

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

GIULIA VALVANO DO PRADO RIBEIRO

Astronomia no Ensino da Geometria : Sugestões e Análises de Aplicações

Guaratinguetá

2018

Giulia Valvano do Prado Ribeiro

Astronomia no Ensino da Geometria : Sugestões e Análises de Aplicações

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática .

Orientador: Profº Dr. Othon Cabo Winter

Guaratinguetá

2018

R484a	Ribeiro, Giulia Valvano do Prado Astronomia no ensino da geometria: sugestões e análises de aplicações / Giulia Valvano do Prado Ribeiro – Guaratinguetá, 2018. 62 f.: il. Bibliografia: f. 59-62 Trabalho de Graduação em licenciatura em Matemática – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018. Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter 1. Geometria - Estudo e ensino. 2. Astronomia. 3. Matemática - Estudo e ensino. I. Título CDU 514:371.3
-------	--

Pâmella Benevides Gonçalves
Bibliotecária/CRB-8/9203

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

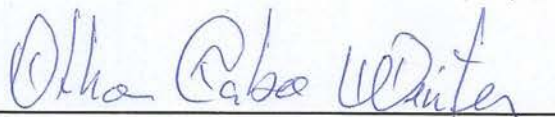
GIULIA VALVANO DO PRADO RIBEIRO

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA "

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Profª Drª. VIVIAN MARTINS GOMES
Coordenadora

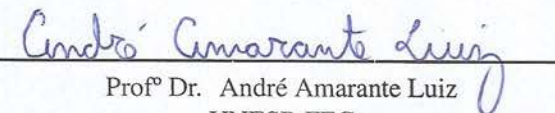
BANCA EXAMINADORA:



Profº Dr. Othon Cabo Winter
Orientador/UNESP-FEG



Profº Dr. Rafael Sfair de Oliveira
UNESP-FEG



Profº Dr. André Amarante Luiz
UNESP-FEG

Outubro, 2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Edson e Juliene, e padrinhos, Eliete e Antonio, pelo apoio, incentivo e suporte necessários ao longo da minha jornada acadêmica.

Aos meus professores, que participaram da minha trajetória na graduação, em especial ao Profº Dr. Othon Cabo Winter, meu orientador, pela dedicação, incentivo e confiança desde o início.

Aos meus amigos e colegas, em especial à minha amiga Melina Weiger que me apoiou e auxiliou em meus trabalhos universitários.

Agradeço a todos que, de alguma maneira, participaram e ajudaram-me nesse percurso acadêmico.

“Magic’s just science that we don’t understand yet.”
(Arthur C. Clarke)

RESUMO

O presente trabalho tem o intuito de investigar e entender aplicações da astronomia em problemas de geometria. Além de auxiliar e incentivar os educadores a adotarem essas atividades em sala de aula, para que os discentes vislumbrem a aplicabilidade dos tópicos trabalhados, evitando questionamentos como "onde isso é aplicado?" e "pra que serve isso?". Para tal, a pergunta que norteou este trabalho é: Como a geometria, mediante ao seu ensino, pode se conectar com a astronomia? Busco responde-la por meio de uma análise crítica de exercícios propostos em duas obras, sendo elas "Aplicação da Astronomia no ensino da Matemática" escrita por Angelo Cezar Lucizani e "Aplicações de Astronomia no ensino de Matemática na Educação Básica" por Acenilso Lima de Araújo. Por intermédio dessas obras, procuro compreender como a contextualização astronômica é utilizada em atividades de geometria e quais conteúdos são abordados em suas resoluções.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria. Astronomia. Aplicações.

ABSTRACT

The aim of this study was to investigate and understand applications of astronomy in problems of geometry. Besides help and encourage educators to adopt these activities in the classroom, for students can see the applicability of these topics, avoiding questions such as "where is this applied?" and "what's its purpose?". For this, the question that guided this study is: How geometry, through its teaching, can connect with astronomy? I try to answer it through an analysis of exercises proposed in two works, being "Application of Astronomy in Mathematics Teaching" written by Angelo Cezar Lucizani and "Astronomy Applications in Mathematics Education in Basic Education" by Acenilso Lima de Araújo. Through these studies, I try to understand how the astronomical contextualization is used in geometry activities and what contents are approached in their resolutions.

KEYWORDS: Geometry. Astronomy. Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Quadro 1	Análise dos problemas propostos por Lucizani (2016) e Araújo (2013)	24
Figura 1	Esquema da configuração Lua-Terra-Sol para a estimativa da distância Terra-Sol, descrito nos problemas 1 e 4.	28
Figura 2	Esquematização errônea da configuração Lua-Terra-Sol para a estimativa da distância Terra-Sol, descrita no problema 1.	30
Figura 3	Imagem de Mercúrio registrada pela sonda Messenger.	32
Figura 4	Imagem de Vênus registrada pela sonda Magellan.	32
Figura 5	Imagem da Terra registrada pela missão Apollo 17.	33
Figura 6	Imagem de Marte registrada pelo Telescópio Hubble.	33
Figura 7	Imagem de Júpiter e de duas de suas luas, Io e Europa, registrada pela sonda Voyager I.	34
Figura 8	Imagem de Saturno registrada pela sonda Cassini.	34
Figura 9	Imagem de Urano registrada pelo telescópio Hubble.	35
Figura 10	Representação da inclinação do eixo de giro de Urano.	35
Figura 11	Imagem de Netuno e uma de suas luas, Tritão, pela sonda Voyager 2.	36
Figura 12	Composição de imagens mostrando Caronte (à esquerda) e Plutão (à direita).	37
Figura 13	Representação do Sistema Solar (ilustração).	37
Quadro 2	Comparação entre distância ao Sol e período orbital dos planetas.	37
Figura 14	Ilustração das conjunções inferior e superior (respectivamente) dos planetas inferiores.	38
Figura 15	Ilustração das elongações máximas ocidental e oriental (respectivamente) dos planetas inferiores.	39
Figura 16	Ilustração das posições de oposição e conjunção (respectivamente) dos planetas superiores.	39
Figura 17	Ilustração das posições de quadratura ocidental e oriental (respectivamente) dos planetas superiores.	40
Figura 18	Representação da configuração da Terra e dos raios solares no Solstício.	41
Figura 19	Representação da configuração da Terra e dos raios solares no Equinócio.	41
Figura 20	Representação da configuração da Terra e do Sol ao longo das Estações do Ano.	42
Figura 21	Representação das Fases da Lua (vista superior).	43
Figura 22	Plano das órbitas entre a Lua e a Terra e a Terra e o Sol.	43
Figura 23	Representação do Eclipse Solar.	44
Figura 24	Representação do Eclipse Lunar.	44
Figura 25	Representação da Terra, do Sol e da Lua em fase Quarto-Crescente.	46
Figura 26	Representação da Terra, do Sol e da Lua em fase Quarto-Crescente e Quarto-Minguante.	47
Figura 27	Modelo utilizado por Aristarco para estimar a distância Terra-Sol.	47

Figura 28	Representação da problemática observada por Eratóstenes, que para fins didáticos está fora de escala.	49
Figura 29	Esquema da configuração da Lua, da Terra e do Sol em um eclipse lunar, que para fins didáticos está fora de escala.	50
Figura 30	Esquema da configuração da Terra-Lua-Sol	52
Figura 31	Representação da posição de máxima elongação de Vênus.	54
Figura 32	Esquema representando as posições de oposição e quadratura oriental de Marte.	55

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS	12
3	CONTEXTUALIZAÇÃO DA LITERATURA	13
3.1	Astronomia no auxílio do ensino da geometria	14
4	METODOLOGIA	17
4.1	Pesquisa Qualitativa	17
4.2	Hermenêutica	18
5	APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS	21
5.1	Apresentação	21
5.2	Análise de dados	23
5.2.1	Análise e Interpretação dos Problemas	24
6	PROPOSTA	31
6.1	Conhecimentos Prévios	31
6.1.1	Noções sobre O Sistema Solar	31
6.1.2	Configurações Planetárias	37
6.1.3	Estações do Ano	40
6.1.4	Fases da Lua e Eclipses	42
6.2	Reescrita dos Problemas	45
6.2.1	PROBLEMA 1:	45
6.2.2	PROBLEMA 2:	48
6.2.3	PROBLEMA 3:	50
6.2.4	PROBLEMA 4:	54
6.2.5	PROBLEMA 5:	55
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	REFERÊNCIAS	59

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho visa considerar a aplicabilidade da astronomia no ensino da matemática, além de motivar os professores a buscarem a utilização dos conceitos de astronomia no ensino e na aprendizagem da geometria.

Por tempos o ensino foi (e ainda é) tradicionalista, onde o professor é o ativo em sala de aula e repassa o conteúdo dos livros aos seus alunos, especialmente os conteúdos de matemática como, por exemplo, a geometria. Os assuntos da geometria tratados em aulas são sempre teóricos e cheios de fórmulas, sem nenhuma aplicação, gerando desinteresse nos educandos já que os mesmos não se sentem motivados a estudarem um conteúdo para o qual a aplicabilidade não seja clara. Nesse trabalho pretende-se indicar possibilidades de um ensino da geometria mediado por questões relacionadas a astronomia, por meio de exercícios que mostrem sua aplicação.

Desse modo, esse trabalho planeja contribuir para o cotidiano escolar, apresentando atividades para servirem de auxílio aos docentes, objetivando uma abordagem contextualizada em sala de aula. Considera-se, também, que ao expor modos de contextualizar situações geométricas por meio da astronomia se estará contribuindo para a compreensão de uma das indagações frequentes em sala de aula: “que aplicação tem isso?”.

Para tal, esse trabalho está organizado em sete capítulos com propósitos sequenciados e delineados para tornar a leitura compreensível. O capítulo dois apresenta os objetivos da pesquisa, tal qual a justificativa para fazê-lo. O capítulo seguinte é destinado a contextualização, onde busca-se expor alguns impasses encontrados no ensino da geometria, além da sua importância no desenvolvimento dos discentes. Ainda nesse capítulo, aponta-se algumas vantagens da aplicação entre a astronomia e a geometria e de como ambas auxiliam no ensino e aprendizagem dos alunos.

O quarto capítulo é dedicado à metodologia, na qual se busca elucidar a escolha pela pesquisa qualitativa empregando a abordagem hermenêutica. Esclarecendo o intuito da pesquisa qualitativa, que é expor qualidades de uma pesquisa em geral, tal qual a abordagem hermenêutica, que procura interpretar e traduzir obras e textos. Essa metodologia foi escolhida, pois se conciliou com o propósito desse trabalho que irá transcrever, explicar e interpretar atividades que utilizam de conceitos da astronomia para o ensino da geometria. As atividades foram eleitas a partir de dois trabalhos acadêmicos, um trabalho de conclusão de curso escrito por Angelo Cezar Lucizani cujo título é "Aplicação da Astronomia no Ensino da Matemática" e uma dissertação de mestrado defendida por Acenilso Lima de Araújo, intitulada, "Aplicação de Astronomia no Ensino de Matemática na Educação Básica".

No capítulo seguinte caracterizam-se as duas obras utilizadas para a análise das atividades presentes nesse trabalho. Ainda no quinto capítulo discorre-se a análise de dados, na qual se apresenta os enunciados dos problemas na íntegra, expondo os sentidos dos termos significativos de cada um deles. Diante disso, clarifica-se os objetivos e os conteúdos fundamentais para a compreensão e a resolução dos problemas apresentados.

No sexto capítulo, apresentam-se noções de conceitos de astronomia necessários para a interpretação e resolução de cada problema. Posteriormente, sugerem-se rescritas dos enunciados (anteriormente

analisados), bem como a resolução de cada um deles, com o intuito de elucidar os propósitos e objetivos dos exercícios.

Na conclusão, retoma-se a problemática inicial e associa-se o compreendido na análise dos dados tendo em consideração a questão norteadora deste trabalho. Ademais, aspira-se elucidar o modo como a astronomia foi associada com a geometria na elaboração dos problemas.

2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS

O presente trabalho tem por objetivo investigar a relação existente entre a astronomia e a matemática, bem como estudar as aplicações da astronomia no ensino da geometria, buscando compreender “Como a geometria, mediante ao seu ensino, pode se conectar com a astronomia?”, que é a questão norteadora deste trabalho. Por meio de uma análise crítica e hermenêutica de propostas de ensino, busca-se interpretar e assimilar os conteúdos apresentados nos trabalhos considerados.

Escolheu-se esse tema em decorrência do aparente desinteresse no ensino da geometria, de tal forma que os alunos, ao se formarem, possuem apenas noções elementares da mesma, segundo constata Pavanello (1993). Esse problema pode ter sido ocasionado pela carência de preparo ou confiança dos docentes em relação ao conteúdo de geometria, ou até mesmo porque alguns educadores ainda insistem em lecionar os conceitos através de fórmulas e propriedades; desta forma, os discentes carecem das abstrações necessárias para a aprendizagem dessa disciplina, além de não vislumbrarem a importância e aplicabilidade da geometria, conforme afirma a autora.

Desse modo esse trabalho irá utilizar-se da abordagem hermenêutica para analisar, interpretar e traduzir os conteúdos, ideias e aplicações apresentadas nas propostas de ensino aqui analisadas, visando incentivar os professores a utilizarem a ideia de contextualização e aplicabilidade em suas aulas, tornando-as mais chamativas aos olhos de seus alunos.

3 CONTEXTUALIZAÇÃO DA LITERATURA

Neste capítulo busca-se apresentar alguns autores que abordam o ensino de geometria, sua relevância e dificuldades, e como a astronomia pode contribuir para aprendizagem matemática.

Para Pavanello (2004), a geometria é um campo proficiente no desenvolvimento de várias capacidades intelectuais exigidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC, 2000), dentre elas as habilidades de abstrair, generalizar e estruturar o pensamento, tanto no raciocínio, quanto em aplicações cotidianas. Esse desenvolvimento parte de um nível inferior, no qual o aluno reconhece figuras geométricas e, posteriormente, distingue as propriedades dessas figuras. Em seguida, é possível que ele relacione as figuras com suas respectivas propriedades e chegue em um nível de abstração do qual é capaz de partir de um pensamento sobre objetos e figuras, a um pensamento sobre suas relações e propriedades, ampliando sua capacidade de abstração. De acordo com Thom (1971), a geometria apresenta outro argumento para seu ensino, já que:

[...] a geometria é um intermediário natural e possivelmente insubstituível entre a língua e o formalismo matemático, no qual cada objeto é reduzido a um símbolo e o grupo de equivalências é reduzido à identidade do símbolo escrito consigo mesmo. Deste ponto de vista, o estágio do pensamento geométrico pode ser um estágio impossível de omitir no desenvolvimento normal da atividade racional do homem. (THOM, 1971, p. 698 apud PAVANELLO, 2004, p. 04)¹

Por meio de geometria o educando desenvolve a capacidade de conexão da linguagem textual para a matemática, e da matemática para a textual, possibilitando interpretar e desvendar problemáticas em sala de aula e em seu cotidiano. Outro fator importante sobre o ensino da geometria é o desenvolvimento das habilidades associadas à distância, espaço, forma, lógica, etc., permitindo que o aluno compreenda o mundo em que vive, além de estabelecer conexão entre a escola e seu dia a dia.

Comprovando esse pensamento, Pavanello (1993) destaca que a carência do ensino da geometria pode prejudicar a formação dos alunos, impossibilitando que eles desenvolvam processos e pensamentos necessários para resolver problemas matemáticos e de suas ações diárias. A autora ainda destaca que realçar apenas o ensino da álgebra conduz o aluno a execução mecânica de operações e atividades, já que as transformações algébricas são determinadas por um conjunto de leis que indicam o que se pode ou não fazer.

Indo ao encontro de tal pensamento, Barbosa (2003) ratifica que sem o estudo da geometria os discentes não desenvolvem a capacidade de análise geométrica e o raciocínio visual necessário em problemas da matemática e do cotidiano. Sendo assim os alunos teriam uma fraca habilidade de percepção espacial, tanto na matemática em questões relacionadas à medições e algoritmos, quanto na parte interpretativa e escrita dos exercícios. Ainda sobre a importância do ensino e aprendizagem da geometria, Barbosa (2003) afirma que "sem conhecer geometria, a leitura interpretativa do

¹ THOM, R. **Modern Mathematics an educational and philosophic error?**. American Scientist (59): 695-699; nov/dec 1971. apud PAVANELLO, R. M., Por que ensinar/aprender geometria? **VII Encontro Paulista de Educação Matemática**, 2004

mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida"(BARBOSA, 2003, p. 04).

Mas afinal por que o ensino de geometria vem sofrendo descaso, especialmente, nas escolas públicas?

Pavanello (1993) declara que o gradual descuido do ensino da geometria deve-se a autonomia que as escolas obtiveram através da Lei 5692/71, já que a mesma permite que cada instituição de ensino tome decisões sobre os programas das diferentes disciplinas. Unindo essa autonomia à insegurança de muitos professores de matemática em relação ao ensino da geometria, tal ramo acabou sendo deixado de lado. Todavia, os docentes que ainda continuam a ensiná-la optam por lecioná-la ao final do ano letivo, pois, mesmo que involuntariamente, poderiam utilizar a falta de tempo como desculpa pela não realização do currículo programado, afirma Pavanello (1993).

Corroborando com essa ideia, Barbosa (2003) relata que as duas principais causas para o eminente abandono do ensino da geometria são: a falta de conhecimento geométrico por parte dos educadores e a maneira errônea que os livros didáticos expõem os conteúdos da geometria, através de propriedades e definições. Ele narra que a ausência de conhecimento na área da geometria pode afetar a forma como o docente enxerga a importância e o poder que os conhecimentos geométricos desenvolvem em seus educandos. Logo é um dilema para esses professores lecionarem geometria, pois ou eles ensinam os alunos o conteúdo com incerteza, ou não os ensina.

A apreensão de ensinar geometria pode estar conectada com a dificuldade em lecioná-la, talvez pela falta de embasamento sobre o assunto, a falta de uma análise mais rigorosa dos conteúdos nos livros didáticos, ou ainda a difícil visualização (até mesmo para estudantes de cursos superiores); logo, a grande maioria dos professores decide priorizar outros ramos da matemática, como a álgebra e a aritmética, por exemplo, devido à complexidade da geometria. Embora Barbosa (2003) afirme que "ser bom conhecedor de aritmética ou de álgebra não é suficiente para resolver problemas de geometria"(BARBOSA, 2003, p. 04).

Como os educadores podem mudar essa perspectiva sobre o ensino da geometria? Como relacioná-las a temáticas aplicadas? Expõe-se no subcapítulo a seguir uma alternativa para os problemas apresentados, dialogando com autores que tratam tal temática.

3.1 ASTRONOMIA NO AUXÍLIO DO ENSINO DA GEOMETRIA

De acordo com Ávila (2010b), o ensino da matemática deve "[...] dotar o aluno do instrumental necessário no estudo das outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade" (ÁVILA, 2010b, p. 08). Ou seja, além da matemática desenvolver habilidades de raciocínio, lógica, percepção, investigação, experimentação, dedução e resolução de problemas, ela propicia aos alunos a compreensão e o desenvolvimento de competências para outras ciências, esses requisitos podem ser abordados pela interdisciplinaridade e contextualização, por exemplo.

Atualmente, a interdisciplinaridade e a contextualização vêm sendo muito discutidas nos ambientes escolares, pois com isso consegue-se apresentar aos alunos a relação existente entre as disciplinas vistas no currículo escolar e uma aplicação. Para Fazenda (1994),

[...] a metodologia interdisciplinar parte de uma liberdade científica, alicerça-se no diálogo e na colaboração, funda-se no desejo de inovar, de criar, de ir além e suscita-se na arte de pesquisar, não objetivando apenas a valorização tecnicoprodutiva ou material, mas sobretudo, possibilitando um acesso humano, no qual desenvolve a capacidade criativa de transformar a concreta realidade mundana e histórica numa aquisição maior de educação em seu sentido lato, humanizante e libertador do próprio sentido de ser no mundo. (FAZENDA, 1994, p. 69-70 apud BOVO, 2004, p. 02)²

Isso significa dizer que, ao optar por uma abordagem interdisciplinar e contextualizada, o educador possibilita aos seus alunos aulas variadas e aplicadas. A cada conteúdo estudado o educando vislumbra uma aplicabilidade real pautada em contextos que o estimulem a aprender e resolver as atividades propostas pelo professor. Todas essas situações, além de estimular o aprendizado, propiciam o desenvolvimento humano do discente, pois o permite contemplar a convergência entre as disciplinas e a harmonização do saber como um todo.

Uma possibilidade de realizar a integração e contextualização entre as disciplinas nas aulas é através da astronomia. Por exemplo, ela possibilita que o professor apresente aos alunos uma aplicabilidade do conteúdo visto em sala de aula, além de incentivar a curiosidade e a carreira em ciências. A narrativa de Ávila (2010a) nos lembra que a astronomia,

[...] oferece excelentes exemplos de aplicações simples e interessantes de fatos geométricos elementares, que muito bem respondem ao "pra que serve" do aluno, estimulando ainda mais sua curiosidade científica e ajudando-o a bem entender o papel da Matemática como instrumento da ciência aplicada. (ÁVILA, 2010a, p. 167)

Uma das ciências mais antigas desenvolvidas e praticadas pelo homem é a astronomia, que teve seu desenvolvimento auxiliado pela geometria desde seus primórdios. Freitas (2013) explana que há relatos do século VI a. C. relacionando conceitos de geometria, como ângulos e círculos para a compreensão de algumas concepções astronômicas, como por exemplo, as divisões do nosso calendário. Embora antiga, a astronomia é uma área que está em constante expansão, além de ter a vocação de despertar curiosidade nos alunos, como despertou a curiosidade de antepassados, e até mesmo nos professores, pois por intermédio de seu estudo, percebe-se a dimensão do universo em que se vive.

Ao usufruir da vocação natural da astronomia em estimular a curiosidade, os docentes afloram a busca por conhecimento em seus discentes. Caniato (2005) afirma que "certamente nenhum assunto pode ser tão rico e fértil de oportunidades para despertar o "apetite" de conhecimento quanto a astronomia" (CANIATO, 2005, p. 80). Mediante a esse "apetite", a astronomia continua influenciando e motivando o desenvolvimento de novas ciências e tecnologias. Corroborando com essa ideia Langui (2009) afirma,

² FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade: história, teoria e pesquisa**. Campinas: Papirus, 1994 apud BOVO, M. C. Interdisciplinaridade e transversalidade como dimensões da ação pedagógica. **Revista Urutágua**, v. 7, p. 1-12, 2004.

A astronomia faz parte, hoje, de nossa vida diária: as estações do ano, o suceder do dia e da noite, as fases da Lua, as divisões do calendário, a energia do Sol que sustenta a vida, além de muitos objetos utilizados resultantes do desenvolvimento da tecnologia aeroespacial, como por exemplo, as fraldas, o relógio digital, as câmeras digitais, a miniaturização de componente eletrônico, a engenharia de alimentos, etc. (LANGUI, 2009, p. 08 apud SCHWERTZ, 2013, p. 03)³

A presença cotidiana da astronomia e suas inúmeras aplicabilidades possibilitam ao docente um amplo campo de contextualização. Ao abordar essas situações, Souza e Roseira (2010) narram que a contextualização pode evocar no estudante a capacidade de assimilação entre um problema e seu contexto, além de correlacionar os assuntos estudados com a situação histórico-cultural do cenário abordado nas atividades. Ou seja, um exercício aplicado permite ao educando relacionar os conteúdos aprendidos na escola com seu cotidiano e aprimora-lo para a utilização em outras situações. Logo, um simples conteúdo transforma-se em uma ferramenta para a resolução de outros problemas.

Ao ensinar geometria com a integração e contextualização da astronomia o professor será capaz de desenvolver e expandir as habilidades necessárias para o desenvolvimento intelectual e social dos alunos, sendo elas a de interpretação, dedução, raciocínio lógico, aplicação, além de adquirir conhecimentos e conceitos sobre a astronomia e enriquecer sua capacidade de abstração, totalmente necessária para a compreensão da geometria. Vale ressaltar que em uma aula relacionando temáticas diferentes, o educador pode utilizar-se de uma abordagem histórica e ressaltar como as habilidades matemáticas e geométricas disponíveis naquele período auxiliavam nas descobertas dos astrônomos. Logo com essa união o aluno poderá obter uma formação para além do que é visto nos currículos escolares.

Dentro dessa perspectiva, esse trabalho tem o intuito de analisar as propostas de ensino feitas por Lucizani (2016) cujo o título é "Aplicação da Astronomia no Ensino da Matemática" e Araújo (2013) de título "Aplicação de Astronomia no Ensino de Matemática na Educação Básica". Por meio desses dois trabalhos, analisa-se as atividades apresentadas nessas obras por intermédio da abordagem hermenêutica; visando buscar nos exercícios propostos por eles a conexão e a contextualização entre a astronomia e a geometria. Além de propor mudanças nos enunciados dos problemas para torná-los mais explicativos e compreensíveis, quando necessário, de acordo com o período da educação básica que tais atividades podem ser empregadas.

³ LANGUI, R. **Astronomia nos anos iniciais do ensino fundamental: repensando a formação de professores**. Tese (Doutorado)—Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2009. apud SCHWERTZ, C. C., **Abordando conceitos de astronomia e geometria nos anos finais do ensino fundamental através da construção de um gnômom**, p. 1–22, 2013. Disponível em: <<http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/handle/123456789/1549>>.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo será abordado, de modo breve, o sentido e as ideias da pesquisa qualitativa utilizando uma abordagem hermenêutica, que possibilita a compreensão do sentido do que é investigado, ou seja, o ensino de matemática a partir de atividades que envolvam ideias e conceitos da astronomia.

4.1 PESQUISA QUALITATIVA

Segundo Bicudo (2012), pesquisar é uma maneira minuciosa de desenvolver, interrogar e/ou indagar uma questão, todavia não há um único modo considerado correto para se pesquisar. Ou seja, não há um único padrão de procedimentos a serem seguidos que certifiquem que a investigação seja bem-sucedida. Mas afinal, o que significa pesquisar qualitativamente?, conforme questiona a autora.

Neves (1996), diz que as pesquisas qualitativas,

[...] procuram seguir com rigor um plano previamente estabelecido (baseado em hipóteses claramente indicadas e variáveis que são objeto de definição operacional), a pesquisa qualitativa costuma ser direcionada, ao longo de seu desenvolvimento; além disso, não busca enumerar ou medir eventos e, geralmente, não emprega instrumental estatístico para análise de dados; seu foco de interesse é amplo e parte de uma perspectiva diferenciada da adotada pelos métodos quantitativos. Dela faz parte a obtenção de dados descritivos mediante contato direto e interativo do pesquisador com a situação objeto de estudo. Nas pesquisas qualitativas, é frequente que o pesquisador procure entender os fenômenos, segundo a perspectiva dos participantes da situação estudada e, a partir, daí situe sua interpretação dos fenômenos estudados. (NEVES, 1996, p. 01)

Diferente da pesquisa quantitativa, que separa o objeto de estudo do pesquisador, isto é, separa o que é passível de ser mensurado daquele que mensura seguindo um esquema previamente estabelecido para tratar dados estatísticos e obter resultados que podem ser estratificados para várias situações, a pesquisa qualitativa possui um envolvimento do pesquisador com o ato de pesquisar, sendo frequente que o pesquisador entenda aquilo que está investigando segundo a perspectiva dos sujeitos. Ou seja, nessa modalidade de pesquisa a qualidade é percebida, desdobrando-se na percepção do sujeito.

Mas, no contexto da matemática, seria possível o desenvolvimento de uma pesquisa na modalidade qualitativa? Ao pensar em pesquisa Matemática, em grande parte das vezes, pensa-se em demonstrações de teoremas embasados em axiomas ou outras demonstrações feitas anteriormente ou, ainda, na produção e investigação de algo inédito que siga um procedimento de provas ou demonstrações. Independentemente da situação, a pesquisa em Matemática é dependente de conceitos e axiomas.

Já em Educação, a pesquisa não possui uma certeza, tal qual a pesquisa em Matemática, pois envolve seres humanos, logo, há questões de cunho social, cultural e familiar que devem ser considerados. Para Almeida (2016), a pesquisa em educação pode ser interpretada como um processo político e

pedagógico que precisa considerar os costumes e contextos na qual o indivíduo está inserido. Dessa forma a pesquisa em Educação busca a compreensão e não demonstrações e aplicações. Conhecendo ambos os contextos ou possibilidades de se fazer pesquisa pode-se perguntar, conforme Bicudo (2012), o que significa pesquisar qualitativamente em Educação Matemática?

Pesquisar em Educação Matemática, de acordo com essa autora, exige a responsabilidade de conciliar a pesquisa em Educação, relativamente às questões pedagógicas, cognitivas e sociais, com os conceitos relativos à Matemática, ou seja, os conteúdos e áreas da matemática como no caso desse trabalho em que se pretende focar a geometria, mais precisamente o seu ensino. Com isso entende-se que para pesquisar em Educação Matemática, é preciso compreender a relação social e pedagógica como, por exemplo, a relação aluno-professor e aluno-aprendizagem e a concepção dos conteúdos e modelos matemáticos. Para a pesquisa que foca em questões de ensino ou aprendizagem matemática é crucial o envolvimento do sujeito e o conhecimento do ambiente no qual ele está inserido, para que se possa analisar e interpretar os resultados e seus significados.

A Educação Matemática, sobretudo, precisa desenvolver a ciência exata e humana, já que a mesma envolve o desenvolvimento e a produção de conteúdos matemáticos no âmbito educacional, onde o aluno, o professor e a comunidade escolar estão envolvidos. Por sua vez, cabe à pesquisa, especificamente a pesquisa qualitativa em Educação Matemática, investigar e interrogar os modelos e métodos didáticos que possam ser desenvolvidos e aplicados nas escolas, englobando as necessidades e dificuldades para o desenvolvimento de um ensino que cumpra o seu objetivo: a aprendizagem. No caso da pesquisa que se pretende desenvolver, focou-se em como a astronomia pode auxiliar no ensino de geometria e, para tanto, assumiu-se a pesquisa qualitativa de abordagem hermenêutica que, a seguir, será apresentada.

4.2 HERMENÊUTICA

A palavra hermenêutica é de origem grega e significa a arte ou destreza de explicar e interpretar, ou seja, o objetivo da hermenêutica é elucidar o que está escrito em textos ou discursos.

Para Palmer (1969), a hermenêutica,

[...] é um estudo da compreensão, é essencialmente a tarefa de compreender textos. As ciências da natureza têm métodos para compreender os objetos naturais; as obras precisam de uma hermenêutica, de uma ciência da compreensão adequada a obras enquanto obras. (PALMER, 1969, p. 19)

Logo se associa a hermenêutica como a habilidade de interpretar, analisar e traduzir, textos e obras, buscando proporcionar ao leitor a compreensão do que é descrito no texto. A hermenêutica vai além de simplesmente entender o que uma obra está dizendo, é crucial que se saiba explicar as causas e as finalidades do texto analisado, o que significa dizer que compreender hermeneuticamente um texto (ou uma obra) significa relacionar a percepção possibilitada pela obra com o restante dos conhecimentos já adquiridos, num movimento de articulação entre o já conhecido e o novo. Trata-se de um exercício que está presente, por exemplo, no raciocínio matemático, pois ao se fazer uma demonstração matemática

é necessário dispor de conhecimentos prévios, como teoremas e axiomas, para produzir uma nova dedução, ou seja, é necessário a compreensão e a análise prévia de obras matemáticas para entendê-las e então produzir um novo conteúdo.

Partindo desse princípio, pode-se questionar qual o sentido e a presença da hermenêutica na educação?

Segundo Bertineti, Brum e Oliveira (2016),

Pensar a educação a partir da perspectiva hermenêutica significa que é necessário deixar de lado explicações e conclusões fáceis, pois o trabalho se dá de forma complexa, por meio das ações diárias. Pela via da hermenêutica, nega-se uma verdade estanque e exige-se a análise de um processo complexo, onde as percepções e interpretações mudam e com elas mudam-se as verdades. Podemos dizer que a Hermenêutica é a ligação entre o ser e a linguagem. Segundo Jürgen Habermas, o fundamento para o saber não se baseia mais num sujeito solitário e na sua relação com o mundo objetivado, e sim, num saber estruturado numa esfera comunicativa. (BERTINETI; BRUM; OLIVEIRA, 2016, p. 04)

Toda abordagem ou metodologia que envolva seres humanos é complexa, pois há a necessidade de uma análise social, cultural, econômica e política por trás de todas as ações e medidas para alcançar um objetivo. Bertineti, Brum e Oliveira (2016) destacam que a educação deve possibilitar a autonomia, o desenvolvimento social e crítico do ser humano, e estas características não ocorrem sem um processo dialético no qual o discente seja estimulado a pensar, questionar, criticar, refletir e, conseqüentemente, agir. Todas essas habilidades podem ser aperfeiçoadas através de uma ação hermenêutica, já que a mesma possibilita um processo de esclarecimento e compreensão.

Mas afinal como a hermenêutica pode estar presente na educação matemática?

Garnica (1996) explica que, embora a matemática seja exata, ela deve ser tratada, na sala de aula, de maneira diferente da matemática produzida pela comunidade científica, já que ambas são coisas diferentes. “Em sala de aula você tenta fazer com que o aluno consiga interpretar o mundo usando a matemática” (GARNICA, 1996, p. 01). Uma justificativa apresentada pelo autor para o trabalho hermenêutico no contexto da sala de aula de matemática é que ela proporciona, aos alunos, a possibilidade de uma análise e interpretação das atividades matemáticas, da linguagem matemática. Para tanto, é preciso que, a princípio, o aluno tenha o primeiro contato com o exercício a ser estudado fazendo uma leitura para que se familiarize com o que é solicitado. Em seguida, ele deve interpretar o enunciado buscando compreender e analisar o que, na atividade, lhe for solicitado, procurando relacionar o que lê com os conteúdos vistos anteriormente e, conseqüentemente, buscando ideias para a sua resolução.

Nessa pesquisa, visando conceber a pergunta norteadora “Como a geometria, mediante ao seu ensino, pode se conectar com a astronomia?”, optou-se pela abordagem hermenêutica, pois, a partir dela, pode-se fazer uma análise profunda dos significados dos conteúdos e termos usados nas atividades sugeridas nos trabalhos que serão considerados para a análise. Por meio da mesma é possível elucidar as causas, as finalidades e as teorias subjacentes à proposta, almejando auxiliar o trabalho dos professores

para que eles possam utilizar-se de situações contextualizadas no ensino de matemática, visando as ideias da astronomia e geometria e construindo uma aula mais ativa, produtiva, crítica e aplicada.

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo são apresentadas as duas obras analisadas neste trabalho, salientando os propósitos e objetivos de ambas. Posteriormente, as atividades presentes são expostas e analisadas, por meio de uma análise hermenêutica dos enunciados, buscando entender o sentido por trás de cada um deles e articulando-os com os conteúdos estudados em sala de aula, com vistas a compreender "Como a geometria, mediante ao seu ensino, pode se conectar com a astronomia?", a pergunta norteadora deste trabalho.

5.1 APRESENTAÇÃO

Considerando a necessidade de entender situações problemas que envolvam a geometria e a astronomia, a fim de conectá-las para obter uma assimilação eficaz e contextualizada dos conteúdos matemáticos estudados na escola, o presente trabalho analisou duas obras que contemplam a temática a ser investigada e o propósito deste capítulo é apresentá-las, expondo os objetivos de cada uma delas.

Com o intuito de compreender a investigação desse trabalho, buscou-se por obras que empregassem a astronomia como contextualização para atividades sobre geometria, a fim de motivar os alunos na busca por conhecimento. Para isto, realizou-se uma busca pelo termo "Aplicação da Astronomia no ensino da Matemática" por meio do ambiente de pesquisa do Google.

Associadamente, examinou-se o Banco de Teses e Dissertações sobre Educação em Astronomia¹, um site cuja especialidade é a educação em astronomia, visando ampliar ainda mais a busca por trabalhos que atendessem a indagação da presente pesquisa. Nesse site, encontrou-se várias obras de astronomia que auxiliavam o ensino de física, todavia poucos trabalhos que relacionavam o ensino de matemática, em especial o ensino de geometria, com a astronomia.

Durante ambas as pesquisas, obteve-se como resultado diversos trabalhos que interligavam a matemática e sua aplicação na astronomia. Dentre eles, artigos que relatavam experiências de profissionais da educação implementando novas atividades, que relacionavam os conteúdos vistos em sala de aula com uma contextualização astronômica. Todavia, o enfoque da pesquisa era explorar obras que expusessem atividades mais gerais, não uma atividade empregada isoladamente em uma turma.

Com essa perspectiva, elencou-se alguns trabalhos - dissertações, teses e trabalhos de conclusão de curso - que se encaixassem nessa percepção. Em uma primeira seleção, descartou-se as obras que vinculassem a astronomia para o ensino de matemática e física (simultaneamente), uma vez que o propósito desta pesquisa é, exclusivamente, a educação matemática.

Para uma segunda seleção, desconsiderou-se os trabalhos onde a geometria não era a prioridade central nos exercícios propostos, pois o objetivo desse trabalho é analisar exercícios de geometria aplicados na astronomia. Sendo assim, o foco nos exercícios deve ser a geometria.

Realizou-se, então, uma terceira seleção. Nessa seleção listou-se os trabalhos restantes e examinou-se os conteúdos de cada um deles, visando descartar as obras que sugerissem exercícios com um nível

¹ <http://www.btdea.ufscar.br/>

de dificuldade superior aos trabalhados nos ensinos fundamental e médio. Ao filtrar os resultados, obteve-se duas obras que atendessem à indagação dessa pesquisa.

A primeira é um trabalho de conclusão de curso escrito por Angelo Cezar Lucizani do Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza, da Universidade Federal da Integração Latino-americana, que tem por título "Aplicação da Astronomia no ensino da Matemática".

A obra é composta por onze capítulos. O autor declara pesquisar a aplicação da astronomia na matemática, buscando motivar os professores a utilizarem os conceitos de astronomia na disciplina de geometria. Lucizani (2016) procurou responder questões como "Qual a relação da Matemática e a Astronomia? O que a Geometria e a Trigonometria têm em comum com a Astronomia? Que tipo de situações problemas podem ser utilizadas?".

A motivação de Lucizani (2016) ao escrever essa obra volta-se a dificuldade dos alunos para assimilarem os conteúdos de geometria, levando em consideração que os professores ainda se prendem a aulas tradicionais, apenas com fórmulas e propriedades.

O objetivo do autor é estudar aplicações para matemática por meio da astronomia através de resolução de problemas, para despertar nos discentes à busca de conhecimento e mostrá-los como os conteúdos aprendidos nas aulas podem ser aplicados para resolver problemas.

No capítulo oito, são propostos pelo autor três enunciados e resoluções das atividades baseadas em conteúdo de livros didáticos e artigos que buscam contextualizar problemas clássicos da astronomia com a geometria, fazendo uso de métodos como resolução de problemas e história da matemática. O autor conclui dizendo que seu propósito é auxiliar professores com essas atividades, mostrar a importância da história da matemática e de problemas aplicados. Além de expressar interesse em aplicar esse projeto, futuramente, para verificar a validade do mesmo.

A segunda obra analisada é uma dissertação de mestrado defendida por Acenilso Lima de Araújo do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal do Piauí, que tem por título "Aplicações de Astronomia no ensino de Matemática na Educação Básica".

A obra é composta por três capítulos. O autor assume pesquisar a aplicação da astronomia na matemática como elemento motivador e de contextualização para as aulas de matemática, em específico a geometria para o ensino médio. Araújo (2013) buscou, com sua obra, atender um dos objetivos e requisitos de seu programa de mestrado, que era elaborar uma proposta educacional.

O estímulo do autor ao escrever sua dissertação voltou-se a incentivar os alunos a estudarem matemática, em específico a geometria, de modo a utilizar conceitos matemáticos mais amplos, fugindo do comum, como, por exemplo, as proporções entre os planetas, que são comumente empregados em sala de aula.

No capítulo três, são propostas quatro atividades e suas resoluções para guiar o professor ao longo do preparo e execução em sala de aula, cujo objetivo é assessorar e instigar o docente a empregar astronomia em atividades de geometria. Araújo (2013) conclui que trabalhar com educação é desafiante, mas que, ao escrever e propor este trabalho, ele buscou afastar esse pensamento e pensar em formas não tradicionais para exercícios de geometria, e a astronomia mostrou-se proveitosa para sustentar seu propósito.

Ambos os trabalhos buscam contextualizar o ensino da matemática, em particular da geometria,

pois o professor, ao empregar atividades aplicadas, mostra aos alunos uma utilização interessante para aquele conteúdo que está sendo ensinado. Nesse viés, propõe-se analisar os exercícios das obras citadas, buscando compreender e interpretar qual conteúdo da geometria é exigido para que o aluno seja capaz de resolver cada um deles, propiciando ao professor vislumbrar em qual aula e momento as atividades poderão ser adotadas. Assim sendo, apresenta-se, na seção a seguir, a análise de cada um dos exercícios propostos pelas obras citadas.

5.2 ANÁLISE DE DADOS

Com o propósito de compreender e interpretar as atividades coletadas das obras de Lucizani (2016) e Araújo (2013), é utilizada a abordagem hermenêutica baseada em Souza (2014).

Para iniciar a análise, os enunciados de cada uma das atividades foram transcritos. A partir desses dados, destacou-se palavras e termos chaves que envolvessem geometria e a astronomia, como por exemplo, "Solstício de Verão", "Perpendicular" e "Razão".

Posteriormente, foi atribuído o significado dado a cada uma das palavras e termos, conforme Ferreira (2008) e outras publicações, como artigos e websites. Assim, os enunciados foram reescritos possibilitando ao pesquisador expor a interpretação do que é proposto na atividade e dos conceitos necessários para compreender o que o autor pretende abordar com os alunos por meio do problema em questão.

As etapas, citadas anteriormente, foram organizadas em um quadro contendo três colunas: Unidades de Sentido – primeira coluna na qual os enunciados são transcritos na íntegra com destaques para as palavras e termos chaves; Unidade de significado – segunda coluna, que apresenta a reescrita do texto da primeira coluna considerando os significados das palavras e termos chaves, portanto uma primeira interpretação; Asserção Articulada – terceira coluna, expressa a interpretação do pesquisador, neste caso os conteúdos essenciais para a resolução e compreensão do problema.

A fim de cumprir o objetivo dessa pesquisa, busca-se discutir as temáticas propostas nos enunciados, interpretando cada uma das atividades, com o intuito de analisar os problemas para dispor de uma maior compreensão. Para isso, examinou-se os exercícios propostos em cada uma das obras. Todavia, não foi necessário abrir uma análise hermenêutica para todos, pois alguns eram passíveis de compreensão sem que fosse necessário reescrevê-los. Ou seja, restringiu-se a análise apenas aos problemas que careciam de uma interpretação, discussão e reescrita.

Apresenta-se, então, os quadros com cada um dos exercícios coletados nas duas obras, bem como as análises, os enunciados na íntegra e seus respectivos termos chaves, além da enumeração dos conteúdos fundamentais para a percepção dos problemas. Posteriormente aos quadros, expõe-se as instâncias nas quais cada atividade se encaixa. Ou seja, explana-se em que momento cada conteúdo é ensinado nas escolas e quais deles são necessários para entender e solucionar cada exercício, de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo, a fim também de identificar em qual série/ano tal atividade pode ser melhor empregada e, ainda, evidencia-se os tópicos de astronomia que também são necessários para a total compreensão dos exercícios.

5.2.1 Análise e Interpretação dos Problemas

Quadro 1 – Análise dos problemas propostos por Lucizani (2016) e Araújo (2013)

Problema 1 - proposto por Lucizani (2016)		
Unidade de Sentido	Unidades de Significado	Asserção Articulada
O Astrônomo e Matemático Aristarco de Samos nasceu na Grécia, dedicou seus estudos para determinar as distâncias entre Terra-Lua (TL) e Terra-Sol (TS). Aristarco observando o céu percebeu que os raios solares são perpendiculares à reta que passa pelo centro da Terra e da Lua. Partindo das observações ele conseguiu calcular a distância. Qual a distância entre e Terra-Sol?	O Astrônomo e Matemático Aristarco de Samos nasceu na Grécia, dedicou seus estudos para determinar as distâncias entre Terra-Lua (TL) e Terra-Sol (TS). Aristarco observando o céu percebeu que os raios solares formam um ângulo reto com à reta que passa pelo centro da Terra e da Lua. Partindo das observações ele conseguiu calcular a distância. Qual a distância entre e Terra-Sol?	<u>Matemática:</u> 1. Ângulos; 2. Circunferência, círculo e suas partes; 3. Razões trigonométricas; 4. Semelhança e congruência de triângulos; 5. Triângulo retângulo; <u>Astronomia:</u> 1. Fases da Lua; 2. Noções básicas do Sistema Solar; 3. Sistema Sol, Terra e Lua;
Perpendicular: 1. Linha perpendicular à outra linha ou plano. 2. Que cai sobre uma linha formando um ângulo reto. (FERREIRA, 2008, p. 625)		
Problema 2 - proposto por Lucizani (2016)		
Unidade de Sentido	Unidades de Significado	Asserção Articulada
Nesta atividade devem ser encontrados a razão da distância da Terra-Luz-Sol e encontrar qual astro está mais próximo da Terra se a Lua ou o Sol. Nesta situação vamos utilizar a mesma técnica de Aristarco de Samos. Qual astro está mais próximo do planeta Terra, o Sol ou a Lua? Qual a razão entre essas distâncias?	Nesta atividade devem ser encontradas as proporções da distância da Terra-Lua-Sol e encontrar qual objeto celeste está mais próximo da Terra, a Lua ou o Sol. Nesta situação vamos utilizar a mesma técnica de Aristarco de Samos. Qual corpo celeste está mais próximo do planeta Terra, o Sol ou a Lua? Qual a proporção entre essas distâncias?	<u>Matemática:</u> 1. Ângulos; 2. Circunferência, círculo e suas partes; 3. Razões trigonométricas; 4. Semelhança e congruência de triângulos; 5. Triângulo retângulo; <u>Astronomia:</u> 1. Fases da Lua; 2. Noções básicas do Sistema Solar; 3. Sistema Sol, Terra e Lua;
Razão: 1. Razão direta: direta relação entre duas quantidades que aumentam ou diminuem na mesma proporção. 2. Razão indireta: relação entre duas quantidades tais que uma aumenta e outra diminui na mesma quantidade. (FERREIRA, 2008, p. 682) Astro: 1. Nome comum a todos os objetos celestes, com ou sem luz própria. (FERREIRA, 2008, p. 148)		

Problema 3 - proposto por Lucizani (2016)		
Unidade de Sentido	Unidades de Significado	Asserção Articulada
Erastóstenes na cidade de Siene calculou o raio da Terra. No dia de solstício de verão , ele percebeu que os raios solares caíam na vertical, utilizando uma estaca cravada verticalmente no solo ele observou a ausência de sombra. Quando isso em Alexandria os raios solares faziam um ângulo de $7,2^\circ$, e a distância de Alexandria até Siene era de 5.000 “stadia”(unidade de medida grega de comprimento). Como Erastóstenes calculou o raio da Terra?	Erastóstenes na cidade de Siene calculou o raio da Terra. No primeiro dia do verão, denominado solstício de verão , ele percebeu que os raios solares incidem na vertical, utilizando uma estaca cravada verticalmente no solo ele observou a ausência de sombra. Quando isso em Alexandria os raios solares faziam um ângulo de $7,2^\circ$, e a distância de Alexandria até Siene era de 5.000 “stadia”(unidade de medida grega de comprimento), sendo que 1 stadia equivale a, aproximadamente, 160 metros. Como Erastóstenes calculou o raio da Terra?	<u>Matemática:</u> 1. Ângulos; 2. Circunferência, círculo e suas partes; 3. Razões trigonométricas; 4. Semelhança e congruência de triângulos; 5. Triângulo retângulo; <u>Astronomia:</u> 1. Estações do ano; 2. Noções básicas do Sistema Solar; 3. Sistema Terra-Sol;
Solstício de Verão: Instante em que a sombra é mínima. Define o início do Verão. (BOCZKO, 1984, p. 11) Stadia: (Ou estádio) Unidade de medida grega de comprimento equivalente a, aproximadamente, 160 metros. (ÁVILA, 2010b, p. 24)		
Problema 4 - proposto por Araújo (2013)		
Unidade de Sentido	Unidades de Significado	Asserção Articulada
Qual astro está mais próximo do planeta Terra, o Sol ou a Lua? Qual a razão entre essas distâncias?	Qual corpo celeste está mais próximo do planeta Terra, o Sol ou a Lua? Qual a proporção entre essas distâncias?	<u>Matemática:</u> 1. Ângulos; 2. Circunferência, círculo e suas partes; 3. Razões trigonométricas; 4. Semelhança e congruência de triângulos; 5. Triângulo retângulo; <u>Astronomia:</u> 1. Fases da Lua; 2. Noções básicas do Sistema Solar; 3. Sistema Sol, Terra e Lua;
Razão: 1. Razão direta: direta relação entre duas quantidades que aumentam ou diminuem na mesma proporção. 2. Razão indireta: relação entre duas quantidades tais que uma aumenta e outra diminui na mesma quantidade. (FERREIRA, 2008, p.682) Astro: 1. Nome comum a todos os objetos celestes, com ou sem luz própria. (FERREIRA, 2008, p. 148)		

Problema 5 - proposto por Araújo (2013)		
Unidade de Sentido	Unidades de Significado	Asserção Articulada
Usaremos a observação feita por Aristarco de Samos durante um eclipse da Lua, que ao medir o tempo gasto para que este satélite (a Lua) atravessasse o cone de sombra da Terra, encontrou que o diâmetro do cone de sombra da Terra na altura da Lua, era $\frac{8}{3}$ do diâmetro da Lua. Usando o fato de que Sol e Lua têm mesmo tamanho angular segundo observação de um eclipse solar por Aristarco, calcule as distâncias DS , DL , RS e RL (distância Terra-Sol, distância Terra-Lua, raios do Sol e da Lua, respectivamente) em relação ao raio da Terra. Usando o resultado que Erastóstenes encontrou para o valor do raio da Terra ($RT = 6.270 \text{ km}$), estime o valor das distâncias indicadas.	Usaremos a observação feita por Aristarco de Samos durante o desaparecimento, parcial ou total, da Lua por interposição da sombra da Terra , que ao medir o tempo gasto para que este satélite (a Lua) atravessasse o cone de sombra da Terra, encontrou que o diâmetro do cone de sombra da Terra na altura da Lua, era $\frac{8}{3}$ do diâmetro da Lua. Usando o fato de que o ângulo sobre o qual o observador vê o Sol é o mesmo ângulo que se pode ver a Lua , segundo observação de um eclipse solar por Aristarco, calcule as distâncias DS , DL , RS e RL (distância Terra-Sol, distância Terra-Lua, raios do Sol e da Lua, respectivamente) em relação ao raio da Terra. Usando o resultado que Erastóstenes encontrou para o valor do raio da Terra ($RT = 6.270 \text{ km}$), estime o valor das distâncias indicadas.	<u>Matemática:</u> 1. Ângulos; 2. Circunferência, círculo e suas partes; 3. Razões trigonométricas; 4. Semelhança e congruência de triângulos; 5. Triângulo retângulo; <u>Astronomia:</u> 1. Eclipses; 2. Fases da Lua; 3. Noções básicas do Sistema Solar; 4. Sistema Sol, Terra e Lua;
Tamanho angular: O ângulo sobre o qual o observador vê o Sol é o mesmo ângulo que se pode ver da Lua. (ARAÚJO, 2013, p. 60) Eclipse: 1. Desaparecimento parcial ou total de um astro por interposição de outro. 2. Interceptar a luz de (um astro). 3. Tirar a vista. (FERREIRA, 2008, p. 324)		
Problema 6 - proposto por Araújo (2013)		
Unidade de Sentido	Unidades de Significado	Asserção Articulada
Determine a distância de Mercúrio e Vênus ao Sol, usando como parâmetro a distância da Terra ao Sol. (Use a figura logo abaixo que indica a elongação de Vênus). Determine a distância de Marte ao Sol, usando como parâmetro a distância da Terra ao Sol.	Determine a distância de Mercúrio e Vênus ao Sol, usando como variável comparativa a distância da Terra ao Sol. (Use a figura logo abaixo que indica o afastamento angular de Vênus em relação ao Sol). Determine a distância de Marte ao Sol, usando como referência a distância da Terra ao Sol.	<u>Matemática:</u> 1. Ângulos; 2. Circunferência, círculo e suas partes; 3. Razões trigonométricas; 4. Semelhança e congruência de triângulos; 5. Triângulo retângulo; <u>Astronomia:</u> 1. Elongação; 2. Noções básicas do Sistema Solar; 3. Noções básicas de algumas configurações planetárias; 4. Sistema Terra-Sol;

Parâmetro: 1. Variável ou constante à qual, numa relação determinada ou numa questão específica, se atribui um papel particular e distinto do das outras variáveis ou constantes. 2. Todo elemento cuja variação de valor modifica a solução dum problema sem lhe modificar a natureza. (FERREIRA, 2008, p. 609)

Elongação: 1. Ângulos formados pelos raios visuais dirigidos ao Sol e a um dos planetas que sempre o acompanham. (FERREIRA, 2008, p. 337)

fonte: Produção da própria autora.

Considerando as interpretações expressas no quadro anterior, é possível reconhecer os conteúdos matemáticos e astronômicos necessários para a resolução de cada um dos exercícios apresentados e, ainda, identificar em qual série/ano cada problema pode ser trabalhado de maneira a atender as capacidades e habilidades matemáticas exigidas em cada série/ano.

Conforme o quadro, os problemas articulam cinco conteúdos matemáticos cruciais para sua resolução, tais conteúdos estão presentes na proposta curricular do 7º ano/6ª série, 9º ano/8ª série e no ensino médio. Segundo o Currículo do Estado de São Paulo, Fini e Machado (2012), o primeiro tópico – Ângulos – é ensinado no 2º bimestre do 7º ano/6ª série do ensino fundamental, enquanto que os demais (2,3,4 e 5) são estudados nos 3º e 4º bimestres do 9º ano/8ª série.

O intuito do primeiro tópico é a assimilação da concepção da medida do ângulo pelo educando, como construí-la e medi-la por meio de instrumentos geométricos, além de sua interpretação em atividades, como no caso dos problemas citados.

O segundo tópico abrange conteúdos ministrados no 4º bimestre do 9º ano/8ª série, que englobam uma parte da geometria de corpos redondos, sendo elas: as características da circunferência e do círculo. A finalidade desse conteúdo é desenvolver no aluno a capacidade de percepção das partes, como as medidas de arco, e das características da circunferência e do círculo, tal como entender o conceito do número π e como empregá-lo.

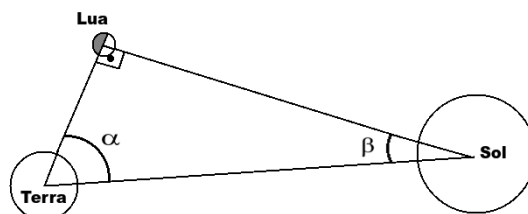
De acordo com Fini e Machado (2012), os tópicos 3, 4 e 5 são juntamente desenvolvidos no 3º bimestre do 9º ano/8ª série, a fim de atender à um conjunto de habilidades. Dentre elas, a identificação de triângulos semelhantes, compreensão das relações métricas, como por exemplo o Teorema de Pitágoras, e trigonométricas no triângulo retângulo, bem como a utilização de cada uma delas em exercícios.

À vista disso, os problemas analisados podem ser ministrados tanto no 9º ano/8ª série, quanto no ensino médio, uma vez que os conteúdos dos tópicos 3, 4 e 5 são retomados com uma maior profundidade no 4º bimestre do 1º ano do ensino médio. Todavia é necessário considerar que os propósitos de cada ano/série são diferentes, cada ano/série desenvolve uma habilidade e capacidade específica no educando, logo seria necessário ajustar cada um dos problemas de acordo com as necessidades de cada ano/série.

Exemplificando essa ideia, retomam-se os problemas 1 e 4, cuja proposta é a estimativa do cálculo da distância entre a Terra e o Sol. Para os alunos do 9º ano/8ª série, seria coeso fornecer o valor do ângulo α formado entre a Lua, a Terra e o Sol e uma esquematização do problema, como ilustra a Figura 1. Uma vez que uns dos objetivos desse ano/série, segundo Fini e Machado (2012), é apresentar as relações métricas e trigonométricas em triângulos retângulos.

Já os discentes do ensino médio, de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo, devem ser capazes de conhecer, construir, praticar e "usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos"(FINI; MACHADO, 2012, p. 66). Logo seria plausível a omissão dessas informações, uma vez que o cálculo desse ângulo tende a aflorar tais habilidades.

Figura 1 – Esquema da configuração Lua-Terra-Sol para a estimativa da distância Terra-Sol, descrito nos problemas 1 e 4.



fonte: Produção da própria autora.

O problema 2 tem como proposta o cálculo da razão das distâncias Terra-Lua e Terra-Sol, com a intenção de discutir sobre o quão próximo estão esses corpos celestes. Por abranger os mesmos conteúdos e por ter uma proposta semelhante dos problemas exemplificados anteriormente, o problema 2 encaixa-se na mesma análise dos problemas 1 e 4. Ou seja, pode ser aplicado tanto nos anos finais do ensino fundamental, 9º ano/8ª série, quanto no ensino médio, 1º ano, contanto que os mesmos ajustes sejam considerados.

Interessado em elucidar um dos feitos de Eratóstenes, o problema 3 traz como proposta a estimativa do cálculo do raio terrestre. O problema em questão fornece dados importantes para sua resolução, como o ângulo formado pela sombra dos raios solares em Alexandria e a distância, em "stadia", entre as duas cidades citadas no enunciado. Porém para uma melhor perspectiva do exercício seria consistente trazer a medida em metros equivalente a 1 "stadia" e um esquema da situação apresentada no enunciado. A partir dessas modificações, o problema 3 aplicaria-se aos estudantes do 9º ano/8ª série e atenderia as habilidades exigidas nesse ano/série.

O quinto problema tem um viés semelhante aos problemas 1, 2, 3 e 4. O objetivo desse exercício é o cálculo estimado das distâncias Terra-Sol e Terra-Lua; e o cálculo dos comprimentos do raio do Sol e da Lua. Porém, seu nível de dificuldade é maior e sua resolução envolve algumas deduções e habilidades que se enquadram melhor para os alunos do ensino médio, mais precisamente no primeiro ano. Já que, conforme Fini e Machado (2012), os discentes do ensino médio devem aflorar algumas habilidades, anteriormente citadas, sistematicamente, nas quais esse problema abrange.

O último problema propõem a determinação das distâncias Vênus-Sol e Marte-Sol. Para uma melhor clareza e interpretação desse exercício, ele poderia ser dividido em dois problemas. O primeiro problema tencionaria o aluno à calcular a distância de Vênus ao Sol e para sua resolução utilizaria-se um raciocínio por meio de trigonometria no triângulo retângulo. Tal raciocínio englobaria uma das habilidades preceituadas no Currículo do Estado de São Paulo para o 9º ano/8ª série, sendo ela a

capacidade de "compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos"(FINI; MACHADO, 2012, p. 64).

O segundo problema propõe ao educando o cálculo da distância de Marte ao Sol e para solucioná-lo deve-se considerar algumas relações trigonométricas e da circunferência. Ambas enquadram as habilidades concebidas no 9º ano/8ª série, sendo uma delas a habilidade de manipular as funções trigonométricas e, a outra, a capacidade de compreender "a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes"(FINI; MACHADO, 2012, p. 64).

Assim como os conteúdos de matemática, os problemas analisados articulam conceitos de astronomia que são necessários para a contextualização e compreensão do educando. Os exercícios 1, 2 e 4, por expressarem ideias semelhantes, de razão e distância Terra-Sol, abrangem os mesmos tópicos de astronomia, sendo eles os conhecimentos das fases da Lua, noções básicas do Sistema Solar e do sistema Sol, Terra e Lua. Uma vez que a intenção dessas atividades é inserir o aluno na problemática do enunciado, então sem esses embasamentos a compreensão do mesmo não será eficaz. Pois, por exemplo, sem conhecer as fases da Lua, o discente não vislumbrará o raciocínio utilizado para a montagem do esquema do problema e, assim, ele simplesmente irá aplicar fórmulas e fará cálculos.

A mesma perspectiva pode ser aplicada ao restante dos problemas. Como por exemplo, no problema 5 para que o entendimento e a contextualização de fato aconteçam, o educando deve conhecer um pouco sobre as configurações dos eclipses, as fases da Lua e, obviamente, noções do Sistema Solar e do sistema Sol, Terra e Lua, visto que o exercício trata desses objetos e desses conceitos. Logo, assim como nos problemas anteriormente citados e em todos os outros, se o aluno não dispuser de tais conhecimentos o entendimento do exercício será comprometido e ocorrerá apenas a aplicação de fórmulas.

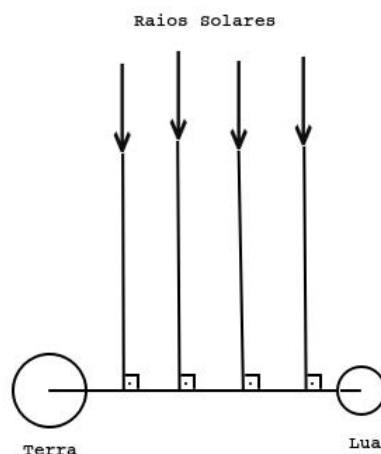
Embora os objetivos dos problemas sejam claros e específicos, ou seja, apresentam como propostas cálculos de distâncias, raios e afins, a maneira como alguns deles são colocados podem comprometer a semântica e a interpretação do problema pelo educando. Uma clara exemplificação desse cenário está presente no problema 1, onde o autor descreve a percepção obtida por Aristarco que o propiciou a calcular a estimativa da distância Terra-Sol. Tal percepção é descrita da seguinte maneira: "Aristarco observando o céu percebeu que os raios solares são perpendiculares à reta que passa pelo centro da Terra e da Lua"(LUCIZANI, 2016, p.34). A descrição nesse trecho é relativamente errônea, pois pode ocorrer uma dualidade em sua interpretação. O aluno pode interpretar esse trecho de maneira equivocada e esquematizá-lo conforme a Figura 2, sendo que a esquematização correta seria a expressada pela Figura 1.

Outros impasses relacionados à escrita dos enunciados foram encontrados, embora não comprometam diretamente a interpretação dos exercícios, é importante que sejam evitados e sanados. Ao longo dos enunciados alguns desses equívocos foram encontrados, sendo dois deles: "Qual a distância entre e Terra-Sol?" e "distância da Terra-Luz-Sol", na qual o correto seria "Qual a distância Terra-Sol?" ou "Qual a distância entre a Terra e o Sol?" e "distância entre a Terra, a Lua e o Sol".

Dentro dessa perspectiva, no problema 3, o seguinte questionamento é feito ao aluno: "Como Eratóstenes calculou o raio da Terra?", ainda que pareça uma indagação comum é inexata, pois pode

acarretar discursos do tipo "Como vou saber o jeito que Eratóstenes calculou?" ou, ainda, "Tenho que adivinhar como ele calculou?". Ou seja, mesmo que nesse trecho a intenção do autor era pedir ao discente para calcular o raio da Terra, por meio dos raciocínios utilizados por Eratóstenes, é fundamental atentar para a maneira como essa ideia é passada ao educando.

Figura 2 – Esquematização errônea da configuração Lua-Terra-Sol para a estimativa da distância Terra-Sol, descrita no problema 1.



fonte: Produção da própria autora.

Em suma, ao analisar os problemas apresentados e obter interpretações por meio do quadro, notou-se que os exercícios contextualizam a astronomia e a geometria através de cálculos de distâncias e comprimentos. Para a compreensão dos enunciados, a fim de obter o raciocínio necessário para a resolução dos problemas, alguns conhecimentos prévios de astronomia são fundamentais, como por exemplo a percepção das fases da Lua. Pois, sem esses conhecimentos a compreensão dos enunciados torna-se complicada e a aplicação dessas atividades fica vaga, tornando-se um exercício que tenta contextualizar a astronomia, mas na realidade só aplica fórmulas.

Com o intuito de tornar os problemas mais perceptíveis à compreensão, o capítulo seguinte retrata uma nova sugestão de abordagem, reescrita e resolução para cada um dos exercícios anteriormente examinados.

6 PROPOSTA

Com base no que foi exposto no capítulo anterior, pretende-se propor uma nova abordagem que tangencie os impasses encontrados nas análises dos problemas denotados, com a intenção de torná-los mais passíveis à compreensão. Sendo assim, neste capítulo propõe-se apresentar um texto que ajude a esclarecer alguns conteúdos básicos e necessários de astronomia para a compreensão dos problemas anteriormente analisados e, em seguida, uma reescrita dos enunciados para torná-los mais objetivos e instrutivos, com a intenção de permitir ao educando uma clareza melhor na leitura e interpretação dos exercícios.

6.1 CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Para que a contextualização empregada nos problemas analisados torne-se mais inteligível, são necessários alguns embasamentos prévios que clarifiquem a aplicação dos exercícios. Na presente seção pretende-se explanar os conceitos e conteúdos inescusáveis antes da resolução dos problemas, a fim de que o educando possa vislumbrar o raciocínio e o sentido de cada exercício.

6.1.1 Noções sobre O Sistema Solar

Conforme Chown (2014), *Sistema Solar* é o nome dado ao conjunto de planetas, asteroides, cometas e outros objetos celestes que estão gravitacionalmente influenciados pelo Sol. Estima-se que nosso Sistema Solar tenha por volta de 4,6 bilhões de anos e, conforme a teoria mais aceita atualmente, tenha surgido em consequência de uma nuvem de gás e poeira.

De acordo com essa teoria, Nogueira e Canalle (2009) afirmam que,

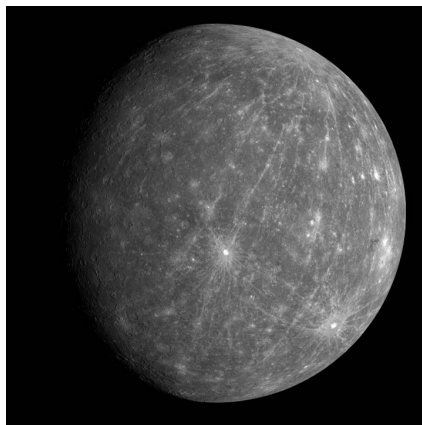
A gravidade fez com que esta névoa (de gás e poeira) sofresse uma contração, num processo que durou dezenas de milhões de anos, até que a maior parte de sua massa se concentrasse no centro do sistema. Devido à turbulência, o núcleo original começou a girar com velocidade cada vez maior, dando ao restante da névoa a forma de um disco. (NOGUEIRA; CANALLE, 2009, p. 130)

Nogueira e Canalle (2009) destacam que depois da formação desse disco, a temperatura no centro dele aumentou à proporção que o mesmo se comprimia, tornando-se quente o bastante para gerar o que conhecemos hoje como nosso Sol. Conjuntamente, as margens do disco foram se esfriando e solidificando, propiciando que os materiais dessa região colidissem, gerando corpos maiores. Esses corpos maiores, após longos processos de colisões, originaram os planetas que conhecemos hoje, sendo eles: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. Todos esses planetas giram ao redor do Sol em órbitas elípticas, porém pouco excêntricas (quase circulares), nas quais o mesmo se encontra em um dos focos da elipse.

O planeta mais próximo do Sol é Mercúrio (Figura 3), com uma distância média de 57,9 milhões de quilômetros e massa de 3×10^{23} kg (aproximadamente). Por estar muito próximo ao Sol, Mercúrio foi

pouco explorado por sondas espaciais em relação aos outros planetas. Todavia, as sondas Mariner 10 e Messenger sobrevoaram próximo ao planeta registrando várias imagens, que nos permitiram conhecer mais sobre a superfície desse planeta.

Figura 3 – Imagem de Mercúrio registrada pela sonda Messenger.



fonte: Castro (2008)

Mercúrio possui, de acordo com Nogueira e Canalle (2009), por volta de 4.900 km de diâmetro. Seu período orbital – tempo que um corpo demora para efetuar uma volta ao redor de um astro, nesse caso o Sol – é de 88 dias, já a rotação (em torno de seu eixo) ocorre em 58 dias. Ou seja, um ano em Mercúrio equivale à quase 3 meses terrestres e um dia à 2 meses.

Embora não seja o planeta mais próximo do Sol, com uma distância de 108 milhões de quilômetros e com massa de 8×10^{24} kg, Vênus (Figura 4) é o planeta que apresenta as maiores temperaturas, cerca de 460° Celsius, devido a sua atmosfera com alto teor de gás carbônico.

Figura 4 – Imagem de Vênus registrada pela sonda Magellan.



fonte: Sutherland (2018)

Diferente da maioria dos outros planetas, Vênus possui um período rotacional retrógrado de 243 dias, ou seja, gira no sentido horário enquanto que a maior parte dos outros planetas giram no sentido anti-horário. Já seu período orbital é de 224 dias (em torno de 7,5 meses terrestres) e tem um raio médio de 6.051 km, correspondendo a cerca de 95% do raio médio da Terra (6.371 km).

Com uma distância ao Sol de 1 u.a. (Unidade Astronômica), ou aproximadamente 150 milhões de quilômetros, a Terra (Figura 5) é o terceiro planeta do Sistema Solar, além de ser o planeta na qual mais temos informações. Para Maran (2011) "a Terra é única entre os planetas conhecidos"(MARAN, 2011, p. 78), visto que a mesma possui grandes quantidades de oxigênio no ar, água líquida (salgada e doce), vulcões ativos e vida dos mais variados tipos. Nosso planeta leva cerca de 365 dias para completar uma volta ao redor do Sol e 24 horas para completar uma volta ao redor de seu próprio eixo.

Figura 5 – Imagem da Terra registrada pela missão Apollo 17.



fonte: Dunbar (2012)

Outra particularidade da Terra é seu único satélite natural, a Lua. A Lua é o corpo celeste mais próximo do nosso planeta rochoso, a cerca de 384.400 km de distância. Nosso singular satélite tem um quarto do diâmetro da Terra e $7,4 \times 10^{22}$ kg (por volta de $1/81$ da massa da Terra). Uma peculiaridade da Lua, de acordo com Lang (2013), é que devido a sincronia entre sua translação ao redor da Terra e seu período de rotação em torno de seu próprio eixo, ambos com aproximadamente 27 dias, a Lua apresenta sempre a mesma face voltada para a Terra.

Sendo o último planeta rochoso do Sistema Solar e com uma distância de 1,6 u.a. do Sol, Marte (Figura 6) com apenas 3.389 km de raio e $6,4 \times 10^{23}$ kg de massa, possui algumas características similares ao do nosso planeta. Sua superfície apresenta crateras de impacto, dunas, depressões, vulcões e até mesmo indícios de água. Marte tem um período de rotação semelhante ao da Terra, com cerca de 24 horas, porém seu período orbital é de 687 dias, quase o dobro do período do nosso planeta.

Figura 6 – Imagem de Marte registrada pelo Telescópio Hubble.



fonte: BBC Brasil (2001)

Júpiter (Figura 7) é o quinto planeta do Sistema Solar, porém o primeiro planeta gasoso, e está a uma distância de 5,2 u.a. do Sol. Com 60.911 km de raio, cerca de 11 vezes o raio da Terra, e massa de 2×10^{27} kg, equivalente à 318 vezes a massa terrestre, Júpiter é o maior planeta do nosso sistema e segundo Nogueira e Canalle (2009) pode ser visto "a olho nu como uma estrela de magnitude $-2,5$ no momento de máximo brilho e, observado ao telescópio, apresenta a forma de um disco achatado e atravessado por faixas escuras paralelas ao equador"(NOGUEIRA; CANALLE, 2009, p. 134). Ou seja, Júpiter a olho nu tem o brilho correspondente à 9,4% do brilho do Sol. Embora seja o maior planeta do Sistema Solar, Júpiter tem um período rotacional rápido, por volta de 10 horas, enquanto que seu período orbital é de quase 12 anos.

Figura 7 – Imagem de Júpiter e de duas de suas luas, Io e Europa, registrada pela sonda Voyager I.



fonte: The Planetary Society (2018)

Conhecido por seus famosos anéis, Saturno (Figura 8), que está a 9,6 u.a. do Sol, é o sexto planeta do Sistema Solar e o segundo maior planeta, com 58.232 km de raio (9 raios terrestres) e $5,7 \times 10^{26}$ kg (95 massas da Terra). Embora seja conhecido por seus elegantes anéis, Maran (2011) destaca que "os anéis circulam todos os quatro grandes planetas gasosos: Júpiter, Saturno, Urano e Netuno"(MARAN, 2011, p. 130). Porém, segundo o autor, os anéis de Júpiter, Urano e Netuno são demaseadamente tênues, sendo Saturno a exceção.

Figura 8 – Imagem de Saturno registrada pela sonda Cassini.

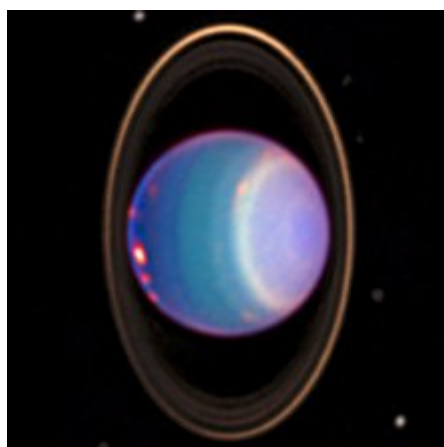


fonte: Dunbar (2008)

Saturno tem um período de rotação semelhante ao de Júpiter, cerca de 10,5 horas, entretanto demora em torno de 30 anos para completar uma volta ao redor do Sol. Posteriormente a Saturno está

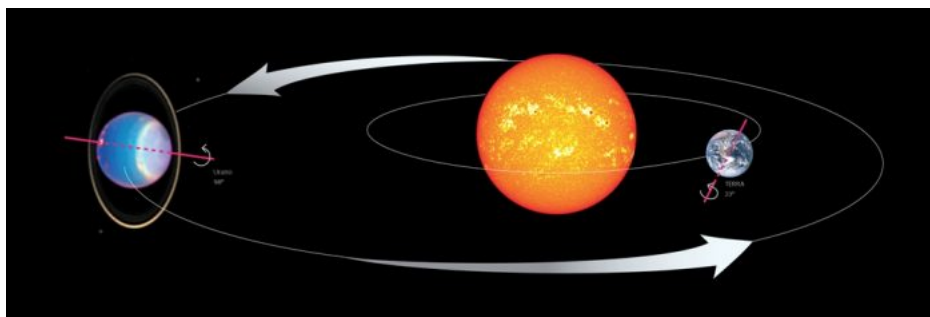
Urano, que se encontra a 19 u.a. de distância do Sol e é o terceiro maior planeta, com 4 vezes o raio da Terra e $8,7 \times 10^{25}$ kg. Urano leva 84 anos para completar uma volta ao redor do Sol e tem um período de rotação de 17,3 horas, mas, assim como Vênus, seu período é retrógrado, isto é, Urano gira em torno do seu eixo no sentido horário. Outra particularidade de Urano é que o mesmo tem seu eixo de giro inclinado em quase 100° , ou seja, é como se Urano girasse em torno de seu próprio eixo "deitado", conforme ilustra a Figura 10.

Figura 9 – Imagem de Urano registrada pelo telescópio Hubble.



fonte: HubbleSite (2002)

Figura 10 – Representação da inclinação do eixo de giro de Urano.



fonte: Zolnerkevic (2011)

A 30 u.a. do Sol está o último planeta e também gigante gasoso, com 17 massas da Terra e 24.622 km de raio, Netuno (Figura 11). Netuno tem o maior período orbital dentre todos os planetas, 164 anos, e demora apenas 16 horas para completar uma volta em torno de seu eixo. Semelhante aos outros planetas gasosos, Netuno tem vários satélites naturais, mas um deles chama a atenção dos astrônomos por sua peculiaridade. Tritão, conforme Maran (2011) é a maior lua de Netuno e possui um raio médio de 1.355 km. Diferentemente de todas as outras luas, Tritão tem uma órbita retrógrada, ou seja, o mesmo transla ao redor de Netuno no sentido horário. Mas por que isso acontece?

De acordo com Maran (2011) e Gaspar (2013), Tritão (Figura 11) não foi formado na órbita de Netuno, mas capturado em algum momento da evolução do nosso Sistema Solar. Caso não tivesse sido capturado por Netuno, Tritão "poderia simplesmente ter sido um planeta similar a Plutão" (MARAN, 2011, p. 137), isto é, poderia ter sido denominado um planeta anão, assim como Plutão, já que possui aparência e características semelhantes à Plutão.

Figura 11 – Imagem de Netuno e uma de suas luas, Tritão, pela sonda Voyager 2.



fonte: Castro (2009)

Plutão, planeta ou não?

Com 2.372 km de diâmetro e 0,22% da massa da Terra, Plutão encontra-se a 39 u.a. de distância do Sol. Plutão leva quase 7 dias para concluir uma revolução ao redor de seu próprio eixo e, por estar mais afastado do Sol, demora cerca de 248 anos para completar uma volta ao redor da nossa estrela. Pelo mesmo motivo, possui temperaturas muito baixas, por volta de -222° Celsius, a menor temperatura se comparada com os oito planetas do nosso Sistema Solar.

Uma grande dúvida paira quando se trata de Plutão, afinal ele é um planeta ou não?

Segundo Nogueira e Canalle (2009),

Até meados de 2006, Plutão era oficialmente tido como nono planeta do Sistema Solar. O "rebaixamento" aconteceu em 24 de agosto de 2006, quando a União Astronômica Internacional (IAU) votou uma nova definição de planeta, que só considerava um objeto como tal se ele estivesse relativamente sozinho e dominante na região de sua órbita. (NOGUEIRA; CANALLE, 2009, p. 136)

Corroborando com essa concepção, Voelzke e Araújo (2010) explicam que após a descoberta de Caronte, um satélite de Plutão, passou-se a investigar esses dois corpos. Estudos mostraram que Caronte tem metade do tamanho de Plutão (aproximadamente), revelando que Plutão-Caronte (Figura 12) poderia não se tratar de "um sistema planeta-satélite, mas sim um sistema binário com objetos comparáveis" (VOELZKE; ARAÚJO, 2010, p. 71). Embora Caronte seja um satélite de Plutão, assim como Nix, Hidra, Cérbero e Estige, ou um sistema binário como consideram alguns astrônomos, Plutão é considerado um planeta-anão devido as definições implantadas pela IAU.

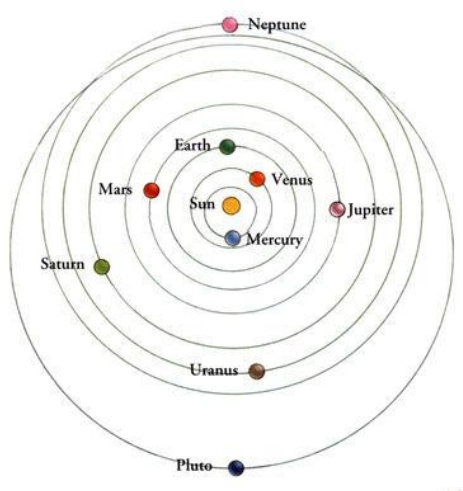
Figura 12 – Composição de imagens mostrando Caronte (à esquerda) e Plutão (à direita).



fonte: Castro (2015)

6.1.2 Configurações Planetárias

Figura 13 – Representação do Sistema Solar (ilustração).



fonte: Adaptado de GridClub (2018)

Conforme visto na seção anterior, cada planeta do nosso sistema translada ao redor do Sol em uma órbita elíptica, porém quase esférica, devido a baixa excentricidade dessas elipses, e em um determinado período de tempo, sendo esse tempo, chamado de período orbital. Cada um dos planetas do Sistema Solar possui um período orbital diferente, na qual quanto mais próximo o corpo está do Sol, menor seu período, essa relação pode ser vislumbrada através do Quadro 2.

Quadro 2 – Comparação entre distância ao Sol e período orbital dos planetas.

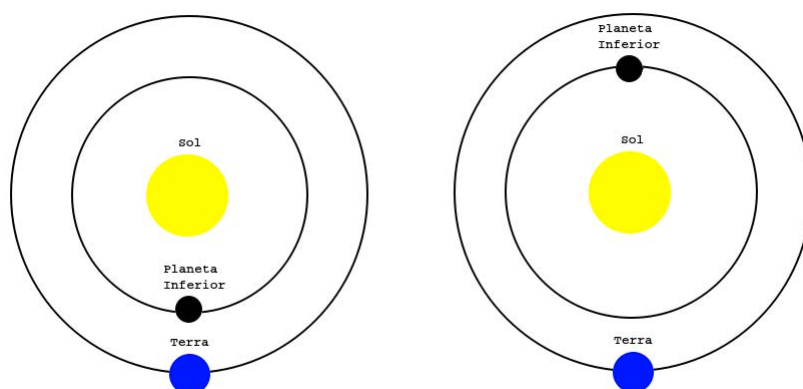
Planeta	Distância do Sol (u.a.)	Período orbital
Mercúrio	0,3	88 dias
Vênus	0,72	224 dias
Terra	1	365 dias
Marte	1,6	687 dias
Júpiter	5,2	12 anos
Saturno	9,6	30 anos
Urano	19	84 anos
Netuno	30	164 anos

fonte: Produção da própria autora.

Utilizando a distância da Terra ao Sol como parâmetro, classificaremos, de acordo com Oliveira Filho e Saraiva (2004), os planetas em *inferiores* e *superiores*. Os planetas inferiores são aqueles que possuem órbitas menores do que a do nosso planeta e, conseqüentemente, são aqueles que estão mais próximos ao Sol, logo Mercúrio e Vênus são classificados como planetas inferiores. Já os planetas superiores são aqueles que apresentam órbitas maiores que a da Terra, sendo eles: Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

Devido a essas diferenças entre a distância e o tempo que os planetas levam para completar uma volta ao redor do Sol, ocasionalmente, esses planetas apresentam algumas configurações específicas. Conforme Oliveira Filho e Saraiva (2004), os planetas inferiores podem se configurar em: *conjunção inferior*, *conjunção superior* e *máxima elongação*. Quando um planeta inferior está em conjunção inferior, isso significa dizer que o mesmo está alinhado ao Sol e a Terra, porém encontra-se entre eles (Figura 14). Já quando um planeta inferior está em posição de conjunção superior, há o alinhamento entre o planeta inferior, o Sol e a Terra, nessa respectiva ordem (Figura 14).

Figura 14 – Ilustração das conjunções inferior e superior (respectivamente) dos planetas inferiores.

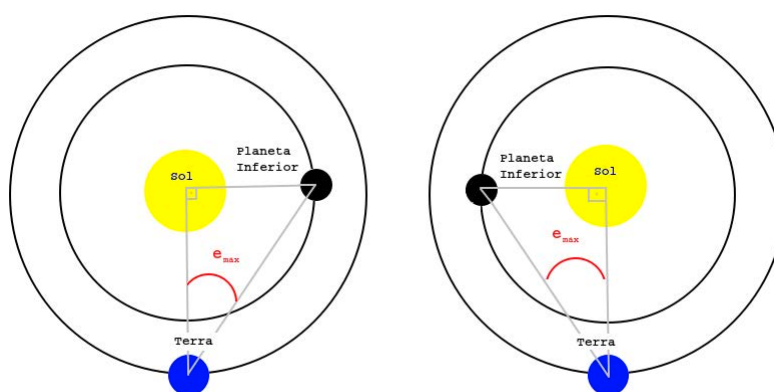


fonte: Produção da própria autora.

A medida que o planeta inferior translada ao redor do Sol, a distância angular entre o planeta e o Sol varia. Essa distância angular quando vista da Terra é chamada de *elongação* e quando tal ângulo é máximo chamamos de *elongação máxima* (e_{max}). Quando o planeta inferior está em posição de máxima elongação, o Sol, o planeta e a Terra formam um triângulo retângulo, sendo que "o ângulo entre Terra e Sol, na posição do planeta, será de 90° " (OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, 2004, p. 71). Ainda nessa posição, o planeta pode estar em elongação máxima *ocidental* e *oriental*, sendo que em máxima elongação ocidental o planeta está a oeste do Sol e em máxima elongação oriental a leste (Figura 15).

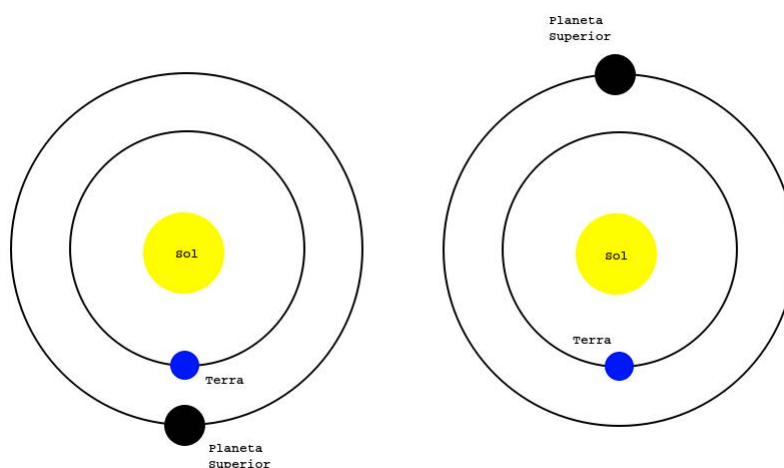
Assim como os planetas inferiores, os planetas superiores também se configuram em posições características, sendo elas: *conjunção*, *oposição* e *quadratura*. A configuração de oposição dos planetas superiores é semelhante a posição de conjunção inferior dos planetas inferiores, ou seja, o planeta está alinhado ao Sol e a Terra, contudo a Terra encontra-se no meio deles (Figura 16). Já a configuração de conjunção é levemente análoga a posição de conjunção superior dos planetas inferiores, ou seja, na posição de conjunção o planeta superior, o Sol e a Terra estão enfileirados, nessa devida ordem (Figura 16).

Figura 15 – Ilustração das elongações máximas ocidental e oriental (respectivamente) dos planetas inferiores.



fonte: Produção da própria autora.

Figura 16 – Ilustração das posições de oposição e conjunção (respectivamente) dos planetas superiores.

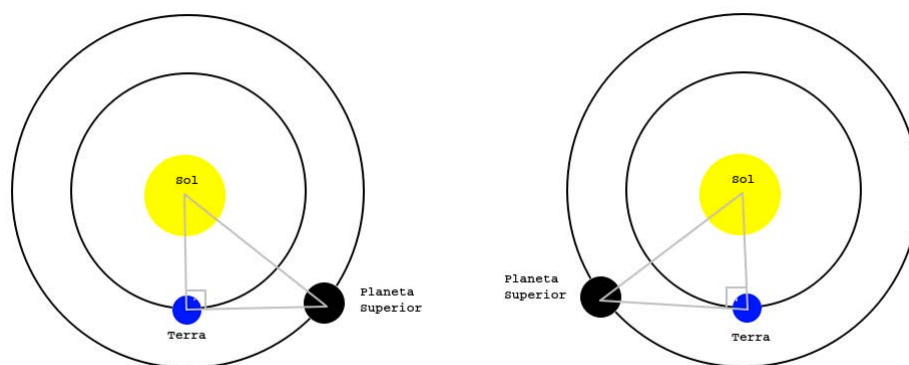


fonte: Produção da própria autora.

Conforme o planeta superior completa sua volta ao redor do nosso Sol, os ângulos formados entre eles variam, quando o ângulo entre o planeta e o Sol, visto da Terra, é reto dizemos que o planeta está em quadratura (Figura 17). A posição de quadratura pode ser classificada em *ocidental* e *oriental*, sendo que a quadratura ocidental implica que o planeta superior está a oeste do Sol, enquanto que em quadratura oriental a leste (Figura 17).

Por meio das configurações planetárias discutidas anteriormente, Nicolau Copérnico conseguiu estipular as distâncias entre os planetas inferiores, através da posição de máxima elongação, e superiores, por intermédio entre duas posições, sendo uma delas a de quadratura. Mas como ele fez isso? Na seção 6.2, mediante aos exercícios ponderados nesse trabalho, descobriremos os raciocínios utilizados por ele para tal estimativa.

Figura 17 – Ilustração das posições de quadratura ocidental e oriental (respectivamente) dos planetas superiores.



fonte: Produção da própria autora.

6.1.3 Estações do Ano

Quem nunca escutou que o Verão é mais quente, pois o Sol está mais próximo da Terra e o Inverno é mais frio, pois o Sol está mais afastado? De acordo com Boczko (1984), um dos erros mais comuns para a explicação das Estações do Ano é a distância entre a Terra e o Sol. Mas qual a explicação para as Estações do Ano? Por que o Verão é mais quente e o Inverno mais frio?

Antes de compreendermos como ocorrem as Estações do Ano e algumas de suas características, é fundamental entender as expressões de "dia claro" e "dia escuro". O período iluminado do dia pelos raios solares, que se inicia ao nascer do Sol e tem seu término ao pôr do Sol, é denominado "dia claro". Já o "dia escuro" (ou noite) é a parte do dia que não é iluminada pelos raios solares. Logo, ao contrário do "dia claro", o "dia escuro" se inicia ao pôr do Sol e tem seu término ao nascer do Sol. Porém vale esclarecer que nessa seção (6.1.3) utilizaremos a palavra *dia* para se referir a parte clara de um dia, ou "dia claro".

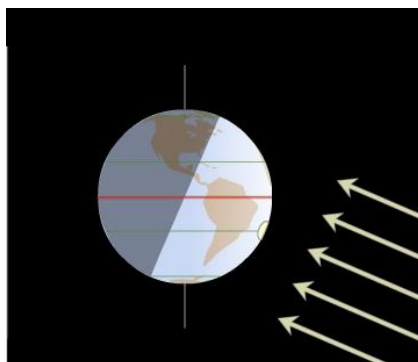
As *Estações do Ano* ocorrem devido a inclinação do eixo de rotação da Terra e seu movimento de translação ao redor do Sol. Conforme Maran (2011) "o eixo, a linha que passa pelos polos norte e sul, não é perpendicular ao plano da órbita da Terra em torno do Sol, na verdade, o eixo tem uma inclinação de $23\frac{1}{2}$ graus da perpendicular ao plano orbital" (MARAN, 2011, p. 85).

Devido a isso, em qualquer momento do ano uma região do nosso planeta será mais exposta aos raios solares, tornando-se mais quente e iluminada, sendo assim durante o Verão temos dias mais longos e quentes, já no Inverno os dias são mais frios e curtos. Em contrapartida, o movimento da Terra ao redor do Sol alterna essa exposição, por esse motivo as estações do ano nos hemisférios norte e sul são sempre opostas.

Antes de classificar as quatro estações do ano, devemos nos familiarizar com dois termos importantes: *solstício* (Figura 18) e *equinócio* (Figura 19). O termo Solstício se refere à data que marca o início do Inverno ou do Verão, nessa data o dia pode ter a duração mais longa ou mais curta do ano, dependendo da estação e do hemisfério. Já o termo Equinócio representa o início da Primavera ou do Outono, nessa data a duração do dia e da noite são semelhantes, ou seja, possuem duração de 12 horas (aproximadamente).

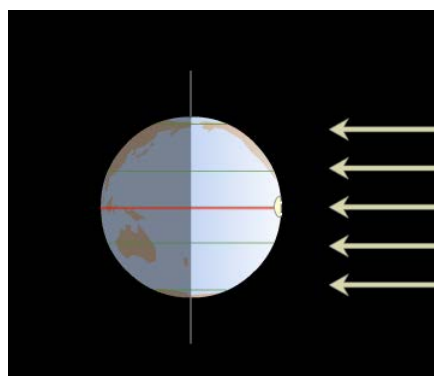
As quatro estações do ano (Figura 20) são divididas em *Primavera*, *Verão*, *Outono* e *Inverno*. A Primavera é a estação que antecede o Verão e se inicia no Equinócio, que, como vimos anteriormente, caracteriza a data em que o dia e a noite têm a mesma duração. A partir do Equinócio, a duração dos dias claros tendem a aumentar gradualmente, bem como o aumento das temperaturas. O fim da Primavera é marcado pelo Solstício de Verão, que simultaneamente caracteriza o início do Verão.

Figura 18 – Representação da configuração da Terra e dos raios solares no Solstício.



fonte: Adaptado de Lee (2018)

Figura 19 – Representação da configuração da Terra e dos raios solares no Equinócio.



fonte: Adaptado de Lee (2018)

O primeiro dia do Verão corresponde ao dia mais longo do ano e, consequentemente, a noite mais curta. Ao longo desse período presenciamos os dias mais extensos, claros e quentes de todas as estações. Após o Solstício, a duração dos dias tendem a se equilibrarem, voltando a ter duração similares até, então, atingirem a mesma duração novamente. Quando isso ocorre, presenciamos o Equinócio outra vez e concomitantemente o primeiro dia de Outono.

Com a chegada do Outono, as temperaturas, que antes eram mais elevadas, tornam-se mais amenas e a duração dos dias gradativamente diminuem, ou seja, as noites tendem a ter duração um pouco maiores. No momento em que a noite alcança sua maior duração, presenciamos o início do Inverno, conhecido como Solstício de Inverno. Durante o Inverno, testemunhamos o período com as menores temperaturas, pois os raios solares incidem o hemisfério (em que está ocorrendo o Inverno) de maneira tangencial, uma vez que no hemisfério oposto (onde se decorre o Verão) os raios solares incidem quase que perpendicularmente. Ao final do Inverno, as temperaturas tornam-se amenas de novo e a duração

dos dias e das noites similares. E, logo, o equinócio chega iniciando a Primavera e o ciclo das estações recomeça.

Figura 20 – Representação da configuração da Terra e do Sol ao longo das Estações do Ano.



fonte: Magalhães (2018)

6.1.4 Fases da Lua e Eclipses

Ao longo do mês podemos notar que a face da Lua voltada para o nosso planeta se difere. Algumas vezes essa face está completamente iluminada, outras completamente sem iluminação e, até mesmo, parcialmente iluminada. Isso acontece devido a configuração entre a Lua, a Terra e o Sol e esses estágios são chamados de *fases da Lua* e, segundo Oliveira Filho e Saraiva (2004), a fase da Lua simboliza,

[...] o quanto dessa face iluminada está voltada também para a Terra. Durante metade do ciclo essa porção está aumentando (Lua Crescente) e durante a outra metade ela está diminuindo (Lua Minguante). Tradicionalmente apenas as quatro fases mais características do ciclo - Lua Nova, Quarto-Crescente, Lua Cheia e Quarto-Minguante - recebem nomes, mas a porção que vemos iluminada da Lua, que é a sua fase, varia de dia para dia. (OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, 2004, p. 52)

Ou seja, o movimento da Lua ao redor de nosso planeta perpassa um ciclo de fases, na qual patenteia uma aparente mudança de forma, que nada mais é do que a variação de sua porção iluminada. O ciclo completo da Lua dura cerca de 29,5 dias e ao longo dele ela apresenta as fases Nova, Quarto-Crescente, Cheia e Quarto-Minguante (Figura 21).

A fase de Lua Nova, de acordo com Maran (2011) "[...] marca o início do ciclo lunar mensal, ou lunação" (MARAN, 2011, p. 88) e nesta fase a face visível da Lua não está iluminada.

Figura 21 – Representação das Fases da Lua (vista superior).



fonte: Gouveia (2018)

Com o passar do tempo, a Lua se afasta de seu posicionamento anterior, Terra-Lua-Sol, e sua face visível começa a receber mais iluminação, ou seja, a iluminação se torna crescente. Ainda nesse período de crescente, a Lua atinge um ponto, tal que "a linha Lua-Terra faz um ângulo reto com a linha Sol-Terra" (MARAN, 2011, p. 88), na qual, nesse estágio, a Lua é chamada de Quarto-Crescente.

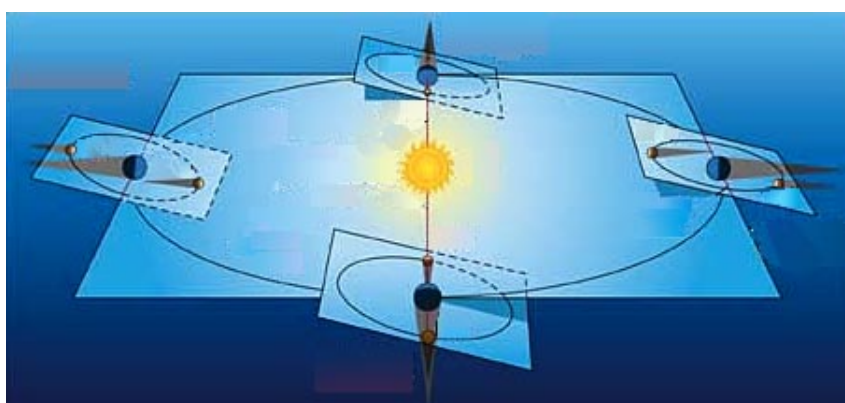
Seguindo sua viagem ao redor do nosso planeta, a Lua atinge uma posição mais afastada do Sol, Lua-Terra-Sol. Nesse momento a face visível da Lua está completamente iluminada e esse período denomina-se Lua Cheia. Após atingir seu ápice de iluminação, a porção iluminada de sua face visível diminui, passando por um período de minguante.

Durante essa etapa, vemos, novamente, uma configuração semelhante com a fase Quarto-Crescente, na qual a linha Lua-Terra fica perpendicular com a linha Terra-Sol, nesse estágio a Lua atinge sua fase de Quarto-Minguante e a metade leste de sua área visível fica iluminada. Conforme a área iluminada escurece a Lua se torna Nova outra vez, recomeçando o ciclo lunar.

Mas, se durante as fases Nova e Cheia a Lua, a Terra e o Sol se encontram alinhados, por que não ocorrem eclipses todos os meses?

Os Eclipses ocorrem quando há o alinhamento entre esses três corpos celestes, todavia os planos das órbitas Terra-Sol e Terra-Lua não são os mesmos, conforme ilustra a Figura 22. Ou seja, nas fases Nova e Cheia os três corpos não estão completamente alinhados.

Figura 22 – Plano das órbitas entre a Lua e a Terra e a Terra e o Sol.



fonte: Carmo (2012)

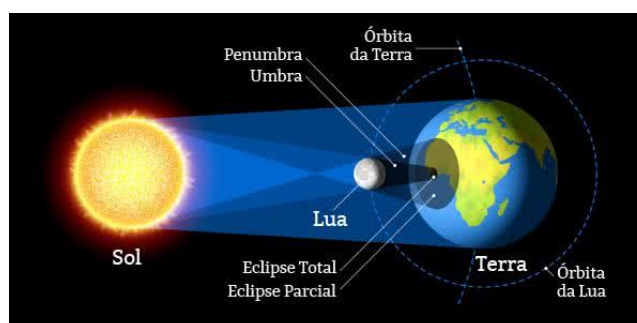
Oliveira Filho e Saraiva (2004) explicam que, o plano da órbita entre a Terra e a Lua está inclinado em cerca de 5° e que os pontos de interseção entre essas duas órbitas são denominados *nodos*. Logo para que possamos ver um eclipse, a Lua deve estar localizada na região do nodo ou em suas proximidades e, ao mesmo tempo, na fase Nova ou Cheia.

Antes de classificarmos um eclipse, devemos considerar dois termos importantes: *umbra* e *penumbra*. Conforme Oliveira Filho e Saraiva (2004) a umbra é uma parte da sombra onde não há nenhum tipo de iluminação, enquanto que na penumbra há algumas zonas de luz. A partir desses vocábulos, podemos definir o que são eclipses e quais os tipos de eclipses existentes.

Eclipses são fenômenos que acontecem quando objetos celestes entram na sombra (umbra ou penumbra) de outro corpo celeste. Logo quando a Terra entra na região de sombra da Lua provocada pelo Sol, temos o *Eclipse Solar*. Ao passo que, quando a Lua passa pela região de sombra da Terra provocada pelo Sol, vemos um *Eclipse Lunar*.

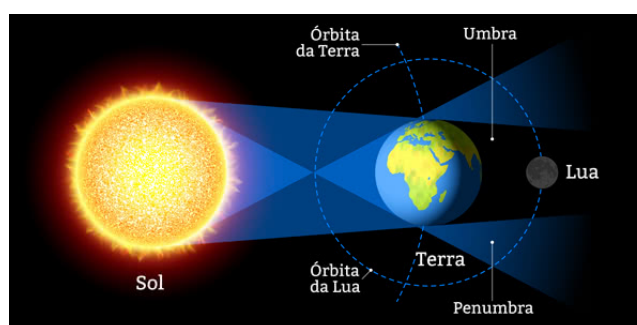
Para presenciarmos o *Eclipse Solar* (Figura 23), a Lua deve estar nas localidades no nodo e em fase Nova. Esse tipo de eclipse pode ocorrer nas regiões de umbra, de maneira total ou anular, ou de penumbra, de modo parcial. O eclipse *anular* acontece quando a Lua está alinhada com o Sol, porém sua sombra não consegue cobri-la por completo e um anel de luminosidade pode ser visto em volta da Lua. Já o eclipse *parcial* ocorre quando uma parcela do Sol é coberta pela Lua, enquanto que no eclipse *total* o Sol é totalmente encoberto pela Lua.

Figura 23 – Representação do Eclipse Solar.



fonte: Gouveia (2018)

Figura 24 – Representação do Eclipse Lunar.



fonte: Gouveia (2018)

Quando a Lua está nas proximidades do nodo e em fase Cheia, testemunhamos o *Eclipse Lunar* (Figura 24), que pode sobrevir de três maneiras distintas: *total*, *parcial* ou *penumbral*. Durante o tempo

que a Lua fica totalmente coberta pela umbra, observaremos o eclipse total; já se a Lua for encoberta pela penumbra, o eclipse penumbral. Mas se a Lua fica com parte imersa na umbra e parte imersa na penumbra, presenciaremos o eclipse parcial.

Constatamos, então, que para ocorrerem os eclipses, lunares ou solares, deve acontecer os alinhamentos entre a Terra, a Lua e Sol, ou seja, a Lua deve estar em fase Nova ou Cheia e, ao mesmo tempo, a mesma deve se encontrar sobre o nodo ou em suas proximidades. Embora não possam ser presenciados com tanta frequência como gostaríamos, os eclipses são eventos observados desde os proêmios da humanidade, servindo de inspiração para grandes astrônomos. Um claro exemplo disso foi Aristarco de Samos, que usufruiu das configurações das fases da Lua e dos eclipses para estimar a distância entre a Terra e o Sol.

Mas como Aristarco fez isso?

Na próxima seção, por meio dos problemas considerados neste trabalho, descobriremos essa e outras estratégias utilizadas pelos antigos astrônomos da época, tal qual a forma como a geometria os auxiliou.

6.2 REESCRITA DOS PROBLEMAS

Conforme discutido no capítulo anterior, os problemas analisados careciam de reescrita para torná-los mais claros e instrutivos. Com o intuito de remediar tais impasses, nesta seção iremos reescrever os seis exercícios compreendidos nesse trabalho e resolver cada um deles.

Os problemas 1, 2 e 4 tinham propósitos semelhantes, na qual o objetivo era estimar a distância ou a razão Terra-Sol. Sendo assim associamos a ideia dos três problemas e escrevemos dois novos problemas, porém com o mesmo objetivo, um para o 9º ano/8ª série e outro para o 1º ano do ensino médio. Para os exercícios 3 e 5, preservamos a estrutura dos enunciados e fizemos breves alterações ao longo dos mesmos e, assim como os problemas anteriormente citados e todos os outros, os propósitos das atividades foram mantidos. Por fim, o problema 6 foi dividido em dois exercícios, a fim de prover uma melhor clareza e interpretação do enunciado pelo aluno.

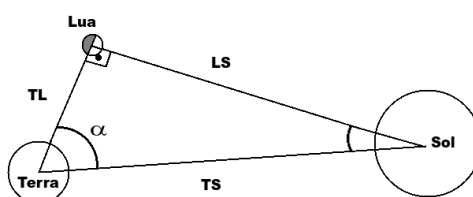
6.2.1 PROBLEMA 1:

Proposta para o 9º ano/8ª série:

Aristarco de Samos (310 a.C. - 230 a.C.), foi um astrônomo e matemático grego que gostava de ficar contemplando o céu e, por isso, decidiu observar as fases da Lua. Ele notou que quando a Lua se encontra em Quarto-Crescente ou em Quarto-Minguante, ela possui metade de sua face visível iluminada e uma configuração muito interessante, na qual a linha Lua-Sol é perpendicular a linha Lua-Terra. Então, ele decidiu esboçar um esquema representando uma dessas duas fases, a Terra e o Sol (Figura 25).

Por meio dessa observação e de suas habilidades com geometria, Aristarco conseguiu estimar a distância entre a Terra e o Sol. Supondo que você tenha herdado o esboço com as anotações de Aristarco (Figura 25), que a distância entre a Terra e a Lua seja 384.400 km e $\alpha = 89,853^\circ$, estime a distância entre a Terra e o Sol.

Figura 25 – Representação da Terra, do Sol e da Lua em fase Quarto-Crescente.



fonte: Produção da própria autora.

RESOLUÇÃO:

Pela Figura 25 notamos um triângulo retângulo formado pelo Sol, a Lua e a Terra; vamos chamá-lo de SLT . Usando a definição de cosseno no triângulo SLT , temos que:

$$\cos(\alpha) = \frac{TL}{TS} \Rightarrow TS = \frac{TL}{\cos(\alpha)} \quad (1)$$

Como $TL = 384.400 \text{ km}$ e $\alpha = 89,853^\circ$, logo:

$$TS = \frac{384.400}{\cos(89,853^\circ)} \quad (2)$$

Portanto, a distância entre a Terra e o Sol seria de, aproximadamente, $149.826.679 \text{ km}$.

COMENTÁRIOS:

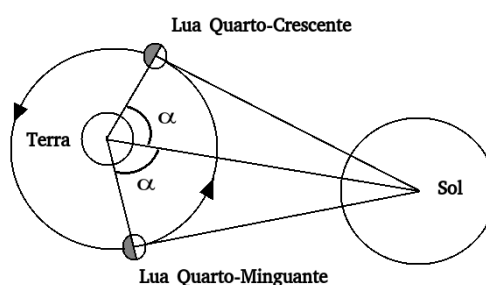
Após a aplicação da atividade, o professor poderia sugerir aos seus educandos que comparassem o valor calculado com o valor real e, ainda, propor um debate sobre a divergência entre os valores.

Proposta para o 1º ano do ensino médio:

Aristarco de Samos (310 a.C. - 230 a.C.), foi um astrônomo e matemático grego que gostava de ficar contemplando o céu e, por isso, decidiu observar as fases da Lua. Ele notou que quando a Lua se encontra em Quarto-Crescente ou em Quarto-Minguante, ela possui metade de sua face visível iluminada e uma configuração muito interessante, na qual a linha Lua-Sol é perpendicular a linha Lua-Terra. Então, ele decidiu esboçar um esquema representando essas duas fases, a Terra e o Sol (Figura 26).

Examinando seu esquema, ele percebeu que se considerasse a velocidade da Lua e da Terra constantes, poderia comparar a duração do ciclo lunar (29,5 dias) com o tempo que a Lua demora para ir de Quarto-Crescente a Quarto-Minguante (14,25 dias) para encontrar a medida angular dessa passagem e, então, estimar a razão entre as distâncias Terra-Lua e Terra-Sol. Por meio dessa observação e de suas habilidades com geometria, Aristarco conseguiu estimar a razão entre as distâncias Terra-Lua e Terra-Sol. Supondo que você tenha herdado o esboço com as anotações de Aristarco (Figura 26), estime a razão entre essas distâncias.

Figura 26 – Representação da Terra, do Sol e da Lua em fase Quarto-Crescente e Quarto-Minguante.



fonte: Produção da própria autora.

RESOLUÇÃO:

Vamos considerar P como o tempo gasto para percorrer o arco da trajetória da passagem da Lua de Quarto-Crescente para Quarto-Minguante, cuja medida angular é 2α , e C o ciclo completo da Lua com medida angular de 360° . Como consideramos a velocidade constante, o tempo gasto para percorrer 2α deve ser diretamente proporcional ao tempo de ciclo completo da Lua, sendo assim ao compará-los, temos:

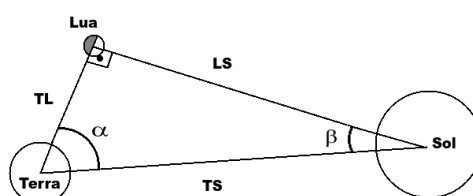
$$\frac{P}{2\alpha} = \frac{C}{360^\circ} \Rightarrow \alpha = \frac{P \times 360^\circ}{2C} \quad (3)$$

Como $P = 14,25$ dias e $C = 29,5$ dias,

$$\alpha = \frac{14,25 \times 360^\circ}{2 \times 29,5} \Rightarrow \alpha \approx 86,95^\circ \approx 87^\circ \quad (4)$$

A representação dada no enunciado pode ser simplificada e expressa pela Figura 27. Uma vez que a figura do enunciado possui dois triângulos retângulos congruentes e a razão entre as distâncias Terra-Lua e Terra-Sol pode ser calculada por ambos.

Figura 27 – Modelo utilizado por Aristarco para estimar a distância Terra-Sol.



fonte: Produção do própria autora.

Pela Figura 27 notamos um triângulo retângulo formado pela Terra, a Lua e o Sol; vamos chamá-lo

de TLS . Usando a definição de cosseno no triângulo TLS , temos que:

$$\cos(\alpha) = \frac{TL}{TS} \quad (5)$$

Como $\alpha = 87^\circ$, conforme calculamos, então:

$$\cos(87^\circ) = \frac{TL}{TS} \Rightarrow \frac{TL}{TS} = 0,0523 \Rightarrow TS = 19,1TL \quad (6)$$

Portanto, a distância entre a Terra e o Sol é cerca de 19 vezes a distância Terra-Lua, aproximadamente.

COMENTÁRIOS:

Atualmente, sabemos que a distância Terra-Lua é, aproximadamente, 400 vezes menor que a distância Terra-Sol. O professor poderia sugerir aos seus discentes que fizessem o cálculo inverso utilizando a razão atual para encontrarem um novo ângulo α , ou seja,

$$TS = 400TL \Rightarrow \frac{TL}{TS} = \frac{1}{400} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{400} \Rightarrow \alpha \approx 89,8568^\circ \quad (7)$$

E em seguida propor uma discussão sobre um possível motivo para a divergência dos valores.

6.2.2 PROBLEMA 2:

Proposta para o 9º ano/8ª série:

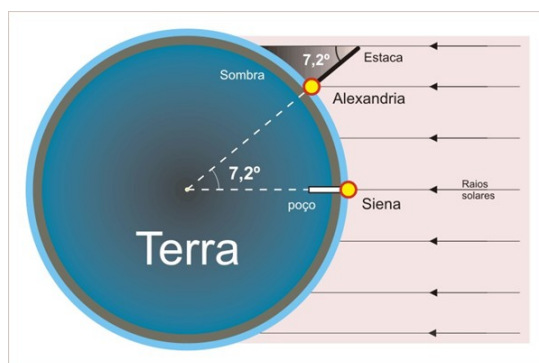
Eratóstenes (276 a.C. - 194 a.C.) - astrônomo, matemático, geógrafo e filósofo grego - trabalhava como bibliotecário na célebre Biblioteca de Alexandria, quando observou o ensolarado céu de meio dia do Solstício de Verão. Ele notou que uma estaca que estava presa adiante da biblioteca produzia uma pequena sombra sobre o chão. Todavia, ele havia lido em um pergaminho na biblioteca, que em Siena, também ao meio dia do Solstício de Verão, os raios solares que incidiam sobre o fundo de um poço não produziam nenhuma sombra. Pois, devido ao Solstício de Verão, os raios solares recaíam quase que perpendicularmente na região de Siena, diferente do que ele observou em Alexandria.

Eratóstenes compreendeu que as diferenças entre as sombras eram causadas devido a curvatura da Terra e ao dia da estação do ano, na qual as regiões se encontravam no momento em que ele observou as sombras. Por isso na região de Alexandria, ele observou uma pequena sombra e na região de Siena nenhuma sombra. Mediante a essas observações, ele constatou que poderia estimar o raio da Terra se soubesse a medida do ângulo formado pela sombra da estaca, que observou em Alexandria, e a distância entre Alexandria e Siena.

Como na época havia uma circulação regular de comerciantes entre Alexandria e Siena, a distância entre essas duas cidades era bem conhecida. Ele descobriu que a distância entre elas era de, aproximadamente, 5.000 estádios (unidade de medida grega de comprimento, sendo que 1 estádio tem cerca de 160 m) e o ângulo formado pela sombra e a estaca em Alexandria era de $7,2^\circ$.

Com as informações fornecidas e com o auxílio da Figura 28, como você estimaria o raio terrestre?

Figura 28 – Representação da problemática observada por Eratóstenes, que para fins didáticos está fora de escala.



fonte: Borges (2010).

RESOLUÇÃO:

Vamos, primeiramente, converter a distância entre Siena e Alexandria para metros. A distância entre essas duas cidades é de 5.000 estádios e 1 estádio tem, aproximadamente, 160 m. Considerando x como o valor de 5.000 estádios em metros, temos:

$$\frac{1}{160} = \frac{5.000}{x} \Rightarrow x = 800.000 \text{ m} \quad (8)$$

Considerando C como o comprimento da circunferência da Terra e 360° sua medida angular, podemos compará-los com distância entre Siena e Alexandria e seu arco, que possui medida angular de $7,2^\circ$, uma vez que consideraremos essas distâncias proporcionais. Ou seja,

$$\frac{800.000}{7,2^\circ} = \frac{C}{360^\circ} \Rightarrow C = 40.000.000 \text{ m} \quad (9)$$

Da geometria, sabemos que o comprimento da circunferência é dado por $C = 2\pi R$, tal que R é o raio da Terra, então:

$$40.000.000 = 2\pi R \Rightarrow R = 6.366.197,7 \text{ m} \quad (10)$$

COMENTÁRIOS:

O docente nesse problema poderia propor uma discussão para explicar o motivo pelo qual a medida angular do arco entre Siena e Alexandria é de $7,2^\circ$, uma vez que esse ângulo foi medido por Aristarco por meio de uma estaca em Alexandria. Além da discussão sobre o ângulo de $7,2^\circ$, um debate sobre a veracidade do valor do raio da Terra e uma possível solução para a diferença entre os valores calculados

e o valor real médio.

6.2.3 PROBLEMA 3:

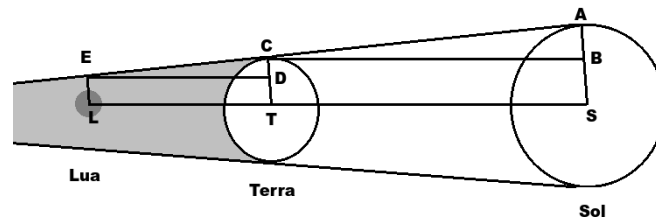
Proposta para o 1º ano do ensino médio:

Aristarco de Samos (310 a.C. - 230 a.C.) – astrônomo e matemático grego – notou, enquanto observava um eclipse lunar, que poderia calcular a razão entre o diâmetro da umbra e da Lua, através do tempo em que a Lua permanecia imersa no cone da umbra. Ao fazer isso, ele descobriu que o raio do cone da umbra era $\frac{8}{3}$ do raio da Lua.

A Figura 29 representa uma ilustração da configuração da Lua, da Terra e do Sol em um eclipse lunar, na qual o comprimento do segmento TC representa o raio da Terra, SA representa o raio do Sol, ED representa a distância Terra-Lua, CB representa a distância Terra-Sol e LE representa o raio da umbra.

Considerando a Figura 29, a constatação de Aristarco e sabendo que o raio da Terra (R_t) é de 6.371 km, como você determinaria as distâncias Terra-Sol (D_s) e Terra-Lua (D_l) e os raios do Sol (R_s) e da Lua (R_l)? Suponha que $D_s = 400D_l$, $R_l = 0,0044D_l$ e $R_s = 1,76D_l$.

Figura 29 – Esquema da configuração da Lua, da Terra e do Sol em um eclipse lunar, que para fins didáticos está fora de escala.



fonte: Produção da própria autora.

RESOLUÇÃO:

Temos, a partir das informações do enunciado, que:

- O raio da umbra equivale a $\frac{8}{3}$ do raio da Lua, logo $R_u = \frac{8}{3}R_l$;
- O raio da Terra é de $R_t = 6.371$ km;
- $D_s = 400D_l$;
- $R_l = 0,0044D_l$
- $R_s = 1,76D_l$

Pela Figura 29, definimos que:

- O comprimento do segmento TC representa o raio da Terra;
- $TC \equiv SB$;
- O comprimento do segmento SA representa o raio do Sol;
- O comprimento do segmento ED representa a distância Terra-Lua;
- $ED \equiv LT$;
- O comprimento do segmento CB representa a distância Terra-Sol;
- $CB \equiv TS$;
- O comprimento do segmento LE representa o raio da umbra;
- $LE \equiv TD$;

O problema pede para calcularmos as distâncias Terra-Sol (D_s) e Terra-Lua (D_l) e os raios do Sol (R_s) e da Lua (R_l). Para começarmos, podemos comparar os lados dos triângulos EDC e CBA , por semelhança,

$$\frac{DC}{ED} = \frac{BA}{CB} \quad (11)$$

O lado DC , pela Figura 29, pode ser escrito como $DC = TC - TD$. Analogamente, BA pode ser escrito como $BA = SA - SB$, logo:

$$\frac{TC - TD}{ED} = \frac{SA - SB}{CB} \quad (12)$$

Como os segmentos TC , SA , ED e CB representam, respectivamente, os comprimentos R_t , R_s , D_l e D_s , então:

$$\frac{R_t - TD}{D_l} = \frac{R_s - SB}{D_s} \quad (13)$$

Como $LE = TD$ e $TC = SB$, temos:

$$\frac{R_t - LE}{D_l} = \frac{R_s - TC}{D_s} \quad (14)$$

Mas LE e TC representam, respectivamente, R_u e R_t , logo:

$$\frac{R_t - R_u}{D_l} = \frac{R_s - R_t}{D_s} \quad (15)$$

Pelo enunciado $R_u = \frac{8}{3}R_l$, sendo assim:

$$\frac{R_t - \frac{8}{3}R_l}{D_l} = \frac{R_s - R_t}{D_s} \quad (16)$$

Também pelo enunciado, sabemos que $R_s = 1,76D_l$ e $D_s = 400D_l$, logo:

$$\frac{R_t - \frac{8}{3}R_l}{D_l} = \frac{1,76D_l - R_t}{400D_l} \Rightarrow \frac{D_l(R_t - \frac{8}{3}R_l)}{D_l} = \frac{1,76D_l - R_t}{400} \Rightarrow \quad (17)$$

$$\Rightarrow R_t \frac{401}{400} - \frac{8}{3}R_l = 0,0044D_l \Rightarrow D_l = \frac{\frac{401}{400}R_t - \frac{8}{3}R_l}{0,0044} \quad (18)$$

Dado que $R_l = 0,0044D_l$, então:

$$D_l = \frac{\frac{401}{400}R_t - \frac{8}{3}(0,0044D_l)}{0,0044} \Rightarrow D_l = \frac{401}{1,76}R_t - \frac{8}{3}D_l \Rightarrow \quad (19)$$

$$\Rightarrow \frac{D_l}{\frac{11}{3}} = \frac{401}{1,76}R_t \Rightarrow D_l = 62,14R_t \quad (20)$$

O raio da Terra é dado por $R_t = 6.371$ km, então $D_l = 395.893,94$ km. Sabendo a distância Terra-Lua, podemos determinar que:

$$D_s = 400D_l \Rightarrow D_s = 158.357.576 \text{ km}$$

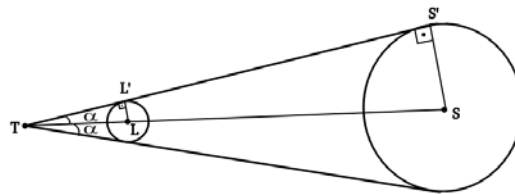
$$R_l = 0,0044D_l \Rightarrow R_l = 1.741,93 \text{ km}$$

$$R_s = 1,76D_l \Rightarrow R_s = 696.773,33 \text{ km}$$

COMENTÁRIOS:

A estimativa de $R_l = 0,0044D_l$ foi calculada por intermédio do raciocínio de que a Lua e o Sol possuem o mesmo tamanho angular (aproximadamente $0,5^\circ$), conforme ilustra a Figura 30.

Figura 30 – Esquema da configuração da Terra-Lua-Sol



fonte: Produção da própria autora.

Por semelhança entre os triângulos TLL' e $TS'S$ da Figura 30, temos:

$$\frac{SS'}{TS} = \frac{LL'}{TL} \quad (21)$$

Pela relação trigonométrica do seno no triângulo retângulo $TS'S$, sabemos:

$$\frac{SS'}{TS} = \text{sen}(\alpha) \quad (22)$$

Analogamente para o triângulo TLL' , temos:

$$\frac{LL'}{TL} = \text{sen}(\alpha) \quad (23)$$

Sendo assim,

$$\frac{SS'}{TS} = \frac{LL'}{TL} = \text{sen}(\alpha) \quad (24)$$

Como SS' , LL' , TS e TL são, respectivamente, raio do Sol (R_s), raio da Lua (R_l), distância Terra-Sol (D_s) e distância Terra-Lua (D_l), logo:

$$\frac{R_s}{D_s} = \frac{R_l}{D_l} = \text{sen}(\alpha) \quad (25)$$

Sabendo que $2\alpha = 0,5^\circ$, então $\alpha = 0,25^\circ$. Substituindo $\alpha = 0,25^\circ$ em (25), encontramos:

$$\frac{R_s}{D_s} = \frac{R_l}{D_l} \approx 0,0044 \quad (26)$$

Ou seja,

$$R_l = 0,0044D_l \quad (27)$$

$$R_s = 0,0044D_s \quad (28)$$

Como a distância Terra-Sol é, aproximadamente, 400 vezes a distância Terra-Lua, temos,

$$D_s = 400D_l \quad (29)$$

Substituindo (29) em (28),

$$R_s = 1,76D_s \quad (30)$$

Logo conforme o enunciado,

$$D_s = 400D_l, R_l = 0,0044D_l \text{ e } R_s = 1,76D_l.$$

Após a execução desse problema, o docente poderia propor um debate sobre a precisão dos valores calculados e uma possível justificativa para as divergências entre os valores reais e os calculados.

Uma possível dúvida em relação a esquematização da figura do Problema 3 (Figura 29) poderia surgir. Note que se relacionarmos as Figuras 28 e 29, percebemos uma leve inconsistência em relação aos raios solares. Perceba que na Figura 28, os raios solares incidem perpendicularmente sobre a superfície da Terra, logo o aluno poderia entender que se fôssemos esquematizar a configuração do eclipse lunar, a região em que a Lua ficaria imersa pela sombra terrestre teria um formato semelhante a um cilindro. Porém isso não acontece, já que no Problema 3 é enunciado que a Lua fica imersa em um cone de sombra.

Tal impasse ocorre devido aos modelos utilizados em cada exercício, para o Problema 2 (Figura 28) utilizamos um modelo simplificado, no qual nos interessa apenas ilustrar os raios que incidem

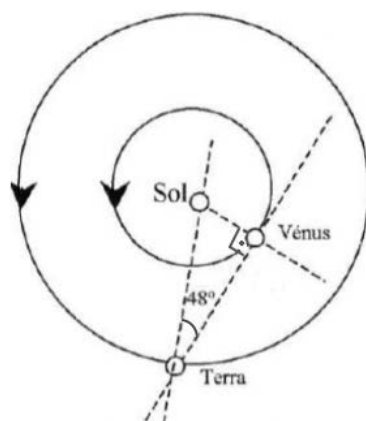
perpendicularmente a superfície terrestre, contudo no Problema 3 (Figura 29) temos uma visão mais ampla da incidência dos raios solares. Então, por exemplo, os raios solares entre as regiões dos segmento BS incidiriam a Terra perpendicularmente, porém, como esquematiza a Figura 29, os raios das regiões entre os segmentos AB incidem inclinadamente na superfície terrestre. Mas vale ressaltar que o modelo utilizado em ambos os problemas, conseguem atender ao cenário contextualizado em seu respectivo enunciado.

6.2.4 PROBLEMA 4:

Proposta para o 9º ano/8ª série:

Nicolau Copérnico (1473 - 1543) – astrônomo e matemático polonês – percebeu, investigando a posição de máxima elongação de Vênus, que o afastamento angular máximo entre Vênus e o Sol – elongação máxima (e_{max}) – era de 48° , conforme a Figura 31.

Figura 31 – Representação da posição de máxima elongação de Vênus.



fonte: Adaptado de Araújo (2013).

Por intermédio da constatação de Copérnico e sabendo que a distância Terra-Sol é de 1 u.a., determine a distância de Vênus ao Sol.

RESOLUÇÃO:

Pela Figura 31, podemos estabelecer o triângulo retângulo formado pelo Sol, Vênus e a Terra como TVS . A partir disso temos que:

- TVS é retângulo em V ;
- O comprimento do segmento TS indica a distância Terra-Sol;
- O comprimento do segmento VS indica a distância Vênus-Sol;

O problema nos pede para determinar a distância de Vênus ao Sol, ou seja, VS . Pelo triângulo TVS e usando a definição de seno, temos:

$$\text{sen}(48^\circ) = \frac{VS}{TS} \quad (31)$$

Como a distância Terra-Sol é de 1 u.a., logo:

$$0,743 = \frac{VS}{1} \Rightarrow VS = 0,743 \text{ u.a.} \quad (32)$$

COMENTÁRIOS:

Após a aplicação dessa atividade, o educador poderia sugerir que seus educandos conferissem o valor calculado com o valor real da distância Vênus-Sol (Quadro 2).

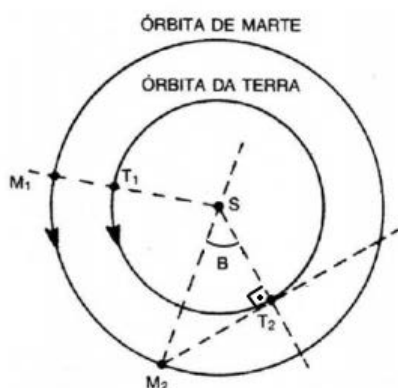
6.2.5 PROBLEMA 5:

Proposta para o 9º ano/8ª série:

Nicolau Copérnico (1473 - 1543) – astrônomo e matemático polonês – percebeu, observando as órbitas de Marte e da Terra, que poderia utilizar o período orbital de ambos os planetas para estimar a distância Marte-Sol.

Para isso estabeleceu, em um primeiro momento, que a Terra, Marte e o Sol estivessem alinhados (M_1T_1S) em configuração de oposição. Em seguida considerou a posição de quadratura oriental de Marte, ou seja, Marte, Terra e Sol formando um triângulo retângulo (M_2T_2S), conforme a Figura 32. Mas para que Copérnico conseguisse calcular a distância Marte-Sol, ele teve que observar o tempo de passagem entre essas duas configurações. Ao fazer isso descobriu que Marte demora 106 dias para sair da configuração de oposição para a de quadratura oriental.

Figura 32 – Esquema representando as posições de oposição e quadratura oriental de Marte.



fonte: Adaptado de Araújo (2013).

Por intermédio da constatação de Copérnico, considerando a velocidade do sistema Terra-Marte constante e sabendo que os períodos orbitais de Marte e da Terra são, respectivamente, de 687 dias e 365 dias; determine a medida do ângulo B e, em seguida, a distância Marte-Sol.

RESOLUÇÃO:

Dado que a Terra demora 365 dias para varrer um ângulo de 360° , podemos determinar a medida angular x formada pelo arco T_1T_2 , pois sabemos que para completar essa passagem a Terra demora 106 dias, então:

$$\frac{365}{360^\circ} = \frac{106}{x} \Rightarrow x = 104,55^\circ \quad (33)$$

Pelo mesmo princípio, podemos encontrar a medida angular y do arco M_1M_2 , logo:

$$\frac{687}{360^\circ} = \frac{106}{y} \Rightarrow y = 55,55^\circ \quad (34)$$

O ângulo B pode ser calculado pela diferença entre os ângulos x e y : $B = x - y \Rightarrow B = 49^\circ$.

Pelo triângulo retângulo M_2T_2S e utilizando a definição de cosseno, temos:

$$\cos(49^\circ) = \frac{1}{MS} \Rightarrow MS = 1,52 \text{ u.a.} \quad (35)$$

COMENTÁRIOS:

Após a realização desse exercício, o professor pode sugerir que seus alunos comparem o valor calculado com o real apresentado pelo Quadro 2.

COMENTÁRIOS FINAIS:

Devido a quantidade de casas decimais dos números utilizados nos problemas anteriores, é fundamental o uso de calculadoras para facilitar o cálculo das estimativas pelos alunos.

Vale ressaltar que em todos os problemas, os valores calculados estão sujeitos à discordâncias com os valores reais, uma vez que são utilizadas estimativas de parâmetros e valores insuficientemente precisos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho ambicionou investigar algumas aplicações da astronomia no ensino da matemática, orientado pela pergunta “Como a geometria, mediante ao seu ensino, pode se conectar com a astronomia?”. Para assimilar tal questionamento fez-se uso da pesquisa qualitativa com uma abordagem hermenêutica, conforme descrito ao longo do trabalho. Teve-se como eixo duas obras que contextualizavam a astronomia como parâmetro motivador e coadjutor no ensino da geometria. Para compreender como a conexão entre os dois ramos (Geometria e Astronomia) sucedia, uma análise de cada um dos problemas foi feita para vislumbrar os conteúdos necessários para a compreensão, interpretação e resolução de cada um dos problemas indagados.

As primeiras interpretações dos exercícios propiciaram a percepção do objetivo do enunciado, então, iniciou-se a ação compreensiva da pesquisa, na qual avaliou-se os tópicos necessários para que o discente seja capaz de assimilar o que é solicitado na atividade. As análises das questões, em termos de interpretação e conteúdo de geometria, expôs que os tópicos trabalhados pelos seis problemas discutidos eram demasiadamente semelhantes, restringindo a aplicabilidade deles a duas séries (ou anos) da educação básica, mais precisamente ao 9º ano/8ª série e ao 1º ano do ensino médio.

Outro detalhe importante obtido nas análises das atividades, foi o fato de que sem um embasamento teórico sobre noções básicas do Sistema Solar e de outros fenômenos, como por exemplo as fases da Lua, a essência da aplicação da astronomia seria abalada. Uma vez que sem os conhecimentos por trás do raciocínio da problemática da atividade, o mesmo tornaria-se um costumeiro exercício turbido e cheio de fórmulas aplicadas.

Embora o cronograma dos professores sejam na maioria das vezes apertado, os tópicos de astronomia básica, explicitados ao longo desse trabalho, são essenciais para a formação do aluno e, sobretudo, a compreensão das atividades. Uma maneira interessante de se trabalhar tais conteúdos seria por intermédio de uma "semana da astronomia", na qual os educadores poderiam ensinar assuntos de astronomia e, ao mesmo tempo, exercitar a interdisciplinaridade. Uma vez que a astronomia engloba tópicos de Geografia, Matemática, História e Ciências (Física, Química e Biologia), revelando ao aluno que as disciplinas se desenvolvem e conversam entre si e não são apenas matérias isoladas que "não servem para nada".

Considerando a clareza dos enunciados, constatou-se que os mesmos careciam de uma melhor explicação dos objetivos das problemáticas. Logo, para remediar esses dilemas, uma proposta de reescrita dos seis problemas destacados foi feita. Refletindo sobre as intenções de cada um dos exercícios, os enunciados foram reformulados, integrando os educandos no contexto dos cenários das atividades. Por meio da reescrita, além da inserção dos alunos na panorama do problema, informações e ilustrações foram apresentados na estrutura dos enunciados, norteando o raciocínio e a lógica de sua resolução.

Em meio a isso, ao retomar a pergunta norteadora desse trabalho, sendo ela “Como a geometria, mediante ao seu ensino, pode se conectar com a astronomia?”, as análises feitas ao longo dessa pesquisa por meio das duas obras consideradas, apontaram que, talvez, o principal descuido ao tentar aplicar

problemas de geometria com o auxilio da astronomia, seja a forma errônea de como os enunciados são montados e apresentados aos educandos. Pois apenas contextualizar não é o bastante, é necessário que os discentes entendam a construção, a motivação e a problemática por trás do problema e não apenas aplicar e calcular.

À vista disso, o presente trabalho expande as possibilidades para incentivar os docentes a investirem em atividades contextualizadas em astronomia e ao mesmo tempo ponderarem sobre novas maneiras de lecionar os conteúdos, a fim de instigar os alunos na busca pelo saber, em especial as ciências exatas, para que transcorra sempre a reflexão sobre o conhecimento e o aprendizado.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, D. S. S. **Geometria fractal: uma proposta para sala de aula**. 2016. 50 f. Trabalho de conclusão de curso (Graduação) – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, 2016.
- ARAÚJO, A. L. de. **Aplicações de astronomia no ensino de matemática na educação básica**. 2013. 83 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Matemática, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2013.
- ÁVILA, G. S. de S. Geometria e astronomia. **Revista Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 13, n. 6, p. 167–174, 2010a.
- ÁVILA, G. S. de S. **Várias faces da matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral**. São Paulo: Blucher, 2010b, 204 p.
- BARBOSA, P. M. O estudo da geometria. **Revista Brasileira para Cegos (RBC)**, Rio de Janeiro, v. 25, p. 14-22, 2003.
- BBC BRASIL. **Telescópio Hubble produz a melhor imagem de Marte**, 2001. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2001/010706_marte.shtml>. Acesso em: 19 jun. 2018.
- BERTINETI, E. P.; BRUM, M. L. T.; OLIVEIRA, N. A. **Hermenêutica e educação: um diálogo com a realidade**, [S.l.], 2016. Disponível em: <<http://gestaouniversitaria.com.br/artigos/hermeneutica-e-educacao-um-dialogo-com-a-realidade>>. Acesso em: 08 jan. 2018.
- BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, [S.l.], v. 5, p. 15–26, 2012.
- BORGES, S. **Eratóstenes**. 2010. Disponível em: <http://plutaoplanetaplutao.blogspot.com.br/2010/09/leituras-do-blog_04.html>. Acesso em: 25 jun. 2018.
- BOCZKO, R. **Conceitos de astronomia**. [s.l.]: Edgard Blucher, 1984. 430 p.
- BOVO, M. C. Interdisciplinaridade e transversalidade como dimensões da ação pedagógica. **Revista Urutágua**, Paraná, v. 7, p. 1–12, 2004.
- CANIATO, R. Astronomia e educação. **Revista Universo Digital**. Liga Iberoamericana de Astronomia. Santa Fe, Argentina, n. 54, p. 80-91. 2005.
- CARMO, J. do. **Por que não ocorrem eclipses todos os meses?** 2012. Disponível em: <<http://joaodocarmo.blogspot.com/2012/07/por-que-nao-ocorrem-eclipses-todos-os.html>>. Acesso em: 19 jun. 2018.
- CASTRO, R. de. **Mercúrio revelado pela sonda Messenger**. 2008. Disponível em: <<http://eternosaprendizes.com/2008/10/08/mercurio-revelado-pela-sonda-messenger/>>. Acesso em: 20 jun. 2018.
- CASTRO, R. de. **Netuno e Tritão segundo a Voyager 2**. 2009. Disponível em: <<http://eternosaprendizes.com/2009/12/13/netuno-e-tritao-segundo-a-voyager-2/>>. Acesso em: 22 jun. 2018.

CASTRO, R. de. **New Horizons visita Plutão e suas luas**. 2015. Disponível em: <<http://eternosaprendizes.com/2015/07/14/14-de-julho-de-2015-new-horizons-visita-plutao-e-suas-luas/>>. Acesso em: 25 jun. 2018.

CHOWN, M. **Sistema Solar**. São Paulo: Blucher, 2014, 226 p. Disponível em: <<https://www.blucher.com.br/sistemasolar/pdf/blucher-sistema-solar-amostra-1o-capitulo.pdf>>. Acesso em: 14 jul. 2018.

DUNBAR, B. **Cassini captures stunning view of Saturn**. 2008. Disponível em: <https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_137.html>. Acesso em: 02 jul. 2018.

DUNBAR, B. **Astronauts eyes**. 2012. Disponível em: <https://www.nasa.gov/topics/earth/features/astronauts_eyes/as17-148-22727.html>. Acesso em: 02 jul. 2018.

FERREIRA, A. B. de H. **Mini Aurélio: O dicionário da língua portuguesa**. Curitiba: 7. ed – Editora Positivo, 2008, 896 p.

FINI, M. I.; MACHADO, N. J. **Currículo do estado de São Paulo: matemática e suas tecnologias**, Secretaria da Educação – 1. ed. atual. – São Paulo, 2012. 72 p.

FREITAS, B. A. **Introdução à geometria euclidiana axiomática com o Geogebra**. 2013. 61 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Pós-Graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

GARNICA, A. V. Professor propõe utilização da hermenêutica na matemática. **Folha de São Paulo**, São Paulo, 1996. Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/fsp/1996/6/02/cotidiano/8.html>>. Acesso em: 12 jan. 2018.

GASPAR, H. da S. **Origem dos satélites irregulares de Júpiter: captura de asteroides binários primordiais**. 2013. 49 f. Tese (Doutorado) – Curso de Física, Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, 2013.

GOUVEIA, R. **Eclipse lunar**. 2018. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/eclipse-lunar>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

GOUVEIA, R. **Eclipse solar**. 2018. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/eclipse-solar>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

GOUVEIA, R. **Fases da lua**. 2018. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/fases-da-lua>>. Acesso em: 02 ago. 2018.

GRIDCLUB. **Which planet has the longest orbit?** Disponível em: <https://gridclub.com/subscribers/info/fact_gadget_2009/1001/space/planets_and_moons/63.html>. Acesso em: 1 out. 2018.

HUBBLESITE. **Uranus**, 2002. Disponível em: <http://hubblesite.org/image/1267/news_release/2002-28>. Acesso em: 27 jul. 2018.

- LANG, F. **Como é possível que a Lua mostre sempre a mesma face para a Terra?** 2013. Disponível em: <<https://www.if.ufrgs.br/novocref/?contact-pergunta=como-e-possivel-que-a-lua-mostre-sempre-a-mesma-face-para-a-terra>>. Acesso em: 27 jul. 2018.
- LEE, K. (Org.). **Seasons and ecliptic simulator**. Disponível em: <<http://astro.unl.edu/classaction/animations/coordsmotion/eclipticsimulator.html>>. Acesso em: 20 set. 2018.
- LUCIZANI, A. C. **Aplicações de astronomia no ensino de matemática**. 2016. 47 f. TCC (Graduação) – Curso de Ciências e Matemática, Instituto Latino-Americano de Ciências da Vida e da Natureza da Universidade Federal da Integração Latino-Americana, Foz do Iguaçu, 2016.
- MAGALHÃES, L. **Estações do ano**. 2018. Disponível em: <<https://www.todamateria.com.br/as-estacoes-do-ano>>. Acesso em: 13 ago. 2018.
- MARAN, S. P. **Astronomia para leigos**. Rio de Janeiro: Alta Books, 2011, 328 p.
- MEC. **Parâmetros curriculares nacionais ensino médio: bases legais**. Brasília: Ministério da Educação, 2000, 109 p.
- NEVES, J. L. Pesquisa qualitativa: características, usos e possibilidades. **Caderno de pesquisas em administração**, São Paulo, v.1, n. 3, p. 1–5, 1996.
- NOGUEIRA, S.; CANALLE, J. B. G. **Astronomia: ensino fundamental e médio**, Brasília: MEC, SEB; MCT; AEB, 2009, 232 p. 11 v. (Coleção Explorando o Ensino).
- OLIVEIRA FILHO, K. de S.; SARAIVA, M. de F. O. **Astronomia e astrofísica**, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004, 784 p.
- PALMER, R. **Hermenêutica**. São Paulo: Edições 70 Ltda, 1969, 308 p. Tradução de Maria Luísa Ribeiro Ferreira.
- PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no brasil: causas e consequências. **Revista Zeteticé**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 7–17, 1993.
- PAVANELLO, R. M. Por que ensinar/aprender geometria? In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. **Anais...** São Paulo: FE-USP, 2004.
- SCHWERTZ, C. C. **Abordando conceitos de astronomia e geometria nos anos finais do ensino fundamental através da construção de um gnômom**, Rio Grande do Sul, p. 1–22, 2013. Disponível em: <<http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/handle/123456789/1549>>. Acesso em: 27 fev. 2018.
- SOUZA, J. da S. **A abdução de Pierce: um estudo hermenêutico**. 2014. 93 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Unesp de Rio Claro, Rio Claro, 2014.

SOUZA, N. F.; ROSEIRA, N. A. F. A contextualização no processo de ensino-aprendizagem da matemática. In: XVI Jornada Regional de Educação Matemática, 2010, Rio Grande do Sul. **Anais...** Rio Grande do Sul: UPF, 2010.

SUTHERLAND, P. **NASA thinks there may be alien life on Venus**. 2018. Disponível em: <<https://nypost.com/2018/04/02/nasa-thinks-there-may-be-alien-life-on-venus/>>. Acesso em: 17 ago. 2018.

THE PLANETARY SOCIETY. **High-resolution Voyager 1 view of Jupiter with Io and Europa**, 2001. Disponível em: <<http://www.planetary.org/multimedia/space-images/jupiter/high-resolution-voyager-1.html>>. Acesso em: 17 ago. 2018.

VOELZKE, M. R.; ARAÚJO, M. S. T. Plutão: planeta ou "planeta-anão"? **REnCiMa**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 66–79, 2010.

ZOLNERKEVIC, I. **Por que Urano gira de lado**. 2011. Disponível em: <<http://revistapesquisa.fapesp.br/2011/11/30/por-que-urano-gira-de-lado/>>. Acesso em: 29 ago. 2018.