UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS

PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

CAMPUS DE MARÍLIA

ANA CLAUDIA DE JESUS GOLZIO

Elementos algébricos para a noção de ‘poucos’ e sua formalização em sistemas lógicos dedutivos

Marília

2011

ANA CLAUDIA DE JESUS GOLZIO

Elementos algébricos para a noção de ‘poucos’ e sua formalização em sistemas lógicos dedutivos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista, *Campus* de Marília, na Área de Concentração em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica.

Orientador: Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa
Co-orientadora: Profa. Dra. Maria Claudia Cabrini Grácio.

Marília
2011

Golzio, Ana Claudia de Jesus.
G629e Elementos algébricos para a noção de “poucos” e sua formalização em sistemas lógicos dedutivos / Ana Claudia de Jesus Golzio. – Marília, 2011
97 f. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado - Filosofia) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Filosofia e Ciências, 2011

Bibliografia: f. 94-97
Orientador: Hércules de Araújo Feitosa
Co-orientadora: Maria Cláudia Cabrini Grácio

1. Lógica algébrica. 2. Lógica proposicional para “muitos” 3. Lógica proposicional para “poucos” (LPP) 4. Sistema de Tableaux. I. Autor. II. Título.

CDD 164

ANA CLAUDIA DE JESUS GOLZIO

Elementos algébricos para a noção de ‘poucos’ e sua formalização em sistemas lógicos dedutivos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista, *Campus* de Marília, na Área de Concentração em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica.

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida e aprovada pela Banca Examinadora em 09/09/2011.

BANCA

Prof. Dr. Hércules de Araújo Feitosa – UNESP/BAURU_____

Prof. Dr. Mauri Cunha do Nascimento – UNESP/BAURU_____

Prof. Dr. Marcelo Esteban Coniglio – UNICAMP/CAMPINAS_____

Marília

2011

Aos meus amados pais:

Altacir e João

E ao meu marido:

Claudecir

Agradeço a Deus e a todos que de algum modo contribuíram para a elaboração deste trabalho;

Ao meu orientador Hércules de Araújo Feitosa por todos esses anos de amizade, confiança e incentivo;

Aos Professores Mauri, Maria Claudia e Luiz Henrique pelas valiosas contribuições;

Aos meus amigos Angela e Kleidson pelo apoio e pelas muitas sugestões;

Aos Professores do Departamento de Filosofia da UNESP de Marília que muito contribuíram para a minha formação;

Ao Departamento de Matemática da UNESP de Bauru por fornecer condições para o desenvolvimento deste trabalho;

Aos funcionários da Seção Técnica de Pós-Graduação da UNESP de Marília pela orientação em relação às questões burocráticas.

A Capes pelo apoio financeiro.

RESUMO

Grácio (1999), em sua tese de doutorado intitulada “Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza”, estabeleceu uma formalização no ambiente quantificacional para o termo da linguagem natural: “muitos”. Buscando a formalização desse conceito no ambiente proposicional, Feitosa, Nascimento e Grácio (2009) no artigo “Algebraic elements for the notions of ‘many’”, apresentam uma estrutura matemática denominada *conjuntos fechados superiormente* que torna possível o desenvolvimento de uma álgebra para “muitos” e também de uma lógica proposicional para “muitos”. De modo similar ao trabalho apresentado por Feitosa, Nascimento e Grácio (2009) para a noção de “muitos”, este trabalho investiga os elementos algébricos necessários para a formalização da noção de “poucos” e desenvolve uma álgebra para “poucos”, que tem como base uma estrutura matemática denominada *conjuntos quase fechados inferiormente*. A partir dessa álgebra para “poucos”, este trabalho apresenta uma lógica proposicional para “poucos” (LPP) nos sistemas dedutivos: hilbertiano e *tableaux*.

Palavras-chave: Lógica proposicional para “muitos”; lógica proposicional para “poucos”; sistema de *tableaux*; quantificadores.

ABSTRACT

Grácio (1999), in her doctorate thesis entitled “Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza”, provided a formalization of the term “many”, whose can be met in natural language, inside a quantificational context. To formalize this concept in a propositional environment, Feitosa, Nascimento and Grácio (2009) presented another mathematical structure entitled *upper closed sets* in the paper “Algebraic elements for the notions of ‘many’ ”, whose allows the development of an algebra for “many” and also a propositional logic for many. In a similar way, this paper investigates the necessary algebraic elements for the formalization of the notion of "few". We also develop an algebra for “few” which is based on a mathematical structure called *lower almost closed sets*. From this algebra for “few", we present a propositional logic for few (LPP) in a Hilbert system. After that we present the LPP in *tableau*x.

Key-words: Propositional logic for many; propositional logic for few; *tableau*x system; quantifiers.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 09

1. TÓPICOS DE ÁLGEBRA 14

1.1. Reticulados 14

1.2. Álgebras de Boole 20

2. A LÓGICA DO “MUITO” 26

2.1. Família fechada superiormente própria 27

2.2. A sintaxe e a semântica da lógica do “muito” 28

2.3. A noção intuitiva de “poucos” 29

2.4. Família quase fechada inferiormente própria 29

3. A LÓGICA PROPOSICIONAL PARA “POUCOS” 31

3.1. Conjuntos quase fechados inferiormente 31

3.2. Uma axiomática para a lógica proposicional para “poucos” (LPP) 36

3.3. A álgebra para “poucos” 39

3.4. Adequação semântica da LPP 41

4. A LÓGICA PROPOSICIONAL PARA “POUCOS” EM *TABLEAUX* 55

4.1. Origens do método de *tableaux* 55

4.2. A lógica proposicional clássica em *tableaux* 56

4.2.1. Sintaxe 56

4.2.2. Semântica 57

4.2.3. "Tableaux" analíticos 59

4.2.4. A lógica proposicional clássica em "tableaux" 66

4.3. A lógica proposicional para "poucos" em *tableaux* 80

CONSIDERAÇÕES FINAIS 91

REFERÊNCIAS 94

Introdução

A lógica, entre outras coisas, trata da "análise de métodos de raciocínio" (Mendelson, 1964, p. 01). A lógica contemporânea desempenha esse papel por meio do uso de linguagens artificiais, formadas por conjuntos de símbolos que permitem encontrar expressões que têm significados únicos para uma teoria, isto é, sem ambiguidade. Para tanto, é necessário, de alguma maneira, traduzir essas sentenças da linguagem natural em sentenças da linguagem artificial.

Atualmente, na lógica dedutiva, muitas sentenças da linguagem natural podem ser formalizadas utilizando linguagens artificiais.

Este trabalho se dedica, apenas, a algumas das sentenças que envolvem algum tipo de quantificação. Segundo Frápolli (2007), "expressões quantificadas são expressões que indicam quantidade", por exemplo: "todo", "algum", "nenhum", "a maioria", "a minoria", "quase todos", "quase nenhum", "muitos", "poucos", entre muitas outras.

Historicamente, uma teoria formal da quantificação com a utilização de linguagens artificiais só teve origem com Gottlob Frege [1848 - 1925] em sua obra *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (1967), publicada originalmente em 1879. Entretanto, muito antes o filósofo grego Aristóteles [384 - 322 a. C.] já demonstrava interesse em formalizar, no que viria a ser o cerne da lógica dedutiva, argumentos que envolviam quantificadores, por meio de sua *teoria dos silogismos.*

Segundo Blanché e Dubucs (1996), um *silogismo* é composto por três termos unidos dois a dois em conjunto de três sentenças, sendo as duas primeiras premissas e a última conclusão. Cada um desses termos ocorre duas vezes, um deles é chamado de termo médio, pois tem a função de fazer a mediação entre os outros dois termos que aparecem ambos na conclusão. O termo que aparece como sujeito da conclusão é chamado de termo menor e o que aparece como predicado da conclusão é chamado de termo maior.

As sentenças de um silogismo podem ser universais ou particulares, afirmativas ou negativas. Por exemplo, a sentença "Todo homem é racional" é classificada na teoria dos silogismos de Aristóteles como uma afirmativa universal, enquanto que a sentença "Algum homem é louco" é uma afirmativa particular. Já as sentenças "Algum lógico não é filósofo" e "Nenhuma criança é teimosa" são exemplos, respectivamente, de sentenças negativa particular e negativa universal. Segue abaixo um exemplo de silogismo:

Toda Planta de folhas largas perde as suas folhas.
Toda videira é uma planta de folhas largas.
Toda videira perde as suas folhas.

Há um longo período entre os trabalhos de Aristóteles e de Frege sem grandes desenvolvimentos significativos com relação à teoria da quantificação. Segundo Frápolli (2007), Peirce desenvolveu, de maneira paralela a Frege, as bases da concepção contemporânea de quantificadores. Entretanto, seu trabalho em relação aos quantificadores não é tão conhecido e divulgado quanto o de Frege.

Os trabalhos de Peirce e Frege deram origem à lógica clássica de primeira ordem, que trata dos quantificadores universal "∀" e existencial "∃". Entretanto, a lógica clássica de primeira ordem não é suficiente para formalizar qualquer sentença da linguagem natural. Mostowski, em seu artigo *On a generalization of quantifiers*, publicado em 1957, aponta a existência de muitos outros quantificadores que são matematicamente interessantes, mas que não podem ser definidos a partir dos quantificadores de primeira ordem: universal e existencial. Esses quantificadores, não definidos na lógica clássica de primeira ordem, foram denominados por ele *quantificadores generalizados*.

Neste trabalho, a expressão "quantificadores generalizados" é utilizada, no mesmo sentido que Mostowski, para se referir a quantificadores que não podem ser definidos a partir dos quantificadores de primeira ordem universal e existencial.

Ainda no seu artigo de 1957, Mostowski introduziu um cálculo formal para tratar das sentenças que envolvem esses novos quantificadores e, desde então, diversos trabalhos têm sido publicados sobre este tema. Dentre eles, destaca-se o artigo de Barwise e Cooper denominado *generalized quantifiers and natural language*, publicado em 1981, em que, entre outras coisas, discute a natureza dos quantificadores generalizados, sua relação sintática com a linguagem natural e contribui para uma reaproximação entre lógica e linguagem natural, por meio do desenvolvimento de uma lógica com quantificadores generalizados.

Sette, Carnielli e Veloso (1999), também buscando uma formalização lógica para um tipo específico de quantificador generalizado, apresentaram um sistema lógico monotônico, denominado lógica dos ultrafiltros. O nome desse sistema é devido à composição de sua estrutura semântica: um conjunto universo e um ultrafiltro sobre esse universo. A lógica dos ultrafiltros é uma extensão da lógica de primeira ordem, feita basicamente pelo acréscimo de

um quantificador generalizado à linguagem clássica de primeira ordem. O novo quantificador "quase todos" é interpretado por uma estrutura denominada *ultrafiltro próprio*.

Motivada por esse trabalho, Grácio (1999), em sua tese de doutorado, intitulada "Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza", introduziu um conjunto de lógicas monotônicas não-clássicas, denominadas por ela de *lógicas moduladas*.

São particularizações das lógicas moduladas: a lógica dos ultrafiltros que, como já foi dito, formaliza as noções de "quase todos" e "geralmente", a lógica da maioria, que como o nome sugere, formaliza a noção intuitiva de "a maioria", a lógica do "muito", que formaliza a noção intuitiva de "muitos" e a lógica do plausível que formaliza a noção de "uma boa parte".

Grácio (1999) define que uma família de sistemas lógicos modulados é caracterizada pela inclusão na linguagem da lógica de primeira ordem de um quantificador generalizado **Q**, chamado de *quantificador modulado*. Esse quantificador é um intermediário entre os dois quantificadores clássicos: universal e existencial.

Uma lógica modulada em particular, a lógica do "muito", introduzida por Grácio (1999), insere um novo quantificador **G** na sintaxe da clássica lógica de primeira ordem e essa lógica captura a noção de "muitos", por meio de uma estrutura matemática denominada *família própria de conjuntos fechados superiormente*.

Depois de investigar estes elementos que permitem a formalização do conceito de "muitos", Feitosa, Nascimento e Grácio (2009), no artigo intitulado "Algebraic elements for the notions of 'many'" apresentaram uma estrutura algébrica que torna possível o desenvolvimento de uma álgebra para a noção de "muitos". Essa estrutura é denominada *conjuntos fechados superiormente* ou *cfs*.

No mesmo artigo, foi introduzida uma *álgebra para "muitos"* e uma *lógica proposicional para "muitos"*, que é uma lógica modal proposicional com um operador modal para formalizar a noção de "muitos" no campo proposicional. Esse operador corresponde na estrutura algébrica para "muitos", ao conceito de conjuntos fechados superiormente em uma álgebra Booleana e o conceito de cfs é desenvolvido sobre um reticulado.

A lógica proposicional para "muitos", de certa maneira, captura no contexto proposicional algumas características do termo "muitos" da linguagem natural, entretanto, como interpretar o termo "poucos" da linguagem natural em um contexto proposicional? Seria isso

apenas uma dualização[1] trivial da lógica proposicional para “muitos” de Feitosa, Nascimento e Grácio (2009)?

Com o objetivo de responder estas e outras perguntas, este trabalho investiga a estrutura cfs (conjuntos fechados superiormente) e uma estrutura dual denominada *conjuntos fechados inferiormente* ou *cfi*.

Esta nova estrutura cfi, entretanto, não parece capturar a noção intuitiva de “poucos” da linguagem natural. A definição de cfi deve ser modificada para capturar, mesmo que parcialmente, a noção intuitiva de “poucos”. Esse trabalho, então, propõe outra estrutura semelhante denominada *conjuntos quase fechados inferiormente* ou *cqfi.*

Esta estrutura cqfi possibilitará a apresentação de uma álgebra para “poucos” e também de uma lógica proposicional para “poucos”, a LPP. A lógica proposicional para “poucos” será apresentada inicialmente na versão hilbertiana, ou seja, em um sistema composto por axiomas e regras de dedução.

O método hilbertiano é um método dedutivo e, consequentemente, ele permite dizer se uma determinada fórmula é um teorema da teoria em questão. Entretanto ele não é o único sistema dedutível disponível na literatura. Existem muitos outros como o cálculo de sequêntes, a dedução natural e o sistema de *tableaux*.

Devido à eficiência do método de *tableaux*, este trabalho apresenta também a lógica proposicional para “poucos” em um sistema de *tableaux* e mostra a equivalência entre a LPP na versão hilbertiana e a LPP em *tableaux*.

Assim, a fim de cumprir os objetivos dessa dissertação, no primeiro capítulo colocamos alguns resultados de reticulados e de álgebras de Boole, necessários às demonstrações de diversos resultados presentes nos seguintes.

No segundo capítulo, apresentamos de forma mais detalhada a lógica do “muito” que inspirou este trabalho e também discutimos um pouco sobre a noção intuitiva relacionada ao termo “poucos” que este trabalho pretende resgatar.

No terceiro capítulo, principal capítulo dessa dissertação, introduzimos a álgebra para “poucos”, a lógica proposicional para “poucos” e os teoremas de correção e completude para a lógica proposicional para “poucos” relativas às álgebras para poucos.

Por fim, no quarto capítulo, detalhamos uma das versões do método de *tableaux* para a lógica proposicional clássica e, também, introduzimos a lógica proposicional para “poucos”

[1] O termo “dualização” é utilizado para se referir à criação de um sistema “dual”. O termo “dual”, por sua vez, neste trabalho se refere à noção intuitiva de simetria ou oposição.

na versão *tableaux*. A LPP na versão *tableaux* será equivalente à LPP na versão hilbertiana apresentada no terceiro capítulo.

1. TÓPICOS DE ÁLGEBRA

Muito grosseiramente, pode-se dizer que um sistema algébrico é constituído por um conjunto munido de algumas "operações" (funções) sobre os elementos deste conjunto. Álgebras de Boole e reticulados, elementos-chave deste capítulo, são alguns exemplos de sistemas algébricos. Eles serão utilizados (nesse trabalho) no processo de *algebrização* da lógica proposicional para "poucos". A *algebrização* será apresentada como ferramenta para obtenção dos teoremas de correção e completude para esta lógica.

Antes de iniciarmos, enfatizamos que as definições e os resultados colocados aqui foram escritos com base nos trabalhos de Feitosa, Nascimento e Grácio (2009), Mendelson (1977), Miraglia (1987) e Rasiowa e Sikorski (1963).

1.1. Reticulados

Definição 1.1.1: Seja R um conjunto não vazio sobre o qual estão definidas duas operações binárias, a *conjunção* ($\wedge$) e a *disjunção* ($\vee$). A estrutura algébrica **R** = (R, $\vee$, $\wedge$) é um *reticulado* se para todos x, y, z $\in$ R, valem as seguintes leis:

R_1: $x \wedge y = y \wedge x$ (comutatividade)

R_2: $x \vee y = y \vee x$ (comutatividade)

R_3: $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (associatividade)

R_4: $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (associatividade)

R_5: $(x \wedge y) \vee y = y$ (absorção)

R_6: $(x \vee y) \wedge y = y$ (absorção).

Proposição 1.1.2: Se **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) é um reticulado, então para todos x, y $\in$ R valem:

i) $x \wedge x = x = x \vee x$ (idempotência)

ii) $x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$ (ordenação).

Demonstração:

i) De R_5, $[(x \vee x) \wedge x] \vee x = x$. (I)

De R_6, $(x \vee x) \wedge x = x$. (II)

Substituindo (II) em (I), obtém-se $x \vee x = x$.

Analogamente, de R_6 vem $[(x \wedge x) \vee x] \wedge x = x$. (I)

De R_5, $(x \wedge x) \vee x = x$. (II)

Substituindo (II) em (I) obtém-se que $x \wedge x = x$.

ii) Por hipótese $x \wedge y = x$. (I)

De R_5, $(x \wedge y) \vee y = y$. (II)

Substituindo (I) em (II), obtém-se que $x \vee y = y$.

Por hipótese $x \vee y = y$.

De R_2, $y \vee x = y$. (I)

De R_6, $(y \vee x) \wedge x = x$. (II)

Substituindo (I) em (II), obtém-se $y \wedge x = x$.

De R_1, vem que $x \wedge y = x$. ■

Definição 1.1.3: Seja **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado e x, y $\in$ R:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x.$$

Proposição 1.1.4: Seja **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) um reticulado e x, y $\in$ **R**:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y.$$

Demonstração:

Pela Definição 1.1.3, tem-se que $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$, mas de acordo com o item (ii) da Proposição 1.1.2, $x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y$. Logo, $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$. ■

Nota: um reticulado **R** também pode ser entendido como uma estrutura ordenada **R** = (R, $\leq$) em que $\leq$ é uma relação de ordem definida por meio de uma das seguintes equivalências:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \text{ ou } x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x.$$

Proposição 1.1.5: Em um reticulado **R** = (R, $\leq$), a relação $\leq$ é uma ordem parcial, ou seja, para todos x, y, z $\in$ R:

i) $x \leq x$ (reflexiva)

ii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ (anti-simétrica)

iii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitiva)

Demonstração:

i) Pela Definição 1.1.3, $x \wedge y = x \Leftrightarrow x \leq y$ e, pela Proposição 1.1.2 item (i), $x \wedge x = x$, portanto, $x \wedge x = x \Leftrightarrow x \leq x$.

ii) Pela Definição 1.1.3, $x \leq y \Rightarrow x \wedge y = x$ e $y \leq x \Rightarrow y \wedge x = y$. De R_1, $y \leq x \Rightarrow x \wedge y = y$. Logo, $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$.

iii) Pela Definição 1.1.3, $x \leq y \Rightarrow x \wedge y = x$ e $y \leq z \Rightarrow y \wedge z = y$. Substituindo y na primeira sentença acima, tem-se $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \wedge (y \wedge z) = x$. De R_3, $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow (x \wedge y) \wedge z = x$. Substituindo x nessa última sentença obtém-se $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \wedge z = x$. Como por definição, $x \wedge z = x \Leftrightarrow x \leq z$. Portanto, $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$. ■

Proposição 1.1.6: Um reticulado **R** = (R, ≤) possui as seguintes propriedades:

P_1: $x \leq x \vee y$

P_2: $y \leq x \vee y$

P_3: $x \wedge y \leq x$

P_4: $x \wedge y \leq y$

P_5: $x \leq y$ e $z \leq t \Rightarrow x \wedge z \leq y \wedge t$ e $x \vee z \leq y \vee t$.

Demonstração:

P_1) $x =$ (R_6)

$(y \vee x) \wedge x =$ (R_1)

$x \wedge (y \vee x) =$ (R_2)

$x \wedge (x \vee y) \Leftrightarrow$ (Definição 1.1.3)

$x \leq x \vee y$.

P_2) $y =$ (R_6)

$(x \vee y) \wedge y$ (R_1)

$y \wedge (x \vee y) \Leftrightarrow$ (Definição 1.1.3)

$y \leq x \vee y$.

P_3) $x =$ (R_5)

$(x \wedge y) \vee x \Leftrightarrow$ (Proposição 1.1.4)

$x \wedge y \leq x$.

P_4) $y =$ (R_5)

$(x \wedge y) \vee y \Leftrightarrow$ (Proposição 1.1.4)

$x \wedge y \leq y$.

P_5) De R_1 e R_3, $(x \wedge z) \wedge (y \wedge t) = x \wedge (z \wedge y) \wedge t = x \wedge (y \wedge z) \wedge t = (x \wedge y) \wedge (z \wedge t)$. Como $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ e $z \leq t \Leftrightarrow z \wedge t = z$, obtém-se $(x \wedge y) \wedge (z \wedge t) = x \wedge z$. Logo, $(x \wedge z) \wedge (y \wedge t) = x \wedge z$, o que, pela Definição 1.1.3, significa $x \wedge z \leq y \wedge t$. Também, De R_2 e R_4, $(x \vee z) \vee (y$

$\vee$ t) = x $\vee$ (z $\vee$ y) $\vee$ t = x $\vee$ (y $\vee$ z) $\vee$ t = (x $\vee$ y) $\vee$ (z $\vee$ t) e como x $\leq$ y $\Leftrightarrow$ x $\vee$ y = y e z $\leq$ t $\Leftrightarrow$ z $\vee$ t = t, tem-se que (x $\vee$ y) $\vee$ (z $\vee$ t) = y $\vee$ t. Portanto, (x $\vee$ z) $\vee$ (y $\vee$ t) = y $\vee$ t, o que pela Proposição 1.1.4 significa x $\vee$ z $\leq$ y $\vee$ t. ■

Proposição 1.1.7: Num reticulado **R** = (R, $\leq$) tem-se que:

i) sup {x, y} = x $\vee$ y

ii) inf {x, y} = x $\wedge$ y.

Demonstração:

Por R_5, (x $\wedge$ y) $\vee$ y = y, o que pela Proposição 1.1.4 significa que x $\wedge$ y $\leq$ y.

Por R_6, (x $\vee$ y) $\wedge$ y = y e aplicando a comutatividade tem-se y $\wedge$ (x $\vee$ y) = y, o que pela Definição 1.1.3 significa que y $\leq$ x $\vee$ y.

Das duas afirmações anteriores vem x $\wedge$ y $\leq$ y $\leq$ x $\vee$ y, $\forall$ x, y $\in$ A.

Assim, x $\vee$ y é limitante superior de {x, y} e x $\wedge$ y é limitante inferior de {x, y}.

Agora, se z $\geq$ x e z $\geq$ y, então por P_5, z $\geq$ x $\vee$ y e, portanto, x $\vee$ y = sup {x, y}. Analogamente, inf {x, y} = x $\wedge$ y. ■

Definição 1.1.8: Seja (R, $\leq$) um conjunto ordenado tal que para todos x, y $\in$ R, existem em R os elementos inf {x, y}e sup {x, y}. Uma estrutura algébrica **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) em que x $\vee$ y = sup {x, y} e x $\wedge$ y = inf {x, y} é um *reticulado*.

Definição 1.1.9: Seja **R** = (R, $\leq$) um reticulado, se **R** tem o menor elemento para a ordem $\leq$, então esse elemento é o *zero* de **R**, denotado por 0. Se um reticulado **R** tem o maior elemento para a ordem $\leq$, então esse elemento é a *unidade* de **R** e é denotado por 1.

Proposição 1.1.10: Se **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) tem o zero, então para todo x $\in$ R:

$$x \wedge 0 = 0 \text{ e } x \vee 0 = x.$$

Demonstração:

Pela Definição 1.1.9, para todo x $\in$ R, 0 $\leq$ x. Logo, pela Definição 1.1.3, tem-se que 0 $\wedge$ x = 0 e, pela Proposição 1.1.4, tem-se que 0 $\vee$ x = x. Portanto, por comutatividade, x $\wedge$ 0 = 0 e x $\vee$ 0 = x. ■

Proposição 1.1.11: Se **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) tem o elemento unidade 1, então para todo x $\in$ R:

$$x \wedge 1 = x \text{ e } x \vee 1 = 1.$$

Demonstração:

Pela Definição 1.1.9, para todo x $\in$ R, x $\leq$ 1. Logo, pela Definição 1.1.3 tem-se que x $\wedge$ 1 = x e, pela Proposição 1.1.4, tem-se que x $\vee$ 1 = 1. Portanto, por comutatividade, x $\wedge$ 1 = x e x $\vee$ 1 = 1. ■

Definição 1.1.12: Um reticulado **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) é distributivo[2] quando as seguintes leis são válidas para todos x, y, z $\in$ R:

i) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ (distributividade do lado direito)

ii) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ (distributividade do lado direito).

Segundo a validade da comutatividade, as leis distributivas do lado esquerdo também são válidas.

Teorema 1.1.13: Em todo reticulado **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) com x, y $\in$ R, é válido:

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) \Leftrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z).$$

Demonstração:

Suponha que $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ é válida. Assim, $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) = [x \vee (y \wedge z)] \wedge [z \vee (y \wedge z)] = [x \vee (y \wedge z)] \wedge z = [(x \vee y) \wedge (x \vee z)] \wedge z = (x \vee y) \wedge [(x \vee z) \wedge z] = (x \vee y) \wedge z$. ■

Como em qualquer reticulado, $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ é equivalente a $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$. Então, na definição de reticulado distributivo, basta considerar uma destas propriedades distributivas.

Definição 1.1.14: Seja **R** um reticulado com 0 e 1. Dado x $\in$ R, um elemento y $\in$ R é o *complemento* de x em **R** se x $\wedge$ y = 0 e x $\vee$ y = 1.

Definição 1.1.15: Um reticulado **R** é *complementado* quando todo elemento de **R** tem um complemento em **R**.

[2] Nem todo reticulado é distributivo, ver Mendelson (1977, p. 183).

Proposição 1.1.16: Em um reticulado **R** com 0 e 1, o *complemento* de x, se existir, é único e é denotado por ~x.

Demonstração:

Considere-se ~x e y dois complementos de x. Por definição, para cada x existe ~x de modo que $x \vee {\sim}x = 1$ e $x \wedge {\sim}x = 0$ e, também para cada x existe y tal que $x \vee y = 1$ e $x \wedge y = 0$. Assim, $y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee {\sim}x) = (y \wedge x) \vee (y \wedge {\sim}x) = 0 \vee (y \wedge {\sim}x) = y \wedge {\sim}x \Leftrightarrow y \leq {\sim}x$. Ainda, $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge {\sim}x) = (y \vee x) \wedge (y \vee {\sim}x) = 1 \wedge (y \vee {\sim}x) = y \vee {\sim}x \Leftrightarrow {\sim}x \leq y$. Portanto, ~x = y. ■

Definição 1.1.17: Sejam **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) e **S** = (S, $\wedge$, $\vee$) reticulados e h: R $\rightarrow$ S uma função entre os seus domínios. A função h é um *homomorfismo* de reticulados se para todos x, y $\in$ R têm-se o seguinte:

$$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y) \text{ e } h(x \vee y) = h(x) \vee h(y).$$

Proposição 1.1.18: Sejam **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) e **S** = (S, $\wedge$, $\vee$) reticulados e h: R $\rightarrow$ S, todo homomorfismo de reticulados h preserva a ordenação, ou seja:

$$x \leq y \Rightarrow h(x) \leq h(y).$$

Demonstração:

Como $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ e $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$ e, por hipótese, $x \leq y$, então $h(x \wedge y) = h(x)$, mas, por definição $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$. Logo, $h(x) \wedge h(y) = h(x)$. Assim, aplicando a Definição 1.1.3, obtém-se que $h(x) \leq h(y)$. Portanto, $x \leq y \Rightarrow h(x) \leq h(y)$. ■

Definição 1.1.19: Sejam **R** = (R, $\wedge$, $\vee$) e **S** = (S, $\wedge$, $\vee$) reticulados e h: R $\rightarrow$ S um homomorfismo bijetivo de reticulados, então h é chamado de *isomorfismo*.

Proposição 1.1.20: Se **R** é um reticulado complementado, então:

i) ~ ~ x = x

ii) ~ ($x \wedge y$) = ~ x $\vee$ ~ y (Leis de De Morgan)

iii) ~ ($x \vee y$) = ~ x $\wedge$ ~ y (Leis de De Morgan).

Demonstração:

i) Considere-se $\sim x = z$. O complemento de z, se existir, é único e denotado por $\sim z$, e que o complemento de x, se existir, é único e denotado por $\sim x$. Assim, $\sim x = z \Leftrightarrow x = \sim z$. Logo, $\sim \sim x = \sim z = x$ e, portanto, $\sim \sim x = x$.

ii) Por definição, z é o complemento de t quando $t \wedge z = 0$ e $t \vee z = 1$. Também, $x \wedge y$ é o complemento de $\sim(x \wedge y)$. Como pela Proposição 1.1.16 o complemento de t, se existir, é único e denotado por $\sim t$, então, para mostrarmos que $\sim (x \wedge y) = \sim x \vee \sim y$, basta mostrarmos que $x \wedge y$ também é o complemento de $\sim x \vee \sim y$:

$(x \wedge y) \wedge (\sim x \vee \sim y) = (x \wedge y \wedge \sim x) \vee (x \wedge y \wedge \sim y) = [(x \wedge \sim x) \wedge y] \vee [(y \wedge \sim y) \wedge x)] = (0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) = 0 \vee 0 = 0.$

$(x \wedge y) \vee (\sim x \vee \sim y) = (x \vee \sim x \vee \sim y) \wedge (y \vee \sim x \vee \sim y) = [(x \vee \sim x) \vee \sim y] \wedge [(y \vee \sim y) \vee \sim x)] = (1 \vee \sim y) \wedge (1 \vee \sim x) = 1 \wedge 1 = 1.$

iii) Utilizando justificativas análogas ao item anterior tem-se que:

$(x \vee y) \wedge (\sim x \wedge \sim y) = (x \wedge \sim x \wedge \sim y) \vee (y \wedge \sim x \wedge \sim y) = [(x \wedge \sim x) \wedge \sim y] \vee [(y \wedge \sim y) \wedge \sim x)] = (0 \wedge \sim y) \vee (0 \wedge \sim x) = 0 \vee 0 = 0.$

$(x \vee y) \vee (\sim x \wedge \sim y) = (x \vee y \vee \sim x) \wedge (x \vee y \vee \sim y) = [(x \vee \sim x) \vee y] \wedge [(y \vee \sim y) \vee x)] = (1 \vee y) \wedge (1 \vee x) = 1 \wedge 1 = 1.$ ■

1.2 Álgebras de Boole

As álgebras de Boole são casos especiais de reticulados.

Definição 1.2.1: Uma *álgebra booleana*, ou *álgebra de Boole*, **B** é uma estrutura do tipo $(B, \sim, \vee, \wedge, 0, 1)$, em que $\wedge$ (conjunção) e $\vee$ (disjunção) são operações binárias definidas sobre B, $\sim$ (complemento) é uma operação unária sobre B e 0 e 1 são dois elementos específicos de B de maneira que vales os seguintes axiomas:

Ax_1:	$\forall x, y \in B: x \vee y = y \vee x$	(comutativa)
Ax_2:	$\forall x, y \in B: x \wedge y = y \wedge x$	(comutativa)
Ax_3:	$\forall x, y, z \in B: x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	(distributiva)
Ax_4:	$\forall x, y, z \in B: x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	(distributiva)
Ax_5:	$\forall x \in B: x \vee 0 = x$	(elemento neutro)

Ax_6: $\forall x \in B: x \wedge 1 = x$ (elemento neutro)

Ax_7: $\forall x \in B, \exists \sim x \in B: x \vee \sim x = 1$ e $x \wedge \sim x = 0$ (elemento simétrico)

Ax_8: $0 \neq 1$.

Teorema 1.2.2: O complemento de cada elemento de uma álgebra de Boole é único, ou seja, se $x \wedge y = 0$ e $x \vee y = 1$, então $y = \sim x$.

Demonstração:

(I) $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \sim x) = (y \vee x) \wedge (y \vee \sim x) = (x \vee y) \wedge (y \vee \sim x) = 1 \wedge (y \vee \sim x) = (y \vee \sim x) \wedge 1 = y \vee \sim x$.

(II) $\sim x = \sim x \vee 0 = \sim x \vee (x \wedge y) = (\sim x \vee x) \wedge (\sim x \vee y) = (x \vee \sim x) \wedge (\sim x \vee y) = 1 \wedge (\sim x \vee y) = \sim x \vee y = y \vee \sim x$.

De (I) e (II) $y = y \vee \sim x = \sim x$. ■

Proposição 1.2.3: Se $z \in \mathbf{B}$, então $\sim(\sim z) = z$.

Demonstração:

(I)

$\sim z \vee z = z \vee \sim z$ (Ax_1)

$\sim z \vee z = 1$ (Ax_7)

(II)

$\sim z \wedge z = z \wedge \sim z$ (Ax_2)

$\sim z \wedge z = 0$ (Ax_7)

Pelo Teorema 1.2.2, considere-se $\sim z = x$ e $z = y$, tem-se que $\sim(\sim z) = z$. ■

Teorema 1.2.4: Se $x \in \mathbf{B}$, então são válidas as afirmações abaixo:

i) $x \wedge x = x$

ii) $x \vee x = x$.

Demonstração:

i) $x = x \wedge 1 = x \wedge (x \vee \sim x) = (x \wedge x) \vee (x \vee \sim x) = (x \wedge x) \vee 0 = x \wedge x$. Portanto, $x \wedge x = x$.

ii) $x = x \vee 0 = x \vee (x \wedge \sim x) = (x \vee x) \wedge (x \vee \sim x) = (x \vee x) \wedge 1 = x \vee x$. Portanto, $x \vee x = x$.

■

Teorema 1.2.5: Para todo x, y, z $\in$ **B** são válidas as afirmações abaixo:

i) $x \wedge (x \vee y) = x$ (absorção)

ii) $x \vee (x \wedge y) = x$ (absorção)

iii) $[(y \wedge x = z \wedge x) \wedge (y \wedge \sim x = z \wedge \sim x)] \rightarrow y = z$

iv) $[(y \vee x = z \vee x) \wedge (y \vee \sim x = z \vee \sim x)] \rightarrow y = z$

v) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (associativa)

vi) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (associativa)

vii) $x \wedge \sim y = 0 \leftrightarrow x \wedge y = x$

viii) $\sim 0 = 1$

ix) $\sim 1 = 0$

x) $x \wedge (\sim x \vee y) = x \wedge y$

xi) $x \vee (\sim x \wedge y) = x \vee y$.

Demonstração:

i) $x \wedge (x \vee y) = (x \vee 0) \wedge (x \vee y) = x \vee (0 \wedge y) = x \vee 0 = x$. Portanto, $x \wedge (x \vee y) = x$.

ii) $x \vee (x \wedge y) = (x \wedge 1) \vee (x \wedge y) = x \wedge (1 \vee y) = x \wedge 1 = x$. Portanto, $x \vee (x \wedge y) = x$.

iii) $y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee \sim x) = (y \wedge x) \vee (y \wedge \sim x) = (z \wedge x) \vee (z \wedge \sim x) = z \wedge (x \vee \sim x) = z \wedge 1 = z$. Portanto, $[(y \wedge x = z \wedge x) \wedge (y \wedge \sim x = z \wedge \sim x)] \rightarrow y = z$.

iv) $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \sim x) = (y \vee x) \wedge (y \vee \sim x) = (z \vee x) \wedge (z \vee \sim x) = z \vee (x \wedge \sim x) = z \vee 0 = z$. Portanto, $[(y \vee x = z \vee x) \wedge (y \vee \sim x = z \vee \sim x)] \rightarrow y = z$.

v) Ao chamar y de $[x \vee (y \vee z)]$ e z de $[(x \vee y) \vee z]$ em (iii), tem-se que: Se (I) $[x \vee (y \vee z)] \wedge x = [(x \vee y) \vee z] \wedge x$ e (II) $[x \vee (y \vee z)] \wedge \sim x = [(x \vee y) \vee z] \wedge \sim x$, então, $[x \vee (y \vee z)] = [(x \vee y) \vee z]$.

Para demonstrar primeiro (I), tem-se que:

a) $[x \vee (y \vee z)] \wedge x = x \wedge [x \vee (y \vee z)] = x$.

b) $[(x \vee y) \vee z] \wedge x = x \wedge [(x \vee y) \vee z] = [x \wedge (x \vee y)] \vee [x \wedge z] = x \vee (x \wedge z) = x$. Portanto, $[x \vee (y \vee z)] \wedge x = [(x \vee y) \vee z] \wedge x = x$.

Agora, para demonstrar (II), tem-se que:

a) $[(x \vee y) \vee z] \wedge \sim x = \sim x \wedge [(x \vee y) \vee z] = [\sim x \wedge (x \vee y)] \vee [\sim x \wedge z] = [(\sim x \wedge x) \vee (\sim x \wedge y)] \vee [\sim x \wedge z] = [0 \vee (\sim x \wedge y)] \vee [\sim x \wedge z] = (\sim x \wedge y) \vee (\sim x \wedge z) = \sim x \wedge (y \vee z)$.

b) $[x \vee (y \vee z)] \wedge \sim x = \sim x \wedge [x \vee (y \vee z)] = [\sim x \wedge x] \vee [\sim x \wedge (y \vee z)] = 0 \vee [\sim x \wedge (y \vee z)] = \sim x \wedge (y \vee z)$. Portanto, $[x \vee (y \vee z)] \wedge \sim x = [(x \vee y) \vee z] \wedge \sim x$.

Logo, $[x \vee (y \vee z)] = [(x \vee y) \vee z]$.

vi) Ao chamar y de $[x \wedge (y \wedge z)]$ e z de $[(x \wedge y) \wedge z]$ em (iv), tem-se que:

Se (I) $[x \wedge (y \wedge z)] \vee x = [(x \wedge y) \wedge z] \vee x$ e (II) $[x \wedge (y \wedge z)] \vee \sim x = [(x \wedge y) \wedge z] \vee \sim x$, então, $[x \wedge (y \wedge z)] = [(x \wedge y) \wedge z]$.

Para demonstrar primeiro (I), tem-se que:

a) $[x \wedge (y \wedge z)] \vee x = x \vee [x \wedge (y \wedge z)] = x$.

b) $[(x \wedge y) \wedge z] \vee x = x \vee [(x \wedge y) \wedge z] = [x \vee (x \wedge y)] \wedge [x \vee z] = x \wedge (x \vee z) = x$. Portanto, $[x \wedge (y \wedge z)] \vee x = [(x \wedge y) \wedge z] \vee x = x$.

Agora, para demonstrar (II), tem-se que:

a) $[(x \wedge y) \wedge z] \vee \sim x = \sim x \vee [(x \wedge y) \wedge z] = [\sim x \vee (x \wedge y)] \wedge [\sim x \vee z] = [(\sim x \vee x) \wedge (\sim x \vee y)] \wedge [\sim x \vee z] = [1 \wedge (\sim x \vee y)] \wedge [\sim x \vee z] = (\sim x \vee y) \wedge (\sim x \vee z) = \sim x \vee (y \wedge z)$.

b) $[x \wedge (y \wedge z)] \vee \sim x = \sim x \vee [x \wedge (y \wedge z)] = [\sim x \vee x] \wedge [\sim x \vee (y \wedge z)] = 1 \wedge [\sim x \vee (y \wedge z)] = \sim x \vee (y \wedge z)$. Portanto, $[x \wedge (y \wedge z)] \vee \sim x = [(x \wedge y) \wedge z] \vee \sim x = \sim x \vee (y \wedge z)$.

Logo, $[x \wedge (y \wedge z)] = [(x \wedge y) \wedge z]$.

vii) ($\rightarrow$) $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee \sim y) = (x \wedge y) \vee (x \wedge \sim y) = (x \wedge y) \vee 0 = x \wedge y$.

($\leftarrow$) $0 = x \wedge 0 = x \wedge (y \wedge \sim y) = (x \wedge y) \wedge \sim y = x \wedge \sim y$. Portanto, $x \wedge \sim y = 0 \leftrightarrow x \wedge y = x$.

viii) $1 = 0 \vee \sim 0 = \sim 0 \vee 0 = \sim 0$. Portanto, $\sim 0 = 1$.

ix) $0 = 1 \wedge \sim 1 = \sim 1 \wedge 1 = \sim 1$. Portanto, $\sim 1 = 0$.

x) $x \wedge (\sim x \vee y) = (x \wedge \sim x) \vee (x \wedge y) = 0 \vee (x \wedge y) = (x \wedge y) \vee 0 = x \wedge y$. Portanto, $x \wedge (\sim x \vee y) = x \wedge y$.

xi) $x \vee (\sim x \wedge y) = (x \vee \sim x) \wedge (x \vee y) = 1 \wedge (x \vee y) = (x \vee y) \wedge 1 = x \vee y$. Portanto, $x \vee (\sim x \wedge y) = x \vee y$. ■

Definição 1.2.6: Seja a álgebra booleana **B** = (B, ~, $\vee$, $\wedge$, 0, 1), uma *relação binária* $\leq$ em **B** é dada por:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x.$$

Teorema 1.2.7: A relação $\leq$ em uma álgebra booleana **B** é uma *relação de ordem parcial*, ou seja, são válidas as seguintes afirmações:

i) $x \leq x$ (reflexiva)

ii) se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ (anti-simétrica)

iii) se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ (transitiva).

Demonstração:

i) $x \wedge x = x$ (Teorema 1.2.4, i)

$\Leftrightarrow x \leq x$ (Definição 1.2.6).

Portanto, $x \leq x$.

ii) $x = x \wedge y$ (Definição 1.2.6 e hipótese)

$= y \wedge x$ (Ax_2)

$= y$ (Definição 1.2.6 e hipótese).

Portanto, $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$.

iii) $x = x \wedge y$ (Definição 1.2.6 e hipótese)

$= x \wedge (y \wedge z)$ (Definição 1.2.6 e hipótese)

$= (x \wedge y) \wedge z$ (Teorema 1.2.5, vi)

$= x \wedge z$ (Definição 1.2.6 e hipótese)

$\Leftrightarrow x \leq z$ (Definição 1.2.6).

Portanto, $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$. ■

Teorema 1.2.8: Uma álgebra booleana **B** = (B, ~, $\vee$, $\wedge$, 0, 1) é um reticulado distributivo e complementado.

Demonstração:

(I) Para **B** ser um reticulado deve satisfazer as seguintes condições $R_1 – R_6$ da Definição 1.1.1. Como as condições R_1 e R_2 equivalem respectivamente aos axiomas Ax_2 e Ax_1 da álgebra booleana **B**, as condições R_3 e R_4 foram demonstradas, respectivamente, através dos itens (vi) e (v) do Teorema 1.2.5. E as condições R_5 e R_6 também foram demonstradas através dos itens (i) e (ii) do Teorema 1.2.5.

(II) Para **B** ser um reticulado distributivo deve satisfazer as seguintes leis para todos x, y, z $\in$ **B**: $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$ e $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$. Estas leis equivalem respectivamente aos axiomas Ax_4 e Ax_3 da álgebra booleana **B.**

(III) Para **B** ser um reticulado complementado, todo elemento de **B** deve ter complemento. Esta condição é satisfeita através do axioma Ax_7 e do Teorema 1.2.2. ■

Como já foi dito, as definições, proposições e teoremas apresentados neste capítulo inicial serão utilizados para a demonstração de resultados importantes nos capítulos seguintes. Os reticulados serão utilizados para definir uma nova estrutura, chamada *conjuntos quase fechados inferiormente* ou *cqfi*, e também para demonstrar algumas propriedades dos cqfi.

As álgebras de Boole serão necessárias na apresentação de uma álgebra para “poucos” e na demonstração do Teorema 3.3.4 que torna possível demonstrar os teoremas de correção e completude para a lógica proposicional para “poucos”.

Pelo Teorema 1.2.8 acima poderíamos optar por fazer a apresentação de apenas uma destas estruturas: reticulados ou álgebras de Boole, já que uma álgebra de Boole nada mais é do que um reticulado no qual todos os seus elementos tem um complemento e no qual são válidas as leis distributivas. Todavia, esta escolha não foi feita, pois, um dos objetivos deste trabalho foi fazer um estudo detalhado das estruturas em questão.

Antes de apresentar os *conjuntos quase fechados inferiormente* e a álgebra para “poucos”, no próximo capítulo será apresentada brevemente a *Lógica do “muito”* que motivou o artigo “Algebraic elements for the notions of ‘many’” de Feitosa, Nascimento e Grácio (2009) e que por sua vez motivou este trabalho. Além disso, no capítulo a seguir, serão feitas algumas asserções a respeito das características da noção de “poucos” da linguagem natural, que este trabalho pretende resgatar.

2 A LÓGICA DO "MUITO"

Grácio (1999), em sua tese de doutorado, intitulada "Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza", introduziu uma família de sistemas lógicos não-clássicos. Tais sistemas lógicos são classificados por Grácio como *lógicas moduladas*. De acordo com a autora uma família de sistemas lógicos modulados é caracterizada pela inclusão na linguagem da lógica de primeira ordem de um quantificador generalizado **Q**, chamado de *quantificador modulado*.

Segundo Grácio (1999), as lógicas moduladas, para serem caracterizadas como tal, têm que possuir os seguintes axiomas:

(Ax_1) Axiomas da lógica clássica de primeira ordem;

(Ax_2) $\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (\mathbf{Q}x\,\varphi(x) \leftrightarrow \mathbf{Q}x\,\psi(x))$;

(Ax_3) $\mathbf{Q}x\,\varphi(x) \rightarrow \mathbf{Q}y\,\varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$;

(Ax_4) $\forall x\,\varphi(x) \rightarrow \mathbf{Q}x\,\varphi(x)$;

(Ax_5) $\mathbf{Q}x\,\varphi(x) \rightarrow \exists x\,\varphi(x)$.

De acordo com a autora, um sistema lógico modulado apresenta as mesmas regras de inferência da lógica clássica de primeira ordem, isto é:

Mondus ponens:
$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi}$$

Generalização:
$$\frac{\varphi(x)}{\forall x\,\varphi(x)}$$

Um dos sistemas lógicos introduzidos por Grácio (1999) é a lógica do muito. Considerando que a lógica do "muito" é um exemplo de lógica modulada, ela insere um novo quantificador **G** na sintaxe da lógica clássica de primeira ordem. Dessa forma, o argumento "muitos x satisfazem a propriedade $\varphi(x)$" pode ser formalizado por $\mathbf{G}x\,\varphi(x)$.

A noção de "muitos" está associada à noção de conjunto grande de evidências, mas está desvinculada da noção de cardinalidade (quantidade de elementos que satisfazem uma certa propriedade), apesar de satisfazer algum parâmetro de grandeza (Grácio, 1999, p. 104).

Por exemplo, a sentença "muitas mulheres gostam de sapatos de salto alto" está associada a um conjunto grande de evidências (o conjunto das mulheres que gostam de sapatos de salto alto) e também a sentença "muitas crianças gostam de verduras" está associa a um conjunto grande de evidências (o conjunto das crianças que gostam de verduras). Entretanto, nem sempre estes dois conjuntos possuem o mesmo cardinal. Além disso, o conjunto de evidências

pode não representar mais da metade dos indivíduos do universo de discurso em questão, por exemplo: o conjunto de crianças que gostam de verduras pode não representar a maioria.

2.1 Família fechada superiormente própria

Grácio (1999) assume que a noção de “muitos” possui três propriedades essenciais, são elas:

a) Se muitos indivíduos do universo satisfazem a proposição φ e se todo indivíduo que satisfaz φ, satisfaz também ψ, então ψ também é satisfeita por muitos indivíduos do universo;
b) Se muitos indivíduos do universo satisfazem a proposição φ, então existe alguém que satisfaz φ.
c) O conjunto universo contém muitos indivíduos.

Baseada nestas três propriedades, Grácio (1999) apresenta uma estrutura matemática para capturar a noção de “muitos”, denominada *família fechada superiormente própria*.

Intuitivamente, considera-se que uma propriedade ocorre em muitos indivíduos de certo universo se o conjunto de indivíduos que satisfazem a propriedade pertence a *família fechada superiormente própria*.

Agora, será apresentada a definição formal de uma *família fechada superiormente própria* sobre um universo E.

Definição 2.1.1: Uma *família fechada superiormente própria* **F** sobre um universo E é uma coleção de subconjuntos de E que satisfaz as seguintes condições:

(i) Se $\mathbf{B} \in \mathbf{F}$ e $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$, então $\mathbf{C} \in \mathbf{F}$

(ii) $E \in \mathbf{F}$

(iii) $\varnothing \notin \mathbf{F}$

2.2 A sintaxe e a semântica da lógica do “muito”

A lógica do “muito”, denotada por $L(\mathbf{G})$, é obtida a partir da lógica clássica de primeira ordem, pelo acréscimo de axiomas comuns às lógicas moduladas e de um axioma específico para capturar a noção de “muitos” (axioma Ax_6 abaixo). Assim, os axiomas que compõem a lógica do “muito” são:

(Ax_1) Axiomas da lógica de primeira ordem;

(Ax_2) $\forall x\,(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (\mathbf{G}x\,\varphi(x) \leftrightarrow \mathbf{G}x\,\psi(x))$;

(Ax_3) $\mathbf{G}x\,\varphi(x) \rightarrow \mathbf{G}y\,\varphi(y)$, quando y é livre para x em $\varphi(x)$;

(Ax_4) $\forall x\,\varphi(x) \rightarrow \mathbf{G}x\,\varphi(x)$;

(Ax_5) $\mathbf{G}x\,\varphi(x) \rightarrow \exists x\,\varphi(x)$.

(Ax_6) $\forall x\,(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (Gx\,\varphi(x) \rightarrow Gx\,\psi(x))$.

Os axiomas Ax_2 e Ax_3 têm a função de tornar possível a adequação lógica com o modelo proposto para esta lógica, já os axiomas Ax_4, Ax_5 e Ax_6 capturam as seguintes noções intuitivas:

Ax_4 – Se φ vale para todos os indivíduos do universo, então φ vale para muitos indivíduos deste universo.

Ax_5 – Se φ vale para muitos indivíduos, então existe alguém no universo que satisfaz φ.

Ax_6 – Se o conjunto de indivíduos que satisfaz φ está contido no conjunto de indivíduos que satisfaz ψ e existem muitos indivíduos que satisfazem φ, então existem muitos indivíduos que satisfazem ψ.

As regras de dedução são as mesmas dos demais sistemas de lógicas moduladas, ou seja, *modus ponens* e generalização.

Noções sintáticas como sentença, demonstração, teorema, consequência lógica e outras são definidas de modo análogo às da lógica clássica de primeira ordem.

Em relação às noções semânticas, $L(\mathbf{G})$ é composta por uma estrutura clássica de primeira ordem A, com um universo A**,** completada por uma família fechada superiormente própria **F.** Em símbolos: $A^{\mathbf{F}}$.

A interpretação dos símbolos de relação, função e constante é semelhante à de L em relação a A.

A noção de satisfação de uma fórmula de $L(\mathbf{G})$, na estrutura $A^{\mathbf{F}}$ é definida indutivamente de modo usual pelo acréscimo da seguinte condição:

- Sejam φ uma fórmula, tal que o conjunto de suas variáveis livres está contido em $\{x\} \cup \{y_1, ..., y_n\}$ e $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$ uma sequência de elementos de A, então: $A^{\mathbf{F}} \vDash Gx\ \varphi[x, \bar{a}] \Leftrightarrow \{b \in A / A^{\mathbf{F}} \vDash \varphi[b, \bar{a}]\} \in \mathbf{F}$, em que $A^{\mathbf{F}} \vDash Gx\ \varphi[\bar{a}]$ denota $A^{\mathbf{F}} \vDash_s \varphi$, quando as variáveis da fórmula φ pertence ao conjunto $\{z_1, ..., z_n\}$, $s(z_i) = b_i$ e $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$. Para a sentença $Gx\ \varphi(x)$ tem-se que: $A^{\mathbf{F}} \vDash Gx\ \varphi(x) \Leftrightarrow \{a \in A / A^{\mathbf{F}} \vDash \varphi(a)\} \in \mathbf{F}$.

Outras noções semânticas como modelo, validade e consequência semântica, podem ser facilmente adaptadas da lógica clássica de primeira ordem para $L(\mathbf{G})$.

2.3 A noção intuitiva de “poucos”

Seria possível estabelecer aqui o conceito de “poucos” como dual ao conceito de “muitos”. Entretanto, quando se afirma, por exemplo, que “Muitas pessoas são felizes”, mesmo que todas as pessoas do meu universo de discurso sejam felizes, isso não parece contrariar a noção intuitiva que temos de “muitos”.

Em relação à noção de “poucos”, a afirmação: “poucas pessoas gostam de sorvete”, não parece ter sentido em um universo de discurso em que nenhum indivíduo gosta de sorvete. Por isso, a noção intuitiva de “poucos”, abordada aqui considerará que o vazio não contém poucos elementos e, portanto, a abordagem do termo “poucos” feita neste trabalho será uma adaptação não dual à abordagem feita por Feitosa, Nascimento e Grácio (2009) para o termo “muitos”.

2.4 Família quase fechada inferiormente própria

Assim como Grácio (1999) fez para a noção de “muitos”, assumiremos que a noção de “poucos” possui três propriedades essenciais, são elas:

a) Se poucos indivíduos do universo satisfazem a proposição φ e se todo indivíduo que satisfaz ψ, satisfaz também φ, então ψ também é satisfeita por poucos indivíduos do universo;
b) Se poucos indivíduos do universo satisfazem a proposição φ, então existe alguém que satisfaz φ.
c) O conjunto universo não contém poucos indivíduos.

Baseada nestas três propriedades, apresentamos agora uma estrutura matemática para capturar a noção de "poucos" denominada *família quase fechada inferiormente própria*.

Intuitivamente, considera-se que uma propriedade ocorre para poucos indivíduos de certo universo se o conjunto de indivíduos que satisfaz a propriedade pertence a *família quase fechada inferiormente própria*.

Será apresentada abaixo a definição formal de uma *família quase fechada inferiormente própria* sobre um universo E.

Definição 2.4.1: Uma *família quase fechada inferiormente própria* **F'** sobre um universo E é uma coleção de subconjuntos de E que satisfaz as seguintes condições, com $\mathbf{C} \neq \emptyset$:

(i) Se $\mathbf{B} \in \mathbf{F'}$ e $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B}$, então $\mathbf{C} \in \mathbf{F'}$

(ii) $E \notin \mathbf{F'}$

(iii) $\emptyset \notin \mathbf{F'}$.

Esta definição de família quase fechada inferiormente própria foi construída em comum acordo com Oliveira (2011, p. 65), pois ambos os trabalhos formalizaram alguns aspectos do termo "poucos" da linguagem natural: este trabalho buscou isto no campo proposicional e Oliveira (2011) no campo quantificacional.

Nesse trabalho, a definição de família quase fechada inferiormente própria, receberá uma versão algébrica, no capítulo seguinte, denominada: *conjuntos quase fechados inferiormente*.

Assim, no próximo capítulo obteremos, no campo algébrico, "propriedades" que servirão de base para a construção da álgebra para "poucos".

A álgebra para "poucos", assim como os reticulados e as álgebras de Boole, serão todos elementos fundamentais para a demonstração dos teoremas de correção e completude para a lógica proposicional para "poucos" que apresentaremos no final do capítulo a seguir.

3 A LÓGICA PROPOSICIONAL PARA POUCOS

Neste capítulo, formalizaremos numa lógica proposicional o conceito de “poucos”, que será modelado algebricamente.

3.1 Conjuntos quase fechados inferiormente

A estrutura matemática denominada família quase fechada inferiormente própria, que foi apresentada no final do Capítulo 2, foi construída com base em propriedades que, segundo esse trabalho, capturam a noção de “poucos” da linguagem natural. Agora, como já foi dito, esta definição de família quase fechada inferiormente própria será abordada de um ponto de vista algébrico. Esta versão algébrica receberá o nome de *conjunto quase fechado inferiormente* e será definida sobre reticulados.

Esta seção não é fundamental para o desenvolvimento deste trabalho, mas a definição de conjunto quase fechado inferiormente e as suas propriedades, que foram obtidas a partir desta definição, permitiram compreender qual deveria ser a axiomática de uma álgebra para “poucos” e quais resultados algébricos poderiam ser obtidos nesta álgebra para que ela satisfizesse a noção de “poucos”, defendida neste trabalho.

Assim, iniciamos com os elementos algébricos que darão suporte para a construção da álgebra para “poucos”: modelo algébrico da lógica proposicional para “poucos”.

Definição 3.1.1: Sejam $(R, \leq)$ um reticulado e $I_Q \subseteq R$, tal que $I_Q \neq \emptyset$ e $0 \notin I_Q$. O conjunto I_Q é um *conjunto quase fechado inferiormente (cqfi)* se para todos $x, y \in R$, a seguinte condição é satisfeita:

i) $x \in I_Q$ e $0 \neq y \leq x \Rightarrow y \in I_Q$.

Proposição 3.1.2: Se $(R, \leq)$ é um reticulado, então para quaisquer $x, y \in R$, com $y \neq 0 \neq x$ e $x \wedge y \neq 0$, a condição (i) da Definição 3.1.1 é equivalente a qualquer uma das seguintes condições:

I) $x \in I_Q, y \in R \Rightarrow x \wedge y \in I_Q$.

II) $x \vee y \in I_Q \Rightarrow x \in I_Q$ e $y \in I_Q$.

Demonstração:

Primeiro é demonstrado que (i) $\Leftrightarrow$ (I), ou seja, que ($\forall y$, $\forall x \neq 0$ ($x \in I_Q$ e $0 \neq y \leq x \Rightarrow y \in I_Q$)) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \neq 0$, $\forall y \neq 0$ ($x \in I_Q$ e $y \in R \Rightarrow x \wedge y \in I_Q$)).

($\Rightarrow$) Sejam $x \in I_Q$ e $y \in R$, tais que $y \neq 0 \neq x$ e $x \wedge y \neq 0$, como pela Proposição 1.1.6, $x \wedge y \leq x$, tem-se por (i) que $x \wedge y \in I_Q$.

($\Leftarrow$) Sejam $x \in I_Q$ e $0 \neq y \leq x$. Pela Definição 1.1.3, tem-se que $y \wedge x = y$ e, pela lei comutativa da Definição 1.1.1, tem-se que $x \wedge y = y$. Como através de (I) tem-se que para $y \neq 0$ e $x \wedge y \neq 0$, $x \wedge y \in I_Q$, logo $y \in I_Q$.

Agora é demonstrado que (i) $\Leftrightarrow$ (II), ou seja, que ($\forall y$, $\forall x \neq 0$ ($x \in I_Q$ e $0 \neq y \leq x \Rightarrow y \in I_Q$)) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \neq 0$, $\forall y \neq 0$ ($x \vee y \in I_Q \Rightarrow x \in I_Q$ e $y \in I_Q$)).

($\Rightarrow$) Seja $x \vee y \in I_Q$ e $y \neq 0 \neq x$. Pela Proposição 1.1.6, tem-se que $x \leq x \vee y$, logo, por (i), $x \in I_Q$. Novamente pela Proposição 1.1.6 tem-se que $y \leq x \vee y$, logo, também por (i), $y \in I_Q$. Portanto, se $x \vee y \in I_Q$ e $y \neq 0 \neq x$, então $x \in I_Q$ e $y \in I_Q$.

($\Leftarrow$) Sejam $x \in I_Q$ e $0 \neq y \leq x$. Pela Proposição 1.1.4, tem-se que $y \vee x = x$, logo $y \vee x \in I_Q$ e, pela lei comutativa, $x \vee y \in I_Q$ e, portanto, por (II), $y \in I_Q$. ■

Proposição 3.1.3: Seja $(R, \leq)$ um reticulado. As seguintes afirmações são válidas:

i) Qualquer união não vazia de cqfi's é também um cqfi.

ii) Se A e B são cqfi's tais que $A \cap B \neq \emptyset$, então $A \cap B$ é um cqfi.

Demonstração:

i) Como cada A_i é um cqfi, então $A_i \neq \emptyset$ e $0 \notin A_i$, para todo i. Assim $0 \in \cup A_i$ e $\cup A_i \neq \emptyset$. Seja $x \in \cup A_i$ e $y \in R$, tal que $0 \neq y \leq x$. Então para algum $i \in \lambda$, $x \in A_i$. Como A_i é um cqfi e $0 \neq y \leq x$, então $y \in A_i$. Logo, $y \in \cup A_i$ e assim $\cup A_i$ é um cqfi, ou seja, se $x \in \cup A_i$ e $0 \neq y \leq x$, então $y \in \cup A_i$.

ii) Como por hipótese $A \cap B \neq \emptyset$, então sejam $x \in A \cap B$ e $0 \neq y \leq x$. Por hipótese, A é um cqfi, logo, $y \in A$. Também, por hipótese, B é um cqfi, logo, $y \in B$. Portanto, $0 \neq y \in A \cap B$. Se $0 \in A \cap B$, então $0 \in A$, o que é um absurdo, pois, por hipótese A é um cqfi. Logo, $0 \notin A \cap B$. Assim, $A \cap B$ é um cqfi.

Proposição 3.1.4: Sejam $(R, \leq)$ e $(Q, \leq)$ dois reticulados e $h: R \mapsto Q$ um homomorfismo injetivo entre reticulados. Então:

i) Se B é um cqfi de $(Q, \leq)$ e $h^{-1}(B) \neq \emptyset$, então $h^{-1}(B)$ é um cqfi de $(R, \leq)$.

Demonstração:

i) Como $0 \notin B$ e h é um homomorfismo injetivo, $h(0) = 0$, logo, $0 \notin h^{-1}(B)$. Sejam $x \in h^{-1}(B)$ e $0 \neq y \leq x$, então, pela Definição 1.1.18, $0 \neq h(y) \leq h(x)$. Também, como $x \in h^{-1}(B)$, então $h(x) \in B$. Como $h(x) \in B$ e $0 \neq h(y) \leq h(x)$, então pela definição de cqfi, $h(y) \in B$ e, consequentemente, $y \in h^{-1}(B)$ o que satisfaz a definição de cqfi, ou seja, se $x \in h^{-1}(B)$ e $0 \neq y \leq x$, então $y \in h^{-1}(B)$. ■

Definição 3.1.5: Seja $(R, \leq)$ um reticulado. Para $\varnothing \neq A \subseteq R$ e $0 \notin A$, o *fecho inferior* de A é o conjunto denotado por]A] e definido por:

$$]A] = \{t \in R / 0 < t \leq x, \text{ para algum } x \in A\}.$$

Proposição 3.1.6: O conjunto]A] é um cqfi.]A] é o menor cqfi que contém A e]A] é a intersecção de todos cfqi de $(R, \leq)$ que contém A.

Demonstração:

Vamos mostrar que o conjunto]A] é um cqfi:

Por definição, $0 \notin]A]$. Como $A \subseteq]A]$ e $A \neq \varnothing$, então $]A] \neq \varnothing$. Agora, se $y \in]A]$ e $0 \neq z \leq y$, então para algum $x \in A$, pela Definição 3.1.5, tem-se que $0 \neq z \leq y \leq x$. Logo, pela Definição 3.1.5, $z \in]A]$ e, portanto, satisfaz a definição de cqfi, ou seja, se $y \in]A]$ e $0 \neq z \leq y$, então $z \in]A]$.

Agora, será demonstrado que]A] é o menor cqfi que contém A, ou seja, se B é um cqfi qualquer, tal que $A \subseteq B$, então $]A] \subseteq B$:

Se $x \in]A]$, então existe $a \in A$, tal que $0 < x \leq a$. Como $A \subseteq B$ e $a \in A$, então $a \in B$. Assim, $0 < x \leq a \in B$ e, portanto, $x \in B$. Logo $]A] \subseteq B$, ou seja, todo cfi que contém A, também contém]A]. Portanto,]A] é o menor cqfi que contém A. Como]A] é um cqfi que contém A, então]A] é a intersecção de todos eles. ■

Definição 3.1.7: Um cqfi A em $(R, \leq)$ é *próprio* se $A \neq R - \{0\}$.

Proposição 3.1.8: Se um reticulado $(R, \leq)$ tem o elemento um, então A é um cqfi próprio se, e somente se, A é um cqfi e $1 \notin A$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se $1 \in A$, como A é um cqfi e para todo $x \in R$, $x \leq 1$, então, para todo $x \in R-\{0\}$, $x \in A$ e, consequentemente, $R-\{0\} \subseteq A$. Desde que $A \subseteq R-\{0\}$, então, $A = R-\{0\}$ e, portanto, pela Definição 3.1.7, A não é um cqfi próprio.

($\Leftarrow$) Por hipótese $1 \in R$. Logo, se $1 \notin A$ e A é um cqfi, então pela Definição 3.1.7, A é um cqfi próprio. ■

Definição 3.1.9: Um cqfi A em um reticulado $(R, \leq)$ é *maximal* em R, quando A é próprio e A não é subconjunto próprio de nenhum outro cqfi próprio.

Definição 3.1.10: Um cqfi A em um reticulado $(R, \leq)$ é *redutível* em R quando A é próprio e existem cqfi B e C distintos de A, tais que $A = B \cap C$.

Definição 3.1.11: Um cqfi A em um reticulado $(R, \leq)$ é *irredutível* em R quando A não é redutível.

Proposição 3.1.12: Qualquer intersecção finita de cqfi próprios é também um cqfi próprio.

Demonstração:

Seja $\{B_i\}_{i \in \lambda}$ uma família de cqfi próprios. Temos que $\cap B_i$ é um cqfi próprio, pois caso contrário, $\cap B_i = R - \{0\}$. Logo, para cada i, $R - \{0\} \subseteq \cap B_i \subseteq B_i$, portanto cada $B_i = R - \{0\}$ não é próprio o que é uma contradição. Portanto, $\cap B_i$ é um cqfi próprio. ■

Definição 3.1.13: Um cqfi A no reticulado $(R, \leq)$ é *primo*, quando para todos $x, y \in R$, tais que $x \neq 0$ e $y \neq 0$ a seguinte condição é válida:

$$x \wedge y \in A \cup \{0\} \Rightarrow x \in A \text{ ou } y \in A$$

Proposição 3.1.14: i) Todo cqfi maximal em $(R, \leq)$ é irredutível.

ii) O cqfi A é primo em $(R, \leq)$ se, e somente se, A é irredutível.

Demonstração:

i) Por contra-positiva: Todo cqfi redutível não é maximal. Se A é redutível, então existem C e D, tais que $C \neq A \neq D$ e $A = C \cap D$. Logo $A \subset C$ e $A \subset D$. É claro que C e D são cqfi próprios, pois caso contrário, A = C ou A = D. Portanto, tem-se que A não é um cqfi maximal, pois A é subconjunto próprio de outro cqfi próprio.

ii) ($\Rightarrow$) Utilizando a contra-positiva, se A é redutível, então A não é um cqfi primo. Se A é redutível, então existem B e C cqfi distintos de A, tais que $A = B \cap C$. Logo, $A \subset B$ e $A \subset C$. Seja $x \in (B - A)$ e $y \in (C - A)$. Logo, $x \in B$ e $x \notin A$ e $y \in C$ e $y \notin A$. Como A é um cqfi e $A = B \cap C$, então $B \cap C$ é um cqfi. Pela Proposição 1.1.6, $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$. Se $x \wedge y \neq 0$, como $x \in B$ e $x \wedge y \leq x$, então $x \wedge y \in B$ e como $y \in C$ e $x \wedge y \leq y$, então $x \wedge y \in C$. Como $x \wedge y \in B$ e $x \wedge y \in C$, então $x \wedge y \in B \cap C$, logo $x \wedge y \in A$ e consequentemente $x \wedge y \in A \cup \{0\}$. Assim, $x \wedge y \in A \cup \{0\}$, $x \notin A$ e $y \notin A$ e, portanto, A não é um cqfi primo. Se $x \wedge y = 0$ é claro que $x \wedge y \in A \cup \{0\}$. Logo, de qualquer forma, $x \wedge y \in A \cup \{0\}$, $x \notin A$ e $y \notin A$.
($\Leftarrow$) Se A não é primo, por definição, existem $x, y \in (R - A)$ ($x \in R$ e $x \notin A$ e $y \in R$ e $y \notin A$) tais que $x \wedge y \in A \cup \{0\}$. Sejam $B =]A \cup \{x\}]$ e $C =]A \cup \{y\}]$, claramente, $A \subseteq B \cap C$. Se $A = B \cap C$, então A é redutível. Se existe $z \in B \cap C - A$, então $z \in B \cap C$ e $z \notin A$. Como $z \in B \cap C$, então $z \in B$ e $z \in C$. Pela Definição 3.1.5, $z \leq x$ e $z \leq y$, entretanto, pela Proposição 1.6, $z \leq x$ e $z \leq y \Rightarrow z \wedge z \leq x \wedge y$ e, assim, $z \leq x \wedge y$. Se $x \wedge y \neq 0$, então $x \wedge y \in A$ e A é um cqfi, logo $z \in A$, o que é uma contradição, pois assumiu-se que $z \notin A$. Se $x \wedge y = 0$, como $z \leq x \wedge y$ então $z = 0$, o que é uma contradição, pois $z \in B \cap C$ e pela Proposição 3.1.3 (ii), $B \cap C$ é um cqfi. Portanto, A é primo. ■

Proposição 3.1.15: Seja R um reticulado, tal que $\{1\} \subset R$ e $R - \{0, 1\} \neq \emptyset$. Então $R - \{0, 1\}$ é o único cqfi maximal.

Demonstração:

Por hipótese $R - \{0, 1\} \neq R$ e $R - \{0, 1\} \neq \emptyset$. Se $x \in (R - \{0, 1\})$ e $0 \neq y \leq x$, então $0 \neq y \neq 1$. Logo, $y \in R - \{0, 1\}$ e, portanto, $R - \{0, 1\}$ é um cqfi próprio. Agora, seja B um cqfi próprio em R. Pela Proposição 3.1.8, $1 \notin B$, logo, $B \subseteq R - \{0, 1\}$. Assim, não existe cqfi próprio entre $R - \{0, 1\}$ e R. Portanto, $R - \{0, 1\}$ é maximal. Como todos os outros cqfi próprios estão contidos em $R - \{0, 1\}$, então $R - \{0, 1\}$ é o único cqfi maximal. ■

Proposição 3.1.16: Se $(R, \leq)$ é um reticulado com o elemento um, então todo cqfi próprio de $(R, \leq)$ está contido em um cqfi maximal.

Demonstração:

Seja A um cqfi próprio. Como $R - \{0, 1\}$ é o único cqfi maximal, então tem-se que demonstrar que $A \subseteq R - \{0, 1\}$. Como A é um cqfi, então $A \subseteq R - \{0\}$. Pela Proposição 3.1.8, se $1 \in R$, como A é um cqfi próprio, então $1 \notin A$. Portanto, $A \subseteq R - \{0, 1\}$. ■

Proposição 3.1.17: Seja (R, ≤) um reticulado com o elemento um. Para cada elemento $0 \neq x \neq 1$ em R, existe um cqfi maximal A em (R, ≤), tal que $x \in A$.

Demonstração:

Como $R - \{0, 1\}$ é o único cqfi maximal, claramente para cada $x \in R$ e $0 \neq x \neq 1$, tem-se que $x \in R - \{0, 1\}$. ■

3.2 Uma lógica proposicional para "poucos"

Nesta seção, introduzimos uma lógica proposicional para dar uma formalização em linguagem proposicional para o conceito de "poucos". Esta lógica será introduzida em versão axiomática e denotada por LPP.

A lógica proposicional para "poucos" (LPP) é definida sobre a linguagem $L(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \circledcirc, p_1, p_2, ...)$, em que $\circledcirc$ é um novo operador unário.

A LPP fica determinada pelo seguinte:

Esquemas de axiomas:

Ax_{P1}: Axiomas do cálculo proposicional clássico (CPC);

Ax_{P2}: $\circledcirc\bot \leftrightarrow \bot$

Ax_{P3}: $\circledcirc\top \leftrightarrow \bot$

Regras de inferência:

MP: *Modus Ponens*:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi}$$

R_1:

$$\frac{\vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \nvdash \varphi \rightarrow \bot}{\vdash \circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi}$$

R_2:

$$\frac{\vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\vdash \circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi}$$

Intuitivamente, os axiomas (Ax_{P2}), (Ax_{P3}) dizem respectivamente que: uma contradição ter poucas evidências equivale a uma contradição e uma tautologia ter poucas evidências, também, equivale a uma contradição. As regras R_1 e R_2 dizem respectivamente que: quando φ implica em ψ, se não é o caso que φ é uma contradição e ψ tem poucas evidências, então φ tem poucas evidências também e se φ e ψ são equivalentes, então $\circledcirc\varphi$ e $\circledcirc\psi$ são equivalentes.

Vejamos algumas consequências da LPP:

Proposição 3.2.1: Uma contradição não tem poucas evidências, ou seja, $\vdash \neg\circledcirc\bot$.

Demonstração:

1.	$\vdash \circledcirc\bot \leftrightarrow \bot$	Ax_{P2}
2.	$\vdash (\circledcirc\bot \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \circledcirc\bot)$	CPC em 1
3.	$\vdash (\circledcirc\bot \rightarrow \bot)$	CPC em 2
4.	$\vdash \neg\bot$	CPC
5.	$\vdash \neg\circledcirc\bot$	CPC em 3 e 4 ■

Proposição 3.2.2: $\nvdash \varphi \rightarrow \bot \Rightarrow \vdash \circledcirc(\varphi \vee \psi) \rightarrow \circledcirc\varphi$

Demonstração:

1.	$\nvdash \varphi \rightarrow \bot$	premissa
2.	$\vdash \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$	CPC
3.	$\vdash \circledcirc (\varphi \vee \psi) \rightarrow \circledcirc\varphi$	R_1 em 1 e 2. ■

Proposição 3.2.3: $\nvdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \bot \Rightarrow \vdash \circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc (\varphi \wedge \psi)$

Demonstração:

1.	$\nvdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \bot,$	premissa
2.	$\vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$	CPC
3.	$\vdash \circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc (\varphi \wedge \psi)$	R_1 em 1 e 2. ■

Proposição 3.2.4: Uma tautologia não tem poucas evidências, ou seja, $\vdash \neg\circledcirc\top$.

Demonstração:

1.	$\vdash \circledcirc\top \leftrightarrow \bot$	Ax_{P3}
2.	$\vdash (\circledcirc\top \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \circledcirc\top)$	CPC em 1
3.	$\vdash (\circledcirc\top \rightarrow \bot)$	CPC em 2
4.	$\vdash \neg\bot$	CPC
5.	$\vdash \neg\circledcirc\top$	CPC em 3 e 4 ■

Proposição 3.2.5: $\vdash\varphi \rightarrow \psi, \nvdash \varphi \rightarrow \bot, \vdash\circledcirc\psi \Rightarrow \vdash \circledcirc\varphi$

Demonstração:

1.	$\vdash \varphi \rightarrow \psi$	premissa
2.	$\nvdash \varphi \rightarrow \bot$	premissa
3.	$\vdash\circledcirc\psi$	premissa

4.	$\vdash \circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi$	R_1 em 1 e 2
5.	$\vdash \circledcirc\varphi$	MP em 3 e 4 ■

Proposição 3.2.6: $\nvdash \varphi \rightarrow \bot, \nvdash \psi \rightarrow \bot \Rightarrow \vdash \circledcirc(\varphi \vee \psi) \rightarrow \circledcirc\varphi \wedge \circledcirc\psi$

Demonstração:

1.	$\nvdash \varphi \rightarrow \bot$	premissa
2.	$\nvdash \psi \rightarrow \bot$	premissa
3.	$\vdash \circledcirc(\varphi \vee \psi) \rightarrow \circledcirc\varphi$	Proposição 3.2.2 em 1
4.	$\vdash \circledcirc(\varphi \vee \psi) \rightarrow \circledcirc\psi$	Proposição 3.2.2 em 2
5.	$\vdash \circledcirc(\varphi \vee \psi) \rightarrow \circledcirc\varphi \wedge \circledcirc\psi$	CPC em 3 e 4. ■

3.3 A álgebra para “poucos”

Introduzimos, agora, elementos algébricos que nos permitirão a demonstração algébrica da adequação da LPP.

Definição 3.3.1: Uma *álgebra para “poucos”* é uma 7-upla **P** = (P, 0, 1, $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\otimes$), em que (P, 0, 1, $\wedge$, $\vee$, $\sim$) é uma álgebra de Boole e $\otimes$ é um operador unário, chamado *operador do pouco*, de modo que para todos x, y $\in$ P, as seguintes condições são válidas:

i) $\otimes 0 = 0$;

ii) $\otimes 1 = 0$;

iii) $0 < x \leq y \Rightarrow \otimes y \leq \otimes x$.

No contexto algébrico sempre é verdadeiro que se x = y, então $\otimes x = \otimes y$.

Definição 3.3.2: Para $x \in P$, tal que $0 \neq x \neq 1$, dizemos que x *tem poucas evidências* quando $\otimes x = x$.

Proposição 3.3.3: Se **P** = (P, 1, 0, $\wedge$, $\vee$, ~, $\otimes$) é uma álgebra para "poucos", $x, y \in P$, então:

i) Se $x \neq 0$, então $\otimes(x \vee y) \leq \otimes x$;

ii) Se $x \wedge y \neq 0$, então $\otimes x \leq \otimes(x \wedge y)$;

iii) Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então $\otimes(x \vee y) \leq \otimes x \wedge \otimes x$.

Demonstração:

(i) Pela P_1 da Proposição 1.1.6, $x \leq x \vee y$. Logo, pelo item (iii) da Definição 3.3.1, para $x \neq 0$, $\otimes(y \vee x) \leq \otimes x$.

(ii) Pela P_3 da Proposição 1.1.6, $x \wedge y \leq x$. Logo, pelo item (iii) da Definição 3.3.1, para $x \wedge y \neq 0$, $\otimes x \leq \otimes(x \wedge y)$.

(iii) Pelo item (i) acima, se $x \neq 0$, então $\otimes(x \vee y) \leq \otimes x$. Mas, também por (i), se $y \neq 0$, então $\otimes(y \vee x) \leq \otimes y$. Então por comutatividade, pela P_5 da Proposição 1.1.6 e por idempotência, para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, temos que $\otimes(x \vee y) \leq \otimes x \wedge \otimes y$. ■

Teorema 3.3.4: Para cada álgebra para "poucos" **P** = (P, 0, 1, $\vee$, $\wedge$, ~, $\otimes$), existe um isomorfismo h de **P** em uma álgebra para "poucos" de conjuntos.

Demonstração: Pelo isomorfismo de Stone (Rasiowa e Sikorski, 1963, p.83), para cada álgebra Booleana (P, 0, 1, $\vee$, $\wedge$, ~) existe um monomorfismo h da álgebra em $\wp(\wp(P))$. Seja h um isomorfismo de (P, 0, 1, $\vee$, $\wedge$, ~) em (B, $\varnothing$, $\cup$, $\cap$, $^{-}$), em que esta última estrutura é a álgebra Booleana determinada por Im(h), ou seja, B = h(P).

Esse isomorfismo h deve ser estendido a um isomorfismo entre **P** = (P, 0, 1, $\vee$, $\wedge$, ~, $\otimes$) e **B** = (B, $\varnothing$, $\cup$, $\cap$, $^{-}$, $^{\otimes}$), tal que **B** seja uma álgebra para "poucos" de conjuntos.

Precisamos estender o isomorfismo Booleano h para um isomorfismo de álgebras para "poucos". Mais especificamente, precisamos determinar uma álgebra para "poucos" sobre **B**, isomorfa a **P**. Então definimos $h(x)^{\otimes} = h(\otimes x)$.

Quando $x \in P$, segue que $\otimes x \in P$ e como h é um isomorfismo booleano, então $h(\otimes x) \in B$. A este elemento associamos $h(x)^{\otimes}$ e, portanto, h continua uma função bijetiva entre **B** e **P**.

Agora mostramos que $\mathbf{B} = (B, \varnothing, \cap, \cup, \bar{}\,, {}^{\otimes})$ é uma álgebra para "poucos":

(i) Como $\otimes 0 = 0$, então, $\varnothing^{\otimes} = h(0)^{\otimes} = h(\otimes 0) = h(0) = \varnothing$;

(ii) Como $\otimes 1 = 0$, então, $B^{\otimes} = h(1)^{\otimes} = h(\otimes 1) = h(0) = \varnothing$;

(iii) Se x e $y \in P$, $x \neq 0$ e $x \leq y$, então $\otimes y \leq \otimes x$. Logo, se $h(x) \neq \varnothing$, $h(x) \subseteq h(y) \Rightarrow 0 \neq x \leq y \Rightarrow \otimes y \leq \otimes x \Rightarrow h(\otimes y) \subseteq h(\otimes x) \Rightarrow h(y)^{\otimes} \subseteq h(x)^{\otimes}$. ■

3.4 Adequação da LPP

A *correção* e a *completude* são propriedades desejáveis para os sistemas lógicos formais, muitas vezes como critério para fazer de um *sistema formal*[3] dedutivo uma lógica. Um sistema que apresenta estas duas propriedades possui um *modelo adequado*, isto é, correto e completo. Trataremos da adequação forte, que nos garante a equivalência entre as consequências semântica e sintática (dedutiva). Assim, nesta seção, será demonstrado por meio dos teoremas da correção e da completude que a álgebra para "poucos" é um modelo adequado para a lógica proposicional para "poucos".

Antes, porém, serão feitas algumas considerações sobre o método clássico de *algebrização de Lindenbaum-Tarski*. Este método permite estabelecer uma conexão precisa entre lógica e álgebra e tornará possível a demonstração dos resultados pretendidos aqui.

Seja **L** um sistema lógico. O método clássico de algebrização de Lindenbaum-Tarski consiste, basicamente, em se estabelecer classes de equivalência a partir de uma relação de

[3] Para mais informações a respeito dos sistemas formais, consultar: Feitosa e Paulovich (2005, p. 10) ou Mortari (2001, p. 231).

congruência[4] definida sobre o conjunto de fórmulas de **L** (Da Costa, Krause, 2004), definida pela derivabilidade de uma condicional, mais especificamente, $\Delta \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

De acordo com Bueno (2004), os passos para a algebrização de um sistema lógico **L**, pelo do método de Lindenbaum-Tarski, são:

Primeiro, define-se a *álgebra das fórmulas*. A álgebra das fórmulas é formada pelo conjunto de fórmulas de **L** e por operações induzidas pelos operadores (conectivos) de **L**. Esta álgebra das fórmulas expressa as propriedades do sistema **L**.

Depois, dado Δ, define-se uma relação de equivalência $\equiv_\Delta$ em **L** da seguinte forma:

$$\varphi \equiv_\Delta \psi \qquad \text{se, e somente, se} \qquad \Delta \vdash_{\mathbf{L}} \varphi \rightarrow \psi \text{ e } \Delta \vdash_{\mathbf{L}} \psi \rightarrow \varphi.$$

E, então, verifica-se que a relação de equivalência $\equiv_\Delta$ é uma relação de congruência.

Por simplicidade, o índice Δ será omitido a partir de agora.

Por último, define-se a álgebra quociente $For|_{\equiv}$ determinada por um universo composto pelas classes de equivalências das fórmulas e por operações da álgebra quociente induzidas pelos conectivos de **L**.

Estes passos, indicados por Bueno (2004), serão seguidos no processo de algebrização (pelo do método Lindenbaum-Tarski) da LPP desenvolvido a seguir.

O conjunto das variáveis proposicionais da LPP é indicado por $\mathbf{Var}L_P$ e o conjunto de fórmulas da LPP por $\mathbf{For}\,L_P$.

Uma álgebra genérica para “poucos” será representada por A.

A dedução de uma fórmula φ a partir de Γ na LPP é denotada por $\Gamma \vdash \varphi$. Se $\Gamma = \varnothing$, então, a expressão $\vdash \varphi$ indica que φ é um teorema da LPP.

[4] Rasiowa (1974, p. 11).

Definição 3.4.1: Uma fórmula $\varphi \in \mathbf{For}\mathcal{L}_P$ é *refutável* em Γ quando $\Gamma \vdash \neg\varphi$ vale; caso contrário, φ é *irrefutável*.

Definição 3.4.2: Uma *valoração restrita* é uma função $\underline{\upsilon}$: $\mathbf{Var}\mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{A}$, que interpreta cada variável de $\mathcal{L}_P$ em um elemento de $\mathcal{A}$.

Definição 3.4.3: Uma *valoração* é uma função υ: $\mathbf{For}\mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{A}$ tal que se p é uma fórmula atômica e φ e ψ são fórmulas quaisquer, então a valoração υ estende univocamente a valoração restrita $\underline{\upsilon}$ do seguinte modo:

$\upsilon(p) = \underline{\upsilon}(p)$

$\upsilon(\neg\varphi) = \sim\upsilon(\varphi)$

$\upsilon(\varphi \vee \psi) = \upsilon(\varphi) \vee \upsilon(\psi)$

$\upsilon(\varphi \wedge \psi) = \upsilon(\varphi) \wedge \upsilon(\psi)$

$\upsilon(\varphi \rightarrow \psi) = \upsilon(\varphi) \rightarrowtail \upsilon(\psi)$

$\upsilon(\circledcirc\varphi) = \otimes\upsilon(\varphi)$.

Os símbolos de operadores ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\circledcirc$) do lado esquerdo de cada igualdade representam os operadores lógicos, ao passo que os símbolos de operadores ($\sim$, $\vee$, $\wedge$ $\rightarrowtail$, $\otimes$) do lado direito representam os operadores algébricos.

Definição 3.4.4: Uma valoração υ: $\mathbf{For}\mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{A}$ é um *modelo* para um conjunto $\Gamma \subseteq \mathbf{For}\mathcal{L}_P$, quando, para toda fórmula $\varphi \in \Gamma$, segue que $\upsilon(\varphi) = 1$.

Em particular, uma valoração υ: $\mathbf{For}\mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{A}$ é um modelo para $\varphi \in \mathbf{For}\mathcal{L}_P$, quando $\upsilon(\varphi) = 1$.

Definição 3.4.5: Uma fórmula φ é *válida* em uma álgebra $\mathcal{A}$ quando toda valoração υ: $\mathbf{For}\mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{A}$, é um modelo para φ.

Definição 3.4.6: Uma fórmula φ é *p-válida*, o que denotamos por $\vDash \varphi$, quando φ é válida em toda álgebra para "poucos".

Definição 3.4.7: A *álgebra das fórmulas* da LPP é dada por $(\mathbf{For}\mathcal{L}_P, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \circledcirc)$, em que $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$ são operadores binários, e $\neg$ e $\circledcirc$ são operadores unários.

Observação: $\varphi \rightarrow \psi =_{df} \neg\varphi\vee\psi$.

Definição 3.4.8: Dado $\Gamma \subseteq \mathbf{For}\mathcal{L}_P$, a relação $\equiv_\Gamma$ é definida por:

$$\varphi \equiv_\Gamma \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ e } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi.$$

O índice Γ da relação $\equiv$ será omitido a partir de agora, por simplicidade de notação.

Proposição 3.4.9: A relação $\equiv$ é uma relação de congruência.

Demonstração:

Primeiro será demonstrado que $\equiv$ é uma relação de equivalência, ou seja, que ela é (i) reflexiva, (ii) simétrica e (iii) transitiva:

(i) Reflexividade: Para toda fórmula $\varphi \in \Gamma \subseteq \mathbf{For}\mathcal{L}_P$, $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$. Logo, $\varphi \equiv \varphi$ e, portanto, a relação é reflexiva.

(ii) Simetria: Se $\varphi \equiv \psi$, então $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$ e, desse modo, $\psi \equiv \varphi$ e, portanto, a relação é simétrica.

(iii) Transitividade: Se $\varphi \equiv \psi$ e $\psi \equiv \sigma$, então $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \sigma$ e $\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \psi$. Logo, $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \sigma$ e $\Gamma \vdash \sigma \rightarrow \varphi$. Logo, $\varphi \equiv \sigma$ e, portanto, a relação é transitiva.

Verificamos, a seguir, que $\equiv$ é uma relação de congruência.

Certamente a relação $\equiv$ preserva os operadores booleanos. Resta mostrar que preserva também o novo operador $\circledcirc$. Por definição, $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, entretanto, pela Regra R_2, se $\Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, então $\Gamma \vdash \circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi$ e daí, por definição, $\Gamma \vdash \circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi \Leftrightarrow \circledcirc\varphi \equiv \circledcirc\psi$. Portanto, a relação $\equiv$ é uma relação de congruência. ■

Definição 3.4.10: A *classe de equivalência* de φ módulo $\equiv$ e Γ é dada por: $[\varphi]_\Gamma = \{\sigma \in \mathbf{For}L_P: \sigma \equiv \varphi\}$.

Definição 3.4.11: A *álgebra de Lindenbaum* de L_P, denotada por $A_\Gamma(L_P)$, é a álgebra quociente definida por:

$A_\Gamma(L_P) = (\mathbf{For}L_P|_\equiv, \vee_\equiv, \wedge_\equiv, \neg_\equiv, 0_\equiv, 1_\equiv, \circledcirc_\equiv)$ tal que:

$[\varphi] \vee_\equiv [\psi] = [\varphi \vee \psi]$;

$[\varphi] \wedge_\equiv [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$;

$\neg_\equiv [\varphi] = [\neg\varphi]$;

$0_\equiv = [\varphi \wedge \neg\varphi] = [\bot]$;

$1_\equiv = [\varphi \vee \neg\varphi] = [\top]$;

$\circledcirc_\equiv [\varphi] = [\circledcirc\varphi]$.

O índice ≡ das operações não será mais indicado.

Quando $\Gamma = \varnothing$, a álgebra de Lindenbaum de L_P será indicada por $A(L_P)$.

Proposição 3.4.12: Em $A_\Gamma(L_P)$, é valido que: $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Demonstração:

$[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow [\varphi] \vee [\psi] = [\psi] \Leftrightarrow [\varphi \vee \psi] = [\psi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. ■

Proposição 3.4.13: A álgebra $A_\Gamma(L_P)$ é uma álgebra para "poucos".

Demonstração:

i) $\circledcirc\bot \leftrightarrow \bot \Rightarrow [\circledcirc\bot] = [\bot] \Rightarrow \circledcirc[\bot] = [\bot] \Rightarrow \circledcirc 0 = 0$

ii) $\circledcirc\top \leftrightarrow \bot \Rightarrow [\circledcirc\top] = [\bot] \Rightarrow \circledcirc[\top] = [\bot] \Rightarrow \circledcirc 1 = 0$

iii) $0 < [\varphi] \leq [\psi] \Rightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\nvdash \varphi \rightarrow \bot \Rightarrow \vdash \circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi \Rightarrow [\circledcirc\psi] \leq [\circledcirc\varphi] \Rightarrow \circledcirc[\psi] \leq \circledcirc[\varphi]$.

iv) $[\varphi] = [\psi] \Rightarrow \varphi \leftrightarrow \psi \Rightarrow \circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi \Rightarrow [\circledcirc\varphi] = [\circledcirc\psi] \Rightarrow \circledcirc[\varphi] = \circledcirc[\psi]$. ■

Na lógica proposicional clássica, é comum se definir uma valoração como uma função do conjunto de todas as suas fórmulas em um contradomínio {0, 1}, em que 0 é entendido como falso e 1 como verdadeiro. Mas, grosseiramente falando, uma valoração é uma função que atribui a cada fórmula (do conjunto de todas as fórmulas da lógica proposicional clássica) um valor em uma álgebra de Boole qualquer.

Assim, na lógica proposicional para "poucos", temos que uma *valoração* (Definição 3.4.2) é uma função υ de $\mathbf{For}L_P$ em A, isso quer dizer que uma valoração para a LPP é uma

função que atribui a cada fórmula do conjunto de todas as fórmulas da LPP um valor em uma álgebra genérica representada por A.

Esta valoração é dita (Definição 3.4.4) ser um modelo para um conjunto Γ contido no conjunto $\mathbf{For}L_P$ quando para toda fórmula $\varphi \in \Gamma$, segue que $\upsilon(\varphi) = 1$.

Em Rasiowa e Sikorski (1963, p. 209), é dito que Lindenbaum ou Lindenbaum-Tarski mostraram-nos que a álgebra das fórmulas com o quociente dado a partir de uma relação de equivalência, como $\equiv$, também determina uma particular e interessante álgebra de Boole. A esta álgebra, que no nosso caso denotamos por $A_\Gamma(L_P)$, damos o nome de *modelo canônico* do conjunto de todas as fórmulas da LPP, ou seja:

Para $\Gamma \subseteq \mathbf{For}L_P$, a álgebra $A_\Gamma(L_P)$ é o *modelo canônico*[5] que é uma álgebra de Lindenbaum.

Definição 3.4.14: Uma *valoração* em um modelo canônico é a função υ_0: $\mathbf{For}L_P \mapsto A_\Gamma(L_P)$.

Entretanto, quando $\Gamma = \varnothing$, tem-se que υ_0: $\mathbf{For}L_P \mapsto A(L_P)$.

Proposição 3.4.15: Dado $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbf{For}L_P$, então:

i) $[\varphi] = 1$ se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi$;

ii) $[\varphi] = 0$ se, e somente se, $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

Demonstração:

i) ($\Rightarrow$) Seja $[\varphi] = 1 \Rightarrow 1 \leq [\varphi] \Leftrightarrow [\varphi \vee \neg\varphi] \leq [\varphi] \Leftrightarrow [\varphi \to \varphi] \leq [\varphi] \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\varphi \to \varphi) \to \varphi$,

como $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$, por MP, tem-se que $\Gamma \vdash \varphi$.

($\Leftarrow$) Seja $\Gamma \vdash \varphi$.

1. $\Gamma \vdash \varphi$ Hipótese

[5] Rasiowa e Sikorski (1963, p. 287)

2. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ CPC

3. $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ Substituição em 2

4. $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ MP em 1 e 3

Assim, $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi \Leftrightarrow [\varphi \rightarrow \varphi] \leq [\varphi] \Leftrightarrow [\varphi \vee \neg\varphi] \leq [\varphi] \Leftrightarrow 1 \leq [\varphi]$, mas como $A_\Gamma(L_P)$ sempre tem o elemento identidade 1, então $[\varphi] \leq 1$. Logo $[\varphi] = 1$.

ii) $\Gamma \nvdash \neg\varphi \Leftrightarrow [\neg\varphi] \neq 1 \Leftrightarrow \neg[\varphi] \neq 1 \Leftrightarrow [\varphi] \neq 0$. ■

Teorema 3.4.16: (Correção) As álgebras para “poucos” são modelos corretos para a LPP.

Demonstração:

Seja A = (A, 0, 1, $\vee$, $\wedge$, ~, $\otimes$) uma álgebra para “poucos”. Será demonstrado que os axiomas (Ax_{P2}) e (Ax_{P3}) são válidos e que as regras (R_1) e (R_2) preservam a validade:

(Ax_{P2}) Deve-se mostrar que $\upsilon(\circledcirc\bot \leftrightarrow \bot) = 1$:

$\upsilon(\circledcirc\bot \leftrightarrow \bot) = \upsilon((\circledcirc\bot \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \circledcirc\bot)) = \upsilon(\circledcirc\bot \rightarrow \bot) \wedge \upsilon(\bot \rightarrow \circledcirc\bot) = \upsilon(\circledcirc\bot) \rightarrowtail \upsilon(\bot) \wedge \upsilon(\bot) \rightarrowtail \upsilon(\circledcirc\bot) = (\otimes\upsilon(\bot) \rightarrowtail \upsilon(\bot)) \wedge (\upsilon(\bot) \rightarrowtail \otimes\upsilon(\bot)) = (\sim\otimes\upsilon(\bot) \vee \upsilon(\bot)) \wedge (\sim\upsilon(\bot) \vee \otimes\upsilon(\bot)) = (\sim\otimes 0 \vee 0) \wedge (\sim 0 \vee \otimes 0) = (\sim 0 \vee 0) \wedge (\sim 0 \vee 0) = (1 \vee 0) \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 = 1$.

(Ax_{P3}) Deve-se mostrar que $\upsilon(\circledcirc\top \leftrightarrow \bot) = 1$:

$\upsilon(\circledcirc\top \leftrightarrow \bot) = \upsilon((\circledcirc\top \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \circledcirc\top)) = \upsilon(\circledcirc\top \rightarrow \bot) \wedge \upsilon(\bot \rightarrow \circledcirc\top) = \upsilon(\circledcirc\top) \rightarrowtail \upsilon(\bot) \wedge \upsilon(\bot) \rightarrowtail \upsilon(\circledcirc\top) = (\otimes\upsilon(\top) \rightarrowtail \upsilon(\bot)) \wedge (\upsilon(\bot) \rightarrowtail \otimes\upsilon(\top)) = (\sim\otimes\upsilon(\top) \vee \upsilon(\bot)) \wedge (\sim\upsilon(\bot) \vee \otimes\upsilon(\top)) = (\sim\otimes 1 \vee 0) \wedge (\sim 0 \vee \otimes 1) = (\sim 0 \vee 0) \wedge (\sim 0 \vee 0) = (1 \vee 0) \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 = 1$.

(R_1) Consideremos que $\upsilon(\varphi \rightarrow \psi) = 1$, $\upsilon(\varphi \rightarrow \bot) \neq 1$ e $\upsilon(\circledcirc\psi) = 1$, devemos mostrar que $\upsilon(\circledcirc\varphi) = 1$:

$\upsilon(\varphi \rightarrow \bot) \neq 1 \Rightarrow \upsilon(\neg\varphi \vee \bot) \neq 1 \Rightarrow \upsilon(\neg\varphi) \neq 1 \Rightarrow \sim\upsilon(\varphi) \neq 1 \Rightarrow \upsilon(\varphi) \neq 0$.

Então, $0 \neq \upsilon(\varphi) \leq \upsilon(\psi) \Rightarrow$ (Pela Definição 3.3.1 (iii)) $1 = \upsilon(\circledcirc\psi) \leq \upsilon(\circledcirc\varphi)$, como pela Proposição 1.1.9, $\upsilon(\circledcirc\varphi) \leq 1$. Portanto, $\upsilon(\circledcirc\varphi) = 1$.

(R_2) Deve-se mostrar que se $\upsilon(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$, então $\upsilon(\circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi) = 1$.

$\upsilon(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \Rightarrow \upsilon(\varphi) = \upsilon(\psi) \Rightarrow \otimes\upsilon(\varphi) = \otimes\upsilon(\psi) \Rightarrow \upsilon(\circledcirc\varphi) = \upsilon(\circledcirc\psi) \Rightarrow \upsilon(\circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi) = 1$. ■

Proposição 3.4.17: A LPP é consistente.

Demonstração:

Suponha que a LPP não seja consistente. Então existe $\varphi \in \mathbf{For}\mathcal{L}_P$, tal que $\vdash\varphi$ e $\vdash\neg\varphi$. Pelo Teorema da Correção, acima, então φ e $\neg\varphi$ são fórmulas válidas. Seja υ uma valoração em uma álgebra para "poucos" com dois elementos $\mathbf{2} = \{0, 1\}$. Como φ é válida, então $\upsilon(\varphi) = 1$ e $\upsilon(\neg\varphi) = \sim \upsilon(\varphi) = 0$. O que contradiz o fato de $\neg\varphi$ ser válida. ■

Teorema 3.4.18: Seja $\varphi \in \mathbf{For}\mathcal{L}_P$. As afirmações seguintes são equivalentes:

i) $\vdash \varphi$;

ii) $\vDash \varphi$;

iii) φ é válida em toda álgebra para "poucos" de conjuntos $\mathbf{B} = (B, \varnothing, \cap, \cup, \bar{}\,, \otimes)$;

iv) $\upsilon_0(\varphi) = 1$, em que υ_0 é a valoração do modelo canônico $\mathcal{A}(\mathcal{L}_P)$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Segue do Teorema da Correção.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Como, por definição, $\vDash \varphi$ quando φ é válida em todo álgebra para "poucos", então φ é válida, particularmente, em toda álgebra para "poucos" de conjuntos **B.**

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Como toda álgebra para "poucos" é isomorfa a uma álgebra para "poucos" de conjuntos $\mathbf{B} = (B, \varnothing, \cap, \cup, \bar{}\,, \otimes)$ e $\mathcal{A}(\mathcal{L}_P)$ é uma álgebra para "poucos", segue o resultado.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Se $\varphi \in \mathbf{For}\mathcal{L}_P$ e φ não é derivável na LPP, então, pela Proposição 3.4.15, $[\varphi]$ não coincide com a unidade de $\mathcal{A}(\mathcal{L}_P)$ e, assim, $\upsilon_0(\varphi) \neq 1$. Portanto, φ não é uma fórmula válida. ■

Corolário 3.4.19: (Completude) Para toda fórmula $\varphi \in \mathbf{For}\mathcal{L}_P$, se φ é uma fórmula válida, então φ é derivável na LPP.

Agora, será mostrada a completude forte do modelo algébrico dado pela álgebra para "poucos". Como é usual, $\Gamma \vDash \varphi$ denota que todo modelo de Γ é também modelo de φ.

Proposição 3.4.20: Seja $\Gamma \subseteq \mathbf{For}\mathcal{L}_P$. Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \vDash \varphi$.

Demonstração:

Seja $\mathcal{C}$ um modelo para Γ. Consideremos a valoração υ: $\mathbf{Var}\mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{C}$. Como no Teorema 3.4.16, as regras da LPP preservam a validade e se $\upsilon_{\mathcal{C}}(\psi) = 1$, para toda $\psi \in \Gamma$, então $\upsilon_{\mathcal{C}}(\varphi) = 1$. ■

Proposição 3.4.21: Seja $\Gamma \subseteq \mathbf{For}\mathcal{L}_P$ e $\mathcal{C}$ uma álgebra para "poucos". Se existe um modelo υ: $\mathbf{For}\mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{C}$ para Γ, então Γ é consistente.

Demonstração:

Suponha que a LPP não seja consistente. Então $\Gamma \vdash \varphi$ e $\Gamma \vdash \neg\varphi$ e, também, $\upsilon_{\mathcal{C}}(\varphi) = 1$ e $\upsilon_{\mathcal{C}}(\neg\varphi) = 1$. Desde que $\upsilon_{\mathcal{C}}(\neg\varphi) = 1$, segue que $\sim\upsilon_{\mathcal{C}}(\varphi) = 1$ e, consequentemente, $\upsilon_{\mathcal{C}}(\varphi) = 0$, o que é uma contradição. ■

Definição 3.4.22: Um modelo υ: **For**$\mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{C}$ é *fortemente adequado*[6] para Γ quando:

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ se, e somente se, } \Gamma \vDash \varphi.$$

Proposição 3.4.23: Se $\Gamma \subseteq$ **For**$\mathcal{L}_P$ é consistente, então a valoração canônica é um modelo fortemente adequado para Γ.

Demonstração:

Segundo a valoração canônica υ_0: **For**$\mathcal{L}_P \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{L}_P)$, $\upsilon_0(\varphi) = [\varphi]$. Pela Proposição 3.4.15 (i), $\upsilon_0(\varphi) = 1$ se, e somente se, $\Gamma \vdash \varphi$. Consequentemente, tem-se que υ_0 é um modelo fortemente adequado para Γ. ■

Teorema 3.4.24: (Adequação) Dado $\Gamma \subseteq$ **For**$\mathcal{L}_P$, as seguintes condições são equivalentes:

i) Γ é consistente;

ii) existe um modelo fortemente adequado para Γ;

iii) existe um modelo adequado para Γ em uma álgebra para "poucos" $\mathcal{C}$ que é uma álgebra de conjuntos **B** = (B, $\varnothing$, $\cap$, $\cup$, $^-$, $^\otimes$);

iv) existe um modelo para Γ.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Segue da Proposição 3.4.23.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Como $\mathcal{A}(\mathcal{L}_P)$ é uma álgebra para "poucos" e, pelo Teorema 3.3.4, toda álgebra para "poucos" é isomorfa a uma álgebra para "poucos" de conjuntos **B** = (B, $\varnothing$, $\cap$, $\cup$, $^-$, $^\otimes$), então o resultado é imediato.

[6] Rasiowa e Sikorski (1963, p. 287).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Se existe um modelo adequado para Γ, é claro que existe um modelo para Γ.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Resultado direto da Proposição 3.4.21.

Corolário 3.4.25: Seja $\Gamma \subseteq \mathbf{For}L_P$. Se Γ é consistente, as afirmações seguintes são equivalentes:

i) $\Gamma \vdash \varphi$;

ii) $\Gamma \vDash \varphi$;

iii) todo modelo de Γ na álgebra para "poucos" de conjuntos $\mathbf{B} = (B, \varnothing, \cap, \cup, \bar{}, \otimes)$ é um modelo para φ.

iv) para toda valoração canônica υ_0 é a valoração no modelo canônico $A(L_P)$, $\upsilon_0(\varphi) = 1$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Segue do Teorema 3.4.20.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Por definição, $\Gamma \vDash \varphi$ significa que todo modelo de Γ é também modelo de φ, então todo modelo de Γ na álgebra de conjuntos para "poucos" $\mathbf{B} = (B, \varnothing, \cap, \cup, \bar{}, \otimes)$ também é modelo de φ.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Como toda álgebra para "poucos" é isomorfa a uma álgebra de conjuntos $\mathbf{B} = (B, \varnothing, \cap, \cup, \bar{}, \otimes)$ e $A(L_P)$ é uma álgebra para "poucos", então segue o resultado.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Pelo Teorema 3.4.21, Γ é consistente. Pela Proposição 3.4.23, a valoração canônica é um modelo adequado para Γ. ■

Neste capítulo, a lógica proposicional para "poucos" foi apresentada no estilo hilbertiano ou axiomático. O método axiomático é o sistema formal mais antigo que se conhece, foi usado por Euclides para apresentação da geometria e no final do século XIX adquiriu um aspecto formal mais rigoroso devido a trabalhos como o do matemático alemão David Hilbert (1862-1943). Daí o nome hilbertiano.

O método dedutivo no estilo hilbertiano possui dois tipos de elementos, são eles: Axiomas, isto é, fórmulas da lógica que são consideradas verdadeiras sem que seja necessário demonstrá-las, e regras de inferência que permitem deduzir novas fórmulas, a partir de fórmulas já deduzidas anteriormente ou de axiomas.

Na literatura, entretanto, há diversas outras formas de se apresentar um sistema lógico. As mais comuns são: via dedução natural, via *tableaux* ou via cálculo de sequentes.

A dedução natural e o cálculo de sequentes, também são conhecidos como *sistemas de Gentzen*[7], pois, Gerhard Gentzen (1909-1945) instigado por questões sobre a consistência da aritmética, desenvolveu o sistema denominado dedução natural e, posteriormente, o sistema denominado cálculo de sequentes.

O método de *tableaux* será utilizado aqui para fazer uma nova apresentação da LPP, agora via *tableaux.* O leitor pode estar se fazendo a seguinte pergunta: Se a LPP já foi apresentada no sistema hilbertiano, por que apresenta-la em *tableaux*?

Os *tableaux* permitem a construção de contra-exemplos, como apontam Buchsbaum e Pequeno (1990, p.81):

> Além da sua [o método dos tableaux] utilidade na prova de teoremas, a forma exaustiva e sistemática com que o espaço de construção de modelos é percorrido faz do método dos tableaux um valioso instrumento na determinação de resultados negativos em cálculos decidíveis (ou fragmentos decidíveis de cálculos indecidíveis). Nesses casos, a falha na tentativa de refutação de $\neg\alpha$ (ou alguma variante dessa expressão de acordo com a generalização aqui introduzida) pode ser efetivamente decidida após um número finito de passos. Uma tal falha indica, na realidade, a impossibilidade dessa refutação, permitindo estabelecer que α não é teorema do cálculo. Além disso, em decorrência da tentativa infrutífera, um contra-exemplo é construído (BUCHSBAUM; PEQUENO, 1990, p. 81).

Considere o problema de determinar se uma fórmula qualquer φ é ou não consequência de um dado conjunto de fórmulas Γ, ou seja, se $\Gamma \vdash \varphi$. Em teorias proposicionais, utilizando o método dos *tableaux,* usualmente, conseguimos dar uma resposta a esta questão, seja

[7] Gentzen (1969).

ela positiva ($\Gamma \vdash \varphi$) ou negativa ($\Gamma \nvdash \varphi$). Já utilizando o método hilbertiano isso nem sempre é possível.

E ainda, o método dos *tableaux* responde ao problema acima de modo "mais rápido" se comparado ao método hilbertiano, pois, na demonstração de $\Gamma \vdash \varphi$, segundo o método dos *tableaux*, devem ocorrer apenas subfórmulas de $\neg\varphi$.

Em virtude destas vantagens, no próximo capítulo, a lógica proposicional para "poucos" será apresentada via *tableaux*.

4 A LÓGICA PROPOSICIONAL PARA POUCOS EM *TABLEAUX*

4.1 Origens do método de *tableaux*

O método dos *tableaux* é um método de prova baseado em refutação, isto é, na busca por contra-exemplos. A sua origem foi influenciada pelos trabalhos de Gerhard Gentzen em relação à dedução natural.

A análise feita por Gentzen em relação ao cálculo de predicados por meio da dedução natural influenciou outros desenvolvimentos em lógica, um deles foi a reformulação dada por Beth ao sistema de dedução natural de Gentzen, por um sistema de *tableaux* semânticos (Gentzen, 1969, p. 7).

Esse novo método é baseado na construção de contra-exemplos e satisfaz o *princípio da subfórmula* de Gentzen (Gentzen, 1969, p. 7). Os *sistemas de provas* de Gentzen eram caracterizados por admitirem esse princípio, ou seja, se uma fórmula φ é demonstrável, então φ tem uma demonstração em que ocorrem apenas subfórmulas de φ.

Segundo Fitting (1999, p. 13), a motivação de Gentzen, ao desenvolver os sistemas de dedução natural e de cálculo de sequentes, foi o desenvolvimento de uma teoria da prova. Ele não estava preocupado em tentar estabelecer a correção e a completude de seus sistemas, mas em mostrar a equivalência entre eles. Beth, ao contrário de Gentzen, foi motivado por conceitos semânticos e em 1955, introduziu os chamados *tableaux semânticos*.

Os trabalhos de Beth e de Hintikka sobre *tableaux* ocorreram simultaneamente. Como é dito em Fitting (1999, p. 17), o primeiro artigo de Hintikka apareceu em 1955, no mesmo ano em que apareceu o artigo de Beth. Entretanto, semelhante a Beth e diferente de Gentzen, Hintikka foi motivado por interesses semânticos. Hintikka defende que a idéia oculta na prova de φ é que se a tentativa sistemática de construir um modelo em que $\neg\varphi$ é verdadeira falhar, então φ é válida.

Beth e Hintikka, ambos, contribuíram para o desenvolvimento dos *tableaux*. Beth propôs uma representação gráfica por *tableaux*, enquanto Hintikka usou uma estrutura de árvores com conjuntos de formulas em nós. Entretanto, essas duas formas de se apresentar o sistema de *tableaux* eram demasiadamente complicadas e trabalhosas.

Ainda Fitting (1999, p. 19), afirma que um requisito essencial no desenvolvimento dos *tableaux* foi a exigência de uma notação simplificada. Exigência essa alcançada, independentemente, por duas pessoas: Zbigniew Lis e Raymond Smullyan.

Lis publicou suas idéias em 1960, mas devido ao grande abismo fixado entre o ocidente e o oriente da Europa, elas não se tornaram conhecidas. As idéias de Lis foram posteriormente redescobertas por Smullyan, culminando com a publicação de seu livro *First-Order Logic* em 1968. Foi com esse completo trabalho de Smullyan que os *tableaux* se tornaram bastante conhecidos e o trabalho de Lis só voltou a receber atenção nos últimos anos (Fitting,1999, p. 19).

Smullyan chamou sua versão de *tableaux* de "*tableaux* analíticos". Ele utiliza os *tableaux* como base de um tratamento geral para a lógica clássica, incluindo, também, uma análise das possíveis variações das demonstrações de completude (Fitting, 1999, p. 20).

4.2 A lógica proposicional clássica em *tableaux*

4.2.1 Sintaxe

A linguagem do cálculo proposicional clássico será denotada por "L".

Definição 4.2.1.1: O *alfabeto* da linguagem L apresentada aqui é formado por:

i) Conectivos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$

ii) Variáveis proposicionais (ou apenas variáveis): p_1, p_2, p_3, ..., p_n, ...

iii) Sinais de pontuação: (,)

O símbolo "b" será utilizado para denotar os conectivos binários: $\vee$, $\wedge$ e $\rightarrow$ e o símbolo "c" será utilizado para indicar o conectivo unário: $\neg$.

Definição 4.2.1.2: A noção de *fórmula* é dada por meio das seguintes regras:

i) Toda variável proposicional é uma fórmula;

ii) Se φ é uma fórmula, cφ é uma fórmula;

iii) Se φ e ψ são fórmulas, (φ b ψ) é fórmula;

iv) O conjunto de todas as fórmulas é gerado apenas pelas condições (i), (ii) e (iii) acima.

Definição 4.2.1.3: A noção de *subfórmula imediata* é dada pelas condições abaixo:

i) Variáveis proposicionais não têm subfórmulas imediatas.

ii) cφ tem apenas φ como subfórmula imediata.

iii) A fórmula (φ b ψ) tem apenas φ e ψ como subfórmulas imediatas.

Definição 4.2.1.4: A noção de *subfórmula* é implicitamente definida pelas regras:

i) Se φ é uma subfórmula imediata de ψ ou se φ coincide com ψ, então φ é uma subfórmula de ψ.

ii) Se φ é uma subfórmula de ψ e ψ é subfórmula de γ, então φ é uma subfórmula de γ.

O símbolo "↔", que representa a *bicondicional*, é introduzido por: $\varphi \leftrightarrow \psi =_{DF} (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Nota: o símbolo "$=_{DF}$" significa que o termo da esquerda está sendo definido pelo termo da direita.

Definição 4.2.1.5: O *grau* de uma fórmula φ, isto é, o número de conectivos lógicos que ocorrem em φ, é dado pelas condições a seguir:

i) Se φ é uma variável proposicional, então φ tem grau 0;

ii) Se φ tem grau n, então cφ tem grau n+1;

iii) Se φ tem grau n_1 e ψ tem grau n_2, então (φ b ψ) tem grau $n_1 + n_2 + 1$;

Definição 4.2.1.6: A *complexidade* de uma fórmula φ é dada pelas condições a seguir:

i) Se φ é uma variável proposicional, então φ tem complexidade 1;

ii) Se φ tem complexidade n, então cφ tem complexidade n+1;

iii) Se φ tem complexidade n_1 e ψ tem complexidade n_2, então (φ b ψ) tem complexidade $n_1 + n_2 + 1$;

4.2.2 Semântica

Definição 4.2.2.1: Seja Γ um conjunto qualquer de fórmulas de *L*. Uma *valoração* v é uma função que associa a cada fórmula $\varphi \in \Gamma$ um elemento $v(\varphi) \in \{0, 1\}$.

O valor v(φ) de φ sob v é chamado de *valor de verdade* de φ sob v. Se v(φ) = 1, então diz-se que φ é *verdadeira* sob v; e se v(φ) = 0, então diz-se que φ é *falsa* sob v.

Definição 4.2.2.2: Seja Γ um conjunto de todas as fórmulas de *L*. Uma *valoração booleana v* é uma valoração tal que para quaisquer φ e ψ em Γ as seguintes condições são satisfeitas:
i) Uma fórmula ¬φ recebe o valor 1 se φ recebe o valor 0, e recebe 0 se φ recebe o valor 1.
ii) Uma fórmula φ ∧ ψ recebe o valor 1 se φ e ψ recebem, ambas, o valor 1, caso contrário, φ ∧ ψ recebe o valor 0.
iii) Uma fórmula φ ∨ ψ recebe o valor 1 se pelo menos uma das duas, φ ou ψ, recebe o valor 1, caso contrário, φ ∨ ψ recebe o valor 0.
iv) Uma fórmula φ → ψ recebe o valor 0 se φ e ψ recebem, respectivamente, os valores 1 e 0, caso contrário, φ → ψ recebe o valor 1.

Definição 4.2.2.3: Por uma *interpretação* de uma fórmula φ entende-se uma atribuição de valores de verdade a todas as variáveis que ocorrem em φ.

Definição 4.2.2.4: Uma fórmula φ de *L* é uma *tautologia* se ela é verdadeira em todas as valorações booleanas de Γ.

Definição 4.2.2.5: Uma fórmula φ é *satisfatível* se, e somente se, φ é verdadeira em pelo menos uma valoração booleana.

Definição 4.2.2.6: Um conjunto Γ de fórmulas é dito *satisfatível* se, e somente se existe pelo menos uma valoração booleana na qual cada elemento de Γ é verdadeiro. Se isso ocorre, então a valoração *satisfaz* Γ.

Definição 4.2.2.7: Um conjunto Γ *implica logicamente* uma fórmula φ (também diz-se que φ é *logicamente implicada* por Γ ou que φ é *consequência lógica* de Γ), se φ é verdadeira em toda valoração booleana que satisfaz Γ.

Em particular uma fórmula ψ é logicamente implicada por uma fórmula φ se ψ é logicamente implicada pelo conjunto $\{\varphi\}$, ou seja, se ψ é verdadeira em toda valoração booleana na qual φ é verdadeira.

Definição 4.2.2.8: Uma fórmula φ é *logicamente equivalente* a uma fórmula ψ se, e somente se φ e ψ são verdadeiras nas mesmas valorações booleanas.

4.2.3 Tableaux analíticos

O método dos *tableaux* analíticos é baseado em refutação, isto é, para verificar a validade de uma fórmula φ em um sistema lógico, se constrói um *tableau* para a negação da fórmula em questão, ou seja, para $\neg\varphi$ e, então, utilizando uma estrutura que se assemelha a uma árvore, aplica-se regras do sistema de *tableau*. O objetivo desse método é encontrar modelos contraditórios para a negação da fórmula testada, $\neg\varphi$. Quando o objetivo é alcançado, pode-se concluir que a hipótese $\neg\varphi$ é falsa e, portanto, a fórmula original φ é verdadeira. Entretanto, se após a utilização de todas as regras possíveis não é obtida uma contradição, significa que existe uma valoração que torna $\neg\varphi$ verdadeira e, portanto, φ falsa.

O sistema de *tableaux* apresentado para o cálculo proposicional clássico neste capítulo está de acordo com o livro *Lógica de Primeira Ordem* de Raymond Smullyan (2009).

Agora serão apresentadas algumas definições importantes e necessárias à definição de *árvore ordenada diádica*.

Definição 4.2.3.1: Uma *árvore não ordenada* T é uma estrutura $\langle \Gamma, L, R \rangle$, tal que:
i) Γ representa um conjunto de elementos $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n\}$ chamados *pontos*.
ii) L é uma função que associa a cada ponto φ, um inteiro positivo $L(\varphi)$ chamado *nível* de φ.
iii) R é uma relação definida em Γ, na qual se φ R ψ, então φ é chamado *antecessor* de ψ e ψ é chamado *sucessor* de φ. Essa relação deve obedecer as seguintes condições:
C_1: Há um único ponto φ_1 de nível 1, chamado *origem* da árvore.
C_2: Todos os pontos de Γ, menos a origem (a origem não têm antecessor), tem um único antecessor.

C_3: Para quaisquer pontos φ e ψ, se ψ é um sucessor de φ, então $L(\psi) = L(\varphi) + 1$.

Definição 4.2.3.2: Se um ponto tem exatamente um sucessor é chamado de *ponto simples* e se um ponto possui mais que um sucessor é chamado de *ponto de junção*.

Definição 4.2.3.3: Um *ponto final* é um ponto que não possui pontos sucessores.

Definição 4.2.3.4: Uma *árvore ordenada* é uma árvore não ordenada acrescida de uma função h que atribui a cada ponto de junção γ uma sequência $h(\gamma)$ que não contém repetições, e cujo conjunto de termos consiste em todos os sucessores de γ.

Definição 4.2.3.5: Uma *árvore diádica* é uma árvore ordenada em que cada ponto junção tem no máximo dois sucessores.

Definição 4.2.3.6: Uma fórmula é dita do tipo α se puder ser escrita como uma conjunção, com componentes denominados α_1 e α_2. As fórmulas do tipo α e seus respectivos componentes são apresentados na tabela abaixo:

α	α_1	α_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$
$\neg\neg\varphi$	φ	

Proposição 4.2.3.7: Em qualquer valoração booleana se $v(\alpha_1)= 1$ e $v(\alpha_2)= 1$, então $v(\alpha)= 1$.
Demonstração:
1º caso ($\alpha_1 = \varphi$, $\alpha_2 = \psi$ e $\alpha = \varphi \wedge \psi$): Por hipótese $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 1$. Logo, por definição, $v(\varphi \wedge \psi) = 1$.
2º caso ($\alpha_1 = \neg\varphi$, $\alpha_2 = \neg\psi$ e $\alpha = \neg(\varphi \vee \psi)$): Por hipótese $v(\neg\varphi) = 1$ e $v(\neg\psi) = 1$, assim, por definição, $v(\varphi) = 0$ e $v(\psi) = 0$ e, então $v(\varphi \vee \psi) = 0$. Portanto, também por definição, $v(\neg(\varphi \vee \psi)) = 1$.

3º caso ($\alpha_1 = \varphi$, $\alpha_2 = \neg\psi$ e $\alpha = \neg(\varphi \rightarrow \psi)$): Por hipótese $v(\varphi) = 1$ e $v(\neg\psi) = 1$, assim, por definição, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = 0$ e, então $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$. Portanto, também por definição, $v(\neg(\varphi \rightarrow \psi)) = 1$.

4º caso ($\alpha_1 = \varphi = \alpha_2$ e $\alpha = \neg\neg\varphi$): Por hipótese $v(\varphi) = 1$, logo por definição, $v(\neg\varphi) = 0$ e $v(\neg\neg\varphi) = 1$. ■

Definição 4.2.3.8: Uma fórmula é dita do tipo β se puder ser escrita como uma disjunção, com componentes denominados β_1 e β_2. As fórmulas do tipo β e seus respectivos componentes são apresentados na tabela abaixo:

β	β_1	β_2
$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ

Proposição 4.2.3.9: Em qualquer valoração booleana se $v(\beta_1)= 1$ ou $v(\beta_2)= 1$, então $v(\beta)= 1$.

Demonstração:

1º caso ($\beta_1 = \neg\varphi$, $\beta_2 = \neg\psi$ e $\beta = \neg(\varphi \wedge \psi)$): Por hipótese $v(\neg\varphi) = 1$ ou $v(\neg\psi) = 1$, assim, por definição, $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 0$ e, então $v(\varphi \wedge \psi) = 0$. Portanto, também por definição, $v(\neg(\varphi \wedge \psi)) = 1$.

2º caso ($\beta_1 = \varphi$, $\beta_2 = \psi$ e $\beta = \varphi \vee \psi$): Por hipótese $v(\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$, logo, por definição, $v(\varphi \vee \psi) = 1$.

3º caso ($\beta_1 = \neg\varphi$, $\beta_2 = \psi$ e $\beta = \varphi \rightarrow \psi$): Por hipótese $v(\neg\varphi) = 1$ ou $v(\psi) = 1$, assim, por definição, $v(\varphi) = 0$ ou $v(\psi) = 1$ e, então $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. ■

A fórmula $\neg\neg\varphi$ é uma exceção, pois ela possui apenas um componente, assim ela pode ser tanto uma fórmula do tipo α quanto uma fórmula do tipo β, foi uma escolha arbitrária classifica-la como uma fórmula do tipo α.

Definição 4.2.3.10: Seja v uma valoração booleana e seja Γ o conjunto de todas as fórmulas que são verdadeiras sob v. O conjunto Γ é dito saturado (ou conjunto-verdade) se as seguintes condições são satisfeitas:

i) Para todo φ, exatamente uma das duas, φ ou $\neg\varphi$, pertence a Γ.

ii) α pertence a Γ se, e somente se tanto α_1 como α_2 pertencem a Γ.

iii) β pertence a Γ se, e somente se pelo menos uma das duas β_1 ou β_2, pertence a Γ.

Definição 4.2.3.11: Um *ramo* é qualquer conjunto finito ou infinito de pontos tal que:

i) A origem da árvore está no ramo;

ii) Cada termo do ramo, exceto (se houver) o último, é antecessor do próximo;

iii) Se α está no ramo, então, também α_1 e α_2 estão no ramo;

iv) Se β está no ramo, então, somente um dos dois β_1 ou β_2 está no ramo.

Definição 4.2.3.12: Quando um ramo tem um número finito de pontos um último ponto do ramo é o *ponto* final do ramo (da árvore) e esse ramo é *finito*.

Definição 4.2.3.13: Quando um ramo tem um número infinito de pontos é um *ramo infinito*.

Agora será dada uma definição precisa de *tableau* analítico. Para não causar confusão é necessário ressaltar que por *um tableau para uma fórmula φ,* entende-se um *tableau* que começa com uma determinada fórmula φ e, para demonstrar que φ é uma tautologia, constrói-se um *tableau*, não para a fórmula φ, mas para a sua negação $\neg\varphi$.

Definição 4.2.3.14: Um *tableau analítico* para uma fórmula φ é uma árvore ordenada diádica, cujos pontos são fórmulas, e que é construída como se segue. Inicia-se colocando φ na origem. Supõe-se que $\mathfrak{I}$ já é um *tableau* construído para φ e ψ é um ponto final. Então se pode estender $\mathfrak{I}$ por meio de uma das seguintes operações:

i) Se alguma fórmula do tipo α ocorre no ramo θ_ψ (ramo que contém ψ), então se pode adicionar ou α_1 ou α_2 como único sucessor de ψ;

ii) Se alguma fórmula do tipo β ocorre no ramo θ_ψ (ramo que contém ψ), então se pode simultaneamente adicionar β_1 como sucessor da esquerda de ψ e β_2 como sucessor da direita de ψ.

Os itens (i) e (ii) acima dizem respeito às regras para expansão dos ramos do *tableau*. Estas podem ser definidas de acordo com os tipos de fórmulas. Para as fórmulas do tipo α tem-se a regra α e para as fórmulas do tipo β tem-se a regra β.

Como as fórmulas do tipo α possuem comportamento conjuntivo, elas adicionam novas fórmulas ao final do ramo. As fórmulas desse tipo são representadas pela letra α e quando ocorre no ramo alguma fórmula do tipo α, serão acrescentados no mesmo ramo as fórmulas α_1 e α_2.

Regra α

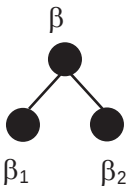
$$\frac{\alpha}{\begin{array}{l}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$



As fórmulas do tipo β possuem comportamento disjuntivo, elas bifurcam um ramo. As fórmulas desse tipo são representadas pela letra β. Quando ocorrer no ramo alguma fórmula do tipo β, serão acrescentadas as fórmulas β_1 e β_2, uma do lado da outra, no final do ramo e cada uma será a origem de um novo ramo.

Regra β

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$



Para facilitar a aplicação das regras, elas serão nomeadas como segue:

$$[R\wedge]:\ \frac{\varphi\wedge\psi}{\begin{array}{l}\varphi\\ \psi\end{array}} \qquad [R\neg\vee]:\ \frac{\neg(\varphi\vee\psi)}{\begin{array}{l}\neg\varphi\\ \neg\psi\end{array}} \qquad [R\neg\rightarrow]:\ \frac{\neg(\varphi\rightarrow\psi)}{\begin{array}{l}\varphi\\ \neg\psi\end{array}} \qquad [R\neg\neg]:\ \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$$

$$[R\neg\wedge]:\ \frac{\neg(\varphi\wedge\psi)}{\neg\varphi \mid \neg\psi} \qquad [R\vee]:\ \frac{\varphi\vee\psi}{\varphi \mid \psi} \qquad [R\rightarrow]:\ \frac{\varphi\rightarrow\psi}{\neg\varphi \mid \psi}$$

Definição 4.2.3.15: Um *tableau* é chamado *finitamente gerado* se cada ponto tem apenas finitos sucessores. Um *tableau* é *finito* se é finitamente gerado e, em caso contrário, ele é *infinito*.

Definição 4.2.3.16: Um ramo de *tableau* é *fechado* quando existem neste ramo pontos que correspondam às fórmulas γ e $\neg\gamma$.

Definição 4.2.3.17: Um *tableau* para uma determinada fórmula φ é *fechado* quando todos os seus ramos são fechados.

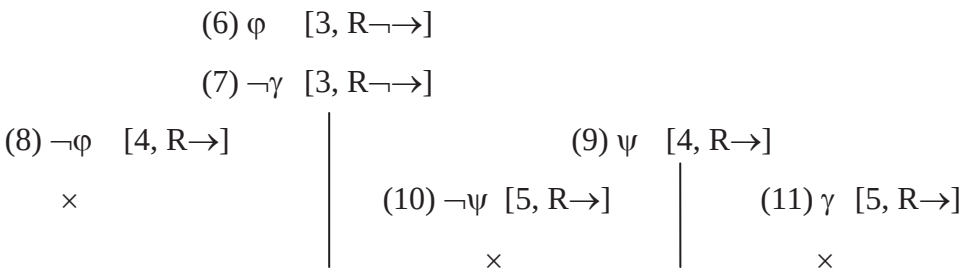
Definição 4.2.3.18: Seja Γ um conjunto de fórmulas de L. O conjunto Γ é dito *fechado* quando é possível a construção de um *tableau* fechado para a conjunção das fórmulas de Γ, caso contrário Γ é dito *aberto*.

Definição 4.2.3.19: Seja Γ um conjunto de fórmulas de L. Uma fórmula φ é *consequência lógica* de Γ e denota-se tal fato por $\Gamma \Vdash \varphi$, quando $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é um conjunto fechado de fórmulas.

Definição 4.2.3.20: Uma *demonstração* por *tableau* da fórmula φ é um *tableau* fechado para $\neg\varphi$. Se uma fórmula φ tem uma demonstração por *tableau*, então é dito que φ é demonstrável por *tableaux* e denota-se tal fato por $\Vdash\varphi$.

Para exemplificar o que é uma demonstração utilizando o método dos *tableaux*, será demonstrado a seguir que: $\Vdash ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \gamma)) \to (\varphi \to \gamma)$.

(1) $\neg(((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \gamma)) \to (\varphi \to \gamma))$
  (2) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \gamma)$ [1, R$\neg\to$]
    (3) $\neg(\varphi \to \gamma)$ [1, R$\neg\to$]
      (4) $\varphi \to \psi$ [2, R$\wedge$]
      (5) $\psi \to \gamma$ [2, R$\wedge$]



Definição 4.2.3.21: Um ramo θ de um *tableau* está *completo* se, para todo α que ocorre em θ, tanto α_1 como α_2 ocorrem em θ, e para todo β que ocorre em θ, pelo menos um dos dois, β_1 ou β_2 ocorre em θ.

Definição 4.2.3.22: Um *tableau* $\mathfrak{I}$ é dito *completado* se todo ramo de $\mathfrak{I}$ ou for fechado ou estiver completo.

Definição 4.2.3.23: Um *tableau* $\mathfrak{I}_2$ é dito uma extensão direta de $\mathfrak{I}_1$ se $\mathfrak{I}_2$ for obtido a partir de $\mathfrak{I}_1$ por meio da aplicação de uma das operações abaixo:
i) Se alguma fórmula do tipo α ocorre no ramo θ_Y, então se pode adicionar ou α_1 ou α_2 como único sucessor de Y;
ii) Se alguma fórmula do tipo β ocorre no ramo θ_Y, então se pode simultaneamente adicionar β_1 como sucessor da esquerda de Y e β_2 como sucessor da direita de Y.

Teorema 4.2.3.24 (Monotonicidade): Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Gamma \Vdash \varphi$, então $\Delta \Vdash \varphi$;

A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada em (Carnielli; Coniglio; Bianconi, 2006, p. 84).

Definição 4.2.3.25: Seja Γ um conjunto de fórmulas de *L*. O conjunto Γ é dito *inconsistente por tableau* se existe um *tableau* fechado para Γ.

4.2.4 A lógica proposicional clássica em tableaux

Os resultados a seguir têm por base os trabalhos de (Carnielli; Coniglio; Bianconi, 2006) e de (Matulovic, 2008).

Aqui se demonstra que o sistema de *tableaux* apresentado acima para a lógica proposicional clássica é equivalente a uma das apresentações dessa mesma lógica na forma hilbertiana.

A forma hilbertiana mencionada é construída sobre a linguagem $\mathcal{L}(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, p_1, p_2, ...)$ com a axiomática L_4 apresentada em Mendelson (1964, p. 40), juntamente com a regra de inferência *modus ponens*, a saber: $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$.

Teorema 4.2.4.1: Os conjuntos $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são inconsistentes por *tableau* se, e somente se o conjunto Γ é inconsistente por *tableau*.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Se o conjunto Γ é inconsistente por *tableau*, então os conjuntos $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são inconsistentes por *tableau*.

Como, por hipótese, Γ é inconsistente por *tableau*, então, por definição, existe um *tableau* fechado para Γ. Pela propriedade da monotonicidade se existe um *tableau* fechado para Γ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então existe um *tableau* fechado para Δ. Assim, quando Δ é um dos conjuntos $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, Δ admite uma *tableau* fechado. Portanto, os conjuntos $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são inconsistentes por *tableau*.

($\Rightarrow$) Se os conjuntos $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são inconsistentes por *tableau*, então o conjunto Γ é inconsistente por *tableau*.

Demonstração por indução sobre a complexidade de φ:

I. A fórmula φ é atômica:

(i) Por hipótese, o conjunto $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente por *tableau*, logo, por definição, existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Como φ é atômica, não é possível aplicar qualquer regra a φ e, assim, o *tableau* fechado para Γ é idêntico ao *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Assim, ou existe um *tableau* fechado para Γ, ou pelas Definições 4.2.3.16 e 4.2.3.17, φ fecha todos os

ramos abertos de Γ. Se Γ é fechado, então a demonstração está terminada. Entretanto, se φ fecha todos os ramos abertos do *tableau* de Γ, pela Definição 4.2.3.16, cada ramo aberto deve conter ¬φ.

(ii) Por hipótese, o conjunto Γ ∪ {¬φ} também é inconsistente por *tableau* e, assim, existe um *tableau* fechado para Γ ∪ {¬φ}. Como φ é atômica, também não é possível aplicar qualquer regra a ¬φ. Logo, pelo mesmo argumento do caso anterior, ou existe um *tableau* fechado para Γ, ou ¬φ fecha todos os seus ramos abertos. Isto nos permite concluir que se não existe um *tableau* fechado para Γ, então todo ramo aberto de Γ deve conter φ.

Desde que (i) e (ii) valem concomitantemente, então todo ramo aberto de Γ contêm simultaneamente as fórmulas φ e ¬φ e, portanto, existe um *tableau* fechado para Γ. Logo, Γ é inconsistente por *tableau*.

II. A fórmula φ é do tipo ¬ψ:

(i) Por hipótese, o conjunto Γ ∪ {¬ψ} é inconsistente por *tableau* e, por definição, existe um *tableau* fechado para Γ ∪ {¬ψ}:

(1) Γ
(2) ¬ψ
×

Como existe um *tableau* fechado para Γ ∪ {¬ψ}, então ou existe um *tableau* fechado para Γ ou o *tableau* fecha com o acréscimo da fórmula ¬ψ. No segundo caso, conclui-se que ψ ocorre no *tableau*.

(ii) Por hipótese, o conjunto Γ ∪ {¬¬ψ} também é inconsistente por *tableau*. Assim, por definição, existe um *tableau* fechado para Γ ∪ {¬¬ψ}:

(1) Γ
(2) ¬¬ψ
(3) ψ [2, R¬¬]
×

Como também existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\neg\neg\psi\}$, então ou existe um *tableau* fechado para Γ ou o *tableau* fecha com o acréscimo da fórmula $\neg\neg\psi$. Logo, $\neg\psi$ ocorre no *tableau*.

De (i) e (ii) segue que $\psi \wedge \neg\psi$ ocorre no *tableau* de Γ, ou seja, há um *tableau* fechado para Γ. Portanto, Γ é inconsistente por *tableau*.

III. A fórmula φ é do tipo $\psi \vee \gamma$:

(i) Também por hipótese, o conjunto $\Gamma \cup \{\psi \vee \gamma\}$ é inconsistente por *tableau* e, como no caso anterior, existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\psi \vee \gamma\}$:

$$
\begin{array}{c}
(1)\ \Gamma \\
(2)\ \psi \vee \gamma \\
\hline
\begin{array}{l|l}
(3)\ \psi \quad [2, R\vee] & (4)\ \gamma \quad [2, R\vee] \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Como existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\psi \vee \gamma\}$, então ou existe um *tableau* fechado para Γ ou o *tableau* fecha com o acréscimo da fórmula $\psi \vee \gamma$. Nesse último caso também é possível concluir que $\neg\psi$ e $\neg\gamma$ ocorrem no *tableau*.

(ii) Por hipótese, o conjunto $\Gamma \cup \{\neg(\psi \vee \gamma)\}$ também é inconsistente por *tableau* e, assim, existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\neg(\psi \vee \gamma)\}$:

$$
\begin{array}{l}
(1)\ \Gamma \\
(2)\ \neg(\psi \vee \gamma) \\
(3)\ \neg\psi \quad [2, R\neg\vee] \\
(4)\ \neg\gamma \quad [2, R\neg\vee] \\
\times
\end{array}
$$

Logo, ou existe um *tableau* fechado para Γ ou o *tableau* fecha com o acréscimo da fórmula $\neg(\psi \vee \gamma)$. Assim, ψ ocorre no *tableau* ou γ ocorre no *tableau*.

De (i) e (ii), como $(\psi \wedge \neg\psi)$ ou $(\gamma \wedge \neg\gamma)$ ocorre no *tableau* de Γ, então há um *tableau* fechado para Γ e, portanto, Γ é inconsistente por *tableau*.

IV. A fórmula φ é do tipo $\psi \wedge \gamma$:

(i) Por hipótese o conjunto $\Gamma \cup \{\psi \wedge \gamma\}$ é inconsistente por *tableau* e, portanto, existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\psi \wedge \gamma\}$:

$$
\begin{array}{c}
(1)\ \Gamma \\
(2)\ \psi \wedge \gamma \\
(3)\ \psi \quad [2, R\wedge] \\
(4)\ \gamma \quad [2, R\wedge] \\
\times
\end{array}
$$

Assim, ou existe um *tableau* fechado para Γ ou o *tableau* fecha com o acréscimo da fórmula $(\psi \wedge \gamma)$. Logo, $\neg\psi$ ou $\neg\gamma$ ocorre no *tableau*.

(ii) Também por hipótese existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\neg(\psi \wedge \gamma)\}$:

$$
\begin{array}{c}
(1)\ \Gamma \\
(2)\ \neg(\psi \wedge \gamma) \\
\begin{array}{l|l}
(3)\ \neg\psi\ [2, R\neg\wedge] & (4)\ \neg\gamma\ [2, R\neg\wedge] \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Nesse caso é possível concluir que ψ e γ ocorrem no *tableau*.

De (i) e (ii), como $(\psi \wedge \neg\psi)$ ou $(\gamma \wedge \neg\gamma)$ ocorre no *tableau* de Γ, então há um *tableau* fechado para Γ e, portanto, Γ é inconsistente por *tableau*.

V. Para o caso em que φ é do tipo $\psi \rightarrow \gamma$:

(i) Por hipótese existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\psi \rightarrow \gamma\}$:

$$
\begin{array}{c}
(1)\ \Gamma \\
(2)\ \psi \rightarrow \gamma \\
\begin{array}{l|l}
(3)\ \neg\psi\ [2, R\rightarrow] & (4)\ \gamma \quad [2, R\rightarrow] \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Assim, ou existe um *tableau* fechado para Γ ou o *tableau* fecha com o acréscimo da fórmula $\psi \rightarrow \gamma$. Logo, ψ e $\neg\gamma$ ocorrem no *tableau*.
(ii) Por hipótese também existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\neg(\psi \rightarrow \gamma)\}$:

(1) Γ
(2) $\neg(\psi \rightarrow \gamma)$
(3) ψ [2, R$\neg\rightarrow$]
(4) $\neg\gamma$ [2, R$\neg\rightarrow$]
$\times$

Logo, $\neg\psi$ ou γ ocorre no *tableau.*
De (i) e (ii), como $(\psi \wedge \neg\psi)$ ou $(\gamma \wedge \neg\gamma)$ ocorre no *tableau* de Γ, então há um *tableau* fechado para Γ e, portanto, Γ é inconsistente por *tableau*.

Como todos os casos foram analisados. Tem-se que Γ é inconsistente por *tableau*.

■

Os dois teoremas a seguir (Teorema 4.2.4.2 e Teorema 4.2.4.3) mostram a lógica proposicional clássica em *tableaux* é equivalente a uma de suas versões hilbertiana. Com isso todos os resultados que são obtidos axiomaticamente podem ser obtidos também utilizando a sua versão *tableaux*. O teorema abaixo diz que se uma fórmula φ é obtida de Γ pelo método hilbertiano, então ela pode ser obtida de Γ, também via *tableaux*.

Teorema 4.2.4.2: Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demonstração: A demonstração deste teorema é feita por indução sobre o comprimento da dedução de φ a partir de Γ.

Para n = 1, a dedução de φ a partir de Γ tem apenas uma linha.
Nesse caso há duas possibilidades:

i. φ é uma premissa ou

ii. φ é um esquema de axioma de L

(i) Se φ é uma premissa da dedução, então $\varphi \in \Gamma$. Logo é possível escrever $\Gamma = \Delta \cup \{\varphi\}$. Para verificar que $\Delta \cup \{\varphi\} \Vdash \varphi$, pelas Definições 4.2.3.18 e 4.2.3.19, é preciso mostrar que existe um *tableau* fechado para a conjunção das fórmulas de $\Delta \cup \{\varphi\} \cup \{\neg\varphi\}$. Como ocorre no caso clássico, se $\Delta \cup \{\varphi\} \Vdash \varphi$, então $\Delta \Vdash \varphi \rightarrow \varphi$. Assim, basta construir um *tableau* fechado para $\neg(\varphi \rightarrow \varphi)$:

$$
\begin{array}{l}
(1)\ \Delta \\
(2)\ \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \\
(3)\ \varphi \quad [2, R\neg\rightarrow] \\
(4)\ \neg\varphi \quad [2, R\neg\rightarrow] \\
\quad \times
\end{array}
$$

(ii) Se φ é um esquema de axioma de L, para mostrar que $\Gamma \Vdash \varphi$, segundo as Definições 4.2.3.18 e 4.2.3.19, deve-se verificar se existe um *tableau* fechado para a conjunção das fórmulas de $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Como φ representa um esquema de axioma, então essa condição deve ser verificada para todos os esquemas de axiomas de L.

Para o esquema de axioma Ax_1, tem-se, $\varphi_1 \equiv (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$:

$$
\begin{array}{l}
(1)\ \Gamma \\
(2)\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \\
(3)\ \varphi \quad [2, R\neg\rightarrow] \\
(4)\ \neg(\psi \rightarrow \varphi) \quad [2, R\neg\rightarrow] \\
(5)\ \psi \quad [4, R\neg\rightarrow] \\
(6)\ \neg\varphi [4, R\neg\rightarrow] \\
\quad \times
\end{array}
$$

Para o esquema Ax_2, tem-se, $\varphi_1 \equiv ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \lambda)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \lambda)))$:

(1) Γ

(2) $\neg((\varphi \to (\psi \to \lambda)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \lambda)))$

(3) $\varphi \to (\psi \to \lambda)$ [2, R$\neg\to$]

(4) $\neg((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \lambda))$ [2, R$\neg\to$]

(5) $\varphi \to \psi$ [4, R$\neg\to$]

(6) $\neg(\varphi \to \gamma)$ [4, R$\neg\to$]

(7) φ [6, R$\neg\to$]

(8) $\neg\gamma$ [6, R$\neg\to$]

(9) $\neg\varphi$ [3, R$\to$] | (10) $\psi \to \gamma$ [3, R$\to$]

× | (11) $\neg\varphi$ [5, R$\to$] | (12) ψ [5, R$\to$]

× | (13) $\neg\psi$ [10, R$\to$] | (14) γ [10, R$\to$]

× | ×

Para o esquema de axioma Ax_3, tem-se, $\varphi_1 \equiv ((\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$:

(1) Γ

(2) $\neg((\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$

(3) $\varphi \wedge \psi$ [2, R$\neg\to$]

(4) $\neg\varphi$ [2, R$\neg\to$]

(5) ψ [3, R$\wedge$]

(6) φ [3, R$\wedge$]

×

Para o esquema de axioma Ax_4, tem-se, $\varphi_1 \equiv ((\varphi \wedge \psi) \to \psi)$:

(1) Γ

(2) $\neg((\varphi \wedge \psi) \to \psi)$

(3) $\varphi \wedge \psi$ [2, R$\neg\to$]

(4) $\neg\psi$ [2, R$\neg\to$]

(5) φ [3, R$\wedge$]

(6) ψ [3, R$\wedge$]

×

Para o esquema de axioma Ax_5, tem-se, $\varphi_1 \equiv (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$:

$$(1)\ \Gamma$$

$$(2)\ \neg(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$$

$$(3)\ \varphi \quad [2, R\neg\rightarrow]$$

$$(4)\ \neg(\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))\ [2, R\neg\rightarrow]$$

$$(5)\ \psi \quad [4, R\neg\rightarrow]$$

$$(6)\ \neg(\varphi \wedge \psi)\ [4, R\wedge]$$

$$(7)\ \neg\varphi \quad [6, R\neg\wedge] \qquad \Big| \qquad (8)\ \neg\psi\ [6, R\neg\wedge]$$

$$\times \qquad\qquad\qquad\qquad \times$$

Para o esquema de axioma Ax_6, tem-se, $\varphi_1 \equiv (\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$:

$$(1)\ \Gamma$$

$$(2)\ \neg(\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$$

$$(3)\ \varphi\ [2, R\neg\rightarrow]$$

$$(4)\ \neg(\varphi \vee \psi) \quad [2, R\neg\rightarrow]$$

$$(5)\ \neg\psi \quad [4, R\wedge]$$

$$(6)\ \neg\varphi\ [4, R\wedge]$$

$$\times$$

Para o esquema de axioma Ax_7, tem-se, $\varphi_1 \equiv (\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$:

$$(1)\ \Gamma$$

$$(2)\ \neg(\psi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$$

$$(3)\ \psi\ [2, R\neg\rightarrow]$$

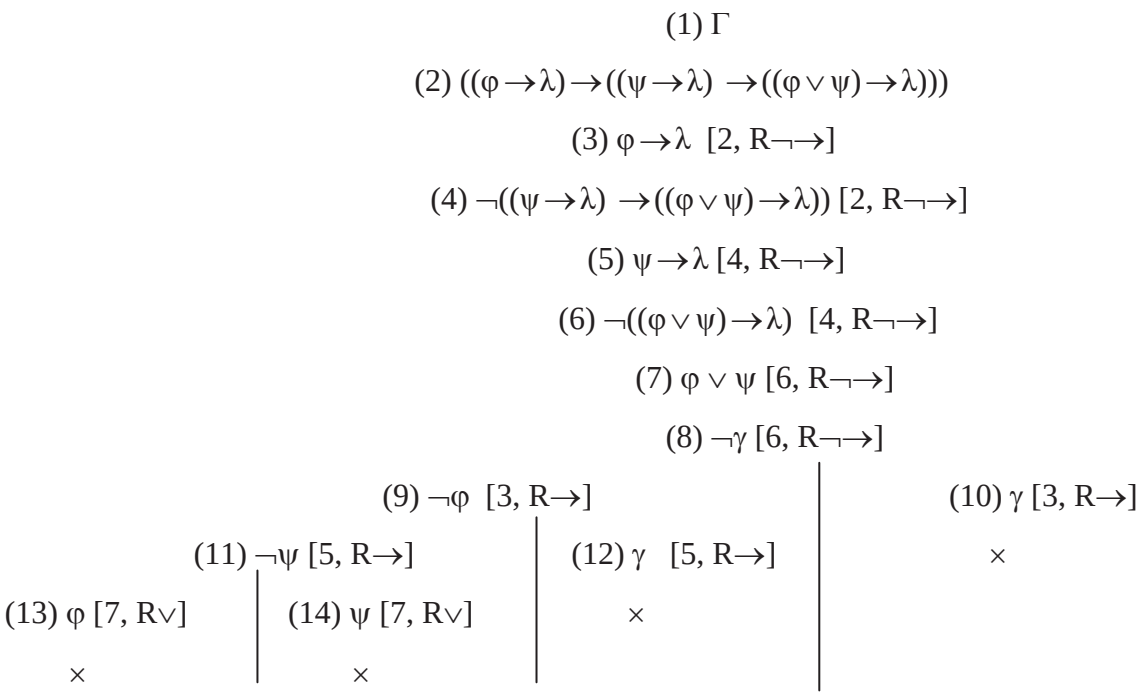
$$(4)\ \neg(\varphi \vee \psi) \quad [2, R\neg\rightarrow]$$

$$(5)\ \neg\varphi \quad [4, R\wedge]$$

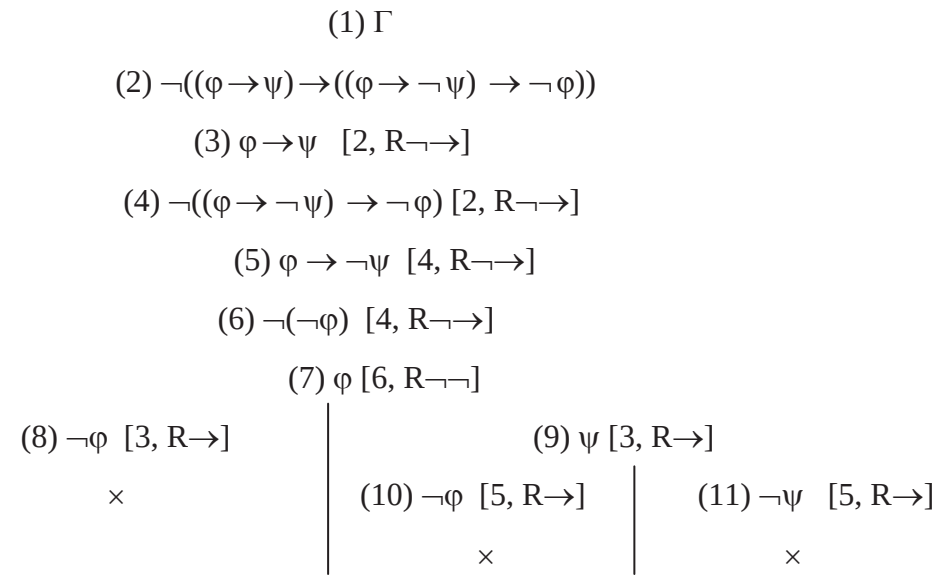
$$(6)\ \neg\psi\ [4, R\wedge]$$

$$\times$$

Para o esquema Ax_8, tem-se, $\varphi_1 \equiv ((\varphi \to \lambda) \to ((\psi \to \lambda) \to ((\varphi \vee \psi) \to \lambda)))$:



Para o esquema de axioma Ax_9, tem-se, $\varphi_1 \equiv ((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi))$:



Para o esquema de axioma Ax_{10}, tem-se, $\varphi_1 \equiv ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$:

(1) Γ

(2) $\neg((\neg(\neg\varphi))\rightarrow\varphi)$

(3) $\neg(\neg\varphi)$ [2, R$\neg\rightarrow$]

(4) $\neg\varphi$ [2, R$\neg\rightarrow$]

(5) φ [3, R$\neg\neg$]

$\times$

Seja $\varphi_1, ..., \varphi_{n+1} = \varphi$ uma dedução de φ a partir de Γ.

Supondo que o resultado é válido para n, isto é, para toda dedução $\Gamma \vdash \varphi$ em n passos. Deve-se verificar que o resultado vale para uma dedução em n+1 passos.

Hipótese de Indução: $\Gamma \Vdash \varphi_i$ para todo $i \leq n$.

Há três possibilidades de se ter φ_{n+1} em um passo n+1 da dedução de φ a partir de Γ:

i. φ_{n+1} é uma premissa ou

ii. φ_{n+1} é um esquema de axioma de *L* ou

iii. φ_{n+1} é deduzida a partir de alguma regra de inferência de *L*

No caso de ocorrer (i) ou (ii), a demonstração é a mesma feita para verificar a base da indução (n = 1). No caso de ocorrer (iii), é preciso analisar a única regra de inferência de *L*:

MP: $\dfrac{\alpha \quad \alpha\rightarrow\beta}{\beta}$

Considera-se que na dedução de φ a partir de Γ, $\varphi_i = \psi$ e $\varphi_j = \psi\rightarrow\varphi$, para $i, j \leq n$ e $\varphi_{n+1} = \varphi$. Como ψ e $\psi\rightarrow\varphi$ têm comprimento de demonstração menor ou igual a n, então, pela hipótese de indução, é possível afirmar que $\Gamma \Vdash \psi$ e $\Gamma \Vdash \psi\rightarrow\varphi$.

Daí segue que:

i. $\Gamma \Vdash \psi \Leftrightarrow^1 \Gamma \wedge \neg\psi$ é fechado por *tableau* $\Leftrightarrow^2 \Gamma \wedge \neg\psi$ é inconsistente por *tableau* $\Leftrightarrow^3 \Gamma \wedge \neg\psi \wedge \neg\varphi$ é inconsistente por *tableau*.

ii. $\Gamma \Vdash \psi \rightarrow \varphi \Leftrightarrow^{1} \Gamma \wedge \neg(\psi \rightarrow \varphi)$ é fechado por *tableau* $\Leftrightarrow^{2} \Gamma \wedge \neg(\psi \rightarrow \varphi)$ é inconsistente por *tableau* $\Leftrightarrow^{4} \Gamma \wedge \neg(\neg\psi \vee \varphi)$ é inconsistente por *tableau* $\Leftrightarrow^{4} \Gamma \wedge \psi \wedge \neg\varphi$ é inconsistente por *tableau*.

Justificando as passagens realizadas acima:

1. Pelas Definições 4.2.3.18 e 4.2.3.19
2. Pela Definição 4.2.3.25
3. Pelo Teorema 4.2.3.24 (da monotonicidade)
4. Equivalência clássica

Assim, verificamos que $\Gamma \wedge \neg\psi \wedge \neg\varphi$ e $\Gamma \wedge \psi \wedge \neg\varphi$ são inconsistentes por *tableau*. Através do Teorema 4.2.4.1, tem-se que $\Gamma \wedge \neg\varphi$ é inconsistente por *tableau*. Pelas Definições 4.2.3.25, 4.2.3.18 e 4.2.3.19, tem-se que $\Gamma \Vdash \varphi$.

Esses resultados permitem concluir que se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \Vdash \varphi$. ■

A demonstração do teorema seguinte, que completará a demonstração da equivalência entre a lógica proposicional clássica apresentada via *tableaux* com uma de suas versões axiomática, tem por base as demonstrações de (Silvestrini, 2005, p. 118) e de (Castro, 2004, p. 239).

Castro (2004, p. 239) para demonstrar seu teorema (4.3.3)[8], entre outras coisas, utilizou o princípio de redução ao absurdo (RAA) que é frequentemente usado na lógica proposicional clássica para demonstrar a validade de um argumento. Esse método consiste em admitir a negação da conclusão como uma nova premissa e, então utilizando a regra de inferência e os axiomas do cálculo proposicional clássico, encontrar uma contradição.

Segundo Silvestrini, (2005, p. 116) se há para uma determinada fórmula uma demonstração por *tableaux*, então é possível construir uma prova por redução ao absurdo no sistema hilbertiano se, e somente se as condições de *inicialização* e *fechamento* do sistema de *tableaux* são válidas também nas provas por redução ao absurdo no sistema hilbertiano e as regras de expansão do sistema de *tableaux* também podem ser deduzidas no sistema

[8] O teorema (4.3.3) de Castro (2004, p.235) diz o seguinte: "Se $\Gamma \vdash_{TNDCn} S$, então $\Gamma \vdash_{Cn} S$", sendo que TNDCn é uma hierarquia de sistemas de *tableaux* para a lógica paraconsistente e Cn é um sistema axiomático para a lógica paraconsistente. Com este teorema, Castro mostra uma parte da equivalência entre os sistemas TNDCn e Cn.

hilbertiano.

Intuitivamente, em uma dedução por *tableaux* após elencar as condições de inicialização, só é possível expandir o *tableau* por meio da aplicação das regras de inferência.

Em uma dedução genérica, não é possível saber qual regra será aplicada, mas como o sistema tem um número finito de regras, se é possível obter todas as regras do sistema de *tableaux* pelo método de redução ao absurdo e as condições de inicialização e fechamento dos dois métodos são as mesmas, então se uma determinada fórmula tem uma demonstração por *tableaux*, é possível construir para ela uma demonstração por redução ao absurdo no sistema hilbertiano.

Assim, pelo teorema seguinte se uma fórmula φ é obtida de Γ via sistema de *tableaux*, então φ, também é obtida de Γ pelo método hilbertiano.

Teorema 4.2.4.3: Se $\Gamma \Vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstração: Há dois casos a serem analisados:

i. $\varphi \in \Gamma$ ou
ii. $\varphi \notin \Gamma$

(i) Se $\varphi \in \Gamma$, segue de modo direto que $\Gamma \vdash \varphi$.

(ii) Se $\varphi \notin \Gamma$, então é obtida por meio da aplicação das regras de expansão do sistema de *tableaux*.

Nesse caso, segundo Silvestrini (2005, p. 116), há duas condições a serem garantidas:

a) As condições de inicialização e fechamento de $\mathfrak{I}$ são condições válidas no método de redução ao absurdo no sistema L.
b) Todas as regras de expansão de $\mathfrak{I}$ são dedutíveis em L.

(a) Nos dois casos iniciamos uma dedução de φ a partir de Γ, admitindo como premissa ¬φ e concluímos a dedução ao encontrar uma contradição clássica.

(b) Nesse caso é necessário verificar que todas as regras do sistema de *tableaux* $\mathfrak{I}$ são obtidas em L pelo método de redução ao absurdo.

A regra (R$\neg\vee$) é uma dedução válida em L: $\neg(\varphi \vee \psi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$

1.	$\neg(\varphi \vee \psi)$	p.
2.	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	p.p.
3.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	De Morgan em 1
4.	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow (\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \wedge (\neg\varphi \wedge \neg\psi)))$	Ax_5
5.	$(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow (\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \wedge (\neg\varphi \wedge \neg\psi))$	MP em 2 e 4
6.	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \wedge (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	MP em 3 e 5
7.	$\neg\varphi \wedge \neg\psi$	RAA de 2 a 6

A regra (R$\neg\rightarrow$) é uma dedução válida em L: $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \varphi \wedge \neg\psi$

1.	$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	p.
2.	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	p.p.
3.	$\neg(\neg\varphi \vee \psi)$	Equivalência clássica em 1
4.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi$	De Morgan em 3
5.	$(\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\neg\varphi$	Ax_3
6.	$(\neg\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\psi$	Ax_4
7.	$\neg\neg\varphi$	MP em 4 e 5
8.	$\neg\psi$	MP em 4 e 6
9.	$\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	Ax_{10}
10.	φ	MP em 7 e 9
11.	$\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\psi))$	Ax_5
12.	$\neg\psi \rightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$	MP em 10 e 11
13.	$\varphi \wedge \neg\psi$	MP em 8 e 12
14.	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow ((\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow (\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge (\varphi \wedge \neg\psi)))$	Ax_5
15.	$(\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow (\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge (\varphi \wedge \neg\psi))$	MP em 2 e 14
16.	$\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge (\varphi \wedge \neg\psi)$	MP em 13 e 15
17.	$\varphi \wedge \neg\psi$	RAA de 2 a 16

A regra (R$\wedge$) é uma dedução válida em L: $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi \wedge \psi$

1.	$\varphi \wedge \psi$	p.
2.	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	p.p.
3.	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)))$	Ax_5
4.	$\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi))$	MP em 1 e 3
5.	$(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi)$	MP em 2 e 4
6.	$\varphi \wedge \psi$	RAA de 2 a 5

A regra (R$\vee$) é uma dedução válida em L: $\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi$

1.	$\varphi \vee \psi$	p.
2.	$\neg(\varphi \vee \psi)$	p.p.
3.	$(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)))$	Ax_5
4.	$\neg(\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi))$	MP em 1 e 3
5.	$(\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\varphi \vee \psi)$	MP em 2 e 4
6.	$\varphi \vee \psi$	RAA de 2 a 5

A regra (R$\rightarrow$) é uma dedução válida em L: $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi$

1.	$\varphi \rightarrow \psi$	p.
2.	$\neg(\neg\varphi \vee \psi)$	p.p.
3.	$\neg\varphi \vee \psi$	Equivalência clássica em 1
4.	$(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \vee \psi)))$	Ax_5
5.	$\neg(\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow ((\neg\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \vee \psi))$	MP em 3 e 4
6.	$(\neg\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\neg\varphi \vee \psi)$	MP em 2 e 5
7.	$\neg\varphi \vee \psi$	RAA de 2 a 6

A regra (R $\neg\wedge$) tem uma dedução válida em L: $\neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \neg\varphi \vee \neg\psi$

1.	$\neg(\varphi\wedge\psi)$	p.
2.	$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$	p.p.
3.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi)$	De Morgan em 2
4.	$\neg\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$	Ax_{10}
5.	$\varphi \wedge \psi$	MP em 3 e 4
6.	$\neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge (\varphi \wedge \psi)))$	Ax_5

7.	$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge (\varphi \wedge \psi))$	MP em 1 e 6
8.	$\neg(\varphi \wedge \psi) \wedge (\varphi \wedge \psi)$	MP em 5 e 7
9.	$\neg\varphi \vee \neg\psi$	RAA de 2 a 8

A regra (R$\neg$) é uma dedução válida em L: $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$

1.	$\neg\neg\varphi$	p.
2.	$\neg\varphi$	p.p.
3.	$\neg\neg\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi))$	Ax_5
4.	$\neg\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi)$	MP em 1 e 3
5.	$\neg\neg\varphi \wedge \neg\varphi$	MP em 2 e 4
6.	φ	RAA de 2 a 5

Esses resultados nos levam a concluir que se $\Gamma \Vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$. ■

Portanto, pelos Teoremas 4.2.4.2 e 4.2.4.3, este trabalho estabelece a equivalência entre a lógica proposicional clássica em um sistema hilbertiano e a lógica proposicional clássica em um sistema de *tableaux*.

4.3 A lógica proposicional para “poucos” em *tableaux*

A lógica proposicional para “poucos” em *tableaux* terá o acréscimo de um novo operador “$\circledcirc$” à linguagem $L(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow)$ da lógica proposicional clássica. Esse novo operador é um operador unário do tipo “c”, assim, ele satisfaz todas as definições feitas na Seção 4.2.1 para o operador do tipo “c”.

Definição 4.3.1: A *lógica proposicional para “poucos” em um sistema de “tableaux”* (LPP_T), de linguagem $L_P(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \circledcirc)$ é definida por meio do acréscimo das seguintes regras às regras do tipo α:

R_{P1}: $\dfrac{\circledcirc\bot}{\bot}$

R_{P2}: $\dfrac{\circledcirc\top}{\bot}$

R_{P3}: $\dfrac{\neg(\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi)}{\bot}$ Só se aplica se $\nVdash \psi \rightarrow \bot$ e $\Vdash \psi \rightarrow \varphi$

Ao se deparar com uma fórmula do tipo $\neg(\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi)$ o tableau deverá aplicar primeiro a regra (R_{P3}) e a regra ($R\neg\rightarrow$) só deverá ser aplicada na impossibilidade de se aplicar a regra (R_{P3}).

R_{P4}: $\dfrac{\neg((\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi) \wedge (\circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi))}{\bot}$ Só se aplica se $\Vdash(\varphi \rightarrow \psi)\wedge(\psi \rightarrow \varphi)$

As demais definições da Seção 4.2.3, com exceção da Definição 4.2.3.7 (pois ela foi estendida através da Definição 4.3.1 acima) continuam as mesmas e, portanto todas válidas para o sistema de *tableaux* LPP_T.

Algumas deduções no sistema LPP_T:

a) $\Gamma \Vdash \neg\circledcirc\bot$

(1) Γ

(2) $\neg\neg\circledcirc\bot$

(3) $\circledcirc\bot$ [2, $R\neg\neg$]

(4) $\bot$ [3, R_{P1}]

×

b) $\Gamma \Vdash \circledcirc(\varphi \vee \psi) \rightarrow \circledcirc\varphi$

(1) Γ

(2) $\neg(\circledcirc(\varphi \vee \psi) \rightarrow \circledcirc\varphi)$

(3) $\bot$ [2, R_{P3}]*

×

* Para aplicar R_{P3} é preciso verificar se $\nVdash \varphi \rightarrow \bot$ e se $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$:

$\nVdash \varphi \rightarrow \bot$

(1) $\neg(\varphi \rightarrow \bot)$

(2) φ [1, R$\neg\rightarrow$]

(3) $\neg\bot$ [1, R$\neg\rightarrow$]

Tableau aberto

$\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

(1) $\neg(\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi))$

(2) φ [1, R$\neg\rightarrow$]

(3) $\neg(\varphi \vee \psi)$ [1, R$\neg\rightarrow$]

(4) $\neg\varphi$ [3, R$\neg\vee$]

(5) $\neg\psi$ [3, R$\neg\vee$]

×

c) $\Gamma \vdash \circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc(\varphi \wedge \psi)$

(1) Γ

(2) $\neg(\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc(\varphi \wedge \psi))$

(3) $\bot$ [2, R_{P3}]*

×

* Para aplicar R_{P3} é preciso verificar se $\nVdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \bot$ e se $\vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$:

$\nVdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \bot$

(1) $\neg(\varphi \wedge \psi \rightarrow \bot)$

(2) $\varphi \wedge \psi$ [2, R$\neg\rightarrow$]

(3) $\neg\bot$ [2, R$\neg\rightarrow$]

(4) φ [2, R$\wedge$]

(5) ψ [2, R$\wedge$]

Tableau aberto

$\Vdash \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$

(1) $\neg((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi)$

(2) $\varphi \wedge \psi$ [1, R$\neg\rightarrow$]

(3) $\neg\varphi$ [1, R$\neg\rightarrow$]

(4) φ [2, R$\wedge$]

(5) ψ [2, R$\wedge$]

$\times$

Nota: Uma variante do resultado acima é: $\Gamma \Vdash \circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc(\varphi \wedge \neg\varphi)$

(1) Γ

(2) $\neg(\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc(\varphi \wedge \neg\varphi))$

(3) $\neg\circledcirc(\varphi\wedge\neg\varphi)$ [2, R$\neg\rightarrow$]

(4) $\circledcirc\varphi$ [2, $\neg\rightarrow$]

Tableau aberto.

* Para aplicar R_{P3} é preciso verificar se $\nVdash \varphi \wedge \neg\varphi \rightarrow \bot$:

(1) $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi \rightarrow \bot)$

(2) $\varphi \wedge \neg\varphi$ [2, R$\neg\rightarrow$]

(3) $\neg\bot$ [2, R$\neg\rightarrow$]

$\times$

Tableau fechado.

Portanto, não podemos aplicar a regra R_{P3} no tableau construído para $\Gamma \cup \{\neg(\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc(\varphi \wedge \neg\varphi))\}$. Logo, este tableau será aberto e, consequentemente, $\Gamma \nVdash \circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc(\varphi \wedge \neg\varphi)$.

d) $\Gamma \Vdash \neg\circledcirc\top$

(1) Γ

(2) $\neg\neg\circledcirc\top$

(3) $\circledcirc\top$ [2, R$\neg\neg$]

(4) $\bot$ [3, R_{P2}]

×

Teorema 4.3.2: Os conjuntos $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são inconsistentes por *tableau* $\Leftrightarrow$ o conjunto Γ é inconsistente por *tableau*.

Demonstração: A demonstração desse teorema já foi feita na Seção 4.2.4 para a parte clássica da lógica proposicional para "poucos". Assim, ela será apenas estendida para o operador $\circledcirc$.

($\Rightarrow$) Se os conjuntos $\Gamma \cup \{\varphi\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ são inconsistentes por *tableau*, então o conjunto Γ é inconsistente por *tableau*.

Demonstração por indução sobre a complexidade de φ:

Se a fórmula φ é do tipo $\circledcirc\psi$:

(i) Por hipótese, o conjunto $\Gamma \cup \{\circledcirc\psi\}$ é inconsistente por *tableau*. Assim, por definição, existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\circledcirc\psi\}$:

(1) Γ

(2) $\circledcirc\psi$

×

Como existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\circledcirc\psi\}$, então ou existe um *tableau* fechado para Γ ou o *tableau* fecha com o acréscimo da fórmula $\circledcirc\psi$. No segundo caso, conclui-se que $\neg\circledcirc\psi$ ocorre no *tableau*.

(ii) Por hipótese, o conjunto $\Gamma \cup \{\neg\circledcirc\psi\}$ também é inconsistente por *tableau*. Assim, por definição, existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\neg\circledcirc\psi\}$:

(1) Γ

(2) $\neg\circledcirc\psi$

$\times$

Como também existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\neg\circledcirc\psi\}$, então ou existe um *tableau* fechado para Γ ou o *tableau* fecha com o acréscimo da fórmula $\neg\circledcirc\psi$. Logo, $\neg\neg\circledcirc\psi$ ocorre no *tableau*, isto é, $\circledcirc\psi$ ocorre no *tableau*.

De (i) e (ii) segue que Γ é fechado, pois $\neg\circledcirc\psi \wedge \circledcirc\psi$ ocorre no *tableau* de Γ ou há um *tableau* fechado para Γ independente destas fórmulas.

Portanto, Γ é inconsistente por *tableau*. ■

O teorema seguinte mostra que todos os teoremas que podem ser obtidos na LPP em no sistema hilbertiano, também podem ser obtidos no sistema LPP_T.

Teorema 4.3.3: Se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \Vdash \varphi$.

Demonstração: A demonstração deste teorema, também foi feita na Seção 4.2.4 para a parte clássica da lógica proposicional para "poucos". Assim, a demonstração, por indução sobre o comprimento da dedução de φ a partir de Γ, será estendida para o operador $\circledcirc$.

Seja φ um esquema de axioma da lógica proposicional para "poucos". Devemos verificar que existe um *tableau* fechado para $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

O axioma Ax_{P1} da LPP representa os axiomas da lógica proposicional clássica que já foram verificados na Seção 4.2.4 deste trabalho.

Para o esquema de axioma Ax_{P2} da LPP, tem-se, $\varphi_1 \equiv \circledcirc\bot \leftrightarrow \bot$. Como $\circledcirc\bot \leftrightarrow \bot \Leftrightarrow (\circledcirc\bot \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \circledcirc\bot)$, construiremos um tableau fechado para $\neg((\circledcirc\bot \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \circledcirc\bot))$:

(1) Γ

(2) $\neg((\circledcirc\bot \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \circledcirc\bot))$

(3) $\neg(\circledcirc\bot \rightarrow \bot)$ [2, R$\neg\wedge$]	(4) $\neg(\bot \rightarrow \circledcirc\bot)$[2, R$\neg\wedge$]
(5) $\circledcirc\bot$ [3, R$\neg\rightarrow$]	(8) $\bot$ [4, R$\neg\rightarrow$]
(6) $\neg\bot$ [3, R$\neg\rightarrow$]	(9) $\neg\circledcirc\bot$ [4, R$\neg\rightarrow$]
(7) $\bot$ [5, R_{P1}]	×
×	

Para o esquema de axioma Ax_{P3} da LPP, tem-se, $\varphi_1 \equiv \circledcirc\top \leftrightarrow \bot$. Como $\circledcirc\top \leftrightarrow \bot \Leftrightarrow (\circledcirc\top \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \circledcirc\top)$, construiremos um tableau fechado para $\neg((\circledcirc\top \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \top))$:

(1) Γ

(2) $\neg((\circledcirc\top \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \circledcirc\top))$

(3) $\neg(\circledcirc\top \rightarrow \bot)$ [2, R$\neg\wedge$]	(4) $\neg(\bot \rightarrow \circledcirc\top)$[2, R$\neg\wedge$]
(5) $\circledcirc\top$ [3, R$\neg\rightarrow$]	(8) $\bot$ [4, R$\neg\rightarrow$]
(6) $\neg\bot$ [3, R$\neg\rightarrow$]	(9) $\neg\circledcirc\top$ [4, R$\neg\rightarrow$]
(7) $\bot$ [5, R_{P2}]	×
×	

Hipótese de Indução: $\Gamma \vdash \varphi_i \Rightarrow \Gamma \Vdash \varphi_i$, para todo $i \leq n$.

Como já foi visto no caso clássico, as três possibilidades para φ_{n+1} em um passo n+1 da dedução de φ a partir de Γ são:

i. φ_{n+1} é uma premissa ou

ii. φ_{n+1} é um esquema de axioma da LPP ou

iii. φ_{n+1} é deduzida a partir de alguma regra da LPP.

Para (i) e (ii), a demonstração é a mesma feita anteriormente para verificar a base da indução. Para o caso (iii), é preciso analisar as duas regras ainda não avaliadas que são exclusivas da LPP:

R_1: $$\frac{\vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \nVdash \varphi \rightarrow \bot}{\vdash \circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi}$$

Há uma dedução em que $\varphi_{n-1} \equiv \vdash \varphi \rightarrow \psi$, $\varphi_n \equiv \nVdash \varphi \rightarrow \bot$ e $\varphi_{n+1} \equiv \vdash \circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi$. Assim $\Gamma \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \nVdash \varphi \rightarrow \bot$. Pela hipótese de indução, há um *tableau* fechado $\Gamma \cup \{\neg(\varphi \rightarrow \psi)\}$ e não fecha qualquer *tableau* para $\Gamma \cup \{\neg(\varphi \rightarrow \bot)\}$.

Logo, é preciso mostrar que $\Gamma \Vdash \circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi$. Para isso será construído o *tableau* de $\Gamma \cup \{\neg(\circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi)\}$:

(1) Γ

(2) $\neg(\circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi)$

(3) $\bot$ [2, R_{P3}]*

×

*Por hipótese de indução $\Gamma \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ e $\Gamma \nVdash \varphi \rightarrow \bot$, logo é possível aplicar a regra R_{P3} na linha 2 e, assim, o *tableau* construído para $\Gamma \cup \{\neg(\circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi)\}$ fecha.

R_2: $$\frac{\vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\vdash \circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi}$$

Há uma dedução em que $\varphi_n \equiv \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ e $\varphi_{n+1} \equiv \vdash \circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi$. Assim $\Gamma \Vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ e,

pela hipótese de indução, há um tableau fechado para $\Gamma \cup \{\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)\}$.

Agora é preciso mostrar que o tableau para $\Gamma \cup \{\neg(\circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi)\}$ também fecha. Como, $\circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi \Leftrightarrow (\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi) \wedge (\circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi)$, então será construído o tableau de $\Gamma \cup \{\neg((\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi) \wedge (\circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi))\}$:

$$(1)\ \Gamma$$

$$(2)\ \neg((\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi) \wedge (\circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi))$$

$$(3)\ \bot\ [2, R_{P4}]^*$$

$$\times$$

*Podemos aplicar a R_{P4} na linha 2, pois, por hipótese de indução há um tableau fechado para $\Vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Assim concluímos que há um tableau fechado para $\Gamma \cup \{\neg(\circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi)\}$.

Com esses resultados concluímos que se $\Gamma \vdash \varphi$, então $\Gamma \Vdash \varphi$. ■

Teorema 4.3.4: Se $\Gamma \Vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstração: A demonstração desse teorema será estendida para o operador $\circledcirc$, pois já foi feita na Seção 4.2.4, para a parte clássica da LPP_T.

Para cada regra de LPP_T será obtida na LPP uma correspondente dedução usando uma redução ao absurdo (RAA), ou seja, uma dedução indireta.

A regra (R_{P1}) tem uma dedução válida na LPP: $\circledcirc\bot \vdash \bot$:

1.	$\circledcirc\bot$	p.
2.	$\neg\bot$	p.p.

3.	$\circledcirc\bot \leftrightarrow \bot$	Ax_{P2}
4.	$(\circledcirc\bot \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \circledcirc\bot)$	CPC em 3
5.	$\circledcirc\bot \rightarrow \bot$	CPC em 4
6.	$\neg\circledcirc\bot$	CPC em 2 e 5
7.	$\circledcirc\bot \wedge \neg\circledcirc\bot$	CPC em 1 e 6
8.	$\bot$	RAA de 2 a 7

A regra (R_{P2}) tem uma dedução válida na LPP: $\circledcirc\top \vdash \bot$:

1.	$\circledcirc\top$	p.
2.	$\neg\bot$	p.p.
3.	$\circledcirc\top \leftrightarrow \bot$	Ax_{P3}
4.	$(\circledcirc\top \rightarrow \bot) \wedge (\bot \rightarrow \circledcirc\top)$	CPC em 3
5.	$\circledcirc\top \rightarrow \bot$	CPC em 4
6.	$\neg\circledcirc\top$	CPC em 2 e 5
7.	$\circledcirc\top \wedge \neg\circledcirc\top$	CPC em 1 e 6
8.	$\bot$	RAA de 2 a 7

A regra (R_{P3}) tem uma dedução válida na LPP: $\nvdash \psi \rightarrow \bot, \vdash \psi \rightarrow \varphi, \neg(\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi) \Rightarrow \bot$

1.	$\nvdash \psi \rightarrow \bot$	p.
2.	$\vdash \psi \rightarrow \varphi$	p.
3.	$\neg(\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi)$	p.
4.	$\neg\bot$	p.p.
5.	$\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi$	R_1 em 1 e 2
6.	$\neg(\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi) \wedge (\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi)$	CPC em 3 e 5
7.	$\bot$	RAA de 4 a 6

A regra (R_{P4}) tem uma dedução válida na LPP: $\vdash(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi), \neg((\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi) \wedge (\circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi)) \Rightarrow \bot$.

1.	$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$	p.
2.	$\neg((\circledcirc\varphi \rightarrow \circledcirc\psi) \wedge (\circledcirc\psi \rightarrow \circledcirc\varphi))$	p.
3.	$\neg\bot$	p.p.
4.	$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$	CPC em 1
5.	$\vdash \circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi$	R_2 em 4
6.	$\neg(\circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi)$	CPC em 2
7.	$(\circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi) \wedge \neg(\circledcirc\varphi \leftrightarrow \circledcirc\psi)$	CPC em 5 e 6
8.	$\bot$	RAA de 3 a 7

Com esses resultados, temos que se $\Gamma \Vdash \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$. ■

Portanto, pelos Teoremas 4.3.3 e 4.3.4, este trabalho estabelece a equivalência entre os sistemas LPP e LPP_T.

Como os sistemas LPP e LPP_T são equivalentes, então os mesmos resultados obtidos na lógica proposicional para “poucos” na versão hilbertiana, também podem ser obtidos na lógica proposicional para “poucos” em sua versão *tableaux* e vice-versa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O que são poucos? Quantos elementos são necessários a certo conjunto para que seja possível dizer que este conjunto possui poucos elementos?

Claramente, para responder a tais questões é necessário definir em qual universo de discurso elas estão sendo abordadas. Entretanto, apesar da dependência que o conceito de "poucos" parece ter de um contexto, é possível estabelecer algumas propriedades universais (isto é, válidas em qualquer universo de discurso) para o conceito de "poucos".

Por exemplo, na afirmação "Na sala há poucas crianças", apesar de não ser possível saber quantas crianças há na sala e nem quantas crianças seriam necessárias para encher a sala, é possível dizer que existe alguém na sala. Também parece razoável dizer que a sala não está cheia (não está com todas as crianças que caberiam na sala).

Em termos conjuntistas, parece legítimo concluir três propriedades fundamentais associadas à noção intuitiva de "poucos" que independem do contexto. São elas: "Se um conjunto tem poucos elementos, então ele não é vazio", "O universo de discurso não possui poucos elementos" e "se um conjunto A tem poucos elementos, então um conjunto B contido em A e não vazio também tem poucos elementos".

Tais noções intuitivas deram suporte aos elementos algébricos necessários para a formalização da noção de "poucos" permitindo o desenvolvimento de uma álgebra para "poucos" e também de uma lógica para tratar do termo "poucos" em ambiente proposicional, a lógica proposicional para "poucos".

O tratamento formal do termo "poucos" também pode ser feito em um ambiente quantificacional, e há vantagens e desvantagens nas duas abordagens (quantificacional e proposicional). O cálculo quantificacional é preferível ao proposicional em termos de linguagem, já que tem maior poder de expressão, podendo, consequentemente, formalizar mais sentenças da linguagem natural. Por outro lado, ele é menos adequado em termos computacionais devido a sua não decidibilidade.

A decidibilidade é uma importante propriedade dos sistemas dedutivos. Para que um sistema lógico seja decidível deve existir um algoritmo que torne possível verificar, para qualquer fórmula, se ela é ou não um teorema desse sistema. Os cálculos proposicionais, em geral, são decidíveis e, desse modo, são computacionalmente mais eficientes, ao passo que os sistemas quantificacionais não o são.

Não dá para dizer qual ambiente é o melhor (quantificacional ou proposicional), isso vai depender do objetivo do trabalho. Por exemplo, se o objetivo for a formalização de sentenças da linguagem natural e uma discussão mais profunda a respeito de quantificadores, o ambiente quantificacional é o ideal. Neste trabalho, entretanto, foi preferível, tratar de uma estrutura para "poucos" em contexto proposicional o que tornou possível a investigação de elementos presentes na relação entre lógica e álgebra.

A lógica proposicional para "poucos" foi inicialmente apresentada aqui em uma versão hilbertiana, na qual, para verificar se uma fórmula é ou não um teorema do sistema, as deduções são feitas a partir de axiomas e regras de inferência. Posteriormente, ela foi apresentada também em sistema de *tableaux*, composto apenas por regras.

Em geral, um sistema de *tableaux* é considerado eficiente, pois, na medida em que o *tableau* é expandido, as fórmulas têm sua complexidade cada vez menor, até que nos ramos restem apenas fórmulas atômicas ou a negação de fórmulas atômicas, as quais não poderão mais ser expandidas. Assim, observa-se que, em uma dedução por *tableaux*, há um decréscimo no grau de complexidade das fórmulas. Já para fazer uma dedução em um sistema hilbertiano, é necessária a colocação de axiomas o que torna a dedução um pouco mais longa e demorada se comparada a uma dedução por *tableaux*.

Este trabalho também mostrou a equivalência entre estas duas versões da lógica proposicional para "poucos" (hilbertiana e *tableaux*). Isso significa que todas as deduções obtidas na versão hilbertiana da lógica proposicional para "poucos", também podem ser obtidas pelo sistema de *tableaux* para a lógica proposicional para "poucos" e vice-versa. Essa equivalência também permite concluir que a correção e a completude da lógica proposicional para "poucos", propriedades demonstradas neste trabalho para a versão hilbertiana também são válidas para a lógica proposicional para "poucos" na versão *tableaux*.

Além destes dois métodos dedutivos, há ainda outros, como os dois sistemas dedutivos de Gentzen (1969): o cálculo de sequentes e a dedução natural. Como sugestão para um trabalho futuro coloca-se a questão de apresentar a lógica proposicional para "poucos" em um sistema de cálculo de sequentes, em um sistema de dedução natural e mostrar a equivalência destes sistemas com a versão hilbertiana da lógica proposicional para "poucos", assim como Gentzen fez para seus sistemas de cálculo de sequentes e de dedução natural para a lógica proposicional clássica.

Outras questões que poderiam ser temas de trabalhos futuros são: Seria possível desenvolver uma versão proposicional de todas as demais Lógicas Moduladas? Ou seja, seria possível apresentar novos sistemas lógicos proposicionais desenvolvidos a partir da lógica

proposicional clássica e acrescidos por um novo operador que resgata propriedades (algumas delas) que os sistemas modulados contemplam no campo quantificacional? E posteriormente, como seria o dual de tais sistemas? Seria simplesmente uma “dualização trivial” ou propriedades teriam que ser acrescidas ou eliminadas? Seria ainda possível estabelecer uma hierarquia entre os novos operadores proposicionais, assim como Grácio (1999) estabeleceu para as lógicas moduladas?

Estas são apenas algumas das várias questões que podem ser feitas a respeito dos temas abordados aqui.

REFERÊNCIAS

BARWISE, J.; COOPER, R. Generalized quantifiers and natural language. **Linguistics and Philosophy**, v. 4, p. 159-219, 1981.

BETH, E. W. **The foundations of mathematics**. Amsterdam: North Holland.1959.

BLANCHÉ R.; DUBUCS, J. **História da Lógica**, Edições 70, Lisboa, s.d. Tradução do original La Logique et son Histoire, Armand Colin, Paris, 1996.

BUCHSBAUM, A.; PEQUENO, T. O método de tableaux generalizado e sua aplicação ao raciocínio automático em lógicas não clássicas. **O que nos faz pensar**, v. 3. Cadernos do departamento de filosofia da PUC-Rio, p. 81-96, 1990. Disponível em <http://wwwexe.inf.ufsc.br/~arthur/publicacoes/artigos_revistas/OMetododosTableauxGeneralizado.pdf>. Acesso em: 17 jul. 2011.

BUENO, J. **Semântica algébrica de traduções possíveis.** Dissertação de Mestrado (Mestrado em Filosofia) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade de Campinas, UNICAMP, Campinas, 2004.

CARNIELLI, W.A.; CONIGLIO, M.E.; BIANCONI, R. **Lógica e aplicações: Matemática, Ciência da Computação e Filosofia** (Versão Preliminar - Capítulos 1 a 5), 2006. Disponível em: <http://www.cle.unicamp.br>. Acesso em: 02 ago. 2007.

CARNIELLI, W. A.; EPSTEIN, R. L. **Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da Matemática.** São Paulo: Editora Unesp, 2006.

CARNIELLI, W. A.; VELOSO, P. A. S. Ultrafilter logic and generic reasoning. In: **Proceedings of Kurt Gödel Colloquium**, 5, 1997, Berlin. Berlin: Springer-Verlag, p. 34-53, 1997.

CASTRO, M. A. **Hierarquias de sistemas de dedução natural e de sistemas de tableaux analíticos para os sistemas de Cn de Da Costa**. Tese de doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2004.

CHARLMERS, A. F. **O que é ciência, afinal?** São Paulo: Brasiliense, 1993.

D'OTTAVIANO, I. M. L.; FEITOSA, H. **A. História da lógica e o surgimento das lógicas não clássicas.** Campinas: Unicamp. Centro de lógica, Epistemologia e História da Ciência – CLE. Disponível em: <http://www.cle.unicamp.br>. Acesso em: 21 mai. 2006.

Da COSTA, N. C. A.; KRAUSE, D. **Notas de Lógica.** Santa Catarina: Departamento de Filosofia, Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

Da SILVA, J. J. **Filosofias da Matemática.** São Paulo: Editora Unesp, 2007.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M.C.C. A propositional logic for Tarski's consequence operator. **CLE e-Prints** (Online), v. 7, p. 1-13, 2007.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M.C.C. Algebraic elements for the notion of 'many'. **CLE e-Prints** (Online), v. 9, p. 1-22, 2009.

FEITOSA, H. A.; LOCCI, V. O fazer matemático. **Mimesis**, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. **Um prelúdio à lógica**. São Paulo: Editora Unesp, 2005.

FINGER, M.; MELO, A. C. V.; SILVA, F. S. C. **Lógica para computação.** São Paulo: Thomson Learning, 2006.

FITTING, M.; MENDELSOHN, R. L. **First-order modal logic**. Kluwer Academic Publishers, 1998.

FITTING, M. C. Introduction. In: D´AGOSTINO, M; GABBAY, D.V.; HAHNLE, R.; POSEGGA, J. (Eds.). **Handbook of Tableaux Methods.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p. 1- 43, 1999.

FRÁPOLLI, M. J. Quantificadores, in **Filosofía de la lógica**. Madrid, Tecnos, p. 151-178, 2007.

FREGE, G. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nach gebildete Formelsprache des reinen Denkens, Halle, 1879. English translation in **From Frege to Godel, a source book in mathematical logic** (J. van Heijenoort, Editor), Harvard University Press, Cambridge, p. 1-82, 1967.

GENTZEN, G. **The collected papers of Gerhard Gentzen.** Editor M. E. Szabo. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969.

GRÁCIO, M. C. C. **Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza.** Tese de doutorado (Doutorado em Lógica e Filosofia da Ciência), Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

GRÁCIO, M. C. C.; FEITOSA, H. A. Lógicas moduladas: implicações em um fragmento da teoria da linguagem natural. **Revista Eletrônica Informação e Cognição**, v. 4, n.1, p. 34-46, 2005.

GRÁCIO, M. C. C.; FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C. Muitos: formalizando um conceito impreciso. **Revista Eletrônica Informação e Cognição**, v. 5, n. 2, p. 20-28, 2006.

HAACK, S. **Filosofia das lógicas**. Tradução de C. A. Mortari e L. H. A. Dutra. São Paulo: Editora Unesp, 2002.

OLIVEIRA, K. E. C. S. **Uma lógica do poucos**. Dissertação de mestrado (Mestrado em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista. Marília, 2011.

LINTZ, R. G. **História da matemática.** Capinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciencia, v. 2, 2007.

MATULOVIC, M. **A lógica do Muito em um sistema de tablôs**. Dissertação de mestrado (Mestrado em Filosofia da Mente, Epistemologia e Lógica) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista. Marília, 2008.

MENDELSON, E. **Álgebra booleana e circuitos de chaveamento**. tradução de Celso Mauro Paciornick. São Paulo, Mc-Graw Hill do Brasil, 1977 (Coleção Schaum)

MENDELSON, E. **Introduction to mathematical logic**. Princeton: D. Van Nostrand, 1964.

MIRAGLIA, F. **Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica.** Campinas: UNICAMP/CLE. (Coleção CLE, v. 1), 1987.

MORTARI, C. A. **Introdução à lógica**. São Paulo: Editora Unesp, 2001.

MOSTOWSKI, A. On a generalization of quantifiers. **Fund. Mathematical**, v. 44, p. 12-36, 1957.

MOURA, J. E. A. **Um estudo de C_{ω} em cálculo de sequentes e dedução natural**. Tese (Doutorado em Lógica) – Programa de Pós-Graduação em Lógica e Filosofia da Ciência, UNICAMP, Campinas, 2000.

OLIVEIRA, A. J. F. **Lógica e aritmética.** Brasília: Ed da UNB, 2004.

RASIOWA, H. **An Algebraic Approach to non-classical logics.** Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1974.

RASIOWA, H.; SIKORSKI, R. **The mathematics of metamathematics**. 1. ed. Warszawa: PWN – Polish Scientific Publishers, 1963.

REITER, R. A logic for default reasoning. **Artificial Intelligence**. v. 13, p. 81-132, 1980.

ROGERS, R. **Mathematical logic and formalized theories: A survey of basic concepts and results.** Amsterdam: North-Holland, 1971.

SAUTTER, F. T. Lewis Carrol e a pré-história das árvores de refutação. In: FEITOSA, H. A.; SAUTTER, F. T. (orgs.). **Coleção CLE.** Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, v.39, p. 91-103, 2004.

SCHWICHTENBERG, H.; TROELSTRA, A. S. **Basic proof theory.** Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A.; VELOSO, P. **An alternative view of default reasoning and its logic.** In: HAUESLER, E. H., PEREIRA, L. C. (Eds.) Pratica: Proofs, types and categories. Rio de Janeiro: PUC, p. 127-58, 1999.

SILVESTRINI, L. H. C. **Tableaux e indução na lógica do plausível**. Dissertação de mestrado (Mestrado em Epistemologia e Lógica) – Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista. Marília, 2005.

SMULLYAN, R. M. **First-order logic.** New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.

SMULLYAN, R. M. **Lógica de Primeira Ordem.** Editora Unesp, 2009.