

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**SOBRE A PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS PARA A
NOÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR EM
ÁLGEBRA LINEAR**

Viviane Cristina Almada de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Romulo Campos Lins

Dissertação apresentada Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Rio Claro, para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática (Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos).

Rio Claro (SP)

2002

510.07 Oliveira, Viviane Cristina Almada de
O48s Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear / Viviane Cristina Almada de Oliveira. – Rio Claro : [s.n.], 2002
187 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Romulo Campos Lins

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação matemática.
3. Ensino superior. I. Título.

SUMÁRIO

Índice	i
Índice de figuras	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Capítulo I	
Introdução	01
Capítulo II	
Uma leitura de processos cognitivos e suas implicações	14
Capítulo III	
Possíveis significados produzidos para transformações lineares a partir de textos matemáticos.....	27
Capítulo IV	
Análise das entrevistas	53
Observações finais	99
Referências bibliográficas	105
Anexos	114

ÍNDICE

Capítulo I – Introdução

1.0- Algumas observações	01
1.1- Álgebra Linear	03
1.2- Transformações Lineares	04
1.3- Revisão de investigações realizadas	06
1.4- Nossa pesquisa	12

Capítulo II – Uma leitura de processos cognitivos e suas implicações

2.1- Conhecimento.....	16
2.2- Comunicação.....	17
2.3- Significado	20
2.4- Campo Semântico	21
2.5- Algumas conseqüências	26

Capítulo III – Possíveis significados produzidos para transformações lineares a partir de textos matemáticos

3.0- Por que essas análises?	28
3.1- Transformações lineares e transformações lineares: diferentes maneiras de se produzir significado.....	29
3.2- Um processo de mudança da idéia de transformação..	31
3.2.1- Primeiro momento: transformação para causar certos efeitos	32
3.2.2- Segundo momento: transformações e o estudo dos invariantes	37
3.2.3- Terceiro momento: transformações lineares e espaços vetoriais	40
3.3- Estes outros livros	44

Capítulo IV – Análise das entrevistas

4.1- Os sujeitos	54
4.2- O curso de Introdução à Álgebra Linear	54
4.3- As tarefas e as análises	56
4.3.1- Tarefa 1	57
4.3.2- Tarefa 2	62
4.3.3- Tarefa 3	75
4.3.4- Tarefa 4	81
4.3.5- Tarefa 5	85
Observações finais	99
Referências bibliográficas	105
Anexos	114

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 4.1	58
Figura 4.2	59
Figura 4.3	63
Figura 4.4	64
Figura 4.5	76
Figura 4.6	77

RESUMO

Esta pesquisa, baseada no Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS), trata da produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra Linear. Foi desenvolvida a partir das análises de: textos matemáticos – alguns considerados históricos e outros contemporâneos – e entrevistas com duas alunas de um curso de Matemática. Neste trabalho, identificamos possíveis significados que podem ser produzidos para a noção de transformação linear, o que pode auxiliar na prática de professores de Álgebra Linear. Além disso, poderá subsidiar discussões mais amplas sobre a formação inicial do professor de Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebra Linear, Transformação Linear, produção de significados.

ABSTRACT

This research, based on the Theoretical Model of Semantic Fields (TMSF), deals with the production of meanings for the notion of linear transformation in Linear Algebra. It has been developed from the analysis of: mathematics texts – some taken as historical and others as contemporary – and interviews with two undergraduate mathematics students. In this work, we have identified possible meanings that can be produced for the notion of linear transformation. That can help the practice of teachers of Linear Algebra and might also promote more general discussion about the pre-service education of mathematics teachers.

KEY WORDS: Linear Algebra, Linear Transformation, production of meanings.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.0 – Algumas observações

Penso ser pertinente iniciar este primeiro capítulo pontuando algumas das circunstâncias que, de certa maneira, trouxeram-me até aqui. No ano de 1996, quando graduanda do curso de Matemática – modalidade bacharelado em Informática – da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) em Minas Gerais, tive um primeiro acesso a publicações relativas à Educação Matemática, em que algumas diziam respeito ao Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS). Embora incipientes, algumas reflexões sobre processos cognitivos faziam então sentido e passaram a ter seu lugar nos meus afazeres acadêmicos; acredito que muito disso se deve ao fato de eu ter lidado com a realidade do ensino-aprendizagem da disciplina Álgebra Linear I no Departamento de Matemática da UFJF como monitora.

Meus interesses profissionais voltaram-se então para a licenciatura em Matemática. Ao final de 1997, surgiu a oportunidade de cursar a pós-graduação Lato Sensu em Educação para a Ciência da UFJF e até o final do curso deveria ser feita uma monografia. Foi quando então precisei lançar mão de uma base teórica que sustentasse nossa fala sobre a produção de significados para frações a partir de um livro-texto: o MTCS era ideal.

No período de abril/99 a outubro/2000 atuei como professora substituta do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, em Minas Gerais. Sendo de meu interesse tanto continuar na docência superior como dedicar-me à pesquisa, passei a integrar o

corpo discente do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp - Campus de Rio Claro.

A relativa familiaridade com o MTCS e com a Álgebra Linear casou com os interesses do grupo do qual passei a fazer parte como orientanda do Professor Romulo Campos Lins. A partir de discussões do que poderia ser abordado em nossa pesquisa, ponderamos que uma investigação sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra Linear caberia tanto aos anseios da pesquisadora como do próprio grupo¹.

Particularmente, acreditava que o desenvolvimento dessa pesquisa poderia possibilitar um aprimoramento da minha prática enquanto docente e permitir que minhas reflexões se voltassem à ação. Embora essas expectativas pessoais já pudessem servir como justificativas para a pesquisa, esta vai mais além: está inserida num projeto maior, que visa produzir uma abordagem para o desenvolvimento de cursos de Matemática adequados à formação inicial do professor de Matemática, denominado *Um quadro de referência para as disciplinas de Matemática num curso de Licenciatura em Matemática*. É caracterizado como um projeto integrado na área de Educação Matemática envolvendo educadores matemáticos e matemáticos.

Nesse quadro mais amplo, nossa pesquisa compõe as frentes que trabalham com a dinâmica do processo de produção de significado e com o estudo das relações entre Enseñanza Problémica (Majmutov, 1983) e o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (Lins, 1992 b), possivelmente contribuindo na produção de um texto de referência para um curso de Álgebra Linear para a licenciatura.

¹ Atualmente, fazem parte do grupo os professores Amarildo Melchiades da Silva, Anízio Perissinoto Jr., Patrícia Rosana Linardi, Regina E. Bathelt, Romulo Campos Lins, Teresita Noriega e a autora deste trabalho. Muitos dos encaminhamentos dados a esta pesquisa se devem às contribuições recebidas dos companheiros em nossos encontros semanais.

1.1 – Álgebra Linear

A Álgebra Linear surgiu como ramo da Álgebra no século XX. Houve um período anterior de axiomatização e aceitação das suas noções que foi de 1875 até por volta de 1940. O coroamento desse processo se deu em 1941 com a publicação de *A Survey of Modern Algebra* de Garrett Birkhoff e Saunders Mac Lane (Moore, 1995). Dessa forma, a Álgebra Linear pode ser considerada como uma área de estudo relativamente recente. Esse fato não diminui sua importância em cursos de Matemática, nem em outros cursos que tenham algum envolvimento com as ciências exatas; muito ao contrário. Currículos de cursos como Física, as Engenharias, Informática, Economia e Administração têm destinado à Álgebra Linear ao menos uma disciplina introdutória, isso sem falar das possíveis outras que surgem com o objetivo de estudar as aplicações mais específicas da Álgebra Linear a um curso em particular.

No prefácio da 1ª edição brasileira do livro Álgebra Linear, traduzido por Roberto Ribeiro Baldino do original *Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra*, de Seymour Lipschutz, temos como palavras do tradutor:

A Álgebra Linear constitui hoje parte indispensável da formação básica, não só de matemáticos, mas de quantos necessitem aplicar Matemática, mesmo em suas formas mais rudimentares. Na Matemática, sua importância dificilmente pode ser subestimada, quando se compreende que é impossível atacar qualquer problema sem perfeita compreensão dos fenômenos lineares.

A relevância da Álgebra Linear no ensino superior despertou o interesse de educadores matemáticos franceses e canadenses. Para estes pesquisadores, no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem, o

primeiro curso de Álgebra Linear é geralmente mal sucedido. Na expectativa de mudança desse quadro, os franceses Jean-Luc Dorier, Aline Robert, Jaqueline Robinet e Marc Rogalski fizeram uma análise epistemológica e didática das dificuldades de estudantes em álgebra linear no primeiro ano da universidade francesa de Ciências. Já Joel Hillel e Anna Sierpinska pesquisaram o ensino e aprendizagem da álgebra linear na perspectiva de diferentes níveis de linguagem usados para descrever vetores e operadores.

Em termos de Brasil, concordamos com Silva (1997) quando diz:

... suspeitamos que a realidade do ensino e da aprendizagem da Álgebra Linear no Brasil não apresenta um quadro muito diferente daquele apresentado por franceses e canadenses. Por isso, a nosso ver, faz-se necessário que educadoras e educadores matemáticos brasileiros investiguem sobre o tema. (p. 4)

1.2 – Transformações Lineares

É difícil exagerar a importância das transformações lineares dentro da Álgebra Linear, o que pode ser visto, por exemplo, na afirmação de Elon Lages Lima: “Álgebra Linear é o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles” (Lima, 1998, prefácio).

O estudo das transformações lineares tem, assim, papel central no desenvolvimento da teoria da Álgebra Linear, bem como em suas aplicações às diversas áreas que a têm como disciplina de interesse.

As transformações lineares se localizam geralmente, dentro da estrutura da Álgebra Linear, após o desenvolvimento da teoria dos Espaços Vetoriais. No geral, a sistematização da transformação linear, enquanto objeto matemático tal qual hoje é tratado, é a que segue.

Dados dois espaços vetoriais V e W de dimensão finita² sobre um mesmo corpo K , chamamos de transformação linear (ou aplicação linear) uma função T de V em W ($T: V \rightarrow W$) que satisfaz as condições seguintes:

$$i) \forall u, v \in V, T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$ii) \forall k \in K \text{ e } \forall v \in V, T(kv) = k T(v)$$

Poderíamos também ter condensado essas duas condições numa única, qual seja

$$\forall u, v \in V \text{ e } \forall k_1, k_2 \in K, T(k_1 u + k_2 v) = k_1 T(u) + k_2 T(v).$$

As aplicações das transformações lineares aparecem nas mais variadas áreas, por exemplo, Biologia, Geologia, Física, Engenharias, Economia, sem falar da sua utilização dentro da própria Matemática.

Por exemplo, segundo Moura (1983), “a mecânica quântica é uma teoria linear”. Essa afirmação, por si só, já demonstra a utilidade da Álgebra Linear na Física. Mais especificamente, no que diz respeito às transformações lineares, grande parte do livro Mecânica Quântica do mesmo autor, é formulada em termos de vetores de estado e de operadores lineares.

Por outro lado, do ponto de vista matemático, as transformações lineares do plano ($\mathbb{R}^2$ com a estrutura usual) no plano descrevem certas deformações interessantes, como por exemplo, expansão (ou contração) uniforme, reflexão em torno do eixo x ou da origem, rotação de um ângulo θ e cisalhamentos. Da mesma maneira, operadores lineares no espaço ($\mathbb{R}^3$ com estrutura usual) podem representar reflexões em relação aos planos ou eixos coordenados e também na origem, ou ainda rotações em relação a algum dos eixos coordenados.

Esses são apenas alguns exemplos que indicam a relevância da Álgebra Linear e, em particular, das transformações lineares. Poderíamos

² Nesta dissertação estaremos considerando apenas as transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita.

listar outros, mas essa não é a intenção da nossa pesquisa. Como dissemos, estaremos em busca de subsídios para a organização de uma disciplina de Álgebra Linear para a formação do futuro professor de matemática. Nesse sentido, a Álgebra Linear se revela de importância ao se discutir noções como, por exemplo: reta (que não é métrica), subespaço (plano no espaço, por exemplo) e transformações lineares (forma de estruturar uma certa classe de transformações do plano/espaço, como indicadas acima).

1.3 – Revisão de investigações já realizadas

Embora haja mais tempo que vêm sendo feitas tentativas de se transformar o ensino da Álgebra Linear, apenas desde 1985 é que uma reflexão mais profunda surge no campo do seu ensino-aprendizagem (Dorier, 1994). Colocaremos a seguir as propostas de alguns trabalhos realizados, bem como considerações feitas pelos seus autores.

· Fora do Brasil

Um dos motivos da inquietação de muitos pesquisadores em relação ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, colocado por Dorier (1994), deve-se ao fato de a maioria dos alunos, até mesmo aqueles que têm êxito³ ao final do curso, fazerem mero uso dos mecanismos e técnicas associados à resolução de problemas típicos de Álgebra Linear, sem estarem de fato compreendendo conceitos de tal teoria.

Baseando sua pesquisa na análise dos resultados de testes dados a estudantes do primeiro ano da universidade francesa, Dorier (1990) investigou se as noções de lógica básica são pré-requisitos para se obter sucesso no curso de Álgebra Linear e quais tipos de habilidades prévias

³ Aqui, êxito é entendido como aprovação no curso.

são necessárias para tal feito. Mesmo apresentando conclusões incompletas nesse seu trabalho, Dorier acredita que, além das noções de lógica básica, também as habilidades mais gerais em áreas diferentes dos cálculos algébricos (por exemplo, polinômios, integração, cálculo diferencial) devem ser trabalhadas, sugerindo que o ensino da Álgebra Linear não depende apenas dela própria. Em linhas gerais, com base em suas conclusões, propõe uma reorganização do ensino da Álgebra Linear na qual primeiramente seriam ensinadas somente as noções básicas da Álgebra Linear, separadas por um período razoável dos cálculos com matrizes e ilustradas pela solução de vários problemas envolvendo espaços vetoriais (isso contraria muitos dos livros-texto de Álgebra Linear, que tratam inicialmente do conceito de matriz e das suas operações); incluiria também o ensino explícito da lógica e de noções de cálculos algébricos úteis à resolução de problemas.

Juntamente com outros pesquisadores franceses, depois de feita uma análise epistemológica e didática das dificuldades de estudantes de Álgebra Linear, no primeiro ano de ciências da universidade francesa, e levantadas algumas hipóteses para o trabalho de pesquisa, Dorier (1994) apresenta uma proposta de ensino para Álgebra Linear, constituída por diversas estratégias de longo prazo (Robert, 1992) interligadas, utilizando a “meta-alavanca” (Robert, 1993) bem como a mudança de posição ou pontos de vista (Douady, 1986), para que se obtenham modificações substanciais para um número suficiente de alunos.

Segundo Hillel e Sierpinska (1994), a inexperience dos estudantes em lidar com provas e teorias baseadas em provas é um fator que acentua ainda mais os problemas que envolvem o ensino-aprendizagem da Álgebra Linear. Sugerem que a linguagem da Álgebra Linear deva ser vista como uma rede de linguagens e regras de tradução entre elas e fazem um estudo de uma dificuldade específica que os alunos têm em Álgebra Linear: entender a noção de representar um operador linear numa dada base e mudar tal representação para outra base.

Podemos perceber que, no geral, as pesquisas acima citadas tratam das dificuldades encontradas por alunos em cursos de Álgebra Linear, e propõem alternativas que possam vir a facilitar o seu ensino-aprendizagem. Essas alternativas vão desde uma reorganização do currículo do curso de Álgebra Linear, levando em conta algumas habilidades prévias que o aluno deva ter, até ao uso de certas metodologias de ensino, refletindo, dessa forma, uma preocupação com o conteúdo.

· No Brasil

- ◆ Uma análise da produção de significados para a noção de base em Álgebra Linear

Numa perspectiva diferente dos pesquisadores mencionados no item anterior, preocupando-se com o processo de produção de significados, A. M. Silva (1997) desenvolveu um estudo de caráter local em Álgebra Linear: investigou sobre a produção de significados para a noção de base, sob a ótica do MTCS. Seu estudo evidenciou os diversos significados que podem ser produzidos para a noção de base, a partir de informantes distintos, reforçando a tese defendida por Lins de que

(...) quando se encontram com textos do matemático – livros didáticos, por exemplo – as pessoas de fato produzem significados que não são os do matemático, mas que as tornam capazes de falar a partir daquele texto (...). (Lins apud Silva, 1997, p. 115)

Para tanto, inicialmente fez um estudo histórico de domínios nos quais pudesse ter surgido a noção de base, considerando o trabalho de

alguns matemáticos: Georg Ferdinand Frobenius (1849 - 1917) no processo final da teoria geral de resolução de sistemas de equações lineares numéricas; Leonhard Euler (1707 - 1783) na teoria das equações diferenciais lineares; William Rowan Hamilton (1805 - 1865) na teoria dos quatérnios; Hermann Günther Grassmann (1809 -1877) na sua teoria da extensão; e Guiseppe Peano (1852 - 1932) no seu *Calcolo Geometrico*. Pôde concluir que

(...) Frobenius, Hamilton, Grassmann e Peano desenvolveram Campos Semânticos distintos e chegaram a constituir o objeto base dentro de contextos bem definidos, caracterizado pelos trabalhos que desenvolveram em domínios distintos. [...] Euler não chegou à noção de base de solução de uma equação diferencial linear. (pp. 56 e 57)

Voltando seu olhar para outros informantes, Silva analisa livros-texto de Álgebra Linear, face à importância que tiveram na transição da Álgebra Linear do campo científico para a sala de aula. Da leitura de alguns desses livros, ele gerou frases a partir das quais apresentou possíveis significados matemáticos para a noção de base, mostrando assim, que, mesmo para textos que poderiam ser chamados equivalentes (já que discorrem sobre uma noção de base), são produzidos significados distintos. Um outro ponto importante dessa parte do estudo de Silva é que, ao caracterizar campos semânticos a partir da produção de significados para a noção de base, ele pode indicar aqueles significados que o professor espera que seus alunos produzam.

Percebendo a limitação de avaliações escritas enquanto informantes da produção de significados para a noção de base pelos alunos de um curso introdutório de Álgebra Linear, Silva opta pelo estudo de caso, utilizando registros escritos pelos sujeitos da pesquisa, entrevistas e atividades videografadas. Nesse contexto, busca identificar

que objetos são constituídos, ‘tanto para caracterizar o núcleo que está se formando quanto para identificar novos objetos’ (p. 90), e a maneira que os informantes estão operando nesses núcleos. Feita a análise das atividades com base no MTCS, o autor percebe que os alunos (sujeitos da pesquisa) não operaram nos supostos campos semânticos preferenciais⁴.

A partir desses três informantes distintos, são identificados diferentes modos de produção de significados e, em vista dessa diversidade, Silva alerta para uma possível valorização de alguns deles e exclusão dos demais, e um conseqüente afastamento do aluno que não tem o *seu* modo de produção de significados explicitado na sala de aula. Sugere, portanto, que, na prática diária de sala de aula, se deva investir em metodologias alternativas de ensino que estimulem os alunos a falar a partir de textos matemáticos, considerando o alerta de Lins, quando diz:

O olhar deve alcançar sempre o fenômeno da sala de aula, o processo de aprendizagem; mas o olhar fixo, catatônico, sobre o aluno, é tão incompleto quanto o olhar fixo, catatônico sobre a Matemática. Se este olhar fixo sobre a Matemática tem sido corretamente apontado como fruto e reprodutor de uma ideologia opressora, é também certo que o olhar fixo sobre o aluno é reprodutor de uma ideologia. (Lins apud Silva, 1997, p. 119)

♦ Álgebra Linear como curso de serviço para a computação

R. H. Silva (1999), abordando a Álgebra Linear como um “curso de serviço”, voltou sua atenção ao conteúdo em função da formação

⁴ O autor assim se refere à produção de significados de acordo com o que o professor espera ou gostaria que seus alunos fizessem em dada atividade.

profissional dos estudantes. Desenvolveu um trabalho que buscava maneira(s) de projetar, executar e avaliar uma disciplina de Álgebra Linear que atendesse às expectativas de um curso de Computação, em contraposição às disciplinas de mesmo nome ministradas sem nenhum caráter específico ao curso.

Inicialmente, buscou em entrevistas com o coordenador e com os professores do curso de Computação as expectativas que deveriam ser atendidas pela disciplina Álgebra Linear. A partir dessas expectativas e da análise de algumas bibliografias, passou a discutir, junto ao subgrupo de Álgebra Linear do GPA⁵ os tipos de atividades adequadas ao contemplamento de tais expectativas. Assumindo a pedagogia da Assimilação Solidária, realizou intervenções numa turma de Álgebra Linear do curso de Bacharelado em Ciência da Computação (Unesp, Rio Claro) procurando, sempre que possível, integrar conceitos da Álgebra Linear com a Computação.

Concordando com Carlson (et alii) quando dizem que “ainda em muitos cursos, a importância da Álgebra Linear em campos aplicados não é comunicada aos alunos” (apud Silva, 1999, p.7), sua pesquisa reafirma a urgência em se adequar os cursos de Álgebra Linear às necessidades dos clientes das disciplinas.

⁵ Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática da Unesp - Rio Claro.

1.4 – Nossa pesquisa

Diferentemente de alguns trabalhos já realizados, nossa pesquisa não se propôs a investigar primeiramente as possíveis dificuldades que os alunos pudessem vir a ter com a noção de transformação linear em Álgebra Linear ou as aplicações das transformações lineares nos ensinamentos fundamental, médio e superior. Pretendeu sim, investigando a produção de significados para a noção de transformação linear, contribuir para o desenvolvimento de um curso de Álgebra Linear para a licenciatura de Matemática adequado à formação do professor de matemática.

Reconhecemos na Álgebra Linear (assim como em outras disciplinas) idéias matemáticas – e dentre elas está a de transformação linear – para as quais os futuros professores devam produzir significados. Esses significados podem ou não corresponder àqueles eleitos ou privilegiados pela Matemática Acadêmica. Saber dessa possibilidade de produção de significados, entendendo a diferença entre eles, e quando se deve ou se é apropriado lançar mão de um ou de outro, seria, ao nosso ver, um dos objetivos centrais da Álgebra Linear na formação do futuro professor de Matemática.⁶ Claro que, sob essa perspectiva, as aplicações da Álgebra Linear nos diversos níveis de ensino enriquecem o conteúdo da disciplina e, portanto, ampliam a possibilidade de significados produzidos.

Nesse sentido, localizamos nosso trabalho dentro da Álgebra Linear, mais especificamente na noção de transformação linear, e com a possibilidade de se investigar abordagens dessa noção no curso Álgebra Linear da licenciatura em Matemática que sejam propícias à formação do professor de matemática estreitamente vinculada à sua educação matemática. Ou seja, abordagens nas quais o conteúdo não seja

⁶ Como estruturar os cursos de licenciatura em Matemática de modo que esse enfoque seja dado às disciplinas de Matemática? Essa questão está no núcleo do projeto *Um quadro de referência para as disciplinas de Matemática num curso de licenciatura em Matemática*, citado anteriormente.

justificado por ele mesmo ou por suas aplicações, mas pelas reflexões que levará o futuro educador matemático a fazer. Essa forma de examinar a produção de significados poderá até nos apontar maneiras de lidar com as possíveis dificuldades dos alunos com a noção de transformação linear, mas isso não consiste no nosso objetivo principal.

Nossa pesquisa, baseada no MTCS, desenvolvido por Lins (1992 b), teve como propósitos **analisar a produção de significados para a noção de transformação linear, de forma a subsidiar uma posterior reflexão sobre os processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra Linear** (o que posteriormente contribuirá para a prática de professores do ensino superior) podendo, dentro dessa análise, voltar nosso olhar à formação inicial do professor de matemática.

Para tanto, nosso trabalho consistiu em três linhas de frente:

(1) estudo histórico-crítico com objetivo de levantar, em determinados trabalhos, possíveis maneiras de se falar de transformações lineares; **(2)** análise de livros-texto buscando identificar os possíveis significados que podem ser produzidos para transformações lineares a partir deles; e, **(3)** entrevistas com estudantes de um primeiro curso de Álgebra Linear da Matemática investigando os significados que eles efetivamente produzem para a noção de transformação linear em diferentes contextos.

Observamos que, na direção de relacionar a produção de significados e a formação do professor de matemática, não há trabalhos já realizados⁷ e que, nossa pesquisa, parte do projeto maior citado anteriormente, espera contribuir para adequar um curso de Álgebra Linear às necessidades dos licenciandos em Matemática, produzindo (este projeto maior), possivelmente, um texto de referência.

⁷ Revisões bibliográficas não publicadas feitas por orientandos do Prof. Romulo Campos Lins sugerem fortemente isso.

CAPÍTULO II

UMA LEITURA DE PROCESSOS COGNITIVOS E SUAS IMPLICAÇÕES

No presente capítulo, comentaremos as principais concepções do MTCS, que foi a base teórica por nós adotada. Isso será feito não só na tentativa de elucidar suas idéias, mas principalmente as implicações de se escolher tal base teórica, mais fortemente no que diz respeito ao olhar e ao agir do educador matemático frente a qualquer processo cognitivo.

O MODELO TEÓRICO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS

As idéias iniciais que deram origem ao MTCS surgiram no desenvolvimento do trabalho de doutorado de Lins, que buscava estabelecer uma caracterização epistemológica para Álgebra e Pensamento Algébrico. Embora tenha sido constituído nesse contexto – Álgebra e Pensamento Algébrico – o MTCS não se restringe apenas a essa área da Matemática e a esse tipo de pensamento, nem tampouco à Matemática. Havendo processo de produção de significados, podemos aplicá-lo.

O MTCS foi caracterizado, por exemplo, por Silva (1997, p. 10) como sendo “um modelo epistemológico que nos permite compreender alguns aspectos do processo de produção de significados em matemática”. Entendamos por Epistemologia a atividade humana que estuda as seguintes questões: (i) O que é

conhecimento?; (ii) Como é que o conhecimento é produzido? e (iii) Como é que conhecemos o que conhecemos? (Lins, 1993 c).

Apesar de apontado como um modelo epistemológico, Lins (2001, p. 59) prefere concebê-lo como uma teoria que

provê uma simples, ainda que poderosa, ferramenta para pesquisa e desenvolvimento na educação matemática (...) para guiar práticas de sala de aula e para habilitar professores a produzir uma leitura suficientemente fina, assim útil, do processo de produção de significados em sala de aula.

Se observarmos com algum cuidado, perceberemos que as palavras conhecimento e significado são bastante usadas na linguagem corrente. Expressões como ‘o conhecimento dos livros...’, ‘o significado daquela frase...’ são freqüentemente articuladas. Talvez seja pelo fato de tais palavras fazerem parte do senso comum que até mesmo em trabalhos científicos costumem se referir a conhecimento e a significado sem explicitar o que por eles assumem ou entendem.

Foi exatamente a necessidade de Lins em responder ‘O que é conhecimento?’ e ‘O que é significado?’ que levou ao desenvolvimento do MTCS. Por isso é que as caracterizações de conhecimento e significado têm importância central no modelo produzido pelo autor. Vamos então a elas.

2.1 – Conhecimento

De acordo com Lins, dizemos que

Conhecimento é entendido como uma **crença** - algo que o sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza portanto como uma **afirmação** - junto com que o sujeito considera ser uma justificacão para sua **crença-afirmação**.(Lins, 1993 c, p. 86).

Tomemos um exemplo que tentará elucidar o que chamamos de conhecimento. Consideremos que tanto um aluno por volta de quatorze anos quanto um matemático acreditam e afirmam que $2 \times (-3) = (-3) \times 2$. Ao justificar sua crença-afirmação, o aluno poderia dizer que ‘Se fizermos as contas, vamos ver que $2 \times (-3)$ é igual a (-6) e que $(-3) \times 2$ é igual a (-6) ; tanto $2 \times (-3)$ como $(-3) \times 2$ são iguais a (-6) . Por isso é que eu digo que $2 \times (-3) = (-3) \times 2$ ’. Já o matemático, talvez dissesse ‘Sabemos que 2 e (-3) são números inteiros. Como para o conjunto dos números inteiros, munido das operações usuais da adição e da multiplicação, vale a propriedade comutativa da multiplicação, digo que $2 \times (-3) = (-3) \times 2$ ’. Com base no que entendemos por conhecimento, dizemos que o aluno e o matemático não produziram o mesmo conhecimento. Essa última afirmação pode soar estranha para muitos, já que tanto o matemático como o aluno acreditam e afirmam que $2 \times (-3) = (-3) \times 2$. Vejamos o porquê de os caracterizarmos como distintos.

O fato é que o conhecimento para nós não é apenas uma crença-afirmação, mas uma crença-afirmação junto com uma justificacão; e as justificacões do aluno e do matemático são diferentes: conseqüentemente, seus conhecimentos também o são. Essa diferença não é caracterizada apenas pelo fato de tais conhecimentos terem sido

produzidos pelo matemático e pelo aluno, mas por causa de suas justificações não serem a mesma; dois matemáticos, bem como dois alunos, poderiam produzir conhecimentos diferentes a partir de um mesmo texto. Para nós, a justificação é parte constitutiva do conhecimento, e esta é mais uma característica original deste modelo e que o distingue de outros. Além disso, o conhecimento é do domínio da fala (enunciação) – e não do texto (enunciado).

Como já dissemos anteriormente, o interesse de nosso trabalho é mostrar maneiras distintas de se produzir significados para transformações lineares. Por isso é que em nossos procedimentos de pesquisa demos especial atenção à fala daqueles que, de alguma forma, se expressaram a respeito de transformações lineares, tanto na pesquisa histórica, quanto nas análises de livros-texto e entrevistas. Isso porque, para caracterizarmos possíveis conhecimentos, devemos analisar crenças-affirmações e justificações que surgem a partir de textos – no nosso caso, sobre transformações lineares.

2.2 – Comunicação

A concepção de texto que citamos nos parágrafos anteriores surge da releitura que Lins faz do processo de comunicação. Tradicionalmente, comunicação é entendida como transmissão de uma mensagem de um emissor para um receptor. No processo de comunicação

(...) temos a *sensação* de que está ocorrendo algo que nos conecta, algo que nos dá razão para permanecer neste processo. É disto que precisamos nos dar conta, em primeiro lugar (...).(Lins, 1999, p. 81)

Sugerimos que se abandone a idéia de comunicação como transmissão e que se passe a pensar nas noções de texto, autor e leitor para que se compreenda o processo de comunicação como por nós é entendido.

De um lado temos o autor que, quando fala, fala para um leitor por ele constituído.



Por outro lado temos o leitor que, quando lê, constitui um autor e, segundo o que o leitor acredita que este um autor diria, é que o leitor produz significado para o enunciado.



A partir do momento em que o leitor produz significado para tal enunciado, é que esse se constitui em texto. Dessa forma, o texto – que é constituído a partir do resíduo de uma enunciação – só é texto porque existe o leitor.⁸

Tanto o autor como o leitor buscam uma maneira de constituir seus papéis como tais e que seja autorizada por um modo de produção de significados considerado legítimo – um interlocutor. Acreditar, dizer e julgar legítimo são coisas que acontecem ao mesmo tempo e juntas. Quando compartilhamos interlocutores, criamos um espaço comunicativo (Lins, 1999).

⁸ O uso de artigos definidos e indefinidos nesse parágrafo e nos seguintes, antecedendo as palavras leitor e autor é proposital; para marcar quando se quer especificar/delimitar ou não o substantivo (sintaticamente falando). Assim, quando dizemos um leitor estamos nos referindo a algum leitor e quando dizemos o leitor temos a intenção de especificar aquele leitor dentro da sua classe.

A sensação que temos de que ocorre uma comunicação efetiva é proveniente de nos colocarmos “incessante e alternativamente na posição de o autor e de o leitor “ (Lins, op. cit., p. 82).

Podemos ilustrar essa idéia imaginando o que ocorre quando lemos, por exemplo, um romance policial. Ao produzirmos significado para o que está escrito no livro – que então se torna texto para quem lê –, estamos nos colocando incessante e alternativamente nas posições de o autor e o leitor; falamos a história de acordo com o que acreditamos que um autor escreveria ao mesmo tempo em que estamos lendo. Dessa forma é que temos a sensação de que ocorreu a comunicação. Seja para o que for que estejamos produzindo significado, o processo é o mesmo. Um livro de matemática, um acontecimento, um gesto – tudo isso pode vir a se tornar texto no momento que alguém esteja produzindo significado para ele.

Nesse sentido, $2 \times (-3) = (-3) \times 2$ não é um conhecimento, e sim um texto para o matemático e para o aluno, ou para alguém que produza significado para o enunciado $2 \times (-3) = (-3) \times 2$. Também a Matemática é entendida por nós não como um conjunto de conhecimentos, mas como textos apenas no momento em que alguém fala (acredita-afirma e tem uma justificação para sua crença-afirmação) a partir de um enunciado da Matemática, isto é, produz significado para ele. É dessa maneira que esse alguém produz um conhecimento matemático.

Mais especificamente, não consideramos que, o que está registrado, por exemplo, no livro *Modern Algebra* de Van der Waerden (ou qualquer livro de Álgebra Linear) seja conhecimento; são resíduos de enunciações (para nós que escrevemos isso) que podem vir a se tornar texto para um sujeito a partir do momento que ele produza significado para tais resíduos.

2.3 – Significado

Outra idéia central do MTCS é a de significado. Dizemos que “significado é aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre o objeto numa dada atividade⁹” (Lins & Gimenez, 1997, p. 145); vale reforçar que significado não é o conjunto do que poderia ser dito, mas o que é dito. Esta definição de significado é fortemente relativista e poderia dar margem para que alguém dissesse: ‘mas então, significado é qualquer coisa’. Entretanto, cabe salientar que significado é aquilo que o sujeito pode dizer, isso porque “(...) não é tudo que *pode* ser dito [pelo sujeito], já que qualquer dada cultura aceita alguns, mas nunca todos os modos possíveis de produzir significado” (Lins & Gimenez, 1997, p. 143). Esse “poder” diz respeito à legitimidade dos modos de produção de significado, aos interlocutores. Portanto, ninguém produz significado que não seja plausível em alguma direção. Além do mais, o significado é produzido pelo sujeito, já que ele é quem diz algo. De acordo com Lins & Gimenez (1997)

(...) o problema de se estabelecer se uma pessoa tem ou não direito de “ter” um conhecimento é um problema interno do processo de produção de conhecimento, e não externo: é a própria enunciação da *crença-afirmação* que estabelece sua legitimidade, e não uma deliberação *posterior*. (p.142)

⁹ Tomaremos o termo atividade segundo Leontiev (1978): ‘Nem todo processo é uma atividade. Nós designamos apenas por este termo os processos que, realizando tal ou tal relação do homem com o mundo, respondem a uma necessidade particular que lhes é própria. [...] Designamos pelo termo de atividade os processos que são psicologicamente caracterizados pelo fato de aquilo para que tendem no seu conjunto (o seu objeto) coincidir sempre com o elemento objetivo que incita o paciente a uma dada atividade, isto é, com o motivo’ (p.296). Quanto a motivo: “designa aquilo em que a necessidade se concretiza de objetivo nas condições consideradas e para as quais a atividade se orienta, o que a estimula” (p.97).

O objeto, sobre o qual o sujeito fala, não está previamente constituído; ele é exatamente aquilo que se constitui durante a fala do sujeito a partir de um resíduo de uma enunciação. No caso do exemplo anterior, tanto o matemático quanto o aluno acreditam e afirmam que $2 \times (-3) = (-3) \times 2$, e justificam tais afirmações. Não existem objetos dados previamente no enunciado $2 \times (-3) = (-3) \times 2$, que possam ser aí identificados, e sim objetos que são constituídos quando o matemático, ou o aluno (ou qualquer outra pessoa), falam a respeito desse enunciado. No caso do aluno, ele fala em contas; já o matemático constitui em objetos o conjunto dos números inteiros, operações usuais das quais o conjunto está munido e comutatividade.

No tocante ao nosso trabalho, estamos voltados a contextos nos quais podemos produzir significados para transformações lineares. Nos contextos histórico e de livros-texto produzimos significados para resíduos de enunciações que, ao nosso ver, estão relacionadas à noção de transformação linear.

No estudo com alunos de um primeiro curso de Álgebra Linear, foram elaboradas tarefas que envolvem idéias da Álgebra Linear, em particular a de transformação linear, a partir das quais nossos sujeitos puderam produzir significados. Tomando como base os registros das tarefas realizadas, analisamos possíveis significados produzidos para a noção de transformação linear.

2.4 – Campo Semântico

No processo de produção de significados, o sujeito faz certas afirmações que não sente necessidade de justificar; afirmações que são por ele tomadas como localmente válidas. Cada uma dessas afirmações é

chamada de estipulação local. A “um conjunto de estipulações locais que, num dado momento e dentro de uma atividade, estão em jogo”, Lins (1999, p. 87) denominou núcleo.

A partir da noção de núcleo é que definimos Campo Semântico. Campo Semântico é a atividade de produção de significado em relação a um certo núcleo. Assim, sempre que o sujeito produz significado em relação a um núcleo dizemos que ele está operando em um Campo Semântico.

Para que possamos melhor esclarecer as noções de núcleo e campo semântico, comentaremos alguns resultados dos estudos de casos apresentados por Silva (1997). Tal trabalho foi realizado com dois alunos de uma instituição federal de ensino superior em Minas Gerais, Elisângela (21) e Marcelo (24), que cursavam Engenharia Civil e haviam sido aprovados na disciplina Álgebra Linear I (Matrizes, Sistemas de Equações Lineares, Determinantes e Espaços Vetoriais) no semestre anterior. Nessa parte de sua pesquisa, Silva analisou os significados produzidos por Elisângela e Marcelo em problemas de Álgebra Linear que tratavam, mais especificamente, da noção de base, buscando identificar os objetos constituídos pelos sujeitos da pesquisa.

Escolhemos uma dessas tarefas que foi apresentada aos sujeitos em forma escrita, como segue:

- 1 - a) Seja π o plano $x - 2y + z = 0$. Encontre uma base para π .
 b) Determine uma outra base para o plano π .
- 2 - Determine uma base para o espaço vetorial C , dos números complexos sobre $\mathfrak{R}$, definido por: $C = \{a + bi \mid a, b \in \mathfrak{R}\}$.

Silva procurou ir além das informações escritas: solicitou que Elisângela e Marcelo, após terem resolvido essa tarefa, falassem a respeito de suas resoluções.

Marcelo apresentou uma resolução em que encontrou as duas bases pedidas para π usando a equação do plano. Mesmo após obter a primeira base, não usou a dimensão de π para encontrar uma segunda base; tomou novamente a equação do plano π e procedeu como nos cálculos anteriores. Ao justificar o que fez, Marcelo constituiu em objetos: equação, variáveis da equação, vetor genérico, vetor como segmento orientado, dimensão, subespaço vetorial, $\mathfrak{R}^3$. Quando determinou uma base para o plano π a partir da equação do plano, isolando uma das variáveis, colocando-a em função das outras e encontrando o vetor genérico, Marcelo não sentiu necessidade de justificar, por exemplo, que aqueles dois vetores encontrados formavam uma base de π . Para ele, “a equação era um plano e por ser plano tem dois vetores”. Na atividade realizada por Marcelo, essa foi uma estipulação local; além dela, Silva descreveu outras: a equação dada ser um plano, π ser um subespaço vetorial do $\mathfrak{R}^3$, as noções de vetor genérico e geração. O conjunto dessas estipulações locais, que foram constituídas num dado momento na atividade, é o núcleo com o qual Marcelo operou. Silva chamou de Campo Semântico Algébrico-geométrico à atividade de se produzir significado em relação a esse núcleo.

A idéia de núcleo é dinâmica; o núcleo não é uma acumulação de estipulações locais e tão pouco pré-existente à atividade: ele é constituído durante a própria atividade. Segundo Lins (1999, p. 87), um núcleo não é “algo que fica guardado em algum canto da minha cabeça, um pacote que utilizo quando preciso”. No processo de se produzir significado, quando o núcleo é constituído pelo sujeito, ou seja, quando o sujeito dentro de uma dada atividade toma determinadas afirmações como localmente válidas, novas estipulações locais podem ser

incorporadas àquele núcleo, assim como, o que em outra atividade foi tomado como estipulação local, não mais ser.

Elisângela, por sua vez, ao falar sobre a atividade realizada, constituiu em objetos: vetor genérico de W , vetores como ternas ordenadas, equações, subespaço vetorial, conjunto, gerar, independência linear. Diferentemente de Marcelo, ela parece enxergar a equação $x - 2y + z = 0$ “(...) apenas como uma relação entre variáveis que podem ser isoladas a fim de encontrar o vetor genérico do conjunto e não como uma condição caracterizadora do subespaço vetorial” (Silva, 1997, p. 96). Além disso, as noções de vetor genérico, independência linear e geração são estipulações locais para Elisângela; à atividade de produzir significado em relação ao núcleo formado por essas estipulações, Silva denominou Campo Semântico gerador-l.i.

Na atividade, a entrevistada não apresentou dificuldades em determinar uma base para π ; tomando o vetor genérico de π , achou um conjunto gerador e verificou que este era linearmente independente e, portanto, base do plano π . Porém, quando lhe foi pedido para que falasse a respeito do item 2 do problema proposto (que ela não conseguiu resolver), ela disse: “Eu achei mais difícil porque, tipo assim, o exercício pedia uma base sobre $\mathfrak{R}$ e dando como condição um conjunto de número complexos” (Silva, 1997, p. 122). Sob a ótica do MTCS, Silva pôde dizer que, mesmo Elisângela tendo constituído em objetos noções como gerar e independência linear durante a atividade, ela não conseguiu produzir significado para o enunciado apresentado. Dizemos que, possivelmente, Elisângela se encontrou frente a um limite epistemológico.

Em Lins (2001, p. 45) encontramos:

Por limite epistemológico entendo a impossibilidade de produzir significado para uma

afirmação dentro de um Campo Semântico dado;(...). A importância operacional dessa noção é estabelecer que: (i) toda vez que significado é produzido existe uma restrição no horizonte das posteriores produções de significado, implicando que, (ii) se aprendizagem é entendida – corretamente, eu penso – como aprender a produzir significado, ensinar deve também apontar para uma discussão explícita dos limites criados nesse processo.

Finalizando, de acordo com Lins & Gimenez (1997, p. 144) “a natureza social de *conhecimento* e os mecanismos de inserção em práticas sociais e a existência de *limites epistemológicos* garantem que nossa formulação de conhecimento não cria um vale-tudo”.

2.5 – Algumas conseqüências

Colocadas as principais noções do MTCS, podemos então pensar em algumas conseqüências de tomá-lo como base teórica:

- em qualquer processo cognitivo, em especial naqueles que se dão em sala de aula, o nosso olhar de pesquisador ou professor deve estar voltado para a produção de significados, lembrando que a diversidade dos modos de produção de significados vem enriquecer o processo. Explicitar essas diferenças e apontar o que elas acarretam deve fazer parte da ação do educador matemático;
- a diferença dos significados de que estamos falando não é questão de estilo, preferência, interpretação ou versões de uma mesma essência: caracteriza, de fato, conhecimentos distintos; e
- concebemos que a prática do professor deve ser na direção de criar na de sala de aula um espaço comunicativo compartilhado por todos.

Pensamos ainda que, sendo a sala de aula esse espaço comunicativo compartilhado por todos, os diferentes modos de produção de significados não devem ser hierarquizados e encabeçados por aquele regido pelo discurso matemático acadêmico. É claro que este deve estar presente em tal espaço comunicativo e, portanto, ser compartilhado por todos, mas não colocado como a versão perfeita dos demais (Lins & Gimenez, 1997).

Acreditamos que as implicações em se adotar o MTCS como referencial teórico (e prático) não se esgotam nesses poucos itens colocados acima; vão bem mais além. Nos capítulos seguintes tentaremos mostrar no exercício da pesquisa estas e outras conseqüências.

CAPÍTULO III

POSSÍVEIS SIGNIFICADOS PRODUZIDOS PARA TRANSFORMAÇÕES LINEARES A PARTIR DE TEXTOS MATEMÁTICOS

Podemos entender como objetivo central de nosso trabalho a busca de diferentes maneiras a partir das quais a noção de transformação linear pode ser pensada, para então fazermos nossas reflexões sobre o ensino e a aprendizagem da noção de transformação linear, bem como da própria Álgebra Linear. Nesse sentido, julgamos serem pertinentes leituras tanto de obras tomadas como históricas quanto de livros matemáticos adotados por professores e alunos de ensino superior.

No princípio da pesquisa, nossa intenção era fazer tais estudos de forma separada: em um capítulo o estudo histórico e em outro, a análise de livros-didáticos. Concebíamos que esses contextos eram distintos e que, portanto, caberiam-lhes capítulos distintos. Entretanto, no desenvolver da pesquisa, tendo como parâmetro a produção de significados, percebemos que não havia necessidade de assim procedermos. O motivo que desencadeou essa tomada de decisão foi observarmos que a forma com que fazíamos as leituras era a mesma: estávamos produzindo significado para a idéia de transformação linear a partir daqueles textos; não havia intenção de adjetivarmos nenhum deles, apenas de os lermos. Por isso, estruturamos este presente capítulo abordando juntamente obras históricas e de matemáticos contemporâneos. Além disso, não houve um “ponto crítico”, um marco a partir do qual se dissesse: agora sim, aqui estão as transformações lineares – o que poderia justificar uma separação dos textos matemáticos

como históricos (antes de transformação linear) e didáticos (não históricos, após transformação linear).

3.0 – Por que essas análises?

Como já dissemos, o texto, nesse processo de produção de significados, nada mais é para o leitor que o resíduo de uma enunciação, para o qual ele produziu significado. Pensando assim, os trabalhos históricos e os livros didáticos são resíduos de enunciações – cada um deles passa a ser texto quando um leitor fala, produz significado para eles. No caso específico de nossa pesquisa, falamos neste capítulo dos significados por nós produzidos para os textos então chamados históricos e didáticos.

Historicamente, é plausível supor que vários modos de produção de significados estiveram em jogo. Acreditamos não serem necessárias referências bibliográficas para dizer que, no processo de constituição da Matemática enquanto ciência, provavelmente os trabalhos que muitos matemáticos desenvolveram foram textos para outros matemáticos e podem hoje vir a ser texto para matemáticos e educadores matemáticos.

Nessa dinâmica, textos históricos e livros-didáticos possivelmente influenciaram e influenciam os significados produzidos para a idéia de transformação linear em Álgebra Linear. É por isso que se tornam bastante interessantes para nós as análises que estaremos fazendo na seqüência do capítulo.

3.1 – Transformações lineares e transformações lineares: diferentes maneiras de produzir significado

Segundo Ríbnikov (1991), uma das características gerais das direções das investigações histórico-matemáticas, é que

(...) nos trabalhos de caráter histórico-matemático se reconstrói a riqueza do conteúdo real do desenvolvimento histórico das matemáticas. Neles se ilustra como surgiram os métodos, conceitos e idéias matemáticas, como se constituíram historicamente as diferentes teorias matemáticas. (p. 10)

Essa citação caracteriza algo que não fazemos. Não foi nossa pretensão neste trabalho, usando as palavras de Ríbnikov, ilustrar como surgiu o conceito ou a idéia de transformação linear.

No estudo histórico que realizamos, buscamos, a partir da leitura de textos matemáticos, apontar possíveis significados produzidos para transformações lineares.

No processo de tentarmos buscar historicamente situações nas quais matemáticos usaram certos procedimentos que, ao nosso ver, teriam alguma relação com a noção de transformação linear, não houve a necessidade de um esforço em estar sabendo ponderar o que de fato pode ter acontecido e aquilo que, com o nosso olhar, estaríamos enxergando nos trabalhos desses matemáticos. Isso porque acreditamos que não haja uma “versão” única e verdadeira de “tais situações”, e sim significados plausíveis produzidos a partir da leitura dessas situações. Nesse sentido, existem vários significados que podem ser produzidos para trabalhos matemáticos.

O que apresentamos neste capítulo é uma tentativa de se fazer o que chamamos *leitura positiva*. Diremos aqui o que determinado autor

pode ter feito, e não o que ele deveria ter feito ou o que faltaria para que seu trabalho estivesse completo (tendo como parâmetro o desenvolvimento atual da Matemática).

Assim, no intuito de encontrar referências que dissessem respeito à Álgebra Linear e, particularmente, à transformação linear primeiramente entendida como sendo uma função entre espaços vetoriais que tem duas propriedades, iniciamos nossos estudos lançando mão das seguintes publicações (a maioria de história da matemática): Bell, 1995; Bourbaki, 1976; Eves, 1997; Granger, 1974; Katz, 1992; Ríbnikov, 1991; Stillwell, 1989; Smith, 1959; Struik, 1992; van der Waerden, 1985; Wussing, 1998. Entretanto, pareceu-nos que a noção de transformação linear não foi alvo de interesse específico desses autores, já que em muitos dos livros que estudamos não houve citação alguma sobre a “gênese” de tal noção.

Partimos então para outros rumos, ainda utilizando os mesmos livros. Entendendo que a Álgebra Linear é uma área da Matemática relativamente recente, procuramos indícios que de alguma forma remetesse às transformações lineares em capítulos dedicados ao desenvolvimento da Matemática no século XIX. Surpreendeu-nos o fato de que a palavra *transformação* aparecesse em vários trabalhos matemáticos dessa época; contudo, não havia como precisarmos o que de fato vinham a ser aquelas transformações – o que exigiria de nós um trabalho histórico minucioso e que não é aqui nosso objetivo principal – e se, plausivelmente, elas se tratavam ou não de transformações lineares.

Quanto mais leituras fazíamos, mais essa situação se evidenciava. Assim, tentamos regressar aos escritos matemáticos do século XVIII, buscando melhor entender o que de fato eram aquelas chamadas transformações. Nessa procura retrospectiva permanecemos até nos encontrarmos nos séculos XVI e XVII. Chegamos a um ponto do nosso estudo em que já havíamos juntado uma quantidade razoável de elementos para tentar atingir o objetivo proposto: mostrar diferentes produções matemáticas que têm relação com transformações lineares.

Cabe salientar que não tivemos a intenção de tomar todos os resultados nos quais coubesse uma identificação com a noção de transformação linear; e, mesmo se assim o fosse, uma dissertação de mestrado talvez não seria suficiente para esse feito, já que, principalmente a partir do século XVIII, são muitas as abordagens feitas sobre transformações lineares. Buscamos particularmente aquelas que possivelmente fariam mais sentido para alunos de um primeiro curso de Álgebra Linear.

Portanto, o que fazemos neste capítulo é discorrer a respeito desse estudo em linhas mais gerais e, em determinados pontos, abordar as produções de matemáticos específicos (a partir de fontes primárias e secundárias) nas quais tenham sido mais evidentes para nós possíveis modos de se falar de transformações lineares.

3.2 – Um processo de mudança da idéia de transformação

Como já dissemos anteriormente, na busca de possíveis maneiras de produzir significados para a noção de transformação linear, chegamos a voltar nossa atenção ao século XVI. Mais do que encontrar trabalhos de matemáticos para os quais produzimos significados, identificando-os como maneiras de se falar de transformações lineares, enxergamos um processo (que não é necessariamente o único) no qual se deram mudanças no que dizia respeito a tal idéia. Nesse processo, que desembocou no final do século XIX e início do século XX com a definição de transformação linear como sendo uma função especial entre espaços vetoriais, notamos três momentos distintos: o primeiro, em que os matemáticos usavam determinadas substituições lineares para transformar uma expressão algébrica em outra, cuja forma fosse mais “tratável” (por exemplo, as formas canônicas, sobre as quais já se saberia

operar com mais familiaridade); como segundo momento, pontuamos o uso de transformações para o estudo do que permanecia invariante em certas classes de curvas quando submetidas a certas classes de transformações; e, o terceiro e último momento, que apontamos nesse processo, é aquele no qual as transformações lineares são definidas como sendo aplicações particulares entre espaços vetoriais.

Ao caracterizarmos tal processo como sendo de mudança, queremos também realçar o fato de que, nesses três momentos destacados, a noção de transformação linear não é a mesma: não foi a mesma idéia usada de maneiras diferentes em cada momento. O que foi produzido em cada momento, as maneiras de operar e os efeitos dessas operações evidenciam o caráter distinto da transformação linear nos momentos desse processo.

No que segue, estaremos destacando alguns matemáticos que, com seus trabalhos, são por nós considerados representantes de cada um dos momentos do processo de mudança da idéia de transformação linear.

3.2.1 – Primeiro momento: transformação para causar certos efeitos

Resolução de equações polinomiais cúbicas

As resoluções algébricas de equações polinomiais cúbicas e biquadráticas aparecem mais fortemente a partir do início do século XVI com os nomes de Scipione del Ferro (1465 - 1526), Nicolo Fontana de Brescia (1499 - 1557) – mais conhecido como Tartaglia – e Girolamo Cardano (1501 - 1576). Não queremos dizer com esses nomes que não houve desenvolvimentos matemáticos anteriores que tratassem de tais problemas. Por exemplo, suspeita-se que por volta de 1344, mestre Dardi de Pisa tenha escrito “Aliabraa argibra”, um tratado no qual foi feita uma

listagem de 198 tipos diferentes de equações (cúbicas e biquadráticas) e de suas regras de solução (van der Waerden, 1985, p. 47). Embora tenham aparecido esses e outros notáveis textos no que diz respeito à solução de equações cúbicas e de grau superior, estaremos nos atendo no trabalho de François Viète (1540 - 1603).

A obra na qual Viète aborda o estudo de equações cúbicas e biquadráticas é composta por dois artigos *De aequationem recognitione* e *De equationem emendatione*, que foram publicados em 1615 após a sua morte. Nela, Viète mostra

(...) como transformar vários tipos de equações em uma pequena quantidade de formas canônicas, cada uma das quais ele então mostra como resolver. Por exemplo, em vez de dar um procedimento separado para cada um dos 13 casos da cúbica, como fizeram Cardano e Bombelli, Viète mostra como transformar em cada caso a cúbica em uma nova forma não contendo termo de 2º grau. Ele então mostra como resolver cada uma dessas últimas formas. (Katz, 1992, p. 343)

Tais formas canônicas, às quais Viète chegava, eram portanto equações cúbicas sem o termo de 2º grau. As equações cúbicas eram reduzidas, através de **substituições lineares**¹⁰, a uma das três formas $x^3+mx=n$, $x^3-mx=n$ ou $mx-x^3=n$ ($m,n>0$), para as quais Viète demonstrou métodos de solução.¹¹

¹⁰ Rigorosamente, tais substituições não são lineares, mas afins. Entretanto utilizamos a palavra linear, já que em tal época não havia esse tipo de distinção.

¹¹ Observemos que nem toda equação cúbica era resolvida por Viète a partir desse procedimento, já que ele não trabalhava com números negativos. Por exemplo, a equação $2x^3+6x^2+12x+14=0$, quando reduzida pela substituição $x=y-1$, fica $y^3+3y+3=0$, que não se enquadra em nenhuma das três formas para as quais Viète demonstrou métodos de solução.

Apenas para ilustrar, em nossos termos, tomemos a cúbica $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (onde $a \neq 0$); podemos reescrevê-la como $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$, fazendo $A = b/a$, $B = c/a$ e $C = d/a$. Para eliminar o termo de 2º grau, Viète procederia fazendo uma substituição linear da forma $x = y - k$, com $k = A/3$. Assim, a equação $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$ pela substituição $x = y - A/3$ fica:

$$\begin{aligned} (y - A/3)^3 + A(y - A/3)^2 + B(y - A/3) + C &= 0 \Rightarrow \\ y^3 - Ay^2 + \frac{A^2}{3}y - \frac{A^3}{27} + Ay^2 - 2\frac{A^2}{3}y + 3\frac{A^3}{27} + By - \frac{AB}{3} + C &= 0 \Rightarrow \\ y^3 + \left(B - \frac{A^2}{3}\right)y + 2\frac{A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C &= 0 \end{aligned}$$

Um começo da Geometria Analítica

A revolução científica que se deu na Europa durante o século XVII e primeira metade do século XVIII acarretou mudanças profundas no conteúdo matemático.

O estudo dos números, das magnitudes constantes, das figuras se complementa com o estudo dos movimentos e transformações, das dependências funcionais. Muda o conteúdo interno das matemáticas, o qual adquire cada vez mais o aspecto de matemáticas das variáveis. (Ríbnikov, p.154)

É nesse contexto que surgem os primeiros trabalhos que deram maior impulso ao desenvolvimento do que hoje nós chamamos Geometria Analítica¹².

Nas obras *Ad locos planos et solidos isagoge* (1679)¹³ de Pierre de Fermat (1601 - 1665) e *La Géométrie* (1637) de René Descartes (1596 - 1650) se encontram passos fundamentais para a posterior consolidação da Geometria Analítica por matemáticos como Leonhard Euler¹⁴ (1707 - 1783). Apesar de tanto o trabalho de Fermat quanto o de Descartes terem sido de grande importância à Geometria Analítica, diferem em muitos dos seus aspectos e também objetivos.

La Géométrie é parte de uma obra maior: *Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences* (1637), através da qual Descartes tinha como objetivo proporcionar a elaboração de um método geral matemático de estudo de todas as questões das ciências naturais. Mais especificamente, em *La Géométrie* Descartes procurou demonstrar a relação entre álgebra e geometria “através da construção geométrica de soluções para equações algébricas” (Katz, p. 399).

Fermat, por sua vez, não se preocupou em estabelecer uma base geométrica para a resolução de equações algébricas. Influenciado por Viète e tendo dedicado parte de seus estudos a *Plane Loci* de Apollonius (c.250 - 175 a.C.), Fermat tinha como objetivo em seu *Ad locos planos et solidos isagoge* “demonstrar a identidade de um lugar geométrico

¹² O nome Geometria Analítica surgiu apenas nos fins do século XVIII e é devido ao matemático francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843). Apesar de tal denominação ter surgido após os tratados que estaremos abordando, iremos usá-la ao longo do nosso texto.

¹³ Neste ano, 1679, foi publicada postumamente a obra de Fermat. Porém, tornou-se conhecida em 1636; supõem-se por uma carta que Fermat remeteu a G.P. Roberval (1602-1675) em 1636 que a data de escrita da obra seja por volta de 1629.

¹⁴ Deu à Geometria Analítica um aspecto próximo ao atual no segundo volume de seu *Introductio in analysin infinitorum* (1748).

definido por uma equação algébrica com curvas já conhecidas” (Wussing, p. 131). Essas curvas, já conhecidas, eram

Linha reta	$ax = by$
Hipérbole equilateral	$xy = b$
Linhas retas	$x^2 \pm xy = ay^2$
Parábola	$x^2 = ay$
Círculo	$b^2 - x^2 = y^2$
Elipse	$b^2 - x^2 = ay^2$
Hipérbole	$b^2 + x^2 = ay^2$

Assim, equações quadráticas nas variáveis x e y poderiam ser reduzidas a uma dessas sete formas através de uma **transformação de coordenadas** (translação da origem ou rotação dos eixos). Essa abordagem usada por Fermat no lidar com equações quadráticas mostrou que qualquer equação quadrática representa uma linha reta ou uma seção cônica; além disso, como ele partia da equação e então estudava o lugar correspondente, servia também para facilitar o tratamento geométrico de tais curvas.

O que chamamos de substituição linear com Viète e transformação de coordenadas com Fermat são transformações de expressões algébricas em outras cuja forma é canônica.

Nas transformações lineares propriamente esse caráter de mudança, embora sem a mesma finalidade, parece também evidente em algumas das falas de nossas entrevistadas (como veremos no próximo capítulo) e em alguns livros-texto analisados no final deste capítulo.

3.2.2 – Segundo momento: transformações e o estudo dos invariantes

A Geometria Projetiva

A perspectiva, que “pode ser simplesmente descrita como a representação realística de cenas espaciais sobre o plano” (Stillwell, p. 78), aparece já na antiguidade como forma de expressão, por exemplo, de artistas romanos. Entretanto, apenas em 1446 é que aparece publicado por Leon Battista Alberti (1404 - 1472) o primeiro método para perspectiva, conhecido como o ‘véu de Alberti’ e atribuído a Filippo Brunelleschi (1377 - 1446). Tal método consistia em colocar entre o artista e a cena a ser representada um pedaço de pano transparente esticado numa armação; sobre esse pano o artista desenhava aquilo que enxergasse através de um olho, estando numa posição fixa. Para cenas reais o ‘véu de Alberti’ era suficiente; mas para aquelas que eram imaginadas e que necessitavam da perspectiva, foi preciso que se estabelecessem outros princípios adequados a situações desse tipo.

Gerard Desargues (1591 - 1661), um dos principais representantes do início da geometria projetiva, deu especial atenção à perspectiva em seu *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plan*, de 1639. De acordo com Granger, nesse trabalho Desargues busca reduzir a multiplicidade de figuras através de uma projeção central “que permite transformar as figuras uma na outra e, em particular, reconduzir as cônicas ao círculo” (p. 71). No que diz respeito à linguagem empregada por Desargues no *Brouillon projet*, embora tenha trazido inovações ao vocabulário geométrico da época (palavras como cepas, nós, ramos, talos, troncos e ramadas), era próxima da linguagem da geometria clássica.

Apesar de Desargues ter lidado com as cônicas no seu trabalho, segundo Stillwell

Uma teoria matemática de perspectiva para curvas se torna possível com o advento da geometria analítica. Quando uma curva é especificada por uma equação $\phi(x,y) = 0$, a equação de qualquer visão perspectiva é viável por transformação adequada de x e y . Entretanto, este ponto de vista de transformação, mesmo que bastante simples algebricamente, emergiu apenas com Möbius. (p. 86)

Voltaremos portanto nossa atenção ao *Der barycentrische Calcul ein neues Huelfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Entwicklung mebrerer Eigenschaften der Kegelschnitte angewendet* de Möbius (1790 - 1868), de 1827.

Nesse seu tratado, Möbius apresenta as coordenadas homogêneas e o cálculo baricêntrico. As coordenadas homogêneas consistiam num novo sistema para determinação de lugares geométricos e o cálculo baricêntrico, as regras através das quais um ponto pode ser localizado em tal sistema. A mudança em relação às coordenadas cartesianas é que o referencial no sistema de coordenadas homogêneas não são eixos, e sim pontos. De acordo com o próprio Möbius,

Para determinar a posição de um ponto sobre uma linha reta, plano ou espaço quantidades de dois tipos são essenciais; as primeiras do primeiro tipo permanecem as mesmas para todos pontos como os eixos do sistema usual de coordenadas, as outras, as coordenadas no senso mais geral, dependem da posição dos vários pontos com respeito às quantidades do primeiro tipo. Pelo método em consideração pontos serão determinados como segue: As quantidades do primeiro tipo serão pontos e nós as chamaremos “pontos fundamentais” e o ponto cuja posição está sendo determinada será considerado como seu centróide. Esses pontos fundamentais são tomados como o

sistema de coordenadas. As coordenadas de qualquer ponto P com respeito a estes pontos fundamentais são dadas pelas relações que devem existir entre os coeficientes dos pontos fundamentais para que o ponto P seja o centróide desses pontos. (Smith, p. 672)

Assim, para construirmos uma reta, precisamos de dois pontos fundamentais; um plano, três pontos fundamentais; o espaço, quatro pontos fundamentais.

Podemos também, utilizando coordenadas homogêneas, por exemplo, representar analiticamente curvas planas através de combinação linear dos pontos fundamentais A , B e C cujos coeficientes são funções de um parâmetro v :

$$P_{(v)} = p_{(v)} A + q_{(v)} B + r_{(v)} C.$$

A partir dessa expressão analítica, Möbius poderia explorar o que ocorreria se fossem variadas as combinações lineares de tais pontos fundamentais (fixos). Entretanto, o seu interesse é pelas “transformações das figuras associadas em coordenadas baricêntricas invariáveis [coeficientes da combinação linear], com modificações da base” e, portanto, “o objeto geométrico individuado, como permanência de uma fórmula analítica, só é considerado em função da classe das mudanças da base que o conservam ou o alteram.” (Granger, p. 95-6). O interesse de Möbius por essas **transformações de figuras** é tal que o título da segunda seção da sua obra é: Transformações das figuras e classes de problemas geométricos que daí decorrem. Dando continuação a esse tratamento, ele classifica as propriedades das figuras de acordo com as transformações que deixam inalteradas certas condições. Por exemplo, a afinidade é tida por Möbius como sendo o “parentesco das figuras que conservam sua expressão analítica enquanto a base baricêntrica varia de modo arbitrário”.

Möbius se ocupava nesse seu trabalho em usar as transformações e verificar as mudanças ocorridas nas figuras (com vistas a classificar propriedades das figuras de acordo com tais transformações). Embora não seja clara para nós a forma como Möbius operava – esse não é o objetivo do nosso trabalho – identificamos aí um procedimento semelhante ao muitas vezes usado com operadores lineares: verificar as mudanças ocorridas num vetor após transformado pelo operador (ver no capítulo 4, Tarefa 3 de Vivian). Também no livro *Álgebra Linear* de Lawson, comentado no final deste capítulo, são utilizadas figuras geométricas para estudar transformações lineares.

3.2.3 – Terceiro momento: transformações lineares e espaços vetoriais

O Calcolo Geometrico

“Um sistema de operações a se cumprirem sobre entes geométricos, análogo ao que a álgebra faz sobre os números” – nesses termos Giuseppe Peano (1858 - 1932) indica no prefácio de seu *Calcolo Geometrico*¹⁵ (1888) de que se trata o cálculo geométrico. Também deixa claro que esta idéia já havia sido desenvolvida anteriormente por outros matemáticos, como Leibniz (1646 - 1716), Möbius, Hamilton (1805 - 1865) e Grassmann (1809 - 1877). Em especial, o trabalho de Grassmann, *Ausdhnungslehre* de 1844, teve bastante influência sobre a obra de Peano, que aponta como propósito do seu livro

expor diretamente, e de forma acessível a quem
conheça os fundamentos da geometria e da

¹⁵ Esse trabalho de Peano influenciou outros matemáticos como, por exemplo, Burali-Forti e Marcolongo que em 1912 escreveram a obra *Transformazioni Lineari*.

álgebra, um cálculo geométrico, baseado em algumas notações contidas no *Ausdehnungslehre*, e desenvolver suas principais conseqüências. (prefácio, p. VI)

Para tanto, Peano inicia a escrita de seu livro com um capítulo no qual faz considerações sobre algumas operações da lógica dedutiva. Nos capítulos seguintes, define as formações geométricas de 1ª, 2ª, 3ª e 4ª espécies e suas operações. Já o último capítulo, que particularmente nos interessa, “trata sumariamente das transformações dos sistemas lineares em geral e das formações geométricas em particular” (prefácio, p. VII).

Tal capítulo, denominado Transformações de sistemas lineares, é iniciado com a definição do que Peano chama de sistemas lineares (p.141-2).

72. Existem alguns sistemas de entes sobre os quais são dadas as seguintes definições:

1. É definida a igualdade de dois entes **a** e **b** do sistema, ou seja é definida uma proposição, indicada com **a = b**, a qual expressa uma condição entre dois entes do sistema, satisfeita por certos pares de entes, e não por outros, e que satisfaz às equações lógicas:

$$(a=b)=(b=a), (a=b)\cap(b=c)\leq(a=c)^{16}.$$

2. É definida a **soma** de dois entes **a** e **b**, vale dizer é definido um ente, indicado por **a + b**, que pertence também ao sistema dado, e que satisfaz às condições:

$$(a=b)\leq(a+c=b+c), a+b=b+a, a+(b+c)=(a+b)+c,$$

e o valor comum dos dois membros da última igualdade se indicará com **a + b + c**.

¹⁶ O sinal $\cap$ indica a conjunção; já o sinal $\leq$ indica a implicação.

3. Sendo **a** um ente do sistema, e *m* um número inteiro e positivo, pela escrita *ma* entenderemos soma de *m* entes iguais a **a**. É fácil reconhecer, sendo **a**, **b**, ... entes do sistema, *m*, *n*, ... números inteiros e positivos, que

$$(a=b) \Leftrightarrow (ma=mb); m(a+b) = ma+mb; (m+n)a = ma+na; m(na) = (mn)a; 1a = a.$$

Nós suporemos que seja atribuído um significado a escritura *ma*, qualquer que seja o número real *m*, de maneira que sejam ainda satisfeitas as equações precedentes. O ente *ma* será dito *produto* do número (real) *m* pelo ente **a**.

4. Finalmente suporemos que exista um ente do sistema, que diremos *ente nulo*, e que indicaremos com 0, tal que, qualquer que seja o ente **a**, o produto do número 0 pelo ente **a** dá sempre o ente 0, ou seja,

$$0a = 0.$$

Se para a escritura **a - b** se atribui o significado a $+(-1)b$, se deduz:

$$a - a = 0, a + 0 = a.$$

DEF. Os sistemas de entes para os quais são dadas as definições 1, 2, 3, 4, de maneira que satisfaça às condições impostas, chamam-se sistemas lineares.

Podemos observar que a definição para o que Peano chama de sistema linear é bastante próxima do que conhecemos como espaço vetorial. Inicialmente ele determina duas operações – soma de entes do sistema e produto de um ente do sistema por um número real *m* – apontando, em seguida, as propriedades satisfeitas pelos entes quando aplicadas as operações definidas.

O autor prossegue colocando outras definições, como de entes dependentes e dimensão de um sistema linear. Mais adiante chega à seguinte definição (p.145-6):

75. DEF. Uma operação R , a cumprir-se sobre cada ente a de um sistema linear A , diz-se distributiva, se o resultado da operação R sobre o ente a , que indicaremos por Ra , é também um ente de um sistema linear, e são verificadas as identidades

$$R(a + a') = Ra + Ra', R(ma) = m(Ra),$$

onde a e a' são entes quaisquer do sistema A , e m um número real qualquer.

O ente Ra , que é o resultado da operação distributiva R sobre o ente a , diz-se *função distributiva* de a . Uma operação distributiva será chamada também *transformação linear*, ou *transformação*. Se o ente Ra pertence ao mesmo sistema linear A ao qual o ente a pertence, a operação R será dita uma *substituição*. O ente Ra diz-se ainda produto da transformação R pelo ente a .

Sendo R uma operação distributiva, $a, b, \dots$ entes do sistema A , e $m, n, \dots$ números, se terá:

$$R(ma + nb + \dots) = mRa + nRb + \dots$$

$$R0 = 0.$$

A mesma proximidade entre as definições de sistemas lineares de Peano e o que conhecemos como espaço vetorial, se dá também entre as transformações lineares de Peano e as transformações lineares tais quais concebemos hoje. As primeiras são entre sistemas lineares e as últimas entre espaços vetoriais.

Neste ponto do nosso trabalho fica evidente um dos motivos pelos quais optamos por fazer as análises de trabalhos históricos e de livros-texto de forma conjunta, num mesmo capítulo. Poderíamos no lugar da obra de Peano, ter colocado algum outro livro-texto de Álgebra Linear;

seria para nós indiferente qual fosse o escolhido como representante do terceiro momento, já que o que caracteriza tal momento é a transformação linear ser entre espaços vetoriais.

Acontece que, dentre os próprios livros-texto de Álgebra Linear, houve leituras a partir das quais produzimos significados para a idéia de transformação linear que não eram os mesmos de Peano, apesar de ser ainda transformação linear entre espaços vetoriais.

Devido a isso, selecionamos inicialmente alguns livros de matemática que abordam a noção de transformação linear: Halmos (1958), Herstein (1964), Lang (1971), Searle (1966), Hoffman & Kunze (1967), Batschelet (1978), Boldrini et al (1978), Banchoff & Wermer (1992), Lipschutz (1994), Steinbruch & Winterle (1987), Lawson (1996) e Lima (1998). Tal seleção foi feita levando-se em conta a utilização desses livros em cursos de graduação bem como a maneira como neles são abordadas as transformações lineares. Partindo de uma primeira leitura, em vista dos possíveis significados produzidos para transformação linear, escolhemos alguns dos livros anteriormente indicados para uma análise sob a ótica do MTCS.

3.3 – Estes outros livros

No prefácio da segunda edição de *Linear Algebra Through Geometry*, Banchoff & Wermer explicitam sua intenção de “levar o estudante a um entendimento da Álgebra Linear elementar pela ênfase nos significados geométricos da matéria”. Assim procedem, inicialmente, usando as idéias familiares à geometria analítica em duas e três dimensões, argumentando que, partindo delas, o estudante encontrará “poucas dificuldades em estender suas noções para dimensões superiores e sistemas algébricos mais abstratos”. Logo,

apresentam no capítulo Linear Transformations and Matrices a seguinte definição (p. 30):

Sejam a, b, c, d escalares. Denotamos por A a transformação que manda cada vetor

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ no vetor $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ onde:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

[...]

Uma transformação A dada por um sistema é chamada uma transformação linear do plano e o símbolo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é chamado matriz de A , denotada por $m(A)$.

Nessa passagem fica a transformação linear do plano usual no plano usual definida como um sistema de equações lineares, com duas equações e quatro variáveis. Em particular, observamos que Banchoff & Wermer definem a noção de transformação linear sem terem abordado anteriormente espaços vetoriais.

Numa perspectiva diferente, Halmos propõe em seu livro tratar "transformações lineares em espaços vetoriais de dimensão finita por métodos de teorias mais gerais". Para tanto, aborda no primeiro capítulo espaços vetoriais, para depois, no segundo capítulo, trabalhar com as transformações lineares. O mesmo é iniciado com a frase "Nós chegamos agora aos objetos que realmente fazem espaços vetoriais interessantes" e define (p. 55):

Uma transformação linear (ou operador) A em um espaço vetorial V é uma correspondência

que associa a qualquer vetor x em V um vetor Ax em V , de forma que

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

Onde x e y são vetores e α e β escalares.

Como Halmos, Lipschutz define transformação linear como uma função especial onde domínio e contradomínio são espaços vetoriais. A intenção do último autor em tratar transformações lineares como funções especiais fica mais reforçada por ele fazer uma discussão mais geral sobre aplicações anteriormente à definição (p. 448):

Sejam V e U espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K . Uma aplicação $F: V \rightarrow U$ é chamada aplicação linear (ou transformação linear, ou homomorfismo de espaços vetoriais) se verifica as duas condições seguintes:

(1) Para quaisquer $v, w \in V$, $F(v + w) = F(v) + F(w)$

(2) Para qualquer $k \in K$ e qualquer $v \in V$, $F(kv) = kF(v)$

Em outras palavras, $F: V \rightarrow U$ é linear se “preserva” as duas operações básicas de espaços vetoriais - a adição de vetores e a multiplicação por escalar.

Lawson, que também define uma transformação linear como uma função especial, apresenta alguns exemplos de transformações lineares usando figuras geométricas. O primeiro exemplo (p. 95-6):

Considere a aplicação $L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ obtida multiplicando pela matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vimos antes

que a multiplicação por matriz é uma transformação linear. Para ter uma idéia de onde L_A manda vetores, a Figura 21 mostra a imagem de um triângulo. O triângulo original é dado em linhas cheias e a imagem em linhas pontilhadas.

A Figura 2.2 mostra onde o círculo unitário é mandado por L_A .

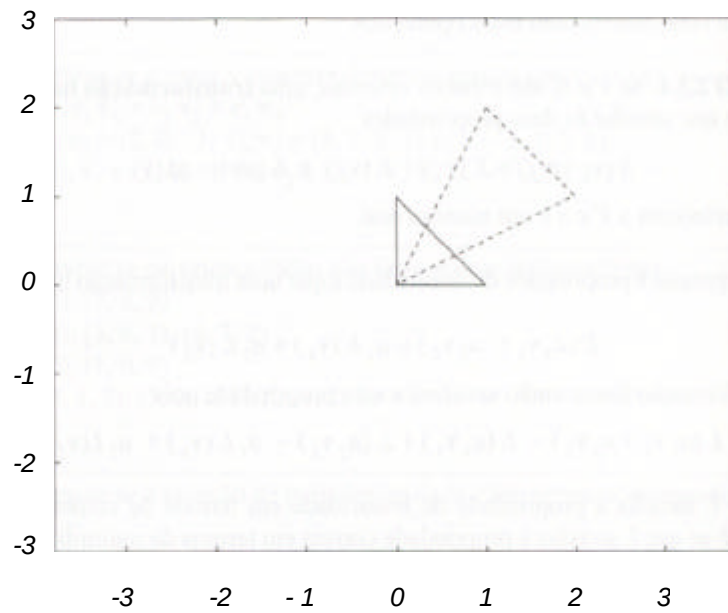


Figura 2.1. Imagem de um triângulo sob L_A

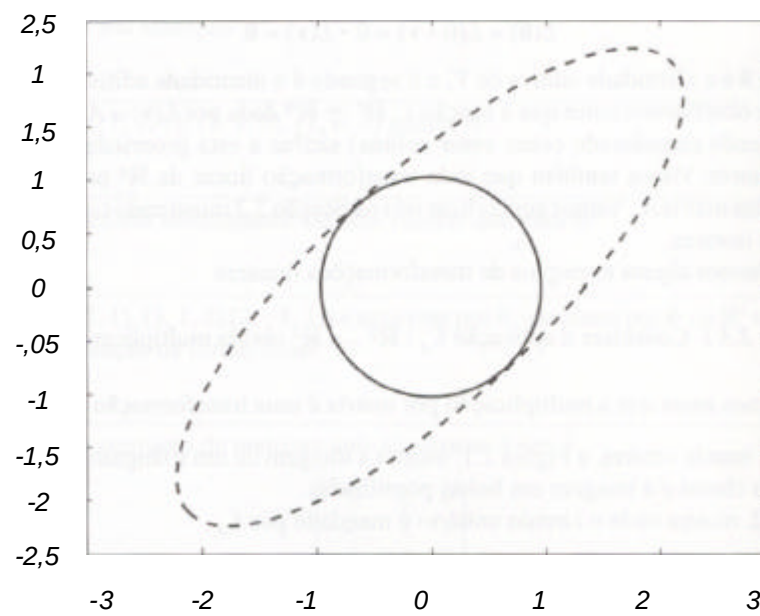


Figura 2.2. Imagem de círculo sob L_A

Embora apresente a definição de transformação linear como Halmos e Lipschutz, Lawson argumenta nos primeiros exemplos por ele apresentados que uma dada aplicação é uma transformação linear porque é uma multiplicação de matriz, sem enfatizar ou verificar as propriedades que caracterizaram aquela função entre espaços vetoriais como uma transformação linear na sua definição.

Além disso, aborda transformações de figuras, observando onde a transformação linear “manda vetores”. Esse aspecto nos remete, de certa forma, ao trabalho de Möbius.

No seu livro Tópicos de Álgebra, Herstein dá todo um tratamento estrutural algébrico às transformações lineares. Assim, no capítulo Espaços Vetoriais e Módulos, define (p. 160):

Se U e V são espaços vetoriais sobre F , então a aplicação T de U em V é dita um *homomorfismo* se

$$(1) (u_1 + u_2) T = u_1 T + u_2 T$$

$$(2) (\alpha u_1) T = \alpha (u_1 T)$$

para todos $u_1, u_2 \in U$ e todo $\alpha \in F$.

Como nos modelos anteriores, um homomorfismo é uma aplicação que preserva toda a estrutura básica de nosso sistema.

Em seguida, Herstein coloca que o conjunto de todos os homomorfismos de um espaço vetorial U em um espaço vetorial V será indicado por $\text{Hom}(U, V)$. Para esse conjunto são introduzidas as operações de adição e de multiplicação por escalar (elementos do corpo F), sendo assim um espaço vetorial sobre F . Quando considera $U = V$, além das operações de adição e multiplicação por escalar, o autor introduz uma multiplicação entre os elementos de $\text{Hom}(V, V)$. Dessa forma, $\text{Hom}(V, V)$ torna-se um anel.

No início do capítulo Transformações Lineares, Herstein indica que $\text{Hom}(V,V)$ é uma álgebra sobre F e, por esse motivo, passa a denotar $\text{Hom}(V,V)$ por $A(V)$; a notação $A_F(V)$ serve para enfatizar o papel do corpo F .

A partir daí é que define:

Uma transformação linear de V , sobre F , é um elemento de $A_F(V)$.

Ou seja, uma transformação linear de U em V é um homomorfismo, como também um elemento do espaço vetorial $\text{Hom}(U,V)$; no caso de $U=V$, um elemento de uma álgebra $A(V)$. Nas considerações iniciais desse capítulo, Herstein elege a Álgebra Linear como "provavelmente a parte da matemática que encontra a mais ampla aplicação - em física, química, economia, na verdade, em quase toda ciência e pseudociência".

Introdução à Matemática para Biocientistas, de Batschelet, é um livro que trata não só das aplicações da Álgebra Linear, mas da Matemática num geral, às Biociências. Aborda idéias matemáticas necessárias a um biocientista para que possa utilizar métodos numéricos à resolução de problemas mais específicos de sua área. Não é um livro de Álgebra Linear ou Álgebra, mas sua escolha é por nós justificada pelo fato de vir a enriquecer a discussão da produção de significados para a noção de transformação linear.

No capítulo 14, denominado Matrizes e Vetores, aparece no item Autovalores e Autovetores (p. 484):

Agora voltamos nossa atenção para uma aplicação muito peculiar, de matrizes e determinantes. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

uma dada matriz quadrada. Por multiplicação,
A transforma um vetor

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

em um vetor

$$u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Então a transformação é

$$Ax = u.$$

A transformação é colocada por Batschelet como uma aplicação (utilização) de matriz e determinante. Em seguida a essa definição de transformação linear, o autor propõe o estudo de autovalores a autovetores que, de fato, são os elementos que interessam em termos práticos ao biocientista.

Dos enfoques dados pelos autores acima citados, percebemos que uma transformação linear pode ser apresentada como:

- um sistema de equações lineares;
- uma função especial entre espaços vetoriais;
- um homomorfismo de espaços vetoriais; e
- uma matriz.

A partir de cada um desses textos podem ser produzidos significados diferentes para a noção de transformação linear em Álgebra Linear – provavelmente os objetos constituídos por um leitor em sua fala a partir do livro de Banchoff & Wermer serão distintos daqueles constituídos a partir do livro de Batschelet, por exemplo. O fato de a expressão transformação linear aparecer em todos esses trabalhos (com exceção do livro de Batschelet em que só usa a palavra transformação) não implica

que os significados produzidos a partir desses textos possam ser os mesmos, sendo apenas interpretações possíveis de uma mesma idéia.

Falar de transformação linear operando com sistema de equações lineares não é a mesma coisa que falar de transformação linear operando com funções e espaços vetoriais e, portanto, segundo nossa concepção de significado, diríamos ser significados distintos para transformação linear. Essa diferença na fala – que está diretamente relacionada aos objetos constituídos e à lógica das operações em jogo numa dada atividade – envolve núcleos distintos e, assim, dois campos semânticos que poderiam ser chamados de Campo Semântico transformação-sistema e Campo Semântico transformação-função, respectivamente.

Além disso, cada uma das similaridades observadas entre os trabalhos de Viète, Fermat e Möbius e certos procedimentos usados em atividades que envolvem a noção de transformação linear, podem caracterizar também significados distintos, já que a lógica das operações em cada uma das situações é diferente:

- transformação linear mudando expressões para as quais, eventualmente, não se queira ou não se possa relacionar à geometria plana, espacial ou analítica (caso de Viète). Por exemplo, $T(x,y,z,w) = (-y,z,3y,x)$;
- transformação linear como ferramenta que produz certos efeitos sobre um vetor, por exemplo, $T(x,y) = (-y,x)$ que é a rotação de 90° do plano usual (caso de Fermat); e
- transformação linear como ferramenta que produz certos efeitos sobre figuras (caso de Möbius).

Percebemos nesse capítulo algumas maneiras de produzir significados para transformações lineares em Álgebra Linear a partir da leitura que fizemos de textos matemáticos. Não são necessários grandes estudos para afirmarmos que o professor de Matemática na sua prática em sala de aula muitas das vezes fala de diferentes significados para uma

mesma idéia como se fossem os mesmos ou, entendendo-os distintos, como se estabelecer relações entre eles fosse algo fácil ou natural. Ao contrário disso, seria interessante que a prática do professor fosse no sentido de proporcionar ao aluno, principalmente ao futuro professor de Matemática, situações nas quais ele pudesse perceber diferenças entre significados, possíveis relações entre alguns deles e quando deveria lançar mão dessa ou daquela forma de falar daquela idéia matemática.

Criar um espaço comunicativo em sala de aula, como dito ao final do capítulo anterior, é de fato uma necessidade à formação de educadores matemáticos.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DAS ENTREVISTAS

Como já dissemos anteriormente, estamos interessados no processo de produção de significados; mais especificamente, para a noção de transformação linear. A parte de nossa pesquisa apresentada neste capítulo busca estabelecer uma compreensão para produção de significados para transformação linear a partir de uma análise de tarefas realizadas por duas alunas de um curso de Matemática.

A análise dessas tarefas foi baseada no MTCS e feita sobre textos escritos pelas alunas e entrevistas abertas, que contaram com a intervenção da investigadora de acordo com a fala dos sujeitos (sessões videografadas). A intenção de utilizarmos essa variedade de métodos de coletas de dados foi a de nos possibilitar uma análise mais precisa do contexto no qual foram produzidos significados para a noção de transformação linear, tentando identificar o que nossos sujeitos diziam a respeito de tal noção e de que maneira se estruturou esse processo de produção de significados.

De posse das informações colhidas, fazemos uma reflexão acerca do ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, que esperamos auxiliar na prática de professores do ensino superior.

4.1 – Os sujeitos

Os sujeitos de nossa pesquisa foram duas alunas do curso de Matemática da Unesp de Rio Claro¹⁷ que, quando perguntadas a respeito, não haviam escolhido entre as opções de bacharelado e licenciatura. Na ocasião, as alunas de pseudônimos Vivian (19 anos) e Kika (18 anos) estavam no final do primeiro ano do curso de Matemática e faziam a disciplina Introdução à Álgebra Linear pela primeira vez; já manifestavam a vontade de cursar, no semestre posterior, a disciplina Álgebra Linear (opcional para a licenciatura e obrigatória para o bacharelado) e se dispuseram a colaborar com nosso trabalho por se interessarem em participar de uma pesquisa em Educação Matemática¹⁸.

4.2 – O curso de Introdução à Álgebra Linear¹⁹

A disciplina Introdução à Álgebra Linear cursada pelas alunas teve como ementa: (1) Vetores na reta (1-espço); (2) Noções de Álgebra Linear no plano (2-espço); (3) Noções de Álgebra Linear no espaço (3-espço); (4) Noções de Álgebra Linear no n -espço, $n \geq 4$; (5) Espaço vetorial (bases, dimensões); e, (6) Espaços vetoriais (com produto interno). Os livros indicados pelo docente foram os de autoria de Lang (1971), Boldrini et al (1978) e Banchoff & Wermer (1992).

¹⁷ Inicialmente, havia três alunas com interesse em participar da pesquisa. Uma delas, de pseudônimo Marcela, no primeiro encontro demonstrou desconforto frente à câmera. Talvez tenha sido este o motivo que a levou a não mais comparecer; não discutiremos aqui o que ela apresentou, mas nos anexos está a transcrição integral da primeira tarefa.

¹⁸ Um termo de compromisso ético, elaborado pelo nosso grupo de pesquisa e que estabelece o caráter das entrevistas e da utilização delas, foi assinado tanto pelas entrevistadas quanto pela pesquisadora no primeiro encontro.

¹⁹ Esses dados foram obtidos do caderno de um aluno que cursou a disciplina e que registrou as anotações feitas em sala de aula pelo professor.

Em particular, o livro de Banchoff & Wermer trata inicialmente da idéia de transformação linear de uma maneira não muito comum: uma transformação linear é dada por um sistema de equações lineares²⁰.

O professor que ministrou a disciplina Introdução à Álgebra Linear optou por dar um encaminhamento parecido ao curso: uma transformação do plano usual no plano usual dada por um sistema de equações lineares com duas equações e quatro variáveis, definindo uma transformação linear, demonstrando depois a equivalência entre essa definição e a que diz que uma função T de $\mathfrak{R}^2$ em $\mathfrak{R}^2$ (com as operações de adição e multiplicação por escalar usuais) é uma transformação linear se satisfizer às propriedades $T(x+y)=T(x)+T(y)$ e $T(\alpha x)=\alpha T(x)$, onde $x, y \in \mathfrak{R}^2$ e $\alpha \in \mathfrak{R}$; mostrou vários resultados de transformação linear, utilizando as transformações lineares já vistas; definiu espaço vetorial e, depois disso, uma transformação linear T entre espaços vetoriais V e W quaisquer (de dimensão finita) usando as propriedades $T(x+y)=T(x)+T(y)$ e $T(\alpha x)=\alpha T(x)$, onde $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathfrak{R}$.

Quando foram realizadas as entrevistas, as alunas já tinham entrado em contato com essas duas possibilidades (sistema de equações lineares ou função com duas propriedades) de se estar definindo uma transformação linear.

Só para se ter uma idéia do andamento do curso (com início em agosto e fim em dezembro), até o começo de novembro, o professor havia desenvolvido em sala de aula as idéias relativas aos itens (1) e (2). A partir daí, parece que optou por trabalhar com o item (5), usando os itens (3) e (4) como exemplos particulares.

²⁰ Ver capítulo anterior.

4.3 – As tarefas e a análise

As tarefas foram cinco, sendo quatro no primeiro bloco, e uma realizada posteriormente. Essa última tarefa buscou esclarecer algumas questões que não haviam sido levantadas ou exploradas suficientemente nas quatro primeiras (realizadas onze meses antes).

Foram elaboradas na tentativa de criar situações diversas em que as alunas pudessem estar falando sobre transformações lineares. A análise das tarefas foi feita segundo o MTCS; alguns aspectos a se considerar no processo de produção de significados são evidenciados por Lins & Gimenez (1997, p.146):

- i) a atividade em questão, e também a tarefa que a origina;
- ii) os significados sendo produzidos — e, portanto, o núcleo (ou núcleos) em jogo;
- iii) o possível processo de transformação do(s) núcleo(s), e as possíveis rupturas na direção de novos modos de produção de significados;
- iv) os textos sendo produzidos — notações, diagramas, escrita, fala, gestos, e sua eventual constituição em objeto;
- v) o papel do professor como interlocutor;
- vi) os alunos como interlocutores uns dos outros;
- vii) interlocutores não-presentes;
- viii) a existência de certos modos de produção de significados que queremos que os alunos dominem; e,
- ix) a existência de certas *afirmações* que eles venham a assumir como corretas.

Por se tratar de uma pesquisa que tem objetivos específicos, estaremos privilegiando alguns desses aspectos para fazermos nossa análise: ii, iv e ix.

4.3.1 – Tarefa 1 (em 30/11/2000)

A primeira tarefa consistiu em apresentarmos às entrevistadas, em uma folha impressa, uma listagem com alguns termos da Álgebra Linear: matriz, transformação linear, sistema de equações lineares, espaço vetorial e vetor. Para cada um desses termos as entrevistadas deveriam indicar o quanto poderiam falar: *nada, só lembro o nome, posso dizer alguma coisa, posso dizer várias coisas*. A partir disso, sobre aqueles termos que assinalaram *posso dizer alguma coisa* ou *posso dizer várias coisas*, as entrevistadas anotaram o que lembravam em uma folha em branco. Após feitos os registros escritos, cada uma delas falou de suas anotações.

Esse tipo de tarefa nos informou aquilo que as alunas julgavam importante ser dito sobre transformações lineares e sobre cada uma das outras noções sugeridas pelos termos apresentados neste contexto. A escolha de tais noções deveu-se aos estudos (na ocasião já iniciados) sobre textos matemáticos (Capítulo III). Matrizes, espaços vetoriais, vetores e sistema de equações lineares poderiam estar associados, de alguma maneira, à noção de transformação linear.

Cabe salientar que, embora tenha sido dito às alunas que elas poderiam discutir entre si as suas anotações, elas optaram por assim não fazer. Outro ponto interessante é que todas indicaram *posso falar alguma coisa* para todas as noções.

Seguem abaixo as anotações que elas fizeram sobre as noções sugeridas:

MATRIZ $\rightarrow$ um conjunto de números ~~em que podemos~~ ~~como~~ onde é definida duas operações soma e multiplicação e como são escritos em forma de linhas e colunas fazemos um sistema de equações.

TRANSFORMAÇÃO LINEAR $\rightarrow$ um "instrumento" ^(função) utilizado para acharmos "bases de coordenadas", onde ficarão mais fáceis alguns estudos que podem ser feitos. Exemplo de Trans. linear: rotação. Onde é definida duas propriedades:
 $T(X+Y) = T(X) + T(Y)$, $X, Y \in$ a um espaço vetorial
 $T(\alpha X) = \alpha T(X)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES $\rightarrow$ um conjunto de equações ~~onde~~ ~~po~~ que podem ~~ser~~ ~~obtidas~~ obtidas multiplicando uma matriz por um vetor (por exemplo), com várias incógnitas.

ESPAÇO VETORIAL $\rightarrow$ "lugar" onde "atuam" os vetores, ~~um~~ tipo um conjunto, onde temos algumas operações como a soma de dois vetores e a multiplicação de um vetor por um número.

VETOR $\rightarrow$ um segmento de reta orientado que podemos "medir" com ele de forma a "acharmos" coordenadas

Figura 4.1 – Anotações de Vivian

matriz - "conjunto" de números escritos em forma de linhas e colunas que é muito usado na matemática, pois simplifica os cálculos.

transformação linear - seja T uma função de U em V , ela será uma t.t. se ~~se~~ obedecer as seguintes propriedades: $T(x+y) = T(x) + T(y)$ e $T(\alpha x) = \alpha T(x); \alpha \in \mathbb{R}$.

sistema de equações lineares - conjunto de 2 ou mais equações com 2 ou mais incógnitas e, na maioria das vezes, simples de ser resolvido.

espaço vetorial - espaço em que os vetores agem

vetor - segmento de reta orientado muito utilizado por matemáticos e físicos para representar bases, retas, velocidade, etc

Figura 4.2 – Anotações de Kika

Tanto Vivian quanto Kika parecem nessa atividade entender uma transformação linear como sendo “apenas” uma função. Em particular, na fala de Kika, parece não ter importância quais são o domínio e o contra-

domínio dessa tal função; não há diferença se eles são conjuntos simplesmente ou espaços vetoriais:

Transformação linear eu tenho uma definição bem da Matemática mesmo. Uma função T ela vai ser uma transformação linear se ela obedecer às duas propriedades, né: T de x mais y for igual a T de x mais T de y e T de αx vai ser αT de x , sendo α pertencente aos reais né, um número real.

Essa foi a nossa primeira leitura, mas depois notamos que ela está falando das operações. Uma interpretação possível seria que as operações são tão naturais que a aluna pensa mesmo em função entre dois conjuntos em que, incidentalmente, ela pode fazer cálculos. Kika constitui como objetos: função, propriedades e número real.

É interessante observarmos agora a fala de Vivian:

Transformação linear eu acho que é uma função que tem algumas transformações, assim, como a rotação, que às vezes fica mais fácil de você, sei lá, é... formar um sistema de coordenadas, não sei direito definir, assim. Que também tem algumas operações, né, e tem duas propriedades.

Esta, por sua vez, constitui em objetos: função, transformações, rotação, sistema de coordenadas, operações e propriedades.

Para Kika, uma função será uma transformação linear “se ela obedecer às duas propriedades”, sendo, portanto, tais propriedades o que caracteriza uma transformação linear. Já, para Vivian, o que define uma transformação linear é o fato de ela ser uma função que transforma, por exemplo, rotaciona. E uma característica dessa função é ter duas propriedades, que a princípio não esclarece.

Ao ser questionada sobre essas propriedades, Vivian disse se lembrar delas e que

(...) uma transformação, por exemplo, T de x mais y é igual a T de x mais T de y , e sendo x e y pertencentes a um espaço vetorial aí, sei lá, um $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. E a outra é T de um número real vezes um x é igual a esse número real aplicado na T de x .

Diferentemente da fala de Kika, Vivian ressalta que x e y , os elementos sobre os quais a transformação linear vai agir, são pertencentes a um espaço vetorial.

Recordando que significado é aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre o objeto numa dada atividade, podemos dizer que os significados produzidos pelas alunas a partir da Tarefa 1, são distintos, embora ambas tenham dito que uma transformação linear é uma função.

A primeira diferença marcante do nosso ponto de vista, é que a noção de espaço vetorial não aparece em primeiro plano na fala de Kika, o que já acontece com Vivian. A outra, é que, para Vivian, a transformação linear produz alguma coisa “sei lá, é... formar um sistema de coordenadas, não sei direito definir, assim”; tal caracterização aparece também no registro escrito feito por Vivian (Figura 4.1), no qual consta que uma transformação linear é “ “um instrumento” (função) utilizado para [...]”. Já, segundo Kika, uma transformação linear é tudo o que satisfaz àquela definição colocada, não sendo necessário para ela que essa função tenha qualquer efeito particular, por exemplo, a rotação de que Vivian fala.

4.3.2 – Tarefa 2 (07/12/2000)

Para a realização da segunda tarefa, selecionamos alguns termos da Álgebra Linear: matriz, base, sistema de equações lineares, transformação linear, determinante, combinação linear, conjunto gerador, dimensão, função, espaço vetorial, vetores l.i. e vetor. Cada um desses nomes foi marcado em cartões, que foram utilizados em um sorteio junto com as alunas²¹.

O procedimento foi sortear três cartões por vez, para que cada uma das alunas agrupasse dois termos, deixando o terceiro à parte²². Foi dito a elas que os agrupamentos deveriam levar em conta possíveis relações entre os termos escolhidos – quais noções tinham mais ligação, segundo o ponto de vista de cada uma das alunas²³. Realizamos dezenove sorteios que foram:

1º conjunto gerador / espaço vetorial / função

2º função / base / dimensão

3º transformação linear / espaço vetorial / sistema de equações lineares

4º conjunto gerador / função / vetor

5º sistema de equações lineares / combinação linear / matriz

6º conjunto gerador / base / vetores l.i.

7º matriz / conjunto gerador / transformação linear

²¹ Resolvemos fazer sorteios, e não agrupar determinados cartões convenientemente, para que as alunas não percebessem nosso interesse específico no que elas estivessem falando sobre transformações lineares.

²² O que fizemos nessa tarefa foi uma versão rudimentar do procedimento de Kelly (1963) para determinar como a pessoa faz categorizações, que acabou se tornando uma tarefa que permitiu às alunas falarem de diversas formas sobre transformação linear sem que as perguntássemos diretamente a respeito.

²³ Se o leitor observar, verá que alguns dos termos escolhidos na tarefa 2 apareceram na tarefa 1. A repetição desses termos é devida às possíveis relações que podem ser estabelecidas entre suas idéias e à de transformação linear. Acreditamos que o fato de esses termos terem aparecido na tarefa anterior não induziu as alunas a fazerem associações específicas já que, na tarefa 1, o objetivo era que falassem livremente sobre certas noções e, nesta, que estabelecessem relações.

8º vetor / matriz / combinação linear

9º conjunto gerador / vetor / sistema de equações lineares

10º vetor / sistema de equações lineares / função

11º vetores l.i. / transformação linear / combinação linear

12º espaço vetorial / determinante / sistema de equações lineares

13º transformação linear / espaço vetorial / vetores l.i.

14º transformação linear / conjunto gerador / vetor

15º transformação linear / função / combinação linear

16º transformação linear / conjunto gerador / função

17º função / espaço vetorial / determinante

18º transformação linear / função / espaço vetorial

19º matriz / base / vetores l.i.

A partir deles as alunas fizeram os agrupamentos, que ficaram:

Figura 4.3 Agrupamento de Kika

01	conj. gerador	espaço vetorial	função
02	base	dimensão	função
03	transf. linear	sistema de eq. lin.	espaço vetorial
04	função	vetor	conj. gerador
05	sistema de eq. lin.	matriz	combinação linear
06	base	vetores l.i.	conj. gerador
07	matriz	transf. linear	conj. gerador
08	vetor	combinação linear	matriz
09	conj. gerador	vetor	sistema de eq. lin.
10	vetor	função	sistema de eq. lin.
12	combinação linear	transf. linear	vetores l.i.
13	determinante	sistema de eq. lin.	espaço vetorial
14	espaço vetorial	vetores l.i.	transf. linear
15	conj. gerador	vetor	transf. linear
16	transf. linear	função	combinação linear
17	transf. linear	função	função
18	função	espaço vetorial	conj. gerador
19	transf. linear	função	determinante
20	base	vetores l.i.	espaço vetorial
			matriz

Figura 4.4 – Agrupamento de Vivian

01	conjunto gerador	espaço vetorial	função
02	base	dimensão	função
03	transf. linear	sst. de eq. lineares	espaço vetorial
04	conjunto gerador	função vetor	vetor função
05	sst. de eq. lineares	matriz	combinação linear
06	conjunto gerador	base	vetor l.i.
07	matriz	transf. linear	conjunto gerador
08	combinação linear	matriz vetor	vetor matriz
09	conjunto gerador	vetor	sst. de eq. lineares
10	sst. de eq. lineares	vetor	função
12	vetor l.i.	comb. linear	transf. linear
13	determinante	sst. de eq. lineares	espaço vetorial
14	espaço vetorial	vetor l.i.	transf. linear
15	conjunto gerador	vetor	transf. linear
16	transf. linear	função	comb. linear
17	transf. linear	função	conjunto gerador
18	função	espaço vetorial	determinante
19	transf. linear	função	espaço vetorial
20	base	vetor l.i.	matriz

Após registrarem nas tabelas suas escolhas, pedimos que cada uma das alunas as comentasse, individualmente, dizendo o porquê de suas opções.

Com essa tarefa, pretendíamos observar de que maneira as alunas relacionavam a idéia de transformação linear com outras noções da Álgebra Linear e, além disso, se haveria alguma mudança em relação ao que foi dito sobre transformação linear na Tarefa 1; por exemplo, se diante da noção de sistema de equações lineares a idéia de transformação linear era modificada. Isso porque, na primeira tarefa, elas definiram transformação linear; e agora, tendo sido pedido para que estabelecessem relações entre idéias, outros objetos poderiam ser

constituídos em suas falas sobre transformação linear ao explicarem suas escolhas.

Procederemos, inicialmente, selecionando alguns sorteios, partindo dos significados produzidos para transformação linear na Tarefa 1, ou seja, comentaremos a seguir aqueles sorteios em que saíram os cartões com as palavras transformação linear ou função ou espaço vetorial, tendo sido pelo menos um desses cartões relacionado a algum outro. Seguindo cada um dos sorteios, apresentaremos as escolhas das alunas e as partes de suas justificativas que consideramos relevantes.

1º sorteio: conjunto gerador / espaço vetorial / função

<u>Kika</u> Conjunto gerador e espaço vetorial	<u>Vivian</u> Conjunto gerador e espaço vetorial
Não, porque eu acho assim, o conjunto gerador é um conjunto de vetores que a gente fala que gera, certo - eu entendo assim. E o espaço vetorial é o espaço onde os vetores agem. Então a gente faz uma relação: os vetores moram no espaço vetorial e eles formam um conjunto gerador. ENT²⁴.: E função, por que que função não tem a ver? Não que não tenha a ver, mas dentre esses três ela é a que menos se relaciona no caso, entendeu. Mas ela tem bastante a ver também. ENT.: O que que função teria a ver com eles? Eu acho assim, a função ela agiria no vetor que mora no espaço vetorial que é o conjunto gerador. Ela agiria, levaria o vetor a um certo lugar, dependendo da função.	Por quê? Ah, porque eu acho que o espaço vetorial é o lugarzinho lá que moram os vetores. E o conjunto gerador também tem a ver com os vetores, são vetores que geram o espaço. A função, tá mais afastadinho.

²⁴ Entrevistadora.

3º sorteio: transformação linear / espaço vetorial / sistema de equações lineares

<u>Kika</u> Transformação linear e sistema de equações lineares	<u>Vivian</u> Transformação linear e sistema de equações lineares
Transformação linear é um sistema de equações lineares [sorriso]. Bom, uma transformação linear provém de um sistema de equações lineares, então já tem tudo a ver aí, né. ENT.: E por que não espaço vetorial? Não. A transformação linear seria tipo uma função e ela age no espaço vetorial. Mas como ela já provém de um sistema eu acho que ela teria mais relação, porque depois ela iria agir, entendeu, no espaço.	Porque eu acho que uma transformação linear vem de um sistema de equações lineares e o espaço vetorial também ficou de lado. Mas eu acho que é porque, até tem um pouco a ver com transformação linear assim, mas... ENT.: Por que teria a ver com transformação linear? Ah, porque você pega um vetor, aplica uma transformação nele e esse vetor tá num espaço vetorial. ENT.: Mas aí você acha que é mais forte a relação de transformação... Com certeza. De transformação linear com sistema de equações lineares.

4º sorteio: conjunto gerador / função / vetor

<u>Kika</u> Função e vetor	<u>Vivian</u> Conjunto gerador e vetor
A função age no vetor e esse vetor forma um conjunto gerador. Então primeiro a função vai agir, foi meio por aí, pela ordem que eu coloquei, certo.	Um conjunto gerador com uma função... por que que eu fiz isso... ENT.: Eu que tinha que te perguntar isso... [risos] Deixa eu pensar. Um conjunto gerador com função. Não sei. Acho que eu fiz errado. Eu acho. Acho assim que os vetores são tipo elementos do conjunto gerador. Eu fiz errado. Aqui também eu tinha posto errado.

7º sorteio: matriz / conjunto gerador / transformação linear

<u>Kika</u> Matriz e transformação linear	<u>Vivian</u> Matriz e transformação linear
Matriz com transformação linear. É a mesma coisa. A transformação linear provém de um sistema de equações lineares e a matriz ajuda a resolver esse sistema da transformação. Então tem bastante relação. O conjunto gerador aí ficou fora. Não teve muita relação.	Porque a transformação linear como provém de um sistema linear e sistema linear pode escrever em forma de matriz, então a gente pode uma transformação linear pegar a matriz e aplicar num vetor. E conjunto gerador, porque ficou de fora também porque eu acho que não tem muito a ver.

10º sorteio: vetor / sistema de equações lineares / função

<u>Kika</u> Vetor e função	<u>Vivian</u> Sistema de equações lineares e vetor
Então, a função age no vetor, seria a transformação linear, que seria tipo uma função, ela vai agir no vetor pra transladar, pra fazer isso, dependendo da função que você considerar. Então por isso a relação. E sistema de equações lineares aí seria tipo a lei da função, vai. Mas acho que não seria bem isso. Então ficou meio fora. Não sei explicar bem.	Sistema de equações lineares com vetor e função. Eu também não vejo muita ligação não, mas... ah, talvez sistema de equações lineares pode ser visto como uma transformação linear que pega um vetor e sei lá, faz alguma coisa com ele dependendo da transformação. Por isso que eu coloquei sistema de equações lineares com vetor.

11º sorteio: vetores l.i. / combinação linear / transformação linear

<u>Kika</u> Combinação linear e transformação linear
Combinação linear com transformação linear. É, aí eu sinceramente acho que nenhum dos três tem assim muita relação. Mas a combinação linear seria a combinação linear de dois vetores dando um outro, de três ou mais, gerando um outro. E essa transformação linear agiria sobre esse vetor.

13º sorteio: transformação linear / espaço vetorial / vetores l.i.

<u>Kika</u> Espaço vetorial e vetores l.i.	<u>Vivian</u> Espaço vetorial e vetores l.i.
Os vetores li são, moram né no espaço vetorial e a transformação agiria sobre os vetores do espaço vetorial. Mas aí primeiro eles tariam lá e depois ela agiria. Então primeiro a relação de vetor com espaço, pra depois agir a função, a transformação.	Porque... o espaço vetorial é tipo a casinha dos vetores e aí então tem que ficar junto com os vetores.

15º sorteio: transformação linear / função / combinação linear

<u>Kika</u> Tranformação linear e função	<u>Vivian</u> Transformação linear e função
A transformação linear é uma função que age nos vetores. E a combinação linear é que assim, combinação de dois ou mais forma um vetor.	Eu acho que toda transformação linear é uma função. E a combinação linear, tá bem... Não sei o que tem a ver.

16º sorteio: transformação linear / conjunto gerador / função

<u>Kika</u> Tranformação linear e função	<u>Vivian</u> Transformação linear e função
É a mesma coisa, né. A transformação é uma função que vai agir sobre os vetores que formam um conjunto gerador.	Toda transformação linear é uma função e conjunto gerador também não sei.

17º sorteio: função / espaço vetorial / determinante

<u>Kika</u> Função e espaço vetorial	<u>Vivian</u> Função e espaço vetorial
Então. Determinante aí ficou fora porque ela serve pra resolver o sistema, pra ajudar mais nos cálculos. Então, não teve muito a ver. Aí seria mais da interpretação geométrica: a função com espaço, a função vai agir nos vetores do espaço vetorial.	É porque tava difícil de escolher dois assim pra juntar. Aí eu escolhi função e espaço vetorial. Eu não sei não. Acho que esse tava difícil mesmo. ENT.: Função e espaço vetorial você acha que não tem nada a ver? Ou tem, se tem é pouco? Ah, até tem. Mas é um pouco porque o espaço vetorial é o lugar dos vetores. Tem os vetores, vão ter as transformações tudo que vão ser funções. ENT.: Então tem a ver. Tem. Tudo tem a ver, mas assim, chegando, puxando, chega lá.

18º sorteio: transformação linear / função / espaço vetorial

<u>Kika</u>	<u>Vivian</u>
Transformação linear e função	Transformação linear e função
A transformação é uma função que age no espaço vetorial. Mas primeiro a grande relação é função; seria tipo uma definição pra transformação linear. Então a relação maior tá aí, né.	Transformação linear é uma função e o espaço vetorial, conforme outra, é o lugar dos vetores, não sei quê, e acho que a ligação entre as duas é mais forte que com espaço vetorial. Mais direta.

Alguns comentários

Ao produzir significado para transformação linear na atividade da Tarefa 1, espaço vetorial não é um objeto constituído por Kika em sua - fala. Na atividade da Tarefa 2, ao justificar suas associações, Kika continua a não relacionar transformação linear e espaço vetorial; embora tenha dito no 18º sorteio que “a transformação é uma função que age no espaço vetorial”. Apenas no 17º sorteio é que opta por relacionar função com espaço vetorial, dizendo ter feito assim porque “determinante aí ficou fora. [...] Então não teve muito a ver”.

Também no 17º sorteio, Vivian relacionou função e espaço vetorial, dizendo que “a função vai agir nos vetores do espaço vetorial”; apesar de na atividade da Tarefa 1 Vivian ter constituído em objeto espaço vetorial, ela fez a opção por associar as idéias de função e espaço vetorial “porque tava difícil de escolher dois assim pra juntar”.

Acreditamos que certa resistência em se associar transformação linear e espaço vetorial tenha acontecido pelo fato de tanto para Vivian quanto para Kika espaço vetorial ser o lugar, o espaço onde os vetores ficam ou moram e, a transformação linear, que é uma função, agir ou ser

aplicada no vetor. Isso parece fazer com que o espaço vetorial seja apenas um nome e que as propriedades e talvez a própria estrutura sejam dos vetores que moram nele, e não dele. Quando fazemos esse tipo de afirmação, não queremos dizer que Kika e Vivian estejam erradas. O que buscamos com isso é uma compreensão plausível de por que as noções de espaço vetorial e de transformação linear não terem sido muitas vezes relacionadas nas falas das alunas.

Uma mudança na produção de significados que ocorre da atividade da Tarefa 1 para a da Tarefa 2 é que, na primeira, Vivian e Kika não constituíram em objetos sistema de equações lineares e matriz ao falarem de transformação linear; na mesma atividade, definiram sistema de equações lineares e matriz mas não manifestaram relação alguma entre esses e transformação linear (ver figuras 4.1 e 4.2). Já na segunda tarefa, em particular no 3º sorteio, as alunas optaram por associar transformação linear com sistema de equações lineares, deixando de lado espaço vetorial. Aqui aparece a influência da definição de transformação linear dada primeiramente pelo professor no curso de Introdução à Álgebra Linear (ver item 4.2 deste capítulo) e no livro de Banchoff & Wermer (ver capítulo anterior). Inclusive nos 7º e 10º sorteios, os significados produzidos para transformação linear têm relação com matriz devido a tal definição dada a partir de um sistema de equações lineares.

No 7º, Kika e Vivian associam matriz e transformação linear porque “a transformação linear provém de um sistema de equações lineares” e “sistema linear pode escrever na forma de matriz” (Vivian) ou “a matriz ajuda a resolver esse sistema da transformação” (Kika). E no 10º, Vivian relaciona sistema de equações lineares com vetor dizendo que

talvez sistema de equações lineares pode ser visto como uma transformação linear que pega um vetor e sei lá, faz alguma coisa com ele dependendo da transformação.

Neste mesmo sorteio, apesar de Kika ter relacionado vetor e função, ela comenta que “sistema linear seria tipo a lei da função, vai”.

Pudemos observar com a atividade da Tarefa 2 que, dependendo da noção junto à qual esteja a de transformação linear, esta muda, podendo ser uma função que irá agir nos vetores ou ser proveniente de um sistema de equações lineares. Esses diferentes significados produzidos para a mesma idéia fazem parte de núcleos distintos constituídos na atividade da Tarefa 2.

Que implicações isso tem para o trabalho em sala de aula? O fato é que, o significado produzido para a noção de transformação linear pode mudar. E saber dessa mudança, orienta em que o trabalho do professor de Álgebra Linear?

Se, dentro de uma atividade, pode haver mais de uma maneira de produzir significado para a noção de transformação linear, é interessante que o aluno de um curso de licenciatura em Matemática tenha acesso a elas ou que lhe sejam dadas oportunidades para percebê-las. Para tanto, competiria ao professor de Álgebra Linear criar em sala de aula um espaço comunicativo, ou seja, criar condições para que os significados que os alunos produzem sejam ouvidos e levados a sério. A partir daí, poderiam ser negociados aquele(s) modo(s) de produção mais adequado(s) ao tratamento que seria dado à Álgebra Linear e, em particular, à transformação linear.

Esse tipo de dinâmica amplia a experiência matemática do graduando, futuro professor de Matemática, apresentando-lhe situações em que deverão ser tomadas decisões que dizem respeito aos significados produzidos.

Uma possibilidade de encaminhamento seria lançar mão da literatura específica de Álgebra Linear; como vimos no capítulo anterior, temos um número considerável de livros-texto que podem desencadear

algum tipo de discussão, possibilitando assim, produções de significados diversos.

4.3.3 – Tarefa 3

As tarefas anteriores foram elaboradas para que as alunas pudessem falar sobre a noção de transformação linear de forma mais geral. A intenção, ao fazermos esta terceira tarefa, foi de observar os significados produzidos pelas alunas para uma transformação linear específica. Foi entregue a cada uma delas uma folha com a seguinte questão: “Como você descreveria a transformação $T(x, y) = (-y, x)$ do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^2$?”. As alunas tiveram cerca de vinte minutos para pensar separadamente na questão proposta e escrever em suas folhas aquilo que achassem conveniente. Logo em seguida, cada uma delas foi ao quadro negro para explicar o que havia feito. As explicações foram videografadas e transcritas. Com base no registro em vídeo, nas transcrições e na escrita das alunas é que fizemos a análise que segue.

Tarefa 03

Como você descreveria a transformação $T(x, y) = (-y, x)$ do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^2$?

$T(x, y) = (-y, x)$ é uma transformação linear, pois satisfaz as duas propriedades de transformações lineares: $T(X+Y) = T(X) + T(Y)$ e

$$T(\alpha X) = \alpha T(X) \quad ; \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$$

~~Essa transformação é chamada de rotação de 90° no sentido anti-horário, ou seja, é o ângulo de um vetor X qualquer pertencente a $\mathbb{R}^2$ pela transformação e um vetor de mesma magnitude que X, que forma com o eixo x um ângulo de 90° no sentido anti-horário em relação ao vetor X.~~

É chamada de rotação, no caso rotação de $\pi/2$, ou seja, qualquer vetor pertencente a $\mathbb{R}^2$ terá como imagem um vetor "rotacionado" (90°)

$$\text{Matriz da } T = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

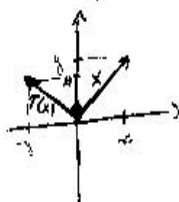


Figura 4.5 – Anotações de Vivian (Tarefa 3)

Tarefa 03

Como você descreveria a transformação $T(x, y) = (-y, x)$ do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^2$?

Primeiramente eu diria que é uma transformação linear, mostrando que ela satisfaz as propriedades de uma t.l.

1º) Sejam $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vetores quaisquer de $\mathbb{R}^2$

$$T(X+Y) = T\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -(x_2+y_2) \\ x_1+y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = T(X) + T(Y)$$

2º) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha X) = T\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 \\ \alpha x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha T(X).$$

Também diria que T preserva ~~comprimento~~ comprimento, pois $\|X\| = \|T(X)\| \forall X$.
e preserva ângulos. (*)

Afirmaria ainda que T é injetora (T é injetora $\leftrightarrow \ker T = \{0\}$), pois

$$\ker T = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(X) = 0\}$$

$$\therefore T(x, y) = (0, 0) = (-y, x) \rightarrow \begin{cases} -y = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \therefore X = 0.$$

Seria possível também achar a $m(T)$, aplicando T na base canônica

$$\begin{aligned} T(E_1) &= T(1, 0) = (0, 1) \\ T(E_2) &= T(0, 1) = (-1, 0) \end{aligned} \rightarrow m(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eu concluiria que T é uma rotação de 90° ($T = R_{\frac{\pi}{2}}$)

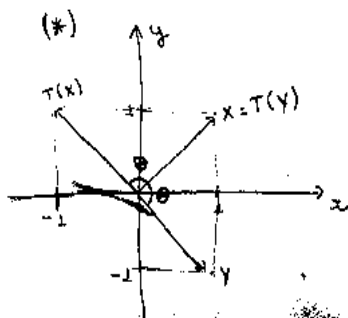


Figura 4.6 – Anotações de Kika (Tarefa 3)

Vivian começa sua descrição dizendo que a transformação é linear, já que “satisfaz às duas propriedades de transformações lineares” e que ela é uma reflexão em torno do eixo x .

Logo em seguida procura mostrar o que a transformação linear faz nos vetores do plano, desenhando um sistema de dois eixos ortogonais no quadro negro e um vetor “genérico” (x, y) , e calculando sua imagem segundo a lei de formação da T . Em certa altura da sua explicação, observa que aquela transformação linear não era uma reflexão em torno do eixo x , tomando o vetor $(1, 2)$ e verificando qual era sua imagem pela T . Pede para desligar a câmera de vídeo para “fazer conta um pouquinho”. Enquanto faz as contas, sussurra “uma transformação linear é alguma coisa”.

Depois de fazer as contas, conclui que aquela transformação linear é uma rotação de 90° . O fato de Vivian ter pedido para desligar a câmera não nos permitiu afirmar ao certo como ela operou para chegar a essa conclusão. Entretanto, ao descrever a transformação T diz que

É uma transformação linear porque satisfaz as propriedades e é uma rotação de 90° , ou seja, qualquer vetor que você tiver em qualquer lugar aí, aplicado a transformação nele, a imagem dele vai ser tipo, vamos supor, ele mesmo, só que com a rotação de 90° .

nos sugerindo que, possivelmente, Vivian tenha tomado vetores particulares do $\mathbb{R}^2$ e aplicado neles a T , verificando assim que se tratava de uma rotação de 90° . Ao final de suas anotações, parece confirmar esse fato exibindo a matriz da T

$$\begin{pmatrix} \cos(p/2) & -\sin(p/2) \\ \sin(p/2) & \cos(p/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inclusive, no registro escrito da Tarefa 3 de Vivian, na figura 4.5, observamos próximo ao canto direito superior da folha (assinalada por uma seta feita por nós), a anotação do que provavelmente seria a matriz $\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}$, indicando uma rotação de q graus. Não é possível saber se desde o início da atividade Vivian já desconfiava que aquela era uma rotação.

Nesse ponto de nossa análise cabe um questionamento: se no lugar da transformação linear dessa tarefa fosse apresentado um operador T do $\mathfrak{R}^2$ (com estrutura *diferente* da usual) e com a mesma lei de formação $T(x, y) = (-y, x)$, será que Vivian olharia apenas para a lei de formação, verificando o que a transformação faria nos vetores e, no caso, sendo uma rotação, isso já caracterizaria tal operador como uma transformação linear?

Não temos dados suficientes para responder nada nesse sentido; mas, essa quase necessidade de representar geometricamente os vetores (como segmentos orientados de reta) e de visualizar o efeito da lei de formação neles aplicada pode indicar que, nessa atividade, os significados produzidos por Vivian para a noção de transformação linear estão muito mais relacionados a idéias geométricas do que algébricas.

Além de exercícios que exploram transformações lineares, como a da Tarefa 3, serem bastante comuns nos livros-texto de Álgebra Linear, vale lembrar que no livro adotado pelo professor que ministrou o curso de Introdução à Álgebra Linear para Vivian e Kika aparece como objetivo dos autores Banchoff & Wermer “levar o estudante a um entendimento da Álgebra Linear elementar pela ênfase nos significados geométricos da matéria”.

Kika começa mostrando que a T dada é uma transformação linear verificando se ela “satisfazia as propriedades de uma tl [sic]”. Mostra

ainda que a T é injetora: “uma transformação ela é injetora se, e somente se, o $\ker$ dela for a nula [sic]”.

Depois disso, “desenhando assim alguns vetores quaisquer”, Kika notou que a transformação “preserva comprimento e preserva ângulo”, ou seja, respectivamente, o módulo do vetor é o mesmo da sua imagem segundo a T e dados dois vetores v_1 e v_2 do $\mathfrak{R}^2$, com ângulo entre eles igual a θ , o ângulo entre $T(v_1)$ e $T(v_2)$ também é igual a θ .

Continuando sua descrição, Kika encontra a matriz da T em relação à base canônica, calculando $T(e_1) = T(1, 0) = (0, 1)$ e $T(e_2) = T(0, 1) = (-1, 0)$ e constrói a matriz, cuja primeira coluna é a $T(e_1)$ e a segunda coluna é a $T(e_2)$ e diz: “Então a matriz da T vai ser $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ”.

Aí com isso eu notei que a T é uma rotação de 90° [grifo nosso]”. Para reforçar isso, Kika aplica a T nos vetores da base canônica do $\mathfrak{R}^2$ e conclui “por esses dois exemplos que para cada um que você aplica, você roda 90° . Então a T é uma rotação de $\pi/2$. (...)”. E, finalizando, diz que

Eu diria que é uma rotação de $\pi/2$, que pra qualquer vetor que você pegue ela rotaciona ele 90° , mantendo o seu tamanho, e mantendo os ângulos, se eu aplico em dois, ela também mantém os ângulos, que ela é linear e injetora.

Embora Vivian e Kika tenham justificado que a transformação é linear usando os mesmos argumentos, comparando as atividades de Vivian e Kika, observamos que o modo como cada uma opera é diferente.

Vivian parece pensar mais geometricamente para descrever a transformação, utilizando os vetores do $\mathfrak{R}^2$ para dizer o que a T fazia e a matriz da T para confirmar sua conclusão. Constitui em objetos: vetor, plano cartesiano, comprimento, ângulo, simetria, rotação, matriz da

transformação; sobre tais objetos faz afirmações que não sente necessidade de justificar – temos então um núcleo. Podemos identificar a atividade de produzir significado em relação a esse núcleo como *Campo Semântico Vetor-Geométrico*.

É interessante lembrarmos que esse campo semântico, como qualquer outro que possamos caracterizar, é constituído pelo sujeito (nesse caso por Vivian) no interior da atividade e não faria sentido falarmos da modificação desse campo semântico, a não ser no interior da própria atividade. Terminada a atividade, ele não existe mais.

Kika, por sua vez, parece pensar mais algebricamente. Primeiramente encontrou a matriz da T para reiterar que a T era uma rotação de 90° , utilizou os vetores da base canônica, aplicando neles a T e observando suas imagens. Constitui em objetos: plano cartesiano, ângulo, norma, núcleo, injetividade, base canônica, matriz da transformação, rotação, vetor. Chamamos de *Campo Semântico Algébrico* à atividade de produzir significado em relação ao núcleo constituído por Kika.

Esses campos semânticos, embora constituídos a partir da produção de significados para um mesmo texto, eram distintos.

4.3.4 – **Tarefa 4** (14/12/2000)

Como na tarefa anterior, procuramos com esta observar os significados produzidos pelas alunas para uma transformação linear específica; só que desta vez sem explicitar sua lei de formação. A intenção de não apresentarmos às alunas a lei de formação foi para que, sem elas terem como fazer os cálculos diretamente e verificarem as propriedades de uma transformação linear, observássemos suas possíveis falas sobre transformação linear (já que, eventualmente, poderiam nem tocar nesse assunto).

Apesar de, do ponto de vista matemático, ser impossível dizer, a partir do procedimento que realizamos com um número finito de vetores, que a talvez função aplicada nos vetores é uma transformação linear, as alunas tentaram achar alguma regularidade no que estava sendo feito e, nesse sentido, encontrar uma lei de formação – com toda certeza, induzidas pela maneira como a tarefa foi apresentada. Embora saibamos das limitações dessa tarefa, apresentamos no que segue como ela foi realizada e algumas considerações sobre falas de Vivian e Kika.

Realizaram a tarefa separadamente e em cada entrevista só uma aluna estava na sala.

Antes das alunas chegarem, foi desenhado no quadro um sistema cartesiano de dois eixos. Pedimos para que cada aluna fosse ao quadro negro e desenhasse um vetor. Para cada vetor por ela traçado, traçamos outro, segundo a lei $T(x, y) = (0, -2y)$ (que não foi apresentada às alunas; também não foi dito a elas sobre a possibilidade de existir alguma lei de formação para o que seria feito no quadro negro).

Depois de alguns vetores traçados, pedimos para que elas descrevessem o que havia sido feito no quadro.

Ao longo do processo de se marcar no quadro os vetores $[(2,1), (-2,1), (0,2) \text{ e } (2,0)]$ e obter suas respectivas imagens, Vivian suspeitou que, o que acontecia, fosse “alguma coisa relacionando ângulo. Mas aí vi que não tinha nada a ver” e diz

Então eu acho que é alguma transformação, mas aí eu tô tentando descobrir qual; é o que eu acho. Mas eu não sei se eu vou descobrir. [...] Bom, eu sei também você tá sempre aqui em x igual a zero, né. Qual a finalidade... [...] Bom, então o que eu falei, o negócio do ângulo não tem nada a ver. Vai ser alguma transformação que vai levar x, y em zero e alguma coisa aqui, que eu não estou enxergando.

Quando questionada novamente sobre o que achava que estava acontecendo, Vivian responde: ‘Eu acho que é uma transformação, eu acho que é linear’; o porquê de ser linear: “porque leva um cara aqui, no caso um vetor, em outro vetor ou em um ponto”. Pergunto então a Vivian o que vem à sua cabeça, quando ela fala transformação linear, e ela diz:

A primeira coisa que vem assim na minha cabeça é que uma transformação linear vai levar, vamos supor, uma reta numa reta mesmo. Não em outra coisa diferente, ou no ponto. E, assim, um plano num plano [murmurou alguma coisa, parece ‘ou uma reta assim’]. É a primeira coisa que me vem à cabeça quando fala em transformação linear.

Neste ponto ficou difícil de dizermos se realmente para Vivian, nessa atividade, uma transformação para ser linear basta que seja uma função entre conjuntos de vetores (“porque leva um cara aqui, no caso um vetor, em outro vetor ou em um ponto”), já que logo em seguida ela faz a afirmação de que um plano também pode ser levado num plano pela transformação linear.

Na vez de Kika, ela inicialmente marcou os vetores $(1,2)$, $(1,3)$, $(4,0)$ e $(-2,1)$, para os quais foram dadas as respectivas imagens segundo a lei de formação da transformação linear. A partir desses vetores, a aluna observa que todas as suas imagens estão sobre o eixo y e que essas imagens podem ser escritas como combinação linear uma da outra – “estão na mesma reta”. Tenta achar uma relação, mas diz não enxergar. Peço então para que ela trace outros vetores. Ela marca $(-1,0)$, $(5,1)$, $(0,2)$ e $(0,0)$.

Talvez por ter sido dado a Kika um maior número de imagens, ela sugeriu a mesma lei de formação que havíamos adotado para a função e

supôs que ela fosse uma transformação linear, dizendo precisar verificar o fato.

Também a Kika perguntamos: o que vem à sua cabeça quando se fala transformação linear? Kika responde: ‘Uma função que leva da reta na reta. Seria bem direto assim’.

Aquela dúvida que tivemos em relação à fala de Vivian (se uma transformação para ser linear basta que seja uma função entre conjuntos de vetores), não reaparece no que diz respeito à última fala de Kika que diz claramente que uma transformação linear seria uma função que leva da reta na reta, algo que não está sujeito à estrutura de espaço vetorial. Nessa atividade, ser transformação linear parece independender daquelas duas propriedades, que em outros momentos as alunas usaram para caracterizar uma transformação linear.

Observamos ainda que, sem a lei de formação, Kika procede diferentemente da atividade da Tarefa 3: ela não utiliza as imagens dos vetores da base canônica para obter a matriz da transformação linear e, portanto, a lei de formação da transformação linear.

Provavelmente, a ausência da lei de formação levou as alunas a falarem da suspeita que elas tinham de que estivéssemos tratando de uma transformação linear sem poderem ou precisarem lançar mão da definição sustentada pelas duas propriedades. Nessa situação, as alunas produzem significados que podem estar relacionados ao termo linear, sugerindo transformações na reta.

Já na fase de análise das entrevistas, observamos que esta tarefa poderia ter sido mais rica se em vez de utilizarmos a lei de formação de uma transformação linear para marcar as imagens dos vetores sugeridos pelas alunas, tivéssemos usado uma lei de formação que não correspondesse à de uma transformação linear.

4.3.5 – Tarefa 5²⁵ (01/11/2001)

A partir das tarefas anteriores, passamos a suspeitar de uma repetida associação geométrica feita pelas alunas na produção de significados para transformações lineares específicas. Acontece que as tarefas elaboradas (3 e 4) tomaram operadores lineares do $\mathfrak{R}^2$ (com as operações usuais) podendo, de alguma maneira, ter induzido esse tipo de pensamento.

Resolvemos então, aproximadamente após onze meses de realização das quatro primeiras tarefas, realizar outra tarefa com as mesmas alunas. Cabe ressaltar que nesse período decorrido elas cursaram e concluíram a disciplina Álgebra Linear (opcional para a Licenciatura) e, quando realizada a quinta tarefa, elas estavam cursando a disciplina Estruturas Algébricas. Em particular, na disciplina de Álgebra Linear são tratados espaços vetoriais abstratos, não havendo um direcionamento para reforçar o sentido geométrico de espaços vetoriais – abordagem diferente da adotada pelo professor de Introdução à Álgebra Linear; podemos até dizer que ela vai na direção de “des-geometrizar” a Álgebra Linear.

Na Tarefa 5 foram apresentadas a cada uma das alunas duas funções, em cada caso, entre espaços vetoriais, e solicitamos a elas que, como antes, falassem separadamente sobre tais funções. Diferentemente das tarefas anteriores, não foram dadas às alunas folhas em branco para que elas pudessem rascunhar ou escrever alguma coisa sobre os problemas antes de falarem sobre eles. Qualquer desenvolvimento que elas desejassem fazer, seria feito no próprio quadro negro. As aplicações foram apresentadas para as alunas no quadro negro; após exporem suas idéias sobre a primeira aplicação, era apresentada a segunda para que então fosse também comentada.

²⁵ Essa tarefa foi elaborada junto ao grupo de pesquisa (citado no primeiro capítulo). Como as questões envolvidas nela eram de interesse não só para esta pesquisa mas também para o trabalho do grupo, houve a intervenção do Prof. Romulo na entrevista.

As duas partes da tarefa: Como você descreveria a aplicação

$$1^a) \quad \square: \{ax+b; a,b \in \mathbb{R}\} \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}; a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$ax+b \quad \alpha \quad \begin{bmatrix} -b & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$2^a) \quad \square: \square_5^2 \rightarrow \square_5^2$$

$$(x,y) \quad \alpha \quad (-y,x)$$

Essas funções foram escolhidas por motivos particulares.

A primeira porque se trata de uma transformação linear entre espaços vetoriais com elementos distintos – os elementos do domínio são da forma $ax+b$ (a e b sendo valores reais quaisquer) e os do contra-domínio são um subconjunto das matrizes quadradas de ordem 2.

Já a segunda função, que é um operador linear, é definida entre espaços vetoriais cujos vetores, usualmente, não têm representação geométrica; além disso, $\square_5^2$ tem um número finito de vetores.

A partir dessas duas funções, observamos as falas das duas alunas, tentando identificar possíveis significados produzidos para transformações lineares e também mudanças decorrentes do fato dos espaços vetoriais tomados não terem um apelo geométrico tão forte como, por exemplo, o $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ usuais.

A primeira função

Ao falarem da primeira aplicação, Kika e Vivian identificaram o seu domínio com o conjunto das retas no plano.

Meu domínio são todos os polinômios de 1º grau, né, retas, dessa forma. Vão levar nas matrizes. Bom, eu não sei assim dizer muito sobre isso. Se eu pegar essa função, for levar por exemplo

uma reta então vou pegar um exemplo, $x+2$ eu vou levar ele aonde, na matriz $-2, 1, 0, 2$. Vamos ver, o que eu poderia dizer... Bom o determinante da minha imagem tá sempre dando menos b quadrado, eu não sei se isso ajuda em alguma coisa, né. Não sei também se eu precisaria calcular isso, acho que isso não tem muito a ver com a função. Determinante da f de $ax+b$ vai tá sempre dando menos b quadrado, vai tá sempre dando negativo, no caso. A imagem... eu não sei, é difícil dizer a imagem, né. Porque seria um conjunto de matrizes tal que o determinante dê sempre menos b quadrado, vai tá sendo as matrizes dessa forma que já tá aqui descrita; matrizes né, fica difícil. (Kika)

Ah, eu descreveria como uma aplicação da reta no... (...) Ah, eu descreveria como uma aplicação da reta no... ah, eu não tô conseguindo, eu não tô vendo qual que é aquele conjunto lá. (Vivian)

Apesar do conjunto (que de agora em diante chamaremos de $\wp_1$) ter sido apresentado $\{ax+b; a,b \in \mathbb{R}\}$ às alunas, elas pareciam tentar de alguma maneira associar formas geométricas aos elementos de $\wp_1$ para poderem descrever a aplicação dada. Essa quase necessidade de geometrizar fica evidente em suas falas quando apresentam dificuldades em produzir significado para a imagem da aplicação, justamente por não conseguirem enxergar as matrizes como vetores (segmentos de reta orientados) ou lugares geométricos: “A imagem... eu não sei, é difícil dizer a imagem, né. (...) matrizes né, fica difícil” (Kika) ou “eu não tô conseguindo, eu não tô vendo qual que é aquele conjunto lá” (Vivian). Em especial a fala de Vivian que, mesmo conseguindo perceber visualmente o conjunto, diz não estar enxergando.

Nas entrevistas anteriores, devido aos conjuntos e aos espaços vetoriais que utilizamos, não havíamos como confirmar essa tendência

em se visualizar geometricamente os vetores dos espaços vetoriais para melhor descrever a aplicação. No caso desta tarefa, com os conjuntos escolhidos, munidos das operações usuais de adição e multiplicação por escalar e escritos sobre o corpo dos reais, as alunas sentiram necessidade em “enxergar” os vetores para falar da aplicação. Nas falas seguintes de Kika percebemos isso: “É difícil falar né, porque é uma função bem estranha!”, que continua:

Ah, porque é leva reta em matriz então assim, não é uma coisa que você pode descrever muito claramente. Porque matrizes, não deixa de ser uma coisa meio vaga, né. Não tem como você descrever o formato de um espaço de matrizes, matriz assim ela serve muito pra auxiliar em contas, em problemas, mas ela em si assim eu não consigo é, deve ser assim alguma coisa comigo, né, eu não consigo imaginar assim o espaço de matrizes, como seria a imagem dessa função, por exemplo, eu não consigo descrever. Então, eu achei meio estranha. Eu não consigo imaginar, quando eu penso em função eu sempre imagino, né: domínio os reais leva lá. Então, pode levar no espaço dos reais, pode levar num círculo. Eu imagino assim como seria o conjunto imagem, certo, como eu estaria descrevendo ele, e nesse caso eu sinceramente eu não sei descrever a imagem dele não.

E quando perguntamos sobre o domínio da função ($\wp_1$), ela responde:

O domínio são todas as retas, né, seria o R dois. Sei lá, eu acho. Porque você aqui seriam equações de retas. O a e b eu vou tá variando em todos os reais. Então eu taria obtendo todas as retas do eixo R dois, né, do eixo x e do eixo y. Seria o R dois.

É interessante que mesmo depois de chamarmos a atenção de Kika para o fato de ela ter lido os elementos do conjunto $\wp_1$ como sendo retas e eles não serem retas, ela argumenta que

Mas eu automaticamente já botei aquilo na cabeça, né. Quando olhei assim aqui já vem logo equação de reta: $y=ax+b$, e realmente não tinha pensado de outra forma, né. Mas eu acho que mesmo com y ou sem y o domínio seria o $\mathbb{R}$ dois.

Não é exagero dizermos então que as alunas (pelo menos inicialmente) usaram visualizar geometricamente os vetores dos espaços vetoriais para então falarem da função. Primeiramente porque olhavam para os polinômios e enxergavam retas; segundo, porque não conseguiram visualizar geometricamente as matrizes e, por isso, tiveram dificuldade em descrever a função. Aqui não há, como na atividade da Tarefa 3, por exemplo, como se ver o vetor se mexendo, se transformando ou sendo levado nele mesmo modificado pela função; parece que enxergar matriz como vetor é poder visualizá-la como uma flecha ou representá-la de alguma maneira geometricamente.

Além disso, como perceber alguma mudança ou transformação se temos um polinômio, ou melhor, “uma reta” “virando” uma matriz? Que tipo de função é essa que modifica dessa maneira um elemento? Olhando para a fala das alunas em outras atividades, imaginamos que essas podem ter sido questões que passaram pela cabeça delas e as levaram a tratar com tanta estranheza o subconjunto das matrizes quadradas de ordem 2. Talvez a estranheza não tenha sido propriamente em relação ao subconjunto das matrizes, mas pelo fato de “reta virar matriz”. É claro que, por exemplo, Vivian já tinha certa familiaridade com o conjunto das matrizes e sabia que o contra-domínio era um conjunto de matrizes; mas quando perguntamos a ela, se aquela função (nesse momento Vivian já havia suspeitado de que ela era uma transformação linear) fazia alguma coisa, ela responde:

Então, é porque eu não tô conseguindo enxergar o que vai acontecer desse lado, mas ó, ela vai levar as retas ali em... ah, em que que ela

vai levar?... [...] Ah, eu não tô conseguindo enxergar onde ela vai levar, mas ela vai fazer alguma coisa, com certeza. [...]

Então, eu não tô conseguindo enxergar. Eu sei que ela vai levar, vai levar as retas daqui em alguma coisa do lado de lá que eu não tô conseguindo enxergar o que vai ser. Em algum vetor lá do outro espaço vetorial.

Suspeitamos que se a aplicação fosse entre matrizes não seria tão estranha para as alunas. Talvez porque daria para imaginar o elemento mudando: uma matriz virando outra matriz. No caso da aplicação apresentada nessa tarefa, parece que a dúvida maior está em termos “uma reta” “virando” uma matriz.

A segunda função²⁶

Inicialmente, Kika diz sobre a segunda função da Tarefa 5:

Ela seria sobrejetora porque se eu pegar qualquer combinação, vai do 1 com o dois, deixa eu pensar, ela levaria pela f, né, seria levado no -2 barra que equivale ao... deixa eu pensar. Eu acho que é o três barra, se eu não me engano; três barra e no 1 barra, que seria um par que tá dentro de Z cinco cartesiano Z cinco. Então eu acho que qualquer, eu acho não, acho que tenho certeza. Qualquer daqui a imagem vai ser também no Z cinco cartesiano Z cinco. Então, nesse caso, ela seria sobrejetora, né. (...)

Se eu for tentar ver se ela é injetora pelo ker, deixa eu ver se eu consigo enxergar o ker disso aqui. Vai ser todo o par pertencente ao Z cinco cartesiano Z cinco tal que o par $-y, x$ seja igual ao par zero barra zero barra (?). Então

²⁶ De modo particular para a segunda função foi frisado na entrevista que o corpo dos escalares de $\mathbb{R}_5^2$ é $\mathbb{R}_5$.

precisaria, pro x teria de ser um múltiplo de cinco, uma classe múltiplo cinco. Então seria a classe do zero, a classe do cinco, a classe do dez, né.(...)

Então aqui só poderia ser a classe do zero e aqui também [apontando para o conjunto $\ker f$ que escreveu na lousa]. Então no caso ela seria injetora, porque o $\ker$ é formado só pelo elemento neutro, que no caso é o zero zero. Então eu diria que essa aplicação é bijetiva. Que mais eu diria? Se ela é uma transformação linear? Deixa eu ver. Eu pegaria dois aqui, somaria... É aqui já fica mais difícil imaginar. Deixa eu tentar fazer por conta, por exemplo f de um, dois mais um, três. [grifo nosso]

Quando pedimos para que ela desse um palpite, antes de fazer as contas, se a função era ou não uma transformação linear, Kika diz que não e justifica sua resposta:

(...) porque eu penso assim. E, se for somar dois pares pra depois aplicar a f eu vou tá com um par diferente, tipo assim: aqui no caso, o dois e o três. Se eu for somar antes eu vou tá com o par dois zero seria um par diferente e se eu for aplicar a f neles antes de somar os dois eu vou tá modificando, a f modifica né o par aqui. Então eu acho que na hora que eu for somar as duas f 's já aplicadas, vão ser dois pares diferentes. Também aí eu acho que pode ter hora que não vai ser igual. Não sei, assim, meio imaginando, né. A soma eu acho que, aqui eu taria aplicando a f num par distinto dos pares que eu vou obter aqui. Se eu aplicar a f aqui e depois aqui, a hora que eu for somar esses dois resultados, quem me garante que essa soma vai ser igual a esse resultado? Eu acho que não vai ser necessariamente igual. Pode ter caso que dê igual, mas eu acho que não necessariamente. Deixa eu ver se esse exemplo aqui já me diz alguma coisa [fazendo as contas]. Agora se eu aplicar a f antes, né [fazendo as contas]. Eu teria a

classe do -2 barra [fazendo as contas]... que seria a classe do zero dois. É, deu igual. Peguei um exemplo... é, nesse caso deu igual, mas eu digo assim: quem me garante que vai dar sempre igual, né? Eu tenho minhas dúvidas! Não sei. Eu olhando assim meio no chute eu desconfiaria que pode ter um caso que não vai dar certo. O exemplo que eu peguei deu, então não dá pra eu justificar nada, né. [...] É, não sei dizer. Eu acho que eu teria que, eu acho até que pode ser, mas acho desconfiando, sabe. Eu faria todos os possíveis casos pra tirar minha dúvida. Se eu tentasse fazer genérico, sem dando exemplo, fica complicado.

Quando conversávamos com Kika sobre a função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, ela sabia quais eram os elementos desse espaço vetorial e as operações de adição e multiplicação por escalar definidas. Primeiramente, tomou os vetores de $\mathbb{R}^2$ como elementos de um espaço vetorial – não tentou visualizá-los geometricamente. Quando dizemos isso não queremos colocar como problema a tentativa de representar geometricamente, por exemplo, os vetores do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$. Apenas chamamos a atenção para o fato de que não é para todo espaço vetorial que será adequada a representação dos vetores como segmentos orientados de reta.

Vale lembrar que, na atividade da Tarefa 1 e também na da Tarefa 2, Kika disse que espaço vetorial “é o espaço em que os vetores agem, atuam, onde a gente opera com eles, né”; e na atividade da Tarefa 1 afirma que:

(...) vetor, seria assim, bem generalizando, um segmento de reta orientado que é muito utilizado pelos matemáticos e também pelos físicos porque ele ajuda a representar bases, vetores diretores de reta; no caso dos físicos, representa velocidade.

Embora estejamos analisando outra atividade, é possível que Kika, também por não conseguir enxergar segmentos orientados nos elementos de $\mathbb{R}_5^2$, não tenha procedido inicialmente como nas atividades de tarefas anteriores, tomando a lei de formação da função e verificando as duas propriedades da transformação linear. A suposta estranheza causada pelos elementos de $\mathbb{R}_5^2$ que, provavelmente, não tenham se encaixado na definição dada pela aluna a vetor, aliada à ausência do recurso visual-geométrico, parece, nesse momento, corresponder a um limite epistemológico para Kika.

Insistimos com ela, perguntando se essa fosse uma situação de prova se, realmente, ela faria todos os possíveis casos para verificar se f é uma transformação linear, isto é, verificaria se $f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = f[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)]$ e $f(\alpha(x_1, y_1)) = \alpha f(x_1, y_1)$, para todos os pares de $\mathbb{R}_5^2$. Ela responde que não – acaba tentando mostrar genericamente, como faria na prova, e verifica que $f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = f[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}_5^2$; é interessante observarmos que o fato que estamos destacando aqui, não é Kika conseguir ou não mostrar genericamente que a aplicação é uma transformação linear, e sim o relativo desconforto que a aluna teve em fazer operações, antes tão imediatas, provavelmente causado pelo espaço vetorial em questão. Até mesmo porque, a lei de formação da transformação linear da Tarefa 3 é a mesma da função em questão.

Dando prosseguimento, fizemos outra pergunta para Kika: como é que ela conseguiria visualizar uma reta no $\mathbb{R}_5^2$. Essa pergunta surgiu no andamento da entrevista quando falávamos da primeira função, para cujo domínio Kika dizia olhar e enxergar retas. A aluna responde que não consegue e quando vai dizer o que acha que a função faz, afirma que:

O que que ela faz... ela levaria um par x, y qualquer do $\mathbb{Z}$ cinco cartesiano $\mathbb{Z}$ cinco no respectivo par $-y, x$, também do $\mathbb{Z}$ cinco cartesiano $\mathbb{Z}$ cinco. Agora é o que você falou, no outro você disse: leva uma reta daqui numa reta de lá. Agora, eu não consigo imaginar isso aqui sendo uma reta, porque se isso aqui for uma reta, aqui também é, né. Então eu não consigo imaginar isso como uma reta pra dizer: leva uma reta daqui numa reta de lá, né. (...)
Mas eu não consigo ver uma reta aqui. (...) Eu não enxergo reta daqui de jeito nenhum. Não sei.

O sentido visual-geométrico – que provavelmente tenha alguma influência da Geometria Analítica e da própria disciplina de Introdução à Álgebra Linear – embora não presente nas primeiras falas de Kika (nessa atividade), chegou também a interferir nos significados que ela produziu para a transformação linear dessa tarefa; com o $\mathbb{R}^2$ usual, não houve dúvidas em se verificar aquelas duas propriedades para se demonstrar que a função era uma transformação linear. Nessa tarefa, Kika não procedeu como anteriormente, tendo certa resistência em verificar as propriedades que caracterizam uma transformação linear.

Poder-se-ia pensar que tal resistência se deve a alguma dificuldade em se operar com os elementos de $\mathbb{Z}_5^2$. Entretanto, julgamos tal hipótese remota, já que, quando realizada a entrevista da Tarefa 5, tanto Kika quanto Vivian estavam terminando a disciplina Estruturas Algébricas, na qual trabalhavam com classes de equivalência e operações entre elas.

Também na fala de Vivian percebe-se a influência do sentido visual-geométrico, mas com uma considerável diferença: em grande parte da atividade ela parece ignorar que o espaço vetorial em questão é $\mathbb{Z}_5^2$, embora tenhamos conversado sobre seus elementos e suas operações no início da tarefa.

Após fazer gestos como se fossem cálculos sobre a carteira, Vivian começa dizendo que acha que a aplicação dada

obedece lá as duas propriedades de transformação linear (...), é sobrejetora (...), acho que é injetora também (...) E leva os elementos do $\mathbb{Z}_5$ cartesiano $\mathbb{Z}_5$ no $\mathbb{Z}_5$ cartesiano $\mathbb{Z}_5$.

Embora tenha feito essas afirmações de imediato, diz que confirmaria, sem fazer os cálculos, apenas que os elementos de $\mathbb{Z}_5^2$ são levados em $\mathbb{Z}_5^2$.

Ao perguntarmos a ela o porquê de haver dito que achava que a aplicação era uma transformação linear, Vivian responde ‘porque eu acho que são operações assim bem comportadas (...) Essas operações que você definiu lá, a soma e a multiplicação’. Gostaríamos de entender melhor a que ela se referia quando dizia *operações bem comportadas*. Sugerimos então uma outra aplicação (que identificaremos por g) também de $\mathbb{Z}_5^2$ em $\mathbb{Z}_5^2$ com as mesmas operações antes definidas que levava (x, y) em (x, xy) , pedindo para que Vivian se manifestasse a respeito daquelas quatro características que ela havia suscitado para a aplicação f . Ela disse “eu acho que não vai, porque não satisfaz às propriedades”, referindo-se à característica de ser transformação linear.

Acontece que as operações continuavam as mesmas; Vivian justifica sua resposta dizendo que:

Mas acontece que você meteu ali uma multiplicação ali na, xy . Daí a hora que você fizer, vamos supor, $x+a$ e $y+b$, vai ficar $x+a$ vezes $y+b$, ali. Quando você fizer separado, vai ficar xy mais ab . E... então não vai dar, porque ali já tá com , ali com a multiplicaçãozinha ali, já não tá tão comportadinha igual a de cima. (...)

As aplicações, a aplicação também tem que ser comportada. Então, lá em cima [a segunda aplicação da tarefa] olhando é porque a aplicação é comportada também. (...)

Ó, a segunda ali [se referindo a aplicação g] tem uma multiplicação, tá vendo, tá envolvendo x e y . A primeira ali não, ambas as coordenadas ali tão assim sozinhas, bem assim quietinhas, aqui já não, ó. Igual aqui, ó, eu acho que ela já não vai ser injetora. Não dá pra definir o que é uma coisa bem comportada. É uma coisa que quando você coloca ali que você for fazer as continhas de transformação, não sei quê, não sei quê, dá certo.

Tentar identificar uma transformação linear pela lei de formação da função entre espaços vetoriais, quando as operações são as usuais, é algo, podemos dizer, intuitivo para professores de matemática com certa experiência em Álgebra Linear. Porém, essa maneira de produzir significado para transformação linear nem sempre é explicitada em sala de aula ou nos livros-texto de Álgebra Linear.

Ao descrever o que a transformação linear da tarefa faz, Vivian diz que:

Ela leva o par x, y no par $-y, x$. Ela leva o vetor, um vetor que tá aqui, aqui [fazendo gesto de rotação, deslocamento com a mão]. Ela faz acho que uma reflexão em torno do eixo x ? Acho que é. Não, não é. Deixa eu ver. (...)

Ah, não é isso que ela faz não. Ela leva... ela vai mudar assim [fazendo gesto com a mão de rotação, deslocamento]. Ela vai mudar (...) tudo que tiver lado positivo aqui do x vai pro negativo, que tiver do negativo vai pro positivo [fazendo gesto com as mãos de deslocamento]. Agora, o y vai continuar igual, só que... ah, como que eu vou me expressar? Ah, a norma ali dos vetores vão ser iguais, não vão? Vão [desenhando, escrevendo

com a mão na carteira]. Vai manter. Mas o que que ela faz, o nome, o nome eu não sei.

Até agora Vivian não havia se levantado da carteira para utilizar a lousa; ela resolve então utilizá-la para explicar o que achava que aquela transformação linear fazia e diz:

Assim, ó, eu tô imaginando que ela faz assim ó [desenha um sistema cartesiano de eixos ortogonais na lousa]. (...)

Por exemplo, imaginando que é uma coisa assim, ó: [desenha o vetor (1, 1) e a imagem segundo a lei de formação da f] vai ficar assim. Então ela vai fazer aqui, com esse, com essas coisas que tão nessa reta, nessa reta, ela vai fazer a reflexão em torno desse eixo [y]. Só que o que não tiver, não vai fazer. Porque ó, por exemplo, vamos pegar esses aqui 2 e 1. Então ele vai levar no -2, 1. Vai levar aqui ó [desenhando o par ordenado (-2,1)] . Vai levar aqui ó. Então não vai ser assim uma reflexão. Mas tudo que tiver desse lado aqui, vai pra esse lado aqui.

Cabe lembrar que até agora o fato de estarmos lidando com o espaço vetorial $\mathbb{R}_5^2$ parece não ser levado em conta por Vivian; os vetores serem tomados como pertencendo ao $\mathbb{R}^2$ usual a partir da lei de formação é uma estipulação local do núcleo em que ela operava na atividade de produzir significado para transformação linear f. Na tentativa de verificar se realmente ela ignorava o $\mathbb{R}_5^2$, pedimos para que ela escrevesse na lousa quais eram os elementos de $\mathbb{R}_5^2$; ela fez isso e, quando observou que estava tomando vetores do $\mathbb{R}^2$ usual e não os elementos de $\mathbb{R}_5^2$, apagou o desenho que havia feito na lousa. Insistimos para que ela continuasse a fazer suas representações, levando em conta, por exemplo, que -2 não pertence ao $\mathbb{R}_5$. Vivian responde:

Ah, não sei. O que que eu vou fazer, representar isso daí aonde? (...)

Ah, mas eu não sei pensar daquele jeito com esse conjunto. (...) mas são conjuntos [os elementos de $\mathbb{R}_5$] e eu não sei falar.

Por não conseguir representar geometricamente os elementos de $\mathbb{R}_5^2$ (como segmentos orientados de reta), Vivian muda sua fala em relação à transformação linear e, portanto, os significados produzidos.

Esse é um caso particular do que foi bastante marcante nas entrevistas da quinta tarefa (tanto da primeira quanto da segunda função): as idéias naturalizadas de reta e vetor, que influenciaram no processo de produção de significados para a noção de transformação linear.

OBSERVAÇÕES FINAIS

A partir do trabalho que desenvolvemos nessa dissertação, além do resultado final – a dissertação propriamente dita – foram muitos os significados produzidos para situações específicas relativas à elaboração do material escrito como também para situações que envolvem a educação matemática do professor de matemática. Isso se deve, principalmente, ao trabalho que desenvolvemos enquanto grupo de pesquisa.

A proposta inicial do trabalho foi analisar a produção de significados para a noção de transformação linear, de forma a subsidiar uma posterior reflexão sobre os processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra Linear, voltando nosso olhar à formação inicial do professor de matemática.

Com base nas discussões do nosso grupo de pesquisa, bem como nos trabalhos desenvolvidos pelos seus membros, percebemos que as disciplinas matemáticas dos cursos de licenciatura em Matemática exigem estudos profundos, tanto no estabelecimento dos seus objetivos como também na estruturação e execução delas.

O que esse trabalho nos permitiu foi juntar elementos à essa discussão, apontando, a partir de uma análise da produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra Linear, questões importantes na formação inicial do professor de matemática. Apesar de tais questões estarem relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Álgebra Linear, podem também ajudar na reflexão sobre a prática de professores de outras disciplinas na formação do educador matemático.

No capítulo 2, apresentamos nosso referencial teórico – o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS). Embora essa não seja a primeira dissertação desenvolvida a partir dele, acreditamos não ser demais enfatizar que sua riqueza está no fato de que seus pressupostos podem nos orientar não só no desenvolvimento de uma pesquisa, mas, principalmente, na prática de sala de aula.

Voltar nosso olhar à produção de significados na intenção de criar em sala de aula um espaço comunicativo – uma consequência do MTCS que, quando efetivamente tomado como ferramenta à nossa prática de sala de aula, exige do professor certa postura. Primeiramente, que *ouça mais e fale menos*; se para nós o significado produzido é a fala, não há como observarmos e interferirmos no seu processo de produção se não dermos voz aos nossos alunos. Além disso, tal produção se dá no interior de atividades, as quais devem ser planejadas e orientadas pelo professor com vistas a criar em sala de aula um espaço comunicativo. Quando falamos em atividades não estamos fazendo apologia ao uso de metodologias alternativas, já que não são metodologias que caracterizam um processo como atividade. Por exemplo, um professor que faça uso do giz e do quadro negro em suas aulas pode criar um espaço comunicativo em sala de aula – o problema não é o giz e o quadro negro, mas o uso que muitas vezes se faz deles. Além disso, conduzir atividades que possibilitem ao aluno produzir significados exige também do professor certa experiência matemática, no que diz respeito ao lidar com possíveis significados produzidos para idéias matemáticas – e essa experiência deveria ser oferecida nas disciplinas matemáticas dos cursos de licenciatura em Matemática.

No desenvolvimento da pesquisa, o MTCS possibilitou-nos uma leitura positiva de diversos textos, apresentada no capítulo 3. Nos livros didáticos observamos tratamentos diferenciados da noção de transformação

linear (homomorfismo, sistema de equações lineares, matriz e, a mais freqüente, função especial). Partindo de uma leitura mais geral, selecionamos os trabalhos de alguns matemáticos e identificamos um possível processo na constituição da idéia de transformação linear como uma função especial entre espaços vetoriais. Esse processo, oriundo da leitura que fizemos, apresenta momentos em que enxergamos maneiras possíveis de se produzir significados para uma transformação linear.

Observamos ainda que, apesar dos diferentes contextos – livros didáticos e trabalhos matemáticos dos séculos XVI a XIX – existem semelhanças entre abordagens de alguns livros didáticos e dos estudiosos citados.

Essa parte da pesquisa nos mostra que os resíduos de enunciação (livros didáticos e trabalhos matemáticos) que os estudantes de matemática têm a disposição, apresentam encaminhamentos no estudo das transformações lineares que, provavelmente, quando constituídos textos, levarão à produção de significados distintos. Dependendo das intenções do professor, seria interessante utilizar materiais com abordagens diversas para o trabalho com a noção de transformação linear.

No capítulo 4, apresentamos nossa leitura do texto que constituímos a partir da fala de duas alunas de graduação em Matemática, com os pseudônimos Kika e Vivian.

Na atividade da Tarefa 1, merecem destaque duas noções das quais as alunas falaram e que interferiram na produção de significados para transformação linear nas outras atividades: vetor (segmento orientado de reta) e espaço vetorial (lugar). O caráter geométrico dessas idéias, provavelmente enfatizado em disciplinas como Geometria Analítica e Física, permaneceu na fala das alunas ao tratarem de transformações lineares, então tomadas como ferramentas que modificam características

(comprimento, sentido, direção) dos vetores. Chamamos essas idéias de naturalizadas.

Apesar de na disciplina de Álgebra Linear os espaços vetoriais serem abordados como estruturas e os vetores como elementos dessa estrutura, essas idéias naturalizadas parecem permanecer quase intocadas. O aluno inicia a disciplina com as idéias geométricas, consegue ser aprovado nela deixando (ou não) de lado tais idéias, e, passado o período em que cursava a disciplina, permanece com as idéias iniciais. A experiência matemática que um aluno poderia adquirir nessa disciplina seria exatamente de tratar das diferenças entre os significados produzidos para vetor e espaço (vetorial), por exemplo, na Geometria Analítica e na Álgebra Linear; cada um é adequado a determinadas situações ou problemas.

Nesse sentido é que acreditamos que as disciplinas matemáticas dos cursos de Matemática (em particular da Licenciatura) necessitam ser repensadas. Essa é uma possibilidade de investigação para futuros trabalhos desenvolvidos em Educação Matemática.

Na atividade da Tarefa 2, os significados produzidos para espaço vetorial e vetor são os mesmos da tarefa anterior. Interessante nessa tarefa foi a mudança que a atividade causou na fala das alunas em relação à Tarefa 1. Os significados produzidos para transformação linear na Tarefa 1 foram: uma função especial com duas propriedades (Kika) ou um instrumento/função que transforma vetores (Vivian). Na atividade da Tarefa 2, quando uma transformação linear é colocada diante de outras noções, as alunas passam a produzir significados diferentes para transformação linear – transformação linear é um sistema de equações lineares ou uma matriz. Além disso, na fala de Kika e Vivian, a idéia de espaço vetorial pouco se relaciona com a de transformação linear.

Nas atividades das Tarefas 3 e 4, aparecem mais fortemente os significados geométricos para transformação linear, principalmente na fala de Vivian - vetor como segmento orientado e espaço vetorial como lugar onde os vetores moram. Muitas das vezes, principalmente para Vivian, a lógica das operações estava relacionada a esse caráter geométrico.

Com os dados analisados das quatro primeiras tarefas, tínhamos a suspeita de que os significados produzidos para transformações lineares dependiam de visualização e, conseqüentemente, da idéia naturalizada de espaço vetorial. Mas as tarefas realizadas não nos permitiam afirmar isso, apenas suspeitar. Realizamos então a Tarefa 5.

Utilizamos transformações lineares não muito usuais entre espaços vetoriais cujos vetores, à primeira vista, não tinham representação geométrica. Nessa atividade, os significados produzidos para as transformações lineares dependeram da visualização – representação geométrica – dos vetores, confirmando assim a suspeita que tivemos a partir das quatro primeiras tarefas.

Embora essas alunas tenham feito duas disciplinas de Álgebra Linear e obtido resultados satisfatórios para serem nelas aprovadas, os significados produzidos para transformação linear em nossa pesquisa não condizem com as principais idéias trabalhadas na Álgebra Linear: espaço vetorial como estrutura, vetor como elemento de uma estrutura e transformação linear como um homomorfismo entre espaços vetoriais.

Refletindo sobre essa situação, temos fortes indícios de que não só a disciplina de Álgebra Linear, como também outras disciplinas matemáticas, não oferecem oportunidades para que o aluno se desenvolva matematicamente; desenvolver-se matematicamente seria ampliar os significados produzidos para idéias matemáticas, sem com isso eliminar ou

corrigir as idéias naturalizadas. Pensamos que cada uma tem seu lugar. O papel das disciplinas matemáticas seria exatamente oferecer oportunidades para que os alunos possam entender as diferenças entre os significados de idéias. Na Física, por exemplo, existem situações em que é mais conveniente falar de vetor como segmento orientado do que como elemento de um espaço vetorial e vice-versa.

Essa brecha deixada na formação dos futuros educadores matemáticos provavelmente trará conseqüências danosas à sua vida profissional. Isso porque na medida em que o professor não sabe lidar com os conhecimentos que os alunos produzem para idéias matemáticas a partir de suas experiências fora da escola e até mesmo dentro da escola, torna-se impraticável criar em sala de aula um espaço comunicativo e, dessa forma, dar oportunidade para que seus alunos se desenvolvam matematicamente.

A partir disso, dizemos que os cursos de licenciatura em Matemática precisam ser modificados. Nesse sentido, nosso trabalho abre um caminho para a discussão dessa mudança.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BANCHOFF, Thomas & **WERMER**, John. Linear Algebra Through Geometry. 2nd ed. New York: Springer, 1992.

BATSCHLET, Edward. Introdução à Matemática para Biocientistas. Trad. Vera M. A. P. da Silva e Junia M. P. A. Quitete. São Paulo: Ed. Interciência, 1978.

BELL, E. T. Historia de las Matemáticas. Trad. R. Ortiz. México: Fondo de Cultura Económica, 1995.

BOLDRINI, J. L. Álgebra Linear. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda., 1978.

BOURBAKI, Nicolas. Elementos de historia de las matemáticas. Trad. Jesús Hernández. Madrid: Alianza Editorial, 1976.

BOYER, C. B. História da matemática. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BURALI-FORTI, C. & **MARCOLONGO**, R. Transformations Linéaires. Trad. P. Baridon. Pavie: Mattei & C., 1912.

CASSOL, Armindo. Produção de significados para a derivada: taxa de variação. Dissertação de mestrado. Rio Claro: Unesp, 1997.

CAYLEY, Arthur. On the Theory of Linear Transformations. Cambridge Mathematical Journal. Vol. IV, pp. 193-209, 1845.

_____. On Linear Transformations. Cambridge and Dublin Mathematical Journal. Vol. I, pp. 104-122, 1846.

CROWE, Michael J. A history of vector analysis. London: University of Notre Dame Press, 1967.

DORIER, Jean-luc. Continuous analysis of one year of science student's work in linear algebra, in first year of French University. Proceedings of the XIVth annual congress of the PME . Mexico, 1990.

_____. et alii. The teaching of linear algebra in first year of French science university: epistemological difficulties, use of the “meta lever”, long-term organization. Proceedings of the XVIIIth Annual Congress of the PME. Lisbon, July, 1994. Volume 4: 137 - 144.

DOUADY, R. Jeu de cadres et dialectique outil/objet. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble, 1986. Volume 7/2.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domínguez. Campinas: Editora da UNICAMP, 1997.

HALMOS, Paul R. Finite-Dimensional Vector Spaces. 2nd edition. New York: Princeton University Press, 1958.

HERSTEIN, I. N. Tópicos de Álgebra. Trad. Adalberto P. Bergamasco e L. H. Jacy Monteiro. São Paulo: Ed. Polígono, 1970.

HILLEL, Joel & **SIERPINSKA**, Ana. One persistente mistake in linear algebra. Proceedings of the XVIIIth Annual Congress of the PME. Lisbon, July, 1994. Volume 3: 65 - 72.

HOFFMAN, K. & **KUNZE**, Ray. Linear Algebra. New Delhi: Prentice-Hall of India Private Limited, 1967.

GRANGER, Gilles Gaston. Filosofia do Estilo. Trad. Scarlett Zerbetto Marton. São Paulo: Perspectiva, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

KATZ, Victor J. A History of Mathematics: an introduction. New York: HarperCollins College Publishers, 1992.

KELLY, George A. A theory of personality. New York: W.W. Norton & Company, Inc., 1963.

LANG, Serge. Álgebra Linear. Trad. Frederic Tsu. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1971.

LAWSON, Terry. Álgebra Linear. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 1997.

LAY, David C. Álgebra Linear e suas aplicações. 2^a edição. Trad. Ricardo Camelier e Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LEONTIEV, Alexis. O desenvolvimento do psiquismo. Trad. Manuel Dias Duarte. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1998.

LINS, Romulo Campos. El Razionamiento Algebraico. Anais do 1º CIBEM. Espanha, Sevilha, 1990 (a).

_____. A framework for understanding what Algebraic Thinking is. Anais da Conferência anual do PME. México, Oaxtepec, 1990 (b).

_____. On Algebraic Thinking. Caderno do PME Working Group on Algebraic Processes and Structure. Itália, Assis, 1991.

_____. Algebraic and non-algebraic algebra. Anais da Conferência Anual do PME. EUA, NH, Durham, 1992 (a).

_____. A framework for understanding what algebraic thinking is. PHD thesis. Nottingham: University of Nottingham, 1992 (b). (Doctorate in Mathematics Education).

_____. Understanding What Algebraic Thinking is: analysis and synthesis. Caderno do PME Working Group on Algebraic Processes and Structure. Japão, Tsukuba, 1993 (a).

_____. Um quadro de referência para entender-se o que é o pensamento algébrico. MEC-INEP, 1993 (b).

_____. Epistemologia, história e educação matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa. Revista da SBEM-SP. Campinas, set., 1993 (c). 1 (1): 75-91.

_____. O Modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. Revista Dynamis. Blumenau, abril/junho, 1994 (a). 1(7): 29-39.

_____. Álgebra e Pensamento Algébrico na sala-de-aula. A Educação Matemática em Revista (SBEM). 1994 (b). nº 2.

_____. Campos Semânticos y el problema del significado en álgebra. UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas. Barcelona, Espanha, 1994 (c). nº 1.

_____. Epistemologia e Matemática. Bolema Especial Ciclo Temático: Representação do conhecimento ou conhecimento da representação?. Rio Claro, 1995 (a).

_____. Discos, fitas e hotéis: produzindo significado para a álgebra. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, 1995 (b).

_____. Struggling for Survival the production of meaning. Anais da Day Conference da British Society for Research into Learning Mathematics. Sheffield, UK, 1996 (a).

_____ et alli. The need for emphasizing arithmetical and algebraic global sense and semantics in Arithmetic and Algebra: searching for the future. Universitat Rovira i Virgili. Tarragona, Espanha: 1996 (b).

_____. El pensament algebric. Revista da Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals. Reus, Espanha, 1996 (c).

_____. Sinais de uma intervenção simbólica em al-Khwarizmi (resumo). Anais do II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática / II Seminário Nacional de História da Matemática. Águas de São Pedro, São Paulo, 1997 (a).

_____. Você nunca esteve aqui. Revista Pátio (Ed. Artes Médicas). Porto Alegre, RS, 1997 (b). nº 1, ano 1.

_____. Por que discutir Teoria do Conhecimento é relevante para a Educação Matemática, In: Maria Aparecida Vigiani Bicudo (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Rio Claro: Editora Unesp, 1999.

_____. The production of meaning for Algebra: a perspective based on a Theoreticall Model of Semantic Fields. In: R. Sutherland et al. Perspectives on School Algebra. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2001.

LINS, Romulo C. & GIMENEZ, Joaquim. Sentido aritmético y algebraico, ¿o algo más?. UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas. Barcelona, Espanha, 1996 .

_____. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas: Papirus, 1997.

LIPSCHUTZ, Seymour. Álgebra Linear. Trad. Roberto Ribeiro Baldino. São Paulo: McGraw-Hill, 1972.

_____. Álgebra Linear: Teoria e problemas. Trad. Alfredo Alves de Farias. 3ª edição. São Paulo: Makron Books, 1994.

MAJMUTOV, M. I. La enseñanza problémica. Cuba: Editorial Pueblo y Educación, 1983.

MOURA, Orlando. Mecânica Quântica. Belém: Universidade Federal do Pará, 1983.

MOORE, Gregory H. The axiomatization of Linear Algebra. Historia Mathematica, 22: p. 262-303, 1995.

PEANO, Giuseppe. Calcolo Geometrico. Torino: Fratelli Bocca Editori, 1888.

POLONI, Adil. Sobre a produção de significados por um grupo de alunos quando da proposição de um certo texto do chamado discurso matemático. Dissertação de mestrado. Rio Claro: Unesp,

RÍBNIKOV, K. Historia de las matematicas. Trad. Concepción Valdés Castro. Madrid: Editorial Mir Moscú, 1991.

ROBERT, A. Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire: questions de problématique et de méthodologie. Un exemple: un enseignement annuel de licence en formation continue. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble, 1992. Volume 12/2.3.

_____. Prise en compte du “méta” en didactique des Mathématiques. Cahier de DIDIREM nº 21. IREM de Paris 7.

SAD, Ligia Arantes. Cálculo diferencial e integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos. Tese de doutorado. Rio Claro: Unesp, 1998.

SEARLE, S. R. Matrix Algebra for the Biological Sciences. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1966.

SILVA, Amarildo M. Uma análise da produção de significados para a noção de Base em Álgebra Linear. Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula, 1997.

SILVA, Rute Henrique. Álgebra Linear como curso de serviço para a computação. Dissertação de mestrado. Rio Claro: Unesp, 1999.

SMITH, David Eugene. A source book in Mathematics. New York: Dover Publications, 1959.

STILLWELL, John. Mathematics and its history. New York: Springer – Verlag, 1989.

STRUİK, Dirk. J. História concisa das matemáticas. Trad. João Cosme C. Guerreiro. Lisboa: Gradiva Publicações Ltda, 1992.

VAN DER WAERDEN, B. L. A History of Algebra. Germany: Springer-Verlag, 1985.

WUSSING, H. Lecciones de Historia de las matematicas. Trad. Elena Ausejo, José L. Escorihuela, Mariano Hormigón, Daria Kara-Murzá e Ana Millán. Madrid: Siglo Veintiuno de España Editores, 1998.

ANEXOS

TERMO DE COMPROMISSO ÉTICO

Este termo de compromisso pretende esclarecer os procedimentos que envolvem as pesquisas, a utilização dos dados nelas coletados e o que se pode esperar de todos os envolvidos. Tem o objetivo de deixar o mais transparente possível a relação entre estes e o tratamento e uso das informações que serão colhidas.

As atividades realizadas, videografadas e transcritas, servirão como material para pesquisas que procuram entender melhor o processo de produção de significados; mais especificamente, tais atividades constarão de questões que abordam noções de Álgebra Linear. O acesso aos registros videografados será exclusivo do grupo de pesquisa, que assume o compromisso de não divulgá-los, e os registros escritos das mesmas serão feitos preservando-se a identidade dos sujeitos em sigilo através dos pseudônimos por eles escolhidos. Quanto às informações provenientes da análise dessas entrevistas, poderão ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e eventos científicos e divulgadas a todos aqueles que se interessarem pelas pesquisas.

No que diz respeito à expectativa dos pesquisadores quanto aos entrevistados, espera-se que estes sejam freqüentes e participem das atividades com a contribuição de suas falas.

Rio Claro, 30 de Novembro de 2000.

Pesquisador

Pesquisadora

Entrevistado

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
UNESP - Campus Rio Claro
Pesquisadora: Viviane Cristina Almada de Oliveira

Sessão 01 - 30/11/2000

Grupo: _____

Pseudônimo: _____

Tarefa 01

Numere a 2ª coluna de acordo com a 1ª considerando a seguinte pergunta:

O quanto você pode falar das noções apresentadas na 2ª coluna?

- | | |
|------------------------------|-------------------------------------|
| 1- Nada | () matriz |
| 2- Só lembro o nome | () transformação linear |
| 3- Posso dizer alguma coisa | () sistema de equações lineares |
| 4- Posso dizer várias coisas | () espaço vetorial |
| | () vetor |

De acordo com a numeração, para aquelas noções que você marcou 3 ou 4, tente:

- i) anotar na folha em anexo o que lembrar;
- ii) discutir com o(a) colega suas anotações.

Após o término do tempo, discutiremos suas anotações.

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
UNESP - Campus Rio Claro
Pesquisadora: Viviane Cristina Almada de Oliveira

Sessão 02 - 07/12/2000

Grupo: _____

Pseudônimo: _____

Tarefa 02

Vamos considerar várias noções de Álgebra Linear: matriz – combinação linear – sistema de equações lineares – determinante – base – transformação linear – vetor – espaço vetorial – dimensão – função – vetores linearmente independentes – conjunto gerador, que serão apresentadas aos alunos através de cartões. Em tal apresentação, serão mostrados aos alunos três cartões por vez. De acordo com as relações entre as três noções, o aluno deverá optar por agrupar duas delas, que para ele tenham maior ligação, deixando uma de fora. O procedimento de escolha dos cartões será aleatório e será repetido um número razoável de vezes.

As escolhas feitas pelos alunos serão por eles registradas numa tabela, como segue (abaixo).

Após esse processo, irei pedir para que cada aluno explique ou justifique o porquê de suas opções.

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
UNESP - Campus Rio Claro
Pesquisadora: Viviane Cristina Almada de Oliveira

Sessão 02 - 07/12/2000

Grupo: _____

Pseudônimo: _____

Tarefa 2

ESCOLHAS

01			
02			
03			
04			
05			
06			
07			
08			
09			
10			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
UNESP - Campus Rio Claro
Pesquisadora: Viviane Cristina Almada de Oliveira

Sessão 02 - 07/12/2000

Grupo: _____

Pseudônimo: _____

Tarefa 03

Como você descreveria a transformação $T(x,y) = (-y, x)$ do $\mathfrak{R}^2$ no $\mathfrak{R}^2$?

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
UNESP - Campus Rio Claro
Pesquisadora: Viviane Cristina Almada de Oliveira

Sessão 01 - 14/12/2000

Grupo: _____

Pseudônimo: _____

Tarefa 04

As alunas irão realizar a tarefa separadamente. Cada uma e eu iremos ao quadro; nele haverá um sistema cartesiano de eixos. Pedirei para a aluna traçar um vetor. Para cada vetor por ela traçado, traçarei outro (segundo a lei $T(x,y)=(0,-2y)$). Digo a ela isso, a menos da lei da transformação, e peço para que ela observe o que vou fazer.

Depois de alguns vetores traçados, pergunto:

Como você descreve o que eu estou fazendo?

Isso é uma transformação linear? Por quê?

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
 UNESP - Campus Rio Claro
 Pesquisadora: Viviane Cristina Almada de Oliveira

Sessão 01 - 01/11/2001

Grupo: _____

Pseudônimo: _____

Tarefa 05

As alunas irão realizar a tarefa separadamente. Foi colocado no quadro para cada uma delas as seguintes questões:

Como você descreveria a aplicação $\square: \{ax+b; a,b \in \mathfrak{R}\} \rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}; a,b \in \mathfrak{R} \right\}$

$$ax+b \propto \begin{bmatrix} -b & a \\ 0 & b \end{bmatrix} ?$$

Como você descreveria a aplicação $\square: \square_{\mathfrak{S}}^2 \rightarrow \square_{\mathfrak{S}}^2$

$$(x,y) \propto (-y,x) ?$$

TRANSCRIÇÃO - ENTREVISTA DA TAREFA 1
DE 30/11/2000

ENT.: E aí, quais são as coisas que você pode tá falando pra gente?

VIVIAN: Ah, eu posso tá falando um pouquinho de cada coisa. Mas bem pouquinho!

ENT.: Não tem problema...

VIVIAN: Ó, sei lá, matriz eu acho que é um conjunto de números escritos da forma linha e coluna que você pode fazer algumas operações também assim com esse conjunto como soma, multiplicação... e quando tem incógnitas cai num sistema de equações. De matriz, assim, é isso que me veio à cabeça. Transformação linear eu acho que é uma função que tem algumas transformações, assim, como a rotação, que às vezes fica mais fácil de você, sei lá, formar um sistema de coordenadas, não sei direito definir, assim. Que também tem algumas operações, né, e tem duas propriedades.

ENT.: Você lembra essas propriedades?

VIVIAN: Lembro. Que uma transformação, por exemplo, T de x mais y é igual a T de x mais T de y, e sendo x e y pertencentes a um espaço vetorial aí, sei lá, um $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. E a outra é T de um número real vezes um x é igual a esse número real aplicado na T de x. E sistema de equações lineares eu acho que é um conjunto de equações que pode ter também várias incógnitas e sempre com termos assim lineares, né, assim, se for do tipo equações quadradas, assim um sistema de equações quadradas, só termos mais lineares. Podem ser obtidas também multiplicando assim uma matriz por outra matriz., até já falei isso né, que cai num sistema de equações ou por um vetor. Espaço vetorial acho que é todo lugar assim onde moram os vetores assim, onde eles atuam [risos], pelo menos eu entendo assim. Que você também pode multiplicar né o vetor por um número real cai nesse mesmo, nesse mesmo lugarzinho aí que eles moram, nessa mesma casinha. Também pode somar dois deles, com mais. E o vetor, vetor é mais complicado, eu acho que é um segmento de reta orientado que a gente pode mexer aí com eles também pra obter sistemas de coordenadas... Sei lá, vê aí uma operação que pode ser feita. Acho que pra falar disso, é só isso mesmo que eu tenho, mesmo porque... eu sei assim mexer, às vezes, mas pra falar sobre é meio complicado.

ENT.: Tem alguma coisa [perguntei pro Amarildo]? Tudo bem [perguntei pra VIVIAN]?

VIVIAN: Tudo [gesto afirmativo com a cabeça].

ENT.: Qual das duas agora se habilita? Se você quiser ir [pra VIVIAN]...

MARCELA: Posso ser eu, que eu tenho aula...

ENT.: Pode.

MARCELA: Ai....

ENT.: Ai, que tortura...

MARCELA: Bom, eu tenho menos coisa ainda pra falar. Vetor pra mim é um segmento orientado, que tem um tamanho chamado de norma, que pode ser aumentado ou diminuído assim, multiplicando por um número real qualquer esse tamanho né, essa norma. Transformação linear pra mim é uma aplicação. E você multiplica a matriz transformação por um vetor qualquer e tipo, muda as características do vetor e também tem as duas propriedades, né: T de a mais T de b é igual a T de a mais b e um α multiplicado por T de a é igual a T de αa . É... a matriz pra mim é usada assim basicamente para o cálculo da determinante, eu não sei assim definir matriz. E o determinante pode representar a solução de uma equação ou sei lá, se for maior ou diferente de zero, eu não lembro muito bem, essa matriz tem inversa ou não. Um espaço vetorial eu não sei definir, só sei que ele é diferente do vazio pois o vetor nulo pertence ao espaço vetorial; e ele é fechado, não sei, em relação às operações? [fiz gesto com a cabeça de que não sabia e MARCELA mexeu com a cabeça negativamente enquanto falava] Hum... não sei. E o sistema de equações lineares eu sei que pode ser homogêneo se ele for igual a zero ou não. Aí se ele tiver infinitas soluções vai ser li, não lembro direito, ou ele vai ter apenas uma solução. Só isso.

ENT.: Falou muito, pra quem falou que não ia dizer nada... Tá tudo certo, então? [pra MARCELA] Pode ser você agora? [pra KIKA]

KIKA: Pode.

ENT.: Todas vão te abandonaram...

KIKA: Então. Eu também vou falar só um pouquinho de cada porque é difícil definir, né. Matriz eu coloquei que seria um conjunto de números, escrito também na forma de linhas e colunas, e que é muito usado na Matemática porque ajuda a simplificar muitos cálculos com as operações que a gente conhece: soma, multiplicação, cálculo de determinante. Ele simplifica muita coisa, então os matemáticos usam demais isso. Transformação linear eu tenho uma definição bem da Matemática mesmo. Uma função T ela vai ser uma transformação linear se ela obedecer as duas propriedades, né: T de x mais y for igual a T de x mais T de y e T de αx vai ser αT de x , sendo α pertencente aos reais né, um número real. Sistema de equações lineares eu pensei que seria assim um conjunto de duas ou mais equações com duas ou mais incógnitas e que, na maioria das vezes, é bem simples de ser resolvido. E também pode ser obtido por matrizes, essas coisas, com vetores né. Espaço vetorial é o espaço em que os vetores agem, atuam, onde a gente opera com eles, né. E vetor, seria assim, bem generalizando, um segmento de reta

orientado que muito utilizado pelos matemáticos e também pelos físicos porque ele ajuda a representar bases, vetores diretores de reta; no caso dos físicos, representa velocidade... Isso.

ENT.: Isso ?! Tá ótimo.

KIKA: Só.

ENT.: Só isso tudo [risos].

TRANSCRIÇÃO - ENTREVISTA DA TAREFA 2
EM 07/12/2000

ENT.: Então, hoje a primeira tarefa que a gente vai fazer é a seguinte: eu tenho aqui alguns cartões e nesses cartões eu escrevi algumas noções de Álgebra Linear, tá. E que que eu vou tá fazendo? Eu vou tá sorteando entre esses cartões, aleatoriamente - vocês vão ver que eu vou estar embaralhando mesmo, igual carta - vou tá sorteando três e vou colocar na ordem que eu tiver sorteado essas três cartas aqui no quadro. O que vocês vão ter que fazer? Olhando pra essas três noções vocês vão, dessas três, retirar duas que vocês acham que têm mais relação uma com a outra. E a terceira vocês vão tá deixando ela de lado, tá. Então eu coloquei aqui vinte tiradas, mas eu não sei se a gente vai tá fazendo as vinte, então aí vocês anotam nessas duas primeiras colunas as duas que vocês acham que têm mais relação e na terceira vocês deixam de lado a que vocês acham que tem menos relação. Pode acontecer de vocês acharem que as três têm a ver uma com a outra mas vocês vão ter que tá optando por aquelas duas que vocês acham que têm mais relação, tá... Eu vou tá dando um tempinho assim pra vocês estarem pensando e verem quais as que vocês vão tá tomando, mas não é nada assim demorado, tá. Vou tirar as três de cima... Então esse é o primeiro lançamento.

VIVIAN: Acho que as duas primeiras [apontando para o quadro].

KIKA: Eu também escolheria.

ENT.: Vocês não precisam tá falando, tá. Só escrevam. Se você puderem... Vocês podem abreviar se não couber. Eu vou fazendo todas desse jeito e vocês vão anotando. Depois vocês passam a limpo de caneta. Se vocês já quiserem escrever direto...

VIVIAN: É que eu não tenho caneta.

KIKA: Tem aqui, pode deixar.

ENT.: Eu tenho também.

VIVIAN: E aqui a gente põe a que a gente acha...

ENT.: Isso [interrompendo] nesse caso, a que tá de fora [...]

[sorteios]

[Se olham após o 2º e 3º sorteios]

[após o 2º sorteio murmuram sobre função]

ENT.: Coitadinha, né?

[Após escolherem as opções do 4º sorteio, Vivian olha o papel de Kika; se olham sorrindo]

ENT.: Expectativa para o sorteio da megasena...

VIVIAN: Função de novo... Só não caiu função no que eu achei que função tinha a ver.

[depois de feitas as escolhas, costumam se olhar pra ver o que a outra escolheu]

[nos 4º e 8º sorteios, VIVIAN parece olhar pro de KIKA, riscar e reescrever sua escolha]

[após o 10º sorteio]

ENT.: Faltava uma musiquinha, né.

VIVIAN: É... tá meio quieto.

ENT.: Em relação à semana passada...

VIVIAN: Tá meio tenso... [risos]

[se falam antes do 14º e após o 15º sorteios]

[antes do 18º sorteio]

ENT.: Corta [digo a Vivian]... sobe ou desce?

VIVIAN: Sobe... vamos mudar. Ixi [depois de ver as cartas sorteadas]... não saiu, deu certo [a carta transformação linear estava saindo com muita frequência].

[Batem na porta, e enquanto vou à porta, conversam]

[após o 19º sorteio]

VIVIAN: Não tem jeito... as duas gostam de sair juntas.

ENT.: É...

[...]

ENT.: Bom, agora o que nós vamos fazer é o seguinte: é... essas opções que vocês fizeram, vocês fizeram por algum motivo. Então eu gostaria que cada uma de vocês tivesse me explicando o porquê optou por juntar duas dessas noções e deixar uma terceira de lado. Só que como os lances foram os mesmos para as duas, e talvez pra gente ganhar um pouquinho de tempo, e aí eu tava pensando - não sei o que vocês acham - de eu ficar com uma conversando a respeito disso e já entregar a segunda tarefa de hoje pra segunda que não ficaria me explicando.

VIVIAN: Tudo bem. [Kika fez sinal positivo com a cabeça]

ENT.: Pode ser?... É aí, enquanto eu faço isso com outra, a outra vai fazendo a tarefa e depois a gente vê como é que arranja. Eu acho que vai dar o tempo legal. Qual que vai ser a primeira?

VIVIAN: É a professora KIKA...

KIKA: Pode ser.

ENT.: Pode ser?

KIKA: Pode.

[Se falaram sobre um dos sorteios da Tarefa 2]

KIKA

ENT.: Vamos lá...

[interrupção]

Bom, então o primeiro sorteio foi conjunto gerador, espaço vetorial e função. Por que que você optou por colocar conjunto gerador e espaço vetorial e deixar função de fora?

KIKA: Não, porque eu acho assim, o conjunto gerador é um conjunto de vetores que a gente fala que gera, certo - eu entendo assim. E o espaço vetorial é o espaço onde os vetores agem. Então a gente faz uma relação: os vetores moram no espaço vetorial e eles formam um conjunto gerador.

ENT.: E função, por que que função não tem a ver?

KIKA: Não que não tenha a ver, mas dentre esses três ela é a que menos se relaciona no caso, entendeu. Mas ela tem bastante a ver também.

ENT.: O que que função teria a ver com eles?

KIKA: Eu acho assim, a função ela agiria no vetor que mora no espaço vetorial que é o conjunto gerador. Ela agiria, levaria o vetor a um certo lugar, dependendo da função.

ENT.: Outro. Base, dimensão e função. Por que base e dimensão?

KIKA: Dimensão tá relacionado com o número máximo, né [?], máximo ou mínimo [?] [fiz sinal que não sabia] de vetores que eu consigo deixar, eu acho que é máximo, deixar l.i.. A partir, se eu acrescentar mais um vetor, por exemplo, se a dimensão for três, são três vetores, se eu acrescentar mais um eu já vou conseguir deixar eles l.d., certo. E, eu penso assim, a base tendo três vetores pode ser uma dimensão, a dimensão de três vetores, pode ser a dimensão dois, a dimensão quatro. Mas eu achei que no caso aí a base taria

relacionada com a dimensão três. Eu relatei assim e deixei a função de lado.

ENT.: Troca de lugar comigo?

KIKA: Troco.

ENT.: Sabe por quê? Você é mais bonita do que eu e vai ficar melhor para focalizar.

Agora, transformação linear, sistema de equações lineares e espaço vetorial.

KIKA: Transformação linear é um sistema de equações lineares [sorriso]. Bom, uma transformação linear provém de um sistema de equações lineares, então já tem tudo a ver aí, né.

ENT.: E por que não espaço vetorial?

KIKA: Não. A transformação linear seria tipo uma função e ela age no espaço vetorial. Mas como ela já provém de um sistema eu acho que ela teria mais relação, porque depois ela iria agir, entendeu, no espaço.

ENT.: Função, vetor e conjunto gerador.

KIKA: A função age no vetor e esse vetor forma um conjunto gerador. Então primeiro a função vai agir, foi meio por aí, pela ordem que eu coloquei, certo.

ENT.: Sua ordem...

KIKA: É, então.

ENT.: Sistema de equações lineares, matriz e combinação linear.

KIKA: O sistema de equações lineares ele pode formar uma matriz. Pra você conseguir resolver você pode dividir ele em matriz aplicada no vetor ou em qualquer outra coisa. Então tem a relação sistema com matriz pra resolução do sistema tem a matriz. E a combinação linear aí eu acho que ficou um pouco fora mesmo.

ENT.: Base, vetores li e conjunto gerador.

KIKA: Pra ser uma base, os vetores tem que ser li e gerar. Então eu achei que o vetor li tem bastante relação com a base porque é uma condição, uma das condições pra se formar uma base. E o conjunto gerador aí também ele gera o vetor, forma o gerador, mas aí ele ficou um pouco fora. A base teria mais relação.

ENT.: Matriz, transformação linear e conjunto gerador.

KIKA: Matriz com transformação linear. É a mesma coisa. A transformação linear provém de um sistema de equações lineares e a matriz ajuda a resolver esse sistema da transformação. Então tem bastante relação. O conjunto gerador aí ficou fora. Não teve muita relação.

ENT.: Vetor, combinação linear e matriz.

KIKA: O vetor eu posso escrever ele como combinação linear de outros vetores, certo. Então tá aí a relação. E a matriz, aí não tem como escrever combinação linear através de matrizes. Ela ficou fora.

ENT.: Conjunto gerador, vetor e sistema de equações lineares.

KIKA: O vetor, vários vetores formam o conjunto gerador. E o sistema não tem relação aí.

ENT.: Não tem, né. Vetor, função e sistema de equações lineares.

KIKA: Então, a função age no vetor, seria a transformação linear, que seria tipo uma função, ela vai agir no vetor pra transladar, pra fazer isso, dependendo da função que você considerar. Então por isso a relação. E sistema de equações lineares aí seria tipo a lei da função, vai. Mas acho que não seria bem isso. Então ficou meio fora. Não sei explicar bem.

ENT.: Combinação linear, transformação linear e vetores li.

KIKA: Combinação linear com transformação linear. É, aí eu sinceramente acho que nenhum dos três tem assim muita relação. Mas a combinação linear seria a combinação linear de dois vetores dando um outro, de três ou mais, gerando um outro. E essa transformação linear agiria sobre esse vetor.

ENT.: Determinante, sistema de equações lineares e espaço vetorial.

KIKA: Então. É a relação matriz sistema de equações lineares. Você resolvendo o determinante da matriz você já pode descobrir se o sistema tem solução, se não tem, se ela é única. Então daí a relação. E espaço vetorial aí sobrou.

ENT.: Espaço vetorial, vetores li e transformação linear.

KIKA: Os vetores li são, moram né no espaço vetorial e a transformação agiria sobre os vetores do espaço vetorial. Mas aí primeiro eles tariam lá e depois ela agiria. Então primeiro a relação de vetor com espaço, pra depois agir a função, a transformação.

ENT.: Conjunto gerador, vetor e transformação linear.

KIKA: Conjunto gerador é formado por vetores. Então, daí os dois ali. E a transformação agiria neles. Só que ficou pra depois.

ENT.: Transformação linear, função e combinação linear.

KIKA: A transformação linear é uma função que age nos vetores. E a combinação linear é que assim, combinação de dois ou mais forma um vetor.

ENT.: Aqui quando você tinha colocado combinação linear foi por que você confundiu ou você achou que tinha alguma coisa a ver, ficou em dúvida?

KIKA: Não, eu olhei assim, falei ah acho que esses dois tem a ver. Mas nem pensei o porquê. Aí depois que veio de novo transformação linear com função eu falei espera aí, tem mais relação. Aí eu troquei o de cima de novo. Por isso.

ENT.: Transformação linear, função e conjunto gerador.

KIKA: É a mesma coisa, né. A transformação é uma função que vai agir sobre os vetores que formam um conjunto gerador.

ENT.: Função, espaço vetorial e determinante.

KIKA: Então. Determinante aí ficou fora porque ela serve pra resolver o sistema, pra ajudar mais nos cálculos. Então, não teve muito a ver. Aí seria mais da interpretação geométrica: a função com espaço, a função vai agir nos vetores do espaço vetorial.

ENT.: Transformação linear, função e espaço vetorial.

KIKA: A transformação é uma função que age no espaço vetorial. Mas primeiro a grande relação é função; seria tipo uma definição pra transformação linear. Então a relação maior tá aí, né.

ENT.: Base, vetores li e matriz.

KIKA: Pra ser uma base tem que ser vetores li e gerar. Então os vetores li novamente e uma condição, uma das condição pra formar uma base. E a matriz aí seria pra resolver sistema, então ela sobrou um pouquinho.

ENT.: Certinho. Ótimo.

VIVIAN

ENT.: Então, vamos lá. Agora eu vou te falando quais foram os sorteios e o que você separou, porque você optou, tá. Então o primeiro foi conjunto gerador, espaço vetorial e função. Por que que você agrupou dessa maneira?

VIVIAN: Por quê? Ah, porque eu acho que o espaço vetorial é o lugarzinho lá que moram os vetores. E o conjunto gerador também tem a ver com os vetores, são vetores que geram o espaço. A função, tá mais afastadinho.

ENT.: Outro: base, dimensão e função. Por que você juntou?

VIVIAN: Porque eu acho que dimensão de um espaço tem a ver com o tanto de vetores que precisa pra formar uma base daquele espaço. A dimensão.

ENT.: E a função...

VIVIAN: E a função...[faz sinal negativo com a cabeça] ficou de lado.

ENT.: Transformação linear, sistema de equações lineares e espaço vetorial.

VIVIAN: Porque eu acho que uma transformação linear vem de um sistema de equações lineares e o espaço vetorial também ficou de lado. Mas eu acho que é porque, até tem um pouco a ver com transformação linear assim, mas...

ENT.: Por que teria a ver com transformação linear?

VIVIAN: Ah, porque você pega um vetor, aplica uma transformação nele e esse vetor tá num espaço vetorial.

ENT.: Mas aí você acha que é mais forte a relação de transformação...

VIVIAN: Com certeza. De transformação linear com sistema de equações lineares. [Próximo sorteio] Um conjunto gerador com uma função... por que que eu fiz isso...

ENT.: Eu que tinha que te perguntar isso... [risos]

VIVIAN: Deixa eu pensar. Um conjunto gerador com função. não sei. Acho que eu fiz errado. Eu acho. Acho assim que os vetores são tipo elementos do conjunto gerador. Eu fiz errado. Aqui também eu tinha posto errado.

ENT.: Então é conjunto gerador com vetor. [Próximo sorteio] Sistema de equações lineares, matriz e combinação linear.

VIVIAN: Sistema de equações lineares com matriz.

ENT.: Isso.

VIVIAN: Porque um sistema de equações lineares pode escrever em forma de matriz pra tentar resolver. E combinação linear eu acho que não tem muita coisa a ver com isso.

ENT.: Conjunto gerador, base e vetores linearmente independentes.

VIVIAN: Porque um conjunto gerador é um conjunto que gera os outros, todas as coisas assim do espaço. E a base também. É uma... não, eu acho que a base é um conjunto que é um conjunto gerador. Ser li também tinha a ver, mas não podia por os três...

ENT.: Ma por que então você deixou de fora vetores li?

VIVIAN: Porque eu acho que é mais forte a ligação de conjunto gerador com a base.

ENT.: Do que com vetores li...

VIVIAN: Apesar da base serem vetores li, mas... a base é um conjunto gerador.

ENT.: Matriz, transformação linear e conjunto gerador.

VIVIAN: Porque a transformação linear como provém de um sistema linear e sistema linear pode escrever em forma de matriz, então a gente pode uma transformação linear pegar a matriz e aplicar num vetor. E conjunto gerador, porque ficou de fora também porque eu acho que não tem muito a ver.

ENT.: Combinação linear, vetor e matriz.

VIVIAN: Combinação linear e vetor porque um vetor pode ser escrito como combinação linear de outros. E matriz, tem nada a ver.

ENT.: Conjunto gerador, vetor e sistema de equações lineares.

VIVIAN: Conjunto gerador eu entendo que é um conjunto de vetores. Por isso a relação de conjunto gerador com vetor. Sem o sistema de equações lineares.

ENT.: Sistema de equações lineares, vetor e função.

VIVIAN: Sistema de equações lineares com vetor e função. Eu também não vejo muita ligação não, mas... ah, talvez sistema de equações lineares pode ser visto como uma transformação linear que pega um vetor e sei lá, faz alguma coisa com ele dependendo da transformação. Por isso que eu coloquei sistema de equações lineares com vetor.

ENT.: Vetores li, combinação linear e transformação linear.

VIVIAN: Vetores li com combinação linear, por quê? Porque os vetores podem ser escritos como combinação linear. Aí, o fato deles serem li, se eles forem uma base, que são vetores li, todos os outros daquele espaço vão poder ser escritos como combinação linear deles.

ENT.: Determinante, sistema de equações lineares e espaço vetorial.

VIVIAN: Determinante com sistema de equações lineares porque o sistema de equações lineares você pode escrever na forma de matriz e o determinante é da matriz. Espaços vetoriais eu não sei onde ficou.

ENT.: Espaço vetorial, vetores li e transformação linear.

VIVIAN: Porque... o espaço vetorial é tipo a casinha dos vetores e aí então tem que ficar junto com os vetores.

ENT.: Conjunto gerador, vetor e transformação linear.

VIVIAN: Porque o vetor, o conjunto gerador é formado por vetor.

ENT.: Aí a transformação linear dança...

VIVIAN: A transformação linear dança.

ENT.: Transformação linear, função e combinação linear.

VIVIAN: Eu acho que toda transformação linear é uma função. E a combinação linear, tá bem... Não sei o que tem a ver.

ENT.: Transformação linear, função e conjunto gerador.

VIVIAN: Toda transformação linear é uma função e conjunto gerador também não sei.

ENT.: Função, espaço vetorial e determinante.

VIVIAN: É porque tava difícil de escolher dois assim pra juntar. Aí eu escolhi função e espaço vetorial. Eu não sei não. Acho que esse tava difícil mesmo.

ENT.: Função e espaço vetorial você acha que não tem nada a ver? Ou tem, se tem é pouco?

VIVIAN: Ah, até tem. Mas é um pouco porque o espaço vetorial é o lugar dos vetores. Tem os vetores, vão ter as transformações tudo que vão ser funções.

ENT.: Então tem a ver.

VIVIAN: Tem. Tudo tem a ver, mas assim, chegando, puxando, chega lá.

ENT.: Transformação linear, função e espaço vetorial.

VIVIAN: Transformação linear é uma função e o espaço vetorial, conforme outra, é o lugar dos vetores, não sei quê, e acho que a ligação entre as duas é mais forte que com espaço vetorial. Mais direta.

ENT.: É mais direta.

VIVIAN: É.

ENT.: Finalmente, base, vetores li e matriz.

VIVIAN: Porque uma base é constituída por vetores linearmente independentes. Então a ligação também entre os dois é bem mais direta que com matriz.

ENT.: Legal.

TRANSCRIÇÃO - ENTREVISTA DA TAREFA 3
EM 07/12/00

VIVIAN

ENT.: Se você quiser VIVIAN pode ir para o quadro, o que você fez aí, que você tá explicando, se você achar melhor escrever pra você explicar não tem problema, você pode usar. Tem giz, apagador, tá?!

VIVIAN: Tá.

ENT.: Bom, então a tarefa tava perguntando como você descreveria a transformação $T(x, y) = (-y, x)$ do $\mathbb{R}^2$ no $\mathbb{R}^2$?

VIVIAN: Primeiro é uma transformação linear, né.

ENT.: Por que é uma transformação linear?

VIVIAN: Porque satisfaz as propriedades de transformação linear, as duas. E é chamada de reflexão, que vai ser aí uma reflexão em torno do eixo x. Vou desenhar.

ENT.: Você se importa de eu ficar na câmera?

VIVIAN: Não.

[...]

Assim, como toda reta é uma curva, então a minha também vai ser.

ENT.: Escreve com o giz branco que eu não estou conseguindo ver.

[...]

VIVIAN: Então a transformação é $T(x, y) = (y, -x)$. Certo? E que vai acontecer? Qualquer coisa que você pegar aqui, vai ser levada, vai ser uma coisa assim tipo simétrica, vai ser levado mas do outro lado aqui do eixo x. Vamos dar um exemplo. Vou pegar um vetorzinho aqui. Vamos supor com uma coordenada x, y qualquer. Aqui. Pela transformação T vai ser levada aqui: menos y, vai ser levada aqui. Então o que essa transformação faz: leva o que tá aqui, uma coisa aqui, ou se não tivesse aqui, ia levar aqui, então vai ser simétrico em relação ao eixo x. O ângulo aqui é o mesmo daqui, tudo simétrico. Esse tamanho aqui, esse comprimento, vai ser igual a esse. E, é uma transformação linear.

ENT.: Por que que é linear que você disse?

VIVIAN: Porque satisfaz as propriedades assim, ó. Vamos pegar X, Y dois vetores quaisquer lá no $\mathbb{R}^2$. E um α um número real. Aí se você aplicar a transformação em X mais Y vai ser igual a transformação aplicada em X mais a

transformação aplicada em Y . E se você aplicar ela num αX vai ser igual a um α transformação aplicada em X .

ENT.: Esse X aí é vetor ou coordenada do vetor?

VIVIAN: É vetor. São dois vetores, dois vetores quaisquer do $\mathbb{R}^2$.

ENT.: Mas como que você consegue dizer que isso tá acontecendo? Que essas duas coisas...

VIVIAN: Por conta. Quer que eu prove?

ENT.: Hein? Não precisa, é só falar.

VIVIAN: Por conta.

ENT.: Ah, tá. Por conta.

VIVIAN: Pega aí um X , seja $X \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ e $Y \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Aplica, aí você chega.

ENT.: Quais são as coordenadas daquele primeiro vetor que você desenhou?

VIVIAN: Desse?

ENT.: É.

VIVIAN: Ah, x , y .

ENT.: E quais são as coordenadas desse outro vetor aí?

VIVIAN: x , menos y .

ENT.: Então menos y e x , as coordenadas dele são...

VIVIAN: Quer ver o que eu fiz...

ENT.: Não. Eu entendi em cima que você me mostrou que é o vetor x , y , né? As coordenadas dele são x e y .

VIVIAN: Espera aí, deixa eu pensar uma coisa.

ENT.: Pode pensar.

VIVIAN: Eu acho que eu... Eu coloquei o contrário, espera aí.

ENT.: Pode escrever, não tem problema.

VIVIAN: Ixi, eu escrevi tudo errado, tudo ao contrário. Esquece.

ENT.: Por quê?

VIVIAN: Porque eu expliquei, ó...

ENT.: Não é transformação linear?

VIVIAN: Não, é. Transformação linear é. Isso eu fiz as contas. Não, porque ó, aqui, isso aqui. Porque por exemplo, pega um vetor, vamos pegar um vetor, o vetor X. Vai ser pra cá ó. Vamos dar um exemplo numérico, fica mais fácil. Sei lá, (1,2). Pela transformação esse vetor aqui vai ser levado no vetor, vamos sei lá chamar de Y ele, (-2,1). Certo? Então, ó... (?)
Tô ficando doida. Vamos supor que aqui é 1 e aqui é 2, em escalas diferentes. 1,2. 1, 2. Aqui. Certo? (?)

ENT.: E daí?

VIVIAN: Agora deixa eu pensar, espera aí.

ENT.: Pode pensar.

VIVIAN: Deixa eu pensar uma coisa.
[silêncio] Uma transformação linear é alguma coisa.

ENT.: Hum?

VIVIAN: Nada. Só tô pensando alto.

ENT.: O ideal é que você pense alto.

VIVIAN: Espera aí. Desliga aí. Deixa eu fazer conta um pouquinho. Daqui a pouco eu falo.

ENT.: Você quer mexer mais?

VIVIAN: Quero.
[...] [ficou mexendo]
Já sei. Recapitulando, voltando. É uma rotação.

ENT.: É uma rotação?

VIVIAN: É uma rotação. É uma rotação de $\pi/2$. Então um vetor aqui vai ser rotacionado com um ângulo de $\pi/2$, ou seja né, 90° , um ângulo reto; e a imagem aqui vai ser uma rotação desse vetor.

ENT.: Então qual seria a forma que você descreveria essa transformação?

VIVIAN: É uma transformação linear porque satisfaz as propriedades e é uma rotação de 90° , ou seja, qualquer vetor que você tiver em qualquer lugar aí, aplicado a transformação nele, a imagem dele vai ser tipo, vamos supor, ele mesmo, só que com a rotação de 90° .

ENT.: Mais alguma coisa?

VIVIAN: Não.

ENT.: Ótimo.

KIK A

KIK A: A primeira coisa que eu fiz foi tentar mostrar que ela era uma transformação linear, né. Então eu fui ver se ela satisfazia as propriedades de uma tl. Então eu peguei o vetor $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e um vetor $Y \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Aí eu fui provar as propriedades que T de X mais Y seria T de X mais T de Y . Então desenvolvendo ficaria T de x_1 mais y_1 , x_2 mais y_2 . Aplicando a função da T que é menos y , x , eu ficaria com , menos x_2 menos y_2 , x_1 mais y_1 . Isso aqui seria equivalente a escrever menos x_2 , x_1 mais menos y_2 , y_1 , que seria a T de X mais a T de Y que eu queria provar. Aí eu peguei um alfa pertencente aos reais e fui provar a segunda propriedade: T de alfa X vai ser a T aplicada em alfa x_1 , alfa x_2 , que ficaria menos alfa x_2 , alfa x_1 . Colocando alfa em evidência, menos x_2 , x_1 , alfa T de X . Então isso mostra que ela é linear, uma transformação linear.

Aí eu também falei que ela é injetora, porque uma transformação ela é injetora se, e somente se, o $\ker$ dela for a nula. Então eu peguei, o $\ker$ de T seria o conjunto de todo X na forma x, y que pertence ao $\mathbb{R}^2$ tal que a T de X fosse a nula, né. E eu quero provar que esse X é a nula, pra provar que ela é injetora. Então eu peguei, apliquei a T no vetor X , ficaria com menos y , x e eu quero que isso daqui dê igual a nula. Que me conclui que x igual a zero e y igual a zero. Portanto, para qualquer X que eu pegue que for me dar a nula, ele vai ter que ser a nula. Então $\ker$ de T vai ser a nula. Portanto, T é injetora.

Aí, desenhando assim alguns vetores quaisquer, eu notei que ela preserva comprimento e preserva ângulo.

ENT.: Você quer desenhar ali ou apagar?

KIK A: Não, eu apago. [...] O comprimento eu acho que nem precisa desenhar, porque se eu pegar o vetor X , por exemplo, $(1,2)$. A T de X vai ser $(-2,1)$. Então se eu for calcular a norma do vetor vai ser a raiz quadrada de um ao quadrado mais dois ao quadrado, raiz de cinco. E se eu for calcular a norma da T aplicada em X , vai me dar a raiz quadrada de menos dois ao quadrado mais um ao quadrado, que é raiz de cinco. Ou seja, o vetor manteve seu tamanho, seu comprimento. Então ele preservou o comprimento do vetor. E aí o ângulo, eu peguei o vetor $(1,1)$, por exemplo, que eu chamei de X e peguei o vetor $(-1,1)$ [no quadro ela marcou o vetor $(1,-1)$] que eu chamei de Y . Apliquei a T em

X e obtive o vetor $(-1,1)$, e tem esse ângulo teta entre X e Y. Aqui a minha T de X. E na hora que eu faço T de Y vai mudar o vetor X. E esse ângulo é o mesmo que esse.

ENT.: Então me explica isso aí melhor, você disse que...

KIKA: Eu peguei o vetor X $(1,1)$, apliquei a T, vai me dar $(-1,1)$, tá aqui, T de X. Depois eu peguei o vetor Y $(-1,1)$, apliquei, vai me dar o mesmo vetor que eu tinha pego, $(1,1)$, certo? E eu notei que o ângulo entre X e Y é o mesmo ângulo entre T de X e T de Y. Quer dizer que se você aplica em dois vetores ela vai rotacionar sempre a mesma coisa e manter o ângulo entre esses dois, certo.

Aí eu fui achar a matriz da T aplicando ela na base canônica. Então eu apliquei T em $e_1 [(1,0)]$ e apliquei a T em $e_2 [(0,1)]$ que vai me dar $(-1,0)$. Então a matriz da T vai ser $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Aí com isso eu notei que a T é uma rotação de 90° . Por

quê? Porque – deixa eu apagar esse desenho pra fazer outro – porque eu apliquei a T em e_1 que é $(1,0)$ e me deu o vetor $(0,1)$ que é o e_2 , então eu rotacionei 90° e_1 , T de e_1 . Aí eu apliquei em e_2 , que seria a mesma coisa que T de e_1 , me deu o vetor $(-1,0)$, que é o oposto de e_1 . Também rotacionei 90° . Então, quer dizer, eu concluí por esses dois exemplos que para cada um que você aplica, você roda 90° . Então a T é uma rotação de $\pi/2$.

ENT.: Então, como que você estaria descrevendo essa transformação? Se fosse preciso você descrever, falando dessa transformação, como você descreveria?

KIKA: Eu diria que é uma rotação de $\pi/2$, que pra qualquer vetor que você pegue ela rotaciona ele 90° , mantendo o seu tamanho, e mantendo os ângulos, se eu aplico em dois, ela também mantém os ângulos, que ela é linear e injetora.

TRANSCRIÇÃO - ENTREVISTA DA TAREFA 4
EM 14/12/2000

VIVIAN

ENT.: O que nós vamos fazer hoje é o seguinte: eu vou pedir pra você vir aqui e marcar um vetor, tá. Vem e marca um vetor. Observa o que eu vou fazer, tá. Pode marcar bem forte. [marcou (2,1) e eu (0,-2)]. Marca outro.

VIVIAN: Marcar outro...

ENT.: É. Outro qualquer. [marcou (-2,1) e eu marquei (0,-2) novamente] Pode marcar outro. [marcou (0,2) e marquei (0,-4)] Só mais um tá bom. [marcou (2,0) e marquei (0,0)]

VIVIAN: Chega?

ENT.: Chega. Acho que já chega. O que que você pode, como que você pode me descrever o que aconteceu ali?

VIVIAN: É, como que você marcou, né? Tem que pensar...

ENT.: Vou só criar uma notaçãozinha [...falamos dos vetores marcados e trocamos de lugar].

VIVIAN: Ixi, mas até eu descobrir alguma coisa aqui eu vou demorar... [...]

ENT.: Pensa nisso, como você pode tá descrevendo o que aconteceu quando a gente ia ao quadro. Pode pensar alto, não tem problema. Pode escrever no quadro.

[enquanto isso ela escrevia cada vetor e sua imagem]

Antes de você continuar fazendo as contas, qual que é a primeira impressão que você tem disso?

VIVIAN: Disso eu não sei. Ó, eu assim, eu marquei esse vetor aqui e aí quando você marcou o outro aqui eu marquei esse daqui aqui pensando em ângulo, tá, pra ver se você ia marcar alguma coisa relacionando ângulo. Mas aí eu vi que não tinha nada a ver. Então eu acho que é alguma transformação; mas aí eu tô tentando descobrir qual, é o que eu acho. Mas não sei se eu vou descobrir. [...]
Bom, eu sei também você tá sempre aqui em x igual a zero, né. Qual a finalidade... [...]

Bom, então o que eu falei o negócio do ângulo não tem nada a ver. Vai ser alguma transformação que vai levar x, y em zero e alguma coisa aqui, que eu não estou enxergando.

ENT.: Mas não tem problema se você não conseguir fazer as contas. Você já me descreveu de certa forma o que que você acha que é. Bom, então você

acha que é o quê? Só repete o que você já tinha falado. O que você acha que tá acontecendo aí?

VIVIAN: Eu acho que é uma transformação, eu acho que é linear.

ENT.: Por que linear?

VIVIAN: Porque ela leva um cara aqui, um no caso vetor, em outro vetor ou em um ponto. Então acho que ela é linear. E que tá sempre aqui em x igual a zero, só a lei aqui que eu não tô conseguindo. Mas eu acho que é uma transformação linear.

ENT.: Bom. Então, só pra gente recapitular, eu sei que você já falou isso mil vezes. Mas o que que você acha que é uma transformação linear, assim; quando fala em transformação linear o que que vem na sua cabeça?

VIVIAN: O que que vem?

ENT.: É. O que que vem. Esquece definição. O que que vem na sua cabeça quando você fala transformação linear?

VIVIAN: A primeira coisa que vem assim na minha cabeça é que uma transformação linear vai levar, vamos supor, uma reta numa reta mesmo. Não em outra coisa diferente, ou no ponto. E, assim, um plano num plano [murmurou alguma coisa, parece 'ou uma reta assim']. É a primeira coisa que me vem à cabeça quando fala em transformação linear.

ENT.: E ponto em ponto?

VIVIAN: Também.

ENT.: Também?

VIVIAN: Também...

ENT.: E por que que você acha que a gente chama isso de...

VIVIAN: Mas... não, vai, fala.

ENT.: Pode falar, mas o quê?

VIVIAN: Não, eu ia falar de ponto mas acho que também dá no mesmo.

ENT.: É... e por que que você acha que o nome é esse: transformação linear?

VIVIAN: Linear?

ENT.: Transformação linear.

VIVIAN: Eu acho que é porque transformação de levar uma coisa na outra, assim: você tem uma coisa aqui que você vai levar aqui. Tudo bem que isso é uma função, mas uma transformação pra mim também é uma função. Mas no sentido assim, por exemplo, você tem uma reta aqui, você pode tipo modificar ela tá, transformar no caso, mas ela vai ser levada numa outra reta. Daí que eu acho que fica o linear. De uma coisa assim, que é reta.

ENT.: E o transformação é por que você acha que leva em outra coisa?

VIVIAN: É. Que transforma. Por exemplo, ela vai pegar essa reta, ela não vai levar essa reta igualzinha assim numa reta assim, igual a essa daqui aqui. Ela vai dar tipo uma outra cara pra essa reta, mas que vai continuar sendo uma reta [desenhando no quadro]. É por isso que eu acho que ela tem o nome de linear.

ENT.: Algo mais?

VIVIAN: Não.

KIKÁ

ENT.: KIKÁ, olha, o procedimento é o seguinte: eu vou vir aqui, você vem e vai traçar um vetor, tá. Então traça um vetor, que aí...

KIKÁ: Qualquer um?

ENT.: Qualquer vetor que você quiser.

KIKÁ: Retíssimo, né.

ENT.: Não tem problema. [marcou (1,2)] Pronto. Eu agora vou vir e traçar outro, tá. [marquei (0,-4)] Pode traçar outro.

KIKÁ: Qualquer um?

ENT.: Qualquer um.[marcou (-1,3) e marquei (0, -6); marcou (4,0) e marquei (0,0)] Só mais um.

KIKÁ: Só mais um? [marcou (-2,1) e marquei (0,-2)]

ENT.: Tá? Observou tudo o que aconteceu, o que eu fiz e o que você fez? Sempre que você fazia uma coisa, eu ia e fazia outra, tá certo. Bom, a pergunta que eu tenho pra te fazer é a seguinte: como que você pode me descrever o que aconteceu, tá? Como que você pode me descrever o que aconteceu?

KIKÁ: [Ficou um tempo olhando para o quadro; fez sinal negativo com a cabeça] Boa pergunta.

ENT.: Você lembra da sequência certinho?

KIKA: Tá. Eu tracei esse primeiro branco...

ENT.: Eu fui e tracei esse rosa. Depois você foi e traçou esse amarelinho, e eu tracei esse amarelinho... [fomos identificando as marcações]

KIKA: Todos os que eu tracei você traçou em cima do eixo y.

ENT.: Já é alguma coisa que você tá me falando.

KIKA: Os seus vetores são todos, podem ser escritos como combinação linear um do outro, estão na mesma reta. Certo. Eu tenho que achar uma relação dos meus com os teus? É isso?

ENT.: Não sei. Se você acha que tem essa relação...

KIKA: É, se tem eu não tô enxergando.

ENT.: Você quer tentar traçar mais pra fazer mais coisas? Você quer?

KIKA: Pode ser.

ENT.: Então vai mais um.

KIKA: Deixa eu ver se eu enxergo alguma coisa, espera aí. [... parece ter pensado em algum que pudesse ser mais conveniente e marcou (-2,0); marquei (0,0)]

ENT.: Pode traçar mais um.

KIKA: [marcou (5,1) e marquei (0,-2)] Tem relação mas eu não tô conseguindo enxergar. Tamanho não é.

ENT.: Quer mais? [marcou (0,2) e marquei (0,-4)] Mais um? Faz um que eu possa te ajudar. [marcou (0,0) e marquei (0,0); risos]

KIKA: Calma. Deixa eu pensar. [...] Ai meu Deus... Quando tracei esse grande, foi esse aqui, né?

ENT.: Isso.

KIKA: Tá... Então é sempre sobre o eixo y. Só que eu não tô vendo relação por causa do tamanho... [escreveu alguns pares no quadro] Achei a relação. Todo vetor vai no zero x, menos dois y e faz isso. Qualquer vetor que você pegue, ele pega a coordenada x e multiplica por zero e a y multiplica por menos dois e dá a imagem.

ENT.: Bom, agora que você conseguiu tá pensando melhor nisso. Como que você me descreve o que tá acontecendo?

KIKA: Tá. É uma transformação, uma função, né, que eu não sei ainda se é tl, isso eu ainda preciso verificar; suponho que seja. Que cada vetor que você pegue a imagem dele vai ser a coordenada dele x vezes zero e a coordenada dele y vezes menos dois. Então seria essa função que a todo vetor ela associa o zero x , menos dois y a ele e obtém a imagem sobre esse eixo y .

ENT.: E olha só KIKA, você fala que ela é uma transformação e que você não pode afirmar, você só supõe que ela seja linear, né.

KIKA: Isso.

ENT.: Então, quando eu falo transformação linear, deixando de lado definição, ou até usando definição mesmo, qual é a primeira coisa que vem na sua cabeça quando eu falo transformação linear?

KIKA: Uma função que leva da reta na reta. Seria bem assim direto.

ENT.: E o que que é essa função? Qual a função dessa função?

KIKA: A função dessa função...

ENT.: É... o que que essa função faz?

KIKA: O que que ela faz...

ENT.: Essa função que você tá chamando de transformação linear, né.

KIKA: Certo... Nesse caso aqui todo vetor que você pega desse plano ele leva em uma reta. Então essa função estaria gerando o eixo y . Mas nesse caso; no genérico eu não sei assim te dizer.

ENT.: Então, pra você, nesse caso a transformação, que você não sabe se é linear, ela tá gerando o eixo y . É assim que você descreveria nesse caso.

KIKA: Isso. Exatamente.

ENT.: E por que você acha que chama transformação linear, é porque leva da reta na reta. Foi isso que você falou?

KIKA: Isso, foi. Ela tá transformando, não, né. Tipo, é bem transformando. Cada vetor ela associa ele a imagem dele de acordo com a lei da transformação, nesse caso zero x mais dois y . Então cada vetor vai aplicar a lei e vai obter a imagem. Então tá transformando cada vetor de acordo com a tua imagem, levando ele da reta na reta. Por isso é que é linear, certo?

TRANSCRIÇÃO - ENTREVISTA DA TAREFA 5
EM 01/11/01

KIKA

ENT1.: Eu não sei se você se lembra, a gente fez quatro entrevistas daquela vez né, e olhando para aquelas entrevistas a gente achou que seria bom voltar com vocês e tá tentando fazer outras entrevistas que ajudassem a tá analisando aquelas entrevistas também, tá. Então, vão ser algumas, vão ser do mesmo estilo, você, só vou pedir pra você tá falando sobre aquilo, você vai poder tá usando o quadro da mesma maneira, e você vai falar aquilo que você achar, você vai pensar alto, e eu só vou estar registrando, você pode fazer as anotações, tá bom... [me dirijo ao quadro para escrever a questão].

ENT2.: É, pra gente, quanto mais você falar melhor. Porque tem coisas que pra você podem parecer super, sabe (?). No fundo o que a gente quer entender mesmo é o que você tá dizendo. Quer dizer, isso é o que a gente tem como objetivo, né. Então quanto mais falar, ótimo, ficamos gratos. E conseguimos entender (?) Aliás, a gente tava falando isso outro dia; de um modo geral, o aluno quase sempre tem muito pouca chance de falar, e quando ele tem a chance de falar é numa situação assim: você tem dúvida? Tem alguma pergunta? É bem assim, bem dentro do quadro que o professor coloca, né. E é super incrível quando você deixa o aluno falar mesmo, falar, assim, aulas e aulas aquilo, você não fica falando, você né, falando, falando, falando... Você dá um problema e deixa a pessoa falar. Como as pessoas têm coisas pra dizer. É impressionante. [Kika se levanta]. Aí, acho que teria que acrescentar, porque a gente acabou não escrevendo né, essa é uma aplicação daquele conjunto, escrito ali à esquerda, naquele outro conjunto, tá. Só que a gente tem sobre aquele conjunto da esquerda as operações usuais: soma de polinômio, multiplicação por escalar. No à direita soma usual de matriz, multiplicação por escalar de modo que você tem um espaço vetorial cujos vetores são os polinômios daquele tipo e do outro lado você tem um espaço vetorial cujos elementos, cujos vetores são as matrizes daquele tipo. Mas o que tá posto aí é uma função de um conjunto no outro.

KIKA: O que vocês querem que eu descreva é a imagem disso?

ENT2.: O que você achar que faz sentido falar. Imagina que você não tem a menor idéia de quem nós somos, tá. Alguém mandou essa tarefa e nós dois somos assim, os técnicos de filmagem. Então você fala assim: eu não sei o que a pessoa quer de mim, eu vou falar tudo que eu conseguir imaginar que eu possa falar.

KIKA: Tá. Bom. Meu domínio são todos os polinômios de 1º grau, né, retas, dessa forma. Vão levar nas matrizes. Bom, eu não sei assim dizer muito sobre isso. Se eu pegar essa função, for levar pro exemplo uma reta então vou pegar um exemplo, $x+2$ eu vou levar ele aonde, na matriz $-2, 1, 0, 2$. Vamos ver, o

que eu poderia dizer... Bom o determinante da minha imagem tá sempre dando menos b quadrado, eu não sei se isso ajuda em alguma coisa, né. Não sei também se eu precisaria calcular isso, acho que isso não tem muito a ver com a função. Determinante da f de $ax+b$ vai tá sempre dando menos b quadrado, vai tá sempre dando negativo, no caso. A imagem... eu não sei, é difícil dizer a imagem, né. Porque seria um conjunto de matrizes tal que o determinante dê sempre menos b quadrado, vai tá sendo as matrizes dessa forma que já tá aqui descrita, matrizes né, fica difícil. Que mais eu posso falar... Ó, eu poderia tentar verificar se ela é bijetora... vamos ver. Pra eu verificar se ela é sobrejetora, ela não vai ser, eu acho. Porque as matrizes dessa forma nunca vão cobrir todas essas, eu acho que a imagem não vai ser igual ao contra-domínio. Agora, injetora... Injetora... será que daria pra ver pelo ker? Vamos viajar um pouquinho... Ker da f vai ser todo elemento $ax+b$ tal que a matriz $-b, a, 0, b$ seja igual a matriz identidade, né. Pra essa daqui ser igual à identidade, a gente teria que ter... não ela não vai ser igual a identidade, não adianta. Não, tá certo. A identidade seria 1, 0, 0, 1.

ENT2.: Se você falasse em português, sem tentar escrever, e você falasse assim: o núcleo de uma aplicação são todos os caras do domínio que vão no... que vão onde?

KIKA: No elemento neutro da contra-imagem, do contra-domínio.

ENT2.: No elemento neutro...

KIKA: ... do contra-domínio.

ENT2.: Mas no elemento neutro com relação a que operação?

KIKA: É, então. Aí dependeria. Aqui a gente tem multiplicação, soma né.

ENT2.: Você tem só a soma de...

KIKA: ...só a soma.

ENT2.: ... de matrizes e o produto por escalar.

KIKA: Ah, tá. Soma então, seria a matriz nula.

ENT2.: É. Eu só tô (?) porque quando você colocou essa identidade aí, eu até posso falar que...

KIKA: ...Eu usei a multiplicação.

ENT2.: ... identidade é um nome para o elemento neutro se tivesse uma multiplicação, por isso que você pôs um, né.

KIKA: Tá, então como é a soma teria que ser, essa matriz teria que ser igual a matriz nula. Então teria só o elemento $0x+b$, mais 0, né; então ela é injetora, porque o ker dela vai ser formado só pelo zero, né, zero daqui né [apontando para o 1º conjunto]. (...) Então poderia dizer que ela é injetora, sobrejetora eu acho que ela não é. Eu não sei verificar certinho, mas eu diria que não... Eu não sei mais o que fazer com isso... Eu tô com estruturas na cabeça, tô pensando em ver se é homomorfismo, fiz prova ontem, mas...

ENT2.: O que que você acha, é ou não?

KIKA: Que é um homomorfismo? Eu acho...

ENT2.: Em relação a soma, vamos (?).

KIKA: Eu acho que é. Se eu pegar ó...

ENT2.: Sem fazer conta, porque essas são as horas interessantes. Os palpites são super interessantes. O que que a pessoa achou, né. Por que você acha que é? Só palpitando, assim. Antes de você fazer conta, tá.

KIKA: Certo. Porque assim, aqui é a soma também. Se eu for somar dois elementos daqui [apontando para o 1º conjunto] e depois calcular a f neles, eu taria calculando a f , por exemplo, num $(a+c)x$ e num $b+d$, então ficaria um matriz $-(c+d)$, $a+c$ e aqui $b+d$ também [apontando para a matriz]. Agora se eu pegar duas retas distintas, $ax+b$ e $cx+d$ e primeiro aplicar a f e depois somar, eu ficaria com, somando essa matriz com a matriz $-c$, $b-c$, não, tá certo, $-d$, c , 0 , d . Aí, se eu for somar essas matrizes eu teria $-b$, $-c$, seria $-b-c$. É, é... seria, tá certo, ficaria igual. Assim, eu tô pensando fazendo conta de cabeça... você falou pra não fazer conta e eu tô fazendo na cabeça.. eu acho que seria porque...

ENT2.: Você tá dizendo que no fundo você fez a conta rapidinho, foi isso que te deu uma idéia de que seria ...

KIKA: Certo.

ENT2.: ... homomorfismo.

KIKA: É. Porque eu acho assim se você pegar duas retas distintas e você falar que elas te levam numa matriz dessa forma e se você aplicar a f primeiro em cada uma delas e somar as matrizes, somar as imagens, eu acho que seria a mesma coisa se eu pegar as duas retas antes, juntar elas numa reta só e aplicar a função. Eu imagino que seja a mesma coisa. Porque o homomorfismo daí iria preservar a operação. Então eu acho que nesse caso tá certo. Fiz conta de cabeça, meio no chute assim, não tenho certeza.

ENT2.: Você, vou te perguntar, você me diz o que você acha. Essa f é ou não uma transformação linear do espaço que a gente falou que ficam vetores os caras da esquerda usual e o espaço da direita.

KIKA: Se é uma transformação linear... Vamos ver. (...) Eu acho que é.

ENT2.: Que que você fez, que que você tava pensando?

KIKA: Propriedades de transformação linear, porque pra ser uma transformação linear se eu pegar a f de $a+b$ tem que ser igual a f de a mais a f de b e se eu pegar um número real e multiplicar pela f tem que ser a mesma coisa que eu, aliás, se eu aplicar a f num número real multiplicado pela reta, no caso, seria a mesma coisa que eu aplicar a f na reta e depois multiplicar por esse real. Seriam as duas propriedades de transformação linear. E a primeira seria equivalente a que eu fiz agora de cabeça pra mostrar que é homomorfismo. E se eu multiplicar um escalar que eu (possa?) eu acho que também daria certo. Eu acredito que sim, que seja uma transformação linear.

ENT2.: Te ocorre alguma outra maneira sem fazer as contas pra saber, tem algum outro recurso que você usou, pode usar...

KIKA: Não tô lembrando...

ENT2.: (?) Deixa eu só deixar claro. As minhas perguntas não são assim, eu não tô perguntando assim: eu acho que você deveria saber tal coisa. É só assim, eu queria realmente saber, você já mostrou um jeito de decidir ou tentar decidir, né, e aí a minha pergunta é no sentido de saber se tem outros jeitos que você não usou aqui, mas você até lembra que poderiam ser usados. Não te ocorre...

KIKA: Não. No momento eu não tô lembrando. Faz tempo que eu não mexo com isso, eu tô meio enferrujada. Mas eu não lembro não. Pode até ter, que tem outro jeito, mas não lembro (...). É difícil falar né, porque é uma função bem estranha!

ENT2.: Por que que ela é estranha?

KIKA: Ah, porque é leva reta em matriz então assim, não é uma coisa que você pode descrever muito claramente. Porque matrizes, não deixa de ser uma coisa meio vaga, né. Não tem como você descrever o formato de um espaço de matrizes, matriz assim ela serve muito pra auxiliar em contas, em problemas, mas ela em si assim eu não consigo é, deve ser assim alguma coisa comigo, né, eu não consigo imaginar assim o espaço de matrizes, como seria a imagem dessa função, por exemplo, eu não consigo descrever. Então, eu achei meio estranha. Eu não consigo imaginar, quando eu penso em função eu sempre imagino, né: domínio os reais leva lá. Então, pode levar no espaço dos reais, pode levar num círculo. Eu imagino assim como seria o conjunto

imagem, certo, como eu estaria descrevendo ele, e nesse caso eu sinceramente eu não sei descrever a imagem dele não.

ENT2.: E o domínio, como que você descreveria...

KIKA: O domínio?

ENT2.: Você não reclamou do domínio...

KIKA: O domínio são todas as retas, né, seria o R dois. Sei lá, eu acho. Porque você aqui seriam equações de retas. O a e b eu vou tá variando em todos os reais. Então eu taria obtendo todas as retas do eixo R dois, né, do eixo x e do eixo y. Seria o R dois.

ENT2.: Você poderia dar exemplos pra gente ali no canto, por favor.

KIKA: Bom, ó, imaginando que o eixo x e o eixo y no R dois, né. Então, o meu domínio seria toda reta $y = ax + b$ com a e b variando em R. Então eu imagino assim, eu imagino que conforme eu for variando o a e o b em todos os reais eu vou tá obtendo retas distintas, assim, assim [desenhando retas no quadro num eixo cartesiano ortogonal]. Sei lá. De tudo quanto é jeito. Então elas vão tá ocupando todo o plano, todo o meu R dois. É assim que eu tô pensando. Porque eu posso variar eles em todos os R, então seria todo o R dois. Todos os conjuntos de retas possíveis. (...) Mais fácil imaginar do que matriz.

ENT2.: Tem alguma reta, só uma pergunta que me ocorreu, tem alguma reta ali que não passa pela origem, nesse conjunto, naquele conjunto que você tá descrevendo tem alguma reta que não passa pela origem?

KIKA: Ah, eu acho que teria, né. Porque ó, quando eu tiver o b diferente de zero, por exemplo, a reta $x + 1$. Quando o x é zero e o y é 1, então não vai passar na origem, vai passar aqui no ponto 1, né. Então basta o b ser distinto de 0 que ela não vai passar na origem. Eu acho que ela pode passar em diversos pontos aqui, não precisa ser necessariamente pela origem. Porque ali eu desenhei tudo na origem mas não vão ser todas não. Eu acho que infinitas que não passam.

ENT2.: É, você falou você falou que tá visualizando, pra você tudo bem, né; tá visualizando como retas, né.

KIKA: É.

ENT2.: Então tem duas coisas no que você disse que eu queria que você olhasse pra elas e falasse se você vê alguma coisa que merece comentário. Uma: é a seguinte, você falou a reta $x + 1$, tá, a reta $x + 1$. Mas ali em cima, quando você escreveu a reta, você escreveu a reta $y = ax + b$.

KIKA: Huhum. É, seria a função, né. A função $y=x+1$, só que a imagem taria resolvendo a função, né. Teria que por y em função de x aqui, e a imagem dela seria a reta.

ENT2.: Mas você notou que aqui em baixo você escreveu e falou a reta $x+1$. Tá bom. Agora olha pra aquele conjunto que é o domínio da f . O que que tá escrito ali?

KIKA: $ax+b$. É, não tem o y igualado, né. Eu não teria que olhar isso então como uma reta, será que seria mais fácil eu olhar sem imaginar geometricamente, olhar assim algebricamente como polinômio do primeiro grau? Não sei se facilitaria pra...

ENT2.: Eu só tô chamando a atenção pra o fato de que pra você, por causa de você ter escrito $x+1$, parece que quando você olhou ali, você não precisava do y , imediatamente você já era y igual. Isso que eu observei, você olha lá não tem o y . E agora você tá falando de polinômio. Eu queria saber se isso muda alguma coisa, se isso te causa alguma estranheza, que antes você não tinha. Ou se você visualiza esses caras, nesse conjunto aí da esquerda, o domínio, né, de algum outro modo, ou talvez do mesmo. Não sei.

KIKA: Não. Eu automaticamente quando olhei pra isso [apontando para o domínio da f] eu imaginei $y=ax+b$, eu já imaginei a reta.

ENT2.: Mas não tem o y aí?

KIKA: É, não tem. Mas eu automaticamente já botei aquilo na cabeça, né. Quando olhei assim aqui já vem logo equação de reta: $y=ax+b$, e realmente não tinha pensado de outra forma, né. Mas eu acho que mesmo com y ou sem y o domínio seria o $\mathbb{R}$ dois.

ENT2.: Por quê? Naquela hora você falou de reta, que as retas cobrem o $\mathbb{R}$ dois, né. Pelo menos foi isso que você falou. E aqui?

KIKA: Seria... Ah tá, tá. Imaginei. Seriam se eu variasse aqui seria o conjunto de todos os polinômios, né, de primeiro grau. Se eu não igualar a nada. É, porque se eu dissesse assim... se eu pensasse $ax+b$ igualado a zero e eu fosse colocando os possíveis valores aqui, certo, eu taria obtendo diferentes valores pra x . Então seria o eixo x aqui, no caso. [...] É, a imagem podem ser os reais, né. Nossa, agora até eu me confundi com o que eu pensei.

ENT2.: Se eu fizer uma sugestão... Não sei se você tava pensando... Você quer falar o que você tava pensando?

KIKA: Não, eu tava...

ENT2.: Ali você tem polinômios em x – talvez isso não tenha ficado tão claro assim – são polinômios em x da forma $ax+b$ onde a e b podem ser quaisquer

números reais. Agora eu tô dizendo pra você quem são os elementos do domínio: são as expressões da forma $ax+b$ onde a e b podem ser quaisquer números reais, variam em todos os reais. E o x é uma variável formal, que a gente diria. Um polinômio (?) p de x que você faz as contas. Isso aí te sugere uma maneira de visualizar isso que você falou, de pensar, de imaginar? Simplesmente um polinômio da forma $ax+b$, onde o a e o b são quaisquer reais no polinômio de x .

KIKA: Então, quando se fala em polinômio de primeiro grau já me vem na cabeça reta, porque seria o gráfico de um polinômio né, de primeiro grau. Então automaticamente quando você fala em conjunto dos polinômios de primeiro grau, variando a e b , já me volta aquela idéia de reta na cabeça. Não sei. Pode ser assim que nem seja, né, não possa dizer: ah, é o $\mathbb{R}$ dois. Simplesmente eu digo pra mim é o conjunto dos polinômios de primeiro grau da forma $ax+b$, variando a e b nos reais. Talvez não seja nem isso que eu teja imaginando, é o $\mathbb{R}$ dois por causa das retas, é o eixo dos x porque eu igualei a zero. Mas ao falar em polinômios me volta a idéia assim de reta, são as retas que vão tá cobrindo e vai ser o $\mathbb{R}$ dois. Não sei. [...] Não sei mais o que dizer disso.

ENT2.: Uma pergunta geral: se alguém perguntar assim: Kika, o que essa função faz, que você acha que seria um jeito razoável de dizer pra algum colega seu. Por exemplo, esse seu colega não tá vendo aqui, mas ele te pergunta. Você tá falando: é, eles me fizeram uma entrevista e colocaram uma função lá (?). Aí seu colega te pergunta assim: tudo bem, mas essa função de um espaço vetorial, tem tal domínio, mas o que ela faz? Você teria alguma resposta? O que que você diria? O que que você acha que talvez dissesse?

KIKA: Eu diria que essa função pega um polinômio de primeiro grau $ax+b$ qualquer, né, e ela leva na matriz dessa forma, onde a matriz vai ser formada – $b, a, 0, b$, o b sendo a parte, o número, como fala? ... que tá acompanhando o x ...

ENT2.: Termo independente.

KIKA: Isso. Termo independente. E o a seria o que tá multiplicando x . Eu não sei então, é o que eu falo, fica difícil dizer porque sendo matriz lá fica difícil eu falar: essa função pega um número real e leva numa reta assim, assim. Eu falaria: ela pega um polinômio dessa forma e vai levar no espaço das matrizes daquela forma. Não é leva na reta tal, leva no círculo de raio tal...

ENT2.: Então. Eu vou fazer uma afirmação, tá. Eu vou afirmar pra você: essa aplicação ela pega uma reta nesse espaço aqui e ela leva numa reta daquele espaço lá. Ele pega uma reta do espaço que os vetores são domínio e leva numa reta no espaço dos vetores são contra-domínio. Do que você acha que eu tô falando? Você fala assim, pó esse cara falou isso, ele tá afirmando isso, né. Que que você acha que eu tô falando?

KIKA: Eu teria que enxergar isso aqui como uma reta. Então minha dificuldade tá na matriz mesmo.

ENT2.: Você não consegue imaginar uma reta do outro lado lá?

KIKA: Não.

ENT2.: E do lado de cá?

KIKA: Ah, do lado de cá eu imagino.

ENT2.: Do lado esquerdo... Então me dá um exemplo de uma reta aqui. Do lado esquerdo.

KIKA: Em $ax+b$? Uma reta aqui?

ENT2.: Uma reta no conjunto do lado esquerdo, no espaço vetorial cujos vetores são aquele conjunto que é o domínio ali.

KIKA: Ahã.

ENT2.: Que que seria uma reta ali?

KIKA: Ah, qualquer uma dessas que eu falei ali, ó. Passando pela origem ou não. Infinitos exemplos, $x+1$. Qualquer valor de a e b que você colocar aqui você vai tá obtendo uma reta.

ENT2.: E do lado direito você não consegue imaginar o que seria uma reta...

KIKA: [sinal negativo com a cabeça] Só se eu pegasse essa matriz e multiplicasse por um vetor, sei lá, x , y e ficaria assim, seria a multiplicação de matriz... mas eu não tenho multiplicação do lado de cá. É porque eu tô tentando enxergar isso aqui como equação de uma reta né, acho que não é esse o caminho. Ah, não sei não.

ENT2.: Vamos passar pro outro, Viviane? Espera só um segundinho pra eu tomar uma água?

ENT1.: Mesma coisa tá. Pra você falando sobre essa aplicação aí.

KIKA: (?)

ENT1.: Lembrando também do que o ENT2. tinha falado: você tem um espaço vetorial, uma aplicação de um espaço vetorial no outro...

ENT2.: Se tiver alguma pergunta pra esclarecer alguma coisa que não lembra, tenha dúvida, pode perguntar...

KIKA: Não, esse dois aqui em cima representa cartesiano...

ENT2.: Isso.

KIKA: ... Z cinco cartesiano Z cinco.

ENT2.: Z cinco tudo bem pra você o que que é?

KIKA: Fiz prova, caiu isso ontem na prova.

ENT2.: Ex, então tá... Sabe o que que é corpo?

KIKA: Corpo?

ENT2.: Sabe o que que é corpo?

KIKA: Não.

ENT2.: Isso é um corpo.

KIKA: Isso é um corpo...

ENT2.: Você sabia que isso é um corpo?

KIKA: Não.

ENT2.: Ah...

KIKA: Já me falaram bastante a palavra corpo para mim, mas eu ainda não tive corpo. Só grupo.

ENT2.: Bom, Z cinco você sabe o que é, você sabe as contas lá como faz, tá. Então agora você vai imaginar, você vai imaginar não, você tem nos dois lados o espaço vetorial o seguinte: o conjunto dos vetores são pares ordenados de caras do Z cinco, a soma é aquela soma usual coordenada a coordenada, tá. O corpo dos escalares é o próprio Z cinco, que apesar de finito é um corpo, dá pra você verificar, todo mundo tem inverso, a não ser o zero, vale todas aquelas propriedades lá; é um corpo, tá. E o produto pro escalar também é o produto usual coordenada a coordenada, tá bom. Dos dois lados, aí a gente tem que te garantir que isso aí é um corpo, se você já tem uma idéia de quem é o conjunto. Então eu vou te perguntar só pra eu ou pra gente poder acompanhar o que você tá falando. Se alguém te perguntar o que é o Z cinco, que é o Z cinco, que você diz que é?

KIKA: Seria o conjunto de classes do, assim ó, deixa eu escrever: classe do zero, classe do 1, classe do 2, do 3 e do 4.

ENT2.: É um conjunto com cinco elementos, se você fizer a soma aí, se eu te perguntar quanto é a classe do 2 mais a classe do 4?

KIKA: Aí seria normal, somo o dois com quatro e daria a classe do seis. Então o seis é equivalente a classe do 1. Porque se eu dividir seis por cinco – é isso né – daria o resto 1, então é equivalente a classe do 1.

ENT2.: Então só pra, você tem claro que se você fizer a conta, a soma com quaisquer dois aí vai dar um desses e multiplicar também você sempre chega (?). Tá legal. Se você quiser olhar que todo mundo tem inverso, você pode até fazer por inspeção. Por exemplo, quem é o inverso do dois, multiplicativo, é o três. Dois vezes três é seis que é o 1.

KIKA: Que é a classe do 1.

ENT2.: Tá. Depois você vai ver logo que isso aí é um corpo, né.

KIKA: Tá. Bom, aqui tá mais fácil de enxergar o domínio e a imagem, vamos ver, se eu pegasse...

ENT2.: Como você enxerga o domínio? Vamos lá, você falou que tá mais fácil, como você enxerga?

KIKA: Seria o conjunto dos pares ordenados dessas classes daqui ó, que é um número finito de combinações que eu posso fazer, seria esse conjunto. É, pode ser a classe do zero com a classe do 1, com o dois, depois com três, e assim vai. Esse seria o domínio. E o contra-domínio, eu não sei se, eu acho que seria também [...] o próprio [apontando para o $\mathbb{Z}$ cinco ao quadrado]. Ela seria sobrejetora porque se eu pegar qualquer combinação, vai do 1 com o dois, deixa eu pensar, ela levaria pela f , né, seria levado no -2 barra que equivale ao... deixa eu pensar. Eu acho que é o três barra, se eu não me engano; três barra e no 1 barra, que seria um par que tá dentro de $\mathbb{Z}$ cinco cartesiano $\mathbb{Z}$ cinco. Então eu acho que qualquer, eu acho não, acho que tenho certeza. Qualquer daqui a imagem vai ser também no $\mathbb{Z}$ cinco cartesiano $\mathbb{Z}$ cinco. Então, nesse caso, ela seria sobrejetora, né. Aí aqui é com a soma, que você tinha dito, né, soma normal [apontando para o domínio].

ENT2.: Soma usual, coordenada a coordenada, o produto escalar também coordenada a coordenada.

KIKA: Se eu for tentar ver se ela é injetora pelo $\ker$, deixa eu ver se eu consigo enxergar o $\ker$ disso aqui. Vai ser todo o par pertencente ao $\mathbb{Z}$ cinco cartesiano $\mathbb{Z}$ cinco tal que o par $-y, x$ seja igual ao par zero barra zero barra (?). Então precisaria, pro x teria de ser um múltiplo de cinco, uma classe múltiplo cinco. Então seria a classe do zero, a classe do cinco, a classe do dez, né.

ENT2.: Tem a classe do cinco aí?

KIKA: É, é que é igual à do zero, né. Então aqui só poderia ser a classe do zero e aqui também [apontando para o conjunto $\ker f$]. Então no caso ela seria injetora, porque o $\ker$ é formado só pelo elemento neutro, que no caso é o zero zero. Então eu diria que essa aplicação é bijetiva. Que mais eu diria? Se ela é uma transformação linear? Deixa eu ver. Eu pegaria dois aqui, somaria... É aqui já fica mais difícil imaginar. Deixa eu tentar fazer por conta, por exemplo. F de 1, dois mais 1, três.

ENT2.: Se eu te perguntar só nesse momento, qual é o teu chute? Qual é o teu chute? Você vai tentar ver se ela é linear, não é isso. Chute, batendo o olho. Você tem algum chute ou não sei, vou ter que fazer a conta?

KIKA: Bem, chute assim, né: eu acho que não.

ENT2.: Te vem alguma coisa assim que chama atenção pra não ser? Só pra gente saber como é que você tá sentindo com relação ao que você tá vendo aí, tá.

KIKA: Tá. Não, porque eu penso assim. E, se for somar dois pares pra depois aplicar a f eu vou tá com um para diferente, tipo assim: aqui no caso, o dois e o três. Se eu for somar antes eu vou tá com o par dois zero seria um par diferente e se eu for aplicar a f neles antes de somar os dois eu vou tá modificando, a f modifica né o para aqui. Então eu acho que na hora que eu for somar as duas f 's já aplicadas, vão ser dois pares diferentes. Também í eu acho que pode ter hora que não vai ser igual. Não sei, assim, meio imaginando, né. A soma eu acho que, aqui eu taria aplicando a f num par distinto dos pares que eu vou obter aqui. Se eu aplicar a f aqui e depois aqui, a hora que eu for somar esses dois resultados, quem me garante que essa soma vai ser igual a esse resultado? Eu acho que não vai ser necessariamente igual. Pode ter caso que dê igual, mas eu acho que não necessariamente. Deixa eu ver se esse exemplo aqui já me diz alguma coisa [fazendo as contas]. Agora se eu aplicar a f antes, né [fazendo as contas]. Eu teria a classe do -2 barra [fazendo as contas]... que seria a classe do zero dois. É, deu igual. Peguei um exemplo... é, nesse caso deu igual, mas eu digo assim: quem me garante que vai dar sempre igual, né? Eu tenho minhas dúvidas! Não sei. Eu olhando assim meio no chute eu desconfiaria que pode ter um caso que não vai dar certo. O exemplo que eu peguei deu, então não dá pra eu justificar nada, né. [...] É, não sei dizer. Eu acho que eu teria que, eu acho até que pode ser, mas acho desconfiando, sabe. Eu faria todos os possíveis casos pra tirar minha dúvida. Se eu tentasse fazer genérico, sem dando exemplo, fica complicado [apagou o quadro]. É porque eu acho assim, eu tô prendendo demais a essas duas propriedades de transformação linear, né. Se eu conseguisse olhar de uma outra forma, assim, é que eu não consigo lembrar. Uma outra forma de ver se ela é transformação linear sem ter que verificar as propriedades talvez ficasse mais fácil. É que agora não vem nada na cabeça, nesse sentido.

ENT2.: Mesmo que você não faça conta, tá. Pensa que você tá numa situação de prova e aí, isso pode até aparecer numa prova de Estruturas, né. Aí a prova diz o seguinte: mostre que essa aplicação é um homomorfismo... é um homomorfismo. Só teria de fazer demonstração de que vale, que f da soma é igual a soma das f 's, tá. Você faria, como você faria? Porque você falou: olha eu faria todos os casos. Você faria isso numa prova?

KIKA: Não.

ENT2.: Todos os casos... o que você faria?

KIKA: Na prova eu tentaria fazer genérico com x y , pra assim generalizar, entendeu. Eu pegaria, por exemplo, eu calcularia a f de x_1 , y_1 mais x_2 , y_1 e tentaria verificar por meio de contas que isso é a soma das f 's. Eu não sei se eu... [fazendo as contas]. Deu. Mais fácil, né. É. Então ela é um homomorfismo.

ENT2.: Você teria só que tomar um certo cuidado, porque você tá falando de classes, né, a classe do x_1 , a classe do y_1 , a classe do x_2 ; você teria que usar umas propriedades de classe lá pra mostrar que dá pra transformar, né. Mas isso é observação só pra você, pro teu curso de Estruturas, tá. Pensa nisso depois como você escreveria direitinho. Porque aí lá você vai ficar, classe do x_1 mais classe do x_2 , que você sabe que é igual a classe de ...

KIKA: ... x_1 mais x_2 .

ENT2.: Isso. Entendeu? Pra poder ficar bonitinho mesmo todas as contas, né. Então isso aí é um homomorfismo.

KIKA: Na verdade um isso, né. Quer dizer... É, é um isomorfismo porque ela é bijetora. [...] Que mais eu poderia observar aqui nela. A imagem eu já, eu já analisei. Ah, acho que só.

ENT2.: Ah, eu vou fazer uma pergunta que já apareceu no que você falou, até não foi nenhuma pergunta, é uma coisa que você falou. Pega esse espaço vetorial onde os vetores são os caras do Z cinco ao quadrado, Z cinco cartesiano Z cinco. Se você, como é que você visualiza uma reta aí? Você consegue visualizar uma reta, você tem uma imagem?

KIKA: Z cinco?

ENT2.: Z cinco cartesiano Z cinco. É o conjunto de vetores, e aí você tem esse corpo de escalares, então você tem um espaço vetorial, né. Você consegue enxergar uma reta aí, alguma coisa assim?

KIKA: Acho que não. Nunca pensei nisso. Não, porque é por classes né, como é que eu conseguiria visualizar uma reta olhando pra classe do 1, classe do dois... Eu acho que... eu acho que até tem jeito de eu olhar pra isso, mas eu

nunca pensei, eu acho que eu não consigo imaginar não. Não consigo enxergar.

ENT2.: Você tem idéia de qual é a dimensão desse espaço, uma idéia assim?

KIKA: [sinal negativo com a cabeça] Ah, eu acho que...

ENT2.:... dimensão do espaço sobre o corpo dos $\mathbb{Z}$ cinco, né, claro.

KIKA: Ah, imagino dimensão 1? Bem no chute, assim, né, olhando. Ah, eu não sei. Sinceramente eu não sei isso não. Não consigo ver. Eu imagino que a dimensão seja 1, mas isso é imaginação.

ENT2.: De onde vem essa imaginação, teria vindo de onde? Dá uma dica pra gente, só pra gente ter uma idéia de pra onde você tá olhando, o que que você tá pensando...

KIKA: Ah, sei lá, eu acho que, eu imagino assim, $\mathbb{Z}$ cinco seria os inteiros múltiplos de cinco, vai, mas isso seria cinco $\mathbb{Z}$, né; mas eu não sei explicar, eu imagino assim o $\mathbb{Z}$ cinco como sendo um subgrupo dos inteiros, entendeu. Não sei, mais ou menos isso. Então, como os inteiros têm dimensão 1, eu diria que o $\mathbb{Z}$ cinco também. Não sei.

ENT2.: Mas lá, o $\mathbb{Z}$ cinco ao quadrado são... o $\mathbb{Z}$ cinco cartesiano $\mathbb{Z}$ cinco. Só tô querendo separar as coisas, né. O $\mathbb{Z}$ cinco é o corpo e os pares ordenados são pares ordenados com as coordenadas em $\mathbb{Z}$ cinco, tá. Só que os vetores são pares, é x, y onde x e y pertencem...

KIKA: ... Ao $\mathbb{Z}$ cinco.

ENT2.: Tô falando isso só porque você tá falando um pouco como se o $\mathbb{Z}$ cinco fossem os vetores, entendeu. Só pra tentar dar uma clareada.

KIKA: Tá.

ENT2.: Ah, se alguém te perguntar, mesma pergunta da outra vez, tá, você tá falando uma função tal, não sei que, que que essa função faz? O que que você diria pra pessoa?

KIKA: O que que ela faz... ela levaria um par x, y qualquer do $\mathbb{Z}$ cinco cartesiano $\mathbb{Z}$ cinco no respectivo par $-y, x$, também do $\mathbb{Z}$ cinco cartesiano $\mathbb{Z}$ cinco. Agora é o que você falou, no outro você disse: leva uma reta daqui numa reta de lá. Agora, eu não consigo imaginar isso aqui sendo uma reta, porque se isso aqui for uma reta, aqui também é, né. Então eu não consigo imaginar isso como uma reta pra dizer: leva uma reta daqui numa reta de lá, né.

ENT2.: Você poderia falar a mesma coisa, né? Essa aplicação vai levar uma reta daqui numa reta de lá.

KIKA: Mas eu não consigo ver uma reta aqui. [...] Eu não enxergo reta daqui de jeito nenhum. Não sei.

ENT2.: E se eu te falar que essa f ela é uma rotação?

KIKA: Piorou. É, porque ela vai... você teria a reta aqui, né, pelo vetor x, y ela vai rodar, o vetor diretor dela vai ser esse [apontando pra imagem de (x, y)]. É, faz sentido, né. Pensando que isso aqui $[(x, y)]$ é o vetor diretor da reta vai mudar, né. Mas é que eu não consigo enxergar reta aqui $[(x, y)]$, esse é o meu problema. Mas faz sentido. Sendo isso aqui $[(x, y)]$ uma reta e isso aqui $[(-y, x)]$ uma reta, eu consigo ver a rotação.

ENT2.: Não é um vetor?

KIKA: Vetor diretor da reta. Pego uma reta daqui e uma reta de lá. Então vai mudar o vetor diretor, vai mudar a reta. Eu enxergo isso, mas eu não consigo enxergar aqui $[(x, y)]$ a reta.

ENT2.: E aí você não consegue falar de rotação sem enxergar a reta?

KIKA: Não, consigo. Afirmando que isso aqui é uma reta, é o vetor diretor da reta eu sei que vai rotacionar, porque se ó, eu tenho o vetor x, y eu vou... deixa eu dar um exemplo, vai, pra enxergar melhor [desenha no quadro]. O vetor diretor da reta vai ser o vetor $1, 1$ por exemplo, então tá aqui. Quando eu aplicar a f nele, ela vai levar no $-1, 1$, então vai ser o $-1, 1$. Vai tá aqui ó, vai rodar a reta pra cá.

ENT2.: Mas ali no Z cinco tem -1 ? Eu não tô vendo -1 .

KIKA: Ah é, foi um exemplo, um exemplo [apagou o desenho].

ENT2.: Se você fizer uma conta e você acha o -1 , quem é o oposto do 1 , quem é o oposto da classe do 1 , o oposto do 1 barra, como você fala. Quem é, dentro do Z cinco, quem é o oposto do 1 barra?

KIKA: O oposto do 1 barra seria o 4 barra.

ENT2.: 4 barra. Então segue o que você tava falando que eu tô achando interessante, mas só pra gente não sair do que a gente combinou.

KIKA: Certo [foi ao quadro e traçou os eixos cartesianos ortogonais]

ENT2.: Você vai representar, você tá propondo representar lá com os eixos do seu produto cartesiano.

KIKA: Tá. Então se eu imaginar...

ENT2.: Pega 1, 1.

KIKA: Então vai ser o 1, 1. Aí esse 1, 1 vai ser levado no 4, 1. Então eu vou levar ele aqui...

ENT2.: 4, 1 é ao contrário, né.

KIKA: Tá certo.

ENT2.: Mas também desculpa que eu não sei como você pôs as coordenadas, né. Podia ter escolhido ao contrário...

KIKA: Mas tá certo.

ENT2.: ... foi besteira minha.

KIKA: É. Ela rotaciona pra cá. É, mas aí eu tô imaginando assim a classe do 1 barra como o número 1, a classe do 4 barra como sendo o número 4, pra representar ali, né. Então aí fica até fácil enxergar o vetor, enxergar a reta. Mas assim, como é que eu representaria assim, é minha dúvida, né, a classe do dois barra aí, não posso simplesmente representar como sendo vetores, não sei.

ENT2.: Faz um outro exemplo. Pega aí, o 2, 3. Bom, deixa, deixa. Ia falar pra você deixar, mas já foi. Faz o 2, 3.

KIKA: 2, 3.

ENT2.: E a imagem dele.

KIKA: Tá. Então aqui 2, 3 [desenhando no quadro].

ENT2.: Agora sem fazer a conta, sem fazer a conta mesmo. Rabisca rapidinho onde você acha que esse vetor vai parar, pela f.

KIKA: Onde eu acho...

ENT2.: É.

KIKA: Se, vich Maria.

ENT2.: Mais ou menos, mais ou menos.

KIKA: Vai dar...

ENT2.: Faz um rabisco aí, não faz conta; você tá fazendo conta, você processa rápido. Um rabisco.

KIKA: Eu acho que seria 1... 1, 2? (?) Sei lá, aqui, vai.

ENT2.: Tá, agora faz a conta.

KIKA: Tá, seria 2, 3, levaria no -3 que seria o 2 – ih, já fiz errado. Então seria aqui, seria aqui [desenhando] 2, e o x que era o 2 vai ser, certo, 2 também. O 2, 2. 2, 2. [risos] Conta errada. Fiz rápido, fiz errado.

ENT2.: Não, vamos dizer, o teu chute não tá totalmente errado porque você imaginou ele pra baixo ali, né.

KIKA: É, ahã. É, leva no 2, 2.

ENT2.: Olha, eu vou falar mais. É uma rotação de 90 graus.

KIKA: Noventa! Nossa, aqui não tem 90 graus nunca [risos]. Vich Maria! [...] É, eu acho que o meu erro tá nisso. Eu tô querendo representar a classe do 2 como o número dois; por isso que não tá dando 90 ali. Eu não consigo imaginar, como que eu representaria a classe do dois ali nos eixos. Por isso que aqui não dá 90. Porque se eu pudesse representar, tudo bem que é um desenho, mas, se eu pudesse representar teria que ter dado certo. Teria que ter um ângulo de 90 ali. Ter ângulo de 90, ele teria que ter vindo aqui pra baixo ou pra cá.

ENT2.: Mas então eu vou dizer pra você, aquele ângulo é de 90. Você quer que eu prove que o cosseno daquele ângulo é zero?

KIKA: [risos]

ENT2.: Quer?

KIKA: [risos]

ENT2.: Quer? Ela nem quer. Quer? Eu provo.

KIKA: Eu não tô enxergando.

ENT2.: Se eu provasse pra você de um jeito que você poderia aceitar...

KIKA:... enxergasse.

ENT2.: ... que o cosseno desse ângulo ali, do ângulo entre aqueles dois vetores é zero, você ficava muito surpresa, né...

KIKA: Não. Não, eu não ia ficar surpresa porque eu acho que a gente não pode se basear naquele desenho. Esse desenho pra mim, assim, tá errado porque, por causa disso que eu tô falando, eu tô representando a classe do 2 com o número dois. Então talvez por esse negócio de classes, o desenho seja assim. Se eu fosse considerar sendo a classe do dois esse ângulo seria de 90, não

sei. Olhando pra, termos de classe e não pra termos de número real dois, número real três, né. Não sei. O que eu tô estranhando é isso, que tô representando uma classe como simplesmente o número da classe, né. Classe do 1 é o número 1. Então o desenho tá daquela maneira. Agora não sei, se eu fosse, não sei se tem como eu representar também a classe do 2 o eixo do x, do y. Sinceramente eu não sei, não consigo enxergar [sinal negativo com a cabeça]. Travei. Não sei não.

ENT2.: Só... pra mim, minha última pergunta, né. Esse, esse jeito de representar, por exemplo, o Z cinco cartesiano Z cinco, você nunca viu, você inventou isso agora?

KIKA: Ahã [sinal positivo com a cabeça].

ENT2.: ... do teu jeito...

KIKA: É.

ENT2.: Não, só pra imaginar se alguém tinha sugerido.

KIKA: Não, não. Eu vi Z cinco há pouco em Estruturas mesmo. Só que eu assim eu aprendi, ela tinha ensinado classes, valor numérico, de achar quais eram as classes do Z cinco, grupo quociente Z sobre Z cinco, assim, bem algébrico mesmo, né.

ENT2.: Z sobre cinco Z, né.

KIKA: Sobre Z cinco é isomorfo a Z cinco. Isso. Foi a questão da prova ontem, mostrar que é isomorfa. Mas eu nunca tinha assim pensado em representar ele assim, geometricamente.

[sobre a possibilidade de fazermos a outra questão]

VIVIAN

ENT1.: Bom Vivian, o esquema é o mesmo daquela outra vez, tá. Eu vou, só que a outra vez vocês escreveram, né. E, hoje eu vou fazer assim, eu vou colocar a questão no quadro e eu vou pedir pra você falar. E aí você vai falar, porque da outra vez vocês escreveram e o que que aconteceu, às vezes vocês escreviam e não colocavam o rascunho, apagavam e tal. Hoje eu quero que você faça o que você faria na folha aqui. Então eu vou te pedir pra pensar alto mesmo, falar o que você quiser e ficar assim pensando: ah, eu vou falar certo, eu vou falar errado. Fala o que você tiver pensando mesmo, tá?

VIVIAN: Tá.

ENT1.: Então só para...

VIVIAN: ... Ah, eu descreveria como uma aplicação da reta no...

ENT1.: Pode ir ao quadro, tá, se você quiser [levantou e foi ao quadro rascunhando bem de leve].

ENT1.: Pode escrever com mais força, para eu enxergar daqui [continuou escrevendo]. Você não prefere falar em vez de escrever?

VIVIAN: Não, eu só quero tentar enxergar. Ah, eu descreveria como uma aplicação da reta no... ah, eu não tô conseguindo, eu não tô vendo qual que é aquele conjunto lá.

ENT1.: Então, só...

ENT2.: Qual conjunto?

VIVIAN: Aquele outro... na, na, na, nas matrizes daquela forma.

ENT2.: Aliás, lá é $-a$, né Viviane.

ENT1.: É, é que eu escrevi e ficou fraco.

ENT2.: Tem que escrever com força.

VIVIAN: O de cima?

ENT1.: É.

VIVIAN: Dá para ver.

ENT1.: Hein?

VIVIAN: Dá para ver.

ENT2.: Posso pedir um favor?

VIVIAN: Pode.

ENT2.: Vai à lousa e bota a mão assim em cima de onde está a reta, que você falou uma aplicação da reta... me mostra...

VIVIAN: Isso aqui para mim é reta [põe a mão sobre $\{ax+b; a, b \in \mathfrak{R}\}$].

ENT2.: Cadê a reta? Ali onde você pôs? Põe a mão de novo pra ficar bem gravado. Isso aí é a reta...

VIVIAN: Isso. Nas matrizes dessa forma [põe a mão sobre o contra-domínio e assenta].

ENT2.: O que que é a reta? Você apontou lá, mas fala mais dessa coisa que você tá chamando de reta, e que você disse que é aquilo ali [Vivian ri]. Só pra eu entender assim, entender do que você tá falando, tá. Pra não começar a imaginar, porque daí acaba virando o que eu penso, né.

VIVIAN: Mas eu vou falar mais o quê?

ENT2.: Hum, o que que você chama, aquilo que você pôs a mão em cima, por que você diz aquilo é a reta?

VIVIAN: Por que que eu chamo aquilo ali de reta?

ENT2.: Pode ser, pode ser. Mas você não flou só reta, você falou a reta. É a aplicação da reta no conjunto das matrizes dessa forma, você falou isso, não falou?

VIVIAN: Hum.

ENT2.: Então, por que que aquilo é a reta?

VIVIAN: Porque eu imagino assim, que você, se você der valores ali pra a e b, e igualar aquilo ali a um y, você vai ter uma reta, um conjunto de pontos, sei lá, vai daquele conjunto ali [apontando para o domínio] naquilo, daquela forma [apontando para o contra-domínio].

ENT2.: Aquele conjunto ali à esquerda, você diria que ele é o conjunto de que coisas? Vou te dar um exemplo, tá.

VIVIAN: Na minha esquerda, na minha esquerda?

ENT2.: Isso, isso. Ali, aquele à esquerda, tá.

VIVIAN: Aqui, $ax+b$.

ENT2.: Isso, [ENT2. vai ao quadro e põe a mão sobre $\{ax+b; a, b \in \mathbb{R}\}$] vou apontar, este conjunto aqui ó, esse conjunto aqui é um conjunto de quê? Ele é um conjunto de, vou dar a resposta, tá, ele é um conjunto de animais vertebrados, ele é um conjunto de nomes em português, nomes brasileiros, começando com a letra jota, ele é um conjunto de polígonos, ele é um conjunto de marcas de cigarro... Você diria que ele é um conjunto de... Como é que você, aquele é um conjunto de três pontinhos, como que você completa aqueles três pontinhos?

VIVIAN: Retas.

ENT2.: Retas. E o conjunto à direita é um conjunto de...

VIVIAN: Matrizes. Não é bem de matrizes não, mas tá valendo.

ENT2.: Ham?

VIVIAN: É, de matrizes, daquela forma ali. Quadradas, dois por dois.

ENT2.: Bom, que mais você imagina que você pode falar sobre essa aplicação?

VIVIAN: Ah, só isso. Que ela vai das retas ali, falei a reta, falar as retas, porque senão... nas matrizes daquela forma.

ENT2.: [se dirigindo a Viviane] Você falou das operações?

ENT1.: Não.

ENT2.: Tá. Então vamos introduzir o seguinte. Aquele conjunto da esquerda, tá...

VIVIAN: Ham.

ENT2.:... somar duas expressões daquela, daquelas é a soma usual de polinômios.

VIVIAN: Certo.

ENT2.: Você sabe somar $ax+b$ com $cx+d$, não sabe?

VIVIAN: Ham, sei.

ENT2.: Multiplicar por um escalar é multiplicar um polinômio por um número real, tá bom?

VIVIAN: Tá.

ENT2.: Do lado direito então, com isso aquilo ali vira um espaço vetorial, tá, você nem precisa fazer as contas, a gente garante. Do lado direito, somar matrizes é aquela soma que você sabe também, tá. Multiplicar por um escalar, você lembra como é que multiplica, um número por uma matriz, a mesma coisa, dá um espaço vetorial, tá bom?

VIVIAN: Tá.

ENT2.: Então, pensa que aquele conjunto do lado esquerdo é o conjunto de vetores de um espaço vetorial real, tá?

VIVIAN: Tá.

ENT2.: Agora vou te perguntar: batendo o olho – aqui, aliás, deixa eu botar o zero aqui porque...

VIVIAN: É.

ENT2.: Vou reforçar aqui se não a gente vai apagando, vai encostando, e não tem, é só pra não ficar nada possivelmente invisível. Batendo o olho, tá, tua primeira impressão, depois pode falar mais ou pensar mais, fazer o que você quiser. Batendo o olho, esta aplicação é uma transformação linear ou não? Batendo o olho. Sim, não, não sei.

VIVIAN: Batendo o olho seria, não sei, né, mas eu acho que sim.

ENT2.: Porque, batendo o olho, por quê?

VIVIAN: Ah, porque eu acho assim, que a soma e a multiplicação assim, do jeito que tá definido em ambos os espaços, são assim, como é que eu posso me expressar, são operações assim bem comportadas; mais ou menos assim que, eu acho que vai ser uma, uma transformação linear. Mas eu não sei dizer com precisão.

ENT2.: Se alguém te perguntar o que que é uma operação bem comportada...

VIVIAN: [risos]

ENT2.: O que que é uma operação bem comportada?

VIVIAN: Não, assim que... ah, não sei, que é comutativa, essas coisas assim, sabe essas certinhas, eu acho que ela é bem... isso.

ENT2.: São, nos dois lados aquelas operações dão espaço vetorial.

VIVIAN: Isso.

ENT2.: Aquele monte de propriedades lá...

VIVIAN: Isso.

ENT2.: Isso é que é bem comportada?

VIVIAN: É.

ENT2.: Você acha que isso sugere...

VIVIAN: Sugere.

ENT2.: ... que seja uma transformação linear?

VIVIAN: Isso.

ENT1.: E você acha que essa transformação linear faz alguma coisa ali?

VIVIAN: Com certeza.

ENT1.: O que, por exemplo?

VIVIAN: Então, é porque eu não tô conseguindo enxergar o que vai acontecer desse lado, mas ó, ela vai levar as retas ali em... ah, em que que ela vai levar?... [...] Ah, eu não tô conseguindo enxergar onde ela vai levar, mas ela vai fazer alguma coisa, com certeza.

ENT2.: Que tipo de coisa ela vai fazer?

VIVIAN: Então, eu não tô conseguindo enxergar. Eu sei que ela vai levar, vai levar as retas daqui em alguma coisa do lado de lá que eu não tô conseguindo enxergar o que que vai ser. Em algum vetor lá do outro espaço vetorial.

ENT2.: Ah, você falou assim, as retas daqui. Esse aqui você apontou mais para o lado esquerdo?

VIVIAN: É, é, é.

ENT2.: Quem são as retas daqui?

VIVIAN: São as retas daquela, daquela, daquela, são os vetores aí desse espaço vetorial.

ENT2.: E um vetor daqui, tô apontando para o lado esquerdo...

VIVIAN: Ham.

ENT2.: Ele vai ser levado no quê?

VIVIAN: [rindo] Em outro de lá.

ENT2.: Em outro de lá.

VIVIAN: Ahã.

ENT2.: E quem...

VIVIAN: Então, eu não sei quem é o outro.

ENT2.: Quem que é, quem são os vetores do lado direito?

VIVIAN: Eu não sei. Eu não sou muito boa assim pra descobrir essas coisas. Eu não sei quem que é o outro. Ah, são daquela forma ali.

ENT2.: Que que você faria para ter certeza se essa aplicação é ou não uma transformação linear entre esses dois espaços vetoriais que a gente definiu?

VIVIAN: Que (?)

ENT2.: É, você quisesse ter certeza.

VIVIAN: É... eu ia dizer que f da $ax+b$ mais $cx+d$ tem que ser igual a f de $ax+b$ mais a f de $cx+d$. E, αf de $ax+b$ tem que ser f de $\alpha ax+b$.

ENT2.: E aí se você conseguisse mostrar isso, pronto.

VIVIAN: Pronto.

ENT2.: Você tem algum outro jeito, fora esse, que você...

VIVIAN: Não.

ENT2.: ... lembre? É o único jeito que você concebe...

VIVIAN: É.

ENT2.: ...Ou que você lembra ou que sei lá ou que você (?)...

VIVIAN: É. Porque para mim uma transformação linear é uma aplicação que vai de um espaço vetorial em outro e que obedece essas duas propriedades.

ENT2.: Puxando assim, pro fundo da sua memória, você nunca ouviu falar nada diferente disso, sobre o que é uma transformação linear?

VIVIAN: Transformação linear?

ENT2.: Nunca?

VIVIAN: Uma transformação linear... ai, não lembro não. Pra mim a definição assim que tá bem fresquinha, bem clara, é essa. É essa.

ENT2.: Ó, aqui um parênteses, tá.

VIVIAN: Huhum.

ENT2.: Não tem giz branco... deixa eu pegar giz branco.

ENT1.: Você tá igual aqueles menores do Fantástico...

VIVIAN: Por quê?

ENT1.: ...que filma assim pela, filma de costas falando. Falei que ela tá igual aqueles menores do Fantástico (?).

ENT2.: Depois a gente vai por assim aqueles negócios, mudar a voz [...]. eu não vou escrever não. Mudei de idéia, tá. Tem outras coisa que a gente vai perguntar que talvez contamine, né. Ah, te ocorreria dizer que isso é uma aplicação, não te ocorreria testar se é injetora, sobrejetora, essas coisas não...

VIVIAN: Se fosse, se eu sentisse necessidade, pensaria isso sim, mas se não...

ENT2.: É porque aqui a idéia é um pouco você falar assim tudo que você imagina que você pode dizer, entendeu? Você não tem assim um problema específico, né.

VIVIAN: Hum.

ENT2.: Faz sentido falar sobre se ela seria injetora...

VIVIAN: Ah sim, faz! Faz. Se ela é uma aplicação faz sentido falar.

ENT2.: Você acha que ela é injetora, ou não?

VIVIAN: Injetora... acho que não.

ENT2.: O que que te deu assim essa impressão?

VIVIAN: Não sei.

ENT2.: Um chute.

VIVIAN: [...] Não sei. Pode até ser que sim. Um chute. Não sei olhando assim.

ENT2.: Olha...

VIVIAN: Sobrejetora eu acho que ela é. Fala.

ENT2.: Não. Mesma coisa, o que que te sugere que ela seja sobrejetora.

VIVIAN: Ahã. [...]

ENT2.: Você tá pensando em quê?

VIVIAN: Não. Tô tentando fazer as contas. [...] Ah, só isso que eu tenho pra descrever.

ENT2.: É. Tudo bem se a gente dizer que são dois espaços vetoriais, aquele conjunto da esquerda com aquelas operações, o conjunto da direita... Tudo bem? Quer dizer, um espaço de matrizes pra você não é uma coisa, você já viu isso, tá. Ah, o que que são as retas no espaço da direita, vamos falar assim, pra você? Porque um espaço vetorial tem retas, né., possivelmente, né.

VIVIAN: Qual a forma das retas, é isso?

ENT2.: Se alguém fala, quem são retas naquele espaço da direita, como vocêalaria das outras, entendeu?

VIVIAN: Ahã.

ENT2.: Ou imagina...

VIVIAN: Ah, não imagino não. [...] Ah, não imagino. Talvez até isso aí sejam retas.

ENT2.: Isso aí o quê?

VIVIAN: Ah, isso aí que tá escrito dessa forma [apontando para o quadro].

ENT2.: Você tem alguma idéia de quais são as dimensões de cada espaço? Espaços vetoriais reais... Um chute assim.

VIVIAN: Esse aqui...

ENT2.: Esse aqui qual? Da esquerda?

VIVIAN: Da esquerda. [...] Esse aqui [apontando para o conjunto da esquerda] tem dimensão dois, eu acho, e esse daqui tem dimensão... quatro, será? É, pode ser. Dois e quatro. Não sei, eu não lembro. Ou será que é três? Eu acho que é quatro.

ENT2.: Se eu disser que é dois?

VIVIAN: O quê?

ENT2.: Se eu disser que é dois a dimensão daquele espaço da direita?

VIVIAN: Se você disser que é dois?

ENT2.: É. Que que você vai achar? Que eu tô tentando te enganar, pode ser...

VIVIAN: É, pode ser. Agora se você quiser me convencer a fundo assim, aí você pode tentar me mostrar.

ENT2.: Esse teu pode ser, pode ser porque pode ser ou você olhando ali pode ser mesmo, ah, realmente pode ser? Eu tô afirmando.

VIVIAN: Você tá afirmando?

ENT2.: A dimensão daquele espaço é dois.

VIVIAN: É dois?

ENT2.: É. A dimensão daquele espaço sobre R é dois.

VIVIAN: E desse aqui também você tá afirmando que é dois? [apontando para o quadro]

ENT2.: Desse aqui é outra história, mas aquele ali eu tô afirmando que é dois.

VIVIAN: É? Não, porque se esse aqui também for dois a gente pode falar que eles são isomorfos, não pode?

ENT2.: Pode.

VIVIAN: Então.

ENT2.: Mas aquele lá eu tô afirmando que é dois.

VIVIAN: É. Ah, eu acho que não é, mas se você tá afirmando e você quiser me mostrar que é... se me convencer.

ENT2.: Se eu digo isso você não consegue enxergar que aquilo tenha dimensão dois...

VIVIAN: Aquilo dali tem dimensão dois. Por quê? Porque só precisa do b e do a ?

ENT2.: Por que que não cola muito, no fundo essa é minha pergunta. Por que que quando eu afirmo pra você...

VIVIAN: Porque eu tô pensando, eu tô imaginando aquilo ali na forma de uma quádrupla. Isso que eu tô. Mas como tem aquele zero ali, ou não... por causa disso, mas....

ENT2.: Isso quer dizer, pensou que é uma terna, tem três letras, é isso?

VIVIAN: Não [risos], não.

ENT2.: Por quê?

VIVIAN: Não pensei uma terna, não falei dimensão três. [risos]

ENT2.: Não, mas você podia falar, eu tô pensando que lá tem quatro letras...

VIVIAN: Não, mas eu tô pensando assim, são jeitos diferentes de escrever $-b$, vamos por, $-b$, a , 0 e b .

ENT2.: E do lado esquerdo?

VIVIAN: Do lado esquerdo? Ah, do lado esquerdo pode deixar daquele jeito mesmo.

ENT2.: E por que que tem dimensão dois?

VIVIAN: Por quê? Porque, porque, porque. Porque... uma base daquele espaço ali não vai ter, vão ter dois elementos? Porque sim. Ali também é eu não sei, porque só tem a e b ali. Pode ser também.

ENT2.: Vamos passar pro outro [se referindo à outra tarefa]?

ENT1.: Vamos. Mesma coisa.

VIVIAN: Quantos tem?

ENT2.: Mais três.

ENT1.: É só essa.

VIVIAN: Não fala isso não.

ENT2.: Mais três desse tipo, depois têm as outras que são de múltipla escolha.

VIVIAN: Fala isso não.

ENT1.: Mesma coisa, tá [enquanto escrevia no quadro].

VIVIAN: Vocês tinham que ter feito esse seminário semestre passado.

ENT1.: Como?

VIVIAN: Eu tava com a cuca fresca com esse (?), começo desse semestre na verdade.

ENT1.: É que vocês fizeram álgebra Linear, né (?).

ENT2.: Você acha que a gente faz o outro, Viviane [se referindo a outra tarefa que havia sido preparada]?

ENT1.: Hum?

ENT2.: Que que você acha, deixa esse mesmo, né.

ENT1.: Melhor esse, né.

ENT2.: Só agora os esclarecimentos, tá. Pergunta se tiver alguma coisa que você ao sabe do que se trata aqui.

VIVIAN: Que que são essas notações aí?

ENT2.: Quais?

VIVIAN: Z cinco...

ENT2.: Aqui?

VIVIAN: É.

ENT2.: Z cinco, você já viu?

VIVIAN: Vi. É o módulo cinco lá, blá, blá, blá. É, não é?

ENT2.: Blá, blá, blá! Blá, blá, blá eu não lembro direito, mas você pode pensar nisso como módulo cinco, depois você pode até escrever o que você acha. Isso aqui [Z cinco ao quadrado] quer dizer que é o Z cinco cartesiano Z cinco.

VIVIAN: Ah, tá! Tá.

ENT2.: Como se fosse R ao quadrado, é Z cinco.

VIVIAN: Entendi.

ENT2.: Aqui [Z cinco ao quadrado] tem pares, cada evento, cada coordenada é um elemento do Z cinco. A mesma coisa que a gente fez pra (?). Você chegou a ver em alguma hora que o Z cinco é um corpo? Você já viu isso assim... alguém falou, mencionou?

VIVIAN: Para ser um grupo tem que ser um corpo?

ENT2.: Não.

VIVIAN: Não. Então eu acho que não.

ENT2.: Mas para ser um corpo tem que ser...

VIVIAN: Ser um grupo?

ENT2.: ...dois grupos.

VIVIAN: Dois grupos?

ENT2.: Você nunca viu a definição de corpo? Em álgebra linear?

VIVIAN: Em álgebra linear eu vi, mas eu não lembro. Tá, é um corpo.

ENT2.: É um corpo.

VIVIAN: É um corpo, tá. Que que eu vou falar disso aí?

ENT2.: Mesma coisa, descrever. Só que ... mesma coisa, isso aqui é uma aplicação deste conjunto $[Z \text{ cinco ao quadrado}]$ naquele conjunto $[Z \text{ cinco ao quadrado}]$.

VIVIAN: ãh.

ENT2.: É o mesmo. Só que eu posso definir sobre esses caras daqui a soma usual, que é coordenada a coordenada, e o produto por escalar usual. Os escalares são o corpo do Z cinco mesmo, tá, o corpo dos escalares. Então eu tenho, multiplicar a primeira coordenada por ele e a segunda coordenada por ele. Usual, tá. A única coisa que você vai ter que acreditar um pouquinho que o Z cinco, que você já conhece, é um corpo. E aí nesse caso tem um espaço vetorial, um corpo e as n -uplas, no caso os pares, tá.

VIVIAN: Huhum.

ENT2.: Se isso não tiver claro pra você, você tem que dizer pra gente. Aí a gente muda a tarefa, te dá uma outra que certamente vai ser mais familiar, tá. Dá uma olhada e vê se faz sentido.

VIVIAN: [Vivian usa as mãos como se estivesse escrevendo na carteira] Bom, essa aplicação – tá certo, vamos lá – acho que [...] obedece lá as duas propriedades de transformação linear, [...] é sobrejetora, [...], acho que é injetora também.

ENT2.: Essas três coisas que você... ah, desculpa.

VIVIAN: E leva os elementos do Z cinco cartesiano Z cinco no Z cinco cartesiano Z cinco.

ENT2.: Tá. Essas quatro afirmações que você fez, satisfaz as duas de transformação linear, que é sobrejetora, que é injetora, e que leva os elementos do Z cinco cartesiano Z cinco no Z cinco cartesiano Z cinco. Suponha que você tenha uma prova de múltipla escolha. Tem essas quatro afirmações e que você tenha que por verdadeiro ou falso. Não é múltipla

escolha. Tem essas quatro afirmações e você tem que por verdadeiro ou falso, tá.

VIVIAN: Ah, tá.

ENT2.: Em quais destas você poria verdadeiro sem fazer as contas?

VIVIAN: Na última.

ENT2.: Na última. As outras você acha que você iria...

VIVIAN: Iria.

ENT2.: ... querer fazer as contas. Tá. Então vamos lá. Batendo, por que batendo o olho você acha que satisfaz às duas propriedades de uma transformação linear? Só batendo o olho. Foi um palpite que você deu, mas alguma coisa tem, né.

VIVIAN: Por quê? Pelo mesmo motivo da outra. Porque eu acho que são operações assim bem comportadas. Que vai.

ENT2.: As operações onde, vou pedir para você ser mais explícita nesse caso...

VIVIAN: Essas operações que você definiu lá, a soma e a multiplicação.

ENT2.: Hum.

VIVIAN: E sobrejetora é porque olhando assim, mais ou menos, dando uma pensada, eu acho que você pegar um elemento, dado um elemento dali, você toma ali com uma cara bonitinha e você vai conseguir um elemento.

ENT2.: E injetora?

VIVIAN: Injetora... Injetora é mais complicado nessa situação. Ah, porque dei um palpite. Porque dei uma pensadinha assim, mas com certeza eu faria as contas pra ver se é verdade ou não.

ENT1.: Você não pensou em nenhuma conta quando você falou de transformação linear? Ou você só olhou para as operações?

VIVIAN: Eu olhei pras operações.

ENT1.: Você não pensou nas contas?

VIVIAN: Não. Só dei assim uma imaginada. Que que ia mais ou menos acontecer.

ENT2.: Ó. Você tem ao invés dessa função, eu vou pegar os mesmos espaços, tá, aqui é o mesmo, né; é, mesmas operações, as operações continuam sendo bem comportadas tanto como eram antes, tá. Agora eu vou definir essa aplicação aqui [$g: \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ com $(x,y) \mapsto (x,xy)$]. Agora vou te fazer aquelas quatro perguntas. Primeiro se você acha que isso satisfaz às duas propriedades de transformação linear, às duas, se você acha que é sobrejetora, se você acha que leva os elementos de $\mathbb{Z}$ cinco cartesiano $\mathbb{Z}$ cinco em $\mathbb{Z}$ cinco cartesiano $\mathbb{Z}$ cinco. As mesmas quatro, tá.

VIVIAN: Tá.

ENT2.: Que que você batendo o olho acha?

VIVIAN: Hum. Eu acho que não vai, porque não satisfaz às propriedades.

ENT2.: Você fez alguma conta relâmpago na sua cabeça?

VIVIAN: Eu tô tentando fazer a da soma, não fiz assim inteiro, mas tô tentando....

ENT2.: Mas por que que você tá tentando se as operações são bem comportadas, não são?

VIVIAN: Ah, são. Mas acontece que você mete ali uma multiplicação ali na, xy . Daí a hora que você fizer, vamos supor, $x+a$ e $y+b$, vai ficar $x+a$ vezes $y+b$, ali. Quando você fizer separado, vai ficar xy mais ab . E... então não vai dar, porque ali já tá com, ali com a multiplicaçãozinha ali, já não tá tão comportadinha igual a de cima.

ENT2.: Mas você não falou que o comportado são sempre as operações...

VIVIAN: As aplicações, a aplicação também tem que ser comportada. Então, lá em cima olhando é porque a aplicação é comportada também.

ENT2.: Olha, qual que é então a tua melhor, isso tá parecendo barganha, sabe quando você: não, então, oito e cinquenta, não, oito e vinte e cinco... Olha, eu não gosto de ficar barganhando, me diz qual é a melhor definição, melhor explicação, pra escuta menina, afinal de contas, o que que é comportada. Vou botar aqui, tá. Eu vou te dar uma outra h de $\mathbb{Z}$ cinco ao quadrado em $\mathbb{Z}$ cinco ao quadrado, que leva um par x, y em alguma coisa aqui, tá [$h: \mathbb{Z}_5^2 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ com $(x,y) \mapsto (x, xy)$]. Que vai levar num outro par também, por que o $\mathbb{Z}$ cinco ao quadrado... tá.

VIVIAN: Tá.

ENT2.: As operações em $\mathbb{Z}$ cinco ao quadrado são comportadas, comutativas, tarará. O x e o y são comportados. O que que deve ser comportado aqui [se

referindo a aplicação h], o que que falta aqui. Por que o resto tá fixo, né, tá. O resto a gente não vai mudar, né, esses caras vão aparecer (?) o x y por notação usual.

VIVIAN: Mas tem que ter assim, ó...

ENT2.: O que que é mal comportada?

VIVIAN: Coloca uma só.

ENT2.: E o que que é bem comportada?

VIVIAN: Mal comportada, ah eu não sei. Coloca, ah eu não... como que eu vou definir isso? Que não é rebelde.

ENT2.: Que que é rebelde?

VIVIAN: Ó, a segunda ali tem [se referindo a aplicação g] tem uma multiplicação, tá vendo, tá envolvendo x e y . A primeira ali não, ambas as coordenadas ali tão assim sozinhas, bem assim quietinhas, aqui já não, ó. Igual aqui, ó, eu acho que ela já não vai ser injetora. Não dá pra definir o que é uma coisa bem comportada. É uma coisa que quando você coloca ali que você for fazer as continhas de transformação, não sei quê, não sei quê, dá certo.

ENT2.: Mas você olhou aqui, você não precisa fazer conta; você já olhou, já suspeitou do comportamento dessa, não foi? Então, agora vou escrever uma aqui e você falou assim: ah, aqui tá só o x e o y , separadinho no seu lugar. E essa aqui? Que que você acha? Não olha [enquanto escrevia no quadro $(x,y) \propto (2x-y, x+y)$]! Essa aqui? Bem comportada ou mal comportada?

VIVIAN: Ah, essa daí, acho que ela é. Ah, e agora? Olhando assim, é mal comportada. Porque de olhar assim só por olhar, não dá pra ver muita coisa. Você tem que dar uma pensadinha assim, sabe, pra falar alguma coisa dela. Aquela ali não, dá pra você bater o olho nela ali e já falar alguma coisa.

ENT2.: E essa aqui $[(x,y) \propto (2x, -3y)]$?

VIVIAN: Essa daí tá melhorando, mas ela ainda tá... [...] Ela é bem comportadinha também, ela é bonitinha. Mas aquela ali [indicando a primeira] é mais. Se você colocasse ali x , y ia ser mais ainda.

ENT2.: Aí ia ser perfeitamente bem comportada?

VIVIAN: Ahã. Ia.

ENT2.: Ah, o que você, como você descreveria para alguém o que essa transformação faz? Que é a mesma pergunta daquela outra, da primeira parte. O que ela faz?

VIVIAN: Ela leva o par x, y no par $-y, x$. Ela leva o vetor, um vetor que tá aqui, aqui [fazendo gesto de rotação, deslocamento com a mão]. Ela faz acho que uma reflexão em torno do eixo x ? Acho que é. Não, não é. Deixa eu ver.

ENT2.: Você pode usar, você não quer ser professora não, né? Ou então você vai fazer ensino à distância, né?

VIVIAN: ãh?

ENT2.: Você vai ser profesora, mas só ensino à distância, que você não gosta de giz. [risos Vivian] Se você quiser você pode ir na lousa e fazer as suas, os seus diagramas, o que você quiser.

[sobre a câmera ter caído]

VIVIAN: Ah, não é isso que ela faz não. Ela leva... ela vai mudar assim [fazendo gesto com a mão de rotação, deslocamento]. Ela vai mudar (...) tudo que tiver lado positivo aqui do x vai pro negativo, que tiver do negativo vai pro positivo [fazendo gesto com as mãos de deslocamento]. Agora, o y vai continuar igual, só que... ah, como que eu vou me expressar? Ah, a norma ali dos vetores vão ser iguais, não vão? Vão [desenhando, escrevendo com a mão na carteira]. Vai manter. Mas o que que ela faz, o nome, o nome eu não sei.

ENT2.: Que que você tá imaginando que ela faz? Por isso é que eu...

VIVIAN: Assim, ó, eu tô imaginando que ela faz assim ó [desenha um sistema cartesiano de eixos ortogonais no quadro].

ENT2.: Se você quiser pode apagar lá, até vou pedir, só pra você ter mais espaço, que aquilo ali é um negócio de, que eu acrescentei.

VIVIAN: [depois de apagar o quadro, desenha novamente] Por exemplo, imaginando que é uma coisa assim, ó: [desenha o vetor do par ordenado $(1, 1)$ e a imagem segundo a lei de formação da f] vai ficar assim. Então ela vai fazer aqui, com esse, com essas coisas que tão nessa reta, nessa reta, ela vai fazer a reflexão em torno desse eixo y . Só que o que não tiver, não vai fazer. Porque ó, por exemplo, vamos pegar esses aqui 2 e 1. Então ele vai levar no $-2, 1$. Vai levar aqui ó [desenhando o par ordenado $(-2, 1)$]. Vai levar aqui ó. Então não vai ser assim uma reflexão. Mas tudo que tiver desse lado aqui, vai pra esse lado aqui.

ENT1.: Qual que era o primeiro aí, 2 e 1?

VIVIAN: O primeiro é o 1 e 1. O segundo é o 2 e 1. 1 e 2.

ENT1.: 1 e 2 é quem?

VIVIAN: 1 E 2? Em -2 e 1, para cá.

ENT2.: Agora deixa eu te perguntar. Escreve exatamente o que eu vou falar, depois você completa, tá.

VIVIAN: Tá.

ENT2.: Z cinco igual, agora abre chave, agora quem que são os elementos do Z cinco? Pra você.

VIVIAN: Os elementos do Z cinco são [escreve $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$]. Será que é isso? É.

ENT2.: Tá. Eu não tô vendo aí nenhum -2 e nenhum -1 [Vivian ri]. Só tô, só tô querendo só, por isso que eu pedi pra você escrever. Se você quiser escrever ou coisa, se você quiser... Mas eu não tô vendo -2 e não tô vendo -1 .

VIVIAN: Ah, é só outra forma de ver eles.

ENT2.: Que outra forma? Quem que é o -2 ? [Vivian apaga o que tinha desenhado] Quem que é o -2 aí dentro? Porque pra mim -2 , ó, eu vou fazer de conta que eu sou seu professor de Estruturas e falo: -2 é o oposto de 2, tá?

VIVIAN: ãh.

ENT2.: Quem que é o oposto do 2 ali dentro que é o teu conjunto e só tem aqueles cinco caras lá? Então um daqueles tem ali que ser o oposto do 2. Quem que é o oposto do 2?

VIVIAN: O oposto do 2? É que, for operado com o dois é vai dar o elemento neutro.

ENT2.: Isso. Quem que é o cara lá que – operado não, somado né – quem que é o cara ali que somado com 2 dá zero?

VIVIAN: O 1. Não, o 1 não. O 3.

ENT2.: O 3. E o oposto do 3?

VIVIAN: É o 2.

ENT2.: E o oposto do 1?

VIVIAN: O 4.

ENT2.: E o oposto do 4?

VIVIAN: O 1.

ENT2.: E o oposto do zero?

VIVIAN: O zero.

ENT2.: E o oposto do zero?

VIVIAN: O zero.

ENT2.: Então, tá bom. Então esses são os opostos lá. Então agora faz um favor pra mim.

VIVIAN: Ah tá, ver o que que aquilo ali faz?

ENT2.: Não. É. Vai lá. Faz usando, você tava usando uma representação lá. Eu só não quero que a gente comece a botar os elementos dos, que não tão lá no que você tá dizendo que é aquele conjunto, entendeu?

VIVIAN: Tá.

ENT2.: Pode fazer o que você tava fazendo.

VIVIAN: Ah, não sei. O que que eu vou fazer, representar isso daí aonde?

ENT2.: Uai, sei lá do jeito que você tava fazendo.

VIVIAN: Eu também não sei.

ENT2.: Do jeito que você quiser.

VIVIAN: Vai levar, ó...

ENT2.: Faz sentido o que você tava fazendo lá, só não me põe -2 .

VIVIAN: Aquilo ali vai levar o 0, 0 no 0, 0, vai levar o 0, 1 no oposto do 1 que é o 4. E o zero [escrevendo os pares e suas imagens no quadro], e assim, assim por diante.

ENT2.: Tá, você quer fazer, você acha que faz sentido fazer aquele desenho que você tava fazendo... ó, veja, o meu comentário eu não tô dizendo que não faz, eu tô só perguntando se continua pra você fazendo sentido, eu gostaria que você fizesse. Porque a única coisa que eu quis me referir é que você tava usando coisas lá que eu suspeitava que quando você fosse escreve o conjunto eles não tavam lá.

VIVIAN: Ahã.

ENT2.: Que nem você tá falando de número, você mete lá um número que é um símbolo estranho que eu nunca vi na vida. Aí é esquisito, né.

VIVIAN: Mas então, ó...

ENT2.: Por que você tá ó, sabe assim que eu tô querendo falar é assim do jeito que você tava representando você falou assim: reflete.

VIVIAN: (?)

ENT2.: Reflete, ou faz isso, ou faz aquilo, tá. Se você, agora você tá restrita porque você não pode por o -2 , então eu queria que você fizesse o desenho pra você ver o que que você ia enxergar lá. Continuasse pensando no que você tava pensando.

VIVIAN: Ah, mas eu não sei pensar daquele jeito com esse conjunto. Então, mas assim, o zero barra que pertence ali ao zero barra, o 5, o 10, o 15, o 20, e assim vai. Tem todos os números ali dentro.

ENT2.: Ali dentro tem conjuntos? Eu tô vendo ali dentro são conjuntos, a classe do zero é um conjunto, ...

VIVIAN: Então, mas dentro de cada, dentro aqui dos conjuntos tem os números e todos os números tão aí.

ENT2.: Mas dentro do Z cinco tem conjuntos?

VIVIAN: Tem conjuntos.

ENT2.: Tem conjuntos, só.

VIVIAN: Então, e ela vai fazer isso aqui, vai levar um conjunto no oposto aqui e nesse mesmo aqui.

ENT2.: Mas o que que aconteceu agora, isso que eu queria saber, que antes você tava fazendo aqueles desenhos, você tava falando, reflete e faz isso, faz aquilo...

VIVIAN: ... Ah, porque agora são conjuntos...

ENT2.: E agora não pode mais falar reflete, não pode mais falar roda...

VIVIAN: Não, mas são conjuntos e eu não sei falar.

ENT2.: E se eu falar para você que isso aí é uma rotação?

VIVIAN: Você falar que é uma rotação?

ENT2.: É.

VIVIAN: Tá bom.

ENT2.: Tá bom o quê?

VIVIAN: Você tá falando, eu não posso (?) excluir você de falar alguma conclusão.

ENT2.: Mas você tem idéia do que eu tô falando, você consegue fazer alguma idéia do que eu tô falando, faz sentido pra você? Ou você acha que eu tô falando um nome assim que num...

VIVIAN: Não. Eu já ouvi esse nome.

ENT2.: Você consegue enxergar uma rotação ali?

VIVIAN: Não.

ENT2.: Você consegue enxergar uma reta no Z cinco cartesiano Z cinco?

VIVIAN: Não. Eu não tô conseguindo enxergar essas coisas assim, uma reta num conjunto assim.

ENT2.: Mas do jeito que você tava representando antes...

VIVIAN: Eu enxergava.

ENT2.: ... você tava falando de, né.

VIVIAN: Eu enxergava.

ENT2.: E eu te digo mais, é uma rotação de 90 graus.

VIVIAN: É?

ENT2.: É.

VIVIAN: De verdade?

ENT2.: De verdade.

VIVIAN: Então eu aprendi mais uma coisa nova hoje.

ENT2.: Juro por Deus. Juro por Deus. Faz sentido pra você isso que eu tô falando? Você consegue enxergar uma rotação de 90 graus ali?

VIVIAN: Não. Eu não consigo enxergar, porque eu não consigo enxergar assim. Uma rotação pra mim, eu enxergo num desenho assim, entendeu? De uma rotação [fazendo gesto com as mãos perpendicularmente], uma reta tá

aqui, vem pra cá, vem pra cá, depois pra lá. Uma rotação de 90 graus. Não tô conseguindo enxergar ali a reta, no Z cinco cartesiano Z cinco.

ENT2.: Nem a reta, quanto mais a rotação.

VIVIAN: Quanto mais a rotação.

ENT2.: Você lembra do teu curso de álgebra linear como é que você fazia pra ver se dois vetores são ortogonais?

VIVIAN: É, lembro mais ou menos.

ENT2.: Como faz mais ou menos.

VIVIAN: Eu pegava e fazia cartesiano... cartesiano? Acho que é. Depois dava zero.

ENT2.: Hum.

VIVIAN: Depois dava zero.

ENT2.: Por que dava o zero?

VIVIAN: Aí é conta, é conta.

ENT2.: Produto interno talvez, não?

VIVIAN: É, produto interno, isso mesmo.

ENT2.: Como faz o produto interno usual? Qual que é o produto interno usual?

VIVIAN: É assim, ó.

ENT2.: Põe assim, a, b e c, d. [Vivian escreve no quadro]

VIVIAN: É assim, não é? Ou não é? É, não é.

ENT2.: Produto interno usual, né. Agora se eu pegar um vetor do Z cinco cartesiano Z cinco, x, y tá. E fizer o produto interno com a imagem dele que é – y, x, x, y.

VIVIAN: Se der o zero, eles vão ser ortogonais. Aí vai ser uma rotação de 90 graus [fazendo as contas no quadro]. Muito bem.

ENT2.: E agora?

VIVIAN: Tudo bem, mas eu ainda não enxergo.

ENT2.: Mas como você não pode enxergar, não é uma rotação?

VIVIAN: É, mas eu não enxergo.

ENT2.: Por que você não enxerga?

VIVIAN: Porque eu não enxergo a reta dentro lá do Z cinco, como é que eu vou enxergar isso?

ENT2.: Enxergar para você tá querendo dizer assim...

VIVIAN: Ver, visualizar.

ENT2.: Ver como se eu pudesse pegar alguma coisa assim e mostrar aqui assim. Isso pra você é ver.

VIVIAN: Isso, isso. Não, eu tô acreditando que é por causa que eu fiz as contas, eu tô acreditando que é. Se você, se alguém me perguntar eu vou falar, afirmar. Mas eu não tô enxergando. Você tá entendendo, eu tô sabendo que é, mas eu não tô visualizando.

ENT2.: Você se sente segura de que você pode dizer que isso é uma rotação de 90 graus?

VIVIAN: Me sinto, porque ali deu zero, porque... Me sinto. Eles são ortogonais.

ENT2.: O fato que você não consegue ver, como você diz, você acha que é por quê?

VIVIAN: Porque eu não consigo imaginar uma reta ali.

ENT2.: Que que é uma reta?

VIVIAN: Uma reta?

ENT2.: É, num espaço vetorial só pra simplificar a pergunta.

VIVIAN: Och, uma reta é uma reta! [risos]

ENT2.: E o que é uma reta?

VIVIAN: Ah, não sei. Conjuntos de pontos, sei lá. Que estão na mesma reta, dá uma reta [risos].

ENT2.: Qual que é a reta como um espaço vetorial, quando a gente fala uma reta, tá. Falando de um espaço vetorial. Qual que é a dimensão da reta?

VIVIAN: Dois. Um. Um. Um de verdade.

ENT2.: Por quê?

VIVIAN: Porque, porque é um. No plano são dois. No espaço são três.

ENT2.: No espaço uma reta tem dimensão três, no plano uma reta tem dimensão dois?

VIVIAN: Não. Da reta é dimensão um, do plano é dimensão dois, a dimensão do plano, e do espaço tem três.

ENT2.: Uma reta no espaço, a dimensão dela...

VIVIAN: Um.

ENT2.: ... é um também? Tanto faz onde ela esteja? É? Uma reta que o ...

VIVIAN: Eu acho que a dimensão da reta é um.

ENT2.: Por quê? Como você me... não é por que; o que quer dizer que a dimensão da reta é um?

VIVIAN: Se a dimensão dela é um então por que eu falei que a dimensão daquilo ali que eu falei que era reta era dois? [risos]

ENT2.: Você que tem que responder, né. O que eu falei, se fosse o que eu falei... Eu tô te fazendo uma pergunta. Pra você, quando você diz: eu sei que a dimensão da reta é um. Eu queria que você me dissesse o que te garante que você pode dizer isso(?) ?

VIVIAN: Porque assim ó, eu tenho uma reta. Aí como se eu fixar o um, pega o um, o número um. Se eu for multiplicar assim todos os números pelo um, vai dar a minha reta toda. Então eu só preciso do um pra formar a minha reta toda.

ENT2.: Hum. Gerar. Seria isso.

VIVIAN: Isso. Vai gerar a reta toda.

ENT2.: Então vamos pensar assim, uma reta é uma coisa gerada por um vetor só...

VIVIAN: Isso.

ENT2.: ... só um vetor gera todo mundo, tá.

VIVIAN: Isso, isso.

ENT2.: [ENT2. vai ao quadro e começa a fazer as contas] Então. Vamos ver se a gente acha um exemplo de reta ali, tá bom. Ó, eu vou pegar um, vou pegar um cara, um vetor do $\mathbb{Z}$ cinco cartesiano $\mathbb{Z}$ cinco, tá. Fala qualquer um lá, tá, menos o zero zero.

VIVIAN: 1, 2.

ENT2.: 1, 2. Classe do 1, classe do 2, tá. Agora eu vou multiplicar esse cara por todos os elementos do corpo de escalares. Porque é isso que você faz, né. Você falou que multiplicava por todos os números. Aqui eu só tenho esses números. Se eu multiplicar por zero vai dar quem?

VIVIAN: Zero, zero.

ENT2.: O zero, zero. Se eu multiplicar por 1?

VIVIAN: O 1, 2.

ENT2.: Se eu multiplicar por 2?

VIVIAN: 2, 4.

ENT2.: Se eu multiplicar por 3? Pela classe do 3, né.

VIVIAN: 3, 1.

ENT2.: 3, 1. Se eu multiplicar por 4?

VIVIAN: 4... 3.

ENT2.: Isso aqui [os pares $(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{4}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{3})$], esse conjunto aqui é a reta gerada pelo, pelo, pelo par 1, 2.

VIVIAN: Então tá.

ENT2.: Então tá. Tem cara de reta aquilo ali pra você?

VIVIAN: Não.

ENT2.: Quer dizer, você continua sem conseguir visualizar.

VIVIAN: É.

ENT2.: Por mim, assim, para mim tá legal. Foi super. Você deu um mote de coisas para gente pensar, né.

VIVIAN: Mas essa é a dimensão da reta é 1, e eu falei que era 2 antes.

ENT2.: Você falou primeiro, eu nem sei porque que você mudou, né.

VIVIAN: Não, mas é verdade que a dimensão da reta é 1. Porque eu até expliquei porque. Então ela não é 2, é 1.

ENT2.: Mas por que você falou 2?

VIVIAN: Por quê? Não sei. Eu falei 2 porque eu não pensei direito.

ENT2.: Porque tinha duas coordenadas aqui numa reta desse plano aí?

VIVIAN: É. Que eu tava pensando...

ENT2.: Então, mas você vê tem umas coisas que a gente tem na cabeça que, que são tão naturais, né, que quando a gente se vê numa situação meio diferente, não consegue, num... como ver reta, uma reta formada por matrizes?!

VIVIAN: Então.

ENT2.: Uma reta formada por matrizes? Negócio que tem 4 dimensões, né. 4 dimensões...

VIVIAN: Mas é uma reta.

ENT2.: E você ainda falou de 4 coordenadas, né. É a mesma coisa. Agora só pra você pensar, tá. Mesma coisa, ó. [no quadro escrevendo] Eu não tenho as matrizes da forma $a, b, 0, -a$?

VIVIAN:..Ahã.

ENT2.: Me diz uma matriz dessa forma. Qualquer uma.

VIVIAN: 1, 2, 0, -1.

ENT2.: 1, 2, 0, -1. Agora, o conjunto de todas as matrizes dessa forma...

VIVIAN: Vai dar uma reta...

ENT2.: ... onde α é real vai dar uma reta nesse espaço aí. E a dimensão é 1. Tá. Por exemplo, essa matriz $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Agora, visualizar do jeito que a gente tá acostumado com $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, aí não dá. E o que é interessante, né, isso que a gente tá olhando bastante, por isso que a gente quis perguntar mais, entendeu, para escarafunchar mais como vocês pensam. Como, quando vocês conseguem enxergar, enxergar que nem você faz, enxergar assim na frente, pensando dum jeito e vocês falaram de um certo jeito. Quando vocês não

conseguem enxergar, vocês parecem que pensam de outro e certamente vocês falam de outro, né.

[Sobre a função ser a mesma da terceira tarefa. Z cinco não ser familiar ela não ficou preocupada, não tinha escrito o Z cinco.]