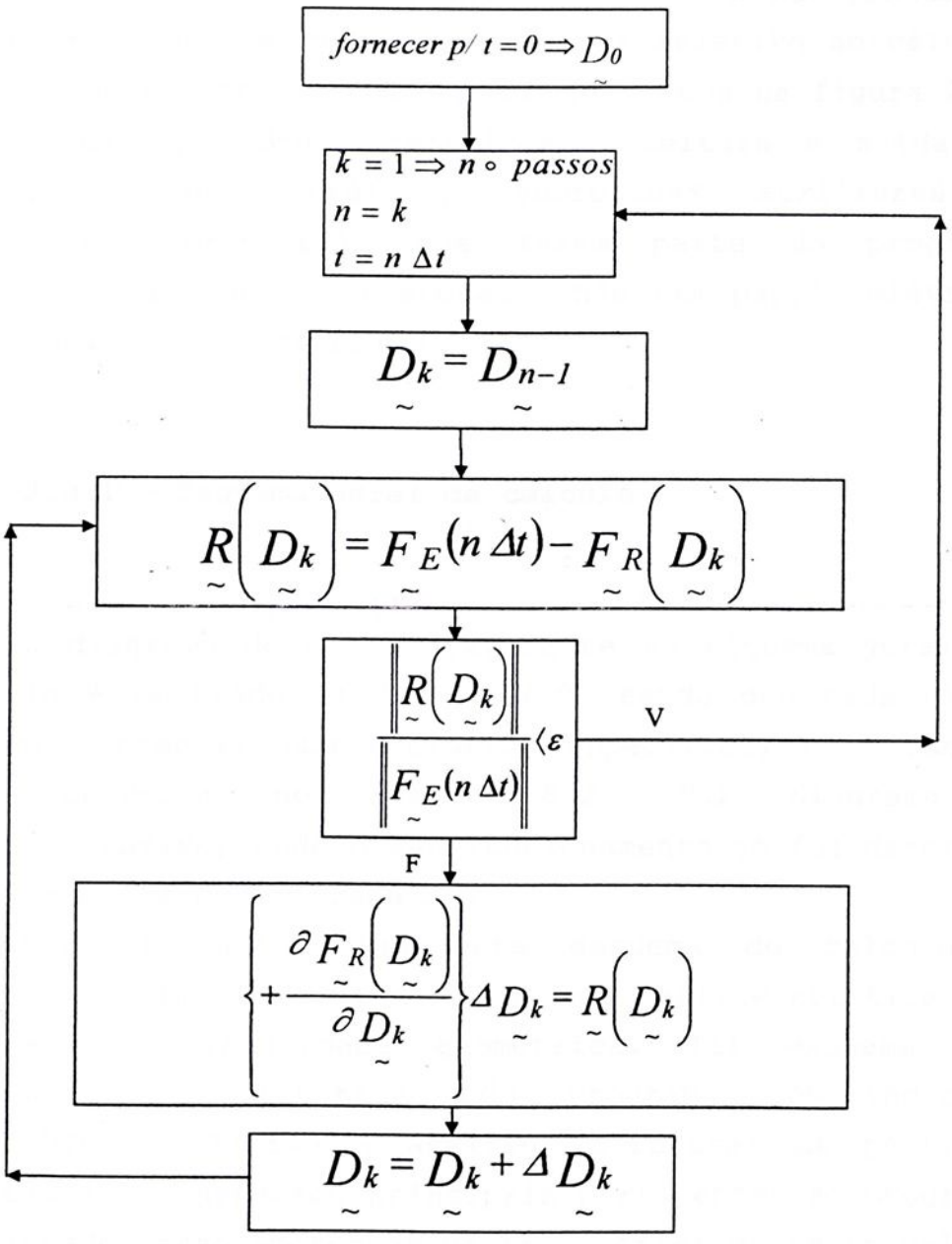


FIGURA 2.8 - Diagrama de blocos do método de Newmark.

## 2.8 - Aspectos computacionais

Para implementação do método de Newmark apresenta-se, na seqüência, a documentação básica relativa ao código computacional para análise estática não-linear de estruturas. Merece destaque o código relativo ao cálculo propriamente dito, vide diagrama de blocos na figura 2.8, visto que os códigos relativos à leitura e saída de dados, traçador gráfico, subrotinas auxiliares e gerenciador principal, que fazem parte do programa computacional que foi elaborado, não tem papel relevante no contexto deste trabalho.

### 2.8.1 - Esquema geral de cálculo

O diagrama de blocos referente ao esquema geral de cálculo é mostrado na figura 2.9, sendo que cada bloco contém o nome de uma subrotina específica, cuja função será descrita no item 2.8.2. Tal diagrama é autoexplicativo, onde o seu funcionamento já foi descrito no item 2.7.2 deste trabalho.

Cabe ressaltar que este esquema de cálculo é genérico, permitindo-se realizar uma análise estática com ou sem não-linearidade geométrica. Tal esquema foi utilizado na elaboração do programa computacional "DINPORTE", relativo à análise estrutural de pórticos espaciais. Os aspectos principais pertinentes ao programa mencionado serão abordados no transcorrer deste trabalho.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

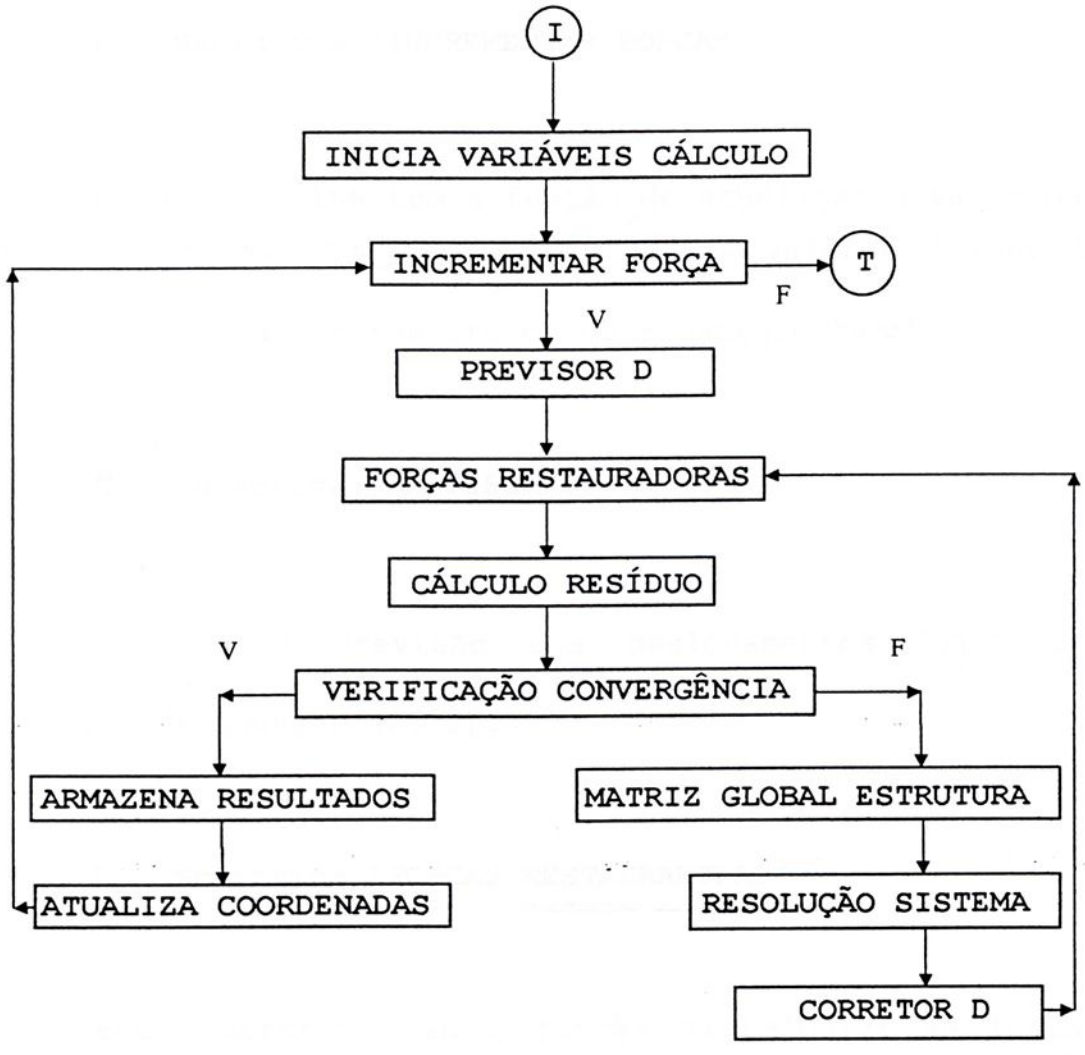


FIGURA 2.9 - Diagrama de blocos do esquema de cálculo.

### 2.8.2 - Descrição das subrotinas

A descrição das funções de cada subrotina contida na figura 2.9 é fornecida na seqüência.

#### A - Subrotina "INICIA VARIÁVEIS CÁLCULO"

Esta subrotina tem a função de zerar as variáveis utilizadas no cálculo, bem como de calcular os valores iniciais de algumas variáveis específicas.

**B - Subrotina "INCREMENTAR FORÇA"**

Esta subrotina tem a função de atualizar o valor das forças externas "$\underset{\sim}{F_E}$", sendo que esse valor é fornecido para o final do incremento de carregamento "$n\,\Delta t$".

**C - Subrotina "PREVISOR D"**

Realiza a previsão dos deslocamentos "$\underset{\sim}{D_k}$" com auxílio da equação (2.32).

**D - Subrotina "FORÇAS RESTAURADORAS"**

Esta subrotina tem a função de calcular as forças restauradoras "$\underset{\sim}{F_R}\left(\underset{\sim}{D_k}\right)$" sendo tais forças dependentes dos deslocamentos (não-linearidade geométrica). Dessa forma, no capítulo 3 será tratada a não-linearidade geométrica.

**E - Subrotina "CÁLCULO RESÍDUO"**

Calcula o valor do resíduo das forças estáticas não equilibradas "$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D_k}\right)$", com auxílio da equação (2.24).

unesp

**F - Subrotina "VERIFICAÇÃO CONVERGÊNCIA"**

Verifica se o resíduo "$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D_k}\right)$" foi minimizado através da relação fornecida pela equação(2.33).

**G - Subrotina "MATRIZ GLOBAL ESTRUTURA"**

Monta a matriz global da estrutura dada pela seguinte equação.

$$\underset{\sim}{G} = \left\{ + \frac{\partial \underset{\sim}{F_R}\left(\underset{\sim}{D_k}\right)}{\partial \underset{\sim}{D_k}} \right\} \qquad (2.35)$$

Para o cálculo da matriz global "$\underset{\sim}{G}$" se faz necessário calcular a derivada de "$\underset{\sim}{F_R}\left(\underset{\sim}{D_k}\right)$" em relação à "$\underset{\sim}{D_k}$", conforme será visto no capítulo 3 deste trabalho.

**H - Subrotina "RESOLUÇÃO SISTEMA"**

Resolve o sistema de equações fornecido pela equação (2.31), utilizando-se o método de Gauss, SORIANO(1981). Com isso, obtém-se o acréscimo de deslocamentos "$\Delta \underset{\sim}{D_k}$".

**I - Subrotina "ARMAZENA RESULTADOS"**

Esta subrotina tem a função de armazenar os resultados obtidos no incremento de carregamento "$n\,\Delta t$", tais como: deslocamentos, forças normais, forças cortantes, momentos fletores, momentos torçores e demais valores numéricos necessários para a resolução do próximo incremento de carregamento.

**J - Subrotina "ATUALIZA COORDENADAS"**

Atualiza as coordenadas dos nós estruturais quando o cálculo é feito considerando-se a não-linearidade geométrica.

# CAPÍTULO 3 - NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA NA ANÁLISE DE PÓRTICOS ESPACIAIS

## 3.1 - Generalidades

A análise não-linear geométrica de um sistema estrutural se faz necessária quando a configuração do sistema deformado difere de modo significativo da sua configuração inicial, de tal modo que a magnitude do acréscimo das forças internas, em relação à análise linear, não possa ser desprezada.

Neste caso, o estabelecimento do equilíbrio final do sistema estrutural é dado em relação à sua configuração deformada, de tal forma que os deslocamentos ocorridos sejam computados no cálculo das forças internas. Para isto, deve-se definir um sistema adequado de coordenadas, uma relação não-linear entre deformação x deslocamento e funções de forma apropriadas para o elemento finito.

Uma vez definidas tais componentes, pode-se obter as matrizes elementais não-lineares de rigidez, conforme será visto no transcorrer deste capítulo.

## 3.2 - Sistemas de coordenadas

Como já foi visto anteriormente, uma análise não-linear geométrica tem como fundamento principal a verificação do equilíbrio da estrutura na sua configuração deformada. Logo, para o cálculo das

unesp

coordenadas dos elementos finitos ao final de cada incremento de carregamento "$n\Delta t$", se faz necessária a utilização de um sistema adequado de coordenadas, tendo em vista que ao longo do processo de resolução ter-se-á uma seqüência de configurações de equilíbrio.

Basicamente, existem dois sistemas de coordenadas que podem ser utilizados em uma análise estática não-linear, a saber: coordenadas Eulerianas e coordenadas Lagrangeanas.

O sistema de coordenadas Euleriano tem como característica principal a definição dos deslocamentos em relação à última configuração deformada do elemento. Já o sistema de coordenadas Lagrangeano define os deslocamentos em função de uma configuração indeformada do mesmo.

Com relação a este último sistema, a configuração indeformada de referência pode ser qualquer, permitindo-se que se faça uma subdivisão em função do referencial adotado, CILONI(1993), WEN et al.(1983) e WONG et al.(1990), a saber: Lagrangeano total, Lagrangeano geral, Lagrangeano atualizado e Lagrangeano parcialmente atualizado.

Neste trabalho, conforme visto no capítulo 1, optou-se pela utilização, de forma aprimorada, da formulação Lagrangeana atualizada, conforme será visto a seguir.

### 3.2.1 - Pórtico espacial

A figura 3.1 mostra a configuração de equilíbrio "A-B" do elemento para pórtico espacial, situada sobre o eixo "x" do sistema local de coordenadas (x,y,z), servindo como referencial inicial ao longo do processo iterativo que ocorrerá durante a resolução numérica para cada incremento de carregamento "$n\Delta t$".

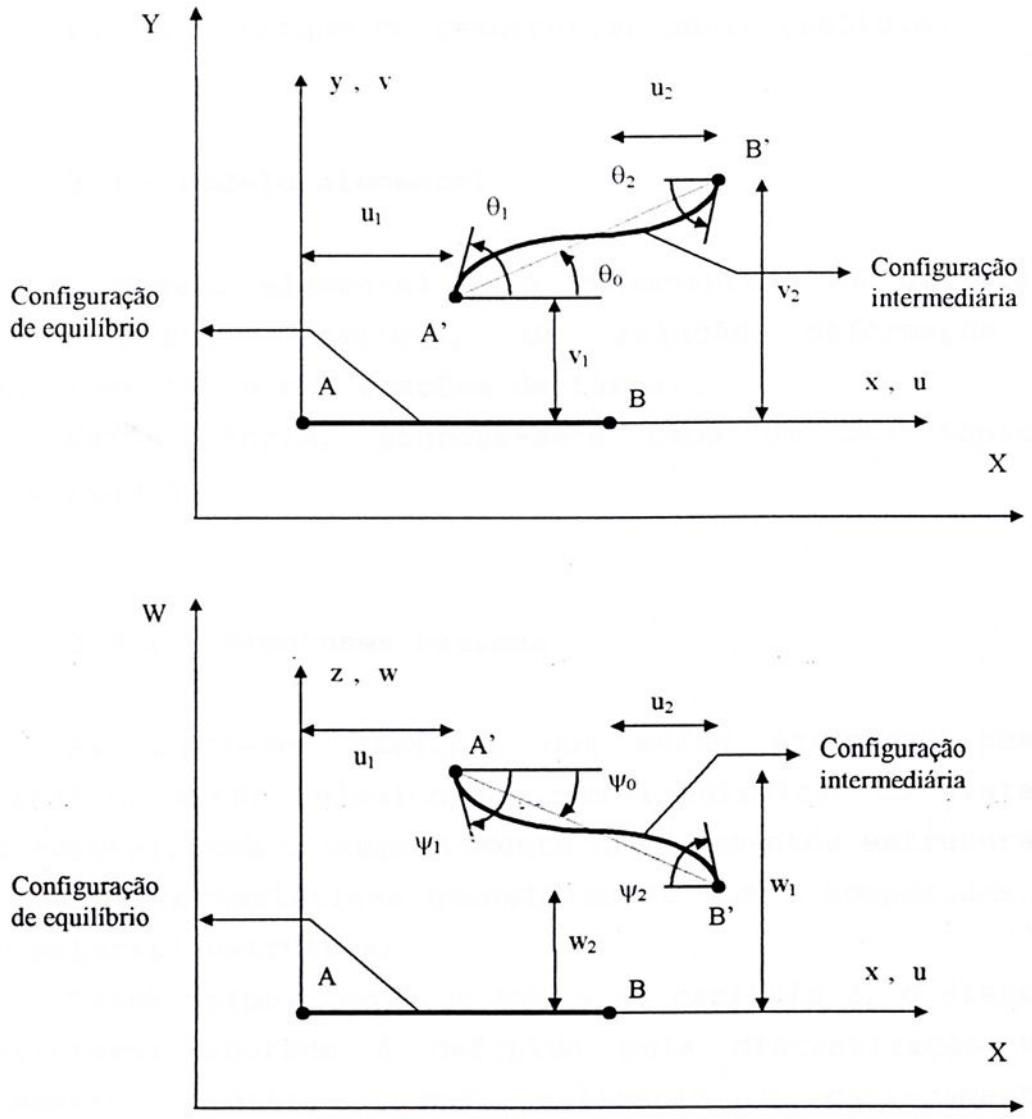


FIGURA 3.1 - Sistema de coordenadas para pórtico espacial.

A configuração intermediária "A'-B'", vide figura 3.1, tem coordenadas "$u_1$", "$v_1$", "$w_1$", "$\phi_1$", "$\psi_1$", "$\theta_1$", "$u_2$", "$v_2$", "$w_2$", "$\phi_2$", "$\psi_2$", "$\theta_2$", que são as componentes dos deslocamentos nodais "u", "v" e "w" do elemento, sendo "$\phi$" o giro devido à torção no elemento. Dessa forma, ficam mantidas as relações (2.1), (2.2) e (2.3) estabelecidas no item 2.2.2.1.

Com relação à atualização das coordenadas, tal assunto será tratado no transcorrer deste capítulo.

## 3.3 - Modelo elemental

O modelo elemental está fundamentado na definição das hipóteses básicas, da relação deformação x deslocamentos e das funções de forma.

Na seqüência, abordar-se-á cada um dos tópicos mencionados.

### 3.3.1 - Hipóteses básicas

As hipóteses básicas, que serão assumidas neste trabalho, estão relacionadas com a definição do sistema estrutural, com o comportamento dos elementos estruturais e suas características geométricas e com o comportamento do material estrutural.

Dessa forma, conforme visto no capítulo 2, o sistema estrutural adotado é definido pela discretização via elementos finitos e pela aplicação do carregamento, devido ao meio externo, nos nós que unem tais elementos.

Com relação ao comportamento do elemento, admitem-se pequenas rotações "$\theta_0$" e "$\psi_0$" do mesmo, conforme ilustra a figura 3.1, durante cada incremento de carregamento "$n\,\Delta t$", cujo limite pode ser fixado em torno de 0,045 rad ou 2,56°, CORRÊA(1991). As características geométricas são definidas pela área da seção transversal "A", sendo esta constante, pelo comprimento inicial "L", pelo momento de inércia à flexão em relação aos dois eixos contidos na seção transversal "$I_{YY}$" e "$I_{ZZ}$" e pelo momento de inércia à torção "$I_{XX}$".

unesp

Já o material estrutural é definido como isótropo, com módulo de elasticidade longitudinal "E" e módulo de elasticidade transversal "G", considerando-se desprezível o efeito de Poisson.

### 3.3.2 - Campo de deslocamentos e de deformações

Para a definição do campo de deformações que ocorrem em um elemento, se faz necessário estabelecer previamente o campo de deslocamentos e a relação deformação x deslocamento do mesmo. Para isto, a figura 3.2 ilustra o deslocamento axial "u", o deslocamento transversal "v" e a rotação "θ" da seção transversal de um elemento de pórtico plano submetido à flexão normal composta, BRASIL et al. (1993).

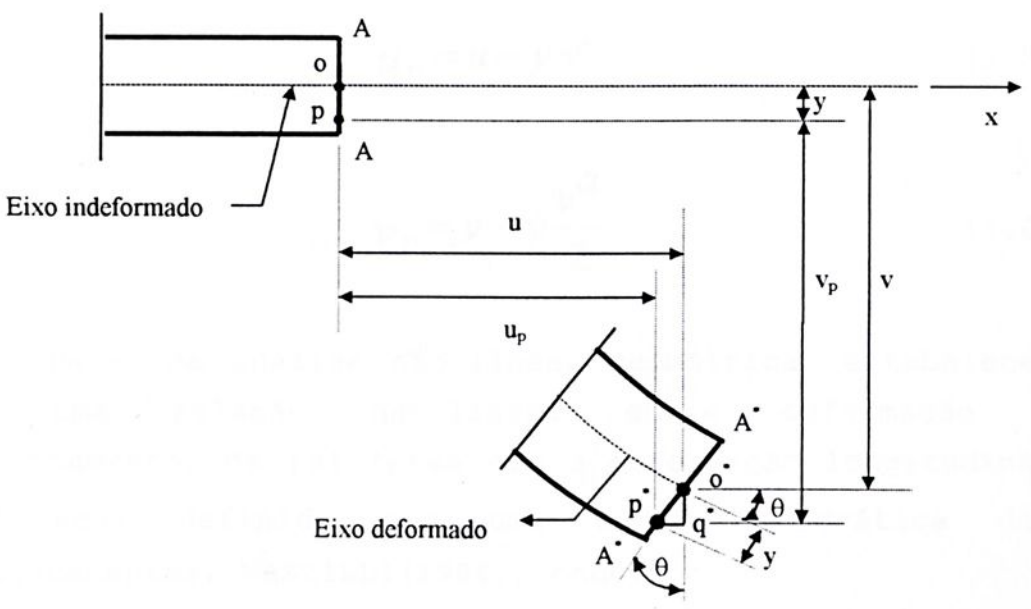


FIGURA 3.2 - Campo de deslocamentos.

Dessa forma, os deslocamentos de um ponto genérico "p", vide figura 3.2, são definidos pelas equações (3.1) e (3.2).

$$u_p = u - y \operatorname{sen}\theta \tag{3.1}$$

$$v_p = v - y + y \cos\theta \tag{3.2}$$

Como se admitem pequenas rotações para o elemento, pode-se adotar as seguintes simplificações, CILONI(1993):

$$\operatorname{sen}\theta \cong \theta = v' \tag{3.3}$$

$$\cos\theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2} = 1 - \frac{v'^2}{2} \tag{3.4}$$

Substituindo-se as equações (3.3) e (3.4) nas equações (3.1) e (3.2), obtém-se o campo de deslocamentos dado por:

$$u_p = u - y\, v' \tag{3.5}$$

$$v_p = v - y\frac{v'^2}{2} \tag{3.6}$$

Para uma análise não-linear geométrica, estabelece-se uma relação não-linear entre deformação e deslocamento, de tal forma que a deformação longitudinal "ε" seja definida por uma função quadrática dos deslocamentos, MAZZILLI(1986), onde:

$$\varepsilon = \frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_p}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_p}{\partial x}\right)^2 \tag{3.7}$$

Derivando-se as equações (3.5) e (3.6) em relação à "x", obtêm-se:

$$\frac{\partial u_p}{\partial x} = u' - y\,v'' \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial v_p}{\partial x} = v' - y\,v'\,v'' \tag{3.9}$$

Substituindo-se as equações (3.8) e (3.9) na equação (3.7) e efetuando-se os cálculos, obtém-se:

$$\varepsilon = \left(u' + \frac{v'^2}{2} - y\,v''\right) + \left(\frac{u'^2}{2}\right) + \left(-y\,u'\,v'' - y\,v'^2\,v'' + \frac{y^2\,v'^2\,v''^2}{2} + \frac{y^2\,v''^2}{2}\right) \tag{3.10}$$

Desprezando-se os termos que contêm produtos de parcelas de ordem superior, obtém-se o campo de deformações para um elemento de pórtico plano, dado por:

$$\varepsilon = \left(u' + \frac{v'^2}{2} - y\,v''\right) + \left(\frac{u'^2}{2}\right) \tag{3.11}$$

Generalizando-se tal análise para um elemento de pórtico espacial, obtém-se o campo de deformações dado pela equação (3.12).

$$\varepsilon = \left(u' + \frac{v'^2}{2} - y\,v'' + \frac{w'^2}{2} - z\,w''\right) + \left(\frac{u'^2}{2}\right) \tag{3.12}$$

unesp

Cabe ressaltar que vários pesquisadores desprezam a parcela contida dentro dos dois últimos colchetes que se encontram nas equações (3.11) e (3.12), tais como CORRÊA(1991), CILONI(1993), WEN et al.(1983) e WONG et al.(1990a,1990b).

### 3.3.3 - Funções de forma

Conforme foi visto no item 2.2.2, os deslocamentos genéricos "$\underset{\sim}{u}$" dos pontos situados sobre o eixo de um elemento finito, podem ser escritos em função dos deslocamentos nodais "$\underset{\sim}{d}$", através da utilização da equação (2.3).

Na seqüência, serão apresentadas as funções de forma que relacionam tais deslocamentos para o elemento de pórtico espacial.

#### 3.3.3.1 - Pórtico espacial

Admitindo-se uma variação linear para os deslocamentos axiais "u" que ocorrem ao longo do eixo longitudinal do elemento, tem-se:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \qquad (3.13)$$

As condições de contorno do problema são dadas por:

$$\begin{cases} \text{p/ } x = 0 \Rightarrow u(x) = u_1 \\ \text{p/ } x = L \Rightarrow u(x) = u_2 \end{cases} \qquad \ldots(3.14)$$

unesp

Impondo-se as condições de contorno (3.14) na equação (3.13), chega-se a:

$$u(x) = u_1 + \varphi x \qquad (3.15)$$

com

$$\varphi = \frac{(u_2 - u_1)}{L} \qquad (3.16)$$

Já para os deslocamentos transversais "v", admite-se uma variação cúbica dada por:

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \qquad (3.17)$$

As condições de contorno do problema são dadas por:

$$\begin{cases} \text{p/ } x = 0 \Rightarrow v(x) = v_1 \\ \text{p/ } x = 0 \Rightarrow v'(x) = \theta_1 \\ \text{p/ } x = L \Rightarrow v(x) = v_2 \\ \text{p/ } x = L \Rightarrow v'(x) = \theta_2 \end{cases} \qquad \ldots (3.18)$$

Impondo-se as condições de contorno (3.18) na equação (3.17), obtém-se:

$$v(x) = c + d x + e x^2 + f x^3 \qquad (3.19)$$

onde

unesp

$$c = v_1 \quad ; \quad d = \theta_1 \quad ; \quad e = \frac{-2\theta_1 - \theta_2 + 3\theta_0}{L} \quad ;$$
$$\mathrm{f} = \frac{\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_0}{L^2} \quad ; \quad \theta_0 = \frac{(v_2 - v_1)}{L} \qquad \ldots(3.20)$$

Analogamente para os deslocamentos transversais "w", admite-se uma variação cúbica dada por:

$$w(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \qquad (3.21)$$

As condições de contorno do problema são dadas por:

$$\begin{cases} p/\ x = 0 \Rightarrow w(x) = w_1 \\ p/\ x = 0 \Rightarrow w'(x) = -\psi_1 \\ p/\ x = L \Rightarrow w(x) = w_2 \\ p/\ x = L \Rightarrow w'(x) = -\psi_2 \end{cases} \qquad \ldots(3.22)$$

Impondo-se as condições de contorno (3.22) na equação (3.21), obtém-se:

$$w(x) = \bar{c} + \bar{d}\, x + \bar{e}\, x^2 + \bar{f}\, x^3 \qquad (3.23)$$

onde

$$\bar{c} = w_1 \quad ; \quad \bar{d} = -\psi_1 \quad ; \quad \bar{e} = \frac{+2\psi_1 + \psi_2 - 3\psi_0}{L} \quad ;$$
$$\bar{f} = \frac{-\psi_1 - \psi_2 + 2\psi_0}{L^2} \quad ; \quad \psi_0 = \frac{(w_1 - w_2)}{L} \qquad \ldots(3.24)$$

unesp

### 3.4 - Matriz de rigidez

A matriz de rigidez de uma estrutura é definida pela relação entre as forças externas e os deslocamentos estruturais correspondentes, SOUZA et al.(1995), válido para estruturas trabalhando no regime elástico. Tal definição será apresentada na seqüência, bem como a dedução dos coeficientes de rigidez dessa matriz.

#### 3.4.1 - Conceituação via formulação energética

Dado um sistema estrutural discreto em equilíbrio estático, formado por um conjunto de elementos finitos contidos no espaço (X,Y,Z), o funcional da energia potencial total "$\pi_p$" do sistema pode ser escrito em função dos funcionais dos elementos finitos "$\pi_{pe}$", da seguinte forma:

$$\Pi_p = \sum_{l=1}^{ne} \Pi_{pe}{}^{l} \qquad (3.25)$$

onde "ne" é o número de elementos finitos que compõem o sistema estrutural.

Para cada elemento, o funcional é dado por:

$$\Pi_{pe} = U_e + \Omega_e \qquad (3.26)$$

onde
"$U_e$" é a energia de deformação acumulada pelo elemento;
"$\Omega_e$" é o potencial dos esforços externos na configuração deformada do elemento.

Admitindo-se que o carregamento do sistema seja aplicado nos nós estruturais, conforme visto no item 3.3.1, o potencial dos esforços externos é dado por:

$$\Omega_e = - \underset{\sim}{f}_E^{\,T} \underset{\sim}{d} \qquad (3.27)$$

onde "$\underset{\sim}{f}_E$" é o vetor de forças nodais equivalentes do elemento.

Já a energia de deformação é definida por:

$$U_e = \int_{Ve} \mu_0 \, dV_e \qquad (3.28)$$

onde
"$V_e$" é o volume do elemento;
"$\mu_0$" é a energia de deformação específica, dada por:

$$\mu_0 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x \ \sigma_x + \varepsilon_y \ \sigma_y + \varepsilon_z \ \sigma_z + \gamma_{xy} \ \tau_{xy} + \gamma_{xz} \ \tau_{xz} + \gamma_{yz} \ \tau_{yz}\right)$$

ou, simplesmente,

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{\sigma} \qquad (3.29)$$

sendo

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^T = \left[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\right] \qquad (3.30)$$

$$\underset{\sim}{\sigma}^T = \left[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\right] \qquad (3.31)$$

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Como se trata de um sistema estrutural discreto contido no espaço (X,Y,Z) e como o eixo do elemento está orientado segundo o eixo local "x", admitem-se as seguintes simplificações:

a - $\tau_{yz}=0$, pois não há distorção no plano "YZ";

b - $\sigma_y \cong 0$ e $\sigma_z \cong 0$, pois a magnitude destas tensões é desprezível quando comparada com a magnitude de "$\sigma_x$";

c - $\gamma_{xy}=0$ e $\gamma_{xz}=0$, pois vale a Lei de Navier, onde a seção transversal plana permanece plana após a sua deformação.

Chamando-se de "$\underset{\sim}{E}$" a matriz dos coeficientes elásticos, pode-se relacionar as tensões "$\underset{\sim}{\sigma}$" com as deformações "$\underset{\sim}{\varepsilon}$" da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{E}\ \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{3.32}$$

ou, após as simplificações anteriormente citadas,

$$\sigma_x = E\ \varepsilon_x \tag{3.33}$$

Substituindo-se as equações (3.32), (3.29) e (3.27) em (3.26), obtém-se:

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2}\int_{Ve} \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{E}\ \underset{\sim}{\varepsilon}\, dV_e - \underset{\sim}{f}_E{}^T \underset{\sim}{d} \tag{3.34}$$

unesp

Substituindo-se a equação (2.15) na equação (3.34), obtém-se:

$$\Pi_{pe} = \frac{1}{2}\int_{Ve} \underset{\sim}{d}^T \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{d}\; dV_e - \underset{\sim}{f}_E{}^T \underset{\sim}{d} \qquad (3.35)$$

ou, simplesmente,

$$\Pi_{pe} = U_e\left(\underset{\sim}{d}\right) - \underset{\sim}{f}_E{}^T \underset{\sim}{d} \qquad (3.36)$$

Uma vez que "$\pi_{pe}$" é, agora, uma função dos deslocamentos nodais "$\underset{\sim}{d}$", a variação de "$\pi_{pe}$" é igual ao seu diferencial, ou seja, $\delta\pi_{pe}=d\pi_{pe}$. Desse modo, tem-se:

$$\delta\Pi_{pe} = \frac{\partial\Pi_{pe}}{\partial d_1}\delta d_1 + \frac{\partial\Pi_{pe}}{\partial d_2}\delta d_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\partial\Pi_{pe}}{\partial d_n}\delta d_n \qquad (3.37)$$

sendo $\delta d_1 = d d_1$ ; $\delta d_2 = d d_2$ ;.....; $\delta d_n = d d_n$.

Analisando-se a expressão anterior, tem-se que cada parcela é o resultado do produto de uma força pelo respectivo deslocamento. Como esses deslocamentos são quaisquer e simultaneamente não nulos, pode-se aplicar o princípio da energia potencial estacionária, SAVASSI(1996), resultando:

$$\frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_2} = 0 \; ; \ldots\ldots ; \; \frac{\partial \Pi_{pe}}{\partial d_n} = 0$$

ou, simplesmente,

$$\frac{\partial U_e\left(\underset{\sim}{d}\right)}{\partial d_j} - \underset{\sim}{f}_E = 0 \qquad \ldots(3.38)$$

Cada uma das expressões do tipo (3.38) fornecerá uma equação algébrica, que organizadas na forma matricial resultará:

$$\underset{\sim}{k}_S \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{f}_E \qquad (3.39)$$

onde "$\underset{\sim}{k}_S$" é a matriz de rigidez secante do elemento.

Para todo o sistema estrutural, a partir das contribuições de todos os elementos, pode-se utilizar o processo de expansão e acumulação, encontrando-se, finalmente:

$$\underset{\sim}{K}_S \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{F}_E \qquad (3.40)$$

Substituindo-se na equação geral do equilíbrio (2.23), tem-se:

$$\underset{\sim}{F}_R\left(\underset{\sim}{D}\right) = \underset{\sim}{K}_S \underset{\sim}{D} \qquad (3.41)$$

onde "$K_S$" é a matriz de rigidez secante do sistema estrutural e "$F_R\left(D\right)$" são as forças restauradoras procuradas ao final do capítulo anterior.

É importante salientar que em virtude de ter-se assumido uma relação deformação x deslocamento não-linear, a matriz de rigidez "$K_S$" altera-se à medida que os deslocamentos ocorrem, conforme ilustra a figura 3.3.

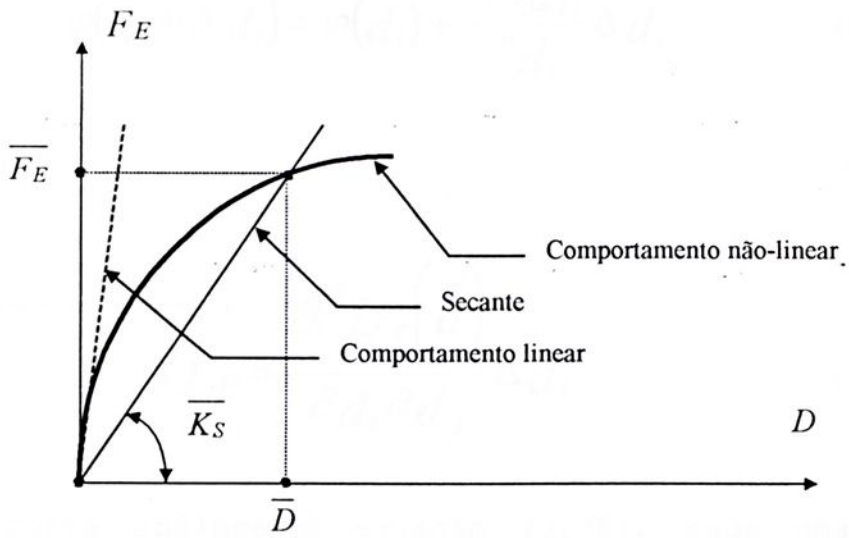


FIGURA 3.3 - Comportamento não-linear. Matriz de rigidez secante, CORRÊA(1991).

Analisando-se, agora, a equação (3.38), esta pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial U_e\left(\underset{\sim}{d}\right)}{\partial d_j} = \underset{\sim}{f}_E \qquad (3.42)$$

ou, simplesmente,

$$\varphi(d_i) = f_{E} \tag{3.43}$$

Aplicando-se uma variação finita "$\Delta d_i$" nos deslocamentos nodais na configuração deformada e expandindo-se a função "$\varphi(d_i+\Delta d_i)$" pela relação linearizada de Taylor, obtém-se:

$$\varphi(d_i + \Delta d_i) = \varphi(d_i) + \frac{\partial \varphi(d_i)}{\partial d_i} \Delta d_i \tag{3.44}$$

ou, simplesmente,

$$\Delta f_{E} = \frac{\partial^2 U_e\left(d\right)}{\partial d_i \partial d_j} \Delta d_i \tag{3.45}$$

De forma análoga à equação (3.38), cada uma das expressões do tipo (3.45) fornecerá uma equação algébrica, que organizadas na forma matricial resultará:

$$k_T \, \Delta d = \Delta f_{E} \tag{3.46}$$

onde "$k_T$" é a matriz de rigidez tangente do elemento.

Após a contribuição de todos os elementos, chega-se na equação (3.47).

$$\underset{\sim}{K_T}\,\Delta\underset{\sim}{D} = \Delta\underset{\sim}{F_E} \qquad (3.47)$$

sendo "$\underset{\sim}{K_T}$" a matriz de rigidez tangente do sistema estrutural.

A figura 3.4 ilustra o conceito da matriz de rigidez tangente, lembrando-se que tal conceito é utilizado nos processos iterativos descritos no item 2.6.1.

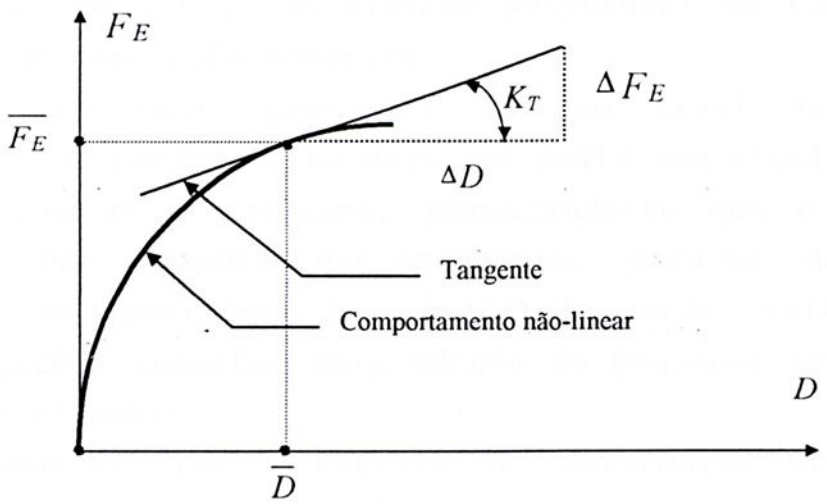


FIGURA 3.4 - Comportamento não-linear. Matriz de rigidez tangente, CORRÊA(1991).

Dessa forma, conclui-se que as forças restauradoras e suas respectivas derivadas são obtidas, respectivamente, através da primeira e da segunda derivação da energia de deformação em relação aos deslocamentos nodais, conforme mostram as equações (3.48) e (3.49).

$$\underset{\sim}{F_R}\left(\underset{\sim}{D}\right) = \frac{\partial U}{\partial D_j} \qquad (3.48)$$

$$\frac{\partial F_R\left(\underset{\sim}{D}\right)}{\partial D_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial D_i \partial D_j} \qquad (3.49)$$

### 3.4.2 - Atualização de coordenadas

Conforme visto no item 3.2, optou-se pela escolha da formulação Lagrangeana atualizada para descrever a posição de equilíbrio do sistema estrutural ao longo do processo de resolução numérica.

Tal formulação preconiza que ao final de cada incremento de carregamento deva ser feita uma atualização das coordenadas do sistema, permitindo-se que o mesmo venha a ter grandes deslocamentos, através de uma sucessão de posições de equilíbrio onde valem as simplificações impostas pela adoção de pequenas rotações para cada elemento.

Sabendo-se que a energia de deformação de cada elemento é dada pela equação (3.28) e promovendo-se as devidas simplificações já mencionadas no item anterior, obtém-se:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\,\varepsilon_x{}^2\, dV_e \qquad (3.50)$$

Como o problema é incremental, tem-se:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\left({}^{m+1}\varepsilon_x\right)^2 dV_e \qquad (3.51)$$

onde "${}^{m+1}\varepsilon_x$" é a deformação total do elemento ocorrida até a configuração de equilíbrio "m+1".

unesp

Expressando-se a variação da deformação que ocorre durante o incremento "n", tem-se que:

$$\Delta^{n}\varepsilon_x = {}^{m+1}\varepsilon_x - {}^{m}\varepsilon_x \qquad (3.52)$$

onde "${}^{m}\varepsilon_x$" é a deformação total do elemento ocorrida até a configuração de equilíbrio "m".

Substituindo-se a equação (3.52) na equação (3.51) e efetuando-se as operações matemáticas, obtém-se:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\left(\Delta^{n}\varepsilon_x{}^{2} + 2\Delta^{n}\varepsilon_x{}^{m}\varepsilon_x + {}^{m}\varepsilon_x{}^{2}\right)dV_e \qquad (3.53)$$

Como "${}^{m}\varepsilon_x$" não depende dos deslocamentos ocorridos durante o incremento "n", qualquer derivação em relação a esses deslocamentos se anula. Logo, pode-se reescrever a expressão da energia de deformação em função das parcelas que contribuem na rigidez, CORRÊA(1991), como:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\Delta^{n}\varepsilon_x{}^{2}\,dV_e + {}^{m}\varepsilon_x\int_{V_e} E\Delta^{n}\varepsilon_x\,dV_e \qquad (3.54)$$

Dessa forma, a primeira parcela da equação anterior fornecerá o acréscimo de energia ocorrido durante cada intervalo ou incremento "n" e a segunda parcela fornecerá a energia acumulada até a configuração de equilíbrio "m", valendo a relação n=m+1.

Na seqüência, a figura 3.5 ilustra a sistemática utilizada na atualização das coordenadas para um elemento de pórtico espacial, tomando-se o plano "XY" como exemplo.

unesp

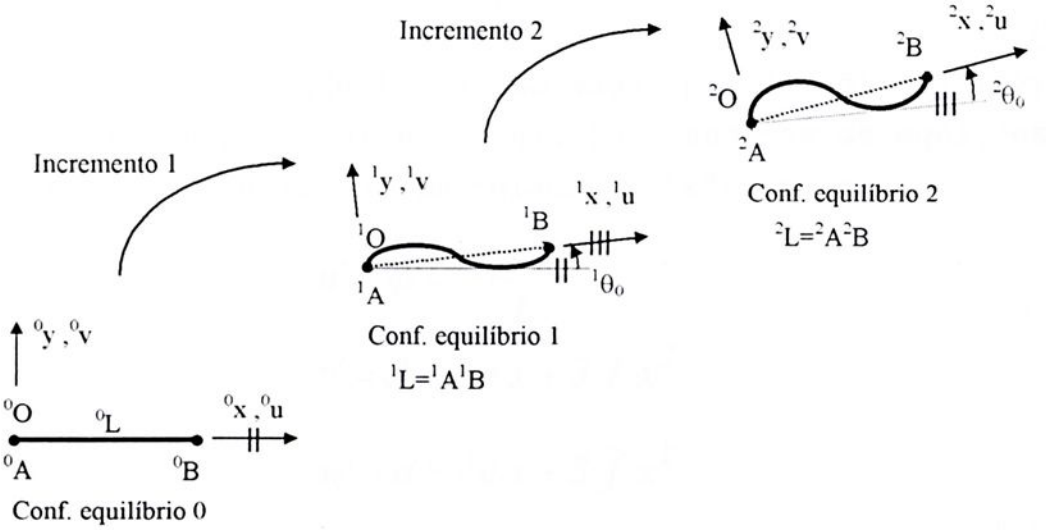


FIGURA 3.5 - Atualização de coordenadas para um elemento de pórtico espacial no plano "XY".

### 3.4.3 - Elemento de barra para pórtico espacial

Este item tem por objetivo principal ilustrar, de forma sistematizada, toda a dedução das matrizes de rigidez secante e tangente para um elemento de barra trabalhando no espaço.

#### 3.4.3.1 - Energia de deformação

O campo de deformações para um elemento de pórtico espacial é dado pela equação (3.12). Tomando-se o valor médio para as parcelas "$[(v')^2]/2$" e "$[(w')^2]/2$", CORRÊA(1991), o campo de deformações fica definido pela equação (3.55).

$$\varepsilon_x = u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{1}{L}\int_0^L \frac{v'^2}{2} dx - y\, v'' + \frac{1}{L}\int_0^L \frac{w'^2}{2} dx - z\, w'' \qquad (3.55)$$

Já as funções de forma são dadas por (3.15), (3.16), (3.19), (3.20), (3.23) e (3.24). Derivando-se as equações (3.15), (3.19) e (3.23) em relação à "x", tem-se:

$$u' = \varphi = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$v' = d + 2\,e\,x + 3\,f\,x^2$$

$$w' = \bar{d} + 2\,\bar{e}\,x + 3\,\bar{f}\,x^2 \qquad \ldots(3.56)$$

e derivando-se novamente "v'" e "w'", tem-se:

$$v'' = 2\,e + 6\,f\,x$$

$$w'' = 2\,\bar{e} + 6\,\bar{f}\,x \qquad \ldots(3.57)$$

onde "d", "e" e "f" são definidos em (3.20) e "$\bar{d}$", "$\bar{e}$" e "$\bar{e}$" são definidos em (3.24).

Substituindo-se tais derivadas na equação (3.55), obtém-se:

$$\varepsilon_x = \varphi + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\left(d + 2\,e\,x + 3\,f\,x^2\right)^2}{2} dx - y\left(2\,e + 6\,f\,x\right) + \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\left(\bar{d} + 2\,\bar{e}\,x + 3\,\bar{f}\,x^2\right)^2}{2} dx - z\left(2\,\bar{e} + 6\,\bar{f}\,x\right) \qquad (3.58)$$

unesp

Com isso, a variação do campo de deformações que ocorre durante o incremento "n" é dada por:

$$\Delta^n \varepsilon_x = \Delta\varphi + \frac{\Delta\varphi^2}{2} +$$

$$\frac{1}{{}^mL}\int_0^{{}^mL} \frac{\left(\Delta d + 2\,\Delta e\, x + 3\,\Delta f\, x^2\right)^2}{2} dx + (-y)(2\,\Delta e + 6\,\Delta f\, x) +$$

$$\frac{1}{{}^mL}\int_0^{{}^mL} \frac{\left(\Delta \bar{d} + 2\,\Delta \bar{e}\, x + 3\,\Delta \bar{f}\, x^2\right)^2}{2} dx + (-z)\left(2\,\Delta \bar{e} + 6\,\Delta \bar{f}\, x\right)$$

(3.59)

onde

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta^n u_2 - \Delta^n u_1}{{}^mL}$$

$$\Delta\theta_0 = \frac{\Delta^n v_2 - \Delta^n v_1}{{}^mL}$$

$$\Delta\psi_0 = \frac{\Delta^n w_1 - \Delta^n w_2}{{}^mL} \qquad \ldots(3.60)$$

Já os demais parâmetros são dados por:

$$\Delta d = \Delta^n \theta_1$$

$$\Delta e = \frac{-2\,\Delta^n \theta_1 - \Delta^n \theta_2 + 3\Delta\theta_0}{{}^mL}$$

$$\Delta f = \frac{\Delta^n \theta_1 + \Delta^n \theta_2 - 2\Delta\theta_0}{{}^mL^2}$$

...(3.61a)

unesp

$$\Delta \bar{d} = -\Delta^n \psi_1$$

$$\Delta \bar{e} = \frac{+2\Delta^n \psi_1 + \Delta^n \psi_2 - 3\Delta\psi_0}{^m L}$$

$$\Delta \bar{f} = \frac{-\Delta^n \psi_1 - \Delta^n \psi_2 + 2\Delta\psi_0}{^m L^2}$$

...(3.61b)

Substituindo-se a equação (3.59) na equação (3.54), obtém-se:

$$U_e = \sum_{i=1}^{27} U_i \qquad (3.62)$$

onde as parcelas "$U_i$" são dadas por:

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\,(\Delta\varphi)^2 dV_e$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\,[y\,(2\,\Delta e + 6\,\Delta f\,x)]^2 dV_e$$

$$U_3 = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\,2\,\Delta\varphi \left[\frac{1}{^m L}\int_0^{^m L} \frac{\left(\Delta d + 2\,\Delta e\,x + 3\,\Delta f\,x^2\right)^2}{2} dx\right] dV_e$$

$$U_4 = \frac{1}{2}\int_{V_e} E \left[\frac{1}{^m L}\int_0^{^m L} \frac{\left(\Delta d + 2\,\Delta e\,x + 3\,\Delta f\,x^2\right)^2}{2} dx\right]^2 dV_e$$

$$U_5 = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\,[-2\,y\,\Delta\varphi\,(2\,\Delta e + 6\,\Delta f\,x)] dV_e$$

...(3.63a)

$$U_6 = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\left[-2y(2\Delta e + 6\Delta f x)\right]\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\Delta d + 2\Delta e x + 3\Delta f x^2\right)^2}{2}dx\right]dV_e$$

$$U_7 = \frac{1}{2}\int_{V_e} E(\Delta\varphi)^3\, dV_e$$

$$U_8 = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\frac{(\Delta\varphi)^4}{4}\, dV_e$$

$$U_9 = \frac{1}{2}\int_{V_e} E(\Delta\varphi)^2\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\Delta d + 2\Delta e x + 3\Delta f x^2\right)^2}{2}dx\right]dV_e$$

$$U_{10} = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\left[-(\Delta\varphi)^2\, y(2\Delta e + 6\Delta f x)\right]dV_e$$

$$U_{11} = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\left[2yz(2\Delta e + 6\Delta f x)\left(2\Delta\bar{e} + 6\Delta\bar{f}x\right)\right]dV_e$$

$$U_{12} = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\left[z\left(2\Delta\bar{e} + 6\Delta\bar{f}x\right)\right]^2 dV_e$$

$$U_{13} = \frac{1}{2}\int_{V_e} E\,2\Delta\varphi\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\Delta\bar{d} + 2\Delta\bar{e}x + 3\Delta\bar{f}x^2\right)^2}{2}dx\right]dV_e$$

...(3.63b)

$$U_{14}=\frac{1}{2}\int_{V_e} E2\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\Delta d+2\Delta e x+3\Delta f x^2\right)^2}{2}dx\right].$$

$$\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\Delta\bar{d}+2\Delta\bar{e}x+3\Delta\bar{f}x^2\right)^2}{2}dx\right]dV_e$$

$$U_{15}=\frac{1}{2}\int_{V_e} E\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\Delta\bar{d}+2\Delta\bar{e}x+3\Delta\bar{f}x^2\right)^2}{2}dx\right]^2 dV_e$$

$$U_{16}=\frac{1}{2}\int_{V_e} E\left[-2z\Delta\rho\left(2\Delta\bar{e}+6\Delta\bar{f}x\right)\right]dV_e$$

$$U_{17}=\frac{1}{2}\int_{V_e} E(-2z)\left(2\Delta\bar{e}+6\Delta\bar{f}x\right)\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\Delta d+2\Delta e x+3\Delta f x^2\right)^2}{2}dx\right]dV_e$$

$$U_{18}=\frac{1}{2}\int_{V_e} E\left[-2y\left(2\Delta e+6\Delta f x\right)\right]\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\Delta\bar{d}+2\Delta\bar{e}x+3\Delta\bar{f}x^2\right)^2}{2}dx\right]dV_e$$

...(3.63c)

$$U_{19}=\frac{1}{2}\int_{V_e} E\left[-2z\left(2\bar{\Delta e}+6\bar{\Delta f}\,x\right)\right]\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\bar{\Delta d}+2\bar{\Delta e}x+3\bar{\Delta f}\,x^2\right)^2}{2}dx\right]dV_e$$

$$U_{20}=\frac{1}{2}\int_{V_e} E(\Delta\varphi)^2\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\bar{\Delta d}+2\bar{\Delta e}x+3\bar{\Delta f}\,x^2\right)^2}{2}dx\right]dV_e$$

$$U_{21}=\frac{1}{2}\int_{V_e} E\left[-(\Delta\varphi)^2 z\left(2\bar{\Delta e}+6\bar{\Delta f}\,f\,x\right)\right]dV_e$$

$$U_{22} = {}^{m}\varepsilon_x\int_{V_e} E\,\Delta\varphi\,dV_e$$

$$U_{23} = {}^{m}\varepsilon_x\int_{V_e} E\,\frac{(\Delta\varphi)^2}{2}\,dV_e$$

$$U_{24} = {}^{m}\varepsilon_x\int_{V_e} E\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\Delta d+2\,\Delta e\,x+3\,\Delta f\,x^2\right)^2}{2}dx\right]dV_e$$

$$U_{25} = {}^{m}\varepsilon_x\int_{V_e} E\left[-y\left(2\,\Delta e+6\,\Delta f\,x\right)\right]dV_e$$

$$U_{26} = {}^{m}\varepsilon_x\int_{V_e} E\left[\frac{1}{m_L}\int_0^{m_L}\frac{\left(\Delta\bar{d}+2\,\Delta\bar{e}\,x+3\,\Delta\bar{f}\,x^2\right)^2}{2}dx\right]dV_e$$

$$U_{27} = {}^{m}\varepsilon_x\int_{V_e} E\left[-z\left(2\,\Delta\bar{e}+6\,\Delta\bar{f}\,x\right)\right]dV_e$$

...(3.63d)

Uma vez desmembradas todas as parcelas devidas à flexão da barra, resta agora abordar o problema da torção. Neste trabalho será utilizado o tratamento dado para barras com seção circular, CORRÊA(1991), onde a torção será assumida como sendo totalmente desacoplada da flexão e será tratada de forma aproximada e sem restrição ao empenamento. A figura 3.6 lustra uma barra com uma das extremidades sujeita a um momento torçor "T".

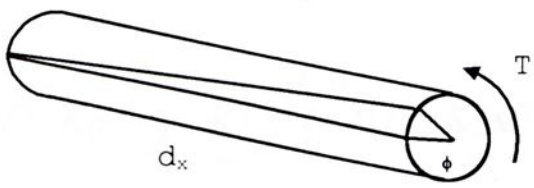


FIGURA 3.6 - Torção de trecho infinitesimal de barra.

Dessa forma, a parcela da energia de deformação devida ao momento torçor pode ser obtida utilizando-se o teorema de Clapeyron, sendo esta dada por:

$$U_T = \frac{1}{2} T \phi \qquad (3.64)$$

Já o giro "$\phi$" relativo entre as extremidades da barra pode ser obtido por:

$$\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{T L}{G I_X} \qquad (3.65)$$

Trabalhando-se a equação (3.65) e substituindo-se na equação (3.64), obtém-se:

$$U_{28} = \frac{1}{2} \left(\phi_2 - \phi_1\right)^2 \frac{G I_X}{L} \qquad (3.66)$$

### 3.4.3.2 - Matriz de rigidez secante

A matriz de rigidez secante do elemento é obtida através da primeira derivação da energia de deformação em relação aos deslocamentos nodais, conforme equações (3.38) e (3.39). Logo, derivando-se cada uma das parcelas "$U_i$", após a integração das mesmas, substituindo-se o resultado na equação (3.42) e organizando-se na forma matricial, a matriz de rigidez secante fica determinada por:

$$ {}^{n}\underset{\sim}{k}_S = {}^{n}\underset{\sim}{k}_0 + \frac{1}{2}\,{}^{n}\underset{\sim}{k}_1 + \frac{1}{3}\,{}^{n}\underset{\sim}{k}_2 + {}^{n}\underset{\sim}{k}_{SN} + {}^{n}\underset{\sim}{k}_G \qquad (3.67) $$

onde

$$ {}^{n}\underset{\sim}{k}_0 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{{}^{m}L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{{}^{m}L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_z}{{}^{m}L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{{}^{m}L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{{}^{m}L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{{}^{m}L^2} \\ & & \frac{12EI_y}{{}^{m}L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{{}^{m}L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{{}^{m}L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{{}^{m}L^2} & 0 \\ & & & \frac{GI_x}{{}^{m}L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{{}^{m}L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4EI_y}{{}^{m}L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{{}^{m}L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{{}^{m}L} & 0 \\ & & & & & \frac{4EI_z}{{}^{m}L} & 0 & -\frac{6EI_z}{{}^{m}L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{{}^{m}L} \\ & & & & & & \frac{EA}{{}^{m}L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{12EI_z}{{}^{m}L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{{}^{m}L^2} \\ & & & & & & & & \frac{12EI_y}{{}^{m}L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{{}^{m}L^2} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{GI_x}{{}^{m}L} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{{}^{m}L} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{{}^{m}L} \\ sim & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \qquad \ldots(3.67a) $$

$$
{}^{n}\underset{\sim}{k}_{1} = EA \begin{bmatrix}
\frac{3\varphi_1}{{}^{m}L} & -\frac{\varphi_2}{10^{m}L} & \frac{\bar{\varphi}_2}{10^{m}L} & 0 & -\frac{\bar{\varphi}_3}{30} & -\frac{\varphi_3}{30} & -\frac{3\varphi_1}{{}^{m}L} & \frac{\varphi_2}{10^{m}L} & -\frac{\bar{\varphi}_2}{10^{m}L} & 0 & -\frac{\bar{\varphi}_4}{30} & -\frac{\varphi_4}{30} \\
 & \frac{6\varphi_1}{5^{m}L} & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & \frac{\varphi_2}{10^{m}L} & -\frac{6\varphi_1}{5^{m}L} & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_1}{10} \\
 & & \frac{6\varphi_1}{5^{m}L} & 0 & -\frac{\varphi_1}{10} & 0 & -\frac{\bar{\varphi}_2}{10^{m}L} & 0 & -\frac{6\varphi_1}{5^{m}L} & 0 & -\frac{\varphi_1}{10} & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{2\varphi_1{}^{m}L}{15} & 0 & \frac{\bar{\varphi}_3}{30} & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & 0 & -\frac{\varphi_1{}^{m}L}{30} & 0 \\
 & & & & & \frac{2\varphi_1{}^{m}L}{15} & \frac{\varphi_3}{30} & -\frac{\varphi_1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varphi_1{}^{m}L}{30} \\
 & & & & & & \frac{3\varphi_1}{{}^{m}L} & -\frac{\varphi_2}{10^{m}L} & \frac{\bar{\varphi}_2}{10^{m}L} & 0 & \frac{\bar{\varphi}_4}{30} & \frac{\varphi_4}{30} \\
 & & & & & & & \frac{6\varphi_1}{5^{m}L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varphi_1}{10} \\
 & & & & & & & & \frac{6\varphi_1}{5^{m}L} & 0 & \frac{\varphi_1}{10} & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{2\varphi_1{}^{m}L}{15} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{2\varphi_1{}^{m}L}{15} \\
\textit{sim} & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
$$

...(3.67b)

$$
{}^{n}\underset{\sim}{k}_{2} = EA \begin{bmatrix}
\frac{3\varphi^2{}_1}{2^{m}L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\varphi^2{}_1}{2^{m}L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{\varphi_5}{{}^{m}L}+\frac{\bar{\varphi}_{13}}{{}^{m}L} & -\frac{\varphi_2\bar{\varphi}_2}{100^{m}L} & 0 & \frac{\varphi_2\bar{\varphi}_3}{300} & \varphi_6+\frac{\bar{\varphi}_{13}}{12} & 0 & -\frac{\varphi_5}{{}^{m}L}-\frac{\bar{\varphi}_{13}}{{}^{m}L} & \frac{\varphi_2\bar{\varphi}_2}{100^{m}L} & 0 & \frac{\varphi_2\bar{\varphi}_4}{300} & \varphi_7+\frac{\bar{\varphi}_{13}}{12} \\
 & & \frac{\bar{\varphi}_5}{{}^{m}L}+\frac{\varphi_{13}}{{}^{m}L} & 0 & -\bar{\varphi}_6-\frac{\varphi_{13}}{12} & -\frac{\varphi_3\bar{\varphi}_2}{300} & 0 & \frac{\varphi_2\bar{\varphi}_2}{100^{m}L} & -\frac{\varphi_{13}}{{}^{m}L}-\frac{\bar{\varphi}_5}{{}^{m}L} & 0 & -\bar{\varphi}_7-\frac{\varphi_{13}}{12} & -\frac{\varphi_4\bar{\varphi}_2}{300} \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \bar{\varphi}_8{}^{m}L+\frac{\varphi_{13}{}^{m}L}{9} & \frac{\bar{\varphi}_3\varphi_3{}^{m}L}{900} & 0 & -\frac{\varphi_2\bar{\varphi}_3}{300} & \bar{\varphi}_6+\frac{\varphi_{13}}{12} & 0 & \bar{\varphi}_9{}^{m}L-\frac{\varphi_{13}{}^{m}L}{36} & \frac{\bar{\varphi}_3\varphi_4{}^{m}L}{900} \\
 & & & & & \varphi_8{}^{m}L+\frac{\bar{\varphi}_{13}{}^{m}L}{9} & 0 & -\varphi_6-\frac{\bar{\varphi}_{13}}{12} & \frac{\bar{\varphi}_3\bar{\varphi}_2}{300} & 0 & \frac{\bar{\varphi}_4\varphi_3{}^{m}L}{900} & \varphi_9{}^{m}L-\frac{\bar{\varphi}_{13}{}^{m}L}{36} \\
 & & & & & & \frac{3\varphi^2{}_1}{2^{m}L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{\varphi_5}{{}^{m}L}+\frac{\bar{\varphi}_{13}}{{}^{m}L} & -\frac{\varphi_2\bar{\varphi}_2}{100^{m}L} & 0 & -\frac{\varphi_2\bar{\varphi}_4}{300} & -\varphi_7-\frac{\bar{\varphi}_{13}}{12} \\
 & & & & & & & \frac{\bar{\varphi}_5}{{}^{m}L}+\frac{\varphi_{13}}{{}^{m}L} & 0 & \bar{\varphi}_7+\frac{\varphi_{13}}{12} & \frac{\varphi_4\bar{\varphi}_2}{300} \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & \bar{\varphi}_{10}{}^{m}L+\frac{\varphi_{13}{}^{m}L}{9} & \frac{\bar{\varphi}_4\varphi_4{}^{m}L}{900} \\
\textit{sim} & & & & & & & & & & & \varphi_{10}{}^{m}L+\frac{\bar{\varphi}_{13}{}^{m}L}{9}
\end{bmatrix}
$$

...(3.67c)

unesp

$$
{}^{n}\underset{\sim}{k}_{SN} = EA \begin{bmatrix}
\varphi_{11}+\bar{\varphi}_{11} & -\frac{\varphi_2\varphi_1}{40^mL} & \frac{\bar{\varphi}_2{}^{\varphi_1}}{40^mL} & 0 & -\frac{\bar{\varphi}_3{}^{\varphi_1}}{120} & -\frac{\varphi_3\varphi_1}{120} & -\varphi_{11}-\bar{\varphi}_{11} & \frac{\varphi_2\varphi_1}{40^mL} & -\frac{\bar{\varphi}_2{}^{\varphi_1}}{40^mL} & 0 & -\frac{\bar{\varphi}_4{}^{\varphi_1}}{120} & -\frac{\varphi_4\varphi_1}{120} \\
 & \frac{6\varphi_1^2}{20^mL} & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_1^2}{40} & \frac{\varphi_2\varphi_1}{40^mL} & -\frac{6\varphi_1^2}{20^mL} & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_1^2}{40} \\
 & & \frac{6\varphi_1^2}{20^mL} & 0 & -\frac{\varphi_1^2}{40} & 0 & -\frac{\bar{\varphi}_2{}^{\varphi_1}}{40^mL} & 0 & -\frac{6\varphi_1^2}{20^mL} & 0 & -\frac{\varphi_1^2}{40} & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{\varphi_1^{2m}L}{30} & 0 & \frac{\bar{\varphi}_3{}^{\varphi_1}}{120} & 0 & \frac{\varphi_1^2}{40} & 0 & -\frac{\varphi_1^{2m}L}{120} & 0 \\
 & & & & & \frac{\varphi_1^{2m}L}{30} & \frac{\varphi_3\varphi_1}{120} & -\frac{\varphi_1^2}{40} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varphi_1^{2m}L}{120} \\
 & & & & & & \varphi_{11}+\bar{\varphi}_{11} & -\frac{\varphi_2\varphi_1}{40^mL} & \frac{\bar{\varphi}_2{}^{\varphi_1}}{40^mL} & 0 & \frac{\bar{\varphi}_4{}^{\varphi_1}}{120} & \frac{\varphi_4\varphi_1}{120} \\
 & & & & & & & \frac{6\varphi_1^2}{20^mL} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varphi_1^2}{40} \\
 & & & & & & & & \frac{6\varphi_1^2}{20^mL} & 0 & \frac{\varphi_1^2}{40} & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{\varphi_1^{2m}L}{30} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{\varphi_1^{2m}L}{30} \\
\text{sim.} & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
$$

...(3.67d)

$$
{}^{n}\underset{\sim}{k}_{G} = {}^{m}N \begin{bmatrix}
\frac{1}{m_L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{6}{5^mL} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5^mL} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\
 & & \frac{6}{5^mL} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5^mL} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{2^mL}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{^mL}{30} & 0 \\
 & & & & & \frac{2^mL}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{^mL}{30} \\
 & & & & & & \frac{1}{m_L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{6}{5^mL} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\
 & & & & & & & & \frac{6}{5^mL} & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{2^mL}{15} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{2^mL}{15} \\
\text{sim.} & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix}
$$

...(3.67e)

unesp

sendo

$$\varphi_1 = \Delta\varphi$$

$$\varphi_2 = \Delta^n\theta_1 + \Delta^n\theta_2 - 12\Delta\theta_0$$

$$\bar{\varphi}_2 = \Delta^n\psi_1 + \Delta^n\psi_2 - 12\Delta\psi_0$$

$$\varphi_3 = 4\Delta^n\theta_1 - \Delta^n\theta_2 - 3\Delta\theta_0$$

$$\bar{\varphi}_3 = 4\Delta^n\psi_1 - \Delta^n\psi_2 - 3\Delta\psi_0$$

$$\varphi_4 = -\Delta^n\theta_1 + 4\Delta^n\theta_2 - 3\Delta\theta_0$$

$$\bar{\varphi}_4 = -\Delta^n\psi_1 + 4\Delta^n\psi_2 - 3\Delta\psi_0$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{100}\left(9\Delta^n\theta_1^2 + 9\Delta^n\theta_2^2 - 2\Delta^n\theta_1\Delta^n\theta_2 - 36\,\Delta^n\theta_1\Delta\theta_0 - 36\,\Delta^n\theta_2\Delta\theta_0 + 216\,\Delta\theta_0^2\right)$$

$$\bar{\varphi}_5 = \frac{1}{100}\left(9\Delta^n\psi_1^2 + 9\Delta^n\psi_2^2 - 2\Delta^n\psi_1\Delta^n\psi_2 - 36\,\Delta^n\psi_1\Delta\psi_0 - 36\,\Delta^n\psi_2\Delta\psi_0 + 216\,\Delta\psi_0^2\right)$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{300}\left(6\Delta^n\theta_1^2 + \Delta^n\theta_2^2 + 2\Delta^n\theta_1\Delta^n\theta_2 - 54\Delta^n\theta_1\Delta\theta_0 + 6\Delta^n\theta_2\Delta\theta_0 + 54\Delta\theta_0^2\right)$$

$$\bar{\varphi}_6 = \frac{1}{300}\left(6\Delta^n\psi_1^2 + \Delta^n\psi_2^2 + 2\Delta^n\psi_1\Delta^n\psi_2 - 54\Delta^n\psi_1\Delta\psi_0 + 6\Delta^n\psi_2\Delta\psi_0 + 54\Delta\psi_0^2\right)$$

$$\varphi_7 = \frac{1}{300}\left(\Delta^n\theta_1^2 + 6\Delta^n\theta_2^2 + 2\Delta^n\theta_1\Delta^n\theta_2 + 6\Delta^n\theta_1\Delta\theta_0 - 54\Delta^n\theta_2\Delta\theta_0 + 54\Delta\theta_0^2\right)$$

$$\bar{\varphi}_7 = \frac{1}{300}\left(\Delta^n\psi_1^2 + 6\Delta^n\psi_2^2 + 2\Delta^n\psi_1\Delta^n\psi_2 + 6\Delta^n\psi_1\Delta\psi_0 - 54\Delta^n\psi_2\Delta\psi_0 + 54\Delta\psi_0^2\right)$$

$$\varphi_8 = \frac{1}{300}\left(8\Delta^n\theta_1^2 + 3\Delta^n\theta_2^2 - 4\Delta^n\theta_1\Delta^n\theta_2 - 12\Delta^n\theta_1\Delta\theta_0 - 2\Delta^n\theta_2\Delta\theta_0 + 27\Delta\theta_0^2\right)$$

$$\bar{\varphi}_8 = \frac{1}{300}\left(8\Delta^n\psi_1^2 + 3\Delta^n\psi_2^2 - 4\Delta^n\psi_1\Delta^n\psi_2 - 12\Delta^n\psi_1\Delta\psi_0 - 2\Delta^n\psi_2\Delta\psi_0 + 27\Delta\psi_0^2\right)$$

$$\varphi_9 = \frac{1}{300}\left(-2\Delta^n\theta_1^2 - 2\Delta^n\theta_2^2 + 6\Delta^n\theta_1\Delta^n\theta_2 - 2\Delta^n\theta_1\Delta\theta_0 - 2\Delta^n\theta_2\Delta\theta_0 - 3\Delta\theta_0^2\right)$$

$$\bar{\varphi}_9 = \frac{1}{300}\left(-2\Delta^n\psi_1^2 - 2\Delta^n\psi_2^2 + 6\Delta^n\psi_1\Delta^n\psi_2 - 2\Delta^n\psi_1\Delta\psi_0 - 2\Delta^n\psi_2\Delta\psi_0 - 3\Delta\psi_0^2\right)$$

$$\varphi_{10} = \frac{1}{300}\left(3\Delta^n\theta_1^2 + 8\Delta^n\theta_2^2 - 4\Delta^n\theta_1\Delta^n\theta_2 - 2\Delta^n\theta_1\Delta\theta_0 - 12\Delta^n\theta_2\Delta\theta_0 + 27\Delta\theta_0^2\right)$$

$$\bar{\varphi}_{10} = \frac{1}{300}\left(3\Delta^n\psi_1^2 + 8\Delta^n\psi_2^2 - 4\Delta^n\psi_1\Delta^n\psi_2 - 2\Delta^n\psi_1\Delta\psi_0 - 12\Delta^n\psi_2\Delta\psi_0 + 27\Delta\psi_0^2\right)$$

$$\varphi_{11} = \frac{\varphi_3}{120\,^mL}\Delta^n\theta_1 + \frac{\varphi_4}{120\,^mL}\Delta^n\theta_2 - \frac{\varphi_2}{40\,^mL}\Delta\theta_0$$

$$\bar{\varphi}_{11} = \frac{\varphi_3}{120\,^mL}\Delta^n\psi_1 + \frac{\varphi_4}{120\,^mL}\Delta^n\psi_2 - \frac{\varphi_2}{40\,^mL}\Delta\psi_0$$

$$\varphi_{12} = \frac{\varphi_3}{60\,^mL}\Delta^n\theta_1 + \frac{\varphi_4}{60\,^mL}\Delta^n\theta_2 - \frac{\varphi_2}{20\,^mL}\Delta\theta_0$$

$$\bar{\varphi}_{12} = \frac{\varphi_3}{60\,^mL}\Delta^n\psi_1 + \frac{\varphi_4}{60\,^mL}\Delta^n\psi_2 - \frac{\varphi_2}{20\,^mL}\Delta\psi_0$$

$$\varphi_{13} = \frac{1}{25}\left(2\Delta^n\theta_1^2 + 2\Delta^n\theta_2^2 - \Delta^n\theta_1\Delta^n\theta_2 - 3\Delta^n\theta_1\Delta\theta_0 - 3\Delta^n\theta_2\Delta\theta_0 + 18\Delta\theta_0^2\right)$$

$$\bar{\varphi}_{13} = \frac{1}{25}\left(2\Delta^n\psi_1^2 + 2\Delta^n\psi_2^2 - \Delta^n\psi_1\Delta^n\psi_2 - 3\Delta^n\psi_1\Delta\psi_0 - 3\Delta^n\psi_2\Delta\psi_0 + 18\Delta\psi_0^2\right)$$

...(3.68)

unesp

### 3.4.3.3 - Matriz de rigidez tangente

A matriz de rigidez tangente do elemento é obtida através da segunda derivação da energia de deformação em relação aos deslocamentos nodais, conforme equações (3.45) e (3.46).

Dessa forma, derivando-se novamente cada uma das parcelas "$U_i$" em relação aos deslocamentos nodais e organizando-se o resultado na forma matricial, obtém-se:

$$ {}^{n}\underset{\sim}{k}_T = {}^{n}\underset{\sim}{k}_0 + {}^{n}\underset{\sim}{k}_1 + {}^{n}\underset{\sim}{k}_2 + {}^{n}\underset{\sim}{k}_{TN} + {}^{n}\underset{\sim}{k}_G \qquad (3.69) $$

sendo que "${}^{n}\underset{\sim}{k}_0$", "${}^{n}\underset{\sim}{k}_1$", "${}^{n}\underset{\sim}{k}_2$" e "${}^{n}\underset{\sim}{k}_G$" são as mesmas matrizes dadas em (3.67). Já a matriz "${}^{n}\underset{\sim}{k}_{TN}$" é dada por:

$$ {}^{n}\underset{\sim}{k}_{TN} = EA \begin{bmatrix}
\varphi_{12}+\bar{\varphi}_{12} & -\frac{\varphi_2\varphi_1}{10m_L} & \frac{\bar{\varphi}_2\varphi_1}{10m_L} & 0 & -\frac{\bar{\varphi}_3\varphi_1}{30} & -\frac{\varphi_3\varphi_1}{30} & -\varphi_{12}-\bar{\varphi}_{12} & \frac{\varphi_2\varphi_1}{10m_L} & -\frac{\bar{\varphi}_2\varphi_1}{10m_L} & 0 & -\frac{\bar{\varphi}_4\varphi_1}{30} & -\frac{\varphi_4\varphi_1}{30} \\
 & \frac{6\varphi_1^2}{10m_L} & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_1^2}{20} & \frac{\varphi_2\varphi_1}{10m_L} & -\frac{6\varphi_1^2}{10m_L} & 0 & 0 & 0 & \frac{\varphi_1^2}{20} \\
 & & \frac{6\varphi_1^2}{10m_L} & 0 & -\frac{\varphi_1^2}{20} & 0 & -\frac{\bar{\varphi}_2\varphi_1}{10m_L} & 0 & -\frac{6\varphi_1^2}{10m_L} & 0 & -\frac{\varphi_1^2}{20} & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{\varphi_1^2 m_L}{15} & 0 & \frac{\bar{\varphi}_3\varphi_1}{30} & 0 & \frac{\varphi_1^2}{20} & 0 & -\frac{\varphi_1^2 m_L}{60} & 0 \\
 & & & & & \frac{\varphi_1^2 m_L}{15} & \frac{\varphi_3\varphi_1}{30} & -\frac{\varphi_1^2}{20} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varphi_1^2 m_L}{60} \\
 & & & & & & \varphi_{12}+\bar{\varphi}_{12} & -\frac{\varphi_2\varphi_1}{10m_L} & \frac{\bar{\varphi}_2\varphi_1}{10m_L} & 0 & \frac{\bar{\varphi}_4\varphi_1}{30} & \frac{\varphi_4\varphi_1}{30} \\
 & & & & & & & \frac{6\varphi_1^2}{10m_L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\varphi_1^2}{20} \\
 & & & & & & & & \frac{6\varphi_1^2}{10m_L} & 0 & \frac{\varphi_1^2}{20} & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{\varphi_1^2 m_L}{15} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{\varphi_1^2 m_L}{15} \\
\text{sim} & & & & & & & & & & &
\end{bmatrix} \qquad \ldots (3.70) $$

unesp

As funções "$\varphi_{12}$" e "$\bar{\varphi}_{12}$", bem como demais funções, estão definidas nas equações (3.68).

### 3.4.4 - Atualização das matrizes de rigidez

Conforme visto no item anterior, as matrizes de rigidez secante e tangente são definidas pela somatória entre várias matrizes, sendo que algumas dessas são dependentes dos deslocamentos nodais que ocorrem durante as iterações. Assim sendo, se faz necessário a atualização de tais matrizes durante a aplicação de cada incremento, conforme mostra o item subseqüente.

#### 3.4.4.1 - Pórtico espacial

A figura 3.7 ilustra o procedimento de atualização da matriz de rigidez tangente para uma estrutura formada por um elemento de pórtico espacial, tomando-se o plano "XY" como exemplo.

Neste procedimento a soma entre as matrizes de rigidez elástica "$\underset{\sim}{k_0}$" e geométrica "$\underset{\sim}{k_G}$" permanece constante durante todas as iterações necessárias para a obtenção do equilíbrio, visto que as mesmas só dependem de parâmetros relativos à configuração de equilíbrio anterior. Já as matrizes de rigidez incrementais "$\underset{\sim}{k_1}$", "$\underset{\sim}{k_2}$" e "$\underset{\sim}{k_{TN}}$" são atualizadas a cada iteração pelos acréscimos de deslocamentos que ocorrem durante a aplicação do incremento do carregamento. Cabe ressaltar que este procedimento também é válido para o cálculo da matriz de rigidez secante.

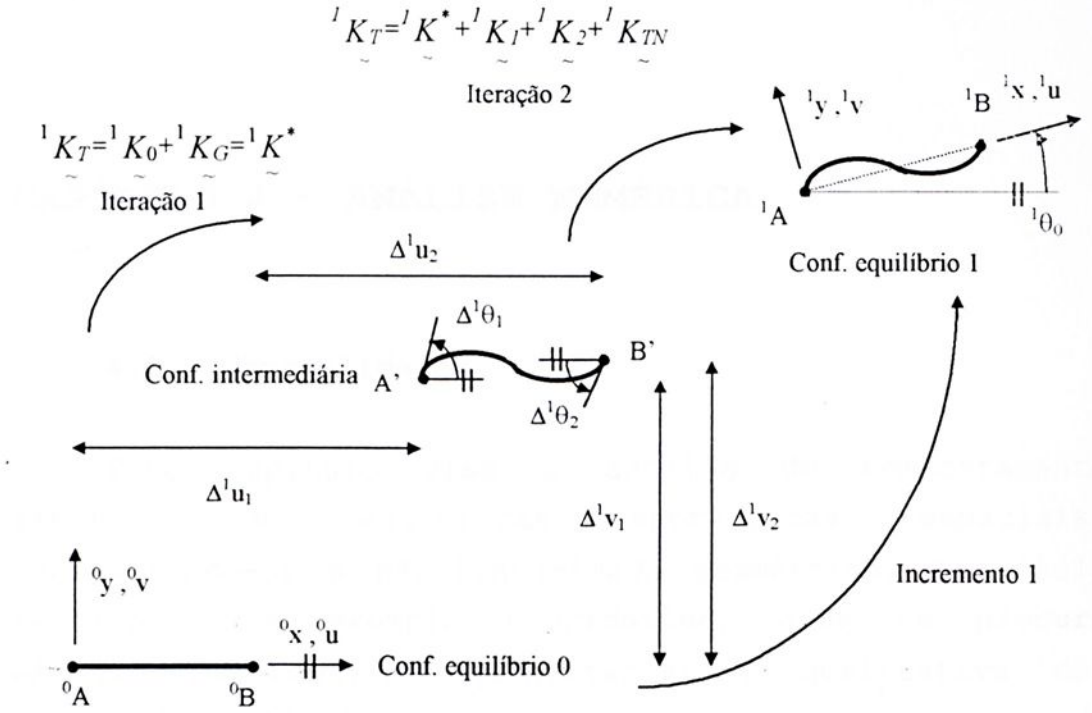


FIGURA 3.7 - Atualização da matriz de rigidez tangente para pórtico espacial no plano "XY".

### 3.4.5 - Aspectos computacionais

Antes de se aplicar o processo de expansão e acumulação em cada matriz de rigidez do elemento, secante ou tangente, para a obtenção da matriz de rigidez da estrutura, se faz necessário rotacionar as matrizes elementais em função da posição original do elemento na estrutura, através da utilização da seguinte equação:

$$^n\underset{\sim}{k}_{S,T}^{*} = \underset{\sim}{r}^T \, {}^n\underset{\sim}{k}_{S,T} \, \underset{\sim}{r} \qquad (3.71)$$

onde "$\underset{\sim}{r}$" é a matriz de transformação de rotação, contendo os co-senos diretores de cada elemento.

# CAPÍTULO 4 - ANÁLISE NUMÉRICA

## 4.1 - Generalidades

Este capítulo visa a análise do comportamento estático de estruturas aporticadas espaciais, considerando-se a não-linearidade geométrica. Para tal, resolve-se um exemplo elucidativo, onde se procura efetuar uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos.

Para a resolução de tal exemplo utiliza-se o programa computacional "DINPORTE" desenvolvido especificamente para a elaboração deste trabalho, sendo que tal programa permite a análise de pórticos espaciais.

Na apresentação do exemplo exibem-se somente as algumas respostas do problema estudado, sendo que no apêndice encontram-se os arquivos de dados e de respostas completos, com a finalidade de esclarecer eventuais dúvidas quanto ao tipo de análise que será realizada.

## 4.2 - Estrutura aporticada espacial

A estrutura aporticada espacial deste exemplo é composta por oito elementos finitos, vinculada ao meio externo através de quatro apoios fixos localizados nos nós 1, 4, 5 e 8, sendo solicitada por seis forças concentradas conforme ilustra a figura 4.1.

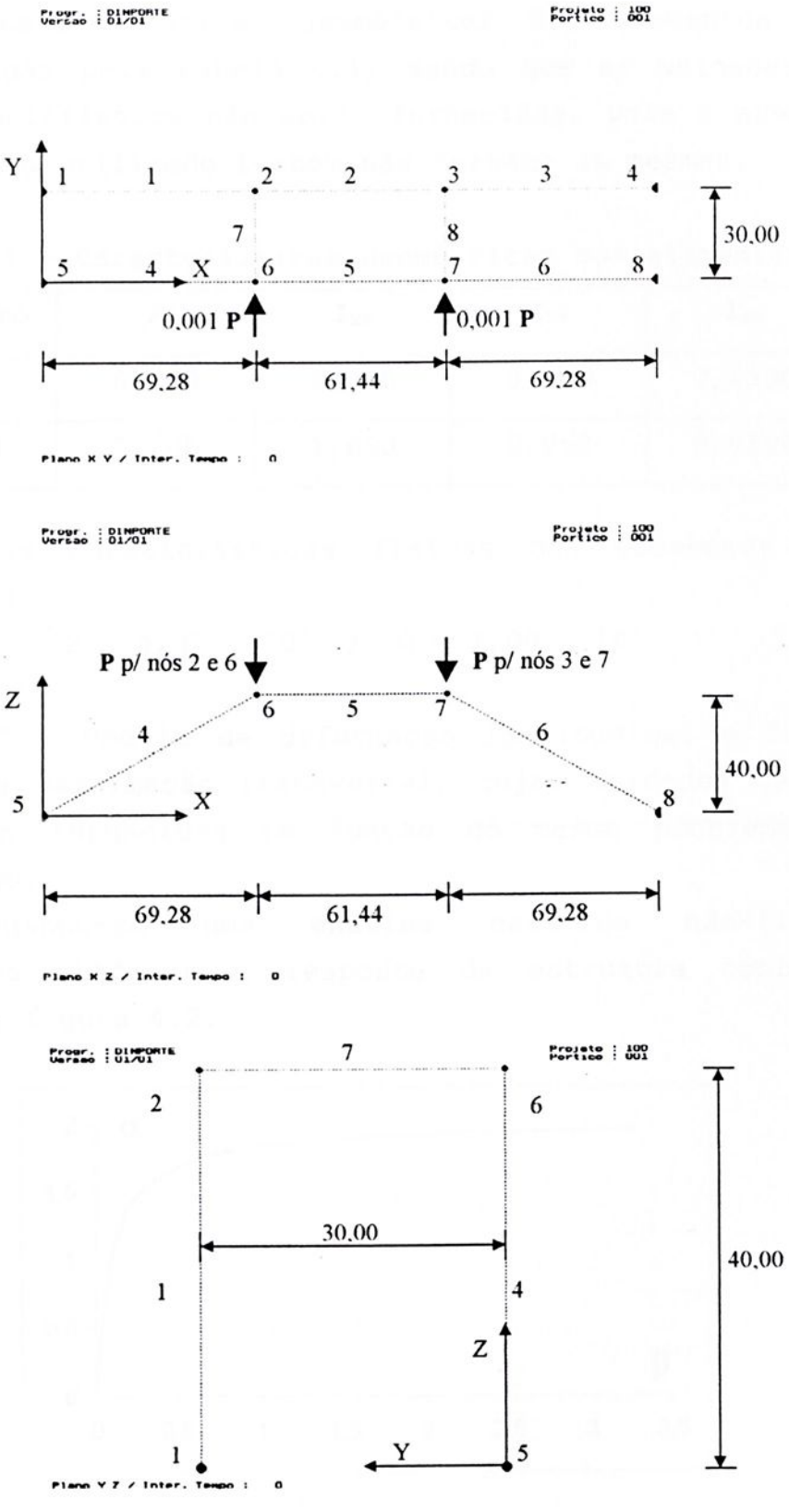


FIGURA 4.1 - Pórtico espacial.

As características geométricas dos elementos são apresentadas pela tabela 4.1, sendo que as unidades de cada característica não serão fornecidas, pois o exemplo comparativo utilizado também não fornece as mesmas.

TABELA 4.1 - Características geométricas dos elementos.

| Elemento | A | $I_{xx}$ | $I_{yy}$ | $I_{zz}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 a 6 | 0,500 | 4,150 | 0,400 | 0,1330 |
| 7 e 8 | 0,100 | 1,660 | 0,050 | 0,0500 |

Já as características físicas dos elementos são dadas por:

$$E = 4{,}32 \cdot 10^{6} \quad ; \quad G = 1{,}00 \cdot 10^{5}$$

sendo "E" o módulo de deformação longitudinal e "G" o módulo de deformação transversal, cujas unidades também não serão fornecidas em função do mesmo problema já mencionado.

Efetuando-se uma análise estática não-linear geométrica obtém-se a resposta da estrutura conforme ilustra a figura 4.2.

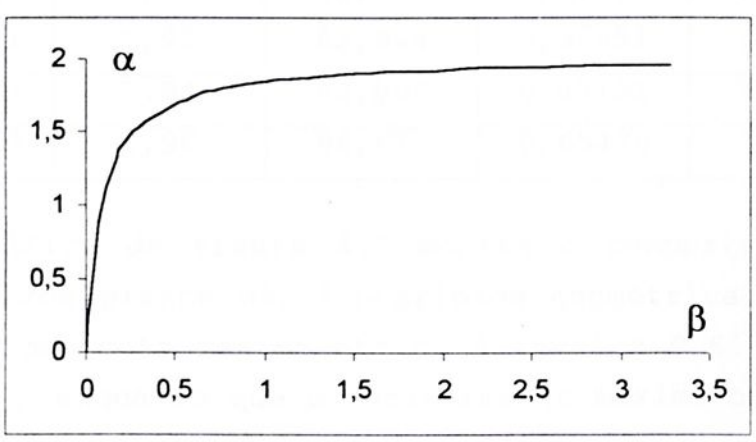


FIGURA 4.2 - Gráfico força x deslocamento do nó 6, na direção "Y".

Os parâmetros "α" e "β" são definidos por:

$$\alpha = \frac{P L^2}{E I_{YY\,1,6}}$$

$$\beta = \frac{V_{6,Y} \cdot 10^3}{L}$$

$$c / L = 200$$

...(4.1)

A tabela 4.2 mostra os dados numéricos do problema.

TABELA 4.2 - Dados numéricos.

| ARQUIVO | α | P | $V_{6,y}$ | β |
|---|---|---|---|---|
| 100PE001 | 0,25 | 10,800 | 0,00254 | 0,0127 |
| 100PE002 | 0,50 | 21,600 | 0,00592 | 0,0296 |
| 100PE003 | 0,75 | 32,400 | 0,01063 | 0,0531 |
| 100PE004 | 1,00 | 43,200 | 0,01766 | 0,0883 |
| 100PE005 | 1,25 | 54,000 | 0,02928 | 0,1464 |
| 100PE006 | 1,50 | 64,800 | 0,05220 | 0,2610 |
| 100PE007 | 1,75 | 75,600 | 0,11862 | 0,5931 |
| 100PE008 | 1,80 | 77,760 | 0,15057 | 0,7528 |
| 100PE009 | 1,85 | 79,920 | 0,20208 | 1,0104 |
| 100PE010 | 1,90 | 82,080 | 0,29900 | 1,4950 |
| 100PE011 | 1,92 | 82,944 | 0,36681 | 1,8340 |
| 100PE012 | 1,94 | 83,808 | 0,47151 | 2,3575 |
| 100PE013 | 1,96 | 84,672 | 0,65436 | 3,2718 |

O gráfico da figura 4.2 mostra o comportamento da estrutura com grande não-linearidade geométrica, uma vez que o deslocamento máximo obtido é igual a 0,65436, vide tabela 4.2, enquanto que o deslocamento máximo obtido via análise linear é igual a 0,01747.

Tal resposta coincide com os resultados obtidos por HSIAO et al.(1987) via formulação corrotacional Euleriana,

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

conforme mostra a figura 4.3, comprovando a eficácia do procedimento incremental adotado para o elemento finito de pórtico espacial.

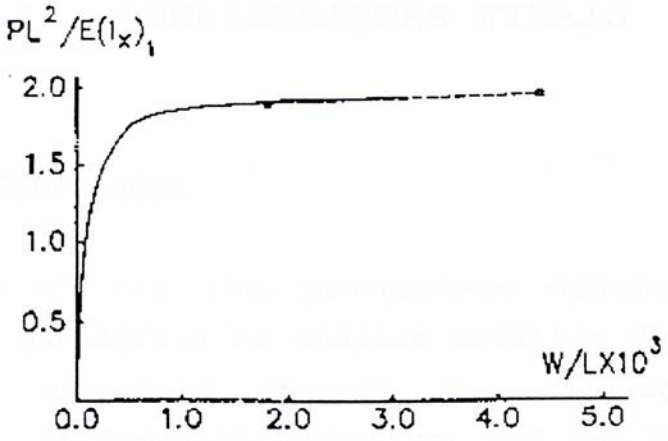


FIGURA 4.3 - Gráfico força x deslocamento do nó 6, na direção "Y", HSIAO et al.(1987).

Para finalizar, a figura 4.4 mostra a estrutura na sua posição deslocada tomando-se o plano "XY" como referência, sendo que os deslocamentos foram amplificados por fator de escala igual a 10.

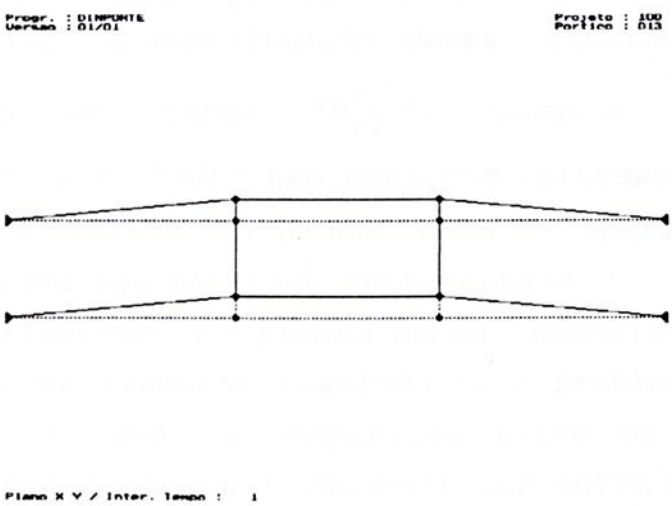

FIGURA 4.4 - Posição deslocada da estrutura.

# CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

## 5.1 - Conclusões

No presente trabalho, procurou-se implementar a não-linearidade geométrica na análise estática de estruturas reticuladas espaciais através da utilização de um procedimento incremental/iterativo. Uma vez estabelecida toda a teoria referente ao assunto em questão, desenvolve-se um programa computacional que permite a realização de uma análise numérica não-linear, e também linear, possibilitando a visualização do comportamento estrutural de tais sistemas de uma forma mais realista.

Neste contexto, para a consideração da não-linearidade geométrica definiu-se o campo de deformações através de uma função quadrática dos deslocamentos, sendo desprezados os termos que contêm produtos de parcelas de ordem superior. A contribuição deste trabalho reside na consideração do termo "$u^2/2$", gerando na matriz geométrica o termo "$N/L$" nas posições correspondentes aos deslocamentos axiais "u", bem como o aparecimento de outras parcelas nas matrizes incrementais.

Para ilustrar o procedimento numérico que foi utilizado neste trabalho resolveu-se o problema mostrado no capítulo 4, onde a comparação entre os resultados obtidos e os resultados fornecidos por outro pesquisador serviu para validar tal abordagem.

Após estas considerações, o autor espera ter alcançado os objetivos propostos no início deste trabalho

e, de alguma forma, também espera ter contribuído para o aprimoramento da análise de estruturas usualmente empregadas na Engenharia Estrutural.

## 5.2 - Propostas de desenvolvimento

Sendo este trabalho continuação de um estudo mais extenso pode-se, de imediato, elaborar algumas propostas de desenvolvimento visando a melhoria do programa computacional, o refinamento da teoria que foi empregada e a incorporação de novos tipos de sistemas estruturais.

Com relação à melhoria do programa computacional pode-se otimizar a memória empregada durante o processamento da estrutura, introduzir a rotulação de extremidades entre os elementos finitos de pórtico espacial e implementar a análise dinâmica.

Já com relação ao refinamento da teoria pode-se incorporar os termos que contêm produtos de parcelas de ordem superior no campo de deformações para o elemento de pórtico espacial.

Pode-se, também, elaborar um programa para análise não-linear física de pórticos espaciais de concreto armado, sendo que para este caso se faz necessário à idealização de um modelo físico consistente que contemple o caso da flexão composta oblíqua.

Por fim, pode-se formalizar como últimas propostas de desenvolvimento a introdução de parcelas não-lineares nas matrizes de massas e de amortecimento, BRASIL(1990), e o aprofundamento da pesquisa com relação aos efeitos provocados por ações dinâmicas, através da caracterização dos coeficientes de impacto e do refinamento dos coeficientes de ponderação usualmente empregados na análise de sistemas estruturais usuais.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARGYRIS, J.H.; MLEJNEK, H.P.(1991). **Dynamics of structures.** Netherlands, Elsevier Science. v.5.

BRASIL, R.M.L.R.F.(1990). **Não-linearidade geométrica na dinâmica de estruturas aporticadas planas: um tratamento pelo método dos elementos finitos.** São Paulo. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

BRASIL, R.M.L.R.F.; MAZZILLI, C.E.N.(1992). Nonlinear FE analysis in dynamics: simplifications aiming at small computers. In: YAJUN, Z. ed. (1992) **International conference on education, practice and promotion of computational methods in engineering using small computers.** Dalian, Dalian University of Technology Press, v.1, p.531-536.

CHEN, W.F.; HAN, D.J.(1988). **Plasticity for structural engineers.** New York, Springer-Verlag. 606p.

CILONI, A.D.(1993). **Sobre o comportamento em serviço de estruturas planas de concreto armado.** São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E.(1989). **Concepts and applications of finite element analysis.** New York, John Wiley & Sons. 630p.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

CORRÊA, M.R.S.(1991). **Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios.** São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

HSIAO, K.; HORNG, H.; CHEN, Y.(1987). A corotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures. **Computers & Structures**, v.27, n.6, p.769-781.

HURTY, W.C.; RUBINSTEIN, M.F.(1967). **Dynamics of structures.** New Delhi, Prentice-Hall of India Private. 455p.

MATTHIES, H.; STRANG, G.(1979). The solution of nonlinear finite element equations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.14, p.1613-1626.

MAZZILLI, C.E.N.(1986). Comportamento não-linear de pórticos planos em regime elástico linear. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA , 7, São Carlos, 1986. **Anais.** São Carlos, EESC-USP. p.381-395.

MAZZILLI, C.E.N.; BRASIL, R.M.L.R.F.(1992). **ANDROS: a finite element program for nonlinear dynamics.** São Paulo, EPUSP. (Boletim Técnico BT/PEF/9213).

O'BRIEN, S.K.(1992). **Turbo Pascal 6:** completo e total. São Paulo, Makron Books, McGraw-Hill. 716p.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

OWEN, D.R.J.; GOMES, C.M.B.(1984). **Some recent developments in solution techniques for nonlinear finite element problems.** s.l., s.ed. p.137-153.

RODRIGUES, R.O.(1997). **Análise dinâmica bidimensional não-linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado.** São Carlos, Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

RODRIGUES, R.O.; VENTURINI, W.S.(1999). Análise dinâmica não-linear física e geométrica de treliças espaciais de aço. In: CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 20, São Paulo, 1999. **Anais.** São Paulo, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 19p. (CD-ROM)

RUBERT, J.B.(1993). **Estudo do desempenho de algoritmos numéricos na solução de sistemas não-lineares de estruturas formadas por barras de treliça.** São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SAVASSI, W.(1996). **Introdução ao método dos elementos finitos:** em análise linear de estruturas. São Carlos, EESC-USP. 260p.

SILVA, R.M.(1996). **Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado: modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados.** São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SOLER, J.G.M.(1995). **Análise não-linear de pórticos espaciais de concreto armado.** São Paulo. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

SORIANO, H.L.(1981). **Sistemas de equações algébricas lineares em problemas estruturais.** Lisboa, Ministério da Habitação e Obras Públicas. /Seminário 280/

SOUZA, J.C.A.O.; ANTUNES, H.M.C.C.(1995). **Introdução à análise matricial de estruturas.** 2.ed. São Carlos, EESC-USP. 106p.

WEN, R.K.; ASCE, M.; RAHIMZADEH, J.(1983). Nonlinear elastic frame analysis by finite element. **Journal of Structural Engineering**, v.109, n.8, p.1952-1971, Aug.

WONG, M.B.; TIN-LOI, F.(1990a). Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities. **Computers & Structures**, v.34, n.4, p.641-646.

WONG, M.B.; TIN-LOI, F.(1990a). Analysis of frames involving geometrical and material nonlinearities. **Computers & Structures**, v.34, n.4, p.641-646.

# OBRAS CONSULTADAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS.(1983). **NBR7808- Símbolos gráficos para projetos de estruturas:** simbologia. Rio de Janeiro.

BERGAN, P.G.; HOLAND, I.(1979). Nonlinear finite element analysis of concrete structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, n.17/18, p.443-467.

FRANCO, M.(1985). Problemas de estabilidade nos edifícios de concreto armado. In: COLÓQUIO SOBRE ESTABILIDADE GLOBAL DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO, São Paulo, 1985. **Trabalhos Apresentados.** São Paulo, Instituto Brasileiro do Concreto - IBRACON. /paginação irregular/

FRANCO, M.; VASCONCELOS, A.C.(1991). Practical assessment of second order effects in tall buildings. In: COLLOQUIUM ON THE CEB-FIP MC90, 1991, Rio de Janeiro. **Trabalhos Apresentados.** Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ. p.307-323.

GHASSEMIEH, M.; KUKRETI, A.R.(1990). An algorithm for the analysis of problems with combined material and geometric nonlinearities. **Computers & Structures**, v.35, n.5, p.579-591.

KASSIMALI, A.(1983). Large deformation analysis of elastic-plastic frames. **Journal of Structural Engineering**, v.109, n.8, p.1869-1886, Aug.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

LANGENDONCK, T.V.(1989). **Vocabulário de teoria das estruturas.** São Paulo, Associação Brasileira de Cimento Portland. 50p.

LIMA, V.M.S., VENANCIO FILHO, F.(1984). A noção de rigidez tangente no estudo da não-linearidade geométrica de estruturas reticuladas. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 5, 1984, Salvador. **Anais.** Salvador, s.ed. /paginação irregular/

LIMA, V.M.S.; VENANCIO FILHO, F.(1982). **Considerações sobre a não-linearidade geométrica em estruturas reticuladas.** Rio de Janeiro, III Escola de Matemática Aplicada - Laboratório de Computação Científica. 38p.

MARQUES, S.P.C.; CREUS, G.J.(1990). Análise não-linear física e geométrica de pórticos espaciais. In: CONGRESSO IBERO LATINO AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 11, 1990, Rio de Janeiro. **Anais.** Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ. p.13-24.

PIMENTA, P.M.(1986). Aspectos da análise não linear de estruturas reticuladas. In: CONGRESSO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 7, São Carlos, 1986. **Anais.** São Carlos, EESC-USP. p.449-464.

SZILARD, R.(1985). Critical load and post-buckling analysis by FEM using energy balancing technique. **Computers & Structures**, v.20, n.1-3, p.277-286.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

TAGUTI, Y.(1987). **Sobre a não-linearidade geométrica em treliças, pórticos e placas.** São Paulo. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO.(1993). Escola de Engenharia de São Carlos. **Diretrizes para elaboração de dissertações e teses na EESC-USP.** São Carlos, SVBIBL. 37P.

VASCONCELOS, A.C.(1987). Como especificar a segurança quando há efeitos de 2ª ordem a considerar. In: COLLOQUIA, 1987, Porto Alegre. **Anais.** Porto Alegre, Escola de Engenharia da UFRGS - Departamento de Engenharia Civil. p.297-304.

# APÊNDICE

Este apêndice contém os arquivos de dados da estrutura e os arquivos com as respostas obtidas do exemplo que foi resolvido no capítulo 4 deste trabalho, permitindo que o leitor possa esclarecer eventuais dúvidas quanto ao tipo de análise que foi realizada.

**100PE001.POR**

```
C
C      NNODS     NELEM     NAPOS     NMATE     GERNO     GEREL     NMASC
           8         8         4         1         0         0         0
C      NLIFI     MOFIS     NLIGE     NFACA     NITER     TOLER     RESUL
           0         0         1         1       400      1E-6         1
C      DINAM     ITEMP     TEMPO     NEWMA     AMORT     LAMBM     LAMBK
           0         1         1         0         0         0         0
C
C         COORDEN.    ORIGEM     GERAR          COORDENADA          LIMITE
C NO      X         Y         Z     NNODS INCREM.      X         Y         Z
  1     0.0      30.0       0.0         0         0         0         0         0
  2   69.28      30.0      40.0         0         0         0         0         0
  3  130.72      30.0      40.0         0         0         0         0         0
  4  200.00      30.0       0.0         0         0         0         0         0
  5     0.0       0.0       0.0         0         0         0         0         0
  6   69.28       0.0      40.0         0         0         0         0         0
  7  130.72       0.0      40.0         0         0         0         0         0
  8  200.00       0.0       0.0         0         0         0         0         0
C
C NO VINC      REST X     REST Y     REST Z     ROT X     ROT Y     ROT Z
          1          1          1          1         0         0         0
          4          1          1          1         0         0         0
          5          1          1          1         0         0         0
          8          1          1          1         0         0         0
C
C  MAT.      MOD. ELAST. LONG.      MOD. ELAST. TRANSV.      PESO ESPEC.
     1                  4.32E6                    1E5                 0
C
C            !                  SECAO                    !     INCREM.     !
CEL NOI NOF    AREA      IXX       IYY       IZZ     ANG  TM  EG  NE  NI  NF
  1   1   2     0.5     4.15      0.40      .133       0   1
  2   2   3     0.5     4.15      0.40      .133       0   1
  3   3   4     0.5     4.15      0.40      .133       0   1
  4   5   6     0.5     4.15      0.40      .133       0   1
  5   6   7     0.5     4.15      0.40      .133       0   1
  6   7   8     0.5     4.15      0.40      .133       0   1
  7   2   6     0.1     1.66      0.05      .050       0   1
  8   3   7     0.1     1.66      0.05      .050       0   1
C
C            FASE 1              NNCAR              GERCA              TEMAC
                                     4                  0                  1
C       A         B         C         D         E         F         G         X         Y
        1         0         0         0         0         0         0         0         0
C
C  NO   FOR X   FOR Y   FOR Z   MOM XX   MOM YY   MOM ZZ   G.NNCAR   INCR.
    2       0       0  -10.80        0        0        0
    3       0       0  -10.80        0        0        0
```

```
    6       0  0.01080  -10.80     0        0        0
    7       0  0.01080  -10.80     0        0        0

-----------------------------------------------------------------
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA   -    FEIS    -    UNESP
PROGRAMA : DINPORTE                                VERSAO   : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100                                          PORTICO : 001

TITULO : 100PE001.POR
-----------------------------------------------------------------

                RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO  1

-----------------------------------------------------------------
DESLOCAMENTOS NODAIS

 NO      DES X      DES Y      DES Z      ROT XX      ROT YY      ROT ZZ

  1     0.0000     0.0000     0.0000 -0.0000231   0.0000296   0.0000368
  2     0.0003     0.0025    -0.0021 -0.0000058   0.0000128   0.0000068
  3    -0.0003     0.0025    -0.0021 -0.0000058  -0.0000128  -0.0000068
  4     0.0000     0.0000     0.0000 -0.0000231  -0.0000296  -0.0000368
  5     0.0000     0.0000     0.0000 -0.0000231   0.0000295   0.0000368
  6     0.0003     0.0025    -0.0021 -0.0000058   0.0000128   0.0000068
  7    -0.0003     0.0025    -0.0021 -0.0000058  -0.0000128  -0.0000068
  8     0.0000     0.0000     0.0000 -0.0000231  -0.0000295  -0.0000368
-----------------------------------------------------------------
```

## 100PE002.POR

```
C
C      NNODS     NELEM     NAPOS     NMATE     GERNO     GEREL     NMASC
           8         8         4         1         0         0         0
C      NLIFI     MOFIS     NLIGE     NFACA     NITER     TOLER     RESUL
           0         0         1         1       400      1E-6         1
C      DINAM     ITEMP     TEMPO     NEWMA     AMORT     LAMBM     LAMBK
           0         1         1         0         0         0         0
C
C        COORDEN.    ORIGEM     GERAR          COORDENADA          LIMITE
C NO     X         Y         Z     NNODS INCREM.     X         Y         Z
  1     0.0      30.0       0.0       0        0        0         0         0
  2    69.28     30.0      40.0       0        0        0         0         0
  3   130.72     30.0      40.0       0        0        0         0         0
  4   200.00     30.0       0.0       0        0        0         0         0
  5     0.0       0.0       0.0       0        0        0         0         0
  6    69.28      0.0      40.0       0        0        0         0         0
  7   130.72      0.0      40.0       0        0        0         0         0
  8   200.00      0.0       0.0       0        0        0         0         0
C
C NO VINC     REST X     REST Y     REST Z     ROT X      ROT Y      ROT Z
          1          1          1          1          0          0          0
          4          1          1          1          0          0          0
          5          1          1          1          0          0          0
          8          1          1          1          0          0          0
C
C  MAT.     MOD. ELAST. LONG.     MOD. ELAST. TRANSV.     PESO ESPEC.
      1                4.32E6                    1E5               0
C
C          !                SECAO                    !     INCREM.     !
CEL NOI NOF    AREA     IXX      IYY      IZZ     ANG  TM  EG  NE  NI  NF
  1   1   2     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  2   2   3     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  3   3   4     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  4   5   6     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  5   6   7     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  6   7   8     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  7   2   6     0.1    1.66     0.05     .050       0   1
```

```
  8   3   7    0.1   1.66   0.05   .050     0   1
C
C            FASE 1            NNCAR           GERCA           TEMAC
                                   4               0               1
C       A       B       C       D       E       F       G       X       Y
        1       0       0       0       0       0       0       0       0
C
C  NO   FOR X   FOR Y   FOR Z  MOM XX  MOM YY  MOM ZZ  G.NNCAR  INCR.
     2       0       0  -21.60       0       0       0
     3       0       0  -21.60       0       0       0
     6       0 0.02160  -21.60       0       0       0
     7       0 0.02160  -21.60       0       0       0
```

---

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA - FEIS - UNESP
PROGRAMA : DINPORTE VERSAO : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100 PORTICO : 002

TITULO : 100PE002.POR

---

RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO 1

---

DESLOCAMENTOS NODAIS

| NO | DES X | DES Y | DES Z | ROT XX | ROT YY | ROT ZZ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0000540 | 0.0000592 | 0.0000861 |
| 2 | 0.0005 | 0.0059 | -0.0041 | -0.0000134 | 0.0000256 | 0.0000157 |
| 3 | -0.0005 | 0.0059 | -0.0041 | -0.0000134 | -0.0000256 | -0.0000157 |
| 4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0000540 | -0.0000592 | -0.0000861 |
| 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0000540 | 0.0000591 | 0.0000861 |
| 6 | 0.0005 | 0.0059 | -0.0041 | -0.0000134 | 0.0000256 | 0.0000158 |
| 7 | -0.0005 | 0.0059 | -0.0041 | -0.0000134 | -0.0000256 | -0.0000158 |
| 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0000540 | -0.0000591 | -0.0000861 |

---

## 100PE003.POR

```
C
C      NNODS     NELEM     NAPOS     NMATE     GERNO     GEREL     NMASC
           8         8         4         1         0         0         0
C      NLIFI     MOFIS     NLIGE     NFACA     NITER     TOLER     RESUL
           0         0         1         1       400      1E-6         1
C      DINAM     ITEMP     TEMPO     NEWMA     AMORT     LAMBM     LAMBK
           0         1         1         0         0         0         0
C
C        COORDEN.    ORIGEM    GERAR          COORDENADA          LIMITE
C NO     X         Y         Z    NNODS INCREM.     X         Y         Z
  1      0.0    30.0       0.0        0        0         0         0         0
  2     69.28   30.0      40.0        0        0         0         0         0
  3    130.72   30.0      40.0        0        0         0         0         0
  4    200.00   30.0       0.0        0        0         0         0         0
  5      0.0     0.0       0.0        0        0         0         0         0
  6     69.28    0.0      40.0        0        0         0         0         0
  7    130.72    0.0      40.0        0        0         0         0         0
  8    200.00    0.0       0.0        0        0         0         0         0
C
C NO VINC     REST X     REST Y     REST Z     ROT X     ROT Y     ROT Z
          1          1          1          1         0         0         0
          4          1          1          1         0         0         0
          5          1          1          1         0         0         0
          8          1          1          1         0         0         0
C
C  MAT.     MOD. ELAST. LONG.     MOD. ELAST. TRANSV.     PESO ESPEC.
       1               4.32E6                    1E5               0
```

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

```
C
C           !                SECAO                 !     INCREM.     !
CEL NOI NOF    AREA     IXX     IYY     IZZ    ANG  TM  EG  NE  NI  NF
  1   1   2     0.5    4.15    0.40    .133      0   1
  2   2   3     0.5    4.15    0.40    .133      0   1
  3   3   4     0.5    4.15    0.40    .133      0   1
  4   5   6     0.5    4.15    0.40    .133      0   1
  5   6   7     0.5    4.15    0.40    .133      0   1
  6   7   8     0.5    4.15    0.40    .133      0   1
  7   2   6     0.1    1.66    0.05    .050      0   1
  8   3   7     0.1    1.66    0.05    .050      0   1
C
C           FASE 1            NNCAR            GERCA            TEMAC
                                 4                0                1
C       A       B       C       D       E       F       G       X       Y
        1       0       0       0       0       0       0       0       0
C
C  NO   FOR X   FOR Y   FOR Z  MOM XX  MOM YY  MOM ZZ  G.NNCAR  INCR.
     2       0       0  -32.40       0       0       0
     3       0       0  -32.40       0       0       0
     6       0 0.03240  -32.40       0       0       0
     7       0 0.03240  -32.40       0       0       0
```

---

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA - FEIS - UNESP
PROGRAMA : DINPORTE VERSAO : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100 PORTICO : 003

TITULO : 100PE003.POR

---

RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO 1

---

DESLOCAMENTOS NODAIS

| NO | DES X | DES Y | DES Z | ROT XX | ROT YY | ROT ZZ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0000972 | 0.0000890 | 0.0001553 |
| 2 | 0.0008 | 0.0106 | -0.0062 | -0.0000237 | 0.0000384 | 0.0000280 |
| 3 | -0.0008 | 0.0106 | -0.0062 | -0.0000237 | -0.0000384 | -0.0000280 |
| 4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0000972 | -0.0000890 | -0.0001553 |
| 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0000972 | 0.0000887 | 0.0001553 |
| 6 | 0.0008 | 0.0106 | -0.0062 | -0.0000237 | 0.0000383 | 0.0000280 |
| 7 | -0.0008 | 0.0106 | -0.0062 | -0.0000237 | -0.0000383 | -0.0000280 |
| 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0000972 | -0.0000887 | -0.0001553 |

---

## 100PE004.POR

```
C
C      NNODS     NELEM     NAPOS     NMATE     GERNO     GEREL     NMASC
           8         8         4         1         0         0         0
C      NLIFI     MOFIS     NLIGE     NFACA     NITER     TOLER     RESUL
           0         0         1         1       400      1E-6         1
C      DINAM     ITEMP     TEMPO     NEWMA     AMORT     LAMBM     LAMBK
           0         1         1         0         0         0         0
C
C        COORDEN.    ORIGEM     GERAR          COORDENADA          LIMITE
C NO     X         Y         Z       NNODS INCREM.     X         Y         Z
  1     0.0      30.0       0.0         0       0         0         0         0
  2   69.28      30.0      40.0         0       0         0         0         0
  3  130.72      30.0      40.0         0       0         0         0         0
  4  200.00      30.0       0.0         0       0         0         0         0
  5     0.0       0.0       0.0         0       0         0         0         0
  6   69.28       0.0      40.0         0       0         0         0         0
  7  130.72       0.0      40.0         0       0         0         0         0
```

```
  8  200.00     0.0      0.0      0       0        0        0        0
C
C NO VINC     REST X     REST Y     REST Z     ROT X     ROT Y     ROT Z
        1          1          1          1         0         0         0
        4          1          1          1         0         0         0
        5          1          1          1         0         0         0
        8          1          1          1         0         0         0
C
C  MAT.     MOD. ELAST. LONG.     MOD. ELAST. TRANSV.     PESO ESPEC.
      1                4.32E6                    1E5               0
C
C          !                SECAO                    !     INCREM.     !
CEL NOI NOF    AREA     IXX      IYY      IZZ    ANG  TM  EG  NE  NI  NF
  1   1   2     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  2   2   3     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  3   3   4     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  4   5   6     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  5   6   7     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  6   7   8     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  7   2   6     0.1    1.66     0.05     .050      0   1
  8   3   7     0.1    1.66     0.05     .050      0   1
C
C          FASE 1            NNCAR            GERCA            TEMAC
                                 4                0                1
C      A       B       C       D       E       F       G       X       Y
       1       0       0       0       0       0       0       0       0
C
C  NO  FOR X  FOR Y  FOR Z  MOM XX  MOM YY  MOM ZZ  G.NNCAR  INCR.
    2       0       0    -43.20       0       0       0
    3       0       0    -43.20       0       0       0
    6       0 0.04320    -43.20       0       0       0
    7       0 0.04320    -43.20       0       0       0
```

---

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA - FEIS - UNESP
PROGRAMA : DINPORTE VERSAO : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100 PORTICO : 004

TITULO : 100PE004.POR

---

RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO 1

---

DESLOCAMENTOS NODAIS

| NO | DES X | DES Y | DES Z | ROT XX | ROT YY | ROT ZZ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0001619 | 0.0001189 | 0.0002592 |
| 2 | 0.0011 | 0.0177 | -0.0083 | -0.0000388 | 0.0000512 | 0.0000460 |
| 3 | -0.0011 | 0.0177 | -0.0083 | -0.0000388 | -0.0000512 | -0.0000460 |
| 4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0001619 | -0.0001189 | -0.0002592 |
| 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0001619 | 0.0001184 | 0.0002592 |
| 6 | 0.0011 | 0.0177 | -0.0082 | -0.0000388 | 0.0000510 | 0.0000461 |
| 7 | -0.0011 | 0.0177 | -0.0082 | -0.0000388 | -0.0000510 | -0.0000461 |
| 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0001619 | -0.0001184 | -0.0002592 |

---

## 100PE005.POR

```
C
C      NNODS     NELEM     NAPOS     NMATE     GERNO     GEREL     NMASC
           8         8         4         1         0         0         0
C      NLIFI     MOFIS     NLIGE     NFACA     NITER     TOLER     RESUL
           0         0         1         1       400      1E-6         1
C      DINAM     ITEMP     TEMPO     NEWMA     AMORT     LAMBM     LAMBK
           0         1         1         0         0         0         0
```

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

```
C
C        COORDEN.    ORIGEM     GERAR          COORDENADA          LIMITE
C NO      X          Y          Z      NNODS INCREM.     X          Y          Z
  1      0.0       30.0        0.0       0       0        0          0          0
  2     69.28      30.0       40.0       0       0        0          0          0
  3    130.72      30.0       40.0       0       0        0          0          0
  4    200.00      30.0        0.0       0       0        0          0          0
  5      0.0        0.0        0.0       0       0        0          0          0
  6     69.28       0.0       40.0       0       0        0          0          0
  7    130.72       0.0       40.0       0       0        0          0          0
  8    200.00       0.0        0.0       0       0        0          0          0
C
C NO VINC     REST X     REST Y     REST Z     ROT X     ROT Y     ROT Z
         1          1          1          1         0         0         0
         4          1          1          1         0         0         0
         5          1          1          1         0         0         0
         8          1          1          1         0         0         0
C
C  MAT.     MOD. ELAST. LONG.     MOD. ELAST. TRANSV.     PESO ESPEC.
     1                4.32E6                    1E5               0
C
C           !                SECAO                    !     INCREM.     !
CEL NOI NOF    AREA     IXX      IYY      IZZ    ANG  TM  EG  NE  NI  NF
  1   1   2     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  2   2   3     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  3   3   4     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  4   5   6     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  5   6   7     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  6   7   8     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  7   2   6     0.1    1.66     0.05     .050      0   1
  8   3   7     0.1    1.66     0.05     .050      0   1
C
C            FASE 1              NNCAR              GERCA              TEMAC
                                    4                  0                  1
C       A         B         C         D         E         F         G         X         Y
        1         0         0         0         0         0         0         0         0
C
C  NO   FOR X    FOR Y    FOR Z   MOM XX    MOM YY    MOM ZZ  G.NNCAR   INCR.
    2        0        0   -54.00        0         0         0
    3        0        0   -54.00        0         0         0
    6        0  0.05400   -54.00        0         0         0
    7        0  0.05400   -54.00        0         0         0
```

---

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA - FEIS - UNESP
PROGRAMA : DINPORTE VERSAO : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100 PORTICO : 005

TITULO : 100PE005.POR

---

RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO 1

---

DESLOCAMENTOS NODAIS

| NO | DES X | DES Y | DES Z | ROT XX | ROT YY | ROT ZZ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0002693 | 0.0001489 | 0.0004321 |
| 2 | 0.0013 | 0.0293 | -0.0103 | -0.0000634 | 0.0000641 | 0.0000755 |
| 3 | -0.0013 | 0.0293 | -0.0103 | -0.0000634 | -0.0000641 | -0.0000755 |
| 4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0002693 | -0.0001489 | -0.0004321 |
| 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0002693 | 0.0001481 | 0.0004320 |
| 6 | 0.0013 | 0.0293 | -0.0103 | -0.0000635 | 0.0000638 | 0.0000756 |
| 7 | -0.0013 | 0.0293 | -0.0103 | -0.0000635 | -0.0000638 | -0.0000756 |
| 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0002693 | -0.0001481 | -0.0004320 |

---

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

100PE006.POR

C

| C NNODS | NELEM | NAPOS | NMATE | GERNO | GEREL | NMASC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| C NLIFI | MOFIS | NLIGE | NFACA | NITER | TOLER | RESUL |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 400 | 1E-6 | 1 |
| C DINAM | ITEMP | TEMPO | NEWMA | AMORT | LAMBM | LAMBK |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

C

| C | COORDEN. ORIGEM | | | GERAR | | COORDENADA | | LIMITE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C NO | X | Y | Z | NNODS | INCREM. | X | Y | Z |
| 1 | 0.0 | 30.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 69.28 | 30.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 130.72 | 30.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 200.00 | 30.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 69.28 | 0.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 130.72 | 0.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 200.00 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

C

| C NO VINC | REST X | REST Y | REST Z | ROT X | ROT Y | ROT Z |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

C

| C MAT. | MOD. ELAST. LONG. | MOD. ELAST. TRANSV. | PESO ESPEC. |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.32E6 | 1E5 | 0 |

C

| C | ! | | SECAO | | | | ! | INCREM. | | | ! |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CEL | NOI | NOF | AREA | IXX | IYY | IZZ | ANG | TM | EG | NE | NI NF |
| 1 | 1 | 2 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | |
| 2 | 2 | 3 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | |
| 3 | 3 | 4 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | |
| 4 | 5 | 6 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | |
| 5 | 6 | 7 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | |
| 6 | 7 | 8 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | |
| 7 | 2 | 6 | 0.1 | 1.66 | 0.05 | .050 | 0 | 1 | | | |
| 8 | 3 | 7 | 0.1 | 1.66 | 0.05 | .050 | 0 | 1 | | | |

C

| C | FASE 1 | NNCAR | GERCA | TEMAC |
|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 0 | 1 |

| C A | B | C | D | E | F | G | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

C

| C NO | FOR X | FOR Y | FOR Z | MOM XX | MOM YY | MOM ZZ | G.NNCAR | INCR. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0 | -64.80 | 0 | 0 | 0 | | |
| 3 | 0 | 0 | -64.80 | 0 | 0 | 0 | | |
| 6 | 0 | 0.06480 | -64.80 | 0 | 0 | 0 | | |
| 7 | 0 | 0.06480 | -64.80 | 0 | 0 | 0 | | |

---

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA - FEIS - UNESP
PROGRAMA : DINPORTE VERSAO : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100 PORTICO : 006

TITULO : 100PE006.POR

---

RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO 1

---

DESLOCAMENTOS NODAIS

| NO | DES X | DES Y | DES Z | ROT XX | ROT YY | ROT ZZ |
|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0004818 | 0.0001794 | 0.0007745 |
| 2 | 0.0016 | 0.0522 | -0.0124 | -0.0001115 | 0.0000770 | 0.0001332 |
| 3 | -0.0016 | 0.0522 | -0.0124 | -0.0001115 | -0.0000770 | -0.0001332 |
| 4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0004818 | -0.0001795 | -0.0007745 |
| 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0004817 | 0.0001780 | 0.0007742 |
| 6 | 0.0016 | 0.0522 | -0.0123 | -0.0001117 | 0.0000765 | 0.0001333 |
| 7 | -0.0016 | 0.0522 | -0.0123 | -0.0001117 | -0.0000765 | -0.0001333 |
| 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0004817 | -0.0001780 | -0.0007742 |

---

100PE007.POR

C

| C NNODS | NELEM | NAPOS | NMATE | GERNO | GEREL | NMASC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| C NLIFI | MOFIS | NLIGE | NFACA | NITER | TOLER | RESUL |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 400 | 1E-6 | 1 |
| C DINAM | ITEMP | TEMPO | NEWMA | AMORT | LAMBM | LAMBK |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

C

| C | COORDEN. | | ORIGEM | GERAR | | COORDENADA | | LIMITE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C NO | X | Y | Z | NNODS | INCREM. | X | Y | Z |
| 1 | 0.0 | 30.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 69.28 | 30.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 130.72 | 30.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 200.00 | 30.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 69.28 | 0.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 130.72 | 0.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 200.00 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

C

| C NO VINC | REST X | REST Y | REST Z | ROT X | ROT Y | ROT Z |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

C

| C MAT. | MOD. ELAST. LONG. | MOD. ELAST. TRANSV. | PESO ESPEC. |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.32E6 | 1E5 | 0 |

C

| C | ! | SECAO | | | | ! | INCREM. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CEL | NOI | NOF | AREA | IXX | IYY | IZZ | ANG | TM | EG | NE | NI | NF |
| 1 | 1 | 2 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 2 | 3 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 3 | 3 | 4 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 4 | 5 | 6 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 5 | 6 | 7 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 7 | 2 | 6 | 0.1 | 1.66 | 0.05 | .050 | 0 | 1 | | | | |
| 8 | 3 | 7 | 0.1 | 1.66 | 0.05 | .050 | 0 | 1 | | | | |

C

| C | FASE 1 | NNCAR | GERCA | TEMAC |
|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 0 | 1 |

| C A | B | C | D | E | F | G | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

C

| C NO | FOR X | FOR Y | FOR Z | MOM XX | MOM YY | MOM ZZ | G.NNCAR | INCR. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0 | -75.60 | 0 | 0 | 0 | | |
| 3 | 0 | 0 | -75.60 | 0 | 0 | 0 | | |
| 6 | 0 | 0.07560 | -75.60 | 0 | 0 | 0 | | |
| 7 | 0 | 0.07560 | -75.60 | 0 | 0 | 0 | | |

---

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA - FEIS - UNESP
PROGRAMA : DINPORTE VERSAO : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100 PORTICO : 007

TITULO : 100PE007.POR

RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO 1

DESLOCAMENTOS NODAIS

| NO | DES X | DES Y | DES Z | ROT XX | ROT YY | ROT ZZ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0010985 | 0.0002123 | 0.0017695 |
| 2 | 0.0019 | 0.1186 | -0.0147 | -0.0002495 | 0.0000910 | 0.0002990 |
| 3 | -0.0019 | 0.1186 | -0.0147 | -0.0002495 | -0.0000909 | -0.0002990 |
| 4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0010985 | -0.0002124 | -0.0017696 |
| 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0010982 | 0.0002092 | 0.0017679 |
| 6 | 0.0019 | 0.1186 | -0.0145 | -0.0002505 | 0.0000898 | 0.0002998 |
| 7 | -0.0019 | 0.1186 | -0.0145 | -0.0002505 | -0.0000897 | -0.0002998 |
| 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0010982 | -0.0002093 | -0.0017680 |

## 100PE008.POR

```
C
C      NNODS     NELEM     NAPOS     NMATE     GERNO     GEREL     NMASC
             8         8         4         1         0         0         0
C      NLIFI     MOFIS     NLIGE     NFACA     NITER     TOLER     RESUL
             0         0         1         1       400     1E-6         1
C      DINAM     ITEMP     TEMPO     NEWMA     AMORT     LAMBM     LAMBK
             0         1         1         0         0         0         0
C
C         COORDEN.    ORIGEM     GERAR          COORDENADA          LIMITE
C NO      X         Y         Z     NNODS INCREM.      X         Y         Z
  1     0.0      30.0       0.0         0       0         0         0         0
  2    69.28     30.0      40.0         0       0         0         0         0
  3   130.72     30.0      40.0         0       0         0         0         0
  4   200.00     30.0       0.0         0       0         0         0         0
  5     0.0       0.0       0.0         0       0         0         0         0
  6    69.28      0.0      40.0         0       0         0         0         0
  7   130.72      0.0      40.0         0       0         0         0         0
  8   200.00      0.0       0.0         0       0         0         0         0
C
C NO VINC     REST X     REST Y     REST Z     ROT X     ROT Y     ROT Z
          1          1          1          1         0         0         0
          4          1          1          1         0         0         0
          5          1          1          1         0         0         0
          8          1          1          1         0         0         0
C
C  MAT.     MOD. ELAST. LONG.     MOD. ELAST. TRANSV.     PESO ESPEC.
      1                4.32E6                   1E5               0
C
C           !                SECAO                    !     INCREM.     !
CEL NOI NOF    AREA     IXX      IYY      IZZ     ANG  TM  EG  NE  NI  NF
  1   1   2     0.5     4.15     0.40     .133      0   1
  2   2   3     0.5     4.15     0.40     .133      0   1
  3   3   4     0.5     4.15     0.40     .133      0   1
  4   5   6     0.5     4.15     0.40     .133      0   1
  5   6   7     0.5     4.15     0.40     .133      0   1
  6   7   8     0.5     4.15     0.40     .133      0   1
  7   2   6     0.1     1.66     0.05     .050      0   1
  8   3   7     0.1     1.66     0.05     .050      0   1
C
C            FASE 1              NNCAR              GERCA              TEMAC
                                     4                  0                  1
C       A         B         C         D         E         F         G         X         Y
        1         0         0         0         0         0         0         0         0
C
C  NO   FOR X   FOR Y   FOR Z   MOM XX   MOM YY   MOM ZZ   G.NNCAR   INCR.
    2       0       0    -77.76     0        0        0
```

unesp

```
    3       0       0     -77.76     0        0        0
    6       0   0.07776   -77.76     0        0        0
    7       0   0.07776   -77.76     0        0        0

-------------------------------------------------------------------
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA   -    FEIS    -    UNESP
PROGRAMA : DINPORTE                              VERSAO   : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100                                        PORTICO : 008

TITULO : 100PE008.POR
-------------------------------------------------------------------

                RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO  1

-------------------------------------------------------------------
DESLOCAMENTOS NODAIS

 NO      DES X      DES Y      DES Z      ROT XX      ROT YY      ROT ZZ

  1     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0013954   0.0002203   0.0022489
  2     0.0019     0.1506    -0.0153  -0.0003156   0.0000944   0.0003786
  3    -0.0019     0.1506    -0.0153  -0.0003156  -0.0000943  -0.0003786
  4     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0013955  -0.0002205  -0.0022489
  5     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0013949   0.0002163   0.0022463
  6     0.0019     0.1506    -0.0150  -0.0003172   0.0000929   0.0003798
  7    -0.0019     0.1506    -0.0150  -0.0003172  -0.0000928  -0.0003798
  8     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0013949  -0.0002165  -0.0022463
-------------------------------------------------------------------
```

## 100PE009.POR

```
C
C      NNODS     NELEM     NAPOS     NMATE     GERNO     GEREL     NMASC
           8         8         4         1         0         0         0
C      NLIFI     MOFIS     NLIGE     NFACA     NITER     TOLER     RESUL
           0         0         1         1       400      1E-6         1
C      DINAM     ITEMP     TEMPO     NEWMA     AMORT     LAMBM     LAMBK
           0         1         1         0         0         0         0
C
C        COORDEN.    ORIGEM     GERAR          COORDENADA          LIMITE
C NO     X         Y         Z      NNODS INCREM.      X         Y         Z
  1     0.0      30.0       0.0        0        0        0         0         0
  2    69.28     30.0      40.0        0        0        0         0         0
  3   130.72     30.0      40.0        0        0        0         0         0
  4   200.00     30.0       0.0        0        0        0         0         0
  5     0.0       0.0       0.0        0        0        0         0         0
  6    69.28      0.0      40.0        0        0        0         0         0
  7   130.72      0.0      40.0        0        0        0         0         0
  8   200.00      0.0       0.0        0        0        0         0         0
C
C NO VINC     REST X     REST Y     REST Z     ROT X      ROT Y      ROT Z
          1          1          1          1          0          0          0
          4          1          1          1          0          0          0
          5          1          1          1          0          0          0
          8          1          1          1          0          0          0
C
C  MAT.     MOD. ELAST. LONG.     MOD. ELAST. TRANSV.     PESO ESPEC.
      1                4.32E6                    1E5               0
C
C           !                SECAO                  !     INCREM.     !
CEL NOI NOF    AREA      IXX       IYY       IZZ     ANG  TM  EG  NE  NI  NF
  1   1   2     0.5      4.15      0.40      .133       0   1
  2   2   3     0.5      4.15      0.40      .133       0   1
  3   3   4     0.5      4.15      0.40      .133       0   1
  4   5   6     0.5      4.15      0.40      .133       0   1
  5   6   7     0.5      4.15      0.40      .133       0   1
  6   7   8     0.5      4.15      0.40      .133       0   1
```

```
   7   2   6    0.1   1.66   0.05   .050      0   1
   8   3   7    0.1   1.66   0.05   .050      0   1
C
C              FASE 1              NNCAR             GERCA             TEMAC
                                      4                 0                 1
C       A       B       C       D       E       F       G       X       Y
        1       0       0       0       0       0       0       0       0
C
C  NO   FOR X   FOR Y   FOR Z   MOM XX   MOM YY   MOM ZZ  G.NNCAR   INCR.
     2       0       0  -79.92        0        0        0
     3       0       0  -79.92        0        0        0
     6       0 0.07992  -79.92        0        0        0
     7       0 0.07992  -79.92        0        0        0
```

---

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA - FEIS - UNESP
PROGRAMA : DINPORTE VERSAO : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100 PORTICO : 009

TITULO : 100PE009.POR

---

RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO 1

---

DESLOCAMENTOS NODAIS

| NO | DES X | DES Y | DES Z | ROT XX | ROT YY | ROT ZZ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0018742 | 0.0002304 | 0.0030221 |
| 2 | 0.0020 | 0.2021 | -0.0160 | -0.0004219 | 0.0000986 | 0.0005066 |
| 3 | -0.0020 | 0.2021 | -0.0160 | -0.0004219 | -0.0000984 | -0.0005066 |
| 4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0018743 | -0.0002307 | -0.0030221 |
| 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0018732 | 0.0002250 | 0.0030174 |
| 6 | 0.0020 | 0.2021 | -0.0156 | -0.0004249 | 0.0000966 | 0.0005088 |
| 7 | -0.0020 | 0.2021 | -0.0156 | -0.0004249 | -0.0000964 | -0.0005088 |
| 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0018733 | -0.0002253 | -0.0030174 |

---

## 100PE010.POR

```
C
C      NNODS     NELEM     NAPOS     NMATE     GERNO     GEREL     NMASC
           8         8         4         1         0         0         0
C      NLIFI     MOFIS     NLIGE     NFACA     NITER     TOLER     RESUL
           0         0         1         1       400      1E-6         1
C      DINAM     ITEMP     TEMPO     NEWMA     AMORT     LAMBM     LAMBK
           0         1         1         0         0         0         0
C
C         COORDEN.    ORIGEM     GERAR          COORDENADA          LIMITE
C NO      X         Y         Z      NNODS INCREM.      X         Y         Z
  1     0.0      30.0       0.0        0        0        0         0         0
  2   69.28      30.0      40.0        0        0        0         0         0
  3  130.72      30.0      40.0        0        0        0         0         0
  4  200.00      30.0       0.0        0        0        0         0         0
  5     0.0       0.0       0.0        0        0        0         0         0
  6   69.28       0.0      40.0        0        0        0         0         0
  7  130.72       0.0      40.0        0        0        0         0         0
  8  200.00       0.0       0.0        0        0        0         0         0
C
C NO VINC     REST X     REST Y     REST Z     ROT X      ROT Y      ROT Z
          1          1          1          1         0          0          0
          4          1          1          1         0          0          0
          5          1          1          1         0          0          0
          8          1          1          1         0          0          0
C
C  MAT.     MOD. ELAST. LONG.     MOD. ELAST. TRANSV.     PESO ESPEC.
```

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

```
      1                4.32E6                          1E5                0
C
C            !                      SECAO                       !      INCREM.     !
CEL NOI NOF    AREA      IXX       IYY       IZZ     ANG   TM   EG   NE   NI   NF
  1   1   2     0.5     4.15      0.40      .133       0    1
  2   2   3     0.5     4.15      0.40      .133       0    1
  3   3   4     0.5     4.15      0.40      .133       0    1
  4   5   6     0.5     4.15      0.40      .133       0    1
  5   6   7     0.5     4.15      0.40      .133       0    1
  6   7   8     0.5     4.15      0.40      .133       0    1
  7   2   6     0.1     1.66      0.05      .050       0    1
  8   3   7     0.1     1.66      0.05      .050       0    1
C
C             FASE 1              NNCAR              GERCA              TEMAC
                                     4                  0                  1
C       A         B         C         D         E         F         G         X         Y
        1         0         0         0         0         0         0         0         0
C
C  NO   FOR X   FOR Y   FOR Z   MOM XX   MOM YY   MOM ZZ   G.NNCAR   INCR.
     2       0       0  -82.08        0        0        0
     3       0       0  -82.08        0        0        0
     6       0 0.08208  -82.08        0        0        0
     7       0 0.08208  -82.08        0        0        0

-------------------------------------------------------------------------
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA   -    FEIS    -    UNESP
PROGRAMA : DINPORTE                              VERSAO   : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100                                          PORTICO : 010

TITULO : 100PE010.POR
-------------------------------------------------------------------------

                    RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO  1

-------------------------------------------------------------------------
DESLOCAMENTOS NODAIS

 NO      DES X      DES Y      DES Z      ROT XX      ROT YY      ROT ZZ

  1     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0027754   0.0002466   0.0044780
  2     0.0020     0.2990    -0.0172  -0.0006213   0.0001056   0.0007471
  3    -0.0020     0.2990    -0.0172  -0.0006213  -0.0001052  -0.0007471
  4     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0027755  -0.0002474  -0.0044781
  5     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0027733   0.0002386   0.0044677
  6     0.0020     0.2990    -0.0166  -0.0006279   0.0001027   0.0007518
  7    -0.0020     0.2990    -0.0166  -0.0006279  -0.0001023  -0.0007518
  8     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0027733  -0.0002394  -0.0044677
-------------------------------------------------------------------------
```

## 100PE011.POR

```
C
C      NNODS     NELEM     NAPOS     NMATE     GERNO     GEREL     NMASC
           8         8         4         1         0         0         0
C      NLIFI     MOFIS     NLIGE     NFACA     NITER     TOLER     RESUL
           0         0         1         1       400      1E-6         1
C      DINAM     ITEMP     TEMPO     NEWMA     AMORT     LAMBM     LAMBK
           0         1         1         0         0         0         0
C
C        COORDEN.    ORIGEM     GERAR          COORDENADA          LIMITE
C NO     X         Y         Z      NNODS INCREM.     X         Y         Z
  1    0.0      30.0       0.0        0       0         0         0         0
  2   69.28     30.0      40.0        0       0         0         0         0
  3  130.72     30.0      40.0        0       0         0         0         0
  4  200.00     30.0       0.0        0       0         0         0         0
  5    0.0       0.0       0.0        0       0         0         0         0
  6   69.28      0.0      40.0        0       0         0         0         0
```

```
   7  130.72     0.0     40.0      0       0        0        0        0
   8  200.00     0.0      0.0      0       0        0        0        0
C
C NO VINC     REST X     REST Y     REST Z     ROT X     ROT Y     ROT Z
         1          1          1          1         0         0         0
         4          1          1          1         0         0         0
         5          1          1          1         0         0         0
         8          1          1          1         0         0         0
C
C  MAT.     MOD. ELAST. LONG.     MOD. ELAST. TRANSV.     PESO ESPEC.
      1                4.32E6                    1E5                0
C
C           !                  SECAO                    !     INCREM.    !
CEL NOI NOF    AREA     IXX      IYY      IZZ    ANG  TM  EG  NE  NI  NF
  1   1   2     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  2   2   3     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  3   3   4     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  4   5   6     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  5   6   7     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  6   7   8     0.5    4.15     0.40     .133      0   1
  7   2   6     0.1    1.66     0.05     .050      0   1
  8   3   7     0.1    1.66     0.05     .050      0   1
C
C           FASE 1              NNCAR              GERCA              TEMAC
                                    4                  0                  1
C      A         B         C         D         E         F         G         X         Y
       1         0         0         0         0         0         0         0         0
C
C  NO   FOR X   FOR Y   FOR Z   MOM XX   MOM YY   MOM ZZ  G.NNCAR  INCR.
    2       0       0  -82.944        0        0        0
    3       0       0  -82.944        0        0        0
    6       0 0.082944 -82.944        0        0        0
    7       0 0.082944 -82.944        0        0        0
```

---

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA - FEIS - UNESP
PROGRAMA : DINPORTE VERSAO : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100 PORTICO : 011

TITULO : 100PE011.POR

---

RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO 1

---

DESLOCAMENTOS NODAIS

| NO | DES X | DES Y | DES Z | ROT XX | ROT YY | ROT ZZ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0034061 | 0.0002582 | 0.0054974 |
| 2 | 0.0021 | 0.3668 | -0.0180 | -0.0007604 | 0.0001107 | 0.0009150 |
| 3 | -0.0021 | 0.3668 | -0.0181 | -0.0007605 | -0.0001100 | -0.0009150 |
| 4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0034062 | -0.0002595 | -0.0054974 |
| 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0034028 | 0.0002484 | 0.0054817 |
| 6 | 0.0020 | 0.3668 | -0.0174 | -0.0007703 | 0.0001071 | 0.0009221 |
| 7 | -0.0020 | 0.3668 | -0.0174 | -0.0007703 | -0.0001064 | -0.0009221 |
| 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0034029 | -0.0002497 | -0.0054818 |

---

## 100PE012.POR

```
C
C      NNODS     NELEM     NAPOS     NMATE     GERNO     GEREL     NMASC
           8         8         4         1         0         0         0
C      NLIFI     MOFIS     NLIGE     NFACA     NITER     TOLER     RESUL
           0         0         1         1       400      1E-6         1
C      DINAM     ITEMP     TEMPO     NEWMA     AMORT     LAMBM     LAMBK
```

```
          0        1        1        0        0        0        0
C
C        COORDEN.    ORIGEM    GERAR          COORDENADA          LIMITE
C NO     X        Y        Z    NNODS INCREM.     X        Y        Z
  1     0.0     30.0      0.0      0        0        0        0        0
  2   69.28     30.0     40.0      0        0        0        0        0
  3  130.72     30.0     40.0      0        0        0        0        0
  4  200.00     30.0      0.0      0        0        0        0        0
  5     0.0      0.0      0.0      0        0        0        0        0
  6   69.28      0.0     40.0      0        0        0        0        0
  7  130.72      0.0     40.0      0        0        0        0        0
  8  200.00      0.0      0.0      0        0        0        0        0
C
C NO VINC     REST X     REST Y     REST Z     ROT X     ROT Y     ROT Z
         1          1          1          1         0         0         0
         4          1          1          1         0         0         0
         5          1          1          1         0         0         0
         8          1          1          1         0         0         0
C
C  MAT.     MOD. ELAST. LONG.     MOD. ELAST. TRANSV.     PESO ESPEC.
     1                 4.32E6                   1E5               0
C
C           !                SECAO                    !     INCREM.     !
CEL NOI NOF    AREA     IXX      IYY      IZZ     ANG  TM  EG  NE  NI  NF
  1   1   2     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  2   2   3     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  3   3   4     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  4   5   6     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  5   6   7     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  6   7   8     0.5    4.15     0.40     .133       0   1
  7   2   6     0.1    1.66     0.05     .050       0   1
  8   3   7     0.1    1.66     0.05     .050       0   1
C
C            FASE 1          NNCAR          GERCA          TEMAC
                                 4              0              3
C       A        B        C        D        E        F        G        X        Y
        1        0        0        0        0        0        0        0        0
C
C  NO   FOR X   FOR Y   FOR Z   MOM XX   MOM YY   MOM ZZ  G.NNCAR  INCR.
    2       0       0  -83.808        0        0        0
    3       0       0  -83.808        0        0        0
    6       0 0.083808 -83.808        0        0        0
    7       0 0.083808 -83.808        0        0        0

------------------------------------------------------------------------
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA   -    FEIS    -    UNESP
PROGRAMA : DINPORTE                              VERSAO   : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100                                          PORTICO : 012

TITULO : 100PE012.POR
------------------------------------------------------------------------

                  RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO  1

------------------------------------------------------------------------
DESLOCAMENTOS NODAIS

 NO      DES X      DES Y      DES Z      ROT XX      ROT YY      ROT ZZ

  1     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0043803   0.0002781   0.0070725
  2     0.0021     0.4715    -0.0195  -0.0009746   0.0001195   0.0011738
  3    -0.0021     0.4715    -0.0196  -0.0009746  -0.0001183  -0.0011737
  4     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0043804  -0.0002803  -0.0070726
  5     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0043748   0.0002655   0.0070467
  6     0.0020     0.4715    -0.0186  -0.0009908   0.0001148   0.0011856
  7    -0.0021     0.4715    -0.0187  -0.0009908  -0.0001137  -0.0011855
  8     0.0000     0.0000     0.0000  -0.0043749  -0.0002677  -0.0070467
```

---

100PE013.POR

C

| C | NNODS | NELEM | NAPOS | NMATE | GERNO | GEREL | NMASC |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 8 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| C | NLIFI | MOFIS | NLIGE | NFACA | NITER | TOLER | RESUL |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 400 | 1E-6 | 1 |
| C | DINAM | ITEMP | TEMPO | NEWMA | AMORT | LAMBM | LAMBK |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

C

| C | COORDEN. | ORIGEM | | GERAR | | COORDENADA | | LIMITE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C NO | X | Y | Z | NNODS | INCREM. | X | Y | Z |
| 1 | 0.0 | 30.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 69.28 | 30.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 130.72 | 30.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 200.00 | 30.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 69.28 | 0.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 130.72 | 0.0 | 40.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 200.00 | 0.0 | 0.0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

C

| C NO VINC | REST X | REST Y | REST Z | ROT X | ROT Y | ROT Z |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

C

| C MAT. | MOD. ELAST. LONG. | MOD. ELAST. TRANSV. | PESO ESPEC. |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.32E6 | 1E5 | 0 |

C

| C | ! | | SECAO | | | | ! | INCREM. | | | ! |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CEL | NOI | NOF | AREA | IXX | IYY | IZZ | ANG | TM | EG | NE | NI | NF |
| 1 | 1 | 2 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 2 | 3 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 3 | 3 | 4 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 4 | 5 | 6 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 5 | 6 | 7 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 6 | 7 | 8 | 0.5 | 4.15 | 0.40 | .133 | 0 | 1 | | | | |
| 7 | 2 | 6 | 0.1 | 1.66 | 0.05 | .050 | 0 | 1 | | | | |
| 8 | 3 | 7 | 0.1 | 1.66 | 0.05 | .050 | 0 | 1 | | | | |

C

| C | FASE 1 | NNCAR | GERCA | TEMAC |
|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 0 | 1 |

| C | A | B | C | D | E | F | G | X | Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

C

| C NO | FOR X | FOR Y | FOR Z | MOM XX | MOM YY | MOM ZZ | G.NNCAR | INCR. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | 0 | -84.672 | 0 | 0 | 0 | | |
| 3 | 0 | 0 | -84.672 | 0 | 0 | 0 | | |
| 6 | 0 | 0.084672 | -84.672 | 0 | 0 | 0 | | |
| 7 | 0 | 0.084672 | -84.672 | 0 | 0 | 0 | | |

---

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA - FEIS - UNESP
PROGRAMA : DINPORTE VERSAO : 01/01
Eng. Rogerio de Oliveira Rodrigues

PROJETO : 100 PORTICO : 013

TITULO : 100PE013.POR

---

RESULTADOS FINAIS DO INTERVALO 1

---

DESLOCAMENTOS NODAIS

| NO | DES X | DES Y | DES Z | ROT XX | ROT YY | ROT ZZ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0060822 | 0.0003204 | 0.0098264 |
| 2 | 0.0021 | 0.6544 | -0.0227 | -0.0013466 | 0.0001384 | 0.0016243 |
| 3 | -0.0022 | 0.6544 | -0.0228 | -0.0013467 | -0.0001358 | -0.0016241 |
| 4 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0060825 | -0.0003255 | -0.0098265 |
| 5 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0060715 | 0.0003030 | 0.0097765 |
| 6 | 0.0020 | 0.6544 | -0.0215 | -0.0013778 | 0.0001319 | 0.0016469 |
| 7 | -0.0021 | 0.6544 | -0.0216 | -0.0013780 | -0.0001295 | -0.0016468 |
| 8 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | -0.0060718 | -0.0003078 | -0.0097766 |