UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Monisse Postigo Alves

Boa colocação da equação quase-geostrófica em L^p-fraco

São José do Rio Preto
2015

Monisse Postigo Alves

Boa colocação da equação quase-geostrófica em L^p-fraco

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof^{a}. Dr^{a}. Juliana Conceição Precioso Pereira

São José do Rio Preto
2015

Alves, Monisse Postigo.
Boa Colocação da equação quase-geostrófica em L^p-fraco / Monisse Postigo Alves. - São José do Rio Preto, 2015
70 f.: il.

Orientador: Juliana Conceição Precioso Pereira
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Espaços de interpolação. 4. Lorentz, Espaços de I. Pereira, Juliana Conceição Precioso. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.944

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP Campus de São José do Rio Preto

Monisse Postigo Alves

Boa colocação da equação quase-geostrófica em L^p-fraco

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Juliana Conceição Precioso Pereira
Professor Assistente Doutor II
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Josiane Cristina de Oliveira Faria
Professora Adjunta
UEM - Maringá

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 11 de fevereiro de 2015.

Dedico a meu anjo de todos os dias, minha mãe Amélia.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela força e sabedoria depositada em mim.

À minha mãe Amélia, não só dedico este trabalho, mas também toda minha vida. Foi ela que, através do seu incentivo aos meus estudos e ao constante trabalho e apoio que sempre dedicou à mim, permitiu que eu completasse mais esta etapa da minha vida. Não há palavras que eu possa dizer que expressem o quanto sou grata a esta mulher, por isso, simplesmente digo muito obrigada por tudo.

Ao meu pai Geraldino, agradeço pelo constante apoio dado. Também agradeço à minha irmã Luciana que tanto me auxiliou nesses 6 anos de faculdade. Com certeza ela é uma referência de que todo esse trabalho acadêmico é gratificante.

Um agradecimento mais que especial para a turma de amigos mais faminta que já vi, os Gordinhos: Pedro, Luiz, Pereira, Giane, Rafa e Ana. A faculdade jamais teria graça sem eles, muito obrigado pelos ótimos momentos de descontração que passamos juntos e aos saborosos lanches da tarde. A meu namorado Luiz, agradeço pela companhia, compreensão, carinho e as altas risadas.

Agradeço à minha orientadora Prof[a]. Juliana Precioso pela ajuda na elaboração desta dissertação e, principalmente pelo tempo dedicado à minha orientação desde o finalzinho da minha graduação até o mestrado.

Aos meus amigos desde a graduação, Pedro e Giane, agradeço pela companhia, amizade, as lista de exercícios emprestadas (hahahaha) e as cantorias antes das provas. Não poderia deixar de agradecer também, aos meus lindos, felpudos e amados bichanos: Xeide e Tininha.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro.

"Ninguém é tão ignorante que não tenha algo a ensinar. Ninguém é tão sábio que não tenha algo a aprender."

(Blaise Pascal)

Resumo

Neste trabalho, abordaremos o problema de boa-colocação para o problema de valor inicial para a equação quase-geostrófica dissipativa. Mostraremos a existência de solução branda global, quando o dado inicial θ_0 pertence ao espaço $L^{\frac{2}{2\gamma-1}}$-fraco e tem norma suficientemente pequena.

Palavras-chave: Equação quase-geostrófica, Boa-colocação, L^p- fraco, Espaços de Lorentz.

Abstract

In this work, we discuss the well-posedness of the initial value problem for the dissipative quasi-geostrophic equations. We show the existence of mild solution, when the initial data θ_0 belong to weak $L^{\frac{2}{2\gamma-1}}$ space with a sufficiently small norm.

Keywords: Quasi-geostrophic equation, Well-posedness, Weak-L^p, Lorentz spaces.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, abordaremos um modelo simplificado para as equações de Navier-Stokes, em dimensão dois, a chamada equação quase-geostrófica dissipativa (2DQG). O problema de Cauchy para 2DQG é dado por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla \theta + \kappa(-\Delta)^{\gamma}\theta = 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^2, \ t > 0 \\ \theta(x,0) = \theta_0 & , \quad x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} , \tag{1}$$

com $\kappa > 0$ e $\gamma \in (0,1]$.

As funções $\theta = \theta(t,x)$ e $u = u(t,x)$ representam, respectivamente, a temperatura potencial e o campo de velocidade no instante $t > 0$ e na posição $x \in \mathbb{R}^2$. Além disso, $u = (u_1, u_2)$ tem divergente nulo ($\nabla \cdot u = 0$) e é determinado, a partir de θ, da seguinte forma:

$$u = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) = (-R_2\theta, R_1\theta), \tag{2}$$

onde R_k é a k-transformada de Riesz e ψ é uma função corrente dada por

$$\psi = (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\theta.$$

Denotamos o operador que acopla a velocidade com a temperatura por $R\theta = u$. O operador $(-\Delta)^{\tau}$ é definido por

$$\big(\widehat{(-\Delta)^{\tau} f}\big)(\xi) = |\xi|^{2\tau}\hat{f}(\xi),$$

onde $\hat{f}$ denota a transformada de Fourier de f.

Por simplicidade, neste trabalho vamos tomar $\kappa = 1$ e considerar apenas o caso

$$\frac{1}{2} < \gamma < 1.$$

O principal resultado apresentado nesta dissertação, baseado no artigo [4], é o teorema de existência e unicidade de solução branda global para o sistema (1)-(2), quando o dado inicial

θ_0 possui norma suficientemente pequena e pertence ao espaço $L^{\frac{2}{2\gamma-1}}$- fraco.

Esta dissertação está organizada em três capítulos e a seguir faremos uma descrição do conteúdo de cada um deles.

No capítulo 1, apresentamos conceitos preliminares que servirão de base para a teoria que queremos estudar nos capítulos posteriores. Começaremos relembrando brevemente a definição de espaços L^p e algumas de suas propriedades, como a desigualdade de Minkowski e a desigualdade de Hölder. Em seguida, definimos o conceito de função distribuição e demonstramos alguns resultados e propriedades. Tal função será importante para definir os espaços L^p-fraco e a função rearranjo.

Logo após, definimos os espaços L^p-fraco e provamos que tais espaços contém os espaços L^p . Na seção seguinte, definimos a convergência em medida e apresentamos alguns resultados que serão utilizados na seção 2.1, para provar que o espaço de Lorentz $L^{p,q}$ é Banach. Em continuação, apresentamos a definição da função rearranjo e propriedades envolvendo tal função.

Para finalizar o primeiro capítulo, definimos a função duplo rearranjo com auxílio da função rearranjo e, demonstramos algumas propriedades e resultados envolvendo tal função, como por exemplo a Proposição 1.6.2 que nos dá uma estimativa para o duplo rearranjo da convolução entre duas funções mensuráveis. Tal proposição será útil na demonstração da desigualdade de Young generalizada na seção 2.2.

No capítulo 2, começamos definindo os espaços de Lorentz $L^{p,q}$ e sua seminorma que envolve a função rearranjo. E, mostramos também que os espaços L^p-fraco e L^p são casos particulares dos espaços de Lorentz. Em continuação, com auxílio da função duplo rearranjo, definimos uma norma para o espaço de Lorentz e mostramos que ela é equivalente a seminorma definida anteriormente. Além disso, apresentamos alguns resultados envolvendo tal norma, como o Lema de Calderón e a completude dos espaços de Lorentz.

Na seção seguinte, abordamos dois importantes resultados para este trabalho, as desigualdades de Young e Hölder generalizadas, que serão utilizadas na demonstração dos resultados centrais dessa dissertação (Teoremas 3.3.1 e 3.3.2). Em seguida, introduzimos o conceito e apresentamos resultados da teoria da interpolação, nos restringindo apenas ao k-método. Apresentamos também o Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz, que servirá para provar que a k-transformada de Riesz é contínua nos espaços L^p-fraco (seção 2.4).

Terminamos o segundo capítulo, definindo a k-transformada de Riesz e provando sua continuidade nos espaços L^p-fraco. Este resultado também será importante na demonstração dos principais resultados desta dissertação.

No capítulo 3, apresentamos novamente as equações quase-geostróficas dissipativas e, em seguida, introduzimos espaços funcionais normados adequados para analisar o problema de Cauchy para 2DQG e mostramos que as normas destes espaços são tomadas de modo que elas sejam invariantes pelo scaling.

Nas seções seguintes, formalizamos o conceito de solução branda para o sistema (1)-(2)

(Definição 3.3.1) e enunciamos os dois principais resultados deste trabalho, o primeiro garante a existência e a unicidade de solução para o problema em questão e o segundo a regularização da solução obtida no primeiro resultado. De fundamental importância para a prova deste teorema é o Lema Abstrato que é apresentado na sequência. Afim de aplicar o Lema Abstrato, estimamos os termos não linear e linear da equação (3.8) e apresentamos resultados de convergência dos mesmos. Tendo em mãos essas ferramentas, concluímos o trabalho demonstrando o teorema de existência e unicidade de solução e o teorema de regularização.

Capítulo

1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é introduzir espaços de funções relevantes para o estudo de soluções do problema de Cauchy para a equação quase-geostrófica dissipativa. Iremos fixar notação e apresentar resultados elementares que serão utilizados nos demais capítulos. Começaremos por fixar X um espaço de medida e μ uma medida positiva em X, não necessariamente finita.

1.1 Os espaços L^p e L^p-fraco

Para a conveniência do leitor, apresentaremos a definição, dos já bem conhecidos, espaços L^p. Para mais detalhes e propriedades desses espaços, veja, por exemplo, [1] e [7].

Definição 1.1.1 *Para $1 \leq p < \infty$, $L^p(X,\mu)$ denota o conjunto de todas funções mensuráveis em X tais que $\|f\|_{L^p(X,\mu)} < \infty$, em que*

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para $p = \infty$, $L^\infty(X,\mu)$ é o conjunto de todas funções mensuráveis em X tais que $\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} < \infty$, em que

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \sup_X ess\, |f| = \inf \big\{ B > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > B\}) = 0 \big\}.$$

Duas funções em $L^p(X,\mu)$ são consideradas iguais se elas são iguais q.t.p. A notação $L^p(\mathbb{R}^n)$ é reservada para o espaço $L^p(\mathbb{R}^n, m)$, onde m denota a medida de Lebesgue n-dimensional. A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ será também denotada por dx. Neste contexto e na ausência de ambiguidade, o espaço $L^p(X,\mu)$ será simplesmente denotado por L^p.

Veremos agora um resultado conhecido como desigualdade de Minkowski, ou desigualdade triangular. Para mais detalhes sobre sua demonstração veja, por exemplo, [1].

Teorema 1.1.1 *Se f e g pertencem a L^p, $p \geq 1$, então $f+g$ pertence a L^p e*

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \tag{1.1}$$

Além disso, tem-se que $\|f\|_{L^p} = 0$ então $f \equiv 0$ (q.t.p.). Assim os espaços L^p são espaços lineares normados para $1 \leq p \leq \infty$.

Para $0 < p < 1$, a desigualdade (1.1) é revertida quando $f, g \geq 0$. No entanto, (1.1) é substituída por:

$$\|f+g\|_{L^p} \leq 2^{\frac{1-p}{p}} \big(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\big), \tag{1.2}$$

e assim, L^p é um espaço linear quase normado.

Para todo $0 < p \leq \infty$, toda sequência de Cauchy em L^p é convergente e, portanto, o espaço L^p é completo. Consequentemente, os espaços L^p são espaços de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. Para o caso $0 < p < 1$, conclui-se que os espaços L^p são quase Banach, ou seja, espaços quase normados completos. Para mais detalhes sobre essa discussão veja, por exemplo, [1] e [7].

Para encerrar esta breve discussão sobre os espaços L^p, apresentaremos a desigualdade de Hölder, cuja demonstração pode ser encontrada em [1]:

Teorema 1.1.2 *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$, em que $p > 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L^1$ e $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.*

A desigualdade de Hölder implica que o produto de uma função em L^p com uma função em L^q é integrável quando $p > 1$ e q satisfaz a relação $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, ou equivalentemente $p + q = pq$. Dois números satisfazendo essa relação são ditos índices conjugados. Note que $p = 2$ é o único índice auto-conjugado e que o produto de duas funções em L^2 é integrável.

1.2 A função distribuição

Definição 1.2.1 *Seja f uma função mensurável X. A função distribuição de f é a função λ_f definida em $[0, \infty)$ por:*

$$\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}). \tag{1.3}$$

Vale ressaltar que a função distribuição, λ_f, fornece informação sobre o tamanho de f, mas não sobre o comportamento de f perto de qualquer ponto. Por exemplo, uma função em $\mathbb{R}^n$ e cada uma de suas translações tem a mesma função distribuição.

Alguns fatos importantes sobre a função distribuição λ_f serão apresentados a seguir:

Proposição 1.2.1 *Se f e g são funções mensuráveis em (X, μ), então para todo $\alpha, \beta > 0$, temos:*

1. *λ_f é não crescente e contínua à direita em $[0,\infty)$.*

2. *Se $|f_n|$ cresce para $|f|$, então λ_{f_n} cresce para λ_f.*

3. *Se $|g| \leq |f|$ q.t.p., então $\lambda_g \leq \lambda_f$.*

4. *$\lambda_{cf}(\alpha) = \lambda_f\left(\dfrac{\alpha}{|c|}\right)$, para todo $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

5. *$\lambda_{f+g}(\alpha+\beta) \leq \lambda_f(\alpha) + \lambda_g(\beta)$.*

6. *$\lambda_{fg}(\alpha\beta) \leq \lambda_f(\alpha) + \lambda_g(\beta)$.*

Demonstração: (*1*) Considere o conjunto $E(\alpha, f) = \{x \in X : |f(x)| > \alpha\}$. Se $\alpha > \beta$, então para todo $x \in X$, tal que $|f(x)| > \alpha$, tem-se $|f(x)| > \beta$, implicando que $E(\alpha, f) \subset E(\beta, f)$. Isto é, se $\alpha > \beta$, temos $\lambda_f(\alpha) \leq \lambda_f(\beta)$.

Portanto, λ_f é uma função não crescente.

Provemos agora, que λ_f é contínua à direita. Fixe $\alpha \in [0,\infty)$ e seja $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de números reais convergindo para 0.

Observe que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E(\alpha+\varepsilon_n, f) \subset E(\alpha+\varepsilon_{n+1}, f)$, pois $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, ou seja, $\big(E(\alpha+\varepsilon_n, f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de conjuntos. Além disso,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\alpha+\varepsilon_n, f) = E(\alpha, f). \tag{1.4}$$

De fato, como $E(\alpha+\varepsilon_n, f) \subset E(\alpha, f)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E(\alpha+\varepsilon_n, f) \subset E(\alpha, f)$. Para verificar a inclusão contrária, seja $x \in E(\alpha, f)$. Então, $|f(x)| > \alpha$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| \geq \alpha + \varepsilon_{n_0} > \alpha + \varepsilon_{n_0+1}$, pois $\varepsilon_{n_0} > \varepsilon_{n_0+1}$.

Logo, $x \in E(\alpha+\varepsilon_{n_0+1}, f)$, ou seja, $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E(\alpha+\varepsilon_n, f)$. Assim, a identidade (1.4) se verifica.

Agora, usando o fato que a sequência de conjuntos $\big(E(\alpha+\varepsilon_n, f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, temos

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_f(\alpha+\varepsilon_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\big(E(\alpha+\varepsilon_n, f)\big) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\alpha+\varepsilon_n, f)\right) = \mu\big(E(\alpha, f)\big) = \lambda_f(\alpha),$$

ou seja, λ_f é contínua à direita em $[0,\infty)$.

(*2*) Seja $\big(|f_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente que converge para $|f|$. Logo, $|f_n| \leq |f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, dado $\alpha \in [0,\infty)$ tem-se $|f(x)| \geq |f_n(x)| > \alpha$, para todo $x \in E(\alpha, f_n)$, ou seja, $x \in E(\alpha, f)$. Logo, $E(\alpha, f_n) \subset E(\alpha, f)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\alpha, f_n) \subset E(\alpha, f).$$

Agora, se $x \in E(\alpha, f)$, então $|f(x)| > \alpha$. Como $|f_n| \uparrow |f|$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| > |f_{n_0}(x)| \geq \alpha$, e assim, $|f(x)| > |f_{n_0+1}(x)| > |f_{n_0}(x)| \geq \alpha$. Logo, $x \in E(\alpha, f_{n_0+1}) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\alpha, f_n)$.

Portanto, $E(\alpha, f) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\alpha, f_n)$, e assim concluímos que $E(\alpha, f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\alpha, f_n)$.

Por outro lado, como $|f_{n+1}| > |f_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $E(\alpha, f_n) \subset E(\alpha, f_{n+1})$, ou seja, $\big(E(\alpha, f_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de conjuntos. Sendo assim, pela continuidade por baixo das medidas, temos

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{f_n}(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \mu\big(E(\alpha, f_n)\big) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E(\alpha, f_n)\right) = \mu\big(E(\alpha, f)\big) = \lambda_f(\alpha).$$

Além disso, como $E(\alpha, f_n) \subset E(\alpha, f_{n+1}) \subset \cdots \subset E(\alpha, f)$, então

$$\mu\big(E(\alpha, f_n)\big) \leq \mu\big(E(\alpha, f_{n+1})\big) \leq \cdots \leq \mu\big(E(\alpha, f)\big),$$

isto é, $\lambda_{f_n} \uparrow \lambda_f$.

(3) Seja $|g| \leq |f|$ q.t.p., então existe um conjunto mensurável N, com $\mu(N) = 0$ tal que $|g(x)| \leq |f(x)|$, para todo $x \in X \setminus N$.

Observe que,

$$\begin{aligned} \lambda_g(\alpha) &= \mu(\{x \in X : |g(x)| > \alpha\}) \\ &= \mu(\{x \in N : |g(x)| > \alpha\}) + \mu(\{x \in X \setminus N : |g(x)| > \alpha\}). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{x \in N : |g(x)| > \alpha\} \subset N$ e $\mu(N) = 0$, tem-se $\mu(\{x \in N : |g(x)| > \alpha\}) = 0$. Portanto,

$$\lambda_g(\alpha) = \mu(\{x \in X \setminus N : |g(x)| > \alpha\}).$$

Analogamente, $\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x \in X \setminus N : |f(x)| > \alpha\})$. Como $|g(x)| \leq |f(x)|$, para todo $x \in X \setminus N$, tem-se $\{x \in X \setminus N : |g(x)| > \alpha\} \subset \{x \in X \setminus N : |f(x)| > \alpha\}$. Logo, $\mu(\{x \in X \setminus N : |g(x)| > \alpha\} \leq \mu(\{x \in X \setminus N : |f(x)| > \alpha\}$.

Portanto, $\lambda_g(\alpha) \leq \lambda_f(\alpha)$.

(4) Para todo $\alpha \in [0, \infty)$, temos

$$\begin{aligned} \lambda_{cf}(\alpha) &= \mu(\{x \in X : |cf(x)| > \alpha\}) \\ &= \mu(\{x \in X : |c||f(x)| > \alpha\}) \\ &= \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \frac{\alpha}{|c|}\right\}\right), \text{ para todo } c \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ &= \lambda_f\left(\frac{\alpha}{|c|}\right). \end{aligned}$$

(*5*) Se $x \in E(\alpha+\beta, f+g)$, então

$$\alpha+\beta < |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|. \tag{1.5}$$

Assim, temos $x \in E(\alpha, f)$ ou $x \in E(\beta, g)$ pois, caso contrário, teríamos $\alpha \geq |f(x)|$ e $\beta \geq |g(x)|$, o que contradiz (1.5). Portanto, $x \in \big(E(\alpha, f) \cup E(\beta, g)\big)$, ou seja, $E(\alpha+\beta, f+g) \subset \big(E(\alpha, f) \cup E(\beta, g)\big)$.

Então,

$$\mu\big(E(\alpha+\beta, f+g)\big) \leq \mu\big(E(\alpha, f) \cup E(\beta, g)\big) \leq \mu\big(E(\alpha, f)\big) + \mu\big(E(\beta, g)\big).$$

Portanto, temos $\lambda_{f+g}(\alpha+\beta) \leq \lambda_f(\alpha) + \lambda_g(\beta)$.

(*6*) Se $x \in E(\alpha\beta, fg)$, então

$$\alpha\beta < |f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)|. \tag{1.6}$$

Assim, temos $x \in E(\alpha, f)$ ou $x \in E(\beta, g)$ pois, caso contrário, teríamos $\alpha \geq |f(x)|$ e $\beta \geq |g(x)|$, o que contradiz (1.6). Portanto, $x \in \big(E(\alpha, f) \cup E(\beta, g)\big)$, ou seja, $E(\alpha\beta, fg) \subset \big(E(\alpha, f) \cup E(\beta, g)\big)$.

Então,

$$\mu\big(E(\alpha\beta, fg)\big) \leq \mu\big(E(\alpha, f) \cup E(\beta, g)\big) \leq \mu\big(E(\alpha, f)\big) + \mu\big(E(\beta, g)\big).$$

Portanto, temos $\lambda_{fg}(\alpha\beta) \leq \lambda_f(\alpha) + \lambda_g(\beta)$.

■

Exemplo 1.2.1 *Seja f uma função positiva e simples (combinação linear de funções características de conjuntos de medida finita), definida em X da seguinte forma:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x),$$

onde os conjuntos $E_i = \{x \in X : f(x) = a_i\}$ são dois a dois disjuntos e $a_1 > \cdots > a_n > 0$.

Se $\alpha \geq a_1$, então $\lambda_f(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0$. No entanto, se $a_2 \leq \alpha < a_1$, então $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = E_1$, assim, $\lambda_f(\alpha) = \mu(E_1)$. Em geral, se $a_{i+1} \leq \alpha < a_i$, então $\{x \in X : |f(x)| > \alpha\} = E_1 \cup \cdots \cup E_i$, assim, $\lambda_f(\alpha) = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_i)$.

Definindo $B_i = \sum_{j=1}^{i} \mu(E_j)$, temos

$$\lambda_f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} B_i \chi_{[a_{i+1}, a_i)}(\alpha),$$

onde $a_0 = \infty$ *e* $B_0 = a_{n+1} = 0$.

A figura abaixo ilustra este exemplo quando $n = 3$.

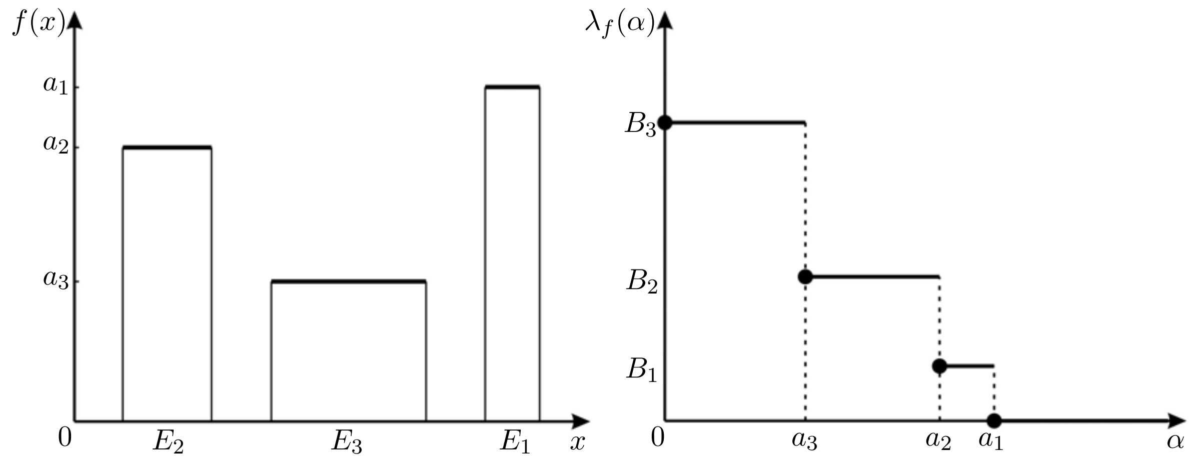

Figura 1.1: Os gráficos de uma função simples $f = \sum_{i=1}^{3} a_i \chi_{E_i}$ e de sua função distribuição $\lambda_f(\alpha)$.

O conhecimento da função distribuição λ_f fornece informação suficiente para avaliar precisamente a norma L^p da função f. Vamos enunciar e provar a seguinte descrição da norma L^p em termos da função de distribuição.

Proposição 1.2.2 *Para* f *em* $L^p(X, \mu)$, $0 < p < \infty$, *temos*

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha)\, d\alpha.$$

Demonstração: De fato, temos

$$\begin{aligned}
p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda_f(\alpha)\, d\alpha &= p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \int_X \chi_{\{x:|f(x)|>\alpha\}}\, d\mu\, d\alpha \\
&= \int_X \int_0^{|f(x)|} p\alpha^{p-1}\, d\alpha\, d\mu \\
&= \int_X |f(x)|^p\, d\mu \\
&= \|f\|_{L^p}^p,
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema de Fubini na segunda igualdade.

■

Definiremos agora, um importante variante dos espaços L^p que aparecem com frequência na literatura.

Definição 1.2.2 *Para $0 < p < \infty$, o espaço $L^p(X,\mu)$-fraco é definido como o conjunto de todas as funções f mensuráveis em X, tais que*

$$\|f\|^*_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \alpha\, \lambda_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{1.7}$$

O espaço $L^\infty(X,\mu)$-fraco é por definição $L^\infty(X,\mu)$.

O espaço $L^p(X,\mu)$-fraco será denotado por $L^{p,\infty}(X,\mu)$ e duas funções em $L^{p,\infty}$ serão consideradas iguais se elas são iguais q.t.p.

Observação 1.2.1 *$\|\cdot\|^*_{L^{p,\infty}}$ não é uma norma, pois a propriedade da desigualdade triangular não é válida. Porém, $\|\cdot\|^*_{L^{p,\infty}}$ é uma quase norma.*

De fato, para qualquer constante $k \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ temos

$$\begin{aligned}
\|kf\|^*_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\alpha>0} \alpha\, \lambda_{kf}(\alpha)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\alpha>0} \alpha\, \lambda_f\left(\frac{\alpha}{|k|}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |k| \sup_{\alpha>0} \frac{\alpha}{|k|}\, \lambda_f\left(\frac{\alpha}{|k|}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |k| \sup_{\beta>0} \beta\, \lambda_f(\beta)^{\frac{1}{p}}, \ \textit{onde } \beta = \frac{\alpha}{|k|} \\
&= |k|\, \|f\|^*_{L^{p,\infty}},
\end{aligned}$$

onde usamos o item 4 da Proposição (1.2.1) na segunda igualdade.

E,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^*_{L^{p,\infty}} &= \sup_{\alpha>0} \alpha\, \lambda_{f+g}(\alpha)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[\sup_{\alpha>0} \alpha^p\, \lambda_{f+g}(\alpha)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\sup_{\alpha>0} \alpha^p \left(\lambda_f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \lambda_g\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left[\sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sup_{\alpha>0} \alpha^p \lambda_g\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \left[2^p \sup_{\alpha>0} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \lambda_f\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2^p \sup_{\alpha>0} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^p \lambda_g\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= 2\left[\sup_{\beta>0} \beta^p \lambda_f(\beta) + \sup_{\beta>0} \beta^p \lambda_g(\beta)\right]^{\frac{1}{p}}, \ \textit{onde } \beta = \frac{\alpha}{2} \\
&= 2\left[\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}} + \|g\|^{*p}_{L^{p,\infty}}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq 2\left[2 \max\left\{\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}, \|g\|^{*p}_{L^{p,\infty}}\right\}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{1+\frac{1}{p}} \max\left\{\|f\|^{*}_{L^{p,\infty}}, \|g\|^{*}_{L^{p,\infty}}\right\} \\
&\leq 2^{1+\frac{1}{p}} \left(\|f\|^{*}_{L^{p,\infty}} + \|g\|^{*}_{L^{p,\infty}}\right),
\end{aligned}
$$

onde usamos o item 5 *da Proposição* (1.2.1) *na terceira igualdade.*

Agora, se $\|f\|^*_{L^{p,\infty}} = 0$*, ou seja, se* $\sup_{\alpha>0} \alpha\, \lambda_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} = 0$*, temos* $\alpha\, \lambda_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} = 0$*, para todo* $\alpha > 0$*, pois* $\lambda_f(\alpha) \geq 0$*. Sendo assim,* $\lambda_f(\alpha) = 0$*, para todo* $\alpha \geq 0$*, isto é,* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in X$ *a menos de um conjunto de medida nula. Portanto,* $f \equiv 0$ *q.t.p.*

Sendo assim, mostramos que o espaço $L^{p,\infty}$ *é um espaço quase normado para* $0 < p < \infty$*.*

O resultado a seguir pode ser encontrado em [6] (pg. 185), tal resultado será útil para mostrar que os espaços L^p-fracos são maiores do que os espaços L^p usuais.

Proposição 1.2.3 *(Desigualdade de Chebyshev) Se* $f \in L^p(X, \mu)$*, com* $0 < p < \infty$*, então para qualquer* $\alpha > 0$ *tem-se*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\alpha}\right)^p.$$

Proposição 1.2.4 *Para quaisquer* $0 < p < \infty$ *e* f *em* $L^p(X, \mu)$*, temos* $\|f\|^*_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}$*. Assim,* $L^p(X, \mu) \subseteq L^{p,\infty}(X, \mu)$*.*

Demonstração: O resultado é uma consequência da desigualdade de Chebyshev (Proposição 1.2.3). De fato,

$$\sup_{\alpha>0} \alpha\, \lambda_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^p}, \text{ ou seja, } \|f\|^*_{L^{p,\infty}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Portanto, $L^p(X, \mu) \subseteq L^{p,\infty}(X, \mu)$. ■

A inclusão $L^p \subseteq L^{p,\infty}$ é estrita. De fato, em $\mathbb{R}$ com a medida de Lebesgue usual, considere a função $h(x) = |x|^{-\frac{1}{p}}$. Sendo assim,

$$
\begin{aligned}
\lambda_h(\alpha) &= m(\{x \in \mathbb{R} : |h(x)| > \alpha\}) \\
&= m(\{x \in \mathbb{R} : |x|^{-\frac{1}{p}} > \alpha\}) \\
&= m(\{x \in \mathbb{R} : |x| < \alpha^{-p}\})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= m((-\alpha^{-p}, \alpha^{-p})) \\
&= 2\,\alpha^{-p}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$\|h\|^*_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \alpha\, \lambda_h(\alpha)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\alpha>0} \alpha\,(2\alpha^{-p})^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Portanto, $h \in L^{p,\infty}$. Por outro lado,

$$\|h\|^p_{L^p} = \int_{\mathbb{R}} \left||x|^{-\frac{1}{p}}\right|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |x|^{-1}\, dx = 2\int_0^\infty \frac{1}{x}\, dx = \infty.$$

Ou seja, $h \notin L^p$.

1.3 Convergência em Medida

Nesta seção, definiremos os conceitos de convergência em medida e de Cauchy em medida e, apresentaremos alguns resultados que serão úteis neste trabalho.

Definição 1.3.1 *Sejam f, f_n, $n = 1, 2, \ldots$, funções mensuráveis sobre o espaço de medida (X, μ). A sequência f_n é dita convergente para f em medida, se para todo $\epsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon. \tag{1.8}$$

Observação 1.3.1 *A definição anterior é equivalente a seguinte afirmação:*

$$\textit{Para todo } \epsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0. \tag{1.9}$$

Claramente (1.9) implica (1.8). Para provar que (1.8) implica em (1.9) tome um $\epsilon > 0$, escolha $0 < \delta < \epsilon$ e aplique (1.8) para este δ. Então existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}) < \delta,$$

para todo $n > n_0$. Uma vez que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \le \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}),$$

concluímos que

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \delta,$$

para todo $n > n_0$. Fazendo $n \to \infty$, deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \le \delta. \tag{1.10}$$

Como (1.10) *vale para todo* $0 < \delta < \epsilon$, *temos que* (1.9) *segue quando* $\delta \to 0$.

Definição 1.3.2 *Dizemos que uma sequência de funções mensuráveis* (f_n) *em um espaço de medida* (X, μ) *é de Cauchy em medida, se para todo* $\epsilon > 0$, *existe um* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, para* $n, m > n_0$ *temos*

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| > \epsilon\}) < \epsilon.$$

A proposição a seguir, mostra que a convergência em medida é um conceito mais fraco do que a convergência em L^p e em $L^{p,\infty}$, para $0 < p \leq \infty$.

Proposição 1.3.1 *Sejam* $0 < p \leq \infty$ *e* f_n, $f \in L^{p,\infty}(X, \mu)$.

1. *Se* f_n, f *pertencem a* L^p *e* $f_n \to f$ *em* L^p, *então* $f_n \to f$ *em* $L^{p,\infty}$.

2. *Se* $f_n \to f$ *em* $L^{p,\infty}$, *então* f_n *converge para* f *em medida.*

Demonstração: (*1*) O caso $p = \infty$ é trivial, uma vez que $L^\infty = L^\infty$-fraco.

Fixe $0 < p < \infty$ e considere f_n, $f \in L^p$, tal que $f_n \to f$ em L^p, ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_{L^p} < \epsilon$.

Usando a Proposição 1.2.4, concluímos que $\|f_n - f\|^*_{L^{p,\infty}} \leq \|f_n - f\|_{L^p}$. Sendo assim, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|^*_{L^{p,\infty}} \leq \|f_n - f\|_{L^p} < \epsilon$.

Portanto, $f_n \to f$ em $L^{p,\infty}$.

(*2*) Se $f_n \to f$ em $L^{p,\infty}$, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$, temos

$$\|f_n - f\|^*_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha > 0} \alpha\, \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \alpha\})^{\frac{1}{p}} < \epsilon^{\frac{1}{p}+1}.$$

Tomando $\alpha = \epsilon$, concluímos que

$$\epsilon\, \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\})^{\frac{1}{p}} < \epsilon^{\frac{1}{p}+1} \Rightarrow \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) < \epsilon.$$

Portanto, f_n converge para f em medida. ■

Exemplo 1.3.1 *Fixe* $0 < p < \infty$. *Em* $[0, 1]$, *defina as seguintes funções*

$$f_{k,j} = k^{\frac{1}{p}} \chi_{\left(\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right)}, \; k \geq 1, \; 1 \leq j \leq k.$$

Considere a sequência $\{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \ldots\}$. *Observe que*

$$m(\{x \in [0, 1] : f_{k,j}(x) > 0\}) = \frac{1}{k}.$$

Assim, para todo $\epsilon > 0$ temos $m(\{x \in [0,1] : f_{k,j}(x) > \epsilon\}) \leq \dfrac{1}{k}$. Portanto, $f_{k,j}$ converge para 0 em medida. Por outro lado, observe que

$$\|f\|^*_{L^{p,\infty}} = \sup_{\alpha>0} \alpha\, m(\{x \in [0,1] : f_{k,j}(x) > \alpha\})^{\frac{1}{p}} = k^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

o que implica que $f_{k,j}$ não converge para 0 em $L^{p,\infty}$.

Teorema 1.3.1 *Sejam f_n e f funções mensuráveis no espaço de medida (X, μ) e suponha que f_n converge para f em medida. Então, existe subsequência de f_n que converge para f q.t.p.*

Demonstração: Para todo $k = 1, 2, \ldots$, existe n_k tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k} \tag{1.11}$$

e $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. Defina os conjuntos

$$A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\}.$$

A desigualdade (1.11) implica que

$$\mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-m}, \tag{1.12}$$

para todo $m = 1, 2, \ldots$. Segue de (1.12) que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq 1 < \infty. \tag{1.13}$$

Observe que, a sequência de conjuntos $\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right)_{m=1}^{\infty}$ é decrescente. Então, usando (1.12) e (1.13), temos

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = 0. \tag{1.14}$$

Observe ainda que, o conjunto nulo em (1.14) contém o conjunto de todos os $x \in X$ para os quais $f_{n_k}(x)$ não converge para $f(x)$. ■

Teorema 1.3.2 *Seja (X, μ) um espaço de medida e seja (f_n) uma sequência de funções em X que é de Cauchy em medida. Então, existe subsequência de f_n que converge q.t.p.*

Demonstração: A prova é muito semelhante a do Teorema 1.3.1. Para todo $k = 1, 2, \ldots$, existe n_k tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k} \tag{1.15}$$

e $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$. Defina

$$A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > 2^{-k}\}.$$

Como mostrado na prova do Teorema 1.3.1, (1.15) implica que

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = 0. \tag{1.16}$$

Para $x \notin \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} A_k$ e $i \geq j \geq j_0 \geq m$ (j_0 suficientemente grande) temos

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |f_{n_l}(x) - f_{n_{l+1}}(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} \leq \sum_{l=j}^{\infty} 2^{-l} = 2^{1-j} \leq 2^{1-j_0}.$$

Isto implica que a sequência $\big(f_{n_i}(x)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy para todo x no conjunto $\left(\bigcup\limits_{k=m}^{\infty} A_k\right)^c$ e, portanto, converge para todos esses x. Defina a função

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} f_{n_j}(x) & \text{, se } x \notin \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} A_k \\ 0 & \text{, se } x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} A_k \end{cases}.$$

Então, $f_{n_j} \to f$ q.t.p. ■

1.4 Um primeiro vislumbre de interpolação

Um fato bastante útil é que se uma função f pertence a $L^p(X, \mu)$ e a $L^q(X, \mu)$, então f também pertence a $L^r(X, \mu)$, para todo $p < r < q$. A utilidade dos espaços $L^{p,\infty}$ pode ser entendida através do seguinte resultado:

Proposição 1.4.1 *Se $0 < p < q \leq \infty$ e $f \in L^{p,\infty}(X, \mu) \cap L^{q,\infty}(X, \mu)$, então $f \in L^r(X, \mu)$,* *para todo* $p < r < q$ *e*

$$\|f\|_{L_r} \leq \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|^{*\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}_{L^{p,\infty}} \|f\|^{*\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}_{L^{q,\infty}}, \tag{1.17}$$

com a interpretação apropriada quando $q = \infty$.

Demonstração: Primeiramente, tomemos $q < \infty$. Para todo $\alpha > 0$, temos

$$\|f\|^*_{L^{p,\infty}} \geq \alpha \lambda_f(\alpha)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \lambda_f(\alpha) \leq \left(\frac{\|f\|^*_{L^{p,\infty}}}{\alpha}\right)^p.$$

Observe que a mesma desigualdade vale se trocarmos o papel de p por q. Sendo assim, temos

$$\lambda_f(\alpha) \leq \min\left(\frac{\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}, \frac{\|f\|^{*q}_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right). \tag{1.18}$$

Seja

$$B = \left(\frac{\|f\|^{*q}_{L^{q,\infty}}}{\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}}\right)^{\frac{1}{q-p}}. \tag{1.19}$$

Agora, estimemos a norma L^r de f. Por (1.18), (1.19) e pela Proposição 1.2.2, temos

$$\begin{aligned}
\|f\|^r_{L^r} &= r\int_0^\infty \alpha^{r-1}\lambda_f(\alpha)\,d\alpha \\
&\leq r\int_0^\infty \alpha^{r-1}\min\left(\frac{\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}, \frac{\|f\|^{*q}_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right)d\alpha \\
&= r\int_0^B \alpha^{r-1-p}\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}\,d\alpha + r\int_B^\infty \alpha^{r-1-q}\|f\|^{*q}_{L^{q,\infty}}\,d\alpha \qquad (1.20)\\
&= \frac{r}{r-p}\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}B^{r-p} + \frac{r}{q-r}\|f\|^{*q}_{L^{q,\infty}}B^{r-q} \\
&= \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)(\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}})^{\frac{q-r}{q-p}}(\|f\|^{*q}_{L^{q,\infty}})^{\frac{r-p}{q-p}}.
\end{aligned}$$

Observe que se $\alpha \leq B$, então

$$\alpha^{q-p} \leq \frac{\|f\|^{*q}_{L^{q,\infty}}}{\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}} \Rightarrow \frac{\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p} \leq \frac{\|f\|^{*q}_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}, \text{ ou seja, } \min\left(\frac{\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}, \frac{\|f\|^{*q}_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right) = \frac{\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}.$$

Analogamente, se $\alpha \geq B$ segue que $\min\left(\frac{\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}, \frac{\|f\|^{*q}_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}\right) = \frac{\|f\|^{*q}_{L^{q,\infty}}}{\alpha^q}$, o que justifica (1.20). Além disso, as integrais convergem desde que $r - p > 0$ e $r - q < 0$.

O caso $q = \infty$ é mais simples. Uma vez que $\lambda_f(\alpha) = 0$, para $\alpha > \|f\|_{L^\infty}$, precisamos usar apenas a desigualdade $\lambda_f(\alpha) \leq \frac{\|f\|^{*p}_{L^{p,\infty}}}{\alpha^p}$, quando $\alpha \leq \|f\|_{L^\infty}$ para estimar a primeira integral em (1.20). Assim, temos

$$\|f\|_{L^r}^r \leq \frac{r}{r-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^{*p}\|f\|_{L^\infty}^{r-p},$$

que é (1.17) quando $q = \infty$. ■

1.5 A Função Rearranjo

Nesta seção serão discutidas propriedades da função rearranjo que serão de grande utilidade no decorrer deste trabalho.

Definição 1.5.1 *Seja f uma função mensurável em X. A função rearranjo de f é a função f^* definida em $[0,\infty)$ por*

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}.$$

Vamos adotar a convenção $\inf \emptyset = \infty$, assim $f^*(t) = \infty$ sempre que $\lambda_f(\alpha) > t$, para todo $\alpha \geq 0$. Se X for um conjunto de medida finita, então a função λ_f é limitada por $\mu(X)$, e portanto, segue que $f^*(t) = 0$, se $t \geq \mu(X)$.

Exemplo 1.5.1 *Considere a função simples f do Exemplo* 1.2.1,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x),$$

em que os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos e $a_1 > \cdots > a_n > 0$.

Vimos no Exemplo 1.2.1 *que*

$$\lambda_f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} B_i \chi_{[a_{i+1},a_i)}(\alpha),$$

onde $B_i = \sum_{j=1}^{i} \mu(E_j)$, $a_{n+1} = B_0 = 0$ e $a_0 = \infty$.

Observe que, $f^*(t) = 0$ quando $t \geq B_n$, pois $\lambda_f(0) = B_n$. Além disso, para $B_{n-1} \leq t < B_n$, o menor $s > 0$ tal que $\lambda_f(s) \leq t$ é a_n. Similarmente, para $B_{n-2} \leq t < B_{n-1}$, o menor $s > 0$ tal que $\lambda_f(s) \leq t$ é a_{n-1}. Seguindo este argumento, podemos concluir que

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[B_{i-1},B_i)}(t).$$

A figura abaixo ilustra este exemplo quando $n = 3$.

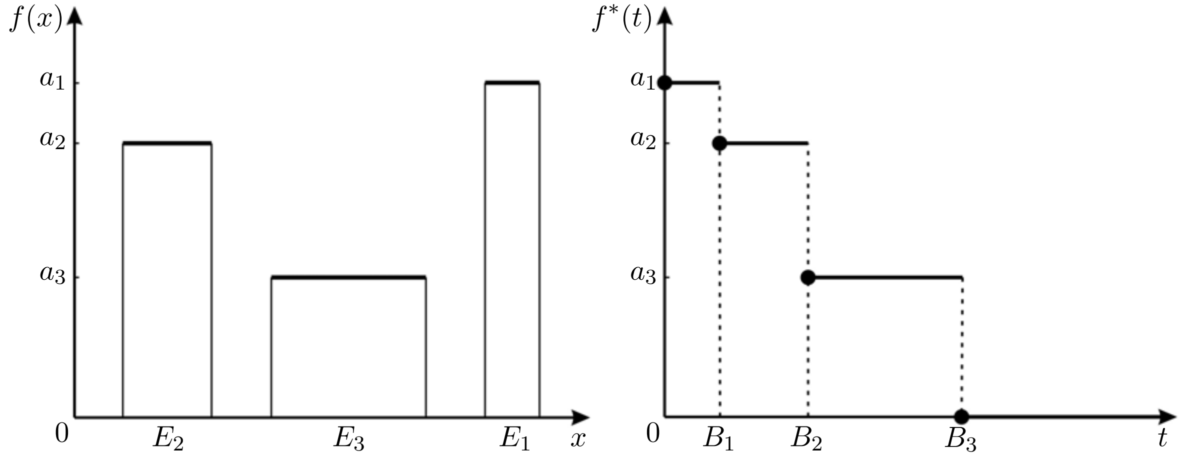

Figura 1.2: Os gráficos de uma função simples f e de sua função rearranjo f^*.

Algumas propriedades interessantes sobre a função rearranjo são apresentadas a seguir:

Proposição 1.5.1 *Para f, g, f_n funções mensuráveis, $k \in \mathbb{C}$ e $0 \leq t, s, t_1, t_2 < \infty$ temos*

1. *f^* é não crescente.*

2. *$f^*(\lambda_f(\alpha)) \leq \alpha$, para todo $\alpha > 0$.*

3. *$\lambda_f(f^*(t)) \leq t$.*

4. *$f^*(t) > s$ se, e somente se, $t < \lambda_f(s)$; isto é, $\{t \geq 0 : f^*(t) > s\} = [0, \lambda_f(s))$.*

5. *Se $|g| \leq |f|$ q.t.p., então $g^* \leq f^*$. Além disso , $|f|^* = f^*$.*

6. *$(kf)^* = |k| f^*$.*

7. *$(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$.*

8. *$(fg)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) g^*(t_2)$.*

9. *Se $|f_n| \uparrow |f|$ q.t.p., então $f_n^* \uparrow f^*$.*

10. *Se $|f| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} |f_n|$ q.t.p., então $f^* \leq \liminf\limits_{n\to\infty} f_n^*$.*

11. *f^* é contínua à direita em $[0, \infty)$.*

12. *$t \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq f^*(t)\})$, se $\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq f^*(t) - c\}) < \infty$, para algum $c > 0$.*

13. *$\lambda_f = \lambda_{f^*}$.*

14. *$(|f|^p)^* = (f^*)^p$, quando $0 < p < \infty$.*

15. $\displaystyle\int_X |f|^p \, d\mu = \int_0^\infty f^*(t)^p \, dt$, *quando* $0 < p < \infty$.

16. $\|f\|_{L^\infty} = f^*(0)$.

17. $\displaystyle\sup_{t>0} t^q f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha(\lambda_f(\alpha))^q$, *para* $0 < q < \infty$.

Demonstração: (*1*) Se $t_1 > t_2$, então para todo $s > 0$ tal que $\lambda_f(s) \leq t_2$, tem-se $\lambda_f(s) < t_1$, implicando que $\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t_2\} \subset \{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t_1\}$.

Assim, $\inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t_1\} \leq \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t_2\}$, ou seja, $f^*(t_1) \leq f^*(t_2)$.

Portanto, f^* é uma função não crescente.

(*2*) Observe que $\alpha \in A = \{s > 0 : \lambda_f(s) \leq \lambda_f(\alpha)\}$, deste modo $f^*(\lambda_f(\alpha)) = \inf A \leq \alpha$, para todo $\alpha > 0$.

(*3*) Seja $s_n \in \{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}$, tal que s_n converge para $f^*(t)$ de forma decrescente. Como $\lambda_f(s_n) \leq t$ e λ_f é contínua à direita, pelo item (1) da Proposição 1.2.1, temos $\lambda(f^*(t)) \leq t$.

(*4*) Se $s < f^*(t) = \inf\{u > 0 : \lambda_f(u) \leq t\}$, então $s \notin \{u > 0 : \lambda_f(u) \leq t\}$, ou seja, $\lambda_f(s) > t$.

Reciprocamente, suponha que $f^*(t) \leq s$. Assim, aplicando λ_f e usando o item anterior, segue que $\lambda_f(s) \leq \lambda_f(f^*(t)) \leq t$, o que é uma contradição.

Portanto, $f^*(t) > s$.

(*5*) Considere os conjuntos $A = \{u > 0 : \lambda_f(u) \leq t\}$ e $B = \{u > 0 : \lambda_g(u) \leq t\}$. Como $|g| \leq |f|$ q.t.p., pelo item (3) da Proposição 1.2.1 temos $\lambda_g \leq \lambda_f$. Sendo assim, segue que $A \subset B$, então $\inf A \geq \inf B$. Portanto, $g^* \leq f^*$.

Além disso, como $\lambda_f = \lambda_{|f|}$, segue que $|f|^* = f^*$.

(*6*) Usando a definição da função rearranjo e o item (4) da Proposição 1.2.1, temos

$$
\begin{aligned}
(kf)^* &= \inf\{u > 0 : \lambda_{kf}(u) \leq t\} \\
&= \inf\left\{u > 0 : \lambda_f\left(\frac{u}{|k|}\right) \leq t\right\} \\
&= \inf\{|k|s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}, \text{ onde } s = \frac{u}{|k|} \\
&= |k| \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\} \\
&= |k| f^*.
\end{aligned}
$$

(*7*) e (*8*) Considere os seguintes conjuntos $A = \{s_1 > 0 : \lambda_f(s_1) \leq t_1\}$, $B = \{s_2 > 0 : \lambda_g(s_2) \leq t_2\}$, $P = \{s > 0 : \lambda_{fg}(s) \leq t_1 + t_2\}$ e $S = \{s > 0 : \lambda_{f+g}(s) \leq t_1 + t_2\}$.

Observe que $A+B \subseteq S$. De fato, se $s \in A+B$, então $s = s_1 + s_2$, onde $s_1 \in A$ e $s_2 \in B$. Assim, pelo item (5) da Proposição 1.2.1, temos

$$\lambda_{f+g}(s) = \lambda_{f+g}(s_1+s_2) \leq \lambda_f(s_1) + \lambda_g(s_2) \leq t_1 + t_2,$$

ou seja, $s \in S$. Analogamente, provamos que $A \cdot B \subseteq P$.

Assim, para todo $s_1 \in A$ e $s_2 \in B$ observe que

$$(f+g)^*(t_1+t_2) = \inf S \leq s_1 + s_2 \text{ e } (fg)^*(t_1+t_2) = \inf P \leq s_1 s_2.$$

Tomando o ínfimo sobre todos $s_1 \in A$ e $s_2 \in B$, concluímos a demostração desses itens.

(9) Como $|f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f|$ q.t.p., para todo $n \in \mathbb{N}$, temos pelo item (5) que $f_n^* \leq f_{n+1}^* \leq f^*$.

Seja $h = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^*$, então $h \leq f^*$. Por outro lado, usando o fato que $f_n^* \leq h$ e λ_{f_n} é uma função não crescente, temos $\lambda_{f_n}(h(t)) \leq \lambda_{f_n}(f_n^*(t))$. Sendo assim, pelo item (3), concluímos que $\lambda_{f_n}(h(t)) \leq t$. Além disso, pela item (2) da Proposição 1.2.1, segue que $\lambda_f(h(t)) \leq t$, quando $n \to \infty$. Logo, $h(t) \in \{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}$, então $f^* \leq h$. Portanto, $h = f^*$.

(10) Sejam $F_n = \inf\limits_{k \geq n} |f_k|$ e $h = \liminf\limits_{n\to\infty} |f_n| = \sup\limits_{n\geq 1} F_n$. Como $F_n \uparrow h$, segue do item (9) que $F_n^* \uparrow h^*$, quando $n \to \infty$. Segue da hipótese que $|f| \leq h$ q.t.p., logo pelo item (5), tem-se $f^* \leq h^* = \sup\limits_{n\geq 1} F_n^*$. Por outro lado, para todo $k \geq n$, tem-se $F_n \leq |f_k|$, então $F_n^* \leq f_k^*$. Sendo assim, $F_n^* \leq \inf\limits_{k\geq n} f_k^*$ e, por consequência, obtemos que $f^* \leq \sup\limits_{n\geq 1} F_n^* \leq \sup\limits_{n\geq 1} \inf\limits_{k \geq n} f_k^* = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n^*$, o que completa a prova deste item.

(11) Fixe $t_0 \in [0, \infty)$. Se $f^*(t_0) = 0$, então $f^*(t) = 0$, para todo $t > t_0$, e assim, f^* é contínua à direita em t_0.

Agora, se $f^*(t_0) > 0$, então tome ϵ tal que $0 < \epsilon < f^*(t_0)$ e seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente de números reais convergindo para 0. Como $f^*(t_0) > f^*(t_0) - \epsilon$, segue pelo item (4) que $\lambda_f(f^*(t_0) - \epsilon) > t_0$. Além disso, como $t_n \downarrow 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_f(f^*(t_0) - \epsilon) > t_0 + t_n$, para todo $n \geq n_0$. Assim, usando novamente o item (4), temos que $f^*(t_0) - \epsilon < f^*(t_0 + t_n)$, ou seja, $|f^*(t_0+t_n) - f^*(t_0)| < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Portanto, f^* é contínua à direita em t_0.

(12) Pela definição de f^*, segue que o conjunto $A_n = \left\{x \in X : |f(x)| \geq f^*(t) - \dfrac{c}{n}\right\}$ tem medida $\mu(A_n) > t$. Os conjuntos A_n, formam uma sequência decrescente quando n aumenta e $\mu(A_1) < \infty$, pela hipótese. Consequentemente,

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq f^*(t)\}) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \geq t.$$

(13) O resultado é imediato para funções simples não negativas, em vista dos Exemplos 1.2.1 e 1.5.1. Para uma função mensurável f arbitrária, tome uma sequência de funções simples não negativas $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $f_n \uparrow |f|$. Pelo item (2) da Proposição 1.2.1 e pelo item (9), segue que $\lambda_{f_n} \uparrow \lambda_f$ e $f_n^* \uparrow f^*$. Assim, temos também que $\lambda_{f_n^*} \uparrow \lambda_{f^*}$. Além disso, já sabemos que $\lambda_{f_n} = \lambda_{f_n^*}$. Portanto, $\lambda_{f_n} \uparrow \lambda_{f^*}$ e $\lambda_{f_n} \uparrow \lambda_f$, ou seja, $\lambda_f = \lambda_{f^*}$.

(14) Como $\lambda_{|f|^p}(\alpha) = \lambda_f\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right) = \lambda_{f^*}\left(\alpha^{\frac{1}{p}}\right) = \lambda_{(f^*)^p}(\alpha)$, para todo $\alpha > 0$, segue o resultado.

(15) Pela Proposição 1.2.2 e pelo item (13), temos

$$\begin{aligned}\int_X |f|^p\, d\mu &= \|f\|_{L^p}^p \\ &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_f(\alpha)\, d\alpha \\ &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\lambda_{f^*}(\alpha)\, d\alpha \\ &= \|f^*\|_{L^p}^p \\ &= \int_0^\infty f^*(t)^p dt.\end{aligned}$$

(16) Resulta do fato que $f^*(0) = \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq 0\} = \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) = 0\} = \|f\|_{L^\infty}$.

(17) Dado $\alpha > 0$, tome ϵ tal que $0 < \epsilon < \alpha$. Pelo item (4), segue que $f^*(\lambda_f(\alpha) - \epsilon) > \alpha$, pois $\lambda_f(\alpha) - \epsilon < \lambda_f(\alpha)$. Logo,

$$\sup_{t>0} t^q f^*(t) \geq (\lambda_f(\alpha) - \epsilon)^q f^*(\lambda_f(\alpha) - \epsilon) > (\lambda_f(\alpha) - \epsilon)^q \alpha.$$

Primeiramente, faça $\epsilon \to 0$ e, em seguida, tome o supremo sobre todos os $\alpha > 0$ para obter a desigualdade $\sup\limits_{\alpha>0} \alpha(\lambda_f(\alpha))^q \leq \sup\limits_{t>0} t^q f^*(t)$.

Por outro lado, dado $t > 0$, tome $0 < \epsilon < f^*(t)$. Novamente, pelo item (4), segue que $\lambda_f(f^*(t) - \epsilon) > t$, pois $f^*(t) - \epsilon < f^*(t)$. Logo,

$$\sup_{\alpha>0} \alpha(\lambda_f(\alpha))^q \geq (f^*(t) - \epsilon)(\lambda_f(f^*(t) - \epsilon))^q > (f^*(t) - \epsilon)t^q.$$

Faça $\epsilon \to 0$ e depois tome o supremo sobre todos os $t > 0$. Assim, obtemos $\sup\limits_{\alpha>0} \alpha(\lambda_f(\alpha))^q \geq \sup\limits_{t>0} t^q f^*(t)$. ■

1.6 A Função Duplo Rearranjo

O objetivo desta seção é definir a função duplo rearranjo de uma função f e provar algumas de suas propriedades que serão utilizadas neste trabalho.

Definição 1.6.1 *Seja f uma função mensurável em X. A função duplo rearranjo de f é a função f^{**} definida em $(0,\infty)$ por*

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds. \tag{1.21}$$

Observação 1.6.1 *Em [8], encontra-se a seguinte definição equivalente a (1.21):*

$$f^{**}(t) = \sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |f(s)|\,d\mu(s)\right\}. \tag{1.22}$$

De (1.22), obtemos a propriedade de subaditividade de f^{**}, ou seja,

$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t), \tag{1.23}$$

para todo $t \in (0,\infty)$. De fato,

$$\begin{aligned}
(f+g)^{**}(t) &= \sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |f(s)+g(s)|\,d\mu(s)\right\} \\
&\leq \sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E (|f(s)|+|g(s)|)\,d\mu(s)\right\} \\
&\leq \sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |f(s)|\,d\mu(s)\right\} + \sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |g(s)|\,d\mu(s)\right\} \\
&= f^{**}(t) + g^{**}(t).
\end{aligned}$$

Proposição 1.6.1 *Para f, g e f_n, $n = 1, 2, \ldots$ funções mensuráveis em X, temos*

1. *f^{**} é uma função não crescente.*
2. *$f^*(t) \leq f^{**}(t)$, para todo $t > 0$.*
3. *Se $|f(x)| \leq |g(x)|$ q.t.p., então $f^{**}(t) \leq g^{**}(t)$, para todo $t > 0$.*
4. *Se $|f_n| \uparrow |f|$ q.t.p., então $f_n^{**} \uparrow f^{**}$.*

Demonstração: (*1*) Seja $0 < a < b$, então

$$\begin{aligned}
f^{**}(b) &= \frac{1}{b}\int_0^b f^*(s)\,ds \\
&= \frac{1}{b}\int_0^a f^*(s)\,ds + \frac{1}{b}\int_a^b f^*(s)\,ds \\
&\leq \frac{1}{b}\int_0^a f^*(s)\,ds + \frac{1}{b}f^*(a)(b-a), \text{ pois } f^* \text{ é não crescente} \\
&= \frac{1}{b}\int_0^a f^*(s)\,ds + \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)af^*(a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{b}\int_0^a f^*(s)\,ds + \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\int_0^a f^*(s)\,ds, \text{ pois } f^* \text{ é não crescente}\\
&= \frac{1}{a}\int_0^a f^*(s)\,ds = f^{**}(a).
\end{aligned}$$

Portanto, f^{**} é não crescente.

(2) Para todo $t > 0$, segue que

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \geq \frac{1}{t}\int_0^t f^*(t)\,ds = \frac{1}{t}tf^*(t) = f^*(t).$$

(3) Se $|f| \leq |g|$ q.t.p., então pelo item (5) da Proposição 1.5.1, segue que $f^* \leq g^*$. Logo,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \leq \frac{1}{t}\int_0^t g^*(s)\,ds = g^{**}(t),$$

para todo $t > 0$.

(4) Se $|f_n| \uparrow |f|$ q.t.p., então usando o item (9) da Proposição 1.5.1, temos $f_n^* \uparrow f^*$, assim, $f_n^* \to f^*$ e $f_n^* \leq f^* \in L^1(0,t)$.

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\begin{aligned}
f^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t \lim_{n\to\infty} f_n^*(s)\,ds\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f_n^*(s)\,ds\\
&= \lim_{n\to\infty} f_n^{**}(t),
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$.

Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $|f_n| \leq |f_{n+1}|$, segue pelo item anterior que $f_n^{**} \leq f_{n+1}^{**}$. Portanto, f_n^{**} cresce para f^{**}. ■

Os próximos resultados são propriedades do duplo rearranjo do operador convolução.

Definição 1.6.2 *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, funções mensuráveis. A convolução de f e g é a função $h(x)$ dada por*

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy.$$

O resultado a seguir é uma estimativa para h^{**} e sua demostração pode ser vista em [10].

Lema 1.6.1 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, então*

$$h^{**}(t) \leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^\infty f^*(s)g^*(s)\,ds, \tag{1.24}$$

para todo $t > 0$.

Como consequência deste resultado, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.6.2 *Se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *são funções mensuráveis, então*

$$h^{**}(t) \leq \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\,ds, \tag{1.25}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração: Se a integral do lado direito for infinita, o resultado segue imediatamente.

Suponha que $\displaystyle\int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\,ds < \infty$, para todo $t > 0$. Logo, como f^{**} e g^{**} são funções não crescentes, segue que

$$\lim_{t\to\infty} tf^{**}(t)g^{**}(t) = 0.$$

Usando o item (2), da Proposição 1.6.1 e a desigualdade (1.24), obtemos

$$h^{**}(t) \leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^\infty f^{**}(s)g^{*}(s)\,ds, \tag{1.26}$$

para todo $t > 0$.

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f^{**}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\right) \\
&= \frac{1}{t}f^*(t) - \frac{1}{t^2}\int_0^t f^*(s)\,ds \\
&= \frac{1}{t}\left(f^*(t) - \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(f^*(t) - f^{**}(t)\right)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dt}(tg^{**})(t) = g^{**}(t) + t\frac{d}{dt}g^{**}(t) = g^*(t).$$

Assim, integrando por parte em (1.26), temos

$$\begin{aligned}
h^{**}(t) &\leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \Big[sg^{**}(s)f^{**}(s)\Big]_t^\infty - \int_t^\infty \frac{1}{s}[f^*(s) - f^{**}(s)]sg^{**}(s)\,ds \\
&= \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\,ds - \int_t^\infty f^*(s)g^{**}(s)\,ds \\
&\leq \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\,ds.
\end{aligned}$$

■

Capítulo

2

Espaços de Lorentz

Este capítulo será dedicado ao estudo dos espaços de Lorentz, os quais foram introduzidos, em 1950, pelo matemático russo George G. Lorentz (1910-2006). Esses espaços serão relevantes para nosso estudo de soluções do problema de Cauchy para a equação quase-geostrófica dissipativa.

2.1 Espaços de Lorentz e Propriedades

Definição 2.1.1 *Sejam f uma função mensurável e $0 < p, q \leq \infty$. Defina*

$$\|f\|^*_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left[\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} & , \ se\ 0 < p < \infty\ e\ 0 < q < \infty \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) & , \ se\ 0 < p \leq \infty\ e\ q = \infty \end{cases} .$$

O conjunto de todas funções f, tais que $\|f\|^*_{L^{p,q}} < \infty$ é denotado por $L^{p,q}$ e chamado de espaço de Lorentz com índices p e q.

Observação 2.1.1 *Observe que $L^{\infty,\infty} = L^\infty$, pois usando o fato que f^* é não crescente e o item (16), da Proposição 1.5.1, segue que*

$$\|f\|^*_{L^{\infty,\infty}} = \sup_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \|f\|_{L^\infty}.$$

Quando $q = \infty$, $L^{p,\infty} = L^p$-fraco, pois pelo item (17), da Proposição 1.5.1, tem-se

$$\|f\|^*_{L^{p,\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) = \sup_{\alpha>0} \alpha \lambda_f(\alpha)^{\frac{1}{p}}.$$

E, para $0 < p = q < \infty$, $L^{p,p} = L^p$, *pois pelo item* (15), *da Proposição* 1.5.1, *tem-se*

$$\|f\|^*_{L^{p,p}} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^p \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty f^*(t)^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}.$$

A seguir, vamos calcular o funcional $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$ de uma função simples.

Exemplo 2.1.1 *Utilizando a mesma notação dos Exemplos* 1.2.1 *e* 1.5.1, *quando* $0 < p, q < \infty$ *temos*

$$\begin{aligned}
\|f\|^*_{L^{p,q}} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[B_{i-1},B_i)}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i \chi_{[B_{i-1},B_i)}(t)\right)^q dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left[a_1^q B_1^{\frac{q}{p}} + a_2^q (B_2^{\frac{q}{p}} - B_1^{\frac{q}{p}}) + \cdots + a_n^q (B_n^{\frac{q}{p}} - B_{n-1}^{\frac{q}{p}})\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|f\|^*_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[B_{i-1},B_i)}(t) \\
&= \sup_{1\le i\le n} a_i B_i^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

A expressão anterior para $\|f\|^*_{L^{p,q}}$ *também é válida quando* $p = \infty$, *mas neste caso é igual a* ∞ *se pelo menos um* a_j *é estritamente positivo. Portanto, a única função simples com norma* $\|\cdot\|^*_{L^{\infty,q}}$ *finita é a função nula q.t.p. Como toda função mensurável pode ser aproximada por funções simples, conclui-se que* $L^{\infty,q} = \{0\}$, *para todo* $0 < q < \infty$.

Observação 2.1.2 *Vale ressaltar que os espaços de Lorentz tem a mesma relação de escala que os espaços* L^p, *isto é, para todo* $k > 0$ *e uma função mensurável* f *em* $\mathbb{R}^n$, *tem-se*

$$\|f(kx)\|^*_{L^{p,q}} = k^{-\frac{n}{p}} \|f\|^*_{L^{p,q}}, \tag{2.1}$$

onde $1 \le p < \infty$ *e* $1 \le q \le \infty$.

De fato, dado $k > 0$ e usando a notação $f_k(x) = f(kx)$, note que

$$\begin{aligned}
\lambda_{f_k}(\alpha) &= m\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(kx)| > \alpha\}\big) \\
&= m\big(\{xk^{-1} \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}\big) \\
&= k^{-n}\, m\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\}\big) \\
&= k^{-n}\lambda_f(\alpha).
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
(f_k)^*(t) &= \inf\{s > 0 : \lambda_{f_k}(s) \leq t\} \\
&= \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq k^n t\} \\
&= f^*(k^n t).
\end{aligned}$$

Logo, para $0 < q < \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\|f_k\|^*_{L^{p,q}} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}(f_k)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(k^n t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= k^{-\frac{n}{p}} \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= k^{-\frac{n}{p}} \|f\|^*_{L^{p,q}}.
\end{aligned}$$

E para $q = \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\|f_k\|^*_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f_k)^*(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(k^n t) \\
&= k^{-\frac{n}{p}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\
&= k^{-\frac{n}{p}} \|f\|^*_{L^{p,\infty}}.
\end{aligned}$$

O funcional $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$ não é uma norma, uma vez que não satistaz a desigualdade triangular (veja [7], por exemplo). Porém, definiremos um funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ e provaremos que $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ é uma norma e que a topologia gerada por esta norma é equivalente a topologia gerada por $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$.

Definição 2.1.2 *Seja $f \in L^{p,q}$, em que $1 < p \le \infty$ e $1 \le q \le \infty$, defina*

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left[\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} & , \ se\ 1 < p < \infty \ e\ 1 \le q < \infty \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & , \ se\ 1 < p \le \infty \ e\ q = \infty \end{cases}.$$

Para provar que as topologias geradas por $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$ e $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ são equivalentes, precisamos do seguinte resultado cuja demonstração pode ser encontrada em [11].

Lema 2.1.1 ***(Desigualdade de Hardy)*** *Se $1 \le q < \infty$, $r > 0$ e f uma função mensurável não-negativa, então*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\,du\right)^q t^{-r-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty (uf(u))^q\, u^{-r-1}\,du\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.2}$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(u)\,du\right)^q t^{r-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty (uf(u))^q\, u^{r-1}\,du\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.3}$$

Proposição 2.1.1 *Se $f \in L^{p,q}$, $1 < p \le \infty$ e $1 \le q \le \infty$, então*

$$\|f\|^*_{L^{p,q}} \le \|f\|_{L^{p,q}} \le \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{L^{p,q}}.$$

Demonstração: Do item (2), da Proposição 1.6.1, segue que $f^* \le f^{**}$. Assim, a primeira desigualdade da proposição é imediata.

Para provar a segunda desigualdade, primeiro considere o caso $1 < p < \infty$ e $1 \le q < \infty$. Pela desigualdade de Hardy (2.2), com $r = q\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$, estimamos $\|f\|_{L^{p,q}}$ como segue

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,q}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(s)\,ds\right)^q t^{-q\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \frac{q}{q\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_0^\infty (sf^*(s))^q\, s^{-q\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{L^{p,q}}.
\end{aligned}$$

No caso em que $1 < p \leq \infty$ e $q = \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \frac{1}{t} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\, ds \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} \left(\sup_{u>0} u^{\frac{1}{p}} f^*(u) \right) ds \\
&= \|f\|^*_{L^{p,\infty}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}}\, ds \\
&= \frac{p}{p-1} \|f\|^*_{L^{p,\infty}}.
\end{aligned}$$

■

Mostraremos agora que o funcional $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ define uma norma em $L^{p,q}$.

Proposição 2.1.2 *Se $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, então $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ é uma norma em $L^{p,q}$.*

Demonstração: Observe que $\|f\|_{L^{p,q}} \geq 0$ e

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^{p,q}} = 0 &\Leftrightarrow f^{**} = 0 \text{ q.t.p.} \Leftrightarrow f^* = 0 \text{ q.t.p.} \\
&\Leftrightarrow \lambda_f(\alpha) \leq t,\ \forall\, t \in [0,\infty), \alpha \in [0,\infty) \\
&\Leftrightarrow \lambda_f(\alpha) = 0,\ \forall\, \alpha \in [0,\infty) \Leftrightarrow |f| = 0 \text{ q.t.p.} \\
&\Leftrightarrow f = 0 \text{ q.t.p.}
\end{aligned}$$

Para provar a desigualdade triangular, usaremos a propriedade da subaditividade do duplo rearranjo (1.23). Para $q = \infty$, segue que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f+g)^{**}(t) \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t) \\
&= \|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}.
\end{aligned}$$

Agora, para $1 \leq q < \infty$, pela desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{L^{p,q}} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f+g)^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \left(f^{**}(t) + g^{**}(t) \right) \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$= \|f\|_{L^{p,q}} + \|g\|_{L^{p,q}},$$

e assim concluímos a prova. ■

Nosso próximo objetivo é mostrar que os espaços de Lorentz munidos com a norma $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$, com $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$ são espaços de Banach. Para isso, precisaremos dos lemas a seguir, os quais permitem estabelecer a relação de inclusão entre os espaços $L^{p,q}$ e $L^{p,r}$.

Lema 2.1.2 *Seja f uma função mensurável. Se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, então*

$$f^{**}(x) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{L^{p,q}}}{x^{\frac{1}{p}}}, \tag{2.4}$$

para todo $x > 0$.

Demonstração: Pelo item (1), da Proposição 1.6.1, f^{**} é uma função não crescente, então

$$\begin{aligned} \|f\|^q_{L^{p,q}} &= \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \\ &\geq \int_0^x t^{\frac{q}{p}-1}\big(f^{**}(t)\big)^q\, dt \\ &\geq \big(f^{**}(x)\big)^q \int_0^x t^{\frac{q}{p}-1}\, dt \\ &= \frac{p}{q}\big(f^{**}(x)\big)^q x^{\frac{q}{p}}, \end{aligned}$$

ou seja, $f^{**}(x) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{L^{p,q}}}{x^{\frac{1}{p}}}$. ■

Lema 2.1.3 ***(Calderón)*** *Se $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < r \leq \infty$, então $L^{p,q} \subset L^{p,r}$. Mais ainda,*

$$\|f\|_{L^{p,r}} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,q}},$$

para toda $f \in L^{p,q}$.

Demonstração: Pelo Lema 2.1.2, segue que

$$\begin{aligned} \|f\|^r_{L^{p,r}} &= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1}\big[f^{**}(t)\big]^r\, dt \\ &= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1}\big[f^{**}(t)\big]^q \big[f^{**}(t)\big]^{r-q}\, dt \\ &\leq \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1}\big[f^{**}(t)\big]^q \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{L^{p,q}}}{t^{\frac{1}{p}}}\right]^{r-q} dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{L^{p,q}}^{r-q} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}\left[f^{**}(t)\right]^q dt \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{L^{p,q}}^{r-q} \|f\|_{L^{p,q}}^{q}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\|f\|_{L^{p,r}} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,q}},
$$

para toda $f \in L^{p,q}$. ■

Uma conseqüência imediata do lema anterior são as inclusões contínuas $L^{p,q_1} \subset L^p \subset L^{p,q_2} \subset L^{p,\infty}$, para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q_1 \leq p \leq q_2 \leq \infty$.

Teorema 2.1.1 *Se $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, então o espaço de Lorentz $L^{p,q}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L^{p,q}$, ou seja,

$$
\|f_m - f_n\|_{L^{p,q}} \to 0,
$$

quando $m, n \to \infty$. Usando a Proposição 2.1.1 e o Lema 2.1.3, tem-se

$$
\|f_m - f_n\|_{L^{p,\infty}}^* \leq \|f_m - f_n\|_{L^{p,\infty}} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f_m - f_n\|_{L^{p,q}} \to 0,
$$

quando $m, n \to \infty$. Assim, pelo item (2), da Proposição 1.3.1, segue que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em medida.

Logo, pelo Teorema 1.3.2, existe uma subsequêcia (f_{n_k}) que converge para alguma função mensurável f q.t.p. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\|f_n - f_N\|_{L^{p,q}} < \epsilon, \text{ para todo } n > N,
$$

e $f_{n_k} - f_N \to f - f_N$ q.t.p.. Logo, $|f_{n_k} - f_N| \to |f - f_N|$ q.t.p.. Além disso, podemos considerar $\big(|f_{n_k} - f_N|\big)$ uma sequência crescente (passando a uma subsequência, se necessário), pois $|f_{n_k} - f_N|$ é mensurável e não negativa. Logo, pelo item (4), da Proposição 1.6.1, tem-se

$$
(f_n - f_N)^{**} = \lim_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_N)^{**} = \liminf_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_N)^{**}.
$$

Logo, usando o lema de Fatou, obtemos

$$
\|f - f_N\|_{L^{p,q}} = \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}(f - f_N)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \liminf_{k\to\infty}(f_{n_k} - f_N)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \liminf_{k\to\infty} \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f_{n_k} - f_N)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_N\|_{L^{p,q}}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_{L^{p,q}} = 0$$

e, portanto, como $f = f - f_N + f_N$ concluímos que $f \in L^{p,q}$, ou seja, $(L^{p,q}, \|\cdot\|_{L^{p,q}})$ é um espaço de Banach. ∎

O resultado a seguir caracteriza o dual do espaço de Lorentz $L^{p,q}$, com $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$ e sua demostração pode ser encontrada em [9].

Proposição 2.1.3 *Sejam $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$. Então, o espaço dual de $L^{p,1}$ é $L^{p',\infty}$ e o espaço dual de $L^{p,q}$ é $L^{p',q'}$.*

Observação 2.1.3 *Em [5], pode-se encontrar um resultado de aproximação de identidade em espaços de Lorentz. Mais precisamente, se $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1$, para cada $\epsilon > 0$, $\varphi_\epsilon := \dfrac{1}{\epsilon^n}\varphi\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)$ é o molificador de Friedrichs e $f \in L^{p,q}$, com $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, então*

$$\|\varphi_\epsilon * f - f\|_{L^{p,q}} \to 0,$$

quando $\epsilon \to 0$.

A demonstração desse resultado, baseia-se na continuidade da translação em espaços de Lorentz, que é consequência da densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ em $L^{p,q}$, para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$.

Observação 2.1.4 *Para finalizar esta seção, vale ressaltar que como o funcional $\|\cdot\|^*_{L^{p,q}}$, a norma $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ também satisfaz a relação de escala, ou seja, dado $k > 0$ e f uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$, tem-se*

$$\|f_k(x)\|_{L^{p,q}} = k^{-\frac{n}{p}}\|f(x)\|_{L^{p,q}},$$

onde $f_k(x) = f(kx)$, $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, veja Observação 2.1.2.

De fato, já vimos que $(f_k)^*(t) = f^*(k^n t)$, então

$$
\begin{aligned}
(f_k)^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t (f_k)^*(s)\,ds \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t f^*(k^n s)\,ds
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{t}\int_0^{k^n t} f^*(s)\,\frac{ds}{k^n} \\ &= \frac{1}{k^n t}\int_0^{k^n t} f^*(s)\,ds \\ &= f^{**}(k^n t). \end{aligned}$$

Logo, para $1 < q < \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \|f_k\|_{L^{p,q}} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}(f_k)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(k^n t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= k^{-\frac{n}{p}}\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= k^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^{p,q}}. \end{aligned}$$

E, para $q = \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \|f_k\|_{L^{p,\infty}} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}(f_k)^{**}(t) \\ &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(k^n t) \\ &= k^{-\frac{n}{p}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \\ &= k^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^{p,\infty}}. \end{aligned}$$

2.2 Desigualdade de Young e de Hölder em $L^{p,q}$

Nesta seção apresentaremos uma generalização da desigualdade de Young e de Hölder para os espaços de Lorentz $L^{p,q}$.

Proposição 2.2.1 ***(Desigualdade de Young generalizada)*** *Sejam $1 < p_1, p_2 < \infty$. Se $f \in L^{p_1,q_1}$ e $g \in L^{p_2,q_2}$, onde $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} > 1$, então a convolução $h = g * f$ pertence a $L^{r,s}$, onde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} - 1$ e $s \geq 1$ é qualquer número tal que $\dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q_2} \geq \dfrac{1}{s}$. Além disso,*

$$\|h\|_{L^{r,s}} \leq C(r)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}. \tag{2.5}$$

Demonstração: Primeiro considere o caso $s = \infty$. Usando a Proposição 1.6.2, estimamos

$$\|h\|_{L^{r,\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{r}} h^{**}(t)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{r}}\int_t^{\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)\,ds\right\}\\
&= \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{r}}\int_t^{\infty} s^{-1-\frac{1}{r}}\left(s^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(s)\right)\left(s^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(s)\right)ds\right\}\\
&\leq \sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{r}}\int_t^{\infty} s^{-1-\frac{1}{r}}\left(\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(s)\right)\left(\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(s)\right)ds\right\}\\
&\leq \|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}\sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{r}}\int_t^{\infty} s^{-1-\frac{1}{r}}\,ds\right\}\\
&= \|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}\sup_{t>0}\left\{t^{\frac{1}{r}}t^{-\frac{1}{r}}r\right\}\\
&= r\|f\|_{L^{p_1,\infty}}\|g\|_{L^{p_2,\infty}}\\
&\leq C(r)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}.
\end{aligned}
$$

Considerando o caso s finito e usando novamente a Proposição 1.6.2, estimamos

$$
\|h\|_{L^{r,s}}^s = \int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{r}}h^{**}(t)\right)^s\frac{dt}{t} \leq \int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{r}}\int_t^{\infty} f^{**}(s)g^{**}(s)\,ds\right)^s\frac{dt}{t}.
$$

Fazendo a mudança de variáveis $t=\dfrac{1}{y}$ e $s=\dfrac{1}{u}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|h\|_{L^{r,s}}^s &\leq \int_0^{\infty}\left(y^{-\frac{1}{r}}\int_0^{y} f^{**}\left(\frac{1}{u}\right)g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u^2}\right)^s\frac{dy}{y}\\
&= \int_0^{\infty}\left(\int_0^{y}\frac{1}{u^2}f^{**}\left(\frac{1}{u}\right)g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)du\right)^s y^{-\frac{s}{r}-1}\,dy\\
&= \int_0^{\infty}\left(\int_0^{y}F(u)\,du\right)^s y^{-\widetilde{r}-1}\,dy,
\end{aligned}
$$

onde $\widetilde{r}=\dfrac{s}{r}$ e $F(u)=\dfrac{1}{u^2}f^{**}\left(\dfrac{1}{u}\right)g^{**}\left(\dfrac{1}{u}\right)$. Assim, pela desigualdade de Hardy (2.2), tem-se

$$
\begin{aligned}
\|h\|_{L^{r,s}}^s &\leq \left(\frac{s}{\widetilde{r}}\right)^s\int_0^{\infty}\left(uF(u)\right)^s u^{-\widetilde{r}-1}\,du\\
&= r^s\int_0^{\infty}\left(u\frac{1}{u^2}f^{**}\left(\frac{1}{u}\right)g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)\right)^s u^{-\frac{s}{r}}\frac{du}{u}\\
&= r^s\int_0^{\infty}\left(u^{-1-\frac{1}{r}}f^{**}\left(\frac{1}{u}\right)g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)\right)^s\frac{du}{u}.
\end{aligned}
$$

Fazendo novamente a mudança de variáveis $t=\dfrac{1}{u}$, tem-se

$$
\|h\|_{L^{r,s}}^s \leq r^s\int_0^{\infty}\left(t^{1+\frac{1}{r}}f^{**}(t)g^{**}(t)\right)^s\frac{dt}{t}.
$$

Como $\dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_2}\geq\dfrac{1}{s}$, existem $m_1\geq 1$ e $m_2\geq 1$, tais que

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=1,\ \ \frac{1}{m_1}\leq\frac{s}{q_1}\ \text{ e }\ \frac{1}{m_2}\leq\frac{s}{q_2}.$$

Logo, usando a desigualdade de Hölder em $L^p(0,\infty)$ com a medida $\mu=\dfrac{dx}{x}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^{r,s}} &\leq r\left[\int_0^\infty\left(t^{1+\frac{1}{r}}f^{**}(t)g^{**}(t)\right)^s\,\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{s}}\\
&= r\left[\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(t)\right)^s\left(t^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(t)\right)^s\,\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{s}}\\
&\leq r\left[\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(t)\right)^{sm_1}\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{m_1}}\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(t)\right)^{sm_2}\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{m_2}}\right]^{\frac{1}{s}}\\
&= r\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(t)\right)^{sm_1}\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{sm_1}}\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(t)\right)^{sm_2}\,\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{sm_2}}\\
&= r\|f\|_{L^{p_1,sm_1}}\|g\|_{L^{p_2,sm_2}}.
\end{aligned}$$

Como $q_1\leq sm_1$ e $q_2\leq sm_2$, pelo Lema de Calderón 2.1.3, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^{r,s}} &\leq r\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{sm_1}}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{sm_2}}\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}\\
&= C(r)\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}.
\end{aligned}$$

■

O resultado a seguir é uma consequência da desigualdade de Young e sua demonstração pode ser encontrada em [6].

Proposição 2.2.2 *Seja $g\in L^{p,\infty}$, com $1<p<\infty$ e $f\in L^1(R^n)$, então a convolução $h=g*f\in L^{p,\infty}$ e vale*

$$\|h\|_{L^{p,\infty}}\leq C(p)\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^{p,\infty}}.$$

Proposição 2.2.3 ***(Desigualdade de Hölder generalizada)*** *Sejam $1<p_1,p_2<\infty$. Se $h=fg$, em que $f\in L^{p_1,q_1}$, $g\in L^{p_2,q_2}$ e $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}<1$, então $h\in L^{r,s}$, quando*

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2},\ \frac{1}{s}\leq\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\ \text{ e } s\geq 1.$$

Além disso,

$$\|h\|_{L^{r,s}} \leq C(r')\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}, \tag{2.6}$$

onde r' é índice conjugado de r.

Demonstração: Considere o seguinte conjunto $E = \{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| \geq h^*(t)\}$, onde $t > 0$. Como pode ser visto em [8], página 258, $m(E) \geq t$. Além disso, observe que

$$\left(\frac{1}{m(E)}\int_E |h(x)|^{\frac{1}{2}}\,dx\right)^2 \geq \left(\frac{1}{m(E)}\int_E h^*(t)^{\frac{1}{2}}\,dx\right)^2 = h^*(t)\left(\frac{1}{m(E)}\int_E dx\right)^2 = h^*(t).$$

Logo,

$$\begin{aligned} h^*(t) &\leq \sup_{m(E)\geq t}\left\{\frac{1}{m(E)}\int_E |h(x)|^{\frac{1}{2}}\,dx\right\}^2 \\ &\leq \sup_{m(E)\geq t}\left\{\frac{1}{m(E)}\int_E |f(x)|\,dx\right\}\sup_{m(E)\geq t}\left\{\frac{1}{m(E)}\int_E |g(x)|\,dx\right\} \\ &= f^{**}(t)g^{**}(t), \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder na segunda desigualdade.

Como $\dfrac{1}{s} \leq \dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q_2}$, podemos encontrar $m_1 \geq 1$ e $m_2 \geq 1$, tais que

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1,\ \frac{1}{m_1} \leq \frac{s}{q_1} \text{ e } \frac{1}{m_2} \leq \frac{s}{q_2}.$$

Assim, usando a desigualdade de Hölder em $L^p(0,\infty)$ e a Proposição 2.1.1, tem-se

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^{r,s}} &\leq r'\|h\|^*_{L^{r,s}} \\ &= r'\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{r}}h^*(t)\right)^s \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{s}} \\ &\leq r'\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(t)\right)^s \left(t^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(t)\right)^s \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{s}} \\ &\leq r'\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p_1}}f^{**}(t)\right)^{sm_1} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{sm_1}}\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p_2}}g^{**}(t)\right)^{sm_2} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{sm_2}} \\ &= r'\|f\|_{L^{p_1,sm_1}}\|g\|_{L^{p_2,sm_2}}. \end{aligned}$$

Agora, como $q_1 \leq sm_1$ e $q_2 \leq sm_2$, pelo Lema de Calderón 2.1.3, conclui-se que

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^{r,s}} &\leq r'\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{sm_1}}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{sm_2}}\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}} \\ &= C(r')\|f\|_{L^{p_1,q_1}}\|g\|_{L^{p_2,q_2}}. \end{aligned}$$

■

2.3 Interpolação em espaços de Lorentz

O objetivo principal desta seção é apresentar um Teorema de Interpolação em espaços de Lorentz que será útil para nossos propósitos. Para isso, começaremos introduzindo algumas notações e definições básicas da teoria de interpolação. Para não fugir dos objetivos desse trabalho nos restringiremos ao $K-$método.

Considere X_0 e X_1 dois espaços de Banach. Denotaremos $\overline{X} = (X_0, X_1)$. Seja $\sum(\overline{X}) = X_0 + X_1$ a soma dos espaços de Banach X_0 e X_1.

Definição 2.3.1 *Para cada $t > 0$ fixado, definimos o $K-$funcional como:*

$$K(t, a, \overline{X}) = \inf \left\{ \|a_0\|_{X_0} + t\|a_1\|_{X_1} : a_0 \in X_0, a_1 \in X_1 \text{ e } a = a_0 + a_1 \right\}.$$

Observe que $K(t, \cdot, \overline{X})$ é uma norma no espaço de Banach $\sum(\overline{X})$.

Definição 2.3.2 *Para cada $a \in \sum(\overline{X})$, denotamos*

$$\|a\|_{\theta,q,K} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a, \overline{X}))^q \frac{dt}{t} & , \text{ se } \ 0 < \theta < 1 \text{ e } 1 \le q < \infty \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{-\theta} K(t, a, \overline{X}) & , \text{ se } \ 0 \le \theta \le 1 \text{ e } q = \infty \end{cases}.$$

e definimos o espaço de interpolação real $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$ como o conjunto

$$X_{\theta,q} = \left\{ a \in \sum(\overline{X}) : \|a\|_{\theta,q,K} < \infty \right\}.$$

Definição 2.3.3 *Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida. O operador T de (X, μ) em (Y, ν) é sublinear se*

1. *$|T(f + g)| \le |Tf| + |Tg|$, para todas funções f, g mensuráveis em X.*

2. *$|T(cf)| = |c||Tf|$, para toda função f mensurável em X e $c \in \mathbb{C}$.*

Observação 2.3.1 *Considere os pares $\overline{X} = (X_0, X_1)$ e $\overline{Y} = (Y_0, Y_1)$. Sabe-se que se $T : X_0 \to Y_0$ e $T : X_1 \to Y_1$ são aplicações contínuas e sublineares, então $T : (X_0, X_1)_{\theta,q} \to (Y_0, Y_1)_{\theta,q}$ é contínua. Para demonstração dessa afirmação veja, por exemplo, [3].*

O proximo teorema é um resultado clássico da teoria de interpolação em espaços de Lorentz e pode ser encontrado em [3], página 113. Sua demonstração será omitida por fugir dos propósitos desse trabalho.

Teorema 2.3.1 *Sejam $1 \leq q_0 \leq \infty$ e $1 \leq q_1 \leq \infty$. Assuma que p_0 e p_1 são números positivos tais que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$, em que $0 < \theta < 1$. Se $p_0 \neq p_1$, então*

$$(L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1})_{\theta,q} = L^{p,q}.$$

A igualdade continua válida no caso em que $p_0 = p_1 = p$, desde que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$.

Definição 2.3.4 *Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços de medida. Se T é um operador sublinear de $L^{p,1}(X)$ em $L^{p,q}(Y)$, em que $1 \leq p, q \leq \infty$, então diz-se T é do tipo fraco (p,q), quando existe uma constante $C > 0$, tal que*

$$\|Tf\|_{L^{p,q}} \leq C\|f\|_{L^{p,1}}.$$

Definição 2.3.5 *Suponha que $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, com $q_0 \neq q_1$. Sejam σ o segmento de interpolação*

$$\sigma = \left[\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right), \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)\right],$$

isto é, o segmento de reta no quadrado unitário $\{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$, com extremos $\left(\dfrac{1}{p_i}, \dfrac{1}{q_i}\right)$, $i = 0, 1$ e

$$m = \frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$$

a inclinação do segmento σ. Para cada função f mensurável em $(0,\infty)$ e para cada $t > 0$, o operador de Calderón S_σ é definido por

$$(S_\sigma f)(t) = t^{-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f(s)\, \frac{ds}{s} + t^{-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}} f(s)\, \frac{ds}{s}.$$

Definição 2.3.6 *Um operador T é do tipo fraco $(p_0, q_0; p_1, q_1)$ se*

$$(Tf)^*(t) \leq M S_\sigma(f^*)(t),\ t > 0,$$

para toda f tal que o lado direito é finito.

O resultado à seguir será utilizado na demostração do Teorema de Interpolação de Marcinkiewisz e sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Teorema 2.3.2 *Suponha que $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, com $q_0 \neq q_1$. Um operador T é do tipo fraco $(p_0, q_0; p_1, q_1)$ se, e somente se, T é dos tipos fraco (p_0, q_0) e (p_1, q_1).*

Teorema 2.3.3 ***(Interpolação de Marcinkiewicz)*** *Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços de medida. Suponha que $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, com $q_0 \neq q_1$. Seja $0 < \theta < 1$*

e defina p e q por

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}\ e\ \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}. \tag{2.7}$$

Seja T um operador sublinear de $L^{p_0,1}+L^{p_1,1}$ em um espaço de funções mensuráveis em Y. Se T é do tipo fraco (p_i,q_i), $i=0,1$, então existe $B=B(p_i,q_i,\theta)$, tal que, para $1\leq r\leq\infty$ tem-se

$$\|Tf\|_{L^{q,r}}\leq B\|f\|_{L^{p,r}},$$

para toda f pertencente a $L^{p,r}$.

Demonstração: Note que para m como na Definição 2.3.5 e p,q definidos em (2.7), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}\right) &= \frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{q_0}-\frac{1}{q_1}}\left(\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}-\frac{1}{q_0}\right)\\ &= -\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}\right)\theta\\ &= \frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}-\frac{1}{p_0}\\ &= \frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}.\end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}.$$

Pelo Teorema 2.3.2, segue que T é um operador do tipo fraco $(p_0,q_0;p_1,q_1)$. Assim, para o caso em que $r<\infty$, pelas Definições 2.3.3 e 2.3.6, tem-se

$$\begin{aligned}\|Tf\|^*_{L^{q,r}} &= \left[\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{q}}(Tf)^*(t)\right)^r\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{r}}\\ &\leq M\left[\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{q}}S_\sigma(f^*)(t)\right)^r\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{r}}\\ &= \left[\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{q}}t^{-\frac{1}{q_0}}\int_0^{t^m}s^{\frac{1}{p_0}}f^*(s)\frac{ds}{s}+t^{\frac{1}{q}}t^{-\frac{1}{q_1}}\int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}}f^*(s)\frac{ds}{s}\right)^r\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Minkowski, segue que

$$\|Tf\|^*_{L^{q,r}}\ \leq\ M\left[\left[\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}}\int_0^{t^m}s^{\frac{1}{p_0}}f^*(s)\frac{ds}{s}\right)^r\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{r}}+\left[\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}}\int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}}f^*(s)\frac{ds}{s}\right)^r\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{r}}\right].$$

Fazendo a mudança de variáveis $t^m = u$ em cada uma das integrais acima, tem-se

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^*_{L^{q,r}} &\leq M\left[\left[\frac{1}{m}\int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}\right)}\int_0^u s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s)\,\frac{ds}{s}\right)^r \frac{du}{u}\right]^{\frac{1}{r}}\right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{m}\int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}\right)}\int_u^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s)\,\frac{ds}{s}\right)^r \frac{du}{u}\right]^{\frac{1}{r}}\right] \\
&= M|m|^{-\frac{1}{r}}\left[\left[\int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}}\int_0^u s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s)\,\frac{ds}{s}\right)^r \frac{du}{u}\right]^{\frac{1}{r}}\right. \\
&\quad \left. + \left[\int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\int_u^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s)\,\frac{ds}{s}\right)^r \frac{du}{u}\right]^{\frac{1}{r}}\right] \\
&= M|m|^{-\frac{1}{r}}\left[\left[\int_0^\infty \left(\int_0^u s^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(s)\,ds\right)^r u^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}\right)r-1}\,du\right]^{\frac{1}{r}}\right. \\
&\quad \left. + \left[\int_0^\infty \left(\int_u^\infty s^{\frac{1}{p_1}-1} f^*(s)\,ds\right)^r u^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right)r-1}\,du\right]^{\frac{1}{r}}\right]
\end{aligned}$$

Agora, aplicando as desigualdades de Hardy (2.2) e (2.3) no primeiro e segundo termo do lado direito, respectivamente, tem-se

$$\begin{aligned}
\|Tf\|^*_{L^{q,r}} &\leq M|m|^{-\frac{1}{r}}\left[\frac{r}{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}\right)r}\left[\int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{p}}f^*(u)\right)^r \frac{du}{u}\right]^{\frac{1}{r}} + \frac{r}{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right)r}\left[\int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{p}}f^*(u)\right)^r \frac{du}{u}\right]^{\frac{1}{r}}\right] \\
&= B'\|f\|^*_{L^{p,r}}.
\end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 2.1.1, tem-se

$$\frac{q-1}{q}\|Tf\|_{L^{q,r}} \leq \|Tf\|^*_{L^{q,r}} \leq B'\|f\|^*_{L^{p,r}} \leq B'\|f\|_{L^{p,r}},$$

portanto, concluímos que

$$\|Tf\|_{L^{q,r}} \leq B\|f\|_{L^{p,r}}.$$

A prova do caso em que $r = \infty$ é análoga. ■

2.4 A Transformada de Riesz em $L^{p,q}$

O objetivo desta seção é definir a transformada de Riesz e mostrar sua continuidade no espaço de Lorentz $L^{p,q}$, em particular no espaço L^p-fraco.

Antes de definirmos a transformada de Riesz, precisaremos introduzir o espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções infinitamente deriváveis em $\mathbb{R}^n$ e de decrescimento rápido no infinito:

Definição 2.4.1 *O espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto de todas as funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, tais que a semi-norma*

$$\|f\|_{k,\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^l)|\partial^\alpha f(x)|$$

é finita, para qualquer inteiro não negativo l e qualquer multi-índice α.

Definição 2.4.2 *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A k-transformada de Riesz, denotada por R_k, $k = 1, \ldots, n$, é definida de seguinte forma:*

$$\widehat{R_k f}(\xi) = i\frac{\xi_k}{|\xi|}\hat{f}(\xi),$$

em que $\hat{f}$ é a transformada de Fourier de f, definida por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x\cdot\xi)} f(x)\,dx.$$

Uma vez que a transformada inversa de Fourier de uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x\cdot\xi)} f(\xi)\,d\xi,$$

usando algumas propriedades básicas, podemos reescrever a k-transformada de Riesz por

$$R_k f(x) = \left[(\widehat{R_k f})(\xi)\right]^\vee = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} f(x)\right),$$

em que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ é o operador de Laplace.

A proposição a seguir será importante para obtermos a continuidade da k-transformada de Riesz nos espaços de Lorentz. Por ser um resultado clássico, omiteremos sua demonstração que pode ser encontrada em [12].

Proposição 2.4.1 *A k-transformada de Riesz , $R_k = \partial_k(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, $k = 1, \ldots, n$, é contínua em L^p, em que $1 < p < \infty$.*

Proposição 2.4.2 *A k-transformada de Riesz , $R_k = \partial_k(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}$, $k = 1, \ldots, n$, é contínua em $L^{p,\infty}$, em que $1 < p < \infty$.*

Demonstração: Sejam $1 < p_0 < p_1 < \infty$, satisfazendo $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, com $\theta \in (0,1)$.

Pela proposição anterior, R_k é contínua em L^{p_i}, com $i = 0, 1$. Ou seja, existe um constante $C > 0$, tal que

$$\|R_k f\|_{L^{p_i}} \leq C\|f\|_{L^{p_i}}.$$

Pelo Lema de Calderón 2.1.3, tem- se $\|f\|_{L^{p_i}} = \|f\|_{L^{p_i,p_i}} \leq \left(\frac{1}{p_i}\right)^{1-\frac{1}{p_i}} \|f\|_{L^{p_i,1}}$. Logo,

$$\|R_k f\|_{L^{p_i}} \leq C'\|f\|_{L^{p_i,1}},$$

ou seja, R_k é do tipo fraco (p_i, p_i), com $i = 0, 1$.

Portanto, pelo Teorema de Interpolação 2.3.3, segue que

$$\|R_k f\|_{L^{p,r}} \leq B\|f\|_{L^{p,r}},$$

onde $1 \leq r \leq \infty$. Tomando $r = \infty$, completamos a demonstração. ∎

Capítulo 3

Boa-colocação nos espaços $L^{p,\infty}$

Neste capítulo apresentaremos resultados de existência e unicidade de soluções da $2DQG$ em $L^{p,\infty}$.

3.1 Equação quase-geostrófica

Neste trabalho, trataremos de um modelo simplificado para equações de Navier-Stokes, em dimensão dois, a chamada equação quase-geostrófica dissipativa, modelada por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial t} + u\cdot\nabla\theta + \kappa(-\Delta)^{\gamma}\theta = 0 & , \quad x\in\mathbb{R}^2,\ t>0 \\ \theta(x,0)=\theta_0 & , \quad x\in\mathbb{R}^2 \end{cases}, \tag{3.1}$$

em que $\gamma\in(0,1]$ e $\kappa>0$.

As funções $\theta(t,x)$ e $u(t,x)$ representam, respectivamente, a temperatura pontecial e o campo de velocidade no instante $t>0$ e na posição $x\in\mathbb{R}^2$. Além disso, $u=(u_1,u_2)$ tem divergente nulo ($\nabla\cdot u=0$) e é determinado pela temperatura θ através da função corrente ψ,

$$u=\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x_2},\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)=(-R_2\theta,R_1\theta), \tag{3.2}$$

em que a função ψ é dada por

$$\psi=(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\theta$$

e R_k é a k-transformada de Riesz (ver seção 2.4). O operador $(-\Delta)^{\tau}$ é definido de maneira usual atráves da transformada de Fourier

$$\big(\widehat{(-\Delta)^{\tau}f}\big)(\xi)=|\xi|^{2\tau}\hat{f}(\xi).$$

Denotaremos o operador que acopla a velocidade com a temperatura por $R\theta = u$.

Por simplicidade, neste trabalho vamos tomar $\kappa = 1$ e considerar apenas o caso em que

$$\frac{1}{2} < \gamma < 1.$$

3.2 Espaços funcionais

Agora, vamos introduzir espaços funcionais adequados para analisar o problema de Cauchy para o sistema (3.1)-(3.2).

Definição 3.2.1 *Sejam* $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ *e* $1 \leq q < \infty$. *Definimos por* E *o espaço de todas funções* $\theta(t,x)$, *com* $t > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}^2$, *tal que*

$$\theta(t,x) \in BC\big((0,\infty), L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}\big)$$

e a norma em E *é dada por*

$$\|\theta\|_E = \sup_{t>0} \|\theta(t)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}.$$

Definimos também por E_q *o espaço de todas funções* $\theta(t,x)$, *com* $t > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}^2$, *tal que*

$$\begin{aligned} &\theta(t,x) \in BC\big((0,\infty), L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}\big) \\ &t^{\frac{\alpha}{2}}\theta(t,x) \in BC\big((0,\infty), L^{q,\infty}\big), \end{aligned}$$

onde $\alpha = 2 - \frac{1}{\gamma} - \frac{2}{\gamma q}$. *A norma em* E_q *é definida por*

$$\|\theta\|_{E_q} = \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} + \sup_{t>0} \|\theta(t)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}.$$

Denotamos por $BC\big((0,\infty), X\big)$ *o espaço de todas funções contínuas e limitadas definidas em* $(0,\infty)$ *e com valores em um espaço de Banach* X.

Observação 3.2.1 *Vimos no capítulo* 2, *que os espaços de Lorentz* $L^{p,q}$ *são espaços de Banach (Teorema* 2.1.1*), logo concluímos que os espaços* E *e* E_q *com as respectivas normas definidas acima* $\|\cdot\|_E$ *e* $\|\cdot\|_{E_q}$ *também são espaços de Banach.*

Observação 3.2.2 *Através de uma análise de escala, é possível mostrar que se* $\theta(t,x)$ *é uma solução suave do sistema* (3.1)-(3.2), *então*

$$\theta_\lambda(t,x) = \lambda^{2\gamma-1}\theta(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x) \tag{3.3}$$

também será solução de (3.1)-(3.2).

Uma pergunta natural é saber quando $\theta(t,x) = \theta_\lambda(t,x)$, para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda > 0$. Embora não sejam tratadas nesse trabalho, soluções com essa propriedade são importantes e são conhecidas como soluções auto-similares. *Formalmente, se fizermos $t \to 0^+$ em (3.3) devemos esperar que $\theta(0,x)$ seja uma função homogênea de grau $-(2\gamma-1)$.*

Isso nos fornece um candidato a espaço adequado para se encontrar soluções auto-similares. Tal candidato deve conter funções homogêneas de grau $-(2\gamma-1)$.

O expoente $r = \dfrac{2}{2\gamma-1}$ do espaço de Lorentz $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$ que aparecerá em nosso Teorema de existência é o único tal que $\dfrac{1}{|x|^{2\gamma-1}} \in L^{r,\infty}$.

Observação 3.2.3 *Vale ainda ressaltar que os índices $\sigma = \dfrac{\alpha}{2}$ e $\beta = 0$ em*

$$\|\theta\|_{E_q} = \sup_{t>0} t^{\sigma}\|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} + \sup_{t>0} t^{\beta}\|\theta(t)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}$$

são escolhidos de forma a tornar $\|\cdot\|_{E_q}$ invariante pelo scaling (ou relação de escala)

$$\theta(t,x) \to \theta_\lambda(t,x) = \lambda^{2\gamma-1}\theta(\lambda^{2\gamma}t, \lambda x),$$

isto é, de forma que $\|\theta\|_{E_q} = \|\theta_\lambda\|_{E_q}$, para todo $\lambda > 0$.

De fato, note que

$$\begin{aligned} \|\theta_\lambda(t,x)\|_{E_q} &= \sup_{t>0} t^{\sigma}\lambda^{2\gamma-1}\|\theta(\lambda^{2\gamma}t,\lambda x)\|_{L^{q,\infty}} + \sup_{t>0} t^{\beta}\lambda^{2\gamma-1}\|\theta(\lambda^{2\gamma}t,\lambda x)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \\ &= \sup_{s>0} \lambda^{2\gamma-1}\left(\frac{s}{\lambda^{2\gamma}}\right)^{\sigma}\|\theta(s,\lambda x)\|_{L^{q,\infty}} + \sup_{s>0} \lambda^{2\gamma-1}\left(\frac{s}{\lambda^{2\gamma}}\right)^{\beta}\|\theta(s,\lambda x)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \\ &= \sup_{s>0} \lambda^{2\gamma-1-2\gamma\sigma}s^{\sigma}\|\theta(s,\lambda x)\|_{L^{q,\infty}} + \sup_{s>0} \lambda^{2\gamma-1-2\gamma\beta}s^{\beta}\|\theta(s,\lambda x)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Por outro lado, lembrando a relação de escala dos espaços de Lorentz (2.1), temos

$$\|\theta(s,\lambda x)\|_{L^{q,\infty}} = \lambda^{-\frac{2}{q}}\|\theta(s,x)\|_{L^{q,\infty}} \text{ e } \|\theta(s,\lambda x)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} = \lambda^{-(2\gamma-1)}\|\theta(s,x)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}. \quad (3.5)$$

Assim, usando (3.4) e (3.5), segue que

$$\|\theta_\lambda(t,x)\|_{E_q} = \sup_{s>0} \lambda^{2\gamma-1-2\gamma\sigma-\frac{2}{q}}s^{\sigma}\|\theta(s,x)\|_{L^{q,\infty}} + \sup_{s>0} \lambda^{2\gamma-1-2\gamma\beta-(2\gamma-1)}s^{\beta}\|\theta(s,x)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}.$$

Para que valha $\|\theta_\lambda(t,x)\|_{E_q} = \|\theta(t,x)\|_{E_q}$, é necessário e suficiente que $2\gamma-1-2\gamma\sigma-\dfrac{2}{q} = 0$ e $2\gamma-1-2\gamma\beta-(2\gamma-1) = 0$, ou seja, $\sigma = 1 - \dfrac{1}{2\gamma} - \dfrac{1}{\gamma q} = \dfrac{\alpha}{2}$ e $\beta = 0$.

3.3 Boa Colocação nos Espaços $L^{p,\infty}$

O objetivo desta seção é apresentar os resultados de existência e unicidade de solução no espaço L^p-fraco. A solução com a qual iremos trabalhar será a solução *branda* que será formalizada nesta seção.

Primeiramente, para cada $t > 0$ fixo, denotaremos por $g_\gamma(t,x)$ a função dada por

$$g_\gamma(t,x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2\pi i(x\cdot\xi)} e^{-t|\xi|^{2\gamma}}\, d\xi,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Observe que

$$\hat{g}_\gamma(t,\xi) = e^{-t|\xi|^{2\gamma}}$$

e g_γ é solução da equação linear

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + (-\Delta)^\gamma \phi = 0,$$

pois aplicando-se a transformada de Fourier nessa equação, obtemos

$$\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t} + |\xi|^{2\gamma}\hat{\phi} = 0,$$

a qual é satisfeita por $\hat{g}_\gamma$.

Denotaremos por $G_\gamma(t)$ e $\nabla_x G_\gamma(t)$ os operadores de convolução cujos núcleos são, respectivamente, $g_\gamma(t,x)$ e $\nabla_x g_\gamma(t,x)$.

A seguir apresentaremos um resultado de homogeneidade de g_γ, que será útil neste trabalho.

Lema 3.3.1 *Para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $t > 0$, tem-se*

$$g_\gamma(t,x) = t^{-\frac{2}{2\gamma}}\, g_\gamma(1, xt^{-\frac{1}{2\gamma}}), \tag{3.6}$$

$$(\nabla_x g_\gamma)(t,x) = t^{-\frac{3}{2\gamma}}\, (\nabla_x g_\gamma)(1, xt^{-\frac{1}{2\gamma}}). \tag{3.7}$$

Demonstração: Dado $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $k > 0$, tem-se

$$\hat{f}_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(\xi\cdot x)} f_k(\xi)\, d\xi,$$

onde $f_k(x) = f(kx)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Fazendo a mudança de variávies $u = k\xi$, segue que

$$\hat{f}_k(x) = k^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\left(\frac{u}{k}\cdot x\right)} f(u)\, du$$

$$\begin{aligned} &= k^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\left(u\cdot\frac{x}{k}\right)} f(u)\,du \\ &= k^{-n}\hat{f}\left(\frac{x}{k}\right). \end{aligned}$$

Assim, para $k = t^{-\frac{1}{2\gamma}}$ e $n = 2$, tem-se

$$\begin{aligned} t^{-\frac{2}{2\gamma}}(g_\gamma(\widehat{1, xt^{-\frac{1}{2\gamma}}})) &= (\widehat{g_\gamma(1,x)})(t^{\frac{1}{2\gamma}}\xi) \\ &= e^{-|t^{\frac{1}{2\gamma}}\xi|^{2\gamma}} \\ &= e^{-t|\xi|^{2\gamma}} \\ &= \widehat{g_\gamma}(t,x). \end{aligned}$$

Portanto, aplicando a transformada inversa de Fourier na equação acima obtemos (3.6).

A identidade (3.7) segue imediatamente da primeira usando a regra da cadeia ■

Agora vamos formalizar a noção de solução que será utilizada neste trabalho, ver [4].

Definição 3.3.1 *Seja $\theta = \theta(t,x)$ uma função em E (respectivamente E_q). Chamamos θ de solução branda global do sistema* (3.1)-(3.2) *em E (respectivamente E_q), se a seguinte identidade for satisfeita*

$$\theta(t) = G_\gamma(t)\theta_0 - \int_0^t \nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\theta)(s)\,ds, \tag{3.8}$$

em que $\nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\phi) = -\dfrac{\partial g_\gamma}{\partial x_1} * (\theta R_2\phi) + \dfrac{\partial g_\gamma}{\partial x_2} * (\theta R_1\phi)$ *e, se*

$$\theta(t) \rightharpoonup \theta_0, \text{ quando } t \to 0^+,$$

em que o limite tomado é definido na topologia fraca$-*$ de $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$.

Com intuito de tornar mais simples a expressão (3.8), a parte não linear será denotada por:

$$B(\theta,\phi)(t) = \int_0^t \nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\phi)(s)\,ds. \tag{3.9}$$

Assim, (3.8) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\theta(t) = G_\gamma(t)\theta_0 - B(\theta,\theta)(t). \tag{3.10}$$

Os resultados a seguir são os principais resultados tratados neste trabalho. O primeiro garante a existência e unicidade da solução branda global no espaço E e o segundo a regularidade da solução obtida no primeiro resultado.

Teorema 3.3.1 *(Existência e unicidade) Sejam* $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ *e* $\theta_0 \in L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$. *Existem* $\epsilon > 0$ *e* $C = C(\gamma) > 0$ *tal que, se* $\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} < \epsilon$, *então o problema de valor inicial para o sistema* (3.1)-(3.2) *tem uma solução branda global* $\theta(t,x) \in E$, *satisfazendo* $\|\theta\|_E \leq 2C\epsilon$. *Mais ainda, a solução é única na bola* $\bar{B}(0, 2C\epsilon)$.

Teorema 3.3.2 *(Regularização) Sejam* $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ *e* $\theta_0 \in L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$. *Seja* ϵ *como obtido no Teorema* 3.3.1. *Para qualquer* $\frac{2}{2\gamma-1} < q < \infty$, *existem* $C = C(\gamma, q) > 0$ *e* $0 < \epsilon_q < \epsilon$ *tal que, se* $\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} < \epsilon_q$, *então a solução obtida no Teorema* 3.3.1 $\theta(t,x) \in E_q$ *e* $\|\theta\|_{E_q} \leq 2C\epsilon_q$.

Antes de demonstrarmos os Teoremas 3.3.1 e 3.3.2, provaremos diversos resultados que servirão de ferramentas na demostração dos teoremas. Começaremos com um lema abstrato, cuja demonstração é uma aplicação do Teorema do ponto fixo de Banach para contrações.

Lema 3.3.2 *(Lema Abstrato) Sejam* X *um espaço de Banach como norma* $\|\cdot\|_X$ *e* $B : X \times X \to X$ *uma aplicação bilinear contínua, ou seja, existe uma constante* $K > 0$, *tal que*

$$\|B(x_1, x_2)\|_X \leq K\|x_1\|_X \|x_2\|_X,$$

para todo $x_1, x_2 \in X$.

Dado $0 < \epsilon < \frac{1}{4K}$ *e* $y \in X$, $y \neq 0$, *tal que se* $\|y\|_X \leq \epsilon$, *então existe uma solução* $x \in X$ *para a equação* $x = y + B(x,x)$, *tal que* $\|x\|_X \leq 2\epsilon$. *A solução é única na bola* $\bar{B}(0, 2\epsilon)$. *Além disso, a solução depende continuamente de* y *no seguinte sentido: Se* $\|\tilde{y}\|_X \leq \epsilon$, $\tilde{x} = \tilde{y} + B(\tilde{x}, \tilde{x})$ *e* $\|\tilde{x}\|_X \leq 2\epsilon$, *então*

$$\|x - \tilde{x}\|_X \leq \frac{1}{1 - 4K\epsilon}\|y - \tilde{y}\|_X. \tag{3.11}$$

Demonstração: Considere a seguinte aplicação $F : X \to X$ definida por $F(x) = y + B(x,x)$. Denote por $B_{2\epsilon}$, a bola fechada de centro na origem e raio 2ϵ no espaço X.

Primeiramente, mostremos que $F(B_{2\epsilon}) \subset B_{2\epsilon}$. De fato, se $x \in B_{2\epsilon}$, então

$$\begin{aligned}
\|F(x)\|_X &\leq \|y\|_X + \|B(x,x)\|_X \\
&\leq \|y\|_X + K\|x\|_X^2 \\
&\leq \epsilon + K(2\epsilon)^2 \\
&= \epsilon(1 + 4K\epsilon) \\
&< 2\epsilon,
\end{aligned}$$

pois $0 < \epsilon < \frac{1}{4K}$.

Agora, se $x, z \in B_{2\epsilon}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(z)\|_X &= \|B(x,x) - B(z,z)\|_X \\
&= \|B(x-z,x) + B(z,x-z)\|_X \\
&\le \|B(x-z,x)\|_X + \|B(z,x-z)\|_X \\
&\le K\|x-z\|_X\|x\|_X + K\|z\|_X\|x-z\|_X \\
&\le 4\epsilon K\|x-z\|_X.
\end{aligned}$$

Como $0 < 4\epsilon K < 1$, segue que F é uma contração em $B_{2\epsilon}$. Então, pelo Teorema do ponto fixo de Banach, existe um único $x \in B_{2\epsilon}$, tal que $x = y + B(x,x)$.

Para demonstrar a continuidade do operador solução em relação ao parâmetro y, considere x e $\tilde{x}$ como no enunciado do teorema. Segue então que

$$\begin{aligned}
\|x - \tilde{x}\|_X &= \|y + B(x,x) - (\tilde{y} + B(\tilde{x},\tilde{x}))\|_X \\
&\le \|y - \tilde{y}\|_X + \|B(x,x) - B(\tilde{x},\tilde{x})\|_X \\
&= \|y - \tilde{y}\|_X + \|B(x-\tilde{x},x) - B(\tilde{x},x-\tilde{x})\|_X \\
&\le \|y - \tilde{y}\|_X + \|B(x-\tilde{x},x)\|_X + \|B(\tilde{x},x-\tilde{x})\|_X \\
&\le \|y - \tilde{y}\|_X + 4\epsilon K\|x-\tilde{x}\|_X,
\end{aligned}$$

que é equivalente a (3.11), desde que $4\epsilon K < 1$. ■

Segue como consequência do Lema 3.3.2, que para provar o Teorema 3.3.1, precisamos mostrar que a parte não linear da equação (3.10) é contínua de $E \times E$ em E e que a norma da parte linear em E pode ser controlada pela norma do dado inicial $\theta_0 \in L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$. Este será o objetivo das duas próximas seções.

3.4 Estimativa do Termo Não Linear

A fim de provar a continuidade do termo não linear (3.9), apresentaremos dois lemas técnicos que nos auxiliarão nesta tarefa.

Primeiramente, considere $1 < r < \infty$ e $\chi : (0,\infty) \to L^{r,\infty}$, tal que, exista uma constante $C = C(\gamma, r)$ que satisfaça, para todo $t > 0$, a seguinte condição:

$$\|\chi(t)\|_{L^{r,\infty}} \le Ct^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma r}}. \tag{3.12}$$

Além disso, para toda função $f : (0,\infty) \to X$, em que X é um espaço de Banach, definimos o operador linear $f \mapsto \mathcal{C}_\chi(f)$ dado por:

$$\mathcal{C}_\chi(f)(x) = \int_0^\infty \chi(s) * f(s)\, ds. \tag{3.13}$$

Sob as condições acima (para $\chi(t,x)$), os dois resultados a seguir mostram que o operador linear $\mathcal{C}_\chi$ é bem definido em certos espaços de Lorentz.

Lema 3.4.1 *Sejam $1 < p < q < \infty$ e $\gamma > 0$. Então, para toda $\phi \in L^{p,1}$, tem-se*

$$s^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{q}+1\right)}\|\chi(s)*\phi\|_{L^{q,1}} \leq C\|\phi\|_{L^{p,1}} \tag{3.14}$$

e

$$\int_0^\infty s^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{q}-(2\gamma-1)\right)}\|\chi(s)*\phi\|_{L^{q,1}}\, ds \leq C\|\phi\|_{L^{p,1}}. \tag{3.15}$$

Demonstração: Primeiramente, seja r um número real tal que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p} - 1$. Assim, a desigualdade (3.14) é obtida diretamente, usando desigualdade de Young generalizada (Proposição 2.2.1) e a propriedade (3.12). De fato,

$$\begin{aligned}
s^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{q}+1\right)}\|\chi(s)*\phi\|_{L^{q,1}} &\leq s^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{q}+1\right)}C(r)\|\chi(s)\|_{L^{r,\infty}}\|\phi\|_{L^{p,1}}\\
&\leq s^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{q}+1\right)}C(r)s^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma r}}\|\phi\|_{L^{p,1}}\\
&= C\|\phi\|_{L^{p,1}},
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{q}+1\right)-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma r} &= \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{q}+1\right)-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}+1\right)\\
&= \frac{1}{2\gamma}-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Agora, defina $g_\phi(t) = s^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{q}-(2\gamma-1)\right)}\|\chi(s)*\phi\|_{L^{q,1}}$ e considere $p_1 < p < p_2 < q$, tal que $\dfrac{2}{p} - \dfrac{2}{p_2} < 2\gamma$. Assim, usando (3.14) com $1 < p_k < q < \infty$, tem-se

$$\begin{aligned}
g_\phi(t) &= s^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{q}-(2\gamma-1)\right)}\|\chi(s)*\phi\|_{L^{q,1}}\\
&= s^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p_k}-\frac{2}{q}+1\right)+\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{p_k}-2\gamma\right)}\|\chi(s)*\phi\|_{L^{q,1}}\\
&\leq C\, s^{\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{p_k}-2\gamma\right)}\|\phi\|_{L^{p_k,1}},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

para $k = 1, 2$. Agora, defina $\dfrac{1}{l_k} = \dfrac{1}{2\gamma}\left(\dfrac{2}{p_k} - \dfrac{2}{p} + 2\gamma\right)$, onde $0 < l_1 < 1 < l_2$ e $h_k(t) = \tilde{C}t^{-\frac{1}{l_k}}$, onde $\tilde{C} = C\|\phi\|_{L^{p_k,1}}$. Assim, usando a desigualdade (3.16) e o item (3), da Proposição 1.6.1, tem-se $g_\phi^{**} \leq h_k^{**}$. Consequentemente,

$$\|g_\phi\|_{L^{l_k,\infty}(0,\infty)} \leq \|h_k\|_{L^{l_k,\infty}(0,\infty)}, \tag{3.17}$$

para $k = 1, 2$.

Agora, vamos estimar a norma $L^{l_k,\infty}$ de h_k. Para isso, primeiramente observe que

$$\begin{aligned} \lambda_{h_k}(s) &= m\left(\left\{t \in (0,\infty) : \tilde{C}t^{-\frac{1}{l_k}} > s\right\}\right) \\ &= m\left(\left\{t \in (0,\infty) : \left(\tilde{C}s^{-1}\right)^{l_k} > t\right\}\right) \\ &= \left(\tilde{C}s^{-1}\right)^{l_k}, \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} h_k^*(t) &= \inf\left\{s > 0 : \lambda_{h_k}(s) \leq t\right\} \\ &= \inf\left\{s > 0 : \left(\tilde{C}s^{-1}\right)^{l_k} \leq t\right\} \\ &= \inf\left\{s > 0 : \tilde{C}t^{-\frac{1}{l_k}} \leq s\right\} \\ &= \tilde{C}t^{-\frac{1}{l_k}}. \end{aligned}$$

Logo, para $k = 1, 2$, tem-se

$$\|h_k\|^*_{L^{l_k,\infty}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{l_k}}\tilde{C}t^{-\frac{1}{l_k}} = \tilde{C}.$$

Finalmente, usando a Proposição 2.1.1, conclui-se que

$$\|h_k\|_{L^{l_k,\infty}} \leq l_k'\|h_k\|^*_{L^{l_k,\infty}} = l_k'\tilde{C} = \overline{C}\|\phi\|_{L^{p_k,1}}, \tag{3.18}$$

onde $\overline{C} = l_k'C$ e $l_k' = \dfrac{l_k}{l_k - 1}$. Portanto, por (3.17) e (3.18) segue que $g_\phi \in L^{l_k,\infty}(0,\infty)$ e

$$\|g_\phi\|_{L^{l_k,\infty}} \leq \overline{C}\|\phi\|_{L^{p_k,1}}.$$

Assim, as aplicações

$$\begin{aligned} T_k : \quad L^{p_k,1}(\mathbb{R}^2) &\rightarrow L^{l_k,\infty}(0,\infty) \\ \phi &\mapsto g_\phi \end{aligned}$$

$k = 1, 2$ são contínuas e sublineares.

Tome $\theta \in (0,1)$, tal que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_1} + \dfrac{1-\theta}{p_2}$ e observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{l_1} + \frac{1-\theta}{l_2} &= \frac{\theta}{2\gamma}\left(\frac{2}{p_1} - \frac{2}{p} + 2\gamma\right) + \frac{1-\theta}{2\gamma}\left(\frac{2}{p_2} - \frac{2}{p} + 2\gamma\right) \\
&= \frac{\theta}{\gamma p_1} + \frac{1-\theta}{\gamma p_2} - \frac{1}{\gamma p} + 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Interpolação 2.3.1, tem-se

$$(L^{p_1,1}(\mathbb{R}^2), L^{p_2,1}(\mathbb{R}^2))_{\theta,1} = L^{p,1}(\mathbb{R}^2) \quad \text{e} \quad (L^{l_1,\infty}(0,\infty), L^{l_2,\infty}(0,\infty))_{\theta,1} = L^1(0,\infty).$$

Portanto, da Observação 2.3.1, segue que aplicação

$$\begin{aligned}
L^{p,1}(\mathbb{R}^2) &\to L^1(0,\infty) \\
\phi &\mapsto g_\phi
\end{aligned}$$

é contínua, ou seja,

$$\|g_\phi\|_{L^1(0,\infty)} \leq C\|\phi\|_{L^{p,1}(\mathbb{R}^2)},$$

e assim concluímos a prova. ■

Lema 3.4.2 *Seja* $\dfrac{1}{2} < \gamma < 1$. *Se* $f \in L^\infty\big([0,\infty), L^{\frac{2}{2(2\gamma-1)},\infty}(\mathbb{R}^2)\big)$, *então*

$$\|\mathcal{C}_\chi(f)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1}},\infty} \leq K \sup_{t>0} \|f(t)\|_{L^{\frac{2}{2(2\gamma-1)},\infty}}. \tag{3.19}$$

Demonstração: Primeiramente, observe que o conjugado de $\alpha = \dfrac{2}{2-(2\gamma-1)}$ é $\alpha' = \dfrac{2}{2\gamma-1}$ e que $\dfrac{2}{2-2(2\gamma-1)} > \dfrac{2}{2-(2\gamma-1)}$. Como $\dfrac{1}{2} < \gamma < 1$, segue que $2-2(2\gamma-1) > 0$. Assim, usando a Proposição 2.1.3, a desigualdade de Hölder generalizada (Proposição 2.2.3) e a desigualdade (3.15), com $p = \alpha$ e $q = \dfrac{2}{2-2(2\gamma-1)}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}_\chi(f)\|_{L^{\alpha',\infty}} &= \sup_{\|\phi\|_{L^{\alpha,1}}=1} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{C}_\chi(f)\phi(x)\,dx\right| \\
&= \sup_{\|\phi\|_{L^{\alpha,1}}=1} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_0^\infty \big[\chi(s) * f(s)\big](x)\,ds\right)\phi(x)\,dx\right| \\
&= \sup_{\|\phi\|_{L^{\alpha,1}}=1} \left|\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \big[\chi(s) * f(s)\big](x)\phi(x)\,dx\,ds\right| \\
&= \sup_{\|\phi\|_{L^{\alpha,1}}=1} \left|\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \chi(s,x-y)f(s,y)\phi(x)\,dy\,dx\,ds\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|\phi\|_{L^{\alpha,1}}=1} \left| \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\chi}(s,y-x)\phi(x) f(s,y)\, dx\, dy\, ds \right|, \text{ onde } \tilde{\chi}(s,x) = \chi(s,-x) \\
&= \sup_{\|\phi\|_{L^{\alpha,1}}=1} \left| \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \big[\tilde{\chi}(s) * \phi\big](y) f(s,y)\, dy\, ds \right| \\
&\leq \sup_{\|\phi\|_{L^{\alpha,1}}=1} \int_0^\infty \|f(s)\|_{L^{\frac{2}{2(2\gamma-1)},\infty}} \|\tilde{\chi}(s) * \phi\|_{L^{\frac{2}{2-2(2\gamma-1)},1}}\, ds \\
&\leq C \sup_{t>0} \|f(t)\|_{L^{\frac{2}{2(2\gamma-1)},\infty}} \sup_{\|\phi\|_{L^{\alpha,1}}=1} \|\phi\|_{L^{\alpha,1}} \\
&= C \sup_{t>0} \|f(t)\|_{L^{\frac{2}{2(2\gamma-1)},\infty}},
\end{aligned}
$$

onde usamos o Teorema de Fubini na terceira e na quinta igualdade. É fácil verificar que $\tilde{\chi}$ também satisfaz (3.12).

■

Observação 3.4.1 *O operador bilinear $B(\theta,\phi)$ é contínuo no espaço funcional E. De fato, considere*

$$
f(s,\cdot) = \begin{cases} (\theta R\phi)(t-s,\cdot) & , \ se\ 0 \leq s \leq t \\ 0 & , \ se\ t < s \end{cases}
$$

e

$$
\chi(t,x) = \nabla_x g_\gamma(t,x).
$$

Vale ressaltar que $\nabla_x g_\gamma(t,x)$ satisfaz a condição (3.12). *De fato, pelas propriedades de homogeneidade de $g_\gamma(x,t)$* (3.7) *e pela Observação* 2.1.4, *tem-se*

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_x g_\gamma(t,x)\|_{L^{r,\infty}} &= \|t^{-\frac{3}{2\gamma}} (\nabla_x g_\gamma)(1, x t^{-\frac{1}{2\gamma}})\|_{L^{r,\infty}} \\
&= t^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma r}} \|\nabla_x g_\gamma(1,x)\|_{L^{r,\infty}} \\
&= C(\gamma,r) t^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma r}}.
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Logo, com a notações definidas acima, segue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_\chi(f) &= \int_0^\infty \big(\chi(s) * f(s)\big)(x)\, ds \\
&= \int_0^\infty \big(\nabla_x g_\gamma(s) * f(s)\big)(x)\, ds \\
&= \int_0^\infty \nabla_x G_\gamma(s,x) f(s,x)\, ds \\
&= \int_0^t \nabla_x G_\gamma(s,x)(\theta R\phi)(t-s,x)\, ds.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = t - s$, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\chi(f) &= -\int_t^0 \nabla_x G_\gamma(t-u,x)(\theta R\phi)(u,x)\,du \\
&= \int_0^t \nabla_x G_\gamma(t-u,x)(\theta R\phi)(u,x)\,du \\
&= B(\theta,\phi).
\end{aligned}$$

Portanto, usando o Lema 3.4.2, a desigualdade de Hölder generalizada (Proposição 2.2.3) e a continuidade da transformada de Riesz em $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$ (Proposição 2.4.2), concluímos que existe uma constante $K = K(\gamma) > 0$, tal que

$$\begin{aligned}
\|B(\theta,\phi)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} &\leq K \sup_{t>0} \|f(t)\|_{L^{\frac{2}{2(2\gamma-1)},\infty}} \\
&\leq K \sup_{t>0} \|\theta(t)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \sup_{t>0} \|(R\phi)(t)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \\
&\leq K \sup_{t>0} \|\theta(t)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \sup_{t>0} \|\phi(t)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \\
&= K\,\|\theta\|_E \|\phi\|_E. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|B(\theta,\phi)\|_E = \sup_{t>0} \|B(\theta,\phi)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \leq K\,\|\theta\|_E\|\phi\|_E,$$

ou seja, o operador bilinear $B : E \times E \to E$ é contínuo como queríamos.

O próximo resultado será útil para mostrar que a solução do Teorema 3.3.1 converge fraco-$*$ para o dado inicial θ_0, quando $t \to 0^+$, em $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$.

Lema 3.4.3 *Se $\theta(t,x) \in E$, então*

$$B\big(\theta(t),\theta(t)\big) \rightharpoonup 0 \text{ quando } t \to 0^+,$$

onde o limite é tomado na topologia fraca$-*$ de $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$.

Demonstração: Primeiramente, como citado na Observação 2.1.3, o conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em $L^{\frac{2}{2-(2\gamma-1)},1}$ (espaço dual de $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$). Pela hipótese $\theta(t,x) \in E$ e segue da desigualdade (3.21) que $\|B(\theta,\theta)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \leq K\,\|\theta\|_E^2$.

Assim, usando um argumento de densidade, é suficiente mostrar que dada $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, tem-se

$$\left|\left\langle B\big(\theta(t),\theta(t)\big),\varphi\right\rangle\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^t \nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\theta)(s)\varphi(x)\,ds\,dx\right| \to 0,$$

quando $t \to 0^+$.

Sendo assim, seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pelo Teorema de Fubini e pela desigualdade de Hölder generalizada (Proposição 2.2.3), tem-se

$$\begin{aligned} \left|\left\langle B\big(\theta(t),\theta(t)\big),\varphi\right\rangle\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2}\int_0^t \nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\theta)(s)\varphi(x)\,ds\,dx\right| \\ &= \left|\int_0^t \left\langle \nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\theta)(s),\varphi\right\rangle\,ds\right| \\ &\leq \int_0^t \|\nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\theta)(s)\varphi\|_{L^1}\,ds \\ &\leq \int_0^t \|\nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\theta)(s)\|_{L^{r',\infty}}\|\varphi\|_{L^{r,1}}\,ds. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Young generalizada (Proposição 2.2.1) e a desigualdade de Hölder generalizada (Proposição 2.2.3), com $\dfrac{1}{r'} = \dfrac{1}{l} + \dfrac{2(2\gamma-1)}{2} - 1$ e $\dfrac{2(2\gamma-1)}{2} = \dfrac{2\gamma-1}{2} + \dfrac{2\gamma-1}{2}$, a continuidade da transformada de Riesz em $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$ e a equação (3.20), obtém-se

$$\begin{aligned} \|\nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\theta)(s)\|_{L^{r',\infty}} &\leq C(\gamma,r)\,\|\nabla_x g_\gamma(t-s)\|_{L^{l,\infty}}\|(\theta R\theta)(s)\|_{L^{\frac{2}{2(2\gamma-1)},\infty}} \\ &\leq C(\gamma,r)\,\|\nabla_x g_\gamma(t-s)\|_{L^{l,\infty}}\|\theta(s)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}\|(R\theta)(s)\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \\ &\leq C(\gamma,r)\,\|\nabla_x g_\gamma(t-s)\|_{L^{l,\infty}}\|\theta(s)\|^2_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \\ &\leq C(\gamma,r)\,\|\nabla_x g_\gamma(t-s)\|_{L^{l,\infty}}\|\theta\|^2_E \\ &= \tilde{C}(\gamma,r)\,\|\theta\|^2_E\,(t-s)^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma l}} \\ &= \tilde{C}(\gamma,r)\,\|\theta\|^2_E\,(t-s)^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma r'}-2+\frac{2}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma}} \\ &= \tilde{C}(\gamma,r)\,\|\theta\|^2_E\,(t-s)^{\frac{1}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma r'}-2}. \end{aligned}$$

Assim, de (3.22) e da desigualdade acima, tem-se

$$\begin{aligned} \left|\left\langle B\big(\theta(t),\theta(t)\big),\varphi\right\rangle\right| &\leq \tilde{C}(\gamma,r)\,\|\theta\|^2_E\,\|\varphi\|_{L^{r,1}}\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma r'}-2}\,ds \\ &= \tilde{C}(\gamma,r)\,\|\theta\|^2_E\,\|\varphi\|_{L^{r,1}}\,t^{\frac{1}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma r'}-1}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Escolha $\dfrac{2}{2(2\gamma-1)} < r' < \dfrac{2}{2\gamma-1}$. Como $\dfrac{1}{2} < \gamma < 1$, segue que

$$\frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{\gamma r'} - 1 > \frac{1}{2\gamma} + \frac{2\gamma-1}{2\gamma} - 1 = 0.$$

Portanto, passando o limite quando $t \to 0^+$ em ambos os lados de (3.23), tem-se

$$\lim_{t\to 0^+}\left|\left\langle B\big(\theta(t),\theta(t)\big),\varphi\right\rangle\right| \leq \tilde{C}(\gamma,r)\,\|\theta\|^2_E\,\|\varphi\|_{L^{r,1}}\lim_{t\to 0^+} t^{\frac{1}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma r'}-1} = 0.$$

■

3.5 Estimativa do Termo Linear

O objetivo desta seção, é mostrar que a norma da parte linear de (3.8) pode ser controlada pela norma do dado inicial θ_0 no espaço $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$ e que a parte linear converge fraco-$*$ em $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$ para o dado inicial, quando $t \to 0^+$.

Lema 3.5.1 *Se $\theta_0 \in L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$, então existe $C = C(\gamma) > 0$, tal que*

$$\|G_\gamma(t)\theta_0\|_E \leq C\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}$$

e

$$G_\gamma(t)\theta_0 \rightharpoonup \theta_0 \text{ quando } t \to 0^+,$$

onde o limite é tomado na topologia fraca$-*$ de $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$.

Demonstração: Primeiramente, vamos estimar a norma L^1 de g_γ. Por (3.6) e pela Observação 2.1.4, segue que

$$\|g_\gamma(t)\|_{L^1} = \|t^{-\frac{2}{2\gamma}} g_\gamma(1, xt^{-\frac{1}{2\gamma}})\|_{L^1} = t^{-\frac{2}{2\gamma}+\frac{2}{2\gamma}}\|g_\gamma(1,x)\|_{L^1} = \tilde{C}(\gamma),$$

para todo $t > 0$. Assim, usando a Proposição 2.2.2, tem-se

$$\begin{aligned} \|G_\gamma(t)\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} &= \|g_\gamma(t) * \theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \\ &\leq \hat{C}\,\|g_\gamma(t)\|_{L^1}\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \\ &= C(\gamma)\,\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Logo,

$$\|G_\gamma(t)\theta_0\|_E = \sup_{t>0} \|G_\gamma(t)\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \leq C(\gamma)\,\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}.$$

Para provar a convergência fraca$-*$, note que $\left(\dfrac{2}{2\gamma-1}\right)' = \dfrac{2}{2-(2\gamma-1)}$. Lembremos que $f_n \rightharpoonup f$ (na topologia fraca$-*$ de $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$) é equivalente a convergência das integrais $\langle f_n, \phi\rangle \to \langle f, \phi\rangle$, para todo $\phi \in L^{\frac{2}{2-(2\gamma-1)},1}$.

Assim, fixando $\phi \in L^{\frac{2}{2-(2\gamma-1)},1}$, tem-se

$$\begin{aligned} |\langle G_\gamma\theta_0 - \theta_0, \phi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} G_\gamma(t,x)\theta_0(t,x)\phi(x) - \theta_0(t,x)\phi(x)\,dx\right| \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} \theta_0(t,x)\big[G_\gamma(t,x)\phi(x) - \phi(x)\big]\,dx\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^2} \big|\theta_0(t,x)\big[G_\gamma(t,x)\phi(x) - \phi(x)\big]\big|\; dx\\
&= \|\theta_0(t)\big(G_\gamma(t)\phi - \phi\big)\|_{L^1}\\
&\leq C\,\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}\|G_\gamma\phi - \phi\|_{L^{\frac{2}{2-(2\gamma-1)},1}}
\end{aligned}$$

Mostremos que $\|G_\gamma(t)\phi - \phi\|_{L^{\frac{2}{2-(2\gamma-1)},1}} \to 0$, quando $t \to 0^+$.

De fato, para todo $t > 0$, note que

$$g_\gamma(t,x) = t^{-\frac{1}{\gamma}} g_\gamma(1, xt^{-\frac{1}{2\gamma}}) = \frac{1}{\epsilon^2}\varphi\left(\frac{x}{\epsilon}\right),$$

onde $\epsilon = t^{\frac{1}{2\gamma}}$ e $\varphi(x) = g_\gamma(1,x)$.

Assim, para todo $\phi \in L^{\frac{2}{2-(2\gamma-1)},1}$, segue da Observação 2.1.3 que

$$\|g_\gamma(t,x) * \phi - \phi\|_{L^{\frac{2}{2-(2\gamma-1)},1}} = \|G_\gamma(t)\phi - \phi\|_{L^{\frac{2}{2-(2\gamma-1)},1}} \to 0,$$

quando $\epsilon \to 0$ (ou, equivalentemente $t \to 0^+$), pois $\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} g_\gamma(1,x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} g_\gamma(t,x)\, dx = \widehat{g_\gamma}(t,0) = 1.$

Portanto,

$$|\langle G_\gamma\theta_0 - \theta_0, \phi\rangle| \to 0,$$

quando $t \to 0^+$, ou seja, $G_\gamma\theta_0 \rightharpoonup \theta_0$ na topologia fraca$-*$. ■

3.6 Prova do Teorema de Existência e Unicidade 3.3.1

Nesta seção provaremos o Teorema 3.3.1 com auxílio dos resultados já apresentados.

Demonstração: (do Teorema de Existência e Unicidade 3.3.1**)**

Vimos na seção anterior que o operador bilinear $B : E \times E \to E$, dado por

$$B(\theta,\phi)(t) = \int_0^t \nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\phi)(s)\, ds,$$

satisfaz

$$\|B(\theta,\phi)\|_E \leq K\,\|\theta\|_E\|\phi\|_E.$$

Portanto, $B(\theta,\phi)$ é um operador bilinear contínuo.

Por hipótese, tem-se $\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} < \epsilon$. Assim, segue pelo Lema 3.5.1 que

$$\|G_\gamma(t)\theta_0\|_E \leq C\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} < C\epsilon. \tag{3.24}$$

Tomando $\epsilon > 0$, de forma que $4KC\epsilon < 1$, segue que

$$\|G_\gamma(t)\theta_0\|_E < C\epsilon = \tilde{\epsilon}, \text{ com } 4K\tilde{\epsilon} < 1.$$

Como E é um espaço de Banach, podemos aplicar o Lema 3.3.2 com $y = G_\gamma(t)\theta_0$ e $x = \theta$ e garantir que existe $\theta(t,x) \in E$, satisfazendo a equação (3.8) e $\|\theta\|_E < 2\tilde{\epsilon} = 2C\epsilon$. Além disso, a solução é única na bola $\bar{B}(0, 2C\epsilon)$.

Para concluir que θ é uma solução branda global em E, basta observar que pelos Lemas 3.4.3 e 3.5.1, tem-se

$$\theta(t) \rightharpoonup \theta_0,$$

quando $t \to 0^+$, na topologia fraca$-*$ do espaço $L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$. ■

Observação 3.6.1 *A dependência contínua com relação aos dados iniciais é uma consequência do Teorema* 3.3.1 *tendo em vista o Lema* 3.3.2.

3.7 Prova do Teorema de Regularização 3.3.2

Para provar o Teorema 3.3.2 usaremos novamente o Lema 3.3.2. Para isso, precisamos mostrar que o operador bilinear B é contínuo no espaço E_q e que a norma da parte linear em E_q pode ser controlada pela norma do dado inicial $\theta_0 \in L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$.

Relembremos que $\|\cdot\|_{E_q} = \sup\limits_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|\cdot\|_{L^{q,\infty}} + \|\cdot\|_E$ e que para a demonstração do Teorema 3.3.1 provamos a continuidade do operador bilinear em E. Logo, para provar o Teorema 3.3.2, é suficiente provar apenas a continuidade do operador bilinear na norma $\sup\limits_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|\cdot\|_{L^{q,\infty}}$ e, que a norma $\sup\limits_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|\cdot\|_{L^{q,\infty}}$ da parte linear pode ser controlada pela norma $\|\cdot\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}$ do dado inicial. Para isso, provaremos primeiramente a seguinte proposição, que será útil nesta seção.

Proposição 3.7.1 *A função beta, denotada por $\beta(x,y)$, e definida por*

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt, \tag{3.25}$$

em que $x, y > 0$, é sempre finita.

Demonstração: Tomando $0 < \lambda < 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
\beta(x,y) &= \int_0^\lambda t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt + \int_\lambda^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \\
&\leq \max(1,(1-\lambda)^{y-1})\int_0^\lambda t^{x-1}\,dt + \max(1,\lambda^{x-1})\int_\lambda^1 (1-t)^{y-1}\,dt \\
&= \max(1,(1-\lambda)^{y-1})\frac{\lambda^x}{x} + \max(1,\lambda^{x-1})\frac{(1-\lambda)^y}{y} < \infty.
\end{aligned}$$

■

Lema 3.7.1 *Sejam* $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, $\frac{2}{2\gamma - 1} < q < \infty$ *e* θ, $\phi \in E_q$, *então existe* $K_q = K(\gamma, q) > 0$, *tal que*

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(\theta,\phi)\|_{L^{q,\infty}} \leq K_q \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi(t)\|_{L^{q,\infty}}.$$

Demonstração: Sejam r e l satisfazendo

$$\frac{2}{2\gamma-1} \leq r \leq q, \ \frac{2}{2\gamma-1} \neq q \text{ e } \frac{1}{r} = \frac{1}{l} + \frac{2}{q} - 1.$$

Usando a desigualdade de Young generalizada (Proposição 2.2.1), tem-se

$$\begin{aligned} \|B(\theta,\phi)\|_{L^{r,\infty}} &= \left\| \int_0^t \nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\phi)(s)\, ds \right\|_{L^{r,\infty}} \\ &\leq \int_0^t \|\nabla_x G_\gamma(t-s)(\theta R\phi)(s)\|_{L^{r,\infty}}\, ds \\ &\leq \int_0^t \|\nabla_x g_\gamma(t-s)\|_{L^{l,\infty}} \|(\theta R\phi)(s)\|_{L^{\frac{q}{2},\infty}}\, ds. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Pela desigualdade de Hölder generalizada (Proposição 2.2.3) e pela continuidade da transformada de Riesz em $L^{q,\infty}$ (Proposição 2.4.2), segue que

$$\begin{aligned} \|(\theta R\phi)(s)\|_{L^{\frac{q}{2},\infty}} &\leq C(q)\, \|\theta(s)\|_{L^{q,\infty}} \|(R\phi)(s)\|_{L^{q,\infty}} \\ &\leq C(q)\, \|\theta(s)\|_{L^{q,\infty}} \|\phi(s)\|_{L^{q,\infty}}. \end{aligned}$$

Assim, de (3.26) e da desigualdade acima, juntamente com a equação (3.20), tem-se

$$\begin{aligned} \|B(\theta,\phi)\|_{L^{r,\infty}} &\leq C(\gamma,r,q) \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma l}} \|\theta(s)\|_{L^{q,\infty}} \|\phi(s)\|_{L^{q,\infty}}\, ds \\ &\leq C \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi(t)\|_{L^{q,\infty}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma l}} s^{-\alpha}\, ds. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Fazendo a mudança de variável $u = \frac{s}{t}$, segue que

$$\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma l}} s^{-\alpha}\, ds = t^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma l}-\alpha+1} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma l}} u^{-\alpha}\, du. \tag{3.28}$$

Logo, substituindo (3.28) em (3.27), conclui-se

$$\|B(\theta,\phi)\|_{L^{r,\infty}} \leq C\, t^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma l}-\alpha+1} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi(t)\|_{L^{q,\infty}} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{3}{2\gamma}+\frac{1}{\gamma l}} u^{-\alpha}\, du.$$

Lembremos que $\alpha = 2 - \dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{2}{\gamma q}$. Fazendo $r = q$, resulta que $\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{q} = 1$, então

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2\gamma} + \frac{1}{\gamma l} - \alpha + 1 &= -\frac{3}{2\gamma} + \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{1}{q}\right) - \alpha + 1 \\
&= -\frac{3}{2\gamma} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma q} - \alpha + 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{\gamma} - \frac{2}{\gamma q}\right) - \alpha \\
&= \frac{\alpha}{2} - \alpha = -\frac{\alpha}{2},
\end{aligned}$$

e

$$-\frac{3}{2\gamma} + \frac{1}{\gamma l} = \frac{\alpha}{2} - 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|B(\theta,\phi)\|_{L^{r,\infty}} &\le C\, t^{-\frac{\alpha}{2}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi(t)\|_{L^{q,\infty}} \int_0^1 (1-u)^{\frac{\alpha}{2}-1} u^{-\alpha}\, du \\
&= C\, t^{-\frac{\alpha}{2}}\, \beta\left(\frac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right) \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi(t)\|_{L^{q,\infty}} \\
&= K_q\, t^{-\frac{\alpha}{2}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi(t)\|_{L^{q,\infty}},
\end{aligned}$$

onde $\beta(\cdot,\cdot)$ é a função beta e $K_q = C\,\beta\left(\dfrac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right)$. Pela Proposição 3.7.1 segue que $\beta\left(\dfrac{\alpha}{2}, 1-\alpha\right) < \infty$, pois $0 < \alpha < 1$, quando $\dfrac{2}{2\gamma - 1} < q$.

Portanto,

$$\sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|B(\theta,\phi)\|_{L^{q,\infty}} \le K_q \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|\phi(t)\|_{L^{q,\infty}}.$$

∎

Lema 3.7.2 *Sejam* $\dfrac{1}{2} < \gamma < 1$, $\dfrac{2}{2\gamma - 1} < q < \infty$ *e* $\theta_0 \in L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}$, *então existe* $C = C(\gamma, q) > 0$, *tal que*

$$\|G_\gamma(t)\theta_0\|_{E_q} \le C(\gamma,q)\, \|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}.$$

Demonstração: Seja $l > 1$, satisfazendo $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{l} + \dfrac{2\gamma - 1}{2} - 1$. Pela desigualdade de Young generalizada (Proposição 2.2.1), tem-se

$$\|G_\gamma(t)\theta_0\|_{L^{q,\infty}} \le C\, \|g_\gamma(t)\|_{L^{l,\infty}} \|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}. \tag{3.29}$$

Por outro lado, pela equação (3.6) e pela Observação 2.1.4, segue que

$$\begin{aligned}
\|g_\gamma(t)\|_{L^{l,\infty}} &= t^{-\frac{1}{\gamma}}\|g_\gamma(1, xt^{-\frac{1}{2\gamma}})\|_{L^{l,\infty}} \\
&= t^{-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma l}}\|g_\gamma(1,x)\|_{L^{l,\infty}} \\
&= t^{-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{q}-\frac{2\gamma-1}{2}+1\right)}\|g_\gamma(1,x)\|_{L^{l,\infty}} \\
&= t^{-\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{\gamma}-\frac{2}{\gamma q}\right)}\|g_\gamma(1,x)\|_{L^{l,\infty}} \\
&= t^{-\frac{\alpha}{2}}\,\tilde{C}(\gamma,q).
\end{aligned}$$

Assim, de (3.29) e da equação acima, tem-se

$$\|G_\gamma(t)\theta_0\|_{L^{q,\infty}} \leq \tilde{C}(\gamma,q)\,t^{-\frac{\alpha}{2}}\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}}. \tag{3.30}$$

Portanto, usando o Lema 3.5.1 e a desigualdade acima, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\|G_\gamma(t)\theta_0\|_{E_q} &= \sup_{t>0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|G_\gamma(t)\theta_0\|_{L^{q,\infty}} + \|G_\gamma(t)\theta_0\|_{E} \\
&\leq \tilde{C}(\gamma,q)\,\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} + C(\gamma)\,\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}} \\
&\leq C(\gamma,q)\,\|\theta_0\|_{L^{\frac{2}{2\gamma-1},\infty}},
\end{aligned}$$

onde $C(\gamma,q)=\tilde{C}(\gamma,q)+C(\gamma)$. ■

Com os dois últimos resultados em mãos, a demonstração do Teorema de Regularização 3.3.2 segue diretamente da aplicação do Lema 3.3.2 no espaço E_q.

Referências Bibliográficas

[1] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, A Wiley Interscience Publication, John Wiley and Sons, New York, Inc., 1995.

[2] Bennett, C., Sharpley, R., *Interpolation of Operators*, Academic Press, Inc, London, 1988.

[3] Berg, J., Lofstrom, *Interpolation Spaces*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[4] Carrillo, J. A., Ferreira, L. C. F. *Self-similar solutions and large time asymptotics for the dissipative quasi-geostrophic equations*, Monatshefte fur Mathematik (Print), v. 151, p. 111-142, 2007.

[5] Ferreira, L. C. F., *Soluções auto-similares para a equação quase-geostrófica e comportamento assintótico*, Tese de Doutorado, Departamento de Matemática-Unicamp, Março 2005.

[6] Folland, G. B., *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, Jhon Wiley & Sons, New York, 1984.

[7] Grafakos, Loukas.,*Classical fourier analysis*. Vol. 249. Springer, 2008

[8] Hunt, R., *On $L^{p,q}$ spaces*, L'Enseignement Mathématique, (2) **12** 1966, 249 - 276.

[9] Kristiansson, E., *Decreasing Rearrangement and Lorentz $L^{(p,q)}$ Spaces*, Tese de Mestrado, Departament of Mathematics Lulea university of technology, december (2002).

[10] O'Neil, R., *Convolution operators and $L^{p,q}$ spaces*, Duke Math. J. 30 (1963) 129 - 142.

[11] Stein, E. M., Weiss, G., *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[12] Stein, E. M., *Singular Integral and Differentiabilly Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.