



UNIVERSIDADE ESTADUAL
PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA
FILHO” CAMPUS DE BAURU
FACULDADE DE ENGENHARIA
DE BAURU

**CONTROLE E DINÂMICA DE SISTEMAS MICRO
ELETROMECAÑICOS NÃO LINEARES INCLUINDO CALCULO
FRACIONÁRIO**

Bauru – SP

2020

DAILHANE GRABOWSKI BASSINELLO

**CONTROLE E DINÂMICA DE SISTEMAS MICRO
ELETROMECÂNICOS NÃO LINEARES INCLUINDO CALCULO
FRACIONÁRIO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Faculdade de Engenharia de Bauru da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Tit. José Manoel Balthazar.

Coorientador: Prof. Dr. Angelo Marcelo Tusset.

Bauru – SP

2020

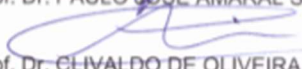
B321c	Bassinello, Dailhane Grabowski Controle e dinâmica de sistemas micro eletromecânicos não lineares incluindo calculo fracionário / Dailhane Grabowski Bassinello. -- Bauru, 2020 86 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia, Bauru Orientador: José Manoel Balthazar Coorientador: Angelo Marcelo Tusset 1. Sistema Micro Eletromecânico. 2. Ordem Fracionária. 3. Caos. 4. Controle. 5. Não Linear. I. Título.
-------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Engenharia, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ATA DO EXAME GERAL DE QUALIFICAÇÃO DE DAILHANE GRABOWSKI BASSINELLO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, CURSO DE DOUTORADO, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU

Aos 29 dias do mês de setembro do ano de 2017, às 10:20 horas, no(a) Anfiteatro da Diretoria Técnica de Informática, reuniu-se a Comissão Examinadora composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica - docente voluntário - Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. PAULO JOSE AMARAL SERNI do(a) Engenharia de Controle e Automação - Instituto de Ciência e Tecnologia/UNESP/Sorocaba, Prof. Dr. CLIVALDO DE OLIVEIRA do(a) Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal da Grande Dourados - MS, sob a presidência do primeiro, para o Exame Geral de Qualificação de DAILHANE GRABOWSKI BASSINELLO, nos termos de Regulamento do Programa, tendo a candidata recebido o conceito final: aprovada. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.


Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR
Prof. Dr. PAULO JOSE AMARAL SERNI
Prof. Dr. CLIVALDO DE OLIVEIRA

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos os professores e funcionários da Pós Graduação - UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- Aos meus pais Joanino e Leocadia e ao meu esposo Milton, pelo carinho, incentivo e compreensão;
- Ao meu orientador Professor Dr. José Manoel Balthazar, por todo incentivo, ensinamento, confiança e orientação;
- Ao meu coorientador Professor Dr. Ângelo Marcelo Tusset, por todo incentivo, ensinamento e colaboração;
- Aos meus colegas do doutorado Jeferson, Alexandre, Rodrigo pelo incentivo companheirismo e muitas risadas ao longo desses anos.
- Ao Mauricio Aparecido Ribeiro pela disposição e colaboração neste trabalho.

RESUMO

Neste trabalho é realizada a análise dinâmica e controle de dois sistemas micro eletromecânicos MEMS, ambos os modelos são analisados em ordem inteira e em ordem fracionária. O primeiro modelo, trata – se de um sistema do tipo *Comb Drive*, este quando realizada a análise dinâmica, apresenta comportamento caótico em uma determinada faixa de parâmetros, sendo considerado o sistema em ordem inteira e em ordem fracionária. São também avaliados para o primeiro modelo, a influência do amortecimento, variação da tensão de polarização, influência do termo de rigidez não linear e o comportamento dinâmico do sistema em ordem fracionada. O teste 0-1 foi aplicado como ferramenta de análise de caos. O diagrama de bifurcação é aplicado para demonstrar o efeito do fenômeno *Pull In*. Os resultados numéricos demonstram que os parâmetros estudados são significativos, indicando que a resposta pode ser um comportamento caótico ou periódico dependendo da variação dos parâmetros. Para levar o sistema de um estado caótico a uma órbita periódica desejada para o modelo 1 em ordem inteira e em ordem fracionária são aplicadas duas técnicas de controle, sendo elas o controle ótimo linear realimentado OLFC e o controle por meio da equação de Ricatti dependente do estado SRDE. O segundo modelo aqui analisado é um sistema MEMS do tipo micro *Cantilever*, que por meio de análise dinâmica e simulações numéricas apresenta comportamento não linear, tanto para a análise do sistema em ordem inteira, bem como, para o sistema quando considerada a ordem fracionária. São analisados também para o modelo 2, a influência do amortecimento, variação da tensão de polarização, influência do termo de rigidez não linear. Para comprovação da existência de caos no sistema em ordem inteira é analisado o expoente de Lyapunov, e para o sistema em ordem fracionária foi aplicado o teste 0 -1. Com a finalidade de levar o sistema a uma ordem periódica desejada são aplicados o controle ótimo linear realimentado e o controle por meio da equação de Ricatti dependente do estado ao sistema em ordem inteira e em ordem fracionária.

Palavras chave: Sistema micro eletromecânico; Controle; Ordem fracionária; Caos; Não linear.

ABSTRACT

In this work, an analysis and control of two micro-electromechanical systems MEMS is performed, both models are analyzed in entire order and in fractional order. The first model, it is a Comb Drive type system, this when performed the dynamic analysis, presents chaotic behavior in a determined range of parameters, the system being considered in entire order and in fractional order. For the first model, the influence of damping, variation of the polarization stress, influence of the nonlinear stiffness term and the dynamic behavior of the system in fractional order are also evaluated. The 0-1 test was applied as a chaos analysis tool. The bifurcation diagram is applied to demonstrate the effect of the Pull In phenomenon. The numerical results show that the parameters studied are significant, indicating that the response may be chaotic or periodic behavior depending on the variation of the parameters. To take the system a chaotic state to a desired periodic orbit for Model 1 in entire order and fractional order are applied two control techniques, which were optimal linear feedback control OLFC and control state dependent Ricatti equation SRDE. The second model analyzed here is a MEMS micro system type Cantilever, that through dynamic analysis and numerical simulations it presents nonlinear behavior, both for the analysis of the system in whole order, as well as, for the system when considering the fractional order. Also analyzed for model 2, the influence of damping, variation of the polarization stress, influence of the nonlinear stiffness term. To prove the existence of chaos in the system in entire order, the Lyapunov exponent is analyzed, and for the system in fractional order, the 0 -1 test was applied. In order to bring the system to a desired periodic order, the optimal linear feedback control and control state dependent Ricatti equation are applied to the system in entire and fractional order.

Keywords: Micro electromechanical system; Control; Fractional order; Chaos, Non linear.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos do Trabalho	2
1.2 Descrição dos Capítulos	3
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	5
2.1 Estado da Arte.....	5
2.1 Derivadas em Ordem Fracionária.....	8
3. CONTROLE NÃO LINEAR.....	12
3.1 Controle Ótimo Linear Realimentado	12
3.1 Controle Utilizando as Equações de Ricatti Dependentes do Estado.....	13
4. SISTEMAS MICRO ELETROMECAÂNICO MEMS	16
4.1 Modelo Matemático do Sistema MEMS Modelo 1	16
4.2 Modelo Matemático do Sistema MEMS Modelo 2	19
5. COMPORTAMENTO DINÂMICO DOS MODELOS MEMS	23
5.1 Análise Dinâmica do Sistema Mems Modelo 1.....	23
5.1.1 Efeito do Amortecimento no Modelo 1	26
5.1.2 Influência do Termo da Tensão Contínua	27
5.1.3 Fenômeno <i>Pull – In</i>	28
5.2 Análise Dinâmica do Sistema Mems Modelo 1 em Ordem Fracionária	29
5.2.1 Teste 0 – 1 para o modelo 1	32
5.3 Análise Dinâmica do Sistema Mems Modelo 2.....	34
5.1.1 Efeito do Amortecimento no Modelo 2	36
5.1.2 Influência do Termo da Tensão Contínua	37
5.1.3 Fenômeno <i>Pull – In</i> Para o Modelo 2	38
5.4 Análise Dinâmica do Sistema Mems Modelo 2 em Ordem Fracionária	39
5.4.1 Teste 0 – 1 para o modelo 1	41
6. PROJETO DE CONTROLE PARA O SISTEMA MEMS MODELO 1	43
6.1 Controle Para o Sistema em Ordem Inteira.....	43

6.1.1 Controle Ótimo Linear Realimentado em Ordem Inteira	43
6.1.2 Controle Por Meio das Equações de Ricatti Dependentes do Estado em Ordem 1.....	45
6.2 Controle Para o Modelo 1 em Ordem Fracionária.....	47
6.2.1 Controle Ótimo Linear Realimentado Para o Sistema em Ordem Fracionária	48
6.2.2 Controle Por Meio das equações de Ricatti Dependentes do Estado em Ordem Fracionária	51
7. PROJETO DE CONTROLE PARA O SISTEMA MEMS MODELO 2	53
7.1 Controle Para o Sistema em Ordem Inteira.....	53
7.1.1 Controle Ótimo Linear Realimentado em Ordem Inteira	53
7.1.2 Controle Por Meio das Equações de Ricatti Dependentes do Estado em Ordem 1.....	53
7.2 Controle Para o Modelo 2 em Ordem Fracionária.....	58
7.2.1 Controle Ótimo Linear Realimentado Para o Sistema em Ordem Fracionária	58
7.2.2 Controle Por Meio das equações de Ricatti Dependentes do Estado em Ordem Fracionária	60
8. CONCLUSÃO.....	62
REFERÊNCIAS	64
APENDICE A – BUSCA DA SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA PARA OS MODELOS MEMS	67
APENDICE B – SÚMULA CURRICULAR.....	73

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ressonador Comb Drive	2
Figura 2 – Fontes comuns de não linearidades em sistemas MEMS (Younis, 2011).	7
Figura 3 – Sistema micro eletromecânico.	17
Figura 4 – Ressonador micro <i>cantilever</i> MEMS	20
Figura 5 – Histórico de deslocamento no tempo modelo 1.	23
Figura 6 – Retrato de fase modelo 1.....	24
Figura 7 – Mapa de Poincaré para o modelo 1.....	25
Figura 8 – Expoente de Lyapunov para o modelo 1.....	26
Figura 9 – Diagrama de bifurcação para o coeficiente de amortecimento	27
Figura 10 – Diagrama de bifurcação para V_p	28
Figura 11 – Bifurcação para o fenômeno Pull – In.....	29
Figura 12 – Plano fase considerando $q_1 = 0.5$ e $q_2 = 0.9$	30
Figura 14 – Plano fase considerando $q_1 = 0.7$ e $q_2 = 1$	31
Figura 15 – Plano fase considerando $q_1 = 1$ e $q_2 = 0.9$	31
Figura 16 – Teste 0 – 1 para o modelo 1 em ordem fracionária.....	33
Figura 17 – Histórico de deslocamento no tempo para o modelo 2.	34
Figura 18 – Plano fase do MEMS modelo 2.	35
Figura 19 – Mapa de Poincaré para o MEMS modelo 2.	35
Figura 20 – Expoente de Lyapunov para o modelo 2.....	36
Figura 21 – Diagrama de bifurcação para o MEMS modelo 2.....	37
Figura 22 – Diagrama de bifurcação para V_p para o modelo 2.....	37
Figura 23 – Bifurcação para o fenômeno <i>Pull – In</i> para o modelo 2.	38
Figura 24 – Plano fase $q_1 = 0.8$ e $q_2 = 0.5$	40

Figura 25 – Plano fase $q_1 = 0.7$ e $q_2 = 1$	40
Figura 26 – Plano fase $q_1 = 1$ e $q_2 = 0.9$	41
Figura 27 – Teste 0 – 1 para o modelo 2 em ordem fracionária.	42
Figura 28– Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle OLFC...	44
Figura 29 – Retrato de fase para o sistema com controle OLFC.....	44
Figura 30 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle SRDE..	46
Figura 31 – Retrato de fase para o sistema com controle SRDE.....	46
Figura 32 – Comparação do deslocamento no tempo para o sistema com controle SRDE, controle OLFC e sem controle.	47
Figura 33 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema controlado.....	50
Figura 34 – Retrato de fase para o sistema com controle.....	50
Figura 35 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle SDRE..	51
Figura 36 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle OLFC..	52
Figura 37 – Retrato de fase para o sistema com controle OLFC.....	54
Figura 38 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle OLFC..	55
Figura 39 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle SDRE..	56
Figura 40 – Retrato de fase para o sistema com controle SRDE.....	56
Figura 41 – Comparação do deslocamento no tempo para o sistema com controle SRDE, controle OLFC e sem controle.	57
Figura 42 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle OLFC..	59
Figura 43 – Retrato de fase para o sistema com controle OLFC.....	59
Figura 44 – Histórico do deslocamento no tempo para o modelo 2 em ordem fracionária com controle SDRE.....	60
Figura 45 – Retrato de fase para o modelo 2 em ordem fracionária com controle SDRE..	61

LISTA DE SIGLAS

MEMS	Sistema micro eletromecânico
OLFC	Controle ótimo linear realimentado
SRDE	Controle por meio das equações de Ricatti dependentes do estado
AC	Corrente alternada
DC	Corrente continua
LQR	Regulador linear quadrático

1. INTRODUÇÃO

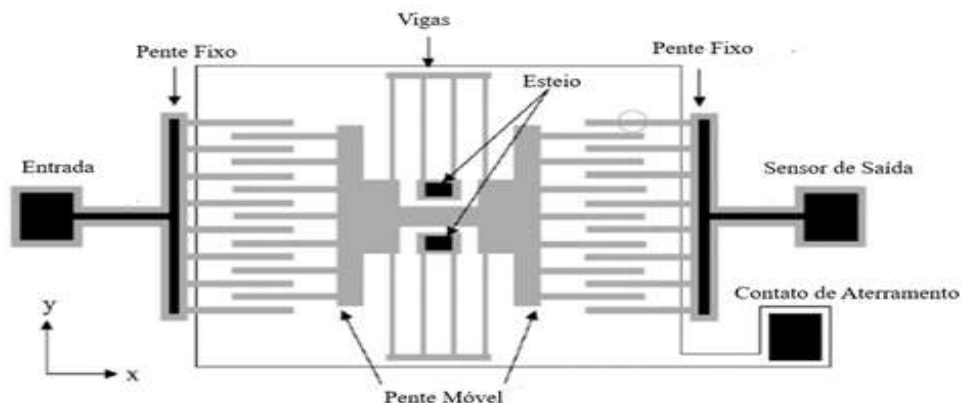
Um sistema micro eletromecânico MEMS é um dispositivo composto por uma parte elétrica que pode atuar como um transdutor ou amplificador de sinais, por exemplo, atuando em conjunto com uma parte mecânica responsável por algum tipo de movimento ou ação do dispositivo, fabricados como sistemas integrados e em uma escala de micrometros como pode ser visto em Younis, 2011.

Sistemas micro eletromecânicos geralmente são compostos por um transdutor de entrada, um ressonador mecânico e um transdutor de saída. O transdutor de entrada converte um sinal elétrico de entrada em uma força mecânica, o ressonador mecânico amplia a entrada sinal e o transdutor de saída detecta o movimento do ressonador mecânico e gera um sinal elétrico correspondente (Raskin et al., 2000). Estes sistemas detectam ou controlam quantidades físicas, ópticas ou químicas, como aceleração, radiação ou fluidos (Fischer et al., 2015).

A tecnologia MEMS tem como um de seus grandes atrativos o baixo custo, que é uma consequência direta da fabricação em lote (Younis, 2011). Esses dispositivos apresentam tamanho pequeno e peso bastante leve, o que é desejável por razões de compactidade e conveniência em diversas aplicações (Tusset, 2013). Além disso, com a miniaturização desses dispositivos, ganhou – se também diversas novas possibilidades de implementação de MEMS em novas aplicações, onde dispositivos em grande escala, não se encaixam, como motor de carros e dentro do corpo humano.

Outra vantagem apresentada por sistemas MEMS, é a possibilidade de esses trabalharem em baixa potência, o que não só reduz o custo operacional, mas também permite o desenvolvimento de dispositivos de longa vida e autoalimentados, neste caso podem gerar a pequena quantidade de energia que precisam do ambiente, durante sua operação (Sheey, 2009). Além disso, os dispositivos MEMS permitiram dispositivos com desempenhos superiores, funcionalidades inteligentes, descomplicando tarefas que não podem ser alcançadas em outras tecnologias. Alguns exemplos são encontrados em detectores de massa ultrasensíveis, bio sensores, micro microfones direcionais para aparelhos auditivos, sensores de pressão de alta temperatura para motores de automóveis. Um exemplo típico de um dispositivo micro eletromecânico é ilustrado na figura 1, onde é possível observar um sistema constituído por micro vigas, estas vigas são o componente estrutural mais comumente utilizado em MEMS.

Figura 1 – Ressonador Comb Drive



Fonte: Adaptada de Rosin et al., 2002.

As micro vigas formam a espinha dorsal de uma ampla gama de dispositivos, incluindo ressonadores, sensores ressonantes, atuadores, filtros, sondas de microscópio de força atômica e interruptores de radiofrequência (Rosin et al., 2002). Eles também são usados como elementos de mola com outras microestruturas e componentes MEMS, como atuadores de acionamento por pente.

1.1 Objetivos do Trabalho

Os objetivos gerais deste trabalho são:

Obter uma teoria consistente e realizar a modelagem matemática para os sistemas micro eletromecânicos em ordem inteira e em ordem fracionária, analisando o seu comportamento dinâmico não linear caótico, assim como, aplicar as técnicas de controle ótimo linear realimentado OLFC e controle por meio das equações de Ricatti dependentes do estado SDRE.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

Analisar o comportamento dinâmico de dois sistemas micro eletromecânicos do tipo micro ressonador.

O primeiro modelo é composto por um sistema micro eletromecânico MEMS tipo *comb drive*, nesta tese ele será chamado de modelo 1, este apresenta comportamento caótico e são realizadas as análises de comportamento considerando a derivada de ordem fracionária e também

em ordem 1, com a finalidade de obter um comportamento periódico desejável é utilizado as técnicas de controle ótimo linear realimentado e o controle por meio das equações de Ricatti dependentes do estado, para o sistema em ordem inteira e em ordem fracionária.

O segundo modelo é composto por um sistema MEMS micro *cantilever*, nesta tese ele será chamado de modelo 2, este apresenta comportamento não linear e são realizadas as análises de comportamento considerando a derivada de ordem fracionária e também em ordem 1 com a finalidade de obter um comportamento periódico desejável é utilizado as técnicas controle ótimo linear realimentado OLFC e o controle por meio das equações de Ricatti dependentes do estado SRDE.

Para atingir os objetivos propostos nesta tese, esta é dividida em sete capítulos, a seguir é realizada uma breve descrição sobre cada um destes capítulos.

1.2 Descrição dos Capítulos

Com a finalidade de atingir o objetivo proposto nessa tese, ou seja, apresentar dois modelos de sistemas MEMS realizando a análise do seu comportamento dinâmico, análise das possíveis fonte de não linearidades para os sistemas em ordem inteira e em ordem fracionária, assim como, propor a aplicação das técnicas de controle SRDE e OLFC, para levar os sistemas de uma orbita caótica a uma orbita periódica desejada está tese foi dividida nos seguintes capítulos:

Capítulo um é realizada a introdução onde descreve o que é um sistema micro eletromecânico. Ainda neste capítulo são apresentados os objetivos desta tese;

Capítulo dois apresenta o estado da arte dos sistemas MEMS, apresentando um pouco da sua história, estudos em andamento e uma visão de tópicos voltado para avanços futuros nesta área de pesquisa, assim como, aplicação e exploração do comportamento dinâmico não linear em sistemas micro eletromecânicos. Neste mesmo sentido, é também apresentado o histórico de desenvolvimento e pesquisa sobre a derivada de ordem fracionária, mostrando um pouco da sua importância na área da análise dinâmica de sistemas;

Capítulo três, neste são apresentadas as técnicas de controle para sistemas não lineares aplicadas nesta tese, com a finalidade de controlar os sistemas MEMS com comportamento caótico. O controle ótimo linear realimentado OLFC, tem a função de regular e estabilizar o comportamento de sistemas dinâmicos, onde, o sinal de controle é uma função da diferença dos valores atuais e

valores desejados das variáveis de estado do sistema. O método das equações dependentes de estado SDRE aborda sistemas não lineares como sistemas lineares;

No capítulo quatro estão apresentados os modelos matemáticos dos sistemas micro eletromecânicos estudados nesta tese. O primeiro modelo trata – se de um sistema MEMS do tipo *comb drive* proposto por inicialmente por Moon (1998), sendo que este também foi objeto de estudo em Tusset et al. 2012. O segundo modelo aqui estudado atua como um ressonador micro *cantilever*, este foi proposto inicialmente por Jazar (2004);

Capítulo cinco são apresentadas as análises dinâmicas para os sistemas micro eletromecânicos MEMS aqui estudados, sendo chamados de modelo 1 e modelo 2, ambas análises são realizadas para ordem inteira e ordem fracionária, com o auxílio do software MATLAB® por meio de integrações numéricas, sendo possível demonstrar o comportamento não linear caótico de ambos os sistemas;

Capítulo seis, neste é realizada uma comparação entre as técnicas de controle, o controle ótimo linear realimentado OLFC e o controle por meio das equações de Ricatti dependentes do estado, para o modelo 1 em ordem inteira e em ordem fracionária;

Capítulo sete, neste é realizada a comparação entre as técnicas de controle OLFC e SDRE, para o modelo 2 em ordem inteira e em ordem fracionária.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo descreve o desenvolvimento dos sistemas MEMS, apresentando um pouco da sua história, estudos em andamento e uma visão de tópicos voltado para avanços futuros nesta área de pesquisa, assim como, aplicação e exploração do comportamento dinâmico não linear em sistemas micro eletromecânicos.

2.1 Estado da Arte

O início histórico de desenvolvimento e pesquisas de sistemas MEMS são os medidores de tensão de silício piezo resistivos, estes foram descobertos no final da década de 1950 pela Kulite Semicondutor, primeira licença da Bell Telephone Laboratories em patentes sobre a resistência piezo em um semicondutor em 1954. Os *strain gauges* da Kulite representam alguns dos primeiros sistemas microelectromecânicos comercialmente distribuídos MEMS, como pode ser visto em Borgue (2013). Ainda na década de 1950, Richard Feynman apresentou um artigo onde delineou uma visão para construir dispositivos em escala muito pequena, estes tinham o potencial de revolucionar uma ampla gama de tecnologias como sensores e atuadores, embora as versões da sua palestra tenham sido reimpressas em algumas revistas populares da época, sua visão em torno da construção e desenvolvimento de novos dispositivos em micro escala passaram despercebidas naquele momento. O primeiro progresso notável na área de micro ressonadores foi o trabalho de Nathanson (1967) em ressonância de transistores. A partir dos anos 80, os defensores da nanotecnologia citaram a ideia de Feynman, afim de estabelecer a credibilidade científica de seu trabalho.

Com o avanço da indústria eletrônica, especificamente a produção de circuitos integrados miniaturizados, tornou possível a fabricação de dispositivos MEMS. Kurt Peterson (1982), demonstrou como seria possível utilizar técnicas de fabricação de circuitos integrados na construção e desenvolvimento de pequenos dispositivos mecânicos com componentes móveis. Embora a pesquisa sobre micro sistemas tenha crescido relativamente pouco ao longo das décadas subsequentes, poucos produtos se tornaram comerciais até que os avanços de fabricação conduzidos pela indústria de circuitos integrados estivessem amplamente disponíveis, hoje essa tecnologia atingiu um nível de maturidade, onde, vários dispositivos MEMS estão sendo utilizados

em nosso dia-a-dia, desde acelerômetros e sensores de pressão em carros, micro espelhos em aparelhos de televisão de plasma, comutadores de radiofrequência e microfones em telefones celulares e sensores de inércia em jogos de vídeo. Os métodos de fabricação, agora bem conhecidos e padronizados, ao contrário do processamento mecânico tradicional, a fabricação do dispositivo MEMS utiliza o processo de produção de semicondutores, que pode ser compatível com um circuito integrado, e inclui micro usinagem de superfície.

Em meados da década de 1990, se deu o início do desenvolvimento de ressonadores micro eletromecânico, como uma alternativa viável para atuadores *comb drive* e outros tipos de filtros convencionais. A micro engenharia está mudando a natureza da maioria das estruturas, dispositivos. Os sistemas de micro escala de alto desempenho têm sido amplamente utilizados em medicina, biotecnologia, robótica (Aghababa, 2012). Particularmente, os ressonadores micro eletromecânicos que são amplamente utilizados para detectar o campo eletromagnético, aceleração, pressão e temperatura (Lyshevski, 2002).

Existem vários métodos de atuação que podem ser usados para disparar ressonadores, bem como os mecanismos térmicos, piezelétricos, eletromagnéticos e eletrostáticos, este último método é o mais utilizado devido à sua simplicidade e alta eficiência (Varadan e Wang, 2013). Visando atender a necessidade de buscar novos métodos, melhorias e inovações em MEMS além das leis estáticas do design e das limitações das teorias lineares. Sendo possível notar o amplo crescimento e interesse que vem sendo direcionado para investigar de forma profunda os aspectos de dinâmica e movimento de MEMS, quando estes são analisados levando em consideração seu comportamento não linear como pode ser observado em Bassinello et al. 2018, onde foi realizada a análise da dinâmica não linear e o controle de um MEMS.

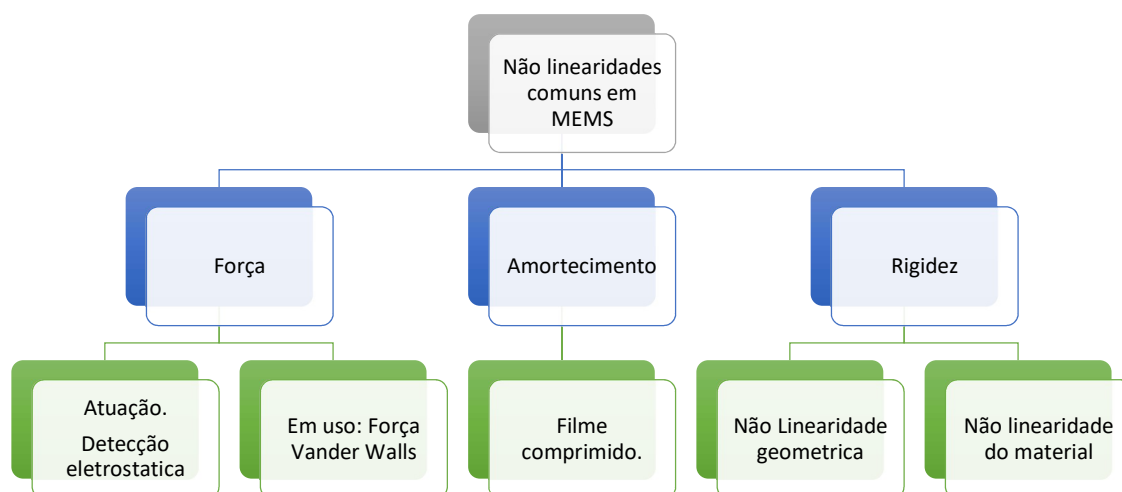
Em sistemas micro eletromecânicos, as não linearidades podem surgir de uma variedade de fontes como mecanismos de amortecimento, elementos de circuito resistivo, indutivo e capacitivo. Um exemplo interessante de não linearidade nos sistemas MEMS foi demonstrado em Tusset et al. 2012, onde é possível observar que a força eletrostática não linear depende do tamanho do intervalo entre os dois eletrodos. Outros exemplos de análise dinâmica nos sistemas MEMS podem ser observados em Sabarathinam e Thamilmaran 2017, onde foi investigada a dinâmica não linear de um sistema de ressonador MEMS do tipo Duffing.

O modelo matemático dos micro ressonadores geralmente indica um sistema paramétrico não linear. O sinal de saída de MEMS não é confiável quando está operando em uma região

saturada ou instável como pode ser visto em Jazar 2009. Quando um dos eletrodos está se movendo, a força é não linear e dependente do tempo. Assim, a equação governante do movimento do MEMS é paramétrica altamente não linear (Younis e Nayfeh, 2003).

Em Younis (2011) foram apresentados alguns desafios em relação a modelagem de sistemas MEMS como pode ser visto na figura 1, segundo o autor, não linearidades estão presentes em MEMS, como no caso de outros sistemas de macro escala, no entanto, em MEMS, as não linearidades que podem ser observadas na figura 2, podem ser fortes e dominantes e negligenciá-las nos modelos pode levar a previsões erradas.

Figura 2 – Fontes comuns de não linearidades em sistemas MEMS (Younis, 2011).



Fonte: Adaptada de Younis, 2011.

No entanto, não há muitas contribuições disponíveis para o controle de não linearidades de ressonadores MEMS de ordem fracionária. Normalmente os estudos se concentram apenas no estudo da dinâmica não linear e a predição do caos em sistemas de ordem inteira.

A seguir é apresentado um historico do desenvolvimento do estudo de derivadas em ordem fracionária, bem como, algumas aplicações, pois estas serão utilizadas no desenvolvimendo deste trabalho.

2.2 Derivadas de Ordem Fracionária

O cálculo de ordem arbitrária mais popularmente conhecido como cálculo fracionário é um tópico matemático de 300 anos de idade que generaliza o conceito de diferenciação e integração para uma ordem arbitrária como pode ser visto em Aghababa (2012). A origem deste conceito nasceu quando Leibniz formulou uma questão envolvendo a generalização da derivada de ordem inteira para uma ordem arbitrária, em uma correspondência para L' Hôpital, esse por sua vez respondeu questionando – o no caso em que a ordem da derivada for $1/2$ na notação de Leibniz $d^n y/dx^n$ com $n \in \mathbb{N}_0 := \{0,1,2, \dots\}$ quando $n = 1/2$, em sua resposta Leibniz afirmava que para $y(x) = x$ a igualdade de $d^{1/2}x = x^2\sqrt{dx}$, sendo este o primeiro registro de cálculo fracionário.

O cálculo fracionário somente apareceu na literatura em 1819, quando Lacroix apresentou uma definição de derivada fracionária com base na expressão usual para a n -ésima derivada de uma função de potência. Diversos matemáticos notáveis como Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, Lacroix e Fourier desenvolveram a teoria do cálculo fracionário mais sem encontrar uma aplicação real, em 1823 Abel que obteve a solução de uma equação integral advinda do problema da tautócrona, que busca avaliar o tempo gasto por um objeto ao deslizar sem fricção em gravidade uniforme até seu [ponto de mínimo](#) é independente de seu ponto de partida (Teodoro et al. 2018).

O primeiro estudo que ofereceu uma definição lógica de uma derivada fracionária foi de Liouville que em seu trabalho expandiu funções em series de potência, definindo a derivada de ordem n como um inteiro positivo estendido para uma ordem não inteira e então para uma derivada em ordem fracionária.

O trabalho que levou ao que hoje chamamos a formulação da derivada fracionária, segundo Riemann – Liouville foi escrito por Sonin, em 1869. Neste, Sonin tomou como ponto de partida a fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem n de uma função analítica. Três anos depois, em 1872, Letnikov estendeu o trabalho de Sonin. Para tanto, Letnikov, assim como Sonin, tomou como referência a própria fórmula integral de Cauchy e como contorno um círculo fechado em uma superfície de Riemann. Laurent, em 1884, publicou um trabalho sobre operadores generalizados, considerado marco inicial para o moderno desenvolvimento do cálculo de ordem arbitrária, onde generalizou a fórmula integral de Cauchy.

Em 1968, foi publicada a primeira monografia sobre o cálculo fracionário aplicado à química, elaborada em colaboração comum entre Oldham e Spanier (1974). Depois, em 1969,

Caputo propôs uma nova definição para derivada de ordem arbitrária a fim de resolver um problema de viscoelasticidade.

Embora tenha uma longa história, durante muitos anos não tenha sido utilizado em física e engenharia, atraindo atenção somente nos últimos 30 anos, sendo demonstrado em diversas aplicações nas mais diversificadas áreas (Hilfer, 2001). Em Cao et al. (2015) foi realizada a discussão sobre diferentes soluções que aparecem no sistema na presença do amortecimento visco elástico com características fracionárias. Uma derivada fracionada presente nos sistemas dinâmicos geralmente está relacionada a fenômenos complexos.

Com a finalidade de obter uma melhor compreensão sobre derivada fracionária em sistemas dinâmicos, são apresentadas as definições de Grëunwald-Letnikov e Riemman-Liouville. Ambas definições são aplicadas a casos particulares onde o operador é apresentado na forma de ordem fracionária geral, o primeiro representa a derivada da ordem q , enquanto o último representa a integral q . Nesse sentido, a classe de funções descrita pela definição de Riemman-Liouville, deve ser uma função integrável e é mais ampla do que a definida por Grëunwald e Letnikov, onde a função deve ser $m + 1$ continuamente diferenciada. Entretanto, para uma função da classe Grëunwald - Letnikov, ambas as definições são equivalentes.

Introduzindo a derivada de primeira ordem, é possível demonstrar a ideia de derivada não integrável. Considerando a derivada de primeira e segunda ordem:

$$\dot{f}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - h)}{h} \quad (2.1)$$

$$\dot{f}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - h)}{h} \quad (2.2)$$

$$\dot{f}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - h) + f(t - 2h)}{h^2}$$

Sendo possível escrever de forma geral para $n - th$:

$$f^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

De forma análoga a expansão de Newton:

$$(x + y)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k y^{r-k} \quad (2.4)$$

$$f^n(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.5)$$

Definição Grunwald – Letnikov:

$$\frac{d^q f}{dt^q} \equiv_L D_t^q f(t) \quad (2.6)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^q} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-\alpha}{h} \right]} (-1)^j \binom{q}{j} f(t - jh) \quad (2.7)$$

onde $q > 0$, os coeficientes binomiais podem ser estendidos para números reais usando a função Euler Gamma:

$$\binom{q}{j} = \frac{q!}{j! (q-j)!} = \frac{(q+1)}{(j+1)(q-j+1)} \quad (2.9)$$

no limite superior da soma temos a parte inteira, enquanto L é o comprimento da memória.

De acordo com o princípio da memória curta que pode ser visto em Podlubny (1999) e Petras (2011), o comprimento da memória do sistema pode ser substancialmente reduzido utilizando um algoritmo numérico para obter resultados confiáveis. Assim, a derivada pode ser escrita como:

$${}_L D_t^q f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^q} \sum_{j=0}^{[N(t)]} (-1)^j \binom{q}{j} f(t - jh) \quad (2.10)$$

onde $N(t) = \left(\frac{t-L}{h}, \frac{L}{h} \right)$. Nesta condição podemos observar que diferente de outros sistemas com memória, neste caso, não precisamos de condições iniciais antes de $t = 0$. Para maior esclarecimento é citado um exemplo um sistema do tipo Duffing com um termo de amortecimento fracionário, é possível escrever da seguinte forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{d^q x}{dt^q} - x + x^3 = \delta \cos(\omega t) \quad (2.11)$$

Esta última equação pode ser decomposta em um conjunto de equações de menor grau, como demonstrado a seguir:

$$\begin{aligned} {}_L D_t^1 x(t) &= y(t) \\ {}_L D_t^q x(t) &= \omega(t) \\ {}_L D_t^1 y(t) &= x(t) + \alpha \omega(t) - x^3(t) + \delta \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

O conjunto de equações pode ser escrito de forma discreta, pela ordem fracionária do algoritmo de Newton-Leipnik como pode ser visto em Petras (2011):

$$x(t_k) = x(t_{k-1}) + y(t_{k-1})h \quad (2.13)$$

$$x(t_k) = \omega(t_{k-1})h^q \sum_{j=1}^{N-1} c_j^{(q)} x(t_{k-j}) \quad (2.14)$$

$$y(t_k) = y(t_{k-1}) + [\alpha \omega(t_{k-1}) - x^3(t_{k-1}) + \delta \cos(\omega(t_{k-1}))]h \quad (2.15)$$

onde h é o passo de integração e os coeficientes $c_j^{(q)}$ satisfazem as seguintes relações:

$$c_0^{(q)} = 1 \text{ e } c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)} \quad (2.16)$$

A seguir são apresentados os métodos de controle não linear empregados nesta tese, tem a função de regular e estabilizar o comportamento dos sistemas dinâmicos MEMS aqui estudados.

3. CONTROLE NÃO LINEAR

Neste capítulo serão apresentadas as técnicas de controle que foram aplicadas neste trabalho aos sistemas com ordem inteira e de ordem fracionária.

3.1 Controle Ótimo Linear Realimentado

O controle realimentado tem a função de regular e estabilizar o comportamento de sistemas dinâmicos, onde, o sinal de controle é uma função da diferença dos valores atuais e valores desejados das variáveis de estado do sistema (Tusset, 2008).

Considera – se um sistema não linear controlável (Kailath, 1980):

$$\dot{z} = A(t)z + G(z, \tilde{x}) + Bu_r \quad (3.1)$$

Segundo (Tusset et al. 2012), se existem as matrizes $Q(t)$ e $R(t)$, definidas positivas, sendo $Q(t)$ simétrica, tais que a matriz

$$\tilde{Q} = Q - G^T(x, \tilde{x})P - PG(x, \tilde{x}) \quad (3.2)$$

seja definida positiva com matriz G , então o controle u é ótimo e transfere o sistemas não linear de qualquer estado inicial ao estado final:

$$e(\infty) = 0 \quad (3.3)$$

Minimizando o funcional:

$$J = \int_0^\infty (e^T \tilde{Q} e + u^T R u) dt \quad (3.4)$$

O controle u pode ser encontrado resolvendo a equação:

$$u = -R^{-1}B^T P e = -K e \quad (3.5)$$

Sendo a matriz P simétrica, e pode ser encontrada da equação algébrica de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.6)$$

3.2 Controle Utilizando as Equações de Ricatti Dependentes do Estado

O método das equações de Ricatti dependentes de estado SDRE aborda sistemas não lineares como sistemas lineares. Além disso, os resultados das simulações mostram que a abordagem SDRE tem características semelhantes à robustez do regulador linear quadrático LQR. É apresentada a técnica do regulador linear quadrático LQR de forma resumida, visto que este é a base para a abordagem SDRE. O LQR pode ser aplicado a sistemas lineares da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t)\end{aligned}\tag{3.7}$$

Onde A , B e C são matrizes em função do tempo, e $x(t)$ representa o estado do sistema.

Uma propriedade exclusiva deste controlador ideal é que a lei de controle tem a forma de estado *feedback*, isto é, u depende apenas dos estados, sendo assim a abordagem SDRE pode ser considerada como uma extensão do LQR, uma vez que este produz um controlador sub ótimo para sistemas não lineares.

Em vez de utilizar um modelo linear, o SDRE começa com um modelo de entrada de forma não linear:

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u\tag{3.8}$$

Com a finalidade de minimizar o funcional de custo:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T Q(x)x + u^T R(x)u dt\tag{3.9}$$

Onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f(x) \in C^k$, $g \in C^k$, $Q(x) \in C^k$, $R(x) \in C^k$, $k \geq 1$, $Q(x) \geq 0$, e $R(x) > 0$ para todo x . Assumindo que $f(0) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo x . O problema agora pode ser formulado como um problema para minimizar o funcional de custo da equação.

$$\begin{aligned}\min_u \frac{1}{2} \int_0^\infty x^T Q(x)x + u^T R(x)u dt \\ \text{sujeito a } \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ x(0) = x_0\end{aligned}\tag{3.10}$$

A solução para este problema é equivalente a resolver uma equação de Hamilton-Jacobi. No entanto, como resolver a equação de Hamilton-Jacobi é muito difícil, esta é aproximada usando o método da equação de Riccati dependente do estado. Tornando assim, o problema viável, embora possa levar a um controlador de qualidade inferior.

A técnica de controle neste problema, como para o LQR, é também uma técnica de controle por realimentação de estados, que depende da solução para a equação de Riccati dependente do estado. Ao utilizar a parametrização direta para transformar a dinâmica não linear do estado em matrizes de coeficientes dependentes do estado, obtém-se:

$$\dot{x}(t) = A(x)x + B(x)u \quad (3.11)$$

Onde $f(x) = A(x)x$ e $B(x) = g(x)$. Em geral, $A(x)$ é única somente para um x escalar. Considerando um exemplo ilustrativo, em um caso multivariável $f(x) = [x_2, x_1^2]^T$. A parametrização óbvia para os coeficientes dependentes de estado (SDC) é:

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

É possível realizar um número infinito de parametrizações para os coeficientes dependentes de estados. Sendo possível comprovar este fato desde que existam ao menos duas parametrizações para todo $0 \leq \alpha \leq 1$, satisfazendo:

$$\alpha A_1(x)x + (1 - \alpha)A_2(x)x = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x) = f(x) \quad (3.13)$$

Um importante fator na escolha das parametrizações a serem feitas é não violar a controlabilidade do sistema.

O controle de realimentação de estados não linear é obtido de:

$$u_r = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x) = -K(x)x \quad (3.14)$$

onde: $P(x)$ é a solução algébrica da Equação de Riccati dependente do Estado:

$$A^T(x)P(x) + P(x)A(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) + Q(x) = 0 \quad (3.15)$$

Nos casos em que não exista a disponibilidade

Nos casos em que não existe a disponibilidade de todos os estados, deve-se projetar um observador para estimar os estados que não são avaliados. Em princípio, uma dupla para o controlador SDRE ou outros observadores não lineares.

É importante salientar que a existência do controle ideal para uma parametrização particular do sistema não é garantida. Além disso, é possível que haja um número infinito de parametrização do sistema, sendo então a escolha da parametrização do sistema muito importante. O outro

fator que pode determinar a existência de uma solução para a equação de Riccati é a seleção das matrizes Q e R com base na equação de Riccati (3.15).

4. SISTEMAS MICRO ELETROMECHANICAL MEMS

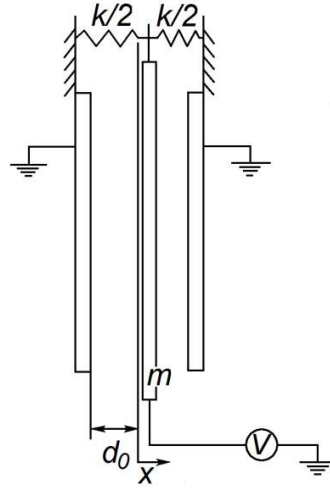
Neste capítulo são apresentados os modelos matemáticos dos sistemas micro eletromecânicos estudados nesta tese. O primeiro modelo trata – se de um sistema MEMS do tipo *comb drive* proposto inicialmente por Moon (1998), sendo que este também foi objeto de estudo em Tusset et al. 2012. O segundo modelo aqui estudado atua como um ressonador micro *cantilever*, este foi proposto inicialmente por Jazar (2004).

4.1 Modelo Matemático do Sistema MEMS Modelo 1

O sistema micro eletromecânico representa um dispositivo do tipo *comb drive*. O sistema físico representado pela Fig. 3, pode ser considerado como um conjunto de micro vigas (Moon, 1998). Este trabalho considerou efeitos de ordem fracionada para analisar o comportamento caótico do MEMS. O sistema dinâmico do modelo 1 é composto por duas placas fixas e uma placa móvel entre elas, a qual é aplicada uma tensão $V(t)$ que é composta por uma tensão de polarização (DC) V_p e uma tensão alternada (AC) $V_i \sin(\omega t)$. A tensão DC aplica uma força eletrostática na viga e geralmente muda a posição de equilíbrio. Micro vigas tem uma ampla gama de aplicações, devido à geometria simples, de fácil produção, durabilidade e área compacta do movimento.

As placas têm as funções de fornecer eletrodos para formar um capacitor armazenando energia elétrica, e fornecer elasticidade ou rigidez mecânica.

Figura 3 – Sistema micro eletromecânico.



Fonte: Tusset, 2012.

A equação governante do movimento das placas é dada por:

$$m\ddot{x} = -F_k - F_c + F_e \quad (4.1)$$

onde, F_k é a força conservativa da mola, F_c amortecimento termo elástico e F_e a força elétrica.

A força elétrica entre a carga positiva no movimento da placa central e a carga negativa nas placas laterais, é dada por:

$$F_e = \frac{\partial W}{\partial x} \quad (4.2)$$

onde W^* é a quantidade de energia elétrica armazenada em um capacitor é dada por:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (4.3)$$

Sendo V a tensão elétrica e C a capacitância. A capacitância pode ser obtida de:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (4.4)$$

onde, ϵ_0 é a permissividade no vácuo e d é a distância entre as placas, e A a área da placa.

Substituindo (4.4) em (4.3):

$$W = \frac{\epsilon_0 A}{2d} V^2 \quad (4.5)$$

Verifica-se na Figura 3 que a distância d entre as placas fixas e a móvel depende da posição de x e de d_0 este representa a distância inicial entre as placas. Considerando que as placas fixas tenham as mesmas características, a quantidade de energia elétrica total armazenada no sistema pode ser obtida de:

$$W^* = \frac{\varepsilon_0}{2} V^2 A \left(\frac{1}{d_0 - x} \right) + \frac{\varepsilon_0}{2} V^2 A \left(\frac{1}{d_0 + x} \right) = \varepsilon_0 A V^2 \left(\frac{d_0}{d_0^2 - x^2} \right) \quad (4.6)$$

onde ε_0 é a permissividade do vácuo, A é a área da placa e $V = (V_p + V_i \sin(\omega t))$. A força elétrica F_e é uma função não linear do deslocamento em x e uma função quadrática da tensão:

$$F_e = \frac{\partial W^*}{\partial x} = 2\varepsilon_0 d_0 A V^2 \frac{x}{(d_0^2 - x^2)^2} \quad (4.7)$$

A rigidez da mola também é um parâmetro que pode ser afetado, por fenômenos termo elástico e não linearidades, considerando estas variações a força conservativa da mola F_k pode ser representada por:

$$F_k = k_1 x + k_3 x^3 \quad (4.8)$$

Em sistemas MEMS tem se considerado um amortecimento termo elástico como uma possível fonte dominante de amortecimento intrínseco. Para o modelo estudado o amortecimento termo elástico é resultado do fluxo irreversível de calor gerado pela oscilação da massa m gerada pela placa móvel, conforme a posição de x .

Esta variação na temperatura provoca um gradiente térmico no interior do material da estrutura, que se ajusta para permitir um equilíbrio térmico. No entanto, a energia utilizada neste ajuste não pode ser restaurada, mesmo com a estrutura retornando ao seu estado original (Jazar, 2006).

Considerando que o amortecimento termo elástico seja uma função de $\dot{x}$, a força de dissipação F_c pode ser obtida de:

$$F_c = c\dot{x} \quad (4.9)$$

Substituindo (4.7), (4.8) e (4.9) em (4.1) obtêm-se a equação do movimento:

$$m\ddot{x} + k_1 x + k_3 x^3 + c\dot{x} = 2\varepsilon_0 d_0 A V^2 \frac{x}{(d_0^2 - x^2)^2} \quad (4.10)$$

onde:

$$V = (V_p + V_i \sin(\omega t)) \quad (4.11)$$

Considerando $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ e definindo novas variáveis $T = \omega_0 t, u = x/x_0$. O sistema pode ser escrito de forma adimensional.

$$\ddot{u} + b\dot{u} + a_1 u + a_3 u^3 = \beta V^2 \frac{u}{(d^2 - u^2)^2} \quad (4.12)$$

Considerando as seguintes substituições:

$b = (c/m\omega_0), \alpha_1 = (k_1/m\omega_0^2), \alpha_3 = (k_3 x_0^2/m\omega_0^2), \beta = (2\varepsilon_0 d_0 A/m\omega_0^2 x_0^4), w = \omega/\omega_0, d = d_0/x_0$.

Reescrevendo a equação (4.12), em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_1 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - b x_2 + \beta V^2 \frac{x_1}{(d^2 - x_1^2)^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

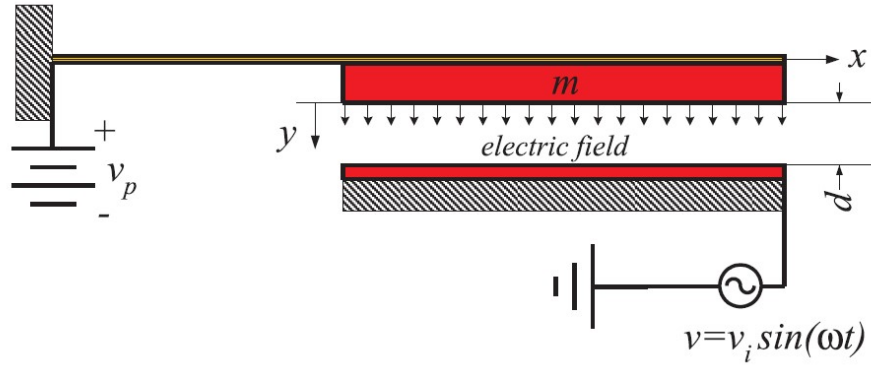
4.2 Modelo Matemático do Sistema Mems Modelo 2

O ressonador micro *cantilever* é acionado por meio de uma tensão aplicada, como pode ser visto na figura 4. Na placa fixa do ressonador é aplicada uma tensão de corrente alternada $V_i \sin(\omega t)$, onde V_i corresponde a amplitude e ω corresponde a frequência. A outra placa é móvel e tem uma massa m , à esta placa é aplicada a tensão em corrente contínua aqui chamada de V_p , o suporte da placa é considerado como uma mola não linear em paralelo a um amortecedor. A distância entre as placas d é medida quando nenhuma tensão é aplicada e a frequência é zero.

As placas têm as funções de fornecer eletrodos para formar um capacitor armazenando energia elétrica, e fornecer elasticidade ou rigidez mecânica.

Embora a estrutura flexível tenha muitos modos de vibrar, neste trabalho foi considerado o modelo com um grau de liberdade em (y), o movimento lateral da placa móvel de massa (m).

Figura 4 – Ressonador micro *cantilever* MEMS



Fonte: Jazar et. al. 2009.

A equação governante do movimento das placas é dada por:

$$m\ddot{y} = -F_k - F_c + F_e. \quad (4.14)$$

Onde, F_k é a força conservativa da mola, F_c amortecimento termo elástico e F_e a força elétrica.

A força elétrica entre a carga positiva no movimento da placa central e a carga negativa nas placas laterais, é dada por:

$$F_e = \frac{\partial W}{\partial y}. \quad (4.15)$$

Onde W é a quantidade de energia elétrica armazenada em um capacitor é dada por:

$$W = \frac{1}{2} CV^2. \quad (4.16)$$

Sendo V a tensão elétrica e C a capacitância. A capacitância pode ser obtida de:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}. \quad (4.17)$$

Onde, ϵ_0 é a permissividade no vácuo e d é a distância entre as placas, e A a área da placa.

Substituindo (4.16) em (4.17):

$$W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} V^2. \quad (4.18)$$

Verifica-se na figura 4 que a distância d entre as placas fixa e a móvel depende da posição y . A equação do movimento pode ser representada por:

$$m\ddot{y} + k_1 y + k_3 y^3 + c\dot{y} = F. \quad (4.19)$$

Onde a força elétrica F_e é uma função não linear do deslocamento em x e uma função quadrática da tensão é dada por:

$$F_e = \frac{\varepsilon_0 A (v - v_p)^2}{2(d - y)^2} = \frac{\varepsilon_0 A}{2(d - y)^2} \left[v_p^2 + \frac{1}{2} v_i^2 + 2v_p v_i \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega t) \right]. \quad (4.20)$$

O amortecimento é representado por c , e afeta fortemente a dinâmica, controle e performance.

A rigidez da mola também é um parâmetro que pode ser afetado, por fenômenos termo elástico e não linearidades, considerando estas variações a Força conservativa da mola F_k pode ser representada por:

$$F_k = k_1 y + k_3 y^3. \quad (4.21)$$

Em sistemas MEMS tem se considerado um amortecimento termo elástico como uma possível fonte dominante de amortecimento intrínseco, o amortecimento é representado por c e afeta fortemente a dinâmica, controle e performance. Para o modelo estudado o amortecimento termo elástico é resultado do fluxo irreversível de calor gerado pela oscilação da massa m conforme a posição de y .

Esta variação na temperatura provoca um gradiente térmico no interior do material da estrutura, que se ajusta para permitir um equilíbrio térmico. No entanto, a energia utilizada neste ajuste não pode ser restaurada, mesmo com a estrutura retornando ao seu estado original (Jazar, 2006).

Temos então a seguinte equação do movimento:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_1 y + k_3 y^3 = \frac{\varepsilon_0 A}{2(d - y)^2} \left[v_p^2 + \frac{1}{2} v_i^2 + 2v_p v_i \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega t) \right]. \quad (4.22)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m}, t = \frac{T}{\omega_0}, y = y_0 u, \dot{x} = \omega_0 y_0 \dot{u}, \ddot{x} = \omega_0^2 y_0 \ddot{u} \quad (4.23)$$

Considerando as seguintes substituições:

$$b = (c/m\omega_0), \alpha_1 = (k_1/m\omega_0^2), \alpha_3 = (k_3 y_0^2/m\omega_0^2), \beta = (\varepsilon_0 d_0 A/m\omega_0^2 y_0^4), w = \omega/\omega_0, d = d_0/y_0.$$

É possível reescrever a equação (4.22), em variáveis de estados:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\alpha_1 y_1 - \alpha_3 y_1^3 - b y_2 + \beta V^2 \frac{1}{2(d - y_1)^2}\end{aligned}\tag{4.24}$$

5. COMPORTAMENTO DINÂMICO DOS MODELOS MEMS

Neste capítulo são apresentadas as análises dinâmicas para os sistemas MEMS modelo 1 e modelo 2 apresentados no capítulo 4, ambas análises são feitas para ordem inteira e ordem fracionária, com o auxílio do software MATLAB® por meio de integrações numéricas, é possível demonstrar o comportamento não linear de ambos os sistemas.

5.1 Análise Dinâmica do Sistema Mems Modelo 1

Por meio de integrações numéricas realizadas com o auxílio do software MATLAB®, é possível demonstrar o comportamento não linear apresentado pelo sistema *comb drive*. Nas próximas seções apresentamos os resultados das análises realizadas para o teste 0-1, *Pull – In* e demais simulações que demonstrem o comportamento caótico do sistema.

Os valores dos parâmetros utilizados nas investigações numéricas atuais foram tirados de (Tusset et al. 2012) são os seguintes: $\alpha = 1, \alpha_3 = 0.4, \beta = 69141.6, b = 0.5, d = 25, \omega = 6.28, V_p = 2, V_i = 10, x_{1_0} = 1$ e $x_{2_0} = 1.5$. O histórico de tempo do deslocamento e o retrato de fase podem ser observados na Fig. 5 e Fig. 6.

Figura 5 – Histórico de deslocamento no tempo para o modelo 1.

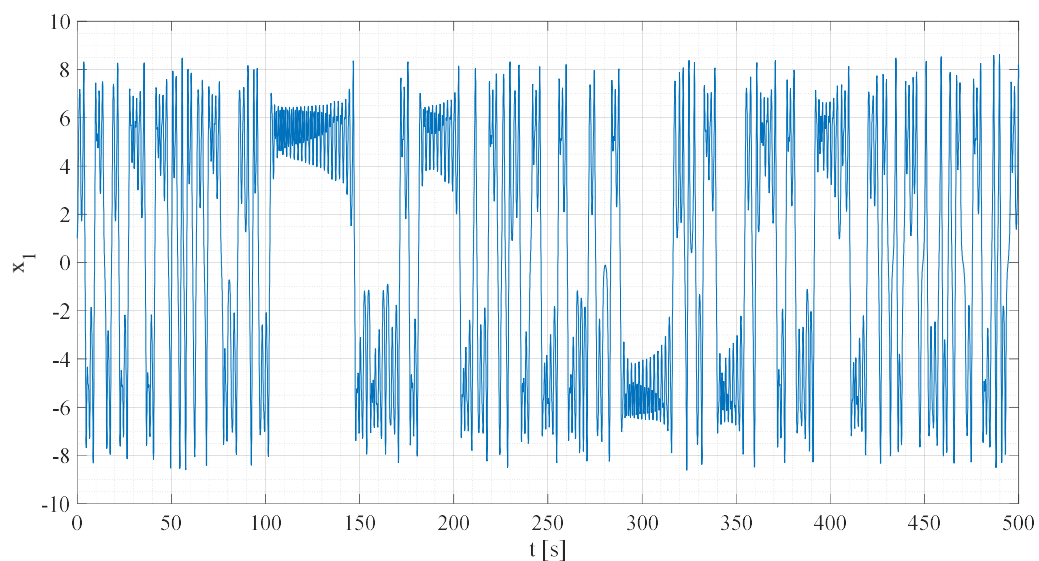
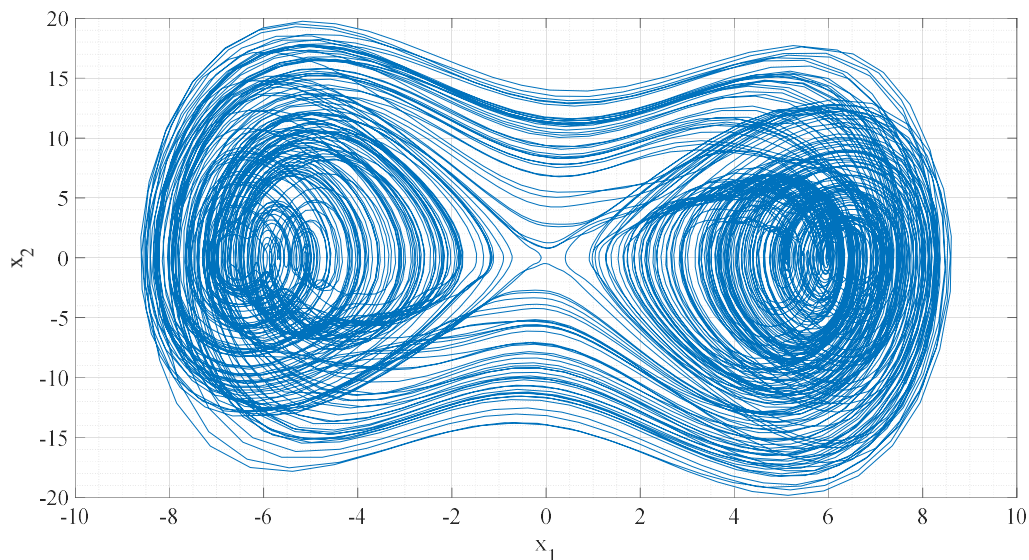
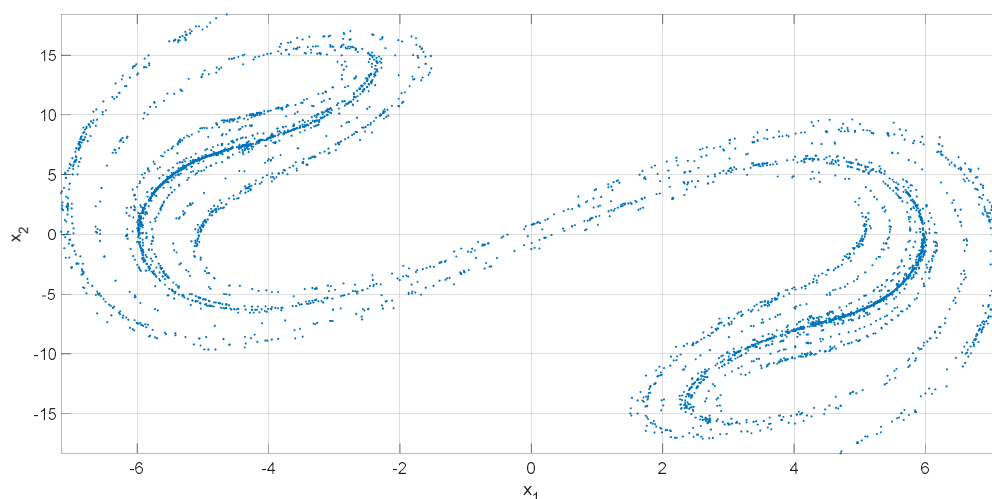


Figura 6 – Retrato de fase para o modelo 1.



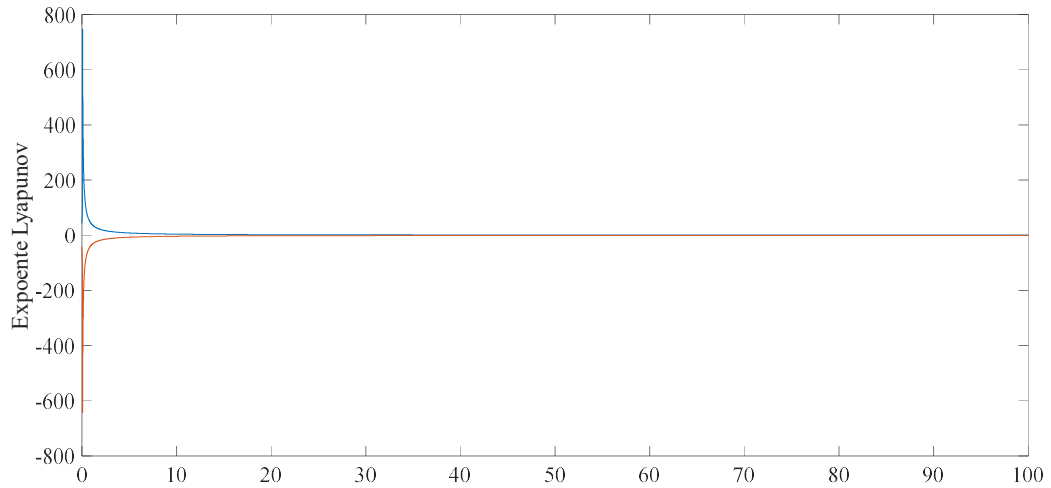
Uma ferramenta importante na compreensão do comportamento de sistemas dinâmicos é o mapa de Poincaré, onde planos ou seções são usados para desenhar um mapa estroboscópico do fluxo. Poincaré percebeu que as curvas simples representam movimento com soluções possivelmente analíticas, porém sistemas com muitas curvas aparentemente irregulares representam um sistema com comportamento caótico. Sendo possível observar, que apenas para sistemas dissipativos há um conjunto de pontos atratores em que o movimento converge. Em sistemas com comportamento caótico, trajetórias próximas do espaço de fase estão continuamente divergindo, seguindo o atrator. Na figura 7 é possível observar este efeito, sendo possível comprovar a existência de um comportamento caótico.

Figura 7 – Mapa de Poincaré para o modelo 1.



Outra importante ferramenta muito empregada para a previsão de caos, são os expoentes de Lyapunov, pode – se dizer que estes são uma medida da previsibilidade e sensibilidade de um sistema a mudanças em suas condições iniciais. O expoente de Lyapunov é um dos principais critérios da existência de caos e representa a taxa de crescimento ou declínio de pequenas perturbações ao longo de cada eixo principal do sistema de espaço de fase. Em um sistema que apresente um ou mais expoentes de Lyapunov com valores positivos tem um comportamento não linear caótico, na figura 8 é possível observar que para o modelo 1, temos um expoente positivo, comprovando assim a existência de caos para este modelo.

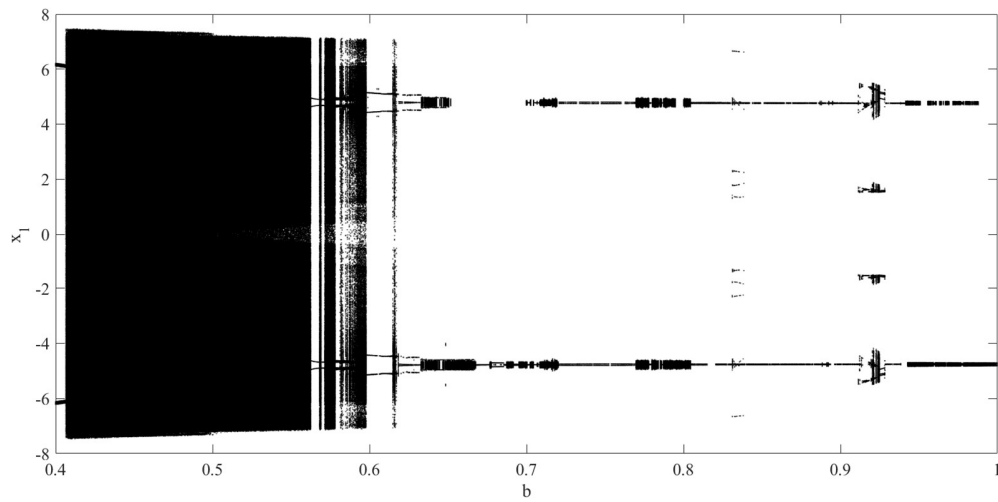
Figura 8 – Expoente de Lyapunov para o modelo 1.



5.1.1 Efeito do Amortecimento no Modelo 1

A análise numérica para o sistema MEMS mostra que o efeito de amortecimento pode ser muito significativo. A Fig. 8 mostra o diagrama de bifurcação, onde pode ser observado que alterando o parâmetro de amortecimento b , considerando $b \in [0.2, 1]$. Como pode ser visto na Fig. 8, o sistema apresenta comportamento caótico para $b \leq 0.4$ e para a maioria dos valores de $b \geq 0.6$ o sistema apresenta o comportamento caótico ou quase periódico.

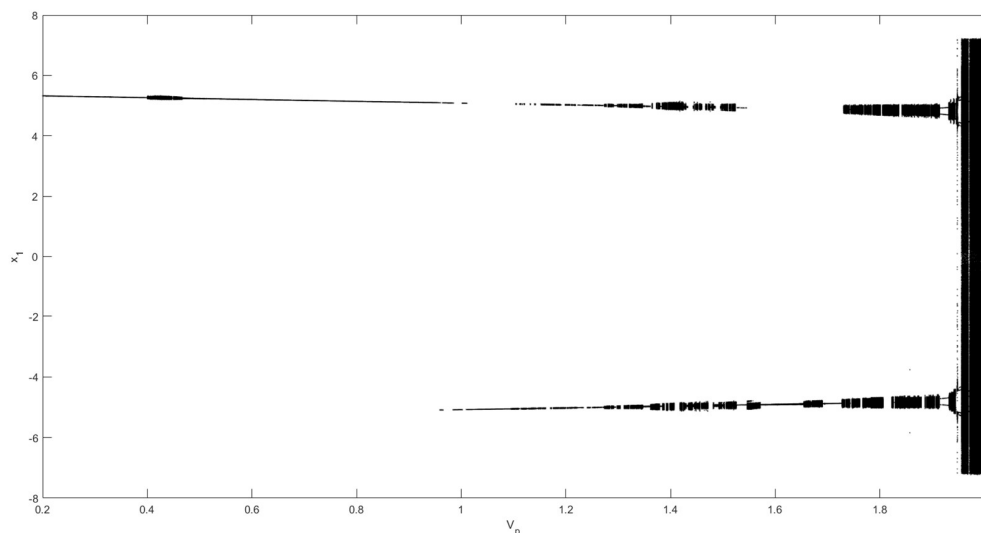
Figura 9 – Diagrama de bifurcação para o coeficiente de amortecimento.



5.1.2 Influência do Termo da Tensão Contínua

Analisando as variações deste parâmetro do termo da tensão contínua V_p , considerando $V_p \in [0.2, 2]$. É possível observar na Fig. 10 que o parâmetro V_p apresenta para uma determinada faixa de valores um comportamento periódico, passando a um comportamento caótico ou quase periódico no período entre $V_p \in [1, 1.9]$.

Figura 10 – Diagrama de bifurcação para V_p .



5.1.3 Fenômeno *Pull – In*

A tensão de polarização é a tensão aplicada a um capacitor em condições normais de trabalho, qualquer valor que exceda essa tensão causará a diminuição do espaço de ar entre os dois eletrodos do capacitor, forçando o eletrodo móvel que geralmente funciona como um diafragma mais próximo da placa de aterramento que é fixa. A tensão é alta o suficiente para puxar a placa móvel a uma distância igual a um terço da espessura do espaço de ar original é chamada de tensão *Pull – In* que pode ser chamada de tensão de tração em português. Tal valor de tensão é conhecido por ser o maior parâmetro de tensão aceitável a ser aplicado em um capacitor sem causar danos. Consequentemente, qualquer aumento acima da tensão *Pull – In* é considerado destrutivo e deve ser evitado.

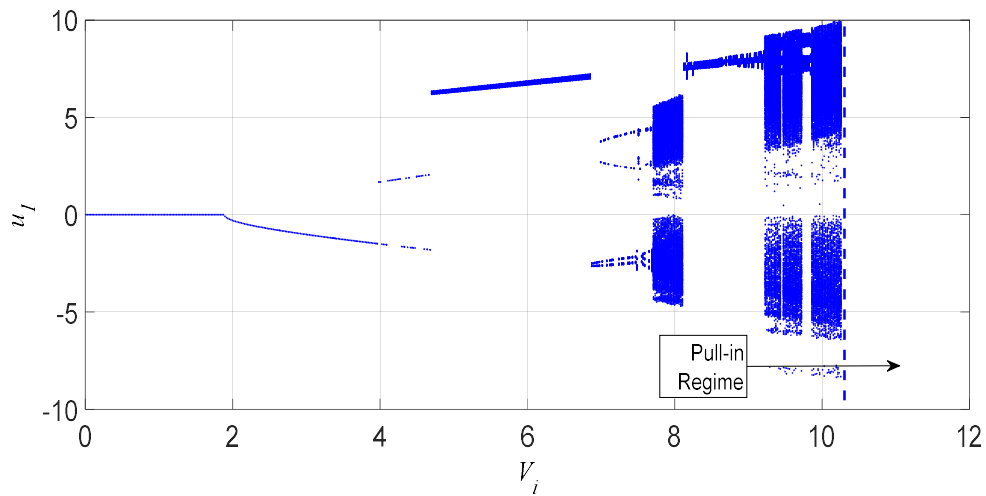
A carga elétrica que atua em uma placa de capacitor é composta por uma tensão de polarização contínua e uma tensão alternada. O componente DC aplica uma força elétrica a uma placa, desviando-a para uma nova posição de equilíbrio, enquanto um componente CA vibra a placa em torno da posição de equilíbrio.

A carga elétrica combinada leva a um aumento contínuo da deflexão da microestrutura e consequentemente, um aumento das forças elétricas em um circuito de com realimentação positiva.

Este comportamento continua até que um contato físico seja feito com o eletrodo estacionário. Esse fenômeno de instabilidade estrutural é conhecido como *Pull-In*.

Analisando a variação do parâmetro da tensão alternada (V_i), considerando que $V_i \in [0,10]$ $V_i \in [0,10]$. Sendo possível observar na figura 10 a região onde ocorre o fenômeno *Pull – In*.

Figura 11 – Bifurcação para o fenômeno Pull – In.



5.2 Análise Dinâmica do Sistema Mems Modelo 1 em Ordem Fracionária

Nesta seção, utilizamos as técnicas de cálculo da derivada fracionária com a finalidade de analisar o comportamento do sistema *comb drive* em ordem fracionária. A equação de movimento para o sistema é descrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^{q_1} u_1}{dT^{q_1}} &= u_2 \\ \frac{d^{q_2} u_2}{dT^{q_2}} &= -\alpha_1 u_1 - \alpha_3 u_1^3 - b u_2 + \beta V^2 \frac{u_1}{(d^2 - u_1^2)^2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Onde, $0 < q_1, q_2 \leq 1$ sua ordem é denotada por $q = (q_1, q_2)$.

Os comportamentos na ordem fracionária são estudados numericamente por retratos históricos de tempo e fase considerando o algoritmo proposto por Tusset et. al. 2012. Também

podemos observar que a variação q_2 influencia o comportamento do sistema caótico. Para verificar qual variação do comportamento caótico é utilizado o teste 0-1.

Na Figura 12, podemos observar os resultados numéricos das simulações, aquelas realizadas, considerando $q_1 = 0.5$ e $q_2 = 0.9$. Na Figura 13, podemos observar os resultados numéricos das simulações, considerando que $q_1 = 0.7$ e $q_2 = 1$. Na Figura 14, podemos observar os resultados considerando que $q_1 = 1$ e $q_2 = 0.7$.

Figura 12 – Plano fase considerando $q_1 = 0.5$ e $q_2 = 0.9$.

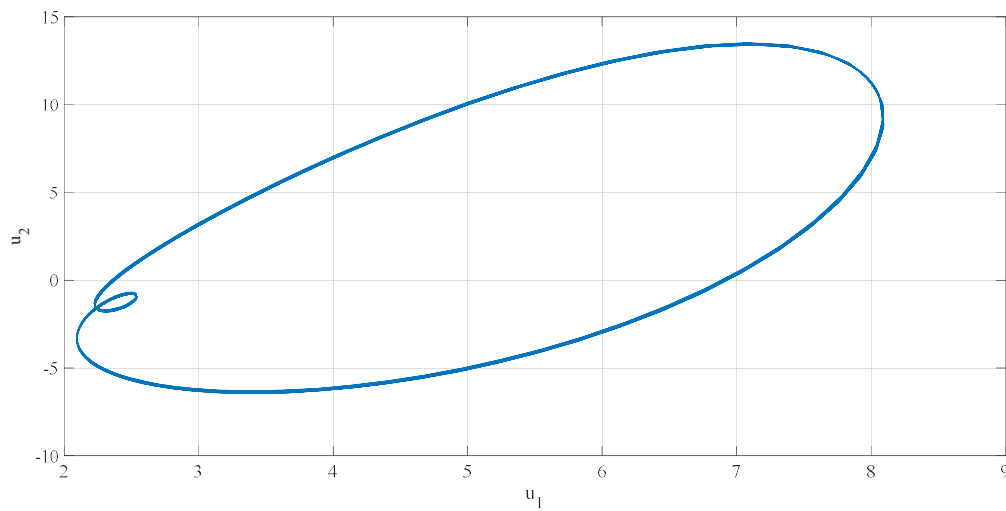


Figura 14 – Plano fase considerando $q1 = 0.7$ e $q2 = 1$

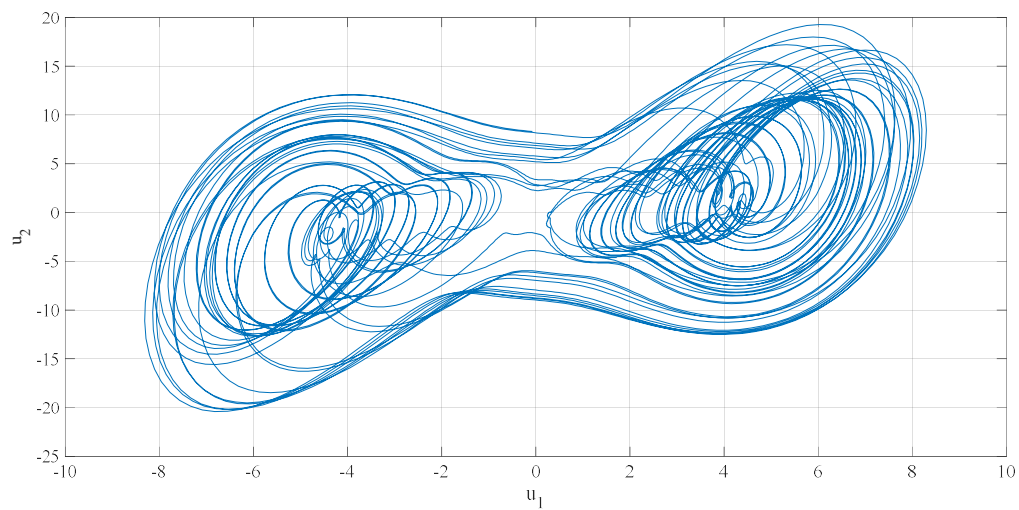
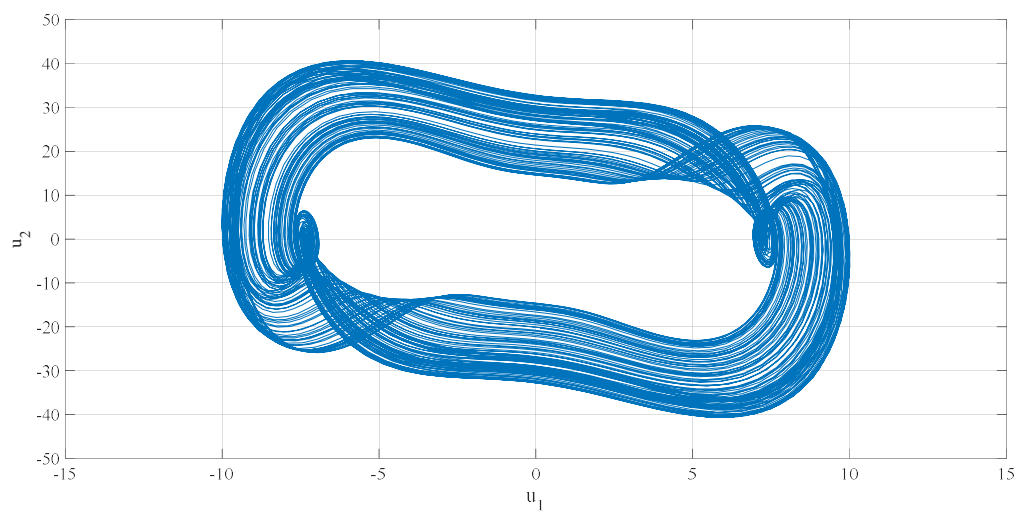


Figura 15 – Plano fase considerando $q1 = 1$ e $q2 = 0.9$.



5.2.1 Teste 0 – 1 para o modelo 1

O teste 0-1 pode ser aplicado a todo tipo de sistemas com a finalidade de identificar uma possível dinâmica caótica, diversas pesquisas de identificação de caos foram realizadas utilizando este método (Gottwald e Melbourne, 2004), (Gottwald e Melbourne, 2005). Este teste usa os dados da série temporal para caracterizar a dinâmica do sistema, analisando suas propriedades espectrais e estatísticas com base nas propriedades assintóticas de um movimento browniano. Diferente de outras abordagens tradicionais que examinam a dimensão do espaço e exigem a descrição apropriada por um número de coordenadas de espaço de fase, ela é baseada nas propriedades estatísticas de uma única coordenada (Bernardini e Litak, 2015). A dinâmica do sistema examinado é então quantificada por um único parâmetro medido ou calculado no domínio do tempo.

Basicamente, o teste 0-1 consiste em estimar um único parâmetro K , se o valor K for próximo de 0 pode – se afirmar que o sistema tem comportamento periódico para esta faixa de parâmetros, por outro lado, se o valor K for próximo de 1 o sistema apresenta comportamento caótico. O teste considera uma variável de sistema x_j , onde duas novas coordenadas (p, q) são definidas da seguinte forma:

$$p(n, \bar{c}) = \sum_{j=0}^n x(j) \cos(j\bar{c}) \quad (5.2)$$

$$q(n, \bar{c}) = \sum_{j=0}^n x(j) \sin(j\bar{c}) \quad (5.3)$$

Onde , $\bar{c} \in (0, \pi)$ é uma constante. O deslocamento quadrático médio das novas variáveis $p(n, \bar{c})$ e $q(n, \bar{c})$ é dado por:

$$M(n, c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\left(p(j+n, \bar{c}) - p(j, \bar{c}) \right)^2 + \left(q(j+n, \bar{c}) - q(j, \bar{c}) \right)^2 \right] \quad (5.4)$$

onde $n = 1, 2, \dots, N$, portanto, obtemos o parâmetro K no limite de um longo intervalo de tempo.

$$K = \frac{\text{cov}(Y, M(\bar{c}))}{\sqrt{\text{var}(Y) \text{var}(M(\bar{c}))}} \quad (5.5)$$

onde vetores $M(\bar{c}) = [M(1, \bar{c}), M(2, \bar{c}), \dots, M(n_{\max} \bar{c})]$ and $Y = 1, 2, \dots, n_{\max}$.

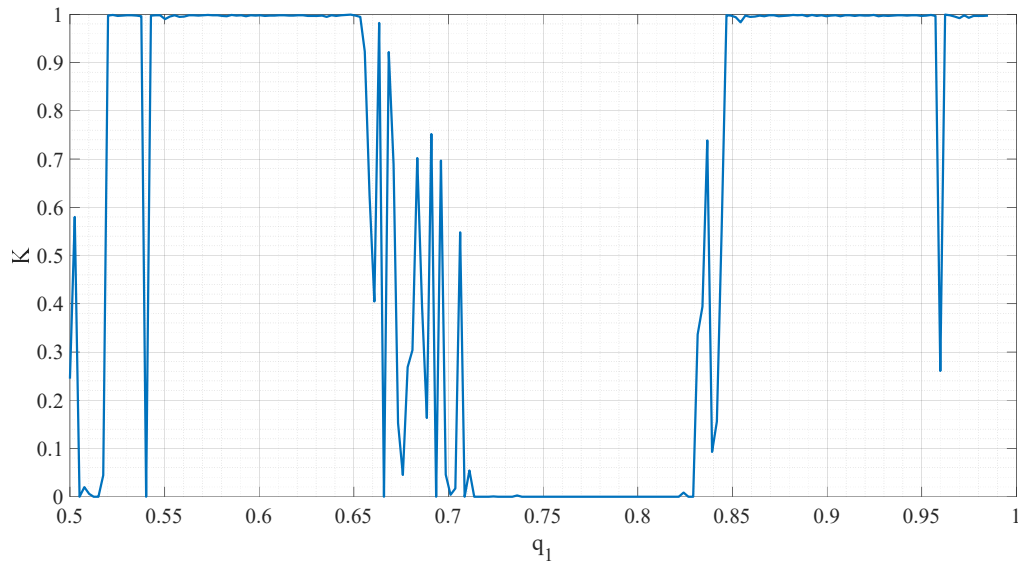
Dados os dois vetores x e y , a covariância $cov(x, y)$ e variância $var(x)$, n_{max} de elementos, são geralmente definidos como:

$$cov(x, y) = \frac{1}{n_{max}} \sum_{n=1}^{n_{max}} (x(n) - \bar{x})(y(n) - \bar{y}) \quad (5.6)$$

Onde $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são a média de $x(n)$ respectivamente. Como resultado final, o valor do parâmetro K é obtido tomando a média de N amostras de valores diferentes do parâmetro $\bar{c} \in (0, \pi)$ na equação 5.4.

O teste 0-1 foi utilizado com sucesso na análise dos regimes caóticos dos osciladores histeréticos de SMA (Bernardini et al., 2013), (Litak et al., 2009) e (Litak et al., 2013). O livro de Skokos et al., 2016 traz um capítulo onde é realizada uma revisão do teste 0 – 1 para a determinação de caos em sistemas dinâmicos, onde é demonstrada a aplicabilidade do teste para séries temporais contaminadas com ruído. Em (Cafgna e Grassi, 2010), (Cao et al., 2015) e (Yuan et al., 2013) são realizadas o teste 0 – 1 é aplicado como ferramenta para predição de caos em sistemas com derivada fracionária.

Figura 16 – Teste 0 – 1 para o modelo 1 em ordem fracionária.



Como pode ser observado na figura 16, o modelo 1 em ordem fracionária apresenta comportamento não linear para uma determinada faixa de parâmetro onde $k = 1$, e para a faixa de parâmetros onde o valor de $k \approx 0$ o sistema tem comportamento periódico.

5.3 Análise Dinâmica do Sistema Mems Modelo 2

Por meio de integrações numéricas realizadas com o auxílio do software MATLAB®, é possível demonstrar o comportamento não linear apresentado pelo sistema MEMS modelo 2.

Os valores dos parâmetros utilizados nas investigações numéricas atuais foram tirados de são os seguintes: $\alpha = 1, \alpha_3 = 0.3, \beta = 53900, b = 0.1, d = 460, \omega = 6.28, V_p = 2, V_i = 10, x_{10} = 1$ e $x_{20} = 1.5$. O histórico de tempo do deslocamento e o retrato de fase podem ser observados na figura 14 e figura 15.

Figura 17 – Histórico de deslocamento no tempo para o modelo 2.

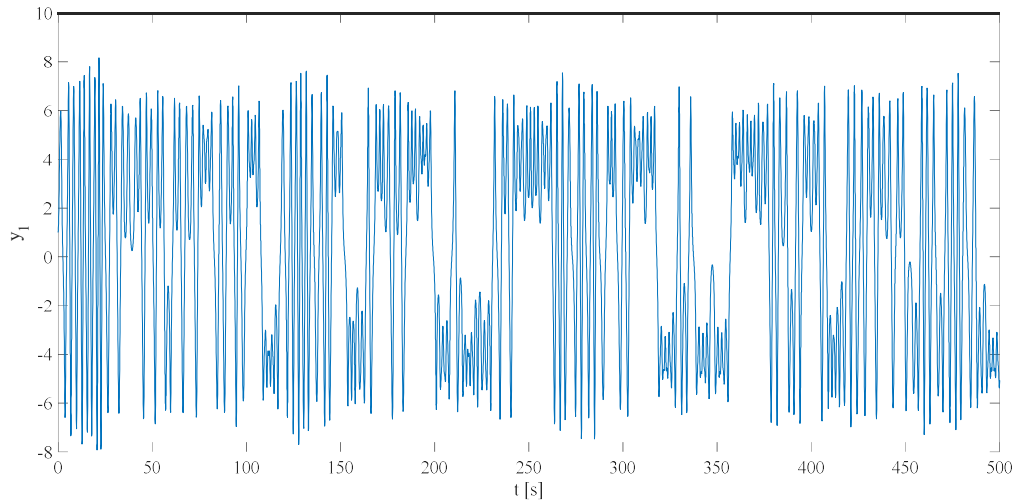
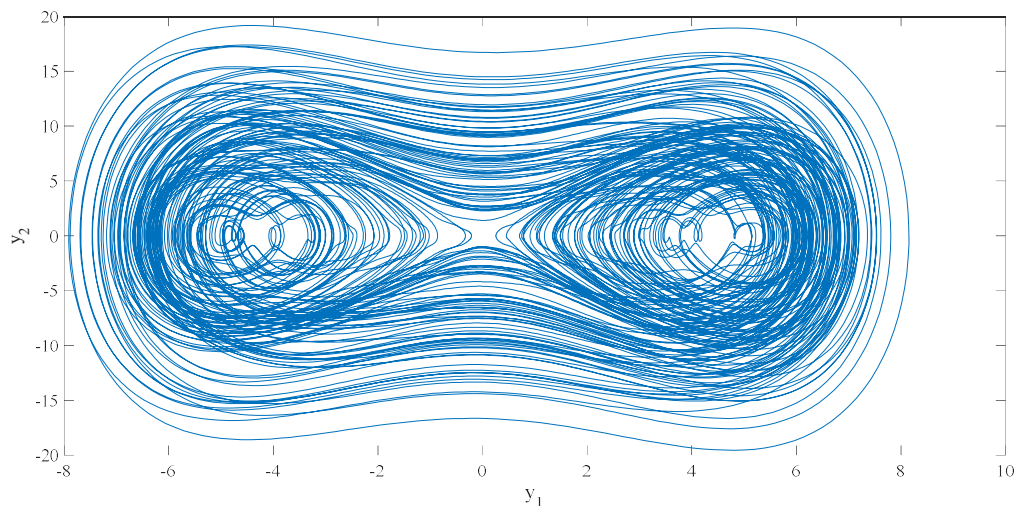
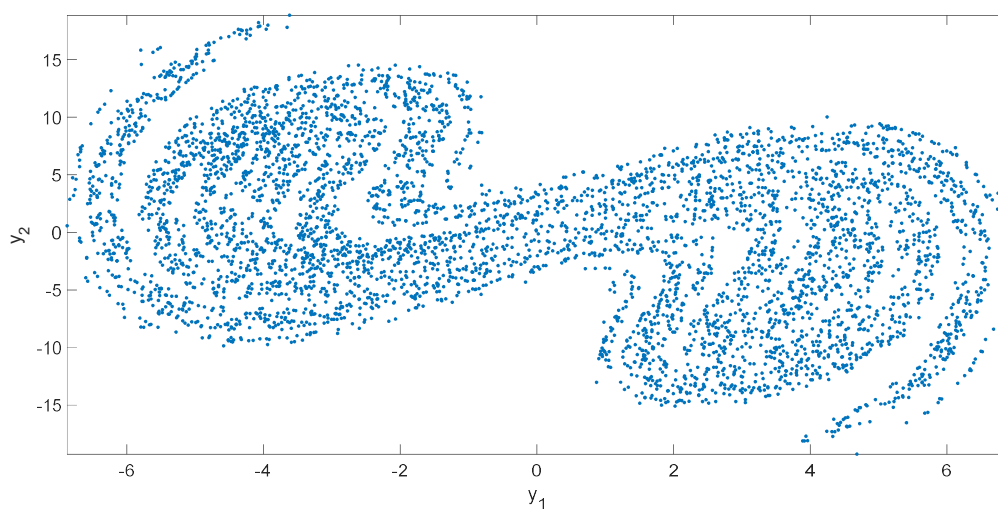


Figura 18 – Plano fase do MEMS modelo 2.



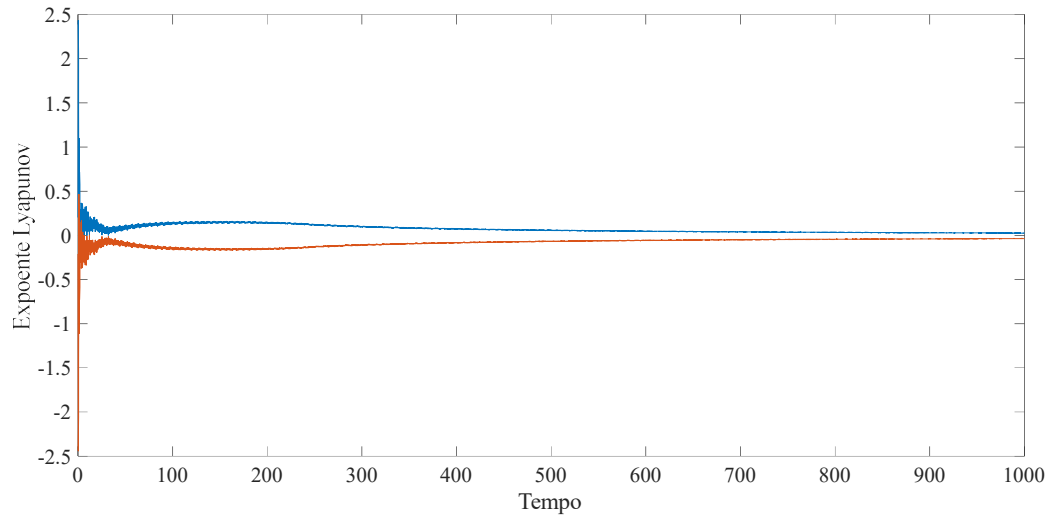
A seguir é aplicado o mapa de Poincaré com a finalidade de comprovar a existência de caos para este modelo, como pode ser observado na figura 16.

Figura 19 – Mapa de Poincaré para o MEMS modelo 2.



Outra importante ferramenta utilizada para identificação de caos é o expoente de Lyapunov, pode – se afirmar que um sistema que apresente um ou mais expoentes de Lyapunov com valores positivos tem um comportamento não linear caótico, na figura 17 é possível observar que para o modelo 2 temos um expoente positivo, comprovando assim a existência de caos para este modelo.

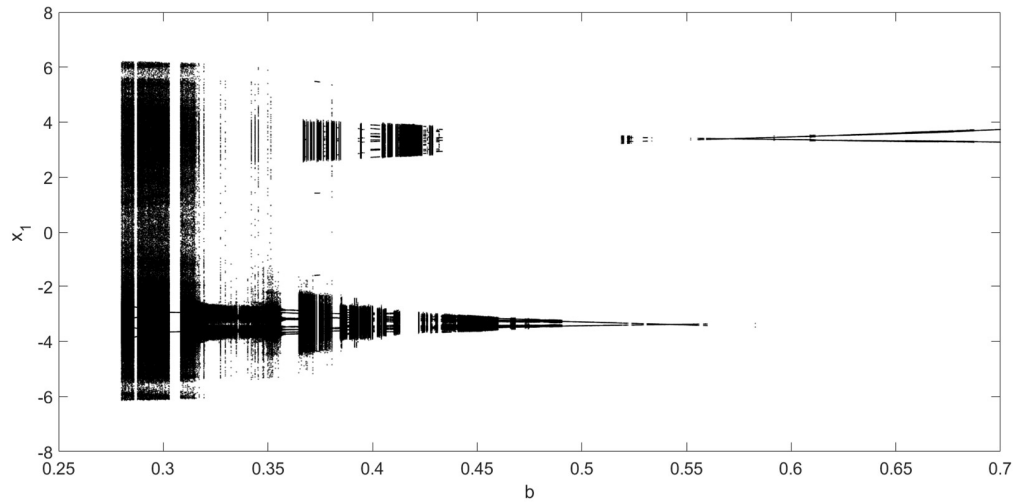
Figura 20 – Expoente de Lyapunov para o modelo 2.



5.3.1 Efeito do Amortecimento no Modelo 2

A análise numérica para o sistema MEMS mostra que o efeito de amortecimento pode ser muito significativo. A Figura 21 mostra o diagrama de bifurcação, onde pode ser observado que alterando o parâmetro de amortecimento b , considerando $b \in [0.25, 0.7]$. Como pode ser visto na Figura 21, o sistema apresenta comportamento caótico para $b > 0.32$ e para a maioria dos valores de $b > 0.3$ o sistema é periódico.

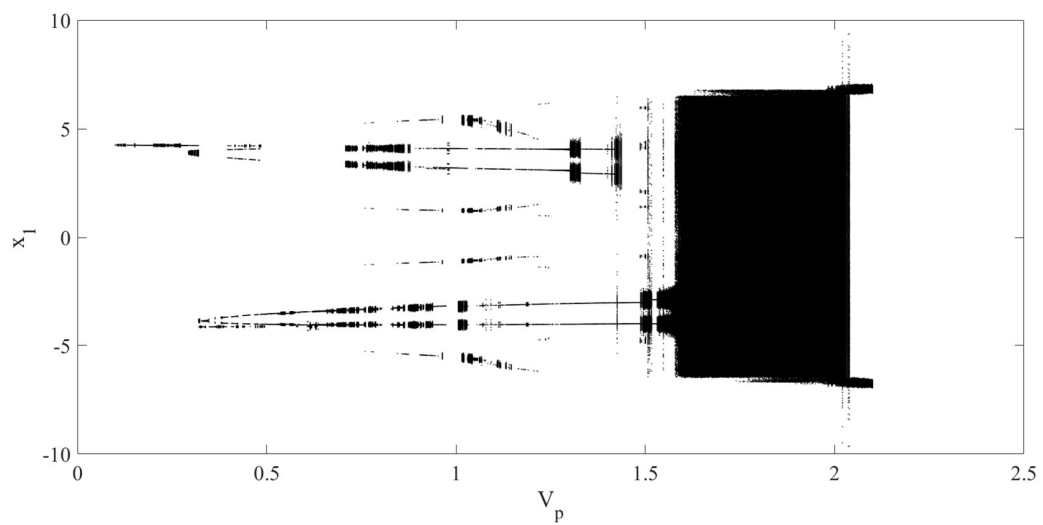
Figura 21 – Diagrama de bifurcação para o MEMS modelo 2.



5.3.2 Influência do Termo da Tensão Contínua para o Modelo 2

Analisando as variações deste parâmetro do termo da tensão contínua V_p , considerando $V_p \in [0.2, 2.5]$. É possível observar na Figura 22 que o parâmetro V_p apresenta para uma determinada faixa de valores um comportamento periódico, assim como apresenta comportamento caótico no período entre $V_p \in [0.2, 1.6]$.

Figura 22 – Diagrama de bifurcação para V_p para o modelo 2.

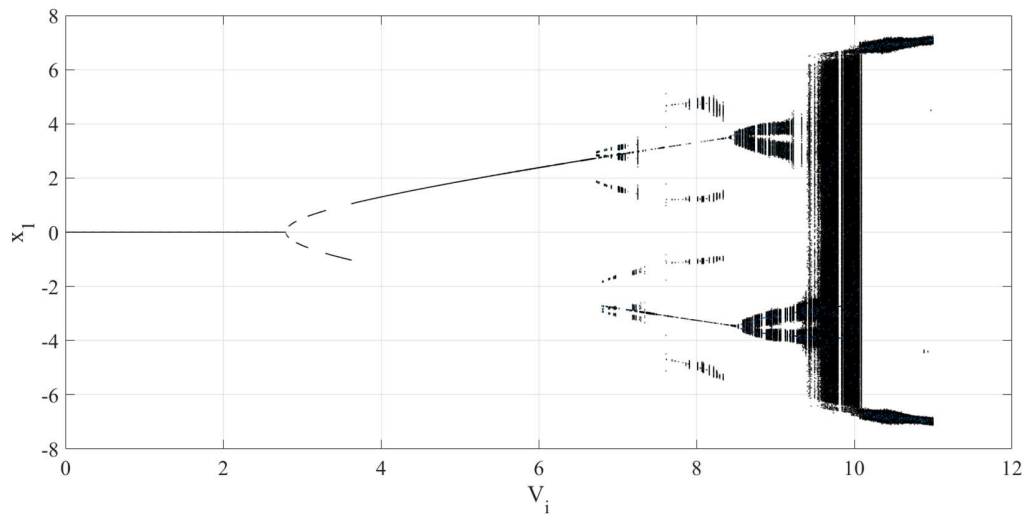


5.3.3 Fenômeno *Pull – In* Para o Modelo 2

Como já foi anteriormente apresentado nesta tese, esse fenômeno de instabilidade estrutural conhecido como *Pull-In*. A carga elétrica combinada leva a um aumento contínuo da deflexão da microestrutura e consequentemente, um aumento das forças elétricas em um circuito de com realimentação positiva. Este comportamento continua até que um contato físico seja feito com o eletrodo estacionário.

Analisando a variação do parâmetro da tensão alternada (V_i), considerando que $V_i \in [0,10]$. Sendo possível observar no diagrama de bifurcação apresentado na figura 23 a região onde ocorre o fenômeno *Pull – In*.

Figura 23 – Bifurcação para o fenômeno *Pull – In* para o modelo 2.



5.4 Análise Dinâmica do Sistema Mems Modelo 2 em Ordem Fracionária

Nesta seção, utilizamos as técnicas de cálculo da derivada fracionária com a finalidade de analisar o comportamento do MEMS modelo2 em ordem fracionária. A equação de movimento para o sistema é descrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^{q_1} u_1}{dT^{q_1}} &= u_2 \\ \frac{d^{q_2} u_2}{dT^{q_2}} &= -\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_1^3 - b u_2 + \beta V^2 \frac{u_1}{2(d - u_1)^2} \end{aligned} \tag{5.7}$$

Onde, $0 < q_1, q_2 \leq 1$ sua ordem é denotada por $q = (q_1, q_2)$.

O comportamento do sistema em ordem fracionária é analisado numericamente por meio de retratos históricos de tempo e fase considerando o algoritmo proposto por Tusset et al. 2012. Também podemos observar que a variação q_2 influencia o comportamento não linear do sistema.

Na figura 24 podemos observar os resultados numéricos das simulações realizadas, considerando $q_1 = 0.8$ e $q_2 = 0.5$. Na figura 25, podemos observar os resultados numéricos das simulações, considerando que $q_1 = 0.7$ e $q_2 = 1$. Na figura 26, podemos observar os resultados considerando que $q_1 = 1$ e $q_2 = 0.9$.

Figura 24 – Plano fase $q_1 = 0.8$ e $q_2 = 0.5$.

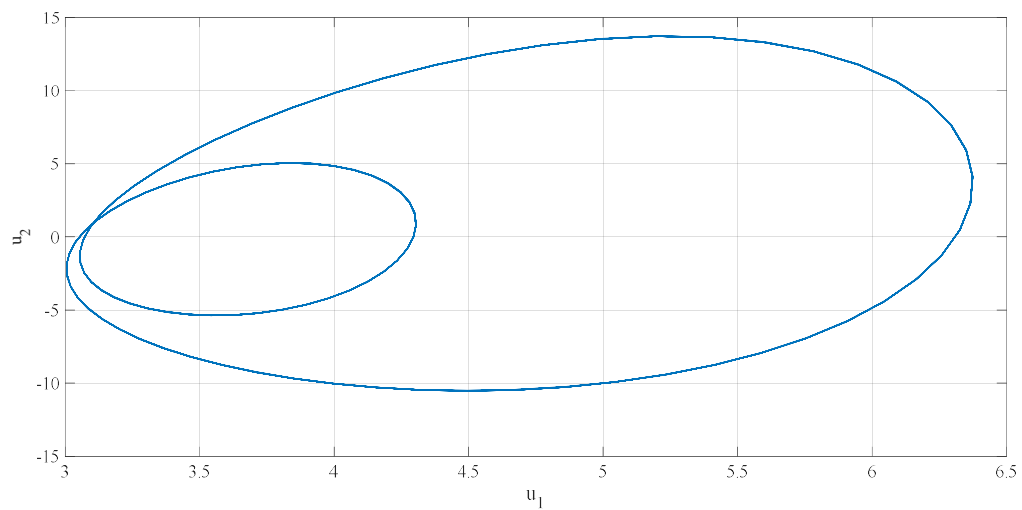


Figura 25 – Plano fase $q_1 = 0.7$ e $q_2 = 1$.

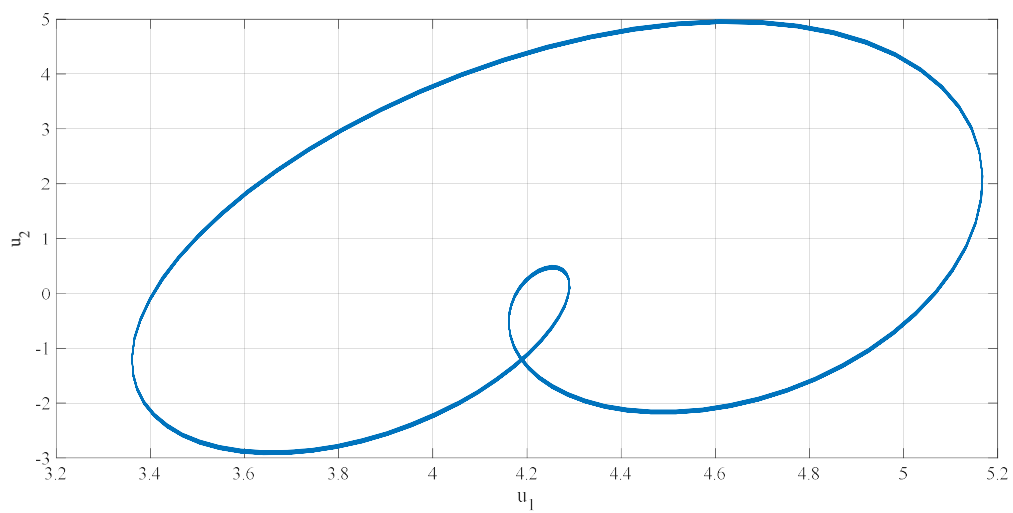
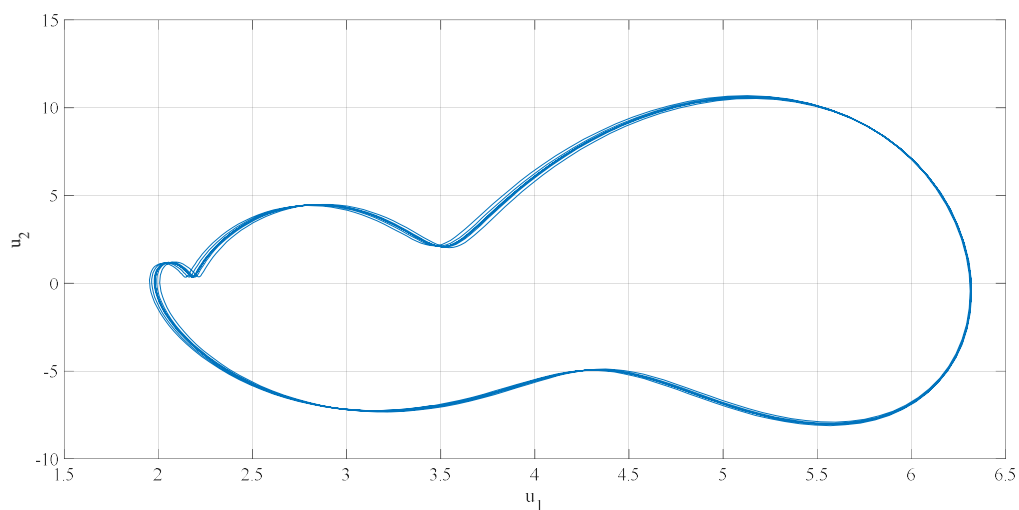


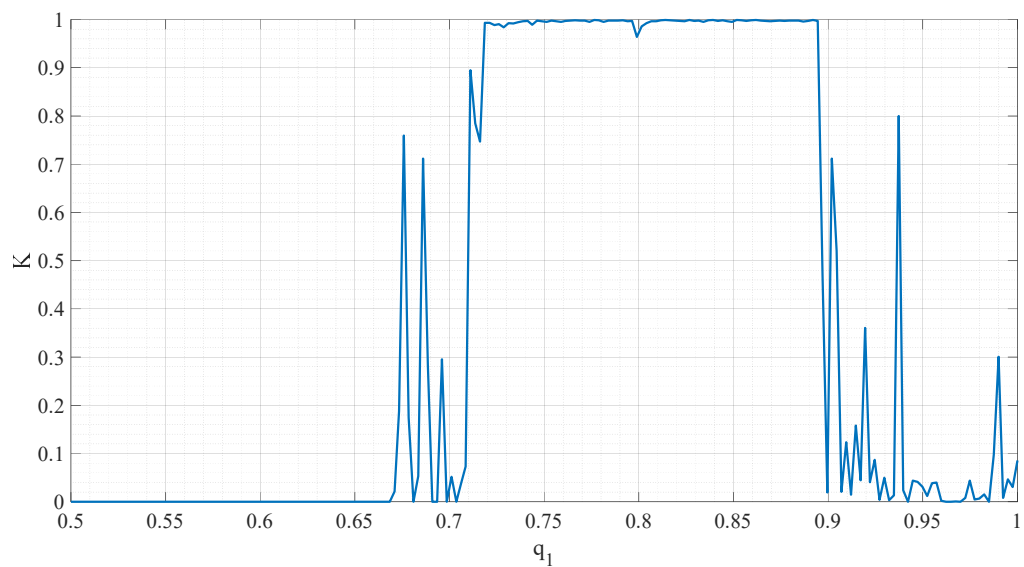
Figura 26 – Plano fase $q1 = 1$ e $q2 = 0.9$.



5.4.1 Teste 0 – 1 para o modelo 2

Como já foi aplicado anteriormente no modelo 1, este será também o método utilizado para determinar a existência de caos para o modelo 2 em ordem fracionária. O teste 0-1 pode ser aplicado a todo tipo de sistemas com a finalidade de identificar uma possível dinâmica caótica. Se o valor K for próximo de 0, o sistema é periódico, por outro lado, se o valor K for próximo de 1, o sistema é caótico. Como pode ser observado na figura 28.

Figura 27 – Teste 0 – 1 para o modelo 2 em ordem fracionária.



Como pode ser observado na figura 28, o modelo 2 em ordem fracionária apresenta comportamento não linear para uma determinada faixa de parâmetro $q_1 \in [0.7, 0.9]$ onde $k = 1$, e para a faixa de parâmetros onde o valor de $k \approx 0$ o sistema tem comportamento periódico.

6. PROJETO DE CONTROLE PARA O SISTEMA MEMS MODELO 1

Neste capítulo é realizada uma comparação entre duas técnicas de controle o controle ótimo linear realimentado OLFC e o controle por meio das equações de Ricatti dependentes do estado para o modelo 1 em ordem inteira e em ordem fracionária, sabe – se que o comportamento não linear com amplitude superior a distância entre as placas pode ocasionar dano a viga móvel deste sistema, com o intuito de garantir um bom funcionamento do sistema o controlador foi projetado.

6.1 Controle Para o Sistema em Ordem Inteira

Conforme demonstrado anteriormente no capítulo 5, o sistema MEMS modelo 1 apresenta comportamento não linear caótico em uma determinada faixa de parâmetros, afim de obter uma trajetória linear desejada, definida pela primeira orbita da FFT para o sistema, foi definida como $9 \cos(\omega t)$ correspondendo a amplitude máxima do deslocamento da placa central do sistema *comb drive* são aplicadas as técnicas de controle a seguir.

6.1.1 Controle Ótimo Linear Realimentado em Ordem Inteira

A técnica de controle OLFC já foi descrita no capítulo 3 e será aqui aplicada ao modelo 1, afim de obter uma orbita periódica de amplitude $9 \cos(\omega t)$.

Considerando a introdução do sinal de controle U no sistema (4.23):

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= -\alpha_1 u_1 - \alpha_3 u_1^3 - b u_2 + \beta V^2 \frac{1}{(d^2 - u_1^2)^2} + U \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde: $U = u_r + \tilde{u}$

Sendo $\tilde{u}$ o controle *feedforward* que mantêm o sistema na trajetória desejada e dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \ddot{u}_2^* + \alpha_1 u_1^* + \alpha_3 u_1^{*3} c \dot{u}_2^* \\ &= \frac{\varepsilon_0 A}{2(d - u_1^*)^2} \left[v_p^2 + \frac{1}{2} v_i^2 + 2v_p v_i \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega t) \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

A matriz A , e a matriz B , são representadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -7.0754 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sendo possível definir:

$$Q = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = [0.0001]$$

Utilizando o comando `lqr` do Matlab® obtêm-se:

$$K = [4473.1 \quad 163.2]$$

Figura 28 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle OLFC.

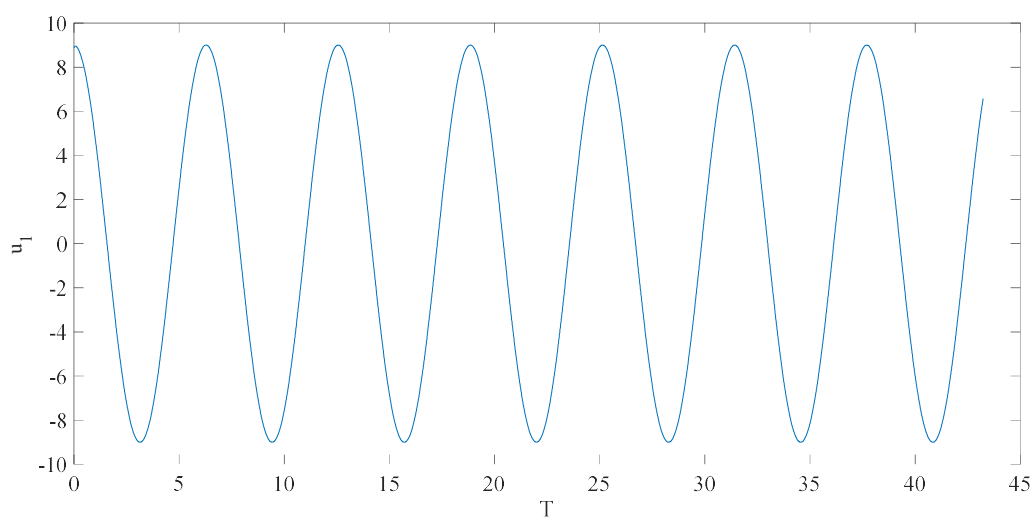
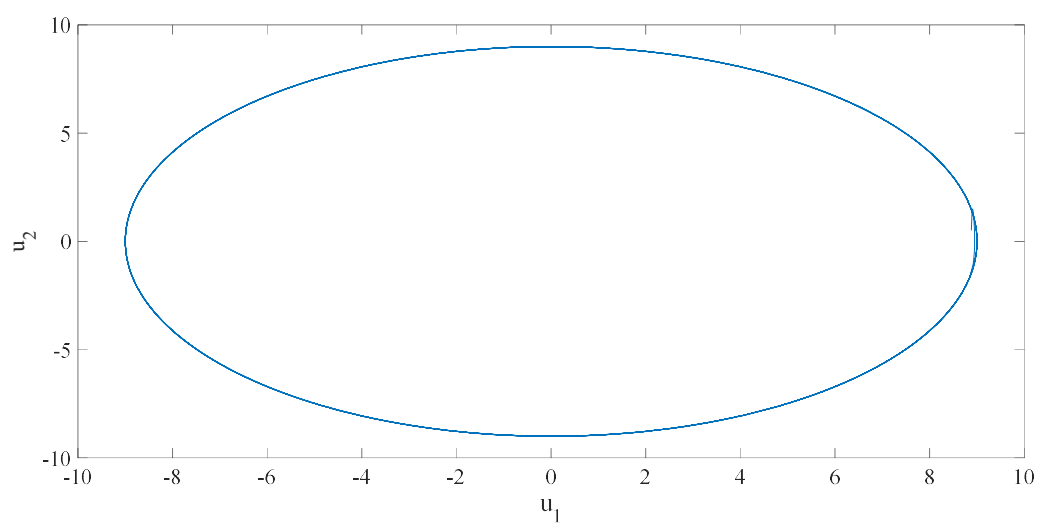


Figura 29 – Retrato de fase para o sistema com controle OLFC



Como é possível observar nas figuras 28 e 29 o controle OLFC levou o sistema a uma órbita periódica com amplitude $9 \cos(\omega t)$. A seguir é aplicado o controle SDRE ao sistema em ordem 1.

6.1.2 Controle Por Meio das Equações de Ricatti Dependentes do Estado em Ordem 1

Nesta seção será aplicado o controle por meio das equações de Ricatti dependentes do estado cuja teoria já foi apresentada no capítulo 3. Com o objetivo de obter um bom funcionamento do sistema mems micro cantilever, deseja-se que a viga tenha uma órbita periódica e amplitude de $9 \cos(\omega t)$.

Escrevendo o sistema dinâmico definido por (4.23) na seguinte forma [Shawky *et al*, 2007]:

$$\dot{u} = A(u)u + B(u)u_r \quad (6.24)$$

Considerando as condições iniciais $u(T_0) = u_0$, e que $f(0) = 0$, o que implica que a origem seja um ponto de equilíbrio.

A matriz A , e a matriz B , são representadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\alpha_1 u_1^* + \alpha_3 u_1^{*3} c \dot{u}_2^* = \frac{\varepsilon_0 A}{(d^2 - u_1^2)^2} \left[v_p^2 + \frac{1}{2} v_i^2 + 2v_p v_i \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega t) \right] & -c \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E definindo:

$$Q = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = [0.0001]$$

O deslocamento pode ser observado na Fig. 30, e o retrato de fase pode ser observado na Fig. 31, considerando a aplicação do controle (6.24) em (4.23).

Figura 30 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle SRDE.

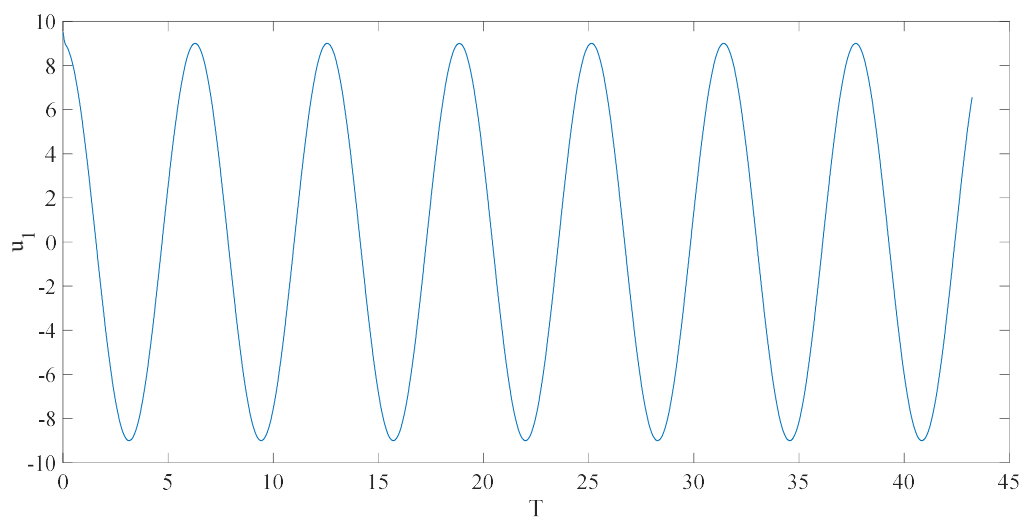
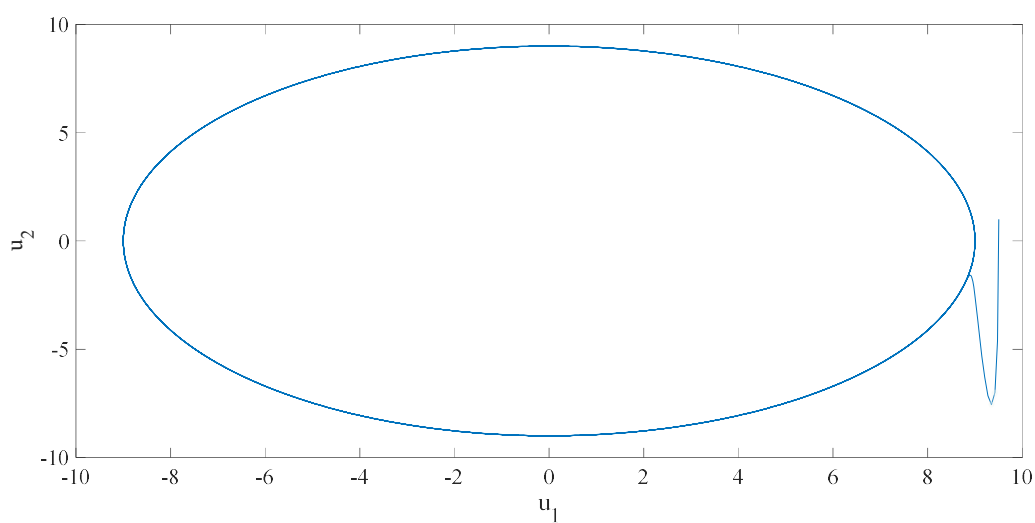
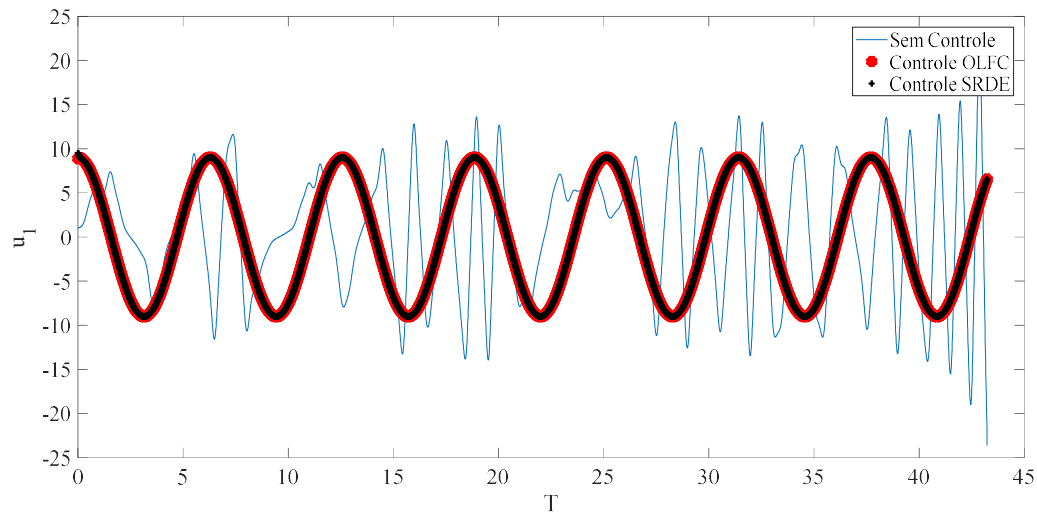


Figura 31 – Retrato de fase para o sistema com controle SRDE.



Como pode ser observado na Fig. 30 e 31 o controle SDRE se mostrou eficaz no controle das oscilações do sistema levando o sistema de uma órbita caótica para a órbita periódica. Na figura 32 é possível observar uma comparação entre o deslocamento sem controle, com controle OLFC e com controle SRDE.

Figura 32 – Comparação do deslocamento no tempo para o sistema com controle SDRE, controle OLFC e sem controle.



A seguir é realizada a aplicação das técnicas de controle OLFC e SDRE ao sistema MEMS micro ressonador com ordem fracionária.

6.2 Controle Para o Modelo 1 em Ordem Fracionária

Para o sistema em ordem fracionária serão aplicadas as técnicas de controle por meio das equações de Ricatti dependentes do estado e o controle ótimo linear realimentado.

O controle ótimo linear realimentado tem a função de regular e estabilizar o comportamento de sistemas dinâmicos, onde, o sinal de controle é uma função da diferença dos valores atuais e valores desejados das variáveis de estado do sistema (Tusset, 2008). O método das equações dependentes de estado SDRE aborda sistemas não lineares como sistemas lineares. Além disso, os resultados das simulações mostram que a abordagem SDRE tem características semelhantes à robustez do regulador linear quadrático LQR.

Além disso, os resultados das simulações mostram que a abordagem SDRE tem características semelhantes à robustez do regulador linear quadrático LQR.

6.2.1 Controle Ótimo Linear Realimentado Para o Sistema em Ordem Fracionária

Com o objetivo de suprimir os movimentos não lineares e caóticos apresentados pelo sistema mems tipo comb – drive em ordem fracionaria, foi proposta a aplicação do controle ótimo linear realimentado, tal que a resposta do sistema (5.1) resulte em uma órbita periódica $u^*(t)$ assintoticamente estável.

Considerando a introdução do sinal de controle U no sistema (5.1):

$$\frac{d^{q_1}u_1}{dT^{q_1}} = u_2 \quad (6.12)$$

$$\frac{d^{q_2}u_2}{dT^{q_2}} = -\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_1^3 - b u_2 + \beta V^2 \frac{u_1}{(d^2 - u_1^2)^2} + U$$

onde: $U = u_r + \tilde{u}$

Definindo os desvios da trajetória desejada como:

$$e = \begin{bmatrix} u_1 - \tilde{u}_1 \\ u_2 - \tilde{u}_2 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

sendo $u_r = U - \tilde{u}$ o controle por realimentação de estados.

O sistema pode ser representado em desvios como:

$$\dot{e} = Ae + G(u, u^*) + Bu_r \quad (6.14)$$

Ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + G(u, u^*) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_r \quad (6.15)$$

Conforme [Tusset *et al*, 2009], se existirem matrizes Q e R , definidas positivas com matriz Q simétrica, tal que a matriz:

$$\tilde{Q} = Q - G^T(u, u^*)P - PG(u, u^*) \quad (6.16)$$

seja definida positiva com matriz G limitada, então o controle u_r é ótimo e transfere o sistemas não linear de qualquer estado inicial ao estado final:

$$e(\infty) = 0 \quad (6.17)$$

Minimizando o funcional:

$$J = \int_0^{\infty} (e^T \tilde{Q} e + u^T R u) dt \quad (6.18)$$

O controle u pode ser encontrado resolvendo a equação:

$$u_r = -R^{-1} B^T P e = -K e \quad (6.19)$$

Sendo a matriz P simétrica, e pode ser encontrada da equação algébrica de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6.20)$$

A matriz A , e a matriz B , são representadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e definindo:

$$Q = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = [0.00001]$$

Utilizando o comando `lqr` do Matlab® obtêm-se:

$$K = [1415.2 \quad 449,4]$$

Substituindo K em (6.19) obtêm-se o controle:

$$u = -1415.2e_1 - 449.4e_2 \quad (6.21)$$

O deslocamento do pode ser observado na figura 33, e o diagrama de fase pode ser observado na figura 34, considerando a aplicação do controle (6.21), e a seguinte substituição:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 + u_1^* \\ e_2 + u_2^* \end{bmatrix}.$$

Figura 33 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema controlado.

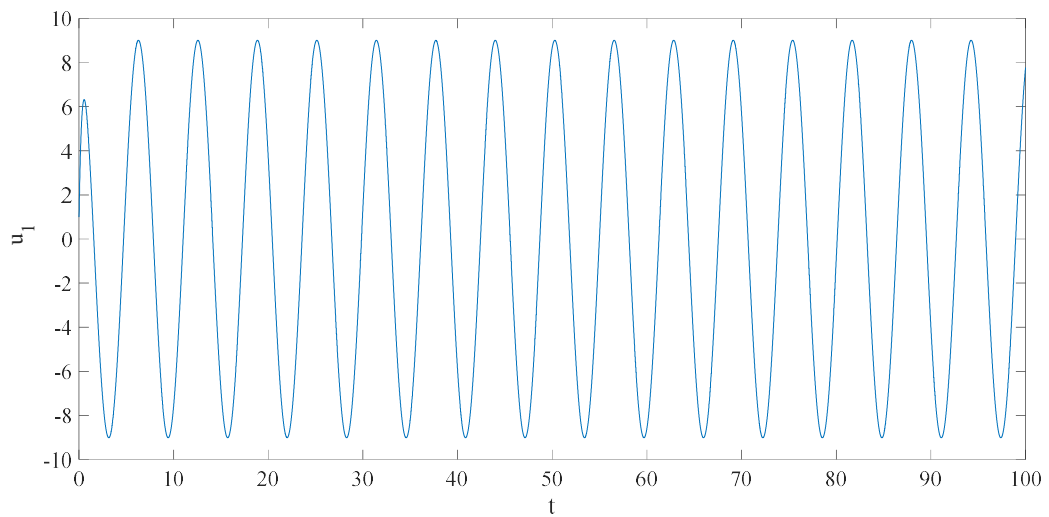
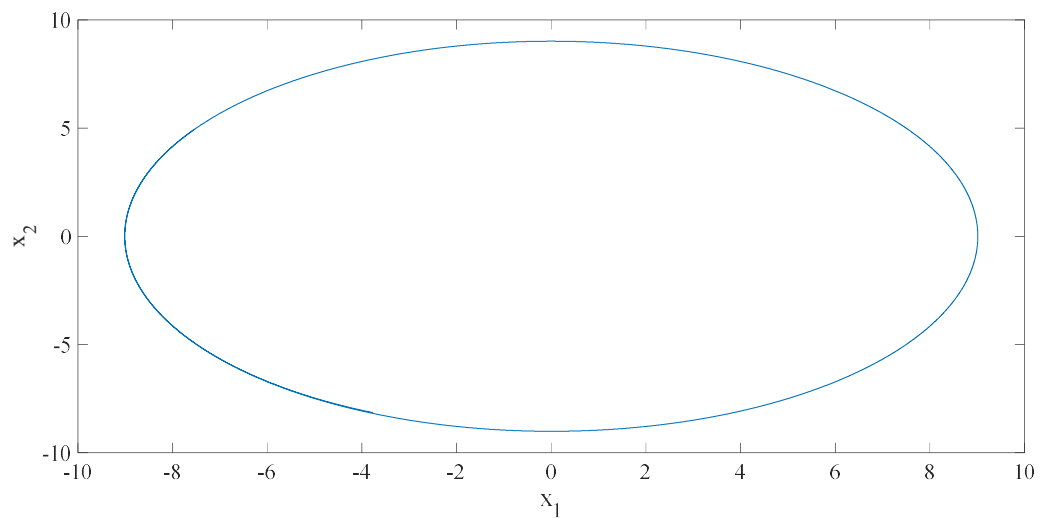


Figura 34 – Retrato de fase para o sistema com controle.



Nas figuras 33 e 34 é possível observar que o controle OLFC levou o sistema a órbita desejada determinada pelo controle com atraso de tempo.

6.2.2 Controle Por Meio das equações de Ricatti Dependentes do Estado em Ordem Fracionária

O método SDRE descrito na seção 3 é aqui aplicado com o objetivo de controlar o sistema *comb drive* em ordem fracionária, levando este a trajetória desejada $9 \cos(\omega t)$.

De acordo com a equação (5.1) o sistema em ordem fracionária

$$\frac{d^{q_1} u_1}{dT^{q_1}} = u_2 \quad (6.22)$$

$$\frac{d^{q_2} u_2}{dT^{q_2}} = -\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_1^3 - b u_2 + \beta V^2 \frac{u_1}{(d^2 - u_1^2)^2}$$

As matrizes de projeto do controlador são apresentadas como:

$$Q = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = [0.00001]$$

Figura 35 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle SDRE.

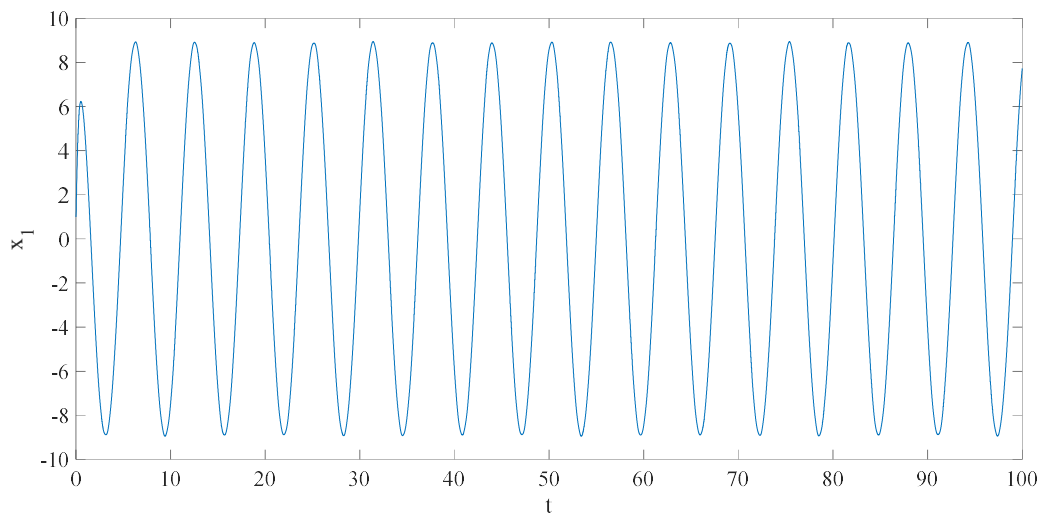
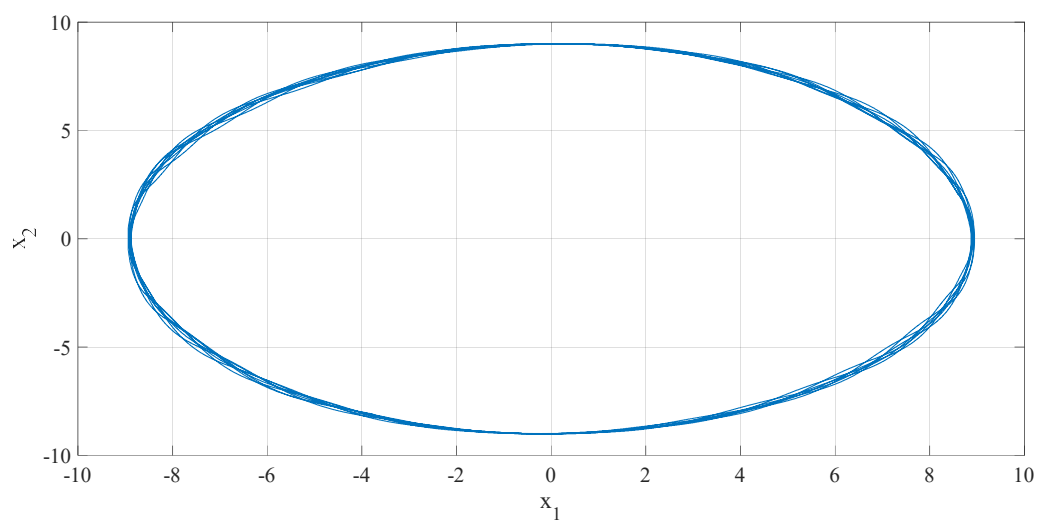


Figura 36 – Retrato de fase para o sistema com controle SDRE.



Nas figuras 35 e 36 é possível observar que o controle SRDE levou o sistema a órbita desejada determinada pelo controle com atraso de tempo, sendo este tão eficiente quanto o controle OLFC, ambos obtiveram resultados semelhantes nas simulações de deslocamento e retrato de fase.

7. PROJETO DE CONTROLE PARA O SISTEMA MEMS MODELO 2

Neste capítulo são apresentadas as estratégias de controle aplicadas ao sistema MEMS micro *cantilever* em ordem inteira e em ordem fracionária, para ambos os casos serão aplicadas as técnicas SDRE e OLFC, estas já demonstradas anteriormente no capítulo 3.

7.1 Controle Para o Sistema em Ordem Inteira

Conforme demonstrado no anteriormente no capítulo 5, o sistema MEMS micro *cantilever* tem comportamento não linear, afim de obter uma trajetória desejada linear e de amplitude $8 \sin(\omega t)$ correspondendo distância entre as placas do sistema MEMS modelo 2, são aplicadas as técnicas de controle a seguir.

7.1.1 Controle Ótimo Linear Realimentado em Ordem 1

A técnica de controle OLFC já foi descrita no capítulo 3 e será aqui aplicada ao modelo, afim de obter uma orbita periódica de amplitude $8 \sin(\omega t)$.

Considerando a introdução do sinal de controle U no sistema (4.23):

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 \\ \dot{u}_2 &= -\alpha_1 u_1 - \alpha_3 u_1^3 - b u_2 + \beta V^2 \frac{1}{2(d - u_1)^2} + U \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde: $U = u_r + \tilde{u}$

Sendo $\tilde{u}$ o controle *feedforward* que mantêm o sistema na trajetória desejada e dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \dot{u}_2^* + \alpha_1 u_1^* + \alpha_3 u_1^{*3} c \dot{u}_2^* \\ &= \frac{\varepsilon_0 A}{2(d - u_1^*)^2} \left[v_p^2 + \frac{1}{2} v_i^2 + 2v_p v_i \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega t) \right] \end{aligned} \quad (6.23)$$

A matriz A , e a matriz B , são representadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -7.0754 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e definindo:

$$Q = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = [0.0001]$$

Utilizando o comando `lqr` do matlab^r obtêm-se:

$$K = [4473.1 \quad 163.2]$$

Figura 37 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle OLFC.

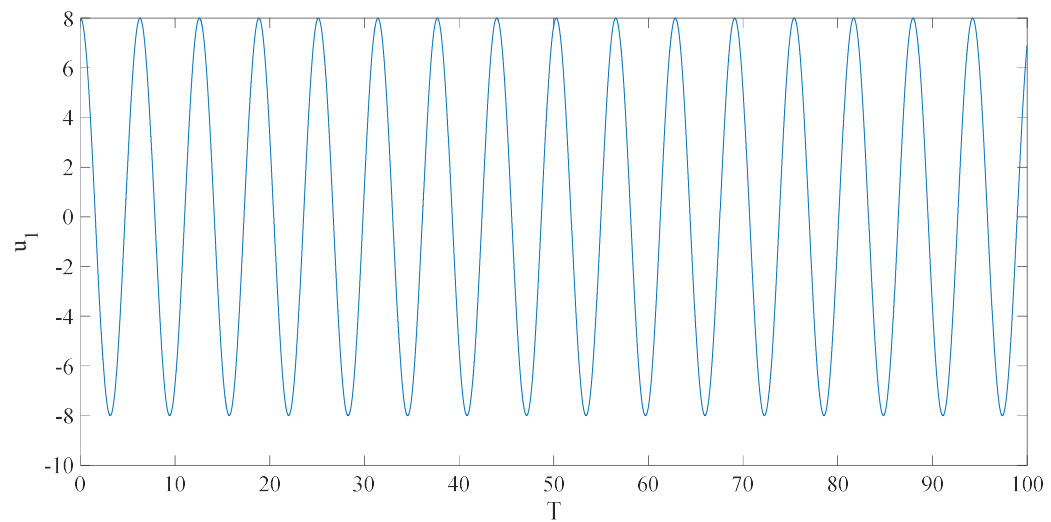
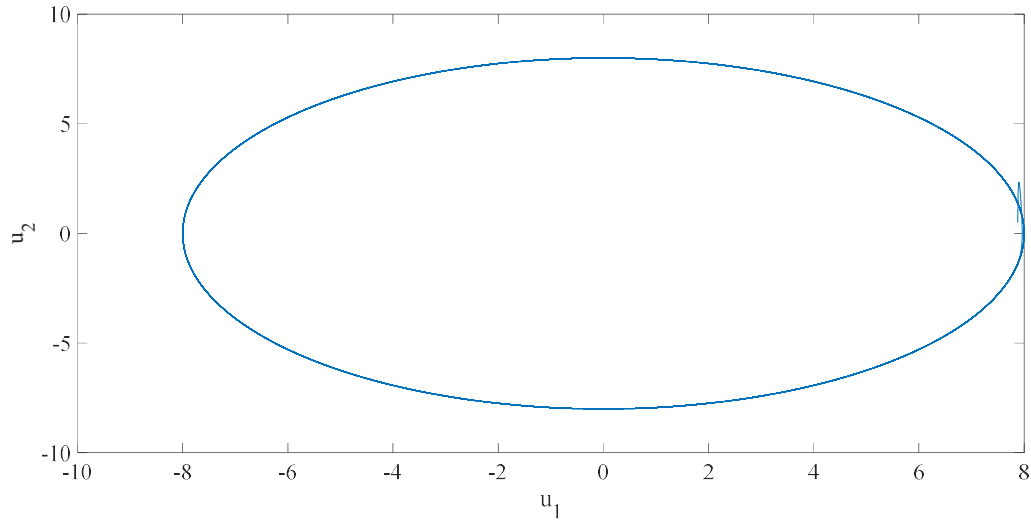


Figura 38 – Retrato de fase para o sistema com controle OLFC.



Como é possível observar nas figuras 37 e 38 o controle OLFC levou o sistema a uma órbita periódica com amplitude $8 \sin(wt)$. A seguir é aplicado o controle SDRE ao sistema em ordem inteira.

7.1.2 Controle Por Meio das Equações de Ricatti Dependentes do Estado em Ordem Inteira

Nesta seção será aplicado o controle por meio das equações de Ricatti dependentes do estado cuja teoria já foi apresentada no capítulo 3. Com o objetivo de obter um bom funcionamento do sistema MEMS micro *cantilever*, deseja-se que a viga tenha uma órbita periódica e amplitude de $8 \sin(wt)$.

Escrevendo o sistema dinâmico definido por (4.23) na seguinte forma descrito por Shawky *et al*, 2007:

$$\dot{u} = A(u)u + B(u)u_r \quad (6.24)$$

Onde o vetor $u = [u_1 \ u_2]^T$ representa os estado do sistema dependente do tempo, $\dot{u} \in R^2$ é o vetor de derivadas primeira do estado, $u_r \in U \in R$ é a função de controle.

Considerando as condições iniciais $u(T_0) = u_0$, e que $f(0) = 0$, o que implica que a origem seja um ponto de equilíbrio.

A matriz A , e a matriz B , são representadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +\alpha_1 u_1^* + \alpha_3 u_1^{*3} c \dot{u}_2^* = \frac{\varepsilon_0 A}{2(d - u_1^*)^2} \left[v_p^2 + \frac{1}{2} v_i^2 + 2v_p v_i \sin(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega t) \right] & -c \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

E definindo:

$$Q = \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = [0.0001]$$

O deslocamento pode ser observado na Fig. 39, e o retrato de fase pode ser observado na Fig. 40, considerando a aplicação do controle (6.24) em (4.23), e a seguinte substituição:
 $u_r = -K(e)[u - u^*]$.

Figura 39 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle SDRE.

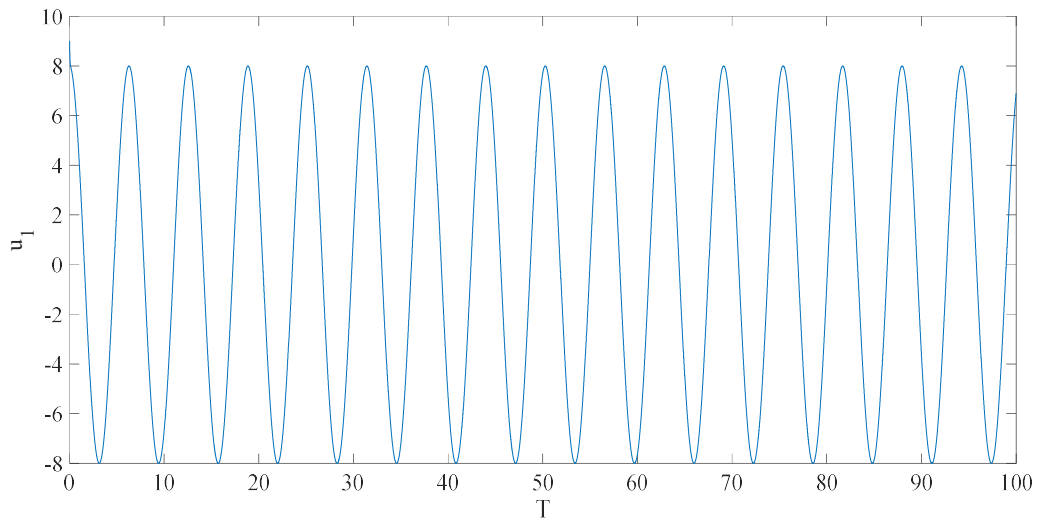
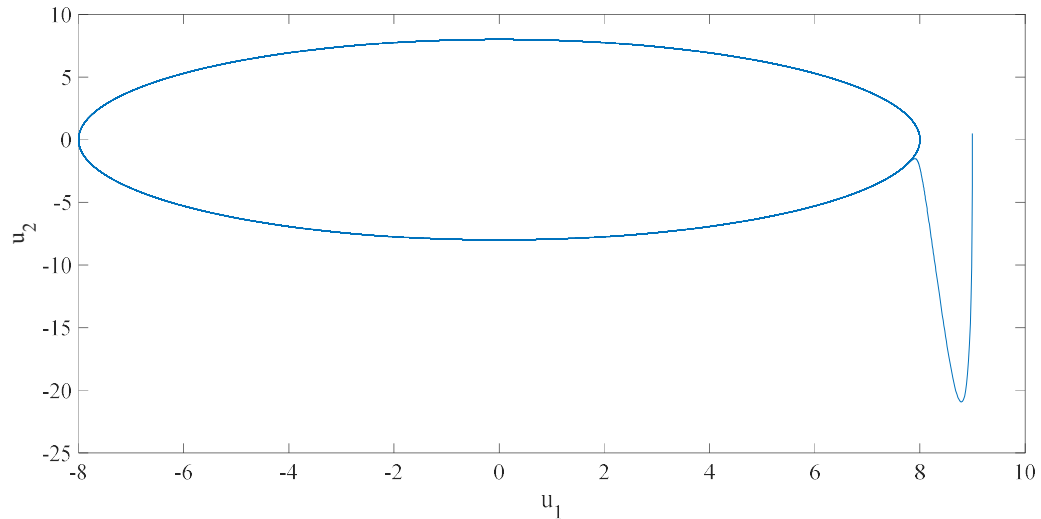
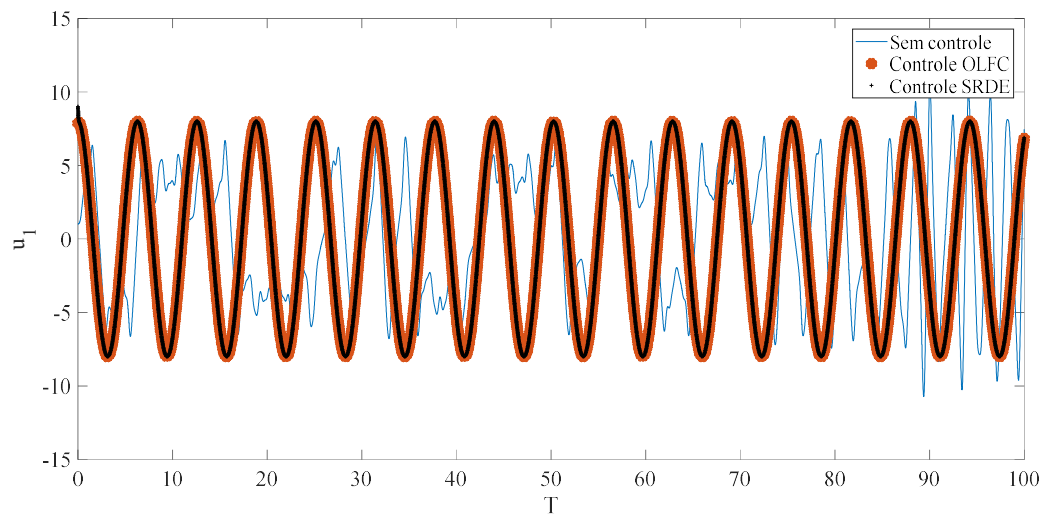


Figura 40 – Retrato de fase para o sistema com controle SRDE.



Como pode ser observado nas figuras 39 e 40, o controle SDRE se mostrou eficiente no controle das oscilações do sistema levando o sistema para a órbita periódica desejada. Na figura 42 é possível observar uma comparação entre o deslocamento sem controle, com controle OLFC e com controle SRDE.

Figura 41 – Comparação do deslocamento no tempo para o sistema com controle SRDE, controle OLFC e sem controle.



A seguir é realizada a aplicação das técnicas de controle OLFC e SDRE ao sistema MEMS micro ressonador com ordem fracionária.

7.2 Controle Para o Sistema em Ordem Fracionária

Nesta seção será aplicada as técnicas de controle SDRE e OLFC ao sistema MEMS micro *cantilever* em ordem fracionária, o sistema MEMS tem comportamento não linear, afim de obter uma trajetória desejada linear e de amplitude $8 \cos(wt)$ correspondendo distância entre as placas do micro cantilever são aplicadas as técnicas de controle a seguir.

7.2.1 Controle Ótimo Linear Realimentado em Ordem Fracionária

A técnica de controle OLFC já foi descrita no capítulo 3 e será aqui aplicada ao modelo, afim de obter uma orbita periódica de amplitude $8 \cos(wt)$.

Considerando a introdução do sinal de controle U no sistema (4.23):

$$\begin{aligned} \frac{d^{q_1} u_1}{dT^{q_1}} &= u_2 \\ \frac{d^{q_2} u_2}{dT^{q_2}} &= -\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_1^3 - b u_2 + \beta V^2 \frac{u_1}{2(d - u_1)^2} + U \end{aligned} \quad (6.25)$$

onde: $U = u_r + \tilde{u}$

A matriz A , e a matriz B , são representadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e definindo:

$$Q = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = [0.011]$$

utilizando o comando `lqr` do matlab^r obtêm-se:

$$K = [4473.1 \quad 163.2]$$

Figura 42 – Histórico do deslocamento no tempo para o sistema com controle OLFC.

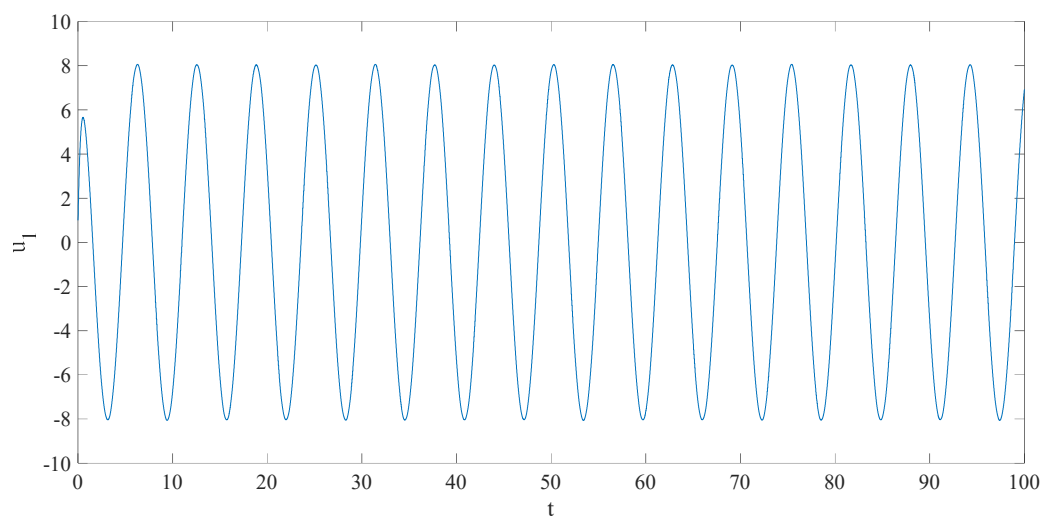
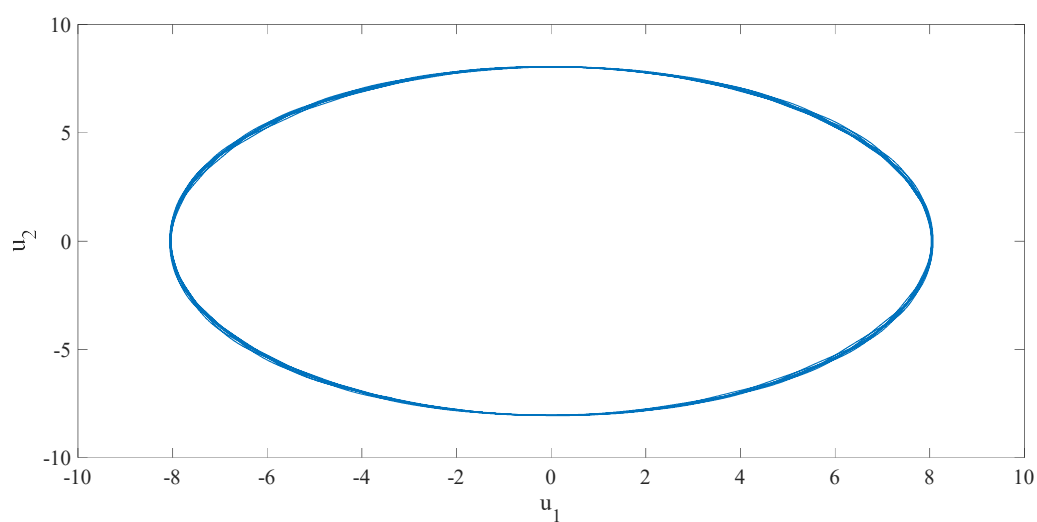


Figura 43 – Retrato de fase para o sistema com controle OLFC.



Como é possível observar nas figuras 42 e 43 o controle OLFC levou o sistema a uma órbita periódica com amplitude $8 \cos(\omega t)$. A seguir é aplicado o controle SDRE ao sistema em ordem fracionária.

7.2.2 Controle Por Meio das Equações de Ricatti Dependentes do Estado em Ordem Fracionária

O método SDRE descrito na seção 3 é aqui aplicado com o objetivo de controlar o sistema do modelo 2 em ordem fracionária, levando este a uma órbita periódica desejada.

De acordo com a equação (5.1) o sistema em ordem fracionária

$$\frac{d^{q_1} u_1}{dT^{q_1}} = u_2 \quad (6.22)$$

$$\frac{d^{q_2} u_2}{dT^{q_2}} = -\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_1^3 - b u_2 + \beta V^2 \frac{u_1}{(d^2 - u_1^2)^2}$$

As matrizes de projeto do controlador são apresentadas como:

$$Q = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, R = [0.00001]$$

Figura 44 – Histórico do deslocamento no tempo para o modelo 2 em ordem fracionária com controle SDRE.

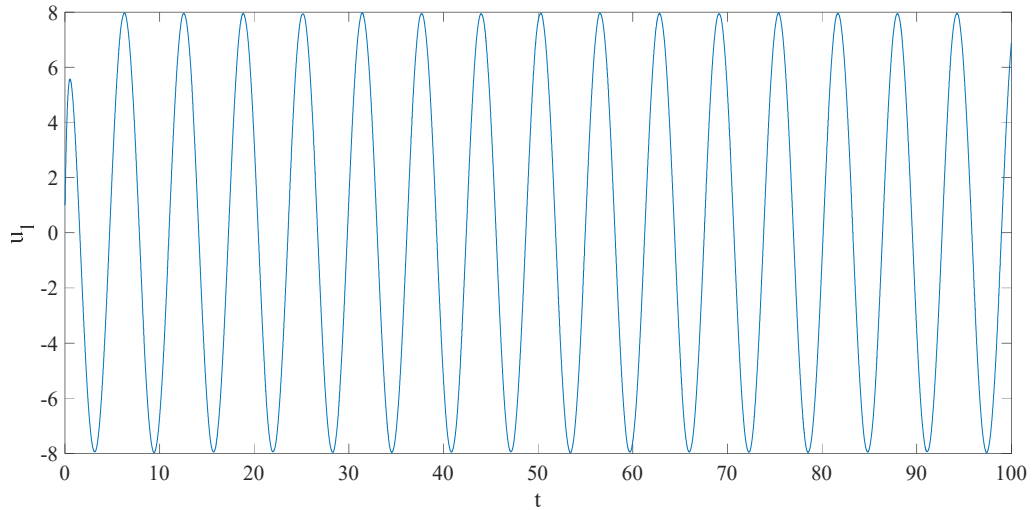
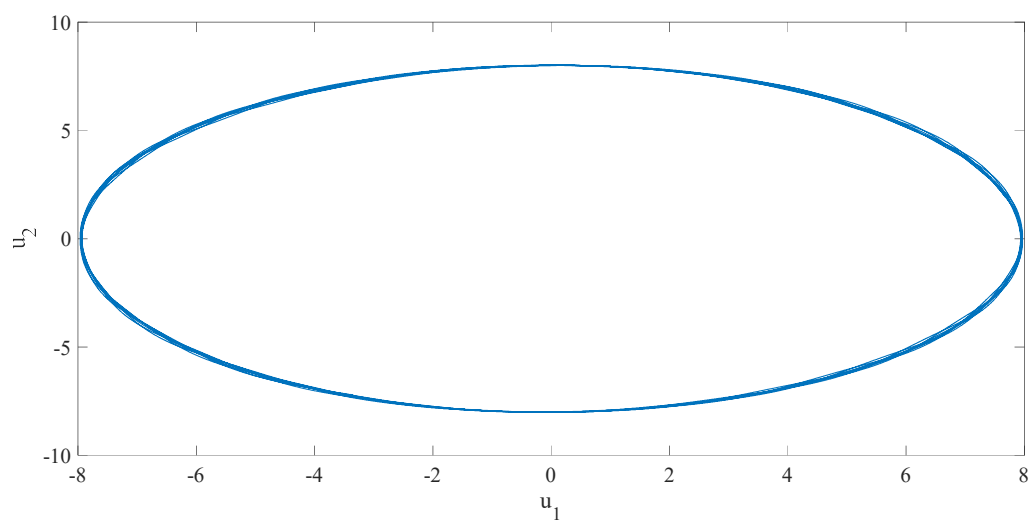


Figura 45 – Retrato de fase para o modelo 2 em ordem fracionária com controle SDRE.



Nas figuras 44 e 45 é possível observar que o controle SRDE levou o sistema a órbita desejada, sendo este tão eficiente quanto o controle OLFC, ambos obtiveram resultados semelhantes nas simulações de deslocamento e retrato de fase. A seguir são apresentadas as conclusões resultantes desta tese.

7. CONCLUSÃO

Este trabalho possibilitou a obtenção de uma melhor e mais clara compreensão da dinâmica e funcionamento de sistema micro eletromecânicos, com o auxílio de ferramentas matemáticas conseguiu demonstrar seu comportamento não linear e com a aplicação de métodos para comprovação de caos como o mapa de Poincaré e o expoente de Lyapunov, foi também possível afirmar que ambos os modelos aqui estudados possuem comportamento não linear caótico. Outra questão relevante aqui analisada, foi o estudo do fenômeno *Pull – In*, tal fenômeno reflete a instabilidade estrutural a qual sistemas MEMS estão sujeitos, sendo assim, foi demonstrada por meio do diagrama de bifurcação a instabilidade para ambos os modelos.

A análise dinâmica tanto do modelo 1 como do modelo 2 não foram realizadas apenas para os sistemas ordem inteira, pois este trabalho também teve como objetivo realizar e demonstrar a dinâmica dos sistemas quando considerada a derivada em ordem fracionária, por meio de simulações numéricas foi possível observar a dinâmica assim como a sensibilidade dos sistemas, através da alteração dos parâmetros q_1 e q_2 para ambos os modelos, onde foi possível observar que para o modelo em ordem fracionária, temos uma faixa de parâmetros que podem levar o sistema a um comportamento caótico. O teste 0 – 1 foi empregado como ferramenta para comprovação de caos, para ambos os modelos considerando a ordem fracionária, com a aplicação do teste 0 – 1 foi possível demonstrar e comprovar que para uma determinada faixa de parâmetros os dois modelos aqui estudados apresentam comportamento caótico.

Com a finalidade de suprimir o movimento caótico demonstrado por meio da análise dinâmica e aplicação de ferramentas para comprovação da existência de caos, foram empregadas as técnicas de controle SDRE e OLFC, com o intuito de levar o sistema para uma órbita periódica desejada. Quando aplicadas ao modelo 1 ambas as técnicas se mostraram eficientes para o controle tanto em ordem inteira, quanto quando aplicadas ao sistema em ordem fracionária, sendo possível observar nos gráficos de deslocamento no tempo e diagrama de fase que ambas as técnicas levaram de forma eficiente o sistema de uma órbita caótica a órbita periódica desejada. Tais técnicas de controle SDRE e OLFC também foram empregadas no sistema MEMS modelo 2 aqui analisado, as simulações numéricas mostram a existência de comportamento não linear para algumas regiões em ordem inteira, assim como para ordem fracionária, sabe – se que o comportamento não linear com amplitude superior a distância entre as placas pode ocasionar dano a viga móvel deste sistema, com o intuito de garantir um bom funcionamento do sistema, foi projetado o controle para o sistema

em ordem inteira e em ordem fracionária, sendo que ambas as técnicas se demonstraram eficientes para o controle do sistema.

REFERÊNCIAS

- Aghababa, M. P. (2012). Chaos in a fractional-order micro-electro-mechanical resonator and its suppression. **Chinese Physics B**, 21(10), 100505.
- Bassinello, D. G., Tusset, A. M., Rocha, R. T., & Balthazar, J. M. (2018). Dynamical analysis and control of a chaotic microelectromechanical resonator model. **Shock and Vibration**, 2018.
- Bentivenha L. B., Ramos P. F. P., Camargo R. F..(2012). Estudo Introdutório ao Cálculo Fracionário. **XXIV Congresso de Iniciação Científica da UNESP**. São Pedro, São Paulo. Brasil.
- Bernardini, D. & Litak, G. **J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.** (2016) 38: 1433.
- Bernardini, D., Rega, G., Litak, G. and Syta, A. (2013). Identification of regular and chaotic isothermal trajectories of a shape memory oscillator using the 0-1 test. **Proc. Inst. Mech. Eng. K J. Multi-body Dyn.** 227: 17-22.
- Bogue R., (2013). Recent developments in MEMS sensors: a review of applications, markets and technologies, **Sensor Review**, Vol. 33 Issue: 4, pp.300-304.
- Caputo M., *Elasticità e Dissipazione* (Zanichelli, Bologna, 1969).
- Cao, J., Syta, A., Litak, G., Zhou, S., Inman, D. J., & Chen, Y. (2015). Regular and chaotic vibration in a piezoelectric energy harvester with fractional damping. **The European Physical Journal Plus**, 130(6), 103.
- Feynman, R. P., 1992. “There’s plenty of room at the bottom (reprint)”. **Journal of Microelectromechanical Systems**, 1(1), pp. 60–66.
- Fischer A. C., Forsberg F., Lapisa M., Bleiker S. J., Stemme G., Roxhed N., Niklaus F.. (2015). Integrating MEMS and ICs. **Microsystems & Nanoengineering**.1, 15005, doi:10.1038/micronano.2015.5.
- Ghodssi R., Lin P.. (2011). MEMS Materials and Processes Handbook. **Springer Science & Business Media**, 1188 páginas.
- Gottwald, G. and Melbourne, I. (2005). Testing for chaos in deterministic systems with noise. **Physica D** 212: 100-110.
- Gottwald, G. and Melbourne, I., (2004). A new test for chaos in deterministic systems. **Proceedings of the Royal Society of London A** 460: 603-611

- Moon, F.C. (1998). *Applied Dynamics-With Applications to Multibody and Mechatronic Systems*. **Wiley-Interscience**, New York.
- Haghighi, H. S. and Markazi A. H. (2010). Chaos prediction and control in mems resonators. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 15(10): 3091–3099.
- Hilfer R., 2001. *Applications of Fractional Calculus in Physics* (New Jersey: World Scientific).
- Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, **Academic Press**, New York-London, 1974.
- Kailath, T. (1980). *Linear systems* (Vol. 156). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Litak, G., Bernardini, D., Syta, A., Rega, G. and Rysak, A. (2013). Analysis of chaotic non-isothermal solutions of thermomechanical shape memory oscillators. **Eur. Phys. J. Special Topics** 222: 1637-1647.
- Litak, G., Syta, A. and Wiercigroch, M. (2009). Identification of chaos in a cutting process by the 0–1 test. **Chaos, Solitons and Fractals** 40: 2095-2101.
- Lyshevski, S. E. 2002. *MEMS and NEMS: Systems, Devices, and Structures*. CRC Press.
- Mobayen S., Tchier F., 2017. Robust global second-order sliding mode control with adaptive parameter-tuning law for perturbed dynamical systems. **Transactions of the Institute of Measurement and Control**. doi [10.1177/0142331217708832](https://doi.org/10.1177/0142331217708832).
- Nathanson, H. C., Newell, W. E., Wickstrom, R. A., and Davis Jr., J. R., 1967. "The resonant gate transistor". **IEEE Transactions on Electron Devices**, 14(3), pp. 117–133.
- PETRAS, Ivo. *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. **Springer Science & Business Media**, 2011.
- PODLUBNY, Igor. Fractional-order systems and PI^{lambda}/D^{mu} -controllers. **IEEE Transactions on automatic control**, v. 44, n. 1, p. 208-214, 1999.
- Pyragas K., (1992) Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys Lett A* 170:421.
- Rosing, R., R. Reichenbach, and Andrew Richardson. "Generation of component level fault models for MEMS." **Microelectronics journal** 33.10 (2002): 861-868.
- Sabarathinam, S., Thamilmaran, k.. (2017) Implementation of analog circuit and study of chaotic dynamics in a generalized Duffing type MEMS resonator. **Nonlinear Dynamics**. Volume 87, Issue 4, pp 2345–2356.
- Sabatier, J. A. T. M. J., Agrawal, O. P., & Machado, J. T. (2007). *Advances in fractional calculus* (Vol. 4, No. 9). Dordrecht: Springer.

- Salarieh H., Alasty, A., (2009). Control of chaos in atomic force microscopes using delayed feedback based on entropy minimization. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 14 637–644.
- Sheey M, Punch J, Goyal S, Reid M, Lishchynska M, and Kelly G (2009) The Failure mechanisms of micro-scale cantilevers in shock and vibration stimuli. **Journal Strain**. 45–3:283–294
- Tusset, A. M., Bueno, A. M., Nascimento, C. B., Kaster, M. S. and Balthazar, J. M. (2013). Nonlinear state estimation and control for chaos suppression in MEMS resonator. **Shock and Vibration** 20: 749-761.
- Teodoro, g. Sales; oliveira, d. S., Oliveira, e. Capelas de. Sobre derivadas fracionárias. **Rev. Bras. Ensino fís. [online]**. 2018, vol.40, n.2, e2307. Epub oct 02, 2017. Issn 1806-1117.
- Tusset, A.M., Balthazar, J.M., Bassinello, D.G., Pontes Jr., B.R. and Felix, J L P. (2012). Statements on chaos control designs, including a fractional order dynamical system, applied to a MEMS comb-drive actuator. **Nonlinear Dynamics** 69: 1837-1847.
- Tusset, A. M., Bueno, Á. M., Nascimento, C. B., dos Santos Kaster, M., & Balthazar, J. M. (2013). Nonlinear state estimation and control for chaos suppression in MEMS resonator. **Shock and Vibration**, 20(4), 749-761.
- Utkin, V.I. (1992). Sliding Modes in Control Optimization. Springer-Verlag, Berlin.
- Varadan K.C., Wang Q.. 2003. Transition of the buckling load of beams by the use of piezoelectric layers. **Smart Mater. Struct.** 12 696 doi: 10.1088/0964-1726/12/5/305.
- Yau, H.T., Wang, C.C., Hsieh C.T. and Cho C.C. (2011). Nonlinear analysis and control of the uncertain micro-electro-mechanical system by using a fuzzy sliding mode control design. **Computers and Mathematics with Applications** 61(8): 1912–1916.
- Younis M. I., *MEMS Linear and Nonlinear Statics and Dynamics*, Microsystems 20, 1 DOI 10.1007/978-1-4419-6020-7_1, © Springer Science+Business Media, LLC 2011

APENDICE A – BUSCA DA SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA PARA OS MODELOS MEMS

Neste apêndice é apresentado o método da média onde está é uma técnica de perturbação utilizada com a finalidade de obter uma solução aproximada para os modelos MEMS estudados nesta tese.

A.I Método da Média

Os métodos de perturbação, são normalmente compostos por diversas técnicas com a finalidade de obter uma solução aproximada para problemas com um pequeno parâmetro ϵ é uma coleção de métodos para obter soluções aproximadas para problemas envolvendo um pequeno parâmetro ϵ (Konopliv, 1989). A teoria da perturbação é útil quando os primeiros termos revelam as características importantes da solução e os demais termos proporcionam pequenas correções.

Diversos problemas em dinâmica, não podem ser integráveis de qualquer forma, em diversos casos estes podem ser representados por equações diferenciais que apresentam uma pequena perturbação de um problema integrável. O método da média passou a ser utilizado em fenômenos oscilatórios após a popularização das obras de Van der Pol como pode ser visto em Mitropolsky (1967). Em Bogoliubov (1961), este foi inicialmente utilizado no estudo prático das oscilações não lineares em todos os seus extensos campos de investigação, trazendo o embasamento matemático deste método, demonstrando que este pode ser empregado no desenvolvimento de uma solução aproximada para diversos tipos de problemas oscilatórios. Esta técnica de perturbação foi desenvolvida para a análise assintótica de sistemas dinâmicos não lineares. Em Mitropolsky (1969) e em Sanders e Verhulst (1985) são apresentados os aspectos técnicos e os conceitos gerais deste método. Bogoliubov foi o primeiro a apresentar uma teoria geral do método para calcular a média em um sistema geral regido pela equação.

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon X(t, x) \quad (\text{A.I})$$

Com o limite de $\epsilon \rightarrow 0$. Bogoliubov mostrou que este sistema pode ser substituído, sob determinadas condições, por um sistema autônomo.

$$\frac{dy}{dt} = \epsilon X_0(y) \quad (\text{A.II})$$

Onde $X_0(y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, y) dt$, a diferença $x(t) - y(t)$, sobrando um valor muito pequeno em uma escala de ordem $1/\epsilon$.

Em (Nayfeh, 2008) e (Nayfeh, 2011), são demonstrados diversos problemas não lineares onde é possível determinar uma solução natural aproximada por meio do método da média, onde é possível propor uma solução analítica baseada na Série de Fourier.

A.I.I Método da Média Modelo 1

O método da média está fundamentado em propor uma solução analítica aproximada, por meio de uma pequena perturbação utilizando um oscilador linear:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon f(x, \dot{x}) \quad (\text{A.III})$$

Onde o parâmetro $\epsilon \ll 1$ e $f(x, \dot{x})$ é uma função expressa em x e sua derivada.

É utilizado o método de variação de parâmetros para transformar a variável dependente x em novas variáveis independentes A e Φ .

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \Phi(t)) \quad (\text{A.IV})$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A(t) \sin(\omega t + \Phi(t)) \quad (\text{A.V})$$

diferenciando a primeira equação (A.V) em relação ao tempo e comparando o resultado com o obtido pela da segunda, obtemos:

Sendo possível transformar a equação anterior em um sistema:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\epsilon}{\omega} f(A \cos \phi, -\omega A \sin \phi) \sin \phi \equiv \epsilon f_1(A, \Phi), \quad (\text{A.VI})$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\epsilon}{\omega A} f(A \cos \phi, -\omega A \sin \phi) \cos \phi \equiv \epsilon f_2(A, \Phi), \quad (\text{A.VII})$$

Onde $(\omega t + \Phi) = \phi$, sendo possível realizar as seguintes transformações:

$$A = \alpha + \varepsilon f_1 \text{ e } \Phi = \beta + \varepsilon f_2 \quad (\text{A.VIII})$$

A equação anterior pode ser reescrita então da seguinte forma:

$$\dot{\alpha} = \varepsilon f_{10}(\alpha, \beta) \quad (\text{A.IX})$$

$$\dot{\beta} = \varepsilon f_{20}(\alpha, \beta)$$

Para aplicar o método da média no problema MEMS para modelo 1, iremos reescrever a equação do movimento da seguinte forma:

$$m\ddot{x} + k_1x + k_3x^3 + c\dot{x} = BV^2 \frac{x}{(d_0^2 - x^2)^2} \quad (\text{A.X})$$

reescrivendo a equação,

$$\ddot{x} + \frac{k_1}{m}x + \frac{k_3}{m}x^3 + \frac{c}{m}\dot{x} = \varepsilon \frac{BV^2}{m} \frac{x}{(d_0^2 - x^2)^2} \quad (\text{A.XI})$$

Como já foi mencionado nesta tese ε é um termo positivo e finito muito pequeno, onde para $\varepsilon = 0$, tem – se o problema não perturbado, segundo Nayfeh (1981) este parâmetro é o responsável pelo balanço de ordem das equações do movimento.

Realizando as seguintes substituições:

$$\frac{k_1}{m} = \omega_0^2, \frac{c}{m} = \varepsilon a_1, \frac{k_3}{m} = \varepsilon a_2, \frac{BV^2}{m} = \varepsilon a_3 \quad (\text{A.XII})$$

Considerando a equação:

$$\ddot{u} + u + 2\varepsilon\mu\dot{u} + \varepsilon u^3 = F\cos(\omega t) \quad (\text{A.XIII})$$

Utilizando o método de variação de parâmetros. Considerando $\varepsilon = 0$, a solução geral para a equação 1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$u = \alpha \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos(\omega t) \quad (\text{A.XIV})$$

Onde α e β são considerados constantes e Λ é definida por:

$$\Lambda = \frac{1}{2}(1 - \omega^2)^{-1}F \quad (\text{A.XV})$$

A derivada da equação (6.14) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{u} = -\alpha \sin(t + \beta) - 2\Lambda\omega \sin(\omega t) \quad (\text{A.XVI})$$

Quando $\varepsilon \neq 0$, é possível representar a solução para (A.XIV) sujeito as restrições de (A.XVI), temos:

$$\dot{u} = -\alpha \sin(t + \beta) + \dot{\alpha} \cos(t + \beta) - \alpha \dot{\beta} \sin(t + \beta) - 2\Lambda\omega \sin(\omega t) \quad (\text{A.XVII})$$

Comparando (A.XVI) com (A.XVII), temos:

$$\dot{\alpha} \cos(t + \beta) - \alpha \dot{\beta} \sin(t + \beta) = 0 \quad (\text{A.XVIII})$$

Diferenciando (A.XVI), respectivamente temos:

$$\ddot{u} = -\alpha \cos(t + \beta) + \dot{\alpha} \sin(t + \beta) - \alpha \dot{\beta} \cos(t + \beta) - 2\Lambda\omega^2 \cos(\omega t) \quad (\text{A.XIX})$$

Substituindo (A.XIV), (A.XVI) e (A.XIX) em (A.XIII):

$$\begin{aligned} & -\alpha \cos(t + \beta) + \dot{\alpha} \sin(t + \beta) - \alpha \dot{\beta} \cos(t + \beta) - 2\Lambda\omega^2 \cos(\omega t) \\ & - 2\varepsilon\mu u \alpha \sin(t + \beta) - 4\varepsilon\mu u \omega \Lambda \sin(\omega t) + \alpha \cos(t + \beta) \\ & + 2\Lambda \cos(\omega t) + \varepsilon[\alpha \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^3 = F \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (\text{A.XX})$$

Sendo $2\Lambda = (1 - \omega^2)^{-1}F$ de acordo com (A.XV) e (A.XX), é possível reduzir a equação a:

$$\begin{aligned} & \dot{\alpha} \sin(t + \beta) + \alpha \dot{\beta} \cos(t + \beta) \\ & = -2\varepsilon\mu[\alpha \sin(t + \beta) + 2\omega\Lambda \sin(\omega t)] \\ & + \varepsilon[\alpha \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^3 = F \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (\text{A.XXI})$$

Multiplicando (A.XVIII) por $\cos(t + \beta)$ e a equação (A.XXI) por $\sin(t + \beta)$ e adicionando o resultado, é possível obter:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} = & -2 \varepsilon \mu \sin(\omega t) [a \sin(t + \beta) + 2\omega\Lambda \sin(\omega t)] \\ & + \varepsilon [\alpha \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^3\end{aligned}\quad (\text{A.XXII})$$

substituindo (A.XXII) em (A.XVIII) e resolvendo para $\alpha\dot{\beta}$ temos:

$$\begin{aligned}\alpha\dot{\beta} = & -2 \varepsilon \mu \cos(\omega t) [a \sin(t + \beta) + 2\omega\Lambda \sin(\omega t)] + \varepsilon \cos(t + \beta) \\ & * [\alpha \cos(t + \beta) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^3\end{aligned}\quad (\text{A.XXIII})$$

Expandindo o termo cubico, podemos reescrever as equações (A.XXII) e (A.XXIII) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} = & -2 \varepsilon \mu \sin(\omega t) [a \sin(t + \beta) + 2\omega\Lambda \sin(\omega t)] + \varepsilon \sin(t + \beta) \\ & * [\alpha^3 \cos^3(t + \beta) + 6\alpha^2\Lambda \cos^2(t + \beta) \cos(\omega t) \\ & + 12\alpha\Lambda^2 \cos(t + \beta) * \cos^2(\omega t) + 8\Lambda^3 \cos^3(\omega t)]\end{aligned}\quad (\text{A.XXIV})$$

$$\begin{aligned}\alpha\dot{\beta} = & -2 \varepsilon \mu \cos(\omega t) [a \sin(t + \beta) + 2\omega\Lambda \sin(\omega t)] + \varepsilon \cos(t + \beta) \\ & * [\alpha^3 \cos^3(t + \beta) + 6\alpha^2\Lambda \cos^2(t + \beta) \cos(\omega t) \\ & + 12\alpha\Lambda^2 \cos(t + \beta) * \cos^2(\omega t) + 8\Lambda^3 \cos^3(\omega t)]\end{aligned}\quad (\text{A.XXV})$$

Utilizando identidades trigonométricas, podemos reescrever as equações (6.24) e (6.25) como:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} = & \varepsilon \left\{ -\mu\alpha + \mu\alpha \cos(2t + 2\beta) - 2\omega\mu\Lambda * \cos[(1 + \omega)t + \beta] + \left(\frac{1}{4}\alpha^3 + 3\alpha\Lambda^2\right) \sin(2t + 2\beta) \right. \\ & + \frac{1}{8}\alpha^3 \sin(4t + 4\beta) + \left(\frac{3}{4}\alpha^2\Lambda + 3\Lambda^3\right) \sin[(1 + \omega)t + \beta] + \left(\frac{3}{4}\alpha^2\Lambda + 3\Lambda^3\right) \sin[(1 - \omega)t + \beta] \\ & + \frac{3}{4}\alpha^2\Lambda \sin[(3 + \omega)t + 3\beta] + \frac{3}{4}\alpha^2\Lambda \sin[(3 - \omega)t + 3\beta] + \frac{3}{2}\alpha^2\Lambda \sin[(2 + 2\omega)t + 2\beta] + \\ & \left. \frac{3}{2}\alpha^2\Lambda \sin[(2 - 2\omega)t + 2\beta] + \Lambda^3 \sin[(1 + 3\omega)t + \beta] + \Lambda^3 \sin[(1 - 3\omega)t + \beta] \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.XXVI})$$

$$\begin{aligned}\alpha\dot{\beta} = & \varepsilon \left\{ -\mu\alpha \sin(2t + 2\beta) - 2\omega\mu\Lambda \sin[(1 + \omega)t + \beta] - 2\omega\mu\Lambda * \sin[(1 + \omega)t + \beta] + \frac{3}{8}\alpha^3 + 3\alpha\Lambda^2 \right. \\ & + \left(\frac{1}{2}\alpha^3 + 3\alpha\Lambda^2\right) \cos(2t + 2\beta) + \frac{1}{8}\alpha^3 \cos(4t + 4\beta) + \left(\frac{9}{4}\alpha^2\Lambda + 3\Lambda^3\right) \cos[(1 + \omega)t + \beta] \\ & + \left(\frac{9}{4}\alpha^2\Lambda + 3\Lambda^3\right) \cos[(1 - \omega)t + \beta] + \frac{3}{4}\alpha^2\Lambda \cos[(3 + \omega)t + 3\beta] + \frac{3}{4}\alpha^2\Lambda \cos[(3 - \omega)t + 3\beta] \\ & + \frac{3}{2}\alpha^2\Lambda \cos[(2 + 2\omega)t + 2\beta] + \frac{3}{2}\alpha^2\Lambda \cos[(2 - 2\omega)t + 2\beta] + 3\alpha\Lambda^2 \cos(2\omega t) + \\ & \left. \Lambda^3 \cos[(1 + 3\omega)t + \beta] + \Lambda^3 \cos[(1 - 3\omega)t + \beta] \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.XXVII})$$

Para a primeira aproximação, os termos $-\varepsilon\mu\alpha$ e $\varepsilon\left(\frac{3}{8}\alpha^3 + 3\alpha\Lambda^2\right)$ não são dependentes dos valores de ω . É possível incluir termos de variação lenta quando $\omega \approx 0,1,3$ e $\frac{1}{3}$. Para o caso de $\omega \approx 1$ poderia ser excluído porque u_0 tem um divisor menor.

Se ω assumir valores entre $0,3$ e $\frac{1}{3}$, neste caso somente os termos de variação lenta são termos independentes do tempo, portanto isto segue para (A.XXVI) e (A.XXVII).

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \varepsilon\mu\alpha \\ \alpha\dot{\beta} &= \frac{3}{8}\varepsilon\alpha^3 + 3\varepsilon\alpha\Lambda^2\end{aligned}\tag{A.XXVIII}$$

assim,

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 e^{-\varepsilon\mu t} \\ \beta &= -\frac{3}{16\mu}\alpha_0^2 e^{-2\varepsilon\mu t} + 3\varepsilon\Lambda^2 t + \beta_0\end{aligned}\tag{A.XXVIX}$$

onde α_0 e β_0 são constantes.

APENDICE B – SÚMULA CURRICULAR

Disciplinas cursadas no programa:

- Controle de Estruturas Flexíveis, conceito A.
- Controle Robusto Multivariável, conceito A.
- Controle por Realimentação de Estados, conceito A.
- Sistemas Embarcados: Fundamentos, Metodologias e Padrões, conceito A.

Artigos publicados em revistas durante o doutorado:

- BASSINELLO, DAILHANE GRABOWSKI; TUSSET, Angelo Marcelo ; ROCHA, R. T. ; BALTHAZAR, José Manoel . Dynamical Analysis and Control of a Chaotic Microelectromechanical Resonator Model. SHOCK AND VIBRATION. v. 2018, p. 1-10, 2018.
- LIMA, JEFERSON J. ; BALTHAZAR, JOSÉ M. ; ROCHA, RODRIGO T. ; JANZEN, FREDERIC C. ; BERNARDINI, DAVIDE ; LITAK, GRZEGORZ ; BASSINELLO, DAILHANE G. ; TUSSET, ANGELO M. . On Positioning and Vibration Control Application to Robotic Manipulators with a Nonideal Load Carrying. SHOCK AND VIBRATION **JCR**, v. 2019, p. 1-14, 2019.

Artigos publicados em eventos durante o doutorado:

- BASSINELLO, D. G.; TUSSET, A. M. ; ROCHA, R. T. ; LIMA, J. J. ; BALTHAZAR, JOSÉ MANOEL . A note on control in micro eletromachanical systems with hysteretic damping.. In: COBEM 2017, 2017, Curitiba. Cobem 2017, 2017. v. 1.
- LIMA, J. J. ; ROCHA, R. T. ; JANZEN, F. C. ; TUSSET, A. M. ; BASSINELLO, D. G. ; BALTHAZAR, J. M. . Position Control of a Manipulator Robotic Arm considering Flexible Joints driven by a DC Motor and a Controlled Torque by a MR-Brak. In: ASME's International Mechanical Engineering Congress and Exposition (IMECE), 2016, Fenix, Arizona, USA. Proceedings of IMECE 2016, 2016. v. 1. p. 1-190.

- LIMA, J. J. ; SANTOS, M. M. D. ; [TUSSET, A. M.](#) ; BASSINELLO, D. G. ; JANZEN, F. C. ; [BALTHAZAR, J. M.](#) . Nonlinear Control Strategy based on Discrete-Time State Dependent Riccati Equation for Electronic Throttle Control. In: 12th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications - INDUSCON, 2016, Curitiba. 12th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications, 2016. v. 1. p. 1-9.
- [BASSINELLO, D. G.](#); [BALTHAZAR, J. M.](#) ; [TUSSET, A. M.](#) ; PICCIRILLO, V. . Dynamic analysis of a fractional-order mems system using 0-1 test. In: ASME-IDETC/CIE 2016, 2016, Charlotte. International Design Engineering Technical Conferences & Computers & Information in Engineering Conference, 2016. v. 1. p. 1-10.