

RESSALVA

Atendendo solicitação do autor,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 09/02/2026



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Câmpus de São José do Rio Preto

Yino Beto Cueva Carranza

Problemas elípticos envolvendo o operador 1-Laplaciano com
crescimento crítico

São José do Rio Preto
2024

Yino Beto Cueva Carranza

Problemas elípticos envolvendo o operador 1-Laplaciano com
crescimento crítico

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2024

C312p

Carranza, Yino Beto Cueva

Problemas elípticos envolvendo o operador 1-Laplaciano com crescimento crítico / Yino Beto Cueva Carranza. -- São José do Rio Preto, 2024

90 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

1. Operador 1-Laplaciano.. 2. Sistemas elípticos. 3. Problemas com crescimento crítico. 4. Não-linearidades singulares. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Impacto potencial desta pesquisa

Esta tese pretende incentivar os pesquisadores a investigar problemas críticos envolvendo o operador 1-Laplaciano, potencialmente gerando novas pesquisas e teses

Potential impact of this research

This thesis aims to encourage researchers to investigate critical issues involving the 1-Laplacian operator, potentially generating new research and theses.

Yino Beto Cueva Carranza

Problemas elípticos envolvendo o operador 1-Laplaciano com
crescimento crítico

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Orientador

Prof. Dr. Olímpio H. Miyagaki
Dep. de Matemática - UFSCar

Prof. Dr. Sergio Segura de León
Dep. de Ana. Matemático - Universidade de Valência

Prof. Dr. Marcelo Messias
FCT-Unesp

Prof. Dr. Giovany J. M. Figueiredo
Dep. de Matemática - UnB

São José do Rio Preto
9 de fevereiro 2024

*À minha sobrinha Rosaemilia, que partiu para o céu aos 14 anos, que sua doce presença
nos inspire a viver cada dia com amor e gratidão.*

Agradecimentos

A minha família, em especial minha mãe Bertila, meu pai Manuel, meus irmãos Sonia, Lidia e Higor, meus sobrinhos Jimena, Rosaemilia, Piero, Johann, Keilot e Silvia, pelos exemplos de perseverança, pelo apoio e carinho incondicionais e a Laura pelo apoio constante.

Meu agradecimento muito especial ao meu querido orientador Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta. Não conheço palavras suficientes em português nem em espanhol para expressar todo o meu agradecimento por ter aceitado me orientar, pela maravilhosa orientação, pela disponibilidade, pela paciência, pela amizade, por todos os conhecimentos compartilhados e, sobretudo, por nunca ter desistido de me proporcionar a maravilhosa oportunidade de fazer um estágio no exterior. Serei eternamente grato.

Minha gratidão especial ao Prof. Dr. Antonio Suárez por ter aceitado me orientar no estágio na Universidade de Sevilla, pelo caloroso acolhimento, pelo seu tempo, pela paciência, por todo o conhecimento compartilhado, pelos almoços e cafés compartilhados e, acima de tudo, pela amizade.

Meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Sergio Segura, por me aceitar para fazer uma visita à Universidade de Valência, pela calorosa recepção, pelos extraordinários e valiosos conhecimentos compartilhamos nos seminários, pela disponibilidade de seu tempo e dos cafés que compartilhamos. Além disso, agradeço por ter realizado excelentes trabalhos com outros pesquisadores que foram referências fundamentais para obter resultados neste trabalho.

Ao prof. Dr. Giovany Figueiredo, pela acolhida calorosa durante minha visita à UnB e pela generosidade ao compartilhar seus conhecimentos. Ao Prof. Dr. Roberto Almeida Prado, meu orientador de mestrado pelos conhecimentos compartilhados e a amizade. Ao Prof. Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey, meu orientador de graduação, pela amizade, pelos valiosos conselhos e por me proporcionar a oportunidade para ir ao Brasil.

Aos prezados professores membros da banca, Sergio Segura, Olímpio Miyagaki, Giovany Figueiredo e Sérgio Neves, agradeço por aceitarem fazer parte da banca e pelos valiosos aportes para a melhoria do trabalho.

A todos os meus amigos do mestrado e doutorado, bem como da estadia em Sevilla, com quem compartilhei momentos maravilhosos e que muito me ajudaram: Liner, Marcos, Ronísio, Elaine, Lucas, Gustavo, Mijael, Thais, Anderson, Yessica, Raul, Juan, Elida, Luis Fernando, Rafael, Rodrigo, Leticia, Paulo, Maycon, Elard, Nelson, Yuliana, Pedro, Cristian, Heraclio, Vinicius, Paulo Seminario, Rodiak, Marcos Gabriel, Romulo, Mallqui, Enrico e William.

Aos professores Norbil e Patricia, pelo apoio que deram não apenas a mim, mas também a outros peruanos que estudam no Brasil, tornando nossas vidas mais fáceis.

À PROPG-Unesp pelo auxílio fornecido para realizar o estágio no exterior.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.
Galileo Galilei

RESUMO

Neste trabalho estudamos quatro problemas elípticos envolvendo o operador 1-Laplaciano. Na primeira parte estudamos resultados de existência para um sistema subcrítico do tipo gradiente. O segundo problema que abordamos é um sistema crítico e para superar a perda de compacidade, mostramos uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions. O terceiro problema que lidamos é um problema superlinear crítico para o qual mostramos a existência de uma solução não trivial. Finalmente, estudamos resultados de existência para um problema singular crítico do tipo côncavo-convexo.

Palavras-chave: Operador 1-Laplaciano. Sistemas elípticos. Problemas com crescimento crítico. Não-linearidades singulares.

ABSTRACT

In this work, we study four elliptic problems involving the 1-Laplacian operator. In the first part, we study existence results for a gradient type subcritical system. The second problem that we address is a critical system and in order to overcome the lack of compactness a version of the Concentration of Compactness Principle of Lions is proved. The third problem that we deal is a critical superlinear problem for which we show the existence of a non-trivial solution. Finally, we study existence results for a critical singular problem of the concave-convex type.

Keywords: 1-Laplacian Operator. Elliptic systems. Problems with critical growth. Singular nonlinearities.

Sumário

1	Introdução	11
2	Preliminares	17
3	Sistema de equações envolvendo o operador 1-Laplaciano com crescimento subcrítico	19
4	Sistema de equações envolvendo o operador 1-Laplaciano com crescimento crítico	32
5	Um problema superlinear crítico envolvendo o operador 1-Laplaciano	47
6	Um problema singular crítico do tipo côncavo-convexo envolvendo o operador 1-Laplaciano	61
6.1	Resultados preliminares	61
6.1.1	Teoria generalizada de Anzellotti	63
6.2	Resultado de existência	64
6.2.1	Prova do Teorema 6.15	72
7	Conclusão	85
	Referências	86

1 Introdução

Nesta tese estudamos problemas elípticos envolvendo o operador 1-Laplaciano com crescimento crítico, o qual é definido formalmente como

$$\Delta_1(u) = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right).$$

A importância de estudar esse tipo de equações está nas aplicações que tem em reconstrução de imagens digitais. Esse tipo de operador tem papel preponderante, uma vez que possibilita o emprego de técnicas de reconstrução de imagens que preservam cantos e arestas. O operador 1-Laplaciano está associado ainda a fenômenos de difusão não-linear, uma vez que pode ser visto como um caso particular do operador p -Laplaciano, quando $p = 1$.

Os pioneiros que abordaram problemas envolvendo o operador 1-Laplaciano foram: Andreu, Ballesteler, Caselles e Mazón nos seguintes trabalhos [7, 6, 8] e também na monografia [9]. Tais autores caracterizam o quociente $\frac{Du}{|Du|}$ (quando Du é apenas uma medida Radon, ao invés de uma função L^1), através da Teoria de Anzellotti (ver [11] e também [9]). Essa teoria permite que eles introduzam um campo vetorial $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ que desempenha o papel de $\frac{Du}{|Du|}$. Dessa forma eles superam a dificuldade que $\frac{Du}{|Du|}$ não está bem definido quando $|Du| = 0$.

Entre os primeiros trabalhos sobre este assunto também poderíamos citar os trabalhos de Kawohl [36] e Demengel [29], onde neste último ela utilizou a simetria do domínio para obter soluções nodais para problemas envolvendo o operador 1-Laplaciano e uma não linearidade com crescimento crítico.

No ano 2002, Lucio Boccardo e Djairo Guedes de Figueiredo, estudaram em [19], o sistema de equações envolvendo o operador p -Laplaciano dado por

$$\begin{cases} -\Delta_p u = F_u(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta_q v = F_v(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde Δ_p é o operador p -Laplaciano dado por $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, com as seguintes hipóteses sobre a função F

1. $F_u(x, u, v) \leq C \left(1 + |u|^{p^*-1} + |v|^{q^* \frac{(p^*-1)}{p^*}} \right).$
2. $F_v(x, u, v) \leq C \left(1 + |v|^{q^*-1} + |u|^{p^* \frac{(q^*-1)}{q^*}} \right).$

3. $F(x, u, v) \leq C(1+|u|^r+|u|^s)$, para alguma constante positiva C , onde r e s satisfazem

$$p < r \leq p^*, \quad q < s \leq q^*.$$

4. Existem $R > 0$, $\theta_p > 0$ e $\theta_q > 0$ com

$$\frac{1}{p^*} < \theta_p < \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{q^*} < \theta_q < \frac{1}{q},$$

tais que

$$0 < F(x, u, v) \leq \theta_p u F_u(x, u, v) + \theta_q v F_v(x, u, v),$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $|u|, |v| \geq R$.

5. Existem constantes $c_1 > 0$, $\epsilon > 0$, $\bar{r} > p$, $\bar{s} > q$ tais que

$$F(x, u, v) \leq c_1(|u|^{\bar{r}} + |v|^{\bar{s}}),$$

para todo $|u|, |v| \leq \epsilon$, $x \in \overline{\Omega}$.

Usando o Teorema do Passo da Montanha, os autores mostraram a existência de uma solução não trivial para o problema (1.1).

Por outro lado, Alexis Molino e Sergio Segura tratam em [41] o seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

sendo $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Carathéodory satisfazendo as seguintes condições:

(i) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{|f(x, s)|}{|s|^\alpha} < \infty, \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega.$$

(ii) Existem $q \in (0, \frac{1}{N-1})$ e $C > 0$ tais que

$$|f(x, s)| \leq C(1 + |s|^q) \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R}.$$

(iii) Existem $\kappa > 1$ e $s_0 > 0$ tais que

$$0 < \kappa F(x, s) \leq s f(x, s), \quad x \in \Omega, |s| \geq s_0,$$

onde $F(x, s) = \int_0^s f(x, t) dt$.

Por meio de uma técnica de aproximação, tais autores aplicaram métodos variacionais para mostrar a existência de duas soluções, uma positiva e outra negativa para (1.2). Gostaríamos de destacar que em [41] os autores conseguem pioneiramente a monotonia com respeito de p para um funcional que difere apenas por uma constante do funcional associado ao problema aproximado de (1.2). Neste trabalho usamos essa técnica fortemente.

No Capítulo 1 estendemos o resultado em [19], para o sistema de equações envolvendo o operador 1-Laplaciano, usando o método de aproximação por sistemas envolvendo o

operador p -Laplaciano, desenvolvido em [41]. Estamos interessados em encontrar soluções para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) = F_u(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div}\left(\frac{Dv}{|Dv|}\right) = F_v(x, u, v) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde $N \geq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado.

A seguir enunciamos o primeiro resultado principal deste trabalho.

Teorema 1.1. *Suponha que F satisfaça as seguintes condições*

1. F é uma função de classe C^1 .
2. Existem constantes $C > 0$, $r \in (1, 1^*)$ e $s \in (1, 1^*)$ tais que

$$\begin{aligned} |F_u(x, u, v)| &\leq C(1 + |u|^{r-1} + |v|^{s-1}), \\ |F_v(x, u, v)| &\leq C(1 + |u|^{r-1} + |v|^{s-1}), \end{aligned}$$

onde $1^* = \frac{N}{N-1}$.

3. $F(x, 0, 0) = F_u(x, 0, 0) = F_v(x, 0, 0)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$.

4. Existe $\theta \in \mathbb{R}$ com

$$\frac{1}{1^*} < \theta < 1$$

tal que

$$0 < F(x, u, v) \leq \theta u F_u(x, u, v) + \theta v F_v(x, u, v),$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$ e $u, v \in \mathbb{R}$.

5. Existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que, para todo $x \in \Omega$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F_u(x, s, t)}{|s|^\alpha} < +\infty$$

e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_v(x, s, t)}{|t|^\beta} < +\infty.$$

Então existe uma solução não trivial para o sistema (1.3).

Problemas com crescimento crítico receberam muita atenção nas últimas décadas, começando com o trabalho pioneiro de Brezis e Nirenberg [21]. Em [3], Alves, de Moraes Filho e Souto, fizeram a extensão para sistema de equações semilineares do conhecido problema de Brezis e Nirenberg. Posteriormente, de Moraes Filho e Souto em [42] generalizaram o problema tratado em [3] para o operador p -Laplaciano e com a não linearidade mais geral. Mais especificamente, estudaram o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = Q_u(u, v) + H_u(u, v) & \text{em } \Omega, \\ -\Delta_p v = Q_v(u, v) + H_v(u, v) & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u, v \geq 0; \quad u, v \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde Q é uma função de classe $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ p -homogênea, ou seja,

$$Q(\lambda u, \lambda v) = \lambda^p Q(u, v) \text{ para todo } \lambda > 0; u, v \geq 0, \quad (1.5)$$

$$Q_u(0, 1) = 0, \quad Q_v(1, 0) = 0, \quad (1.6)$$

H é uma função de classe $C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tal que

$$H(\lambda u, \lambda v) = \lambda^q H(u, v) \text{ para todo } \lambda > 0, u, v \geq 0; p < q < p^*, \quad (1.7)$$

onde $p^* = \frac{Np}{N-p}$ e

$$H(u, 0) = 0 \text{ } (H(0, v) = 0), \text{ para todo } u \geq 0 \text{ } (v \geq 0). \quad (1.8)$$

Além disso,

$$\mu_2 < \lambda_1, \quad (1.9)$$

onde, λ_1 é o primeiro autovalor do operador Δ_p , cuja caracterização variacional é dada por

$$\lambda_1 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} |u|^p dx}$$

e

$$\frac{\mu_2}{p} = \max\{Q(u, v) : u, v \geq 0, u^p + v^p = 1\}.$$

Tais autores mostraram a existência de uma solução não trivial para o sistema de equações (1.4), usando o Teorema de Multiplicadores de Lagrange e uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions [39].

O primeiro problema crítico envolvendo o operador 1-Laplaciano foi desenvolvido por Demengel em [29]. Por outro lado, Degiovanni e Magrone em [31] estudaram uma versão do problema de Brezis e Nirenberg para o operador 1-Laplaciano com uma abordagem diferente usando um teorema de linking. Em [4] Alves, Ourraoui e Pimenta trataram um problema quasilinear com crescimento crítico.

Demengel trata o seguinte problema envolvendo o operador 1-Laplaciano com crescimento crítico

$$\begin{cases} -\Delta_1 u + a(x) \operatorname{sign} u = f|u|^{1^*-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.10)$$

com a e f funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$. Além disso, f é positiva em alguma parte e a uma função para a qual existe uma constante $c > 0$ tal que para todo $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$

$$|\nabla u|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} a|u| \geq c\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}.$$

O domínio Ω é invariante por algum grupo G de isometrias de $\mathbb{R}^N$ e

$$\lambda(G)f(x)^{\frac{N-1}{N}} K(n, 1)(\operatorname{Card} O_G(x))^{\frac{-1}{N}} < 1,$$

onde

$$\lambda(G) = \inf_{\{u \in W_0^{1,1}(\Omega), u \text{ é } G\text{-invariante}, \int_{\Omega} f|u|^{1^*} = 1\}} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u| + \int_{\Omega} a|u| \right\}$$

e

$$K(n, 1) = \sup_{u \in W_0^{1,1}(\Omega) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{(\int_{\Omega} |u|^{1^*})^{\frac{1}{1^*}}}{\int_{\Omega} |\nabla u|} \right\}.$$

Sob essas condições, a autora mostrou a existência de soluções nodais para o problema (1.10). Além disso, de forma pioneira estabeleceu uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions, para uma sequência de funções em $BV(\Omega)$ que convergem fracamente.

Nesse sentido, no Capítulo 2, propomos generalizar o sistema de equações abordado por de Moraes Filho e Souto para o operador 1-Laplaciano. Baseados nos argumentos usados em [42] e [29] mostramos a existência de uma solução não trivial para o seguinte sistema de equações com não linearidades homogêneas

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = Q_u(u, v) + \lambda \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} u |u|^{\alpha-2} |v|^{\beta} & \text{em } \Omega, \\ -\operatorname{div} \left(\frac{Dv}{|Dv|} \right) = Q_v(u, v) + \lambda \frac{2\beta}{\alpha+\beta} |u|^{\alpha} v |v|^{\beta-2} & \text{em } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u, v \geq 0; \quad u, v \neq 0 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.11)$$

onde $\alpha + \beta = 1^*$, $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e Q_u , Q_v são as derivadas parciais da função de 2 variáveis Q de classe C^1 com respeito a u e v , respectivamente. Assim, apresentamos nosso segundo resultado principal.

Teorema 1.2. *Seja $Q \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ uma função tal que*

$$Q(\theta u, \theta v) = \theta Q(u, v) \text{ para todo } \theta > 0; \quad u, v \geq 0 \text{ e} \quad (1.12)$$

$$Q_u(0, 1) = 0, \quad Q_v(1, 0) = 0. \quad (1.13)$$

Suponha também que

$$\mu_2(1) < \lambda_1(1), \quad (1.14)$$

onde $\mu_2(1) = \max\{Q(u, v) : u, v \geq 0, u + v = 1\}$ e $\lambda_1(1) = \inf_{u \in W_0^{1,1}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u| dx}{\int_{\Omega} |u| dx}$.

Então, para λ suficientemente pequeno, o sistema (1.11) tem uma solução não trivial.

A dificuldade para resolver problemas com crescimento crítico está na perda das imersões compactas de Sobolev. Para contornar esse problema, mostramos um resultado que é uma consequência do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions [39].

Vale mencionar que os resultados dos Capítulos 1 e 2 foram publicados no trabalho [22].

O conhecido problema de Brezis e Nirenberg, no caso escalar foi estendido por Azorero e Peral para o operador p -Laplaciano em [32]. Tais autores mostraram resultados de existência para o seguinte problema crítico

$$\begin{cases} -\Delta_p(u) = \lambda |u|^{q-2} u + |u|^{p^*-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.15)$$

onde $\lambda > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado, $1 < p < q < p^*$. Inspirados nesse trabalho, no Capítulo 3 estudamos a existência de soluções para o seguinte problema superlinear crítico.

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = \lambda |u|^{q-2} u + |u|^{1^*-2} u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.16)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado e $1 < q < 1^*$.

O teorema a seguir é nosso terceiro resultado principal desta tese.

Teorema 1.3. *Para $1 < q < 1^*$ e λ suficientemente grande, existe uma solução não trivial para o problema (1.16).*

Problemas elípticos singulares têm recebido atenção especial nos últimos anos, após o trabalho pioneiro desenvolvido em [27]. Este tipo de problema tem sido estudado por muitos autores. Entre eles podemos mencionar a seguinte literatura: os resultados de [12, 13, 17, 18, 38, 48] tratam de problemas com o Laplaciano e para problemas envolvendo o operador p -Laplaciano, citamos entre outros [14, 16, 23, 40, 44, 45, 46].

O estudo de problemas do tipo côncavo-convexo, teve início com o celebrado artigo [1]. Hirano, Saccon e Shioji [35] e Haitao [34] estudaram quase simultaneamente multiplicidade de soluções para problemas elípticos singulares com não linearidades críticas côncavas e convexas para o Laplaciano. Este problema foi estendido por Giacomoni, Schindler e Takáč para o operador p -Laplaciano em [33].

Recentemente, de Cicco, Giachetti e Segura [25] estabeleceram a existência de solução para um problema elíptico singular envolvendo operador 1-Laplaciano. Por outro lado, em [26], Cicco, Giachetti, Oliva e Petitta estudaram um problema de Dirichlet envolvendo o operador 1-Laplaciano, com uma não linearidade singular mais geral.

Em [43] Ortiz, Pimenta e Segura, estudaram a multiplicidade de soluções para a seguinte equação elíptica quase linear

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = \frac{\lambda}{u^\gamma} + u^{q-1} & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.17)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto limitado com fronteira Lipschitz, $N \geq 2$, $\lambda > 0$ e $0 < \gamma < 1 < q < 1^*$. Os autores conseguiram mostrar a existência de duas soluções positivas para (1.17) para λ suficientemente pequeno.

Motivados por [43], no Capítulo 4 lidamos com o seguinte problema singular crítico do tipo côncavo-convexo.

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = \frac{\lambda}{u^\gamma} + u^{1^*-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.18)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado com fronteira Lipschitz, $N \geq 2$, $\lambda > 0$ e $0 < \gamma < 1$. O resultado principal desse capítulo é dado no seguinte teorema.

Teorema 1.4. *Seja $0 < \gamma < 1$. Então, para λ suficientemente pequeno, existe uma solução positiva para o problema (6.1).*

A demonstração do Teorema 1.4 segue as ideias de [25], [43] e [32]. Baseia-se em um método de aproximação no qual a solução é obtida como o limite, quando $p \rightarrow 1$, da família de soluções dos problemas associados ao p -Laplaciano. Ressaltamos que, na demonstração deste teorema, enfrentamos a dificuldade adicional introduzida pela não linearidade crítica. Para lidar com isso, utilizaremos um resultado em [29], que é uma versão do Princípio de Concentração de Compacidade de Lions [39].

7 Conclusão

Neste trabalho, estudamos quatro problemas elípticos envolvendo o operador 1-Laplaciano. Na primeira parte, conseguimos demonstrar resultados de existência para um sistema sub-crítico do tipo gradiente. No segundo capítulo, abordamos um sistema crítico, onde, para superar a perda de compacidade, apresentamos uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions. O terceiro problema que enfrentamos foi um problema superlinear crítico para o qual demonstramos a existência de uma solução não trivial. Nesta parte, utilizamos uma versão do Princípio de Concentração e Compacidade de Lions devido a Demengel. Finalmente, foi possível mostrar resultados de existência para um problema singular crítico do tipo côncavo-convexo. Como trabalhos futuros, poderíamos considerar a demonstração de multiplicidade de soluções para esses problemas.

Referências

- [1] A. AMBROSETTI, H. BREZIS AND G. CERAMI. Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, *J. Funct. Anal.*, vol. 122, No. 2, p. 519-543, (1994).
- [2] A. AMBROSETTI AND A. MALCHIODI. Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems, *Cambridge University Press*, vol. 104, (2007).
- [3] C.O. ALVES, D.C. DE MORAIS FILHO AND M.A. SOUTO. On systems of elliptic equations involving subcritical or critical Sobolev exponents, *Nonlinear Analysis, Elsevier Science Publishing Company*, vol. 42, p. 771–787, (2000).
- [4] C.O. ALVES, A. OURRAOUI AND M.T.O. PIMENTA. Multiplicity of solutions for a class of quasilinear problems involving the 1-Laplacian operator with critical growth, *Journal of Differential Equations*, vol. 308, p. 545–574, (2022).
- [5] L. AMBROSIO, N. FUSCO AND D. PALLARA. Functions of bounded variation and free discontinuity problems, *Oxford University Press*, Oxford, (2000).
- [6] F. ANDREU, C. BALLESTER, V. CASELLES AND J. M. MAZÓN. Minimizing total variation flow, *C. R. Acad. Sci., Paria, Sr. I. Math.*, vol. 331, No. 11, p. 867 - 872, (2000).
- [7] F. ANDREU, C. BALLESTER, V. CASELLES AND J. M. MAZÓN. The Dirichlet problem for the total variation flow, *J. Functional Anal.*, vol. 180, No. 2, p. 347 - 403, (2001).
- [8] F. ANDREU, C. BALLESTER, V. CASELLES AND J. M. MAZÓN. Minimizing total variation flow, *Differential Integral Equations*, vol. 14, No. 3, p. 321 - 360 (2001).
- [9] F. ANDREU, V. CASELLES AND J. M. MAZÓN. Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals, *Progress in mathematics*, 233. Birkhäuser Verlag, Basel (2004).
- [10] F. ANDREU, A. DALL’AGLIO AND S. SEGURA DE LEÓN. Bounded solutions to the 1- Laplacian equation with a critical gradient term, *Asymptot. Anal.*, vol. 80, p. 21–43, (2012).
- [11] G. ANZELLOTTI. Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, vol. 135, p. 293–318, (1983).

-
- [12] D. ARCOYA AND L. BOCCARDO. Multiplicity of solutions for a Dirichlet problem with a singular and a supercritical nonlinearities, *Differential Integral Equations*, vol. 26, no. 1–2, p. 119–128, (2013).
 - [13] D. ARCOYA AND L. MORENO-MÉRIDA. Multiplicity of solutions for a Dirichlet problem with a strongly singular nonlinearity, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., Ser. A*, vol. 95, p. 281–291, (2014).
 - [14] R. ARGAWAL, H. LÜ AND D. O'REGAN. Positive solutions for Dirichlet problems of singular quasilinear elliptic equations via variational methods, *Mathematika*, vol. 51, p. 187 - 202, (2004).
 - [15] H. ATTOUCH, G. BUTTAZZO, M. GIUSEPPE. Variational analysis in Sobolev and BV spaces: Applications to PDEs and optimization, *SIAM*, (2006).
 - [16] K. BAL AND P. GARAIN. Multiplicity of solution for a quasilinear equation with singular nonlinearity, *Mediterr. J. Math.*, vol 17, No. 3, No. 91, (2020).
 - [17] L. BOCCARDO. A Dirichlet problem with singular and supercritical nonlinearities, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A*, vol. 75, No. 12, p. 4436 - 4440, (2012).
 - [18] L. BOCCARDO AND L. ORSINA. Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, vol. 37, No. 3-4, p. 363-380, (2010).
 - [19] L. BOCCARDO AND D.G. DE FIGUEIREDO. Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations, *Birkhäuser*, p. 309–323, (2002).
 - [20] H. BREZIS AND E. LIEB. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 88, p. 486–490 (1983).
 - [21] H. BREZIS AND L. NIRENBERG. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 36, p. 437–477, (1987).
 - [22] Y.C. CARRANZA AND M. T. O. PIMENTA. Quasilinear elliptic systems involving the 1-Laplacian operator with subcritical and critical nonlinearities, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, p. 1 – 22, (2023).
 - [23] L.M. DE CAVE. Nonlinear elliptic equations with singular nonlinearities, *Asymptotic Anal.* vol. 84, No. 3-4, p. 181 - 195, (2013).
 - [24] G. CHEN AND H. FRID. Divergence-measure fields and hyperbolic conservation laws, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, vol. 147, No. 2, p. 89 - 118, (1999).
 - [25] V. DE CICCIO, D. GIACHETTI AND S. SEGURA DE LEÓN. Elliptic problems involving the 1–Laplacian and a singular lower order term, *J. Lond. Math. Soc.*, vol. 99, No. 2, p. 349-376, (2019).
 - [26] V. DE CICCIO, D. GIACHETTI, F. OLIVA AND F. PETITTA. The Dirichlet problem for singular elliptic equations with general nonlinearities, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, vol. 58, 129, (2019).

-
- [27] M.G. CRANDALL, P.H. RABINOWITZ AND L. TARTAR. On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity, *Commun. Partial Differential Equations*, vol. 2, p. 193–222, (1977).
 - [28] F. DEMENGEL AND E. HEBEY. On some nonlinear equations involving the p -Laplacian with critical Sobolev growth, *Advances in Differential equations*, vol. 3, p. 533–574, (1998).
 - [29] F. DEMENGEL. On some nonlinear partial differential equations involving the 1-Laplacian and critical Sobolev exponent, *ESAIM: Control Optimisation and Calculus of Variations, EDP Sciences*, vol. 4, p. 667–686, (1999).
 - [30] F. DEMENGEL. Functions locally almost 1-harmonic, *Applicable Analysis*, vol. 83, p. 865–896, (2004).
 - [31] M. DEGIOVANNI AND P. MAGRONE. Linking solutions for quasilinear equations at critical growth involving the 1-Laplace operator, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, vol. 36, p. 591–609, (2009).
 - [32] J. GARCÍA AZORERO AND I. PERAL ALONSO. Existence and nonuniqueness for the p -Laplacian, *Communications in partial differential equations*, vol. 12, p. 126–202, (1987).
 - [33] J. GIACOMONI, I. SCHINDLER AND P. TAKÁČ. Sobolev versus Hölder local minimizers and existence of multiple solutions for a singular quasilinear equation, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa*, vol. 6, No. 1, p. 117 - 158, (2007).
 - [34] Y. HAITAO. Multiplicity and asymptotic behavior of positive solutions for a singular semilinear elliptic problem, *Journal of Differential Equations*, No. 2, p. 487–512, (2003).
 - [35] N. HIRANO, C. SACCON AND N. SHIOJI. Existence of multiple positive solutions for singular elliptic problems with concave and convex nonlinearities, *Adv. Differential Equations*, vol. 9, No. 1-2, p. 197–220, (2004).
 - [36] B. KAWOHL. On a family of torsional creep problems, *J. Reine Angew. Math*, vol. 410, p. 1 – 22 (1990).
 - [37] M. KRAIEM. On some nonlinear partial differential equations involving the 1-Laplacian, *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathématiques*, vol. 16, p. 905–921 (2007).
 - [38] A.C. LAZER AND P.J. MCKENNA. On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem, *Proc. Am. Math. Soc.* vol. 111, No. 3, p. 721–730, (1991).
 - [39] P.L. LIONS. The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1, *Revista matemática iberoamericana*, vol. 1, 145–201, (1985).
 - [40] A. MOHAMMED. Positive solutions of the p -Laplace equation with singular nonlinearity, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 352, No. 1, p. 234–245 (2009).
 - [41] A. MOLINO SALAS AND S. SEGURA DE LEÓN. Elliptic equations involving the 1-Laplacian and a subcritical source term, *Nonlinear Analysis, Elsevier*, vol. 168, p. 50–66, (2017).

-
- [42] D.C. DE MORAIS FILHO AND M.A. SOUTO. Systems of p -Laplacean equations involving homogeneous nonlinearities with critical sobolev exponent degrees, *Communications in partial differential equations*, vol. 24, p. 1537–1553, (1999).
 - [43] J. C. ORTIZ CHATA, M. T. O. PIMENTA AND S. SEGURA DE LEÓN. Existence of solutions to a 1–Laplacian problem with a concave-convex nonlinearity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol.525, p.127–149, (2023).
 - [44] N. S. PAPAGEORGIOU AND P. WINKERT. Singular p –Laplacian equations with superlinear perturbation, *J. Differential Equations*, vol. 266, No. 2-3, p. 1462 - 1487, (2019).
 - [45] K. PERERA AND E. A. B. SILVA. Existence and multiplicity of positive solutions for singular quasilinear problems, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 323, p. 1238 - 1252, (2006).
 - [46] K. PERERA AND Z. ZHANG. Multiple positive solutions of singular p –Laplacian problems by variational methods, *Bound. Value Probl.*, No. 3, p. 377 - 382, (2005).
 - [47] M. T. O. PIMENTA, J.R. SANTOS JR. AND M. F. STAPENHORST. 1–Laplacian equation whit critical and discontinuous nonlinearities, *Preprint*. (2023)
 - [48] Y. SUN, S. WU AND Y. LONG. Combined effects of singular and superlinear nonlinearities in some singular boundary value problems, *J. Differential Equations* vol. 176, No. 2, p. 511 – 531, (2001).