

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**Controle Ótimo H_2 e H_∞ com Alocação de Zeros
para o Problema de Rastreamento Usando LMIs**

Cristiano Quevedo Andrea

Ilha Solteira - SP

1210001373



1373

unesp



Controlado Ótimo H_2 e H_∞ com Alocação de Zeros
para o Problema de Rastreamento Usando LMIs

Cristiano Quevedo Andrea

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA (ME).

A. A. Carvalho

Prof. Dr. Aparecido Augusto de Carvalho
Coordenador

COMISSÃO EXAMINADORA:

Edvaldo Assunção

Prof. Dr. Edvaldo Assunção – orientador

Reinaldo Martinez Palhares

Prof. Dr. Reinaldo Martinez Palhares

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Ilha Solteira, dezembro de 2002

20/12/2002

BCpIS - FEIS - UNESP

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ com Alocação de Zeros para o Problema de Rastreamento usando LMIs

Candidato : Cristiano Quevedo Andrea

Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Assunção.

Proc. 053/2003-NPD 044/03

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCN. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
04.04.03	30.04.03
REGISTRADO POR	TOMBO
Ailza	Tc. 1373
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
Doação autor R\$ 10,00	A556c

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

(24 de fevereiro de 2003)

não considerar
esta data, pois é a
data da entrega da
dissertação a data da
defesa é 20/12/2002.
Faltam a Dúvida do
Res. e o orientador
Edvaldo Assunção

BCpIS - FEIS - UNESR

Resumo

Nesta dissertação, uma metodologia de modificação de zeros é proposta para resolver um problema de rastreamento de sinal de controle, sendo que considera-se ainda a existência de um sinal de entrada exógena de perturbação ou ruído na planta. Em um primeiro momento projeta-se um controlador para minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema a fim de diminuir o efeito desta perturbação. Em um segundo momento, através da modificação de zeros, minimiza-se a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sinal de referência para o erro entre o sinal de saída e a referência, constituindo portanto um rastreador de sinal. Os projetos são equacionados utilizando-se desigualdades matriciais lineares, que permite descrever problemas de otimização convexa, e proporcionando assim a obtenção do ótimo global da solução do problema através da modificação de zeros. Os resultados obtidos têm caráter inédito. Por fim, alguns exemplos numéricos ilustram a viabilidade da abordagem proposta.



Abstract

A zero variation methodology is proposed to solve the problem of signal tracking control, when it is considered the existence of a disturbance or noise in the plant. A controller is designed in order to minimize the $\mathcal{H}_2$ -norm of the closed-loop system such that the effect of the noise is attenuated. The modification of the zeros is used to minimize the $\mathcal{H}_\infty$ -norm from the reference input signal and the error signal, where the error is taking as the difference between the reference and output signals, i.e. a tracking problem. The design is formulated by means of linear matrix inequalities, such that the global optimum of the problem can be attained, this proposed approach is new under the methodology considered. Examples illustrate the effectiveness and the LMIs strategies presented.



Agradecimentos

A realização de um trabalho desta natureza exige esforços individuais e representa um trabalho de dois anos, não isento de apoios, companheirismo, auxílio e amizade. Por esta razão gostaria de agradecer inicialmente aos meus pais e irmãos que sempre me apoiaram ao longo desta jornada.

Em especial sou grato ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção pelo apoio e auxílio no decorrer desta pesquisa, sempre com paciência e me passando motivação, e ainda apresentando conselhos para a realização deste trabalho. Agradeço também ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira e ao Prof. Dr. José Paulo Fernandes Garcia pela colaboração realizada neste estudo.

Ao meu amigo Henrique, pelo apoio e colaboração durante a realização deste trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.



Aos meus pais e irmãos, que sempre me
deram amor e carinho; e a minha nova
alegria de viver: Valéria.



Conteúdo

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
AGRADECIMENTOS	iii
CONTEÚDO	v
LISTA DE FIGURAS	vii
NOTAÇÃO E DEFINIÇÕES	ix
1 Introdução e Definição do Problema	1
1.1 Introdução	1
1.2 Definição do Problema	4
2 Otimização $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$	9
2.1 Projeto de um Compensador $\mathcal{H}_2$	9
2.1.1 A Norma $\mathcal{H}_2$	9 /
2.1.2 O compensador $\mathcal{H}_2$	13
2.2 Alocação de Zeros	14
2.3 Otimização da Norma $\mathcal{H}_\infty$ com a Modificação de Zeros	17
2.3.1 A Norma $\mathcal{H}_\infty$	17



2.3.2	Modificação de Zeros para Otimizar a Norma $\mathcal{H}_\infty$	19
3	O Caso com Peso na Frequência	22
4	Dependência entre o Projeto do Compensador $\mathcal{H}_2$ (de $w(t)$ para $y(t)$) e a Modificação de Zeros (de $r(t)$ para $y(t)$)	27
4.1	Projeto do Compensador $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$	27
4.2	Modificação de Zeros de $r(t)$ para $y(t)$	28
5	Exemplos de Aplicação	29
5.1	Exemplo 1	29
5.2	Exemplo 2	36
5.3	Exemplo 3	41
6	Conclusão e Perspectivas	46
6.1	Conclusão	46
6.2	Perspectivas	47
6.3	Filtro Passa-Baixa	50
6.3.1	Projeto do Filtro Passa-Baixa	51
6.4	Filtro Passa-Alta	52
6.4.1	Projeto do Filtro Passa-Alta	52
6.5	Filtro Passa-Faixa	53
6.5.1	Projeto do filtro Passa-Faixa	53

Lista de Figuras

1.1	Estrutura de controle para o rastreador.	5
1.2	Sistema com realimentação de estados, K é um compensador $\mathcal{H}_2$	5
1.3	Sistema de controle ótimo com posicionamento de pólos e zeros.	6
2.1	Sistema de alocação de zeros.	14
3.1	Estrutura de sistemas com peso na frequência.	22
5.1	Diagrama de Bode do filtro $W_1(s)$	30
5.2	Resposta em frequência da função transferência $Y(s)/W(s)$ descrita em (1.9).	31
5.3	Resposta em frequência da função transferência G_{erro} descrito em (1.11).	32
5.4	Resposta em frequência de $G_{erro}(s)$: (a) projeto com peso na frequência, (b) projeto sem peso na frequência.	33
5.5	Sinal de ruído presente na planta.	34
5.6	Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos.	35
5.7	Resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau.	35
5.8	Mapeamento de pólos e zeros com modificação de zeros.	36
5.9	Diagrama de Bode do filtro W_2	37
5.10	Resposta em frequência da função transferência $Y(s)/W(s)$	38
5.11	Resposta em frequência de $G_{erro}(s)$	39
5.12	Sinal de saída praticamente sobreposto ao sinal de entrada.	40



5.13	Mapeamento de pólos e zeros do sistema com modificação de zeros.	40
5.14	Diagrama de Bode do filtro W_3	42
5.15	Resposta em frequência da função transferência $Y(s)/W(s)$	43
5.16	Resposta em frequência de $G_{\text{erro}}(s)$	44
5.17	Resposta final do sistema, o sinal de saída sobrepõe de referência.	44
5.18	Mapeamento de pólos e zeros do sistema com modificação de zeros.	45
6.1	Filtro passa-baixa ideal.	51
6.2	(a) Circuito do filtro passa-baixa, (b) Diagrama de bode do filtro passa-baixa.	51
6.3	Filtro passa-alta ideal.	52
6.4	(a) Circuito do filtro passa-alta, (b) Diagrama de bode do filtro passa-alta.	53
6.5	Filtro passa-faixa ideal.	53
6.6	(a) Circuito do filtro passa-faixa, (b) Diagrama de bode do filtro passa-faixa.	54



Notação e Definições

- $\mathcal{R}$ denota o conjunto dos números reais
- $\mathcal{R}^n$ é o espaço euclidiano real
- $\mathcal{R}^{m \times n}$ é o espaço real das matrizes reais
- $\sigma_{\max}(M)$ denota o valor singular máximo da matriz M
- $\mathcal{L}_{\infty}[0; \infty)$ denota o espaço (de Hilbert) das funções de quadrado integrável a Lebesgue no intervalo $[0; \infty)$
- I é a matriz identidade de dimensão apropriada
- 0 é a matriz nula de dimensão apropriada
- G' denota a matriz transposta de G
- $Tr(G)$ representa o traço da matriz G
- sup denota supremo
- $\mathcal{V}(\cdot)$ denota o conjunto dos vértices $i, i = 1, \dots, l$ de um politopo (convexo)
- *SISO* do inglês *Single Input Single Output* (sistema monovariável, uma entrada e uma saída)
- *MIMO* do inglês *Multiple Input Multiple Output* (sistema multivariável, múltiplas entradas e múltiplas saídas)
- LMIs do inglês *Linear Matrix Inequalities* (desigualdades matriciais lineares)
- BMIs do inglês *Bilinear Matrix Inequalities* (desigualdades matriciais bilineares)



Listas de definições

- RMS apresentado na página 9
- $S_u(w)$ apresentado na página 10
- Equação características dos zeros definido na página 16

Capítulo 1

Introdução e Definição do Problema

1.1 Introdução

Na vasta literatura sobre sistemas de controle, como por exemplo [AT02], [TA02], [TA01], [Oga97] e [AP01], pode-se verificar facilmente a utilização de alocação de pólos em sistemas de malha fechada, enquanto para os zeros, há poucos textos publicados abordando este assunto. Um texto clássico de controle que trata o tópico alocação de zeros de forma mais detalhada é, e.g. Franklin et al. [FPEN94], onde encontra-se a teoria de Truxal, que relaciona os pólos e zeros de malha fechada com a constante de erro de velocidade do sistema controlado.

Entre os primeiros trabalhos publicados que tratam alocação de zeros, estão [Mur75] e [Mur77], onde abordada-se a potencialidade da alocação de zeros em sistemas de múltiplas entradas. Desde então foram propostos outros estudos envolvendo os zeros, sendo o assunto utilizado em diversas áreas em controle.

Existem resultados práticos que demonstram que a alocação de zeros em um sistema de controle pode afetar não somente a resposta transitória do sistema, mas também características de robustez, rejeição a ruídos, esforços de controle e até mesmo aspectos de implementação do controlador [Pie99]. Ainda, em [SD95] é



apresentada uma proposta de imposição de zeros, onde é utilizada uma variação da síntese LQG/LTR e em [LWY02] é descrito um projeto de um sistema de rastreamento robusto confiável para o problema de falhas em atuadores e controle de defeitos na superfície de aeronaves. O método de projeto é baseado em uma ação mista de metodologias em controle, utiliza-se técnicas lineares quadráticas (LQ) em conjunto com a análise da norma $\mathcal{H}_\infty$ para o desempenho do rastreamento, sendo as otimizações multiobjetivas presentes em projeto equacionada na forma de inequações matriciais lineares.

Em [KS90] é considerado um problema de interesse contínuo em controle, projetar controladores que resultem em sistemas de malha fechada com características no domínio no tempo, tais como porcentagem de *Overshoot* e tempo de estabelecimento, então foi proposto uma técnica para a escolha da posição dos zeros a fim de minimizar a porcentagem de *Overshoot*.

Um método de projeto que assegura a saída de um observador por alocação de zeros é proposto em [Sma91]. Para este processo é necessário que o sistema tenha posto completo e que seja observável, ainda é apresentado um algoritmo computacional para resolução do método analítico proposto.

A robustez em sistemas de controle tratada em [TL92] utiliza a alocação de zeros em parte do projeto de modo a projetar um rastreador robusto. No processo de otimização descrito em [KMP94] é caracterizado os zeros de modo que a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência seja otimizada.

Ainda pode-se considerar os zeros em redução de modelo, em [Hau00] utiliza-se a alocação ótima dos zeros para redução da ordem de modelos, neste processo ajusta-se os autovalores e o ganho *DC* do sistema reduzido de modo que sejam semelhantes ao do sistema original, porém com outros coeficientes do numerador a ser determinado. A função custo é formulada medindo-se a resposta impulsiva da divergência entre o modelo original e o modelo de ordem reduzida. A função custo é posteriormente minimizada, determinando-se novos coeficientes para o numerador do modelo reduzido, sendo que tais coeficientes estão relacionados aos zeros do sistema.

Existem alguns algoritmos interessantes para alocar zeros, entre eles em [KG00] é apresentada uma metodologia para posicionar os zeros em funções de trans-

ferência, aproveitando estruturas de realimentação já existentes. O algoritmo baseia-se no método de *Faddejew* para o cálculo de matrizes adjuntas. Usando o algoritmo é possível projetar controladores que impõem ao sistema controlado a função de transferência especificada. O projeto consiste de duas partes, primeiro usa-se um método qualquer para projetar um controlador dinâmico de saída tal que o polinômio de pólos desejado seja obtido, posteriormente obtém o polinômio desejado para o numerador utilizando o algoritmo de alocação de zeros.

Recentemente a alocação de zeros foi abordada em [Hau02] para o problema de rastreamento para uma entrada do tipo degrau. Foi considerado um problema de alocação ótima de zeros para sistemas contínuos no tempo com pólos distintos para o rastreador. O erro da resposta do sistema ao degrau foi minimizada, resultando em um processo de obtenção ótima dos coeficientes do numerador da função de transferência do sistema.

Enfim, a alocação de zeros vem sendo utilizada em diversos assuntos em sistema de controle, mas não existe na literatura uma parametrização convexa do problema de modificação dos zeros e a otimização das normas $\mathcal{H}_2$ e/ou $\mathcal{H}_\infty$ em sistemas de controle automático. Em [Pie99], os autores conseguem otimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ de um sistema de controle através da alocação de zeros, porém, a parametrização do problema em função de uma variável, torna-o não convexo, necessitando-se de uma otimização do tipo tentativa e erro. [Pie99] aborda o caso para sistemas *SISO* com controladores que estabilizam internamente uma planta dada, derivados da parametrização de Youla desenvolvida a partir de conceitos da teoria de variáveis de estado.

Dentre estes controladores, existem um sub-conjunto particular cuja principal característica é fazer com que os pólos de todas as funções de transferência de malha fechada sejam iguais. Assim sendo, os infinitos controladores deste sub-conjunto afetarão apenas os zeros do sistema em malha fechada. Utilizando este fato, são desenvolvidas ferramentas que possibilitam escolher através de tentativas, um conjunto destes zeros, uma vez determinados os pólos de malha fechada através de um controlador previamente projetado.

Neste trabalho, descreve-se a formulação da otimização deste problema na forma de desigualdade matriciais lineares - LMI (do inglês, *Linear Matrix Inequa-*

lities), representando uma formulação convexa do problema. O principal resultado é que o ótimo global do problema é obtido com pequeno esforço computacional, pois as LMIs podem ser resolvidas usando-se algoritmos de programação linear de convergência polinomial [BGFB94].

1.2 Definição do Problema

Considere o seguinte sistema linear invariante no tempo descrito na forma de variáveis de estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0; \infty) \quad (1.1)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

sendo $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathcal{R}^{n \times 1}$, $B_2 \in \mathcal{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathcal{R}^{1 \times n}$, e $x(t)$ é o vetor de estados, $y(t)$ é a saída de interesse do sistema, $u(t)$ a entrada de controle e $w(t)$ é uma entrada exógena (do tipo ruído ou perturbação):

O problema ótimo de rejeição de ruído e rastreamento de sinal de controle pode ser assim definido: projeta-se um vetor K de realimentação de estados, posicionando os pólos, de tal forma a minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ entre a entrada ruidosa $w(t)$ e o sinal de saída $y(t)$; um vetor M , de posicionamento de zeros, e um ganho N , de tal forma a minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ entre a entrada de controle $r(t)$ e a saída $e(t)$. A Figura 1.1 mostra a estrutura de controle aplicado ao sistema (1.1) com controladores K , M e N . Neste caso utiliza-se um ganho para o estimador de estados de *Kalman*, L , e os estados realimentados são os estados estimados.

Para resolver este problema, inicialmente projeta-se um controlador K que é utilizado na realimentação negativa dos estados do sistema dado em (1.1). Este controlador é formulado em termos de LMIs e minimiza a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$, conforme descrito na Figura 1.2, para maiores detalhes ver [Per97].

Na etapa seguinte, projeta-se o estimador de *Kalman* para reconstruir os estados, detalhes do projeto do estimador podem ser verificados no Apêndice A. Nesta etapa de projeto desconsidera-se a presença do vetor M .

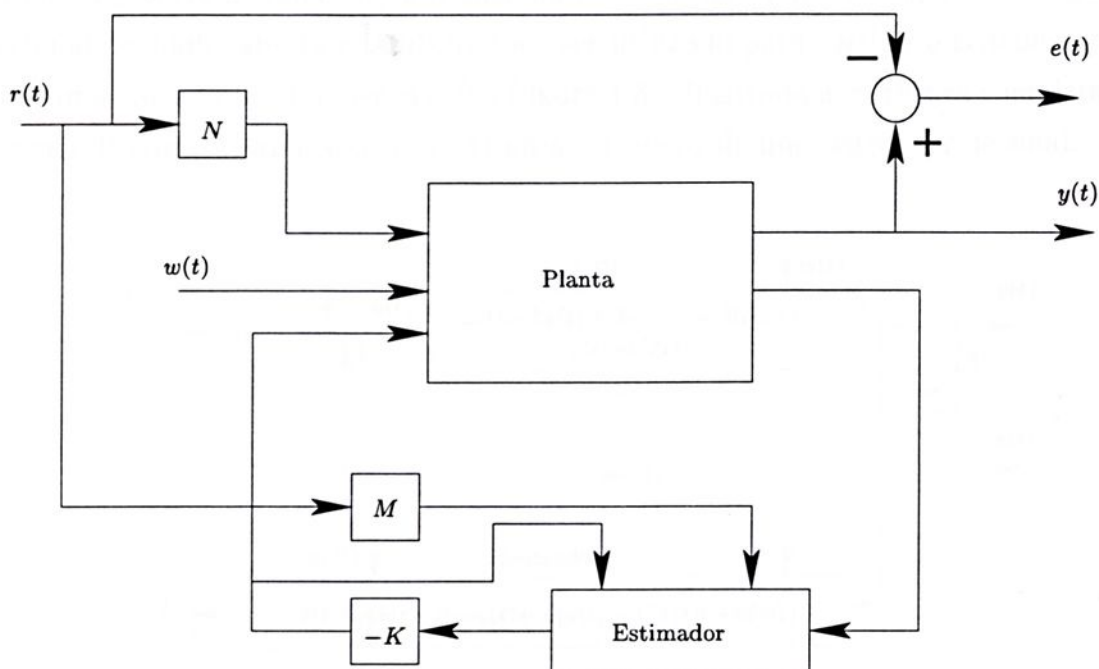


Figura 1.1: Estrutura de controle para o rastreador.

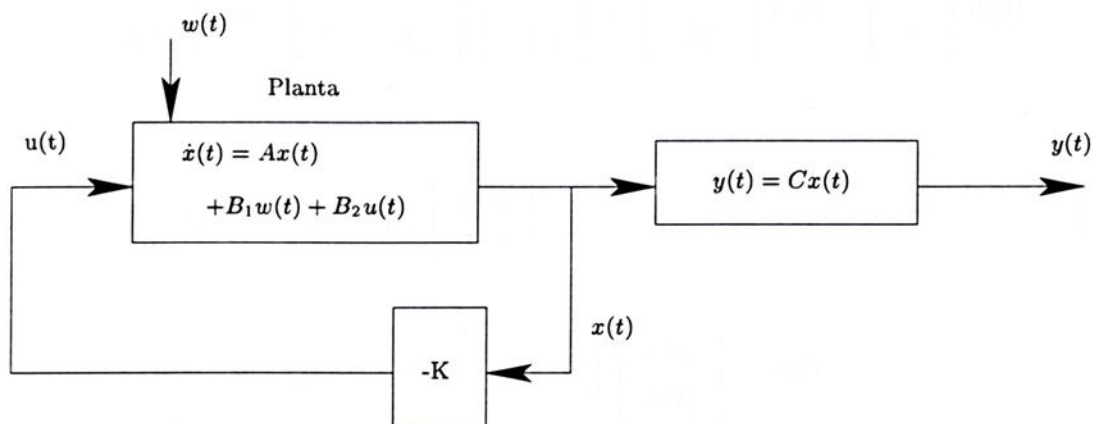


Figura 1.2: Sistema com realimentação de estados, K é um compensador $\mathcal{H}_2$.

Finalmente, projeta-se M para posicionar os zeros de forma a otimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ entre a saída $e(t)$ e a entrada de controle $r(t)$. N é apenas um ganho opcional de malha aberta e também pode ser utilizado para corrigir o erro de regime para uma entrada do tipo degrau. Na Figura 1.3 é ilustrada a estrutura completa do sistema de controle aplicado em (1.1) para o projeto de um rastreador de sinal.

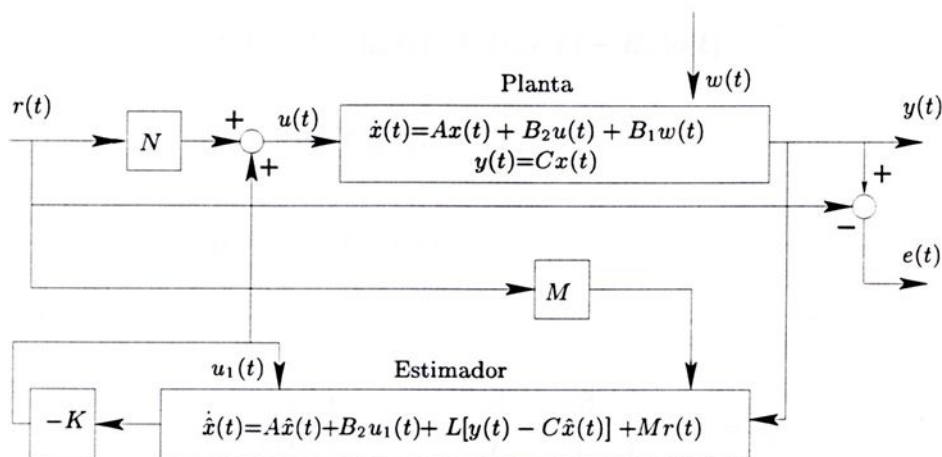


Figura 1.3: Sistema de controle ótimo com posicionamento de pólos e zeros.

O diagrama de blocos da Figura 1.3 pode ser descrito através das variáveis de estado $x(t)$ e $\hat{x}(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -Z_1 \\ T & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 N \\ M \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$e(t) = y(t) - r(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} - r(t)$$

sendo:

$$A_o = A - B_2 K - LC;$$

$$T = LC;$$

$$Z_1 = B_2 K.$$

O sistema (1.2) pode ser representado na forma compacta,

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= A_m \bar{x}(t) + B_m r(t) + B_w w(t) \\ e(t) &= C_m \bar{x}(t) - D_m r(t) \\ y(t) &= C_m \bar{x}(t)\end{aligned}\tag{1.3}$$

sendo,

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, A_m = \begin{bmatrix} A & -Z_1 \\ T & A_o \end{bmatrix}, D_m = 1, \\ B_m &= \begin{bmatrix} B_2 N \\ M \end{bmatrix}, B_w = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } C_m = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace no sistema (1.3), como em (1.1) $x(0) = 0$, obtêm-se:

$$\begin{aligned}s\bar{X}(s) &= A_m \bar{X}(s) + B_m R(s) + B_w W(s) \\ \bar{X}(s) &= (sI - A_m)^{-1} [B_m R(s) + B_w W(s)]\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$Y(s) = C_m \bar{X}(s)\tag{1.6}$$

$$E(s) = C_m \bar{X}(s) - D_m R(s)\tag{1.7}$$

Substituindo-se (1.5) em (1.6), determina-se a relação entre o sinal de saída e os sinais de entrada do sistema (1.2), conforme descrito em (1.8):

$$Y(s) = C_m (sI - A_m)^{-1} B_m R(s) + C_m (sI - A_m)^{-1} B_w W(s)\tag{1.8}$$

Analisando-se efeito do sinal de perturbação $w(t)$ na saída $y(t)$ do sistema (1.2), considerando-se o sinal de entrada $r(t)$ nulo, segue de (1.8):

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C_m(sI - A_m)^{-1}B_w \quad (1.9)$$

neste caso, a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ pode ser minimizada devido ao projeto inicial do controlador K , que é um compensador $\mathcal{H}_2$.

Substituindo-se (1.5) em (1.7), considerando-se o sinal de perturbação $w(t)$ nulo, determina-se a relação entre o sinal de erro e o sinal de referência, conforme descrito em (1.10):

$$E(s) = C_m(sI - A_m)^{-1}B_mR(s) - D_mR(s) \quad (1.10)$$

Na modificação dos zeros pode-se projetar um rastreador de sinal minimizando a norma $\mathcal{H}_\infty$ entre o sinal de referência e o sinal de erro do sistema, sendo $G_{erro}(s)$ a função de transferência que relaciona a entrada $R(s)$ e a saída $E(s)$:

$$G_{erro}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m - D_m \quad (1.11)$$

em (1.11) utiliza-se a posição dos zeros, implícitos em B_m , para minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$.

Capítulo 2

Otimização $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

2.1 Projeto de um Compensador $\mathcal{H}_2$

2.1.1 A Norma $\mathcal{H}_2$

Antes de apresentar a norma $\mathcal{H}_2$, se faz necessário estudar o conceito de valor eficaz de um sinal, valor *RMS* (*Root-Mean-Square*). O valor eficaz de um sinal escalar é dado por [BB91]:

$$\|y\|_{rms} \triangleq \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

desde que o limite exista. Esta é uma clássica noção do tamanho de um sinal, muito utilizada em engenharia e seu significado, é que esta norma quantifica o valor médio da área sob um sinal que é igual a $y(t)^2$.

A norma *RMS* de um vetor de sinais é dado por:

$$\|y\|_{rms} \triangleq \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)' y(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

desde que o limite exista. Neste caso, o valor *RMS* é obtido levando-se em consideração a soma das áreas referentes ao quadrado de cada componente do vetor $y(t)$.

Considere um sistema linear invariante no tempo *SISO*, estritamente próprio, com sinal de entrada $u(s)$, saída $y(s)$ e função transferência $H(s)$. A norma

de um sistema pode ser formulada em termos dos sinais de entrada e saída do sistema. Uma medida de uma função de transferência é o valor *RMS* da saída quando a entrada é um processo estocástico particular, isto é, com características estatísticas conhecidas. Suponha que a entrada tem uma densidade espectral $S_u(w)$, e que $H(s)$ é estável. A densidade espectral da saída é dada por

$$S_y(w) = S_u(w)|H(jw)|^2$$

sendo que $|H(jw)|$ denota a magnitude de $H(jw)$. Tem-se ainda (veja [BB91]) para maiores detalhes):

$$\|y\| \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(jw)|^2 S_u(w) dw \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para o caso particular em que o processo estocástico estacionário corresponde a um ruído branco, tem-se $S_u(w) = 1$, para todo w . A norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema estável é definida com a norma *RMS* do sinal de saída quando a entrada é um ruído branco, ou seja:

$$\|H\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(jw)|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}}$$

A norma $\mathcal{H}_2$ tem ainda uma outra interpretação. Pelo teorema de Parseval, tem-se

$$\|H\|_2 = \left(\int_0^{\infty} h(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

sendo $h(t)$ a resposta ao impulso de $H(s)$. Então, pode-se interpretar a norma $\mathcal{H}_2$ com a medida da energia do sinal da saída $y(t)$ para uma entrada tipo impulsiva, $u(t) = \delta(t)$.

A norma $\mathcal{H}_2$ de um sistema linear invariante no tempo *MIMO* é dado por:

$$\|H\|_2 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [H(jw)H(-jw)'] dw)^{\frac{1}{2}}$$

que pelo teorema de Parseval,

$$\|H\|_2 \triangleq \left(\int_0^{\infty} \text{Tr} [h(t)h(t)'] dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para o caso de sistema discretos no tempo, a norma $\mathcal{H}_2$ de uma sistema *MIMO* é dado por

$$\|H\|_2 \triangleq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Tr}[H(e^{jw})H(e^{-jw})']dw \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para o sistema dinâmico estritamente próprio $H(s)$, estável, com realização em espaço de estados (A_s, B_s, C_s) ,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_s x(t) + B_s u(t) \\ y(t) &= C_s x(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

sendo $A_s \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B_s \in \mathcal{R}^{n \times m}$ e $C_s \in \mathcal{R}^{p \times n}$ supostamente conhecidas, pode definir a norma $\mathcal{H}_2$ através do seguinte problema de otimização, descrito na forma de LMIs [BGFB94]:

$$\begin{aligned}\|H(s)\|_2^2 &= \min \quad \text{Tr}(C_s Q C_s') \\ \text{s.a.} \quad &A_s Q + Q A_s' + B_s B_s' < 0 \\ &P > 0\end{aligned}$$

ou, de maneira equivalente (forma dual):

$$\begin{aligned}\|H(s)\|_2^2 &= \min \quad \text{Tr}(B_s' P B_s) \\ \text{s.a.} \quad &A_s' P + P A_s + C_s' C_s < 0 \\ &Q > 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

Pode-se manipular (2.2) através da utilização do complemento de Schur [BGFB94]. A idéia básica desta ferramenta de manipulação é a seguinte: sendo $Q(x) = Q(x)'$ e $L(x) = L(x)'$, a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & L(x) \end{bmatrix} > 0\tag{2.3}$$

é equivalente a

$$L(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)L(x)^{-1}S(x)' > 0 \quad (2.4)$$

sendo $Q(\cdot)$, $S(\cdot)$ e $L(\cdot)$ funções afins na variável $x \in \mathcal{R}$.

Assim, a desigualdade matricial (2.3) equivale às expressões dadas em (2.4).

Adotando-se um limitante superior para a função objetivo do problema (2.2), ou seja: $B_s'PB_s < Z$, ou ainda $Z - B_s'PB_s > 0$, sendo $Q = P^{-1}$, obtêm-se $Z - B_s'Q^{-1}B_s > 0$ e aplicando-se o complemento de Schur no sentido inverso, obtém-se

$$\begin{bmatrix} Z & B_s' \\ B_s & Q \end{bmatrix} > 0$$

Como $P = Q^{-1}$ e $P > 0$, pode-se multiplicar a equação (2.2) pela direita e pela esquerda por P^{-1} ,

$$P^{-1}[A_s'P + PA_s + C_s'C_s]P^{-1} < 0$$

$$P^{-1}A_s'PP^{-1} + P^{-1}PA_sP^{-1} + P^{-1}C_s'C_sP^{-1} < 0$$

sendo $PP^{-1} = I$,

$$QA_s' + A_sQ + QC_s'C_sQ < 0 \quad (2.5)$$

Aplicando-se o complemento de Schur no sentido inverso na desigualdade matricial (restrição) de (2.5) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -A_sQ - QA_s' & -QC_s' \\ -C_sQ & I \end{bmatrix} > 0$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} A_sQ + QA_s' & QC_s' \\ C_sQ & -I \end{bmatrix} < 0$$

Assim, o problema (2.2) pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \|H\|_2^2 = \min \quad & Tr(Z) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} Q & B'_s \\ B_s & Z \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} A_s Q + Q A'_s & Q C'_s \\ C_s Q & -I \end{bmatrix} < 0 \\ & Q > 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1.2 O compensador $\mathcal{H}_2$

O problema de otimização da norma $\mathcal{H}_2$ de (A, B_1, B_2, C) ilustrado na Figura 1.2 consiste em determinar um controlador K de tal forma que a influência do ruído na saída $y(t)$ do sistema seja a menor possível. Portanto, deseja-se minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ entre a entrada $w(t)$ (ruído) e a saída $y(t)$, fazendo-se $u(t) = -Kx(t)$ em (1.1) têm-se:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_2[-Kx(t)] + B_1w(t)$$

então,

$$\dot{x}(t) = (A - B_2K)x(t) + B_1w(t) \quad (2.7)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

aplicando-se a equação (2.6) ao sistema indicado em (2.7), com:

$$A_s = A - B_2K;$$

$$B_s = B_1;$$

$$C_s = C.$$

obtêm-se o seguinte problema de otimização descrito na forma de LMIs:

$$\begin{aligned} \min \quad & Tr(Z) \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} Q & B_1' \\ B_1 & Z \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} AQ + QA' - B_2Y - Y'B_2 & QC' \\ CQ & -I \end{bmatrix} < 0 \\ & Q > 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $Q = Q'$ e o controlador K é obtido com: $K = YQ^{-1}$, sendo Q e Y soluções ótimas de (2.8).

2.2 Alocação de Zeros

Considerando-se o sistema (2.1); uma estrutura que permite a alocação de zeros em sistemas de controle ([FPEN94] e [AQTM02a]) é mostrada na Figura 2.1, onde seleciona-se M e N de modo que os zeros de malha fechada sejam alocados em lugares arbitrários de escolha do projetista, sendo $M \in R^{n \times 1}$ e $N \in R$.

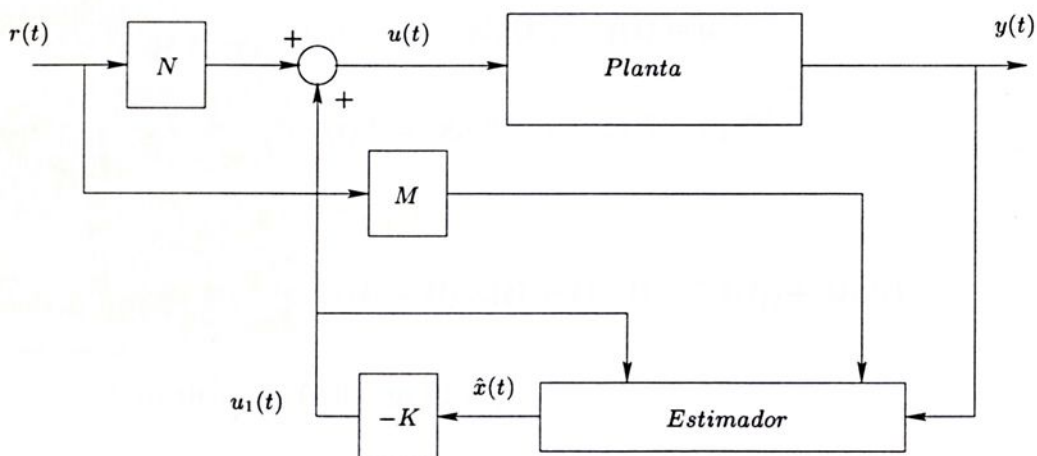


Figura 2.1: Sistema de alocação de zeros.

O estimador de estados utilizado no sistema de alocação de zeros é um estimador de *Kalman*, descrito no Apêndice A. O estimador é projetado de modo que não afete o desempenho do sistema.

Se aplicarmos uma entrada $r(t)$ na forma exponencial,

$$r(t) = r_o e^{st}$$

sendo que $s = z_i$, ou seja, o expoente é matematicamente igual a um zero z_i do sistema, neste caso,

$$r(t) = r_o e^{z_i t}$$

então para a entrada $r(t)$, a saída do sistema é nula, isto é, identicamente igual a zero, supondo que as condições iniciais do sistema são nulas:

$$y(t) = 0 \quad \text{se} \quad r(t) = r_o e^{z_i t}.$$

Para determinar a equação dos zeros do sistema de $r(t)$ para $y(t)$ descrito na Figura 2.1 basta encontrar a equação dos zeros de $r(t)$ para $u(t)$, pois se existe um zero de transmissão de r para u , então existe um zero de transmissão de r para y , a menos que ocorra cancelamento de pólos e zeros no sistema, para maiores detalhes vide [FPEN94]. Dado um sistema de controle, pode-se obter a equação característica dos zeros deste sistema relacionando-se as equações contidas em (2.10):

$$u_1(t) = -K\hat{x}(t), \quad y(t) = 0 \quad (2.9)$$

$$r(t) = r_o e^{z_i t} \quad \text{e} \quad \hat{x}(t) = \hat{x}_o e^{z_i t}. \quad (2.10)$$

da Figura 1.3 têm-se:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_2 u_1(t) + L[y(t) - C\hat{x}(t)] + Mr(t) \quad (2.11)$$

Substituindo (2.9) em (2.11),

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_2[-K\hat{x}(t)] - LC\hat{x}(t) + Mr(t)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - B_2 K - LC)\hat{x}(t) + Mr(t) \quad (2.12)$$

então, substituindo (2.10) em (2.12) obtêm-se:

$$\dot{\hat{x}}(t) = z_i e^{z_i t} \hat{x}_o = (A_s - B_s K - LC_s) \hat{x}_o e^{z_i t} + M r_o e^{z_i t},$$

$$z_i e^{z_i t} \hat{x}_o - (A_s - B_s K - LC_s) \hat{x}_o e^{z_i t} - M r_o e^{z_i t} = 0$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} z_i I - A_s + B_s K + LC_s & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_o \\ r_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Como neste caso considera-se a entrada $r(t)$ equivalentemente à nulidade da resposta $u(t)$ do sistema, tem-se:

$$u(t) = -K \hat{x}_o(t) + N r(t) = -K \hat{x}_o e^{z_i t} + N r_o e^{z_i t} = 0$$

ou,

$$\begin{bmatrix} -K & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_o \\ r_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Reagrupando (2.13) e (2.14), tem-se:

$$\begin{bmatrix} z_i I - A_s + B_s K + LC_s & -M \\ -K & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_o \\ r_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

De (2.15) podemos concluir que um zero do sistema descrito na Figura 2.1 é z_i , o que implica que a equação (2.15) tenha uma solução não trivial, isto é equivalente a solucionar o sistema a seguir,

$$\det \begin{bmatrix} sI - A_s + B_s K + LC_s & -M \\ -K & N \end{bmatrix} = 0 \quad (2.16)$$

sendo $s = z_i$.

A equação (2.16) é denominada equação característica dos zeros do sistema da Figura 2.1 e depende de M e N , onde a variação destes fatores permite a alocação de zeros. Neste trabalho é tratado o caso *SISO*, os zeros alocados são os zeros de transmissão do sistema, que são as raízes do polinômio do numerador da função transferência, mas para maiores detalhe sobre zeros vide [CGL97].

2.3 Otimização da Norma $\mathcal{H}_\infty$ com a Modificação de Zeros

2.3.1 A Norma $\mathcal{H}_\infty$

Uma verificação simples para que um sinal $y(t)$ seja considerado pequeno, é testar se o sinal é pequeno para todo $t \geq 0$, ou equivalentemente, se o seu máximo valor absoluto é pequeno [BB91]. Uma norma que quantifica esta medida é a norma $\mathcal{L}_\infty$, também chamada de norma pico, definida como

$$\|y\| \triangleq \sup_{t \geq 0} |y(t)|$$

Para o caso de um vetor de sinais com l componentes, a norma $\mathcal{L}_\infty$ é definida como:

$$\|y\| \triangleq \max_{1 \leq i \leq l} \|y_i(t)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \max_{1 \leq i \leq l} |y_i(t)|$$

Este conceito pode ser aplicado a sistemas lineares. Um sistema dinâmico é "pequeno" caso sua função de transferência $H(s)$ possua pequenas magnitudes em todas as frequências. Uma norma que quantifica esta medida para sistemas *SISO* é definida por:

$$\|H\|_\infty \triangleq \sup_{\omega > 0} |H(j\omega)|$$

e é chamada de norma $\mathcal{H}_\infty$ de $H(s)$.

Para sistemas *MIMO*, a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida como:

$$\|H\| \triangleq \sup_{\omega > 0} \sigma_{\max}(H(j\omega))$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ também pode ser interpretada como a norma induzida $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$, ou seja

$$\|H\| = \gamma \Leftrightarrow \|y\|_2 \leq \gamma \|w\|_2 \quad \forall w \in \mathcal{L}_2$$

veja [BB91] para maiores detalhes.

Considerando-se o sistema dinâmico próprio $H(s)$, estável, representado na forma de espaço de estado (A_s, B_s, C_s, D_s) :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_s x(t) + B_s u(t) \\ y(t) &= C_s x(t) + D_s u(t)\end{aligned}\quad (2.17)$$

sendo $A_s \in R^{n \times n}$, $B_s \in R^{n \times m}$, $C_s \in R^{p \times n}$ e $D_s \in R^{p \times m}$ supostamente conhecidas. A matriz de transferência do sistema é dada por $H(s) = C_s(sI - A_s)^{-1}B_s + D_s$.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (A_s, B_s, C_s, D_s) relaciona-se com a existência de uma matriz P definida positiva através do chamado *Bounded Real Lemma* (veja por exemplo [BGFB94]):

$$\|H\|_\infty < \delta \Leftrightarrow \exists P = P' > 0 : \begin{bmatrix} A_s'P + PA_s + \gamma^{-2}C_s'C_s & PB_s + \gamma^{-2}C_s'D_s \\ B_s'P + \gamma^{-2}D_s'C_s & \gamma^{-2}D_s'D_s - I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.18)$$

Usando o complemento de Schur e definindo $\delta \equiv \gamma^2$, a equação (2.18) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} -A_s'P - PA_s & -PB_s & C_s' \\ -B_s'P & I & D_s' \\ C_s & D_s & \delta I \end{bmatrix} > 0$$

Com isto, o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema pode ser realizado através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}\|H\|_\infty^2 &= \min \quad \delta \\ \text{s.a} \quad &\begin{bmatrix} -A_s'P - PA_s & -PB_s & C_s' \\ -B_s'P & I & D_s' \\ C_s & D_s & \delta I \end{bmatrix} > 0 \\ &P > 0 \\ &\delta > 0\end{aligned}\quad (2.19)$$

ou ainda na forma dual:

$$\begin{aligned} \|H\|_\infty^2 = \min \quad & \delta \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} -A_s Q - Q A'_s & -Q C'_s & B_s \\ -C_s Q & I & D_s \\ B'_s & D'_s & \delta I \end{bmatrix} > 0 \\ & Q > 0 \\ & \delta > 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

2.3.2 Modificação de Zeros para Otimizar a Norma $\mathcal{H}_\infty$

O problema de otimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ de $(A_m, B_m, C_m, -D_m)$ indicado em (1.11) consiste em determinar o valor dos parâmetros M e N (presentes em B_m e que determinam a posição dos zeros do sistema) que minimizem a norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema de controle dado em (1.11), isto é, modificar os zeros de tal modo que a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ seja mínima, constituindo-se um rastreador de sinal. O projeto de M e N consiste em minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$, e é dado segundo (2.20), pela resolução do seguinte problema de otimização descrito na forma de LMIs:

$$\begin{aligned} \min \quad & \delta \\ \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} -A_m Q - Q A'_m & -Q C'_m & B_m \\ -C_m Q & I & -D_m \\ B'_m & -D'_m & \delta I \end{bmatrix} > 0 \\ & Q > 0 \\ & \delta > 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

sendo $Q = Q'$.

Particionado-se Q na forma

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

com $Q_{11} \in R^{n \times n}$, $Q_{12} \in R^{n \times n}$ e $Q_{22} \in R^{n \times n}$, a equação (2.21) pode ser reescrita de acordo com a equação (2.22),

$$\min \quad \delta$$

s.a

$$\begin{bmatrix} -AQ_{11} - Q_{11}A' + Z_1Q'_{12} + Q_{12}Z'_1 & -AQ_{12} + Z_1Q_{22} - Q_{11}T' - Q_{12}A'_o & -Q_{11}C' & B_2N \\ -TQ_{11} - A_oQ'_{12} - Q'_{12}A' + Q_{22}Z'_1 & -Q'_{12}T' - Q_{22}A'_o - TQ_{12} - A_oQ_{22} & -Q'_{12}C' & M \\ -CQ_{11} & -CQ_{12} & I & -D_m \\ NB'_2 & M' & -D'_m & \delta I \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.22)$$

$$\delta > 0$$

sendo M e N soluções ótimas de (2.22).

O vetor M e o ganho N determinam a posição dos zeros no sistema de controle e como seus valores são ótimos, então o valor de M e N encontrado minimizam a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $(A_m, B_m, C_m, -D_m)$. Ainda através de processos de otimização, pode-se modificar os zeros em outras estruturas, como por exemplo apresentado em [AQTM02b].

Nesta seção o processo de determinação da norma $\mathcal{H}_\infty$ é realizado pela solução da equação (2.20), mas existe a forma dual que pode solucionar o mesmo problema, porém quando utiliza-se esta outra forma, existem complicações para o projeto e isto deve-se ao fato de que surgem desigualdades matriciais bilineares - BMIs (do inglês, *Bilinear Matrix Inequalities*) nos equacionamentos, o que dificulta na resolução do problema. Portanto, para evitar este fato, utiliza-se a equação (2.20) para o projeto do rastreador, para o qual todo o equacionamento do sistema é descrito

na forma de LMIs, caso contrário, ao utilizar-se a equação (2.19) no desenvolvimento do projeto, surgem bilinearidades.

Para essa formulação, o rastreador funciona adequadamente em uma determinada faixa de frequência, e às vezes pode não ser a desejada pelo projetista. Neste caso o ideal seria que o rastreador executasse suas funções segundo uma faixa de frequência contida nas especificações de projeto. Então para isso, o projeto foi feito com peso na frequência.

Projeto com Peso na Frequência

Capítulo 3

O Caso com Peso na Frequência

A utilização de peso na frequência em sistemas de Controle tem como objetivo atingir especificações de projeto em malha fechada. Pode-se verificar a utilização de pesos em frequência descrito na forma de desigualdades matriciais bilineares - BMIs para redução de modelos em [VD97]. Para o projeto do rastreador deseja-se encontrar a solução global que otimize o problema descrito a seguir:

$$\min \|W(s)H_m(s)V(s)\|_\infty \quad (3.1)$$

sendo $V(s)$ o peso na frequência de entrada, $W(s)$ o peso na frequência de saída e considera-se $H_m = (A_m, B_m, C_m, -D_m)$ uma realização do sistema linear invariante no tempo e estável indicado em (1.11). Na Figura 3.1 é ilustrada a estrutura de inclusão de peso na frequência:

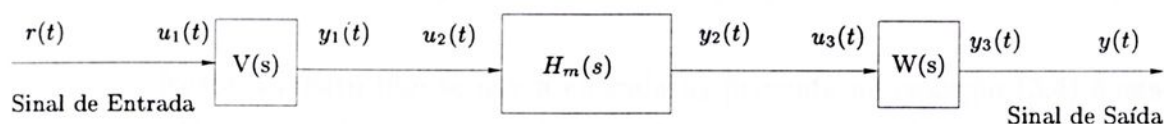


Figura 3.1: Estrutura de sistemas com peso na frequência.

Os equacionamentos necessários para a obtenção do projeto com peso na frequência são baseados na Figura 3.1. O sistema H_m pode ser descrito na forma de variáveis de estado da seguinte forma:

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_2(t)$$

$$y_2(t) = C_m x_m(t) - D_m u_2(t) \quad (3.2)$$

e de acordo com a Figura 3.1 a saída do sistema H_m é a entrada do filtro $W(s)$, logo descreve-se o sistema W na forma de variáveis de estado, supondo-se $A_w \in R^{2n \times 2n}$, $B_w \in R^{2n \times 1}$, $C_w \in R^{1 \times 2n}$ e $D_w \in R^{1 \times 1}$. A ordem dos filtros é o dobro da ordem da planta para que se possa determinar uma realização mínima para o sistema do projeto do rastreador com peso na frequência.

$$\dot{x}_w(t) = A_w x_w(t) + B_w [C_m x_m(t) - D_m u_2(t)] \quad (3.3)$$

$$y_3(t) = C_w x_w(t) + D_w [C_m x_m(t) - D_m u_2(t)]$$

sendo $u_3(t) = y_2(t) = C_m x_m(t) - D_m u_2(t)$.

Realizando algumas manipulações algébricas na equação (3.3) obtêm-se:

$$\dot{x}_w(t) = A_w x_w(t) + B_w C_m x_m(t) - B_w D_m u_2(t) \quad (3.4)$$

$$y_3(t) = C_w x_w(t) + D_w C_m x_m(t) - D_w D_m u_2(t)$$

Ainda pode-se descrever o filtro de entrada $V(s)$ na forma de variáveis de estado, supondo-se $A_v \in R^{2n \times 2n}$, $B_v \in R^{2n \times 1}$, $C_v \in R^{1 \times 2n}$ e $D_v \in R^{1 \times 1}$.

$$\dot{x}_v(t) = A_v x_v(t) + B_v r(t)$$

$$y_1 = C_v x_v(t) + D_v r(t) \quad (3.5)$$

Neste contexto têm-se que a entrada u_2 presente na equação (3.4) é exatamente a saída do filtro $V(s)$, então substituindo-se (3.5) em (3.4),

$$\dot{x}_w(t) = A_w x_w(t) + B_w C_m x_m(t) - B_w D_m [C_v x_v(t) + D_v r(t)] \quad (3.6)$$

$$y_3(t) = C_w x_w(t) + D_w C_m x_m(t) - D_w D_m [C_v x_v(t) + D_v r(t)]$$

sendo $y_1(t) = u_2(t) = C_v x_v(t) + D_v r(t)$.

Reagrupando os elementos de (3.6),

$$\dot{x}_w(t) = A_w x_w(t) + B_w C_m x_m(t) - B_w D_m C_v x_v(t) - B_w D_m D_v r(t) \quad (3.7)$$

$$y_3(t) = C_w x_w(t) + D_w C_m x_m(t) - D_w D_m C_v x_v(t) - D_w D_m D_v r(t)$$

Portanto uma representação na forma de variáveis de estado em função de $x_m(t)$, $x_w(t)$ e $x_v(t)$ pode ser descrita de acordo com a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m(t) \\ \dot{x}_w(t) \\ \dot{x}_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_m & 0 & 0 \\ B_w C_m & A_w & -B_w D_m C_v \\ 0 & 0 & A_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ x_w(t) \\ x_v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_m \\ -B_w D_m D_v \\ B_v \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} D_w C_m & C_w & -D_w D_m C_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m(t) \\ x_w(t) \\ x_v(t) \end{bmatrix} - D_w D_m D_v r(t)$$

Com isso, uma possível realização mínima em espaço de estado de $\check{H}_{wv} = W(s)H_m(s)V(s)$ é:

$$\left[\begin{array}{c|c} \check{A}_{vw} & \check{B}_{vw} \\ \hline \check{C}_{vw} & \check{D}_{vw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_m & 0 & 0 & B_m \\ B_w C_m & A_w & -B_w D_m C_v & -B_w D_m D_v \\ 0 & 0 & A_v & B_v \\ \hline D_w C_m & C_w & -D_w D_m C_v & -D_w D_m D_v \end{array} \right] \quad (3.8)$$

Para sistemas *MIMO* deve existir peso na frequência nas saídas e nas entradas, porém para sistemas *SISO* é necessário incluir peso somente em um dos lados, pois o peso na entrada e na saída são equivalentes.

Através da resolução do problema de otimização descrito em (3.9) na forma de LMIs determina-se o vetor M e o ganho N utilizando peso na frequência, estes parâmetros minimizam a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ (rastreador de sinais).

min δ

s.a

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ll}
 -AQ_{11} - Q_{11}A' + Z_1Q'_{12} + Q_{12}Z'_1 & -AQ_{12} + Z_1Q_{22} - Q_{11}T' \dots \\
 -TQ_{11} - A_oQ'_{12} - Q'_{12}A' + Q_{22}Z'_1 & -TQ_{12} - A_oQ_{22} - Q'_{12}T' \dots \\
 -B_{w1}CQ_{11} - A_{w1}Q'_{13} - A_{w2}Q'_{14} - Q'_{13}A' + Q'_{23}Z'_1 & -B_{w1}CQ_{12} - A_{w1}Q'_{23} - A_{w2}Q'_{24} \dots \\
 -B_{w2}CQ_{11} - A_{w3}Q'_{13} - A_{w4}Q'_{14} - Q'_{14}A' + Q'_{24}Z'_1 & -B_{w2}CQ_{12} - A_{w3}Q'_{23} - A_{w4}Q'_{24} \dots \\
 -D_wCQ_{11} - C_{w1}Q'_{13} - C_{w2}Q'_{14} & -D_wCQ_{12} - C_{w1}Q'_{23} - C_{w2}Q'_{24} \dots \\
 & NB'_2 \quad M' \dots
 \end{array} \right. \\
 & \dots - Q_{12}A'_o \quad -Q_{11}C'B'_{w1} - Q_{13}A'_{w1} - Q_{14}A'_{w2} - AQ_{13} + Z_1Q_{23} \\
 & \dots - Q_{22}A'_o \quad -Q'_{12}C'B'_{w1} - Q_{23}A'_{w1} - Q_{24}A'_{w2} - TQ_{13} - A_oQ_{23} \\
 & \dots - Q'_{13}T' - Q'_{23}A'_o \quad -B_{w1}CQ_{13} - Q'_{13}C'B'_{w1} - A_{w1}Q_{33} - Q_{33}A'_{w1} - A_{w2}Q'_{34} - Q_{34}A'_{w2} \\
 & \dots - Q'_{14}T' - Q'_{24}A'_o \quad -B_{w2}CQ_{13} - A_{w3}Q_{33} - A_{w4}Q'_{34} - Q'_{14}C'B'_{w1} - Q'_{34}A'_{w1} - Q_{44}A'_{w2} \\
 & \dots \quad -D_wCQ_{13} - C_{w1}Q_{33} - C_{w2}Q'_{34} \\
 & \dots \quad -D_mB'_{w1} \\
 & -Q_{11}C'B'_{w2} - Q_{13}A'_{w3} - Q_{14}A'_{w4} - AQ_{14} + Z_1Q_{24} \quad Q_{11}C'D_w - Q_{13}C'_{w1} \dots \\
 & -Q'_{12}C'B'_{w2} - Q_{23}A'_{w3} - Q_{24}A'_{w4} - TQ_{14} - A_oQ_{24} \quad Q'_{12}C'D_w - Q_{23}C'_{w1} \dots \\
 & -Q'_{13}C'B'_{w2} - Q_{33}A'_{w3} - Q_{34}A'_{w4} - B_{w1}CQ_{14} - A_{w1}Q_{34} - A_{w2}Q_{44} \quad -Q'_{13}C'D_w - Q'_{33}C'_{w1} \dots \\
 & -B_{w2}CQ_{14} - Q'_{14}C'B'_{w2} - A_{w3}Q'_{34} - A_{w4}Q_{44} - Q_{44}A'_{w4} \quad -Q'_{14}C'D_w - Q'_{34}C'_{w1} \dots \\
 & -D_wCQ_{14} - C_{w1}Q_{34} - C_{w2}Q_{44} \quad I \\
 & -B'_{w2}D_m \quad -D_wD_m
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ll}
 \dots - Q_{14}C'_{w2} & B_2N \\
 \dots - Q_{24}C'_{w2} & M \\
 \dots - Q_{34}C'_{w2} & -B_{w1}D_m \\
 \dots - Q_{44}C'_{w2} & -B_{w2}D_m \\
 \dots & -D_wD_m \\
 \dots & \delta I
 \end{array} \right] > 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc}
 Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\
 Q'_{12} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\
 Q'_{13} & Q'_{23} & Q_{33} & Q_{34} \\
 Q'_{14} & Q'_{24} & Q'_{34} & Q_{44}
 \end{array} \right] > 0 \quad (3.9)$$

$$\delta > 0$$

sendo a matriz particionada $Q_{ij} = Q'_{ij}$, $i,j=1,2,3,4$ e as matrizes A_w , B_w e C_w que representam a dinâmica do filtro, particionada da seguinte forma:

$$A_w = \begin{bmatrix} A_{w1} & A_{w2} \\ A_{w3} & A_{w4} \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} B_{w1} \\ B_{w2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_w = \begin{bmatrix} C_{w1} & C_{w2} \end{bmatrix}.$$

sendo $A_w \in R^{2n \times 2n}$, $B_w \in R^{2n \times 1}$ e $C_w \in R^{1 \times 2n}$.

O vetor M e o ganho N são soluções ótimas de (3.9) e minimizam a norma $\mathcal{H}_\infty$ entre o sinal de referência e o sinal de erro do sistema considerando peso na frequência. O processo de obtenção da realização mínima para o projeto com peso na frequência não é único e para esta seção foi proposta uma solução. Deve-se atentar ao fato que outras realizações podem tornar difícil a resolução do processo de otimização descrito em (3.9), devido ao surgimento de BMIs no equacionamento. Considere uma outra realização para o problema do rastreador com peso na frequência, $\check{H}_{vw} = W(s)H_m(s)V(s)$:

$$\left[\begin{array}{c|c} \check{A}_{vw} & \check{B}_{vw} \\ \check{C}_{vw} & \check{D}_{vw} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_m & 0 & B_m C_v & B_m D_v \\ B_w C_m & A_w & -B_w D_m C_v & -B_w D_m D_v \\ 0 & 0 & A_v & B_v \\ \hline D_w C_m & C_w & -D_w D_m C_v & -D_w D_m D_v \end{array} \right] \quad (3.10)$$

a utilização equação (3.10) no projeto do rastreador é um exemplo de realização que causa o surgimento de BMIs nos equacionamentos, pois para este caso a equação (3.9) apresenta termos bilineares, tais como: $B_2 C_{v1} N Q'_{13}$, $B_2 C_{v2} N Q'_{14}$, $M C_{v1} Q'_{13}$ e $M C_{v2} Q'_{14}$, o que dificulta a resolução do problema.

Os filtros utilizados no equacionamento do rastreador somente são usados em projeto com o objetivo de ajustar os parâmetros M e N para uma determinada faixa de frequência, mas na implementação ou simulação do sistema estes filtros são descartados.

Capítulo 4

Dependência entre o Projeto do Compensador $\mathcal{H}_2$ (de $w(t)$ para $y(t)$) e a Modificação de Zeros (de $r(t)$ para $y(t)$)

4.1 Projeto do Compensador $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$

Como visto anteriormente, para o sistema descrito em (1.3) tem-se que a função de transferência de $Y(s)$ para $W(s)$ é dada por:

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = C_m(sI - A_m)^{-1}B_w$$

neste caso o controlador K que minimiza a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ está contido na matriz A_m descrita em (1.4), e isto provém do projeto inicial do compensador $\mathcal{H}_2$, conforme ilustrado no Capítulo 2.1, logo o projeto do compensador $\mathcal{H}_2$ é independente da modificação de zeros.



4.2 Modificação de Zeros de $r(t)$ para $y(t)$

Como visto anteriormente, para o sistema descrito em (1.3) tem-se que a função de transferência de $R(s)$ para $E(s)$ é dada por:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m - D_m$$

e a função de transferência de $R(s)$ para $Y(s)$,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = C_m(sI - A_m)^{-1}B_m$$

Para o rastreador de sinal, minimiza-se a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $E(s)$ para $R(s)$ através da otimização do vetor M e do ganho N , ambos contidos no problema de otimização descrito em (3.9). O vetor M juntamente com o ganho N , presentes em B_m , são responsáveis pela modificação dos zeros do sistema, mas esta modificação utiliza um termo presente no projeto do compensador $\mathcal{H}_2$, pois em A_m está contido o termo B_2K , então a modificação de zeros é dependente do projeto do compensador $\mathcal{H}_2$.

Capítulo 5

Exemplos de Aplicação

5.1 Exemplo 1

Neste exemplo considera-se um sistema linear invariante no tempo de terceira ordem e projeta-se um rastreador com rejeição à perturbação que está presente em sua estrutura. Seja o sistema descrito na forma de variáveis de estado dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0895 & -0,286 & 0 \\ -0,0439 & -0,272 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0145 \\ -0,0122 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0,0069 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

sendo $x(t)$ o vetor de estados, $u(t)$ o sinal de controle e $w(t)$ é um ruído branco (perturbação) acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar em sinais de baixa frequência (até 10 *rad/seg*), então é proposto o filtro $W_1(s)$:

$$W_1(s) = \frac{10}{1 \times 10^{-9}s^6 + 3 \times 10^{-7}s^5 + 3,3 \times 10^{-5}s^4 + 0,0016s^3 + 0,033s^2 + 0,3s + 1}$$

na Figura 5.1 é ilustrado o diagrama de Bode do filtro W_1 .



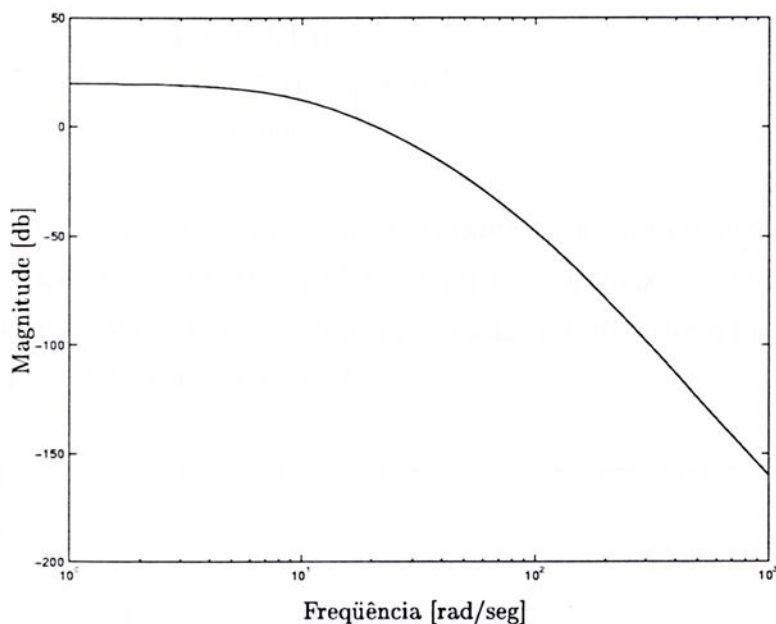


Figura 5.1: Diagrama de Bode do filtro $W_1(s)$.

Analisando-se o diagrama de Bode do filtro $W_1(s)$ verifica-se que os sinais de alta frequência são atenuados, enquanto sinais de baixa frequência são amplificados, atendendo às especificações de projeto. Porém se os resultados do rastreador não forem satisfatório, ainda pode-se aumentar o ganho do filtro utilizado em projeto, a fim de atingir as especificações do rastreador. A ordem do filtro igual ao dobro da ordem do sistema, a fim de que se possa determinar uma realização mínima para o sistema aumentado, para maiores detalhes sobre projetos de filtros ver Apêndice B.

Utilizando-se a estrutura descrita na Figura 1.3 para o sistema descrito em (5.1), projeta-se um controlador K para minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ através das equações descritas em (2.8), depois um estimador de *Kalman* de estados e na sequência projeta-se o rastreador para baixas frequências de até 10 *rad/seg* minimizando-se norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ utilizando o projeto de modificação de zeros com peso na frequência, conforme descrito em (3.9).

O compensador $\mathcal{H}_2$ projetado para este exemplo, bem como o ganho L do estimador de *Kalman* são dados a seguir:

$$K = \begin{bmatrix} -0,0025 & -0,0462 & -112,27 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$L = \begin{bmatrix} -235,151 \\ 1,641 \\ 0,006 \end{bmatrix} \times 10^5$$

A norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ atingida no projeto é de $6,5449 \times 10^{-13}$, o que implica em uma atenuação do sinal de perturbação e consequentemente a anulação do efeito deste ruído no sistema. A Figura 5.2 ilustra o diagrama de Bode da função transferência $Y(s)/W(s)$ descrita em 1.9.

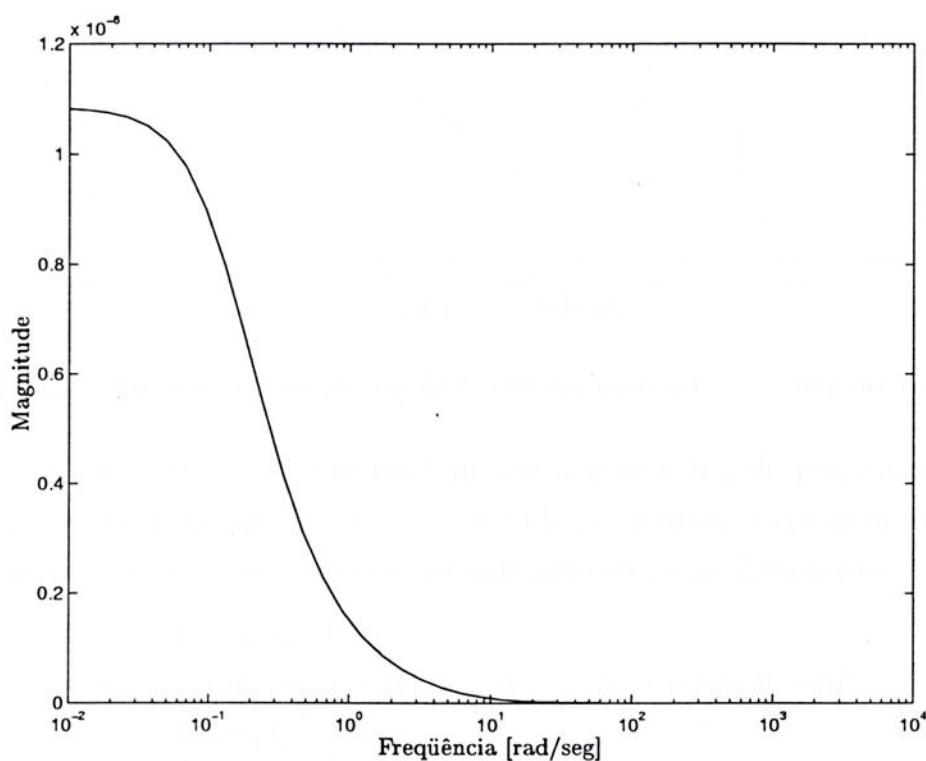


Figura 5.2: Resposta em frequência da função transferência $Y(s)/W(s)$ descrita em (1.9).

Na modificação de zeros foi minimizada a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ para sinais de baixa frequência (até 10 rad/seg), sendo $e(t)$ o erro entre a saída e a entrada, afim de constituir um seguidor de referência. O valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema tomando com base todo o espectro de frequência é de 6,7117; enquanto para a faixa de frequência de operação especificada em projeto foi de 0,0319, isto implica que para a faixa de frequência especificada em projeto, o rastreador opera perfeitamente. A Figura 5.3 ilustra o diagrama de Bode de $G_{\text{erro}}(s)$ descrito em (1.11).

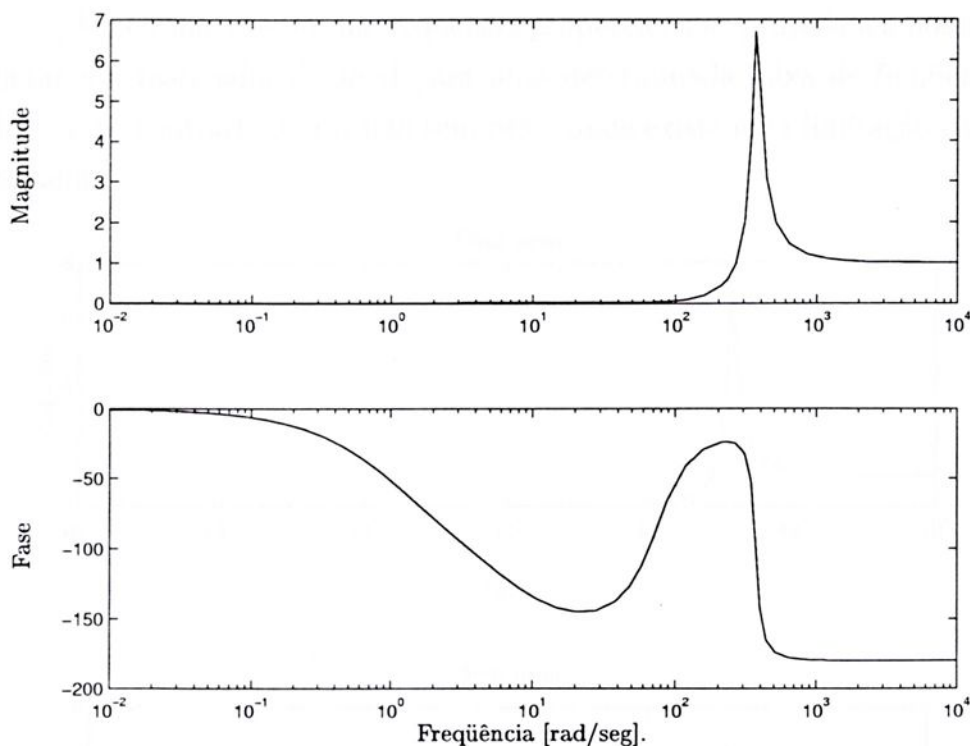


Figura 5.3: Resposta em frequência da função transferência G_{erro} descrito em (1.11).

Na Figura 5.3 pode-se verificar que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do projeto na faixa de frequência de operação (até 10 rad/seg) atende as características para um sistema rastreador de sinal e os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} 316,00 \\ 1286,91 \\ 0,60 \end{bmatrix} \times 10^2 \quad \text{e} \quad N = -106,6 \times 10^5$$

Para efeito de comparação, considerando o mesmo sistema para um seguidor de referência projetado sem especificações de peso na frequência obteve-se os resultados mostrados na Figura 5.1 (b), verifica-se ao analisar a Figura 5.1 (a) e (b) que a faixa de frequência de operação do rastreador é menor, o que representa uma restrição no seu funcionamento, por exemplo, para o caso sem peso na frequência (b), não ocorre rastreamento para sinais de baixa frequência, sendo assim este projeto não funcionaria se fosse adotado como sinal de referência um degrau, mas considerando o caso com peso na frequência (a) a entrada de referência do tipo degrau poderia ser utilizada, pois neste projeto ocorre rastreamento para sinais de baixa frequência.

A inclusão de pesos na frequência proporciona ao projetista a possibilidade de projetar um rastreador de sinal para uma determinada faixa de frequência pré-estabelecida, ao contrário do projeto sem peso, onde existe uma limitação para o uso do rastreador.

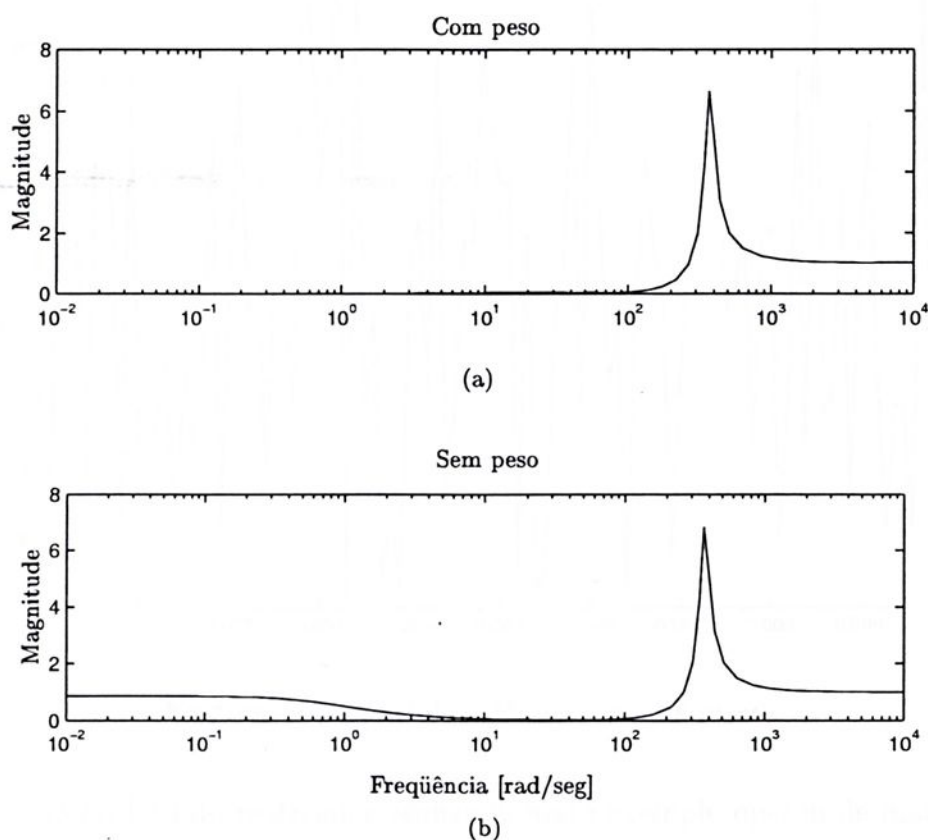


Figura 5.4: Resposta em frequência de $G_{\text{erro}}(s)$: (a) projeto com peso na frequência, (b) projeto sem peso na frequência.

Para simulação considera-se um sinal de entrada $r(t) = \text{sen}(10t)$ e um sinal de perturbação $w(t)$ do tipo ruído branco ilustrado na Figura 5.5, estes ruídos apresentam amplitudes aleatórias e para as simulações considera-se que a máxima amplitude deste sinal é de 0,01.

Para o sinal de perturbação presente no sistema foi projetado em (2.8) um compensador $\mathcal{H}_2$ que atenuou totalmente o sinal de ruído, com isso anulando o seu efeito no sistema. Utilizando a modificação de zeros projetou-se um rastreador de sinal e para estas entradas: $r(t)$ e $w(t)$, tem-se o resultado de simulação ilustrado

na Figura 5.6.

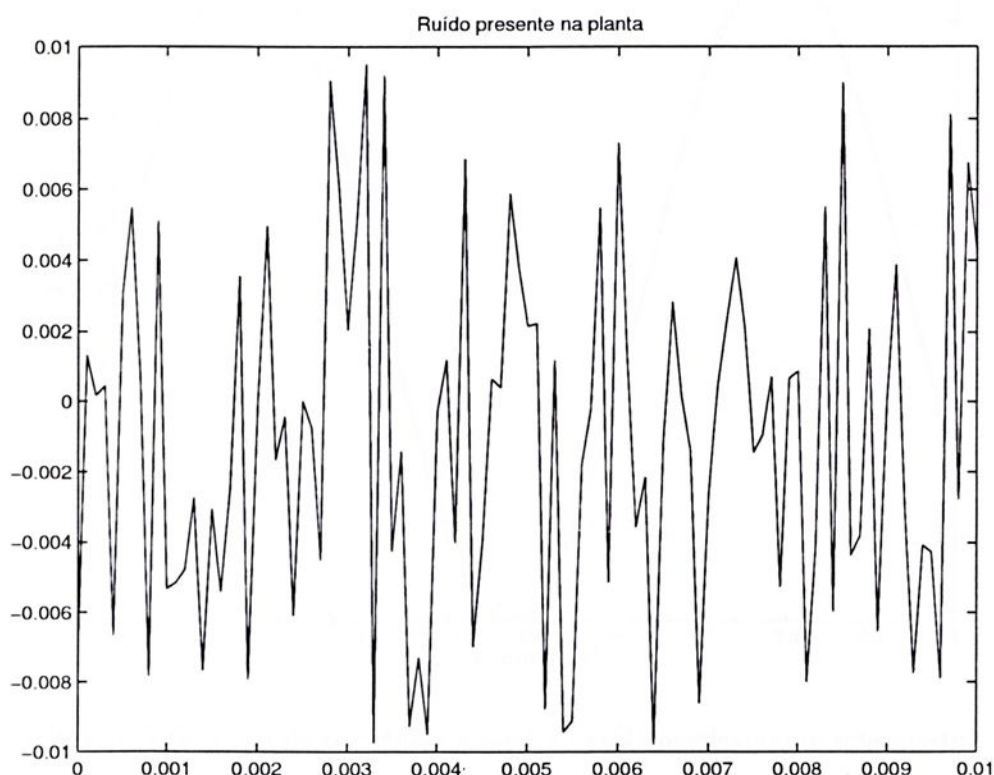


Figura 5.5: Sinal de ruído presente na planta.

O projeto do rastreador realizado neste exemplo operou de maneira adequada para frequência abaixo de 10 rad/seg , então é esperado que ocorra erro de regime nulo para uma entrada do tipo degrau, pois este tipo entrada possui frequência nula e isto pode ser visualizado na Figura 5.7.

Para este exemplo os zeros do sistema são: -6 ; -8 ; $-284,1 \pm j286,1$ e os pólos em malha fechada: $-0,14$; $-26,40 \pm j369,15$; $\{-2,8343 \pm j2,8346; -0,06515\} \times 10^2$.

Os zeros e os pólos alocados podem ser visualizados no mapeamento de pólos e zeros do sistema ilustrado na Figura 5.8, bem como os pólos e zeros da planta. Ao analisar a Figura 5.8 observa-se um possível cancelamento de pólos e zeros, porém isto não ocorre, o que acontece na realidade é que os pólos e zeros estão bem próximos.

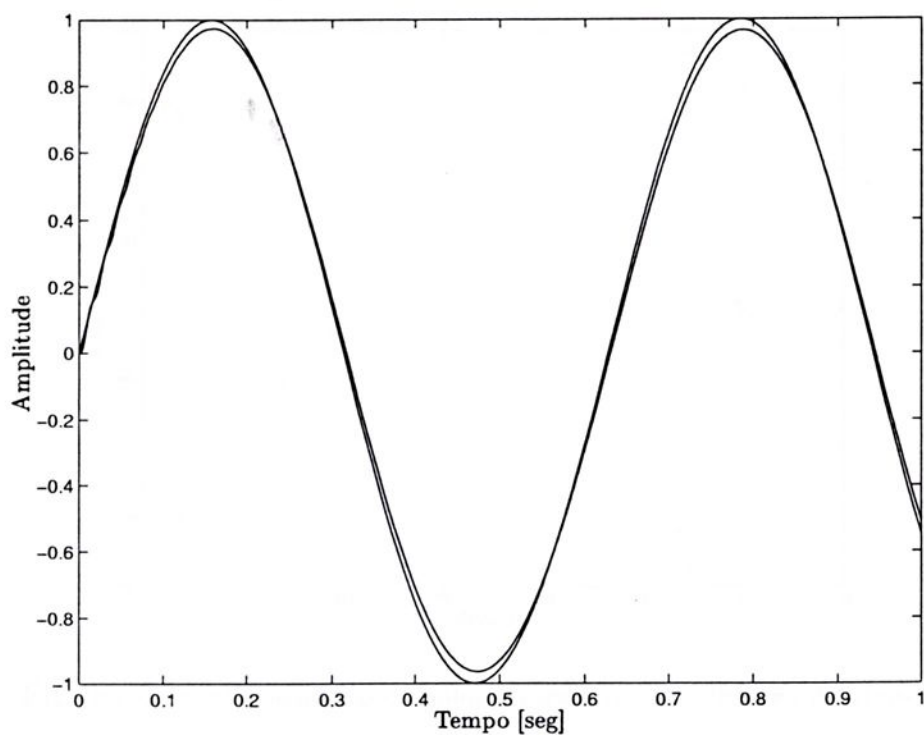


Figura 5.6: Sinal de referência e sinal de saída praticamente sobrepostos.

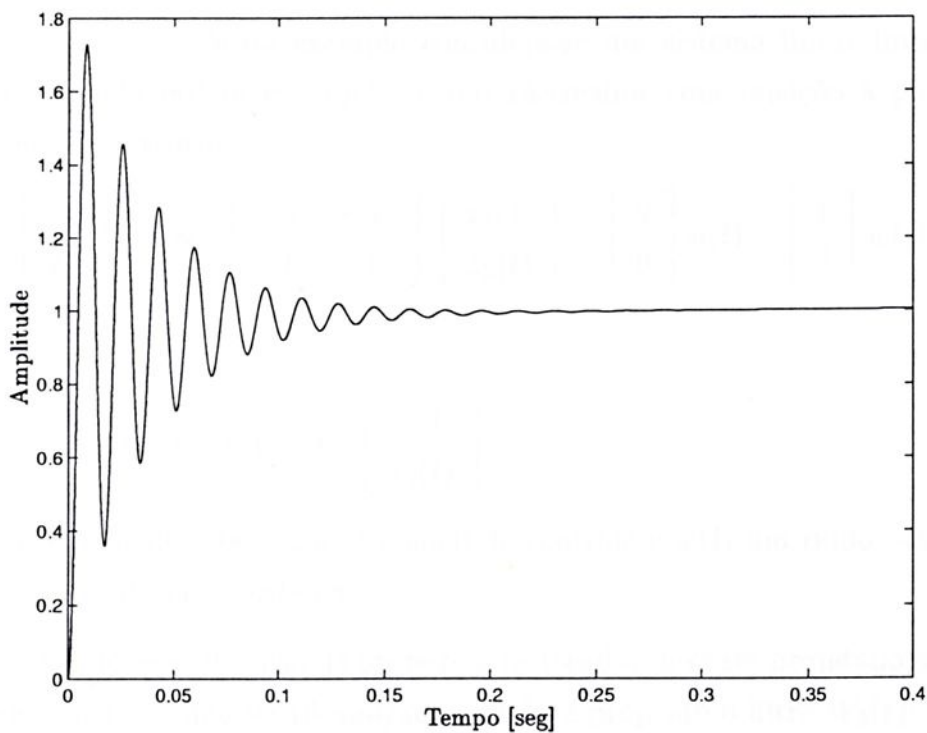


Figura 5.7: Resposta do sistema para uma entrada do tipo degrau.

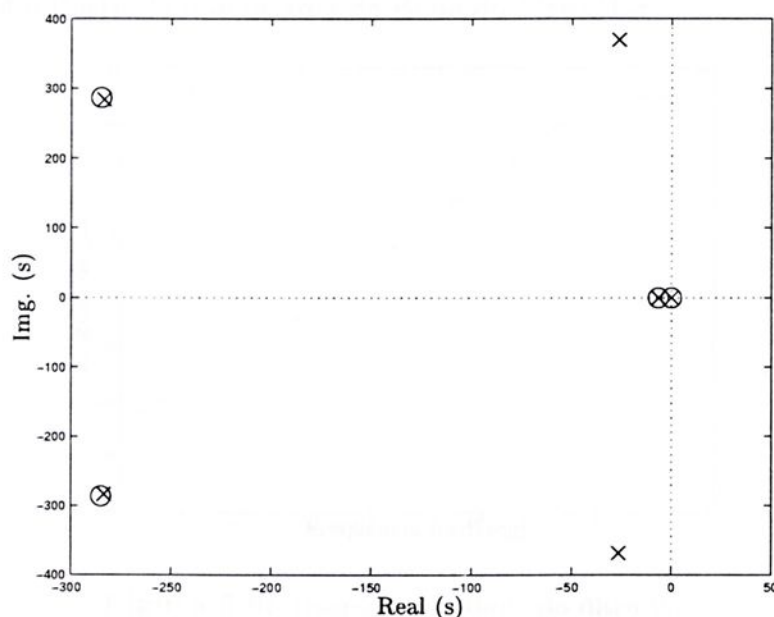


Figura 5.8: Mapeamento de pólos e zeros com modificação de zeros.

5.2 Exemplo 2

Neste exemplo considera-se um sistema linear invariante no tempo de segunda ordem e projeta-se um rastreador com rejeição à perturbação presente em sua estrutura:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -50 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

sendo $x(t)$ o vetor de estados, $u(t)$ o sinal de controle e $w(t)$ um ruído branco (perturbação acrescentado ao sistema).

Como especificação de projeto, o rastreador deve ser projetado para sinais de alta frequência (acima de 10 rad/seg), então é proposto o filtro $W_2(s)$:

$$W_2(s) = \frac{5000s^4 + 100s^3}{s^4 + 20s^3 + 300s^2 + 2000s + 10000}$$

na Figura 5.14 é ilustrado o diagrama de Bode do filtro W_2 :

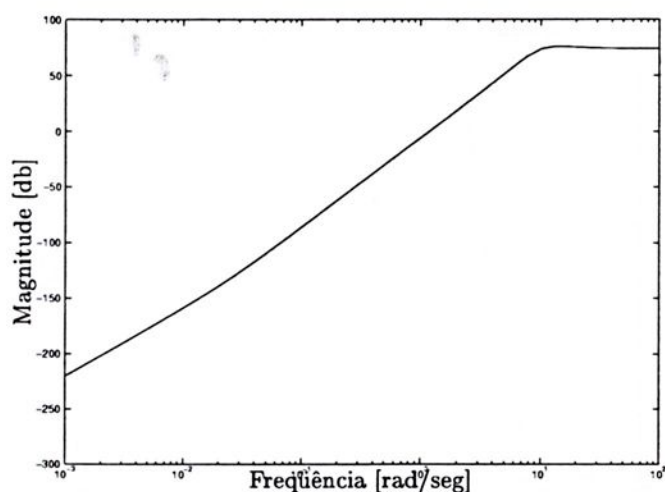


Figura 5.9: Diagrama de Bode do filtro W_2 .

Analisando-se o diagrama de Bode do filtro $W_2(s)$ verifica-se que os sinais com frequências acima de 10 rad/seg são amplificados, enquanto os sinais de baixa frequência são atenuados, atendendo as especificações de projeto.

Utilizando-se a estrutura descrita na Figura 1.3 para o sistema descrito em (5.3), projeta-se um controlador K para minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ através das equações descritas em (2.8), depois um estimador de *Kalman* de estados e na sequência projeta-se o rastreador para altas frequências (acima de 10 rad/seg) minimizando-se norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ utilizando o projeto de modificação de zeros com peso na frequência, conforme descrito em (3.9).

O compensador $\mathcal{H}_2$ projetado para o exemplo 2, bem como o ganho L do estimador de *Kalman* são dados a seguir:

$$K = \begin{bmatrix} 158,000 & -0,247 \end{bmatrix} \times 10^2$$

$$L = \begin{bmatrix} 6,285 \times 10^5 \\ -3,310 \times 10^{-11} \end{bmatrix}$$

A norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ atingida no projeto é de $1,581 \times 10^{-5}$, o que implica em uma atenuação do sinal presente no sistema. A Figura 5.10 ilustra o

diagrama de Bode da função transferência $Y(s)/W(s)$.

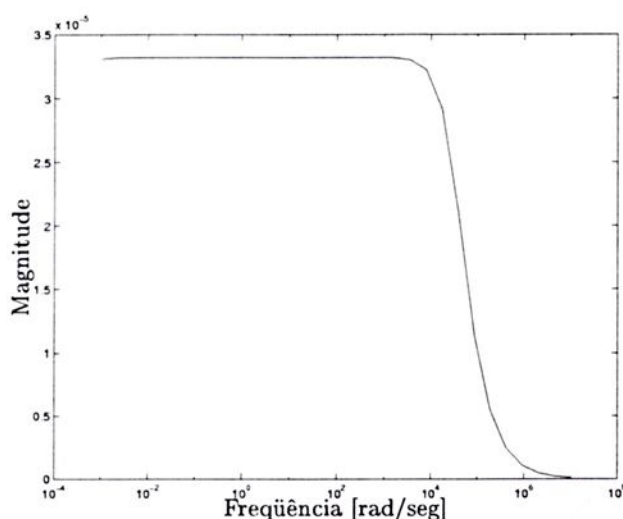


Figura 5.10: Resposta em frequência da função transferência $Y(s)/W(s)$.

Na modificação de zeros foi minimizada a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$, a fim de constituir um seguidor de referência. O valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema tomando com base todo o espectro de frequência é de 5×10^3 (não pode ser visualizado na Figura 5.11), pois para os sinais de baixa frequência a qualidade do rastreador fica muito ruim, enquanto o valor na faixa de frequência especificada em projeto é de 0,0149. A Figura 5.11 ilustra o diagrama de Bode de $G_{\text{erro}}(s)$.

Na Figura 5.11 pode-se verificar que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do projeto na faixa de frequência de operação (acima de 20 rad/seg) atende às características para um sistema rastreador de sinal e os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} 1710,000000 \\ -0,000417 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad \text{e} \quad N = 4,248 \times 10^5$$

Este exemplo aborda um projeto de rastreador para altas frequências e observa-se na ilustração da Figura 5.11 que o rastreamento para este sistema opera de maneira satisfatória até $0.2 \times 10^5 \text{ rad/seg}$. Ainda pode ocorrer tentativas de projeto para rastreamento para alguns tipos de plantas em uma determinada faixa de frequência e devido às suas características dinâmicas torna-se inviável tal projeto, por exemplo, sistemas mecânicos não conseguem rastrear sinais de alta frequência.

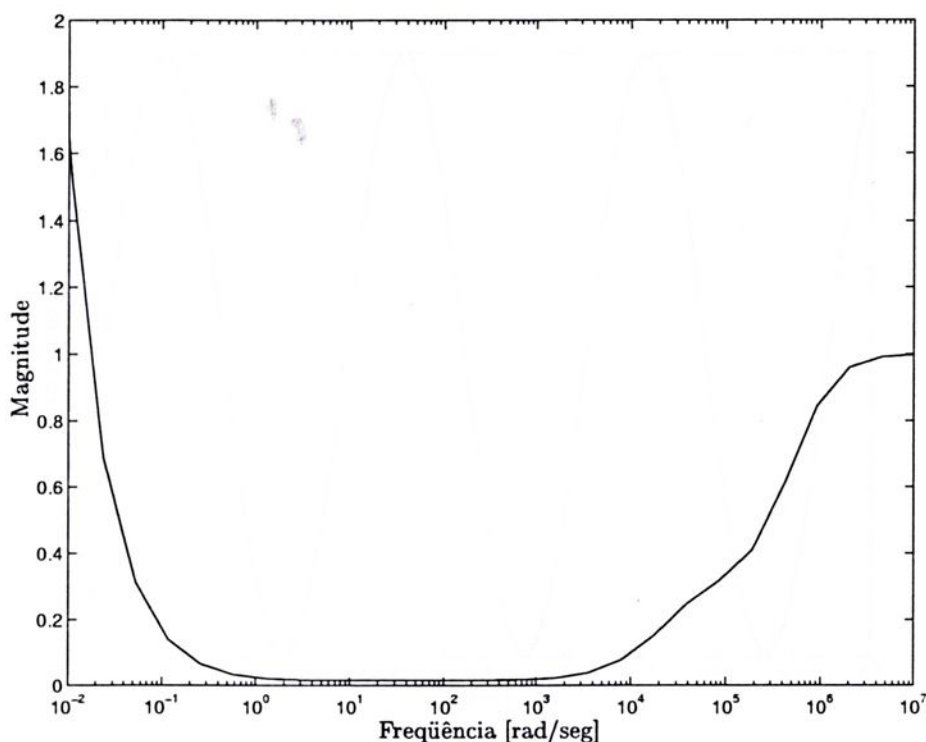


Figura 5.11: Resposta em frequência de $G_{\text{erro}}(s)$.

Para simulação considera-se um sinal de entrada $r(t) = \text{sen}(100t)$ e um sinal de perturbação idêntico ao utilizado no primeiro exemplo, a Figura 5.12 ilustra o resultado final de simulação para os dados de entradas já especificados. Neste projeto utiliza-se a modificação de zeros para o projeto do rastreador, através da minimização da norma $\mathcal{H}_{\infty}$ de $r(t)$ para $e(t)$, sendo $e(t)$ o erro entre a saída e a entrada.

Para este exemplo os zeros do sistema são: $\{-2,303 \times 10^4; -3,623 \times 10^{-2}\}$ e os pólos em malha fechada são: $\{-6,285 \times 10^5; -3,162 \times 10^4; -7,955 \times 10^{-5}; -1,6765 \times 10^{-5}\}$

Pode-se verificar os zeros e pólos alocados através do mapeamento de pólos e zeros do sistema ilustrado na Figura 5.13.

Na Figura 5.13 não ocorre cancelamento de pólos e zeros, apesar da ilustração transparecer essa idéia, na realidade os pólos e zeros estão somente próximos. Neste exemplo a planta utilizada nas simulações apresenta um zero na origem e isto pode ser verificado na Figura 5.13 que ilustra o mapeamento de pólos e zeros do

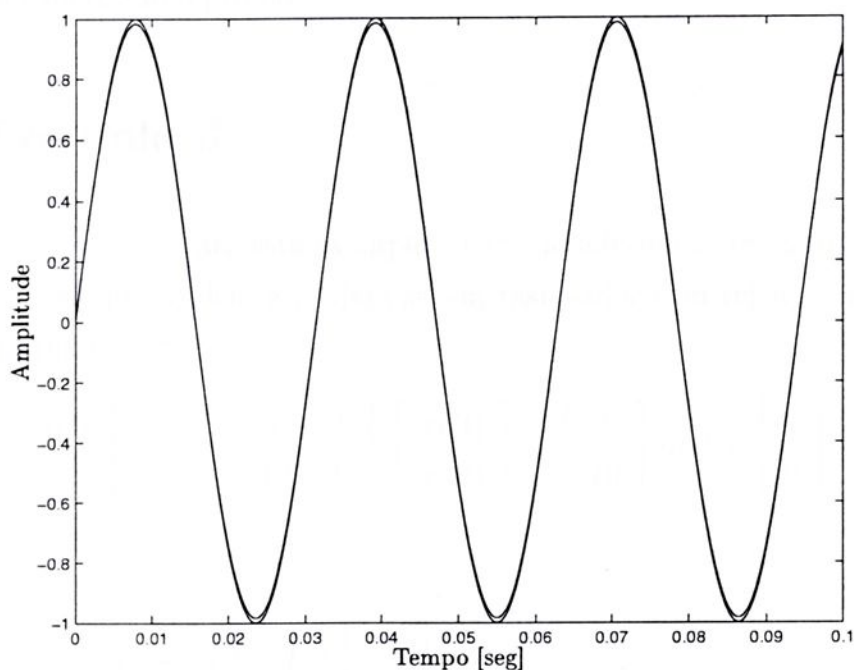


Figura 5.12: Sinal de saída praticamente sobreposto ao sinal de entrada.

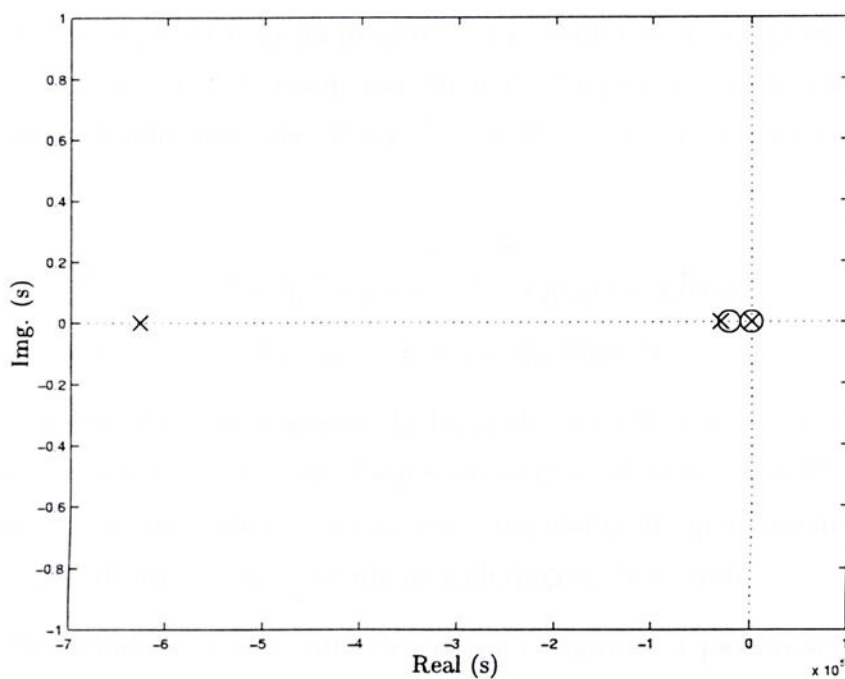


Figura 5.13: Mapeamento de pólos e zeros do sistema com modificação de zeros.

sistema após realizado o projeto.

5.3 Exemplo 3

Para este exemplo é considerado um sistema linear invariante no tempo de segunda ordem e projeta-se um rastreador com rejeição a perturbação presente em sua estrutura:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

sendo $x(t)$ o vetor de estados, $u(t)$ o sinal de controle e $w(t)$ um ruído branco (perturbação) acrescentado ao sistema.

Como especificação de projeto, o rastreador deve ser projetado de modo a atender sinais em uma determinada faixa de frequência, neste caso a faixa de frequência especificada varia de 20 *rad/seg* a 100 *rad/seg*, para tanto é proposto o filtro $W_3(s)$:

$$W_3(s) = \frac{640000}{s^4 + 160s^3 + 9400s^2 + 24000s + 225000}$$

na Figura 5.14 é ilustrado o diagrama de Bode do filtro W_3 :

Analisando-se o diagrama de Bode do filtro $W_3(s)$, que é um filtro passa faixa, verifica-se que os sinais com frequências entre 20 *rad/seg* e 100 *rad/seg* são amplificados, enquanto os demais sinais com frequência de operação fora da faixa de interesse são penalizados, o que atende as solicitações de projeto.

Utilizando-se a estrutura descrita na Figura 1.3 para o sistema descrito em (5.3), projeta-se um controlador K para minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ através das equações descritas em (2.8), depois um estimador de estados e na

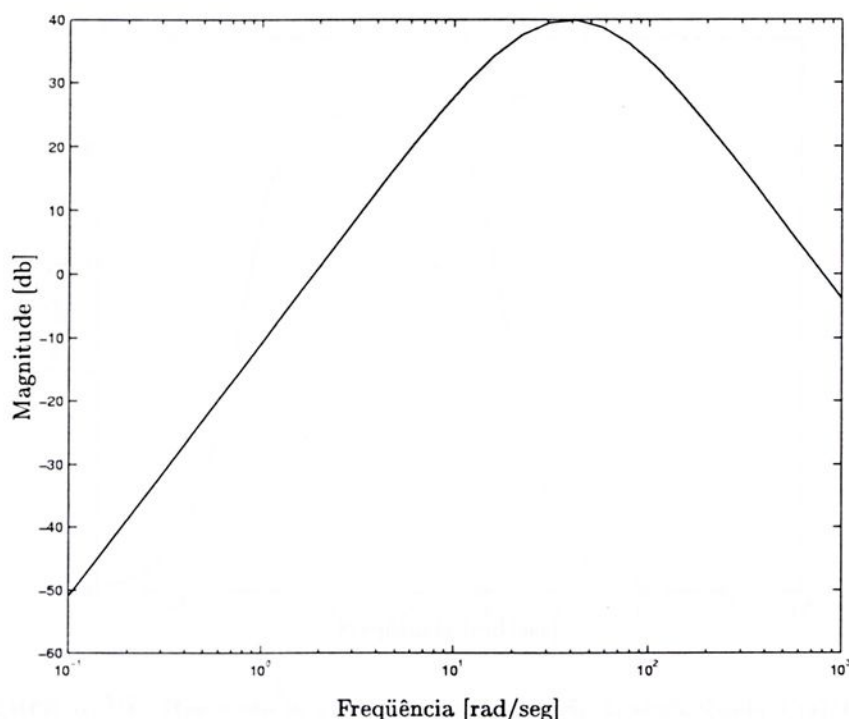


Figura 5.14: Diagrama de Bode do filtro W_3 .

seqüência projeta-se o rastreador para uma determinada faixa de freqüência minimizando-se norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ utilizando o projeto de modificação de zeros com peso na freqüência, conforme descrito em (3.9).

O compensador $\mathcal{H}_2$ projetado para o exemplo 3, bem como o ganho L do estimador de *Kalman* são dados a seguir:

$$K = \begin{bmatrix} 1,16670 & -0,00001 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$L = \begin{bmatrix} 0,31506 \\ 3,1465 \end{bmatrix} \times 10^7$$

A norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ atingida no projeto é de $4,29 \times 10^{-5}$, o que implica em uma atenuação do sinal presente no sistema. A Figura 5.15 ilustra o diagrama de Bode da função transferência $Y(s)/W(s)$.

Na modificação de zeros foi minimizada a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$, a fim de constituir um seguidor de referência. O valor da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema

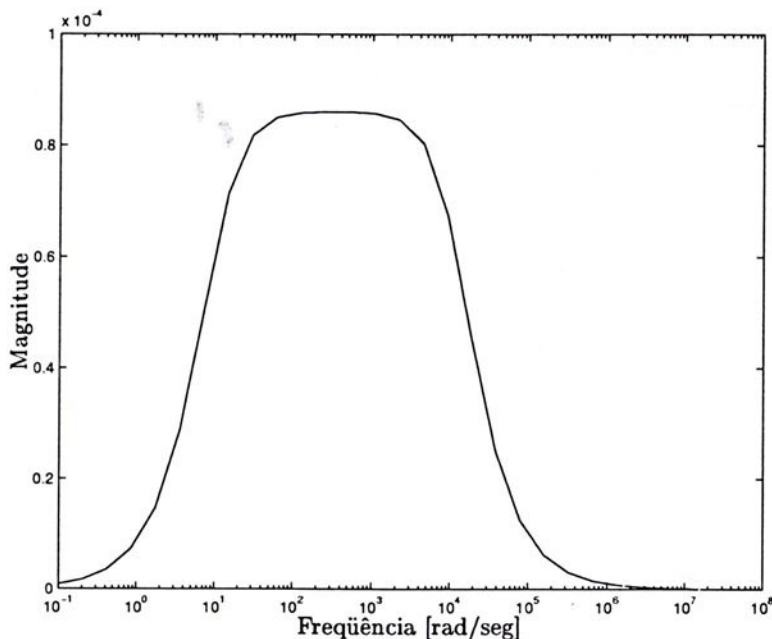


Figura 5.15: Resposta em frequência da função transferência $Y(s)/W(s)$.

tomando com base todo o espectro de frequência é de 1, enquanto o valor na faixa de frequência especificada em projeto é de 0,0079 e esta informação pode ser verificada na Figura 5.16, onde ilustra-se o diagrama de Bode de $G_{\text{erro}}(s)$.

Na Figura 5.16 pode-se verificar que a norma $\mathcal{H}_{\infty}$ do projeto na faixa de frequência especificada em projeto atende as características para um sistema rastreador de sinal e os parâmetros de modificação de zeros obtidos são:

$$M = \begin{bmatrix} -0,132929 \\ -1,82989 \end{bmatrix} \times 10^4 \quad \text{e} \quad N = 1,168 \times 10^4$$

Para simulação considera-se um sinal de entrada $r(t) = \text{sen}(50t)$ (sendo t o tempo em segundos) e um sinal de perturbação idêntico ao utilizado no primeiro exemplo, a Figura 5.17 ilustra o resultado final de simulação para os dados de entradas já especificados. Neste projeto utiliza-se a modificação de zeros para o projeto do rastreador, através da minimização da norma $\mathcal{H}_{\infty}$ de $r(t)$ para $e(t)$, sendo $e(t)$ o erro entre a saída e a entrada.

Para este exemplo os zeros do sistema são: $\{-3,1600 \times 10^6; -9,54866\}$ e os pólos em malha fechada são: $\{-3,1506 \times 10^6; -10000; -100; -9,9800\}$

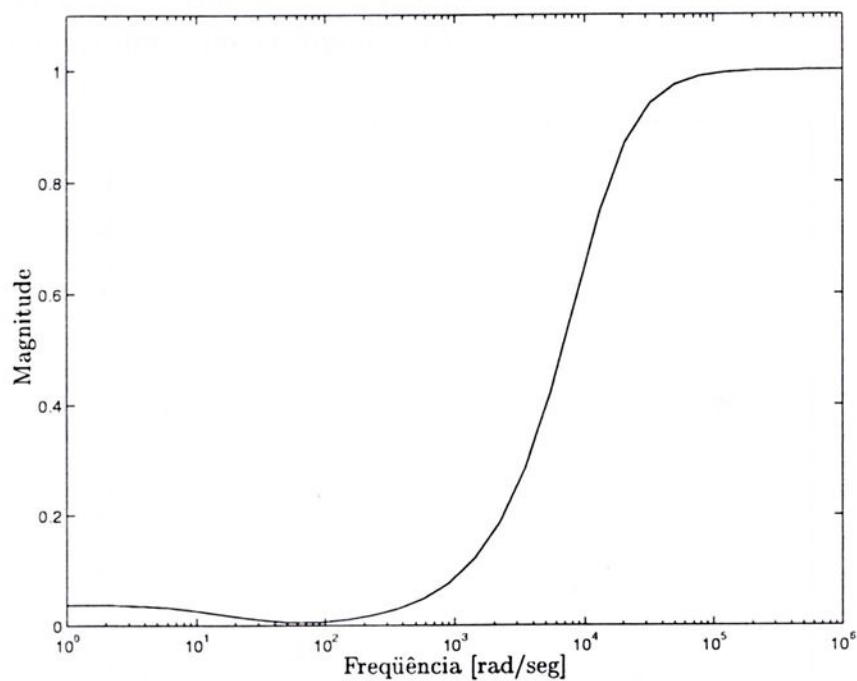


Figura 5.16: Resposta em frequência de $G_{\text{erro}}(s)$.

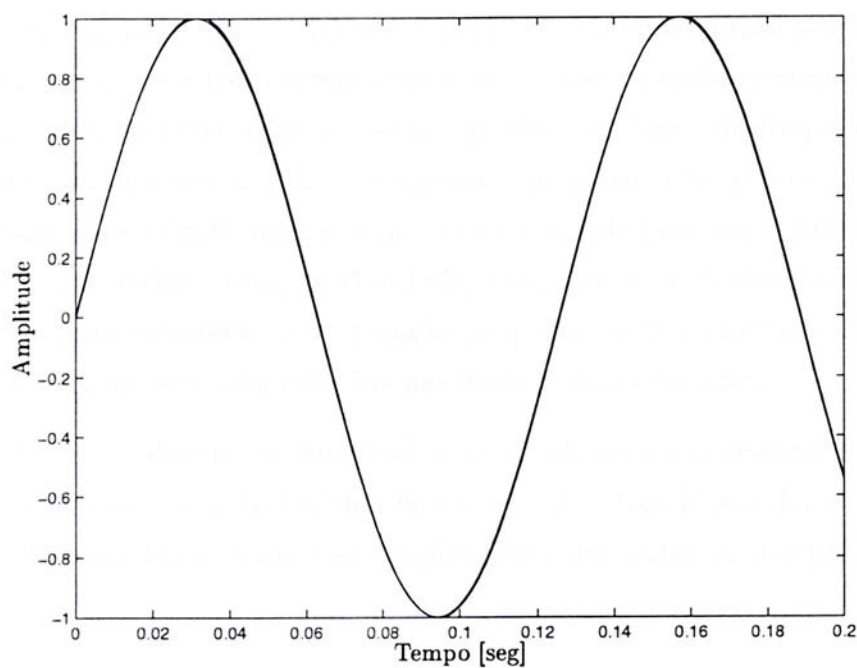


Figura 5.17: Resposta final do sistema, o sinal de saída sobrepõe de referência.

Pode-se verificar os zeros e pólos alocados através do mapeamento de pólos e zeros do sistema ilustrado na Figura 5.18.

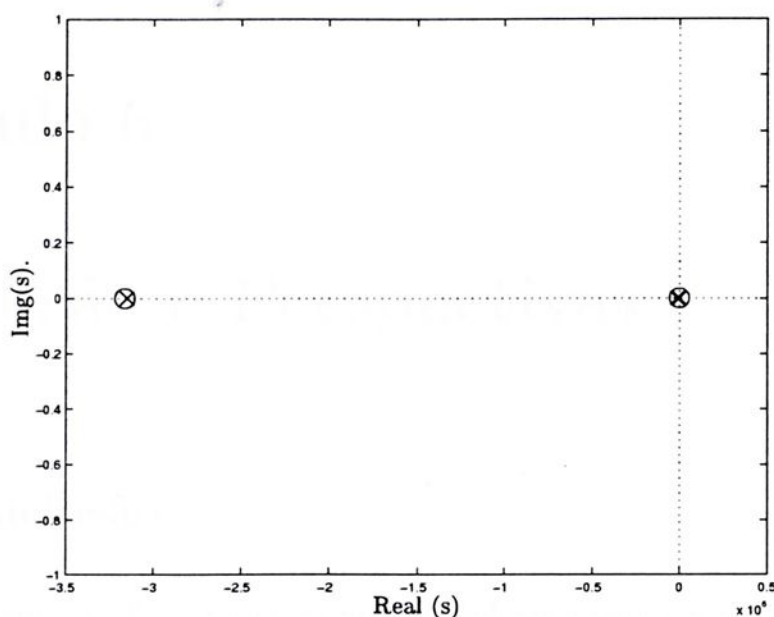


Figura 5.18: Mapeamento de pólos e zeros do sistema com modificação de zeros.

Na Figura 5.18 existe pólos e zeros bem próximos e praticamente ocorre alguns cancelamentos. Nos três exemplos abordados neste trabalho procurou-se mostrar o comportamento do rastreador de sinais em diversas faixa de frequência. Inicialmente projetou-se um sistema de rastreamento para baixa frequência, e em seguida para alta frequência e finalizou-se a seção com o exemplo para uma determinada faixa de frequência. Em todas situações abordadas em projeto os resultados obtidos foram satisfatórios e para esta técnica de projeto proposta neste trabalho os filtros são de vital importância na determinação dos parâmetros do rastreador.

Os filtros devem ser projetados de acordo com a necessidade de funcionamento do rastreador, se o rastreador opera em uma frequência F_i , o filtro deverá amplificar a frequências F_i e atenuar frequências indesejadas para o projeto.

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas

6.1 Conclusão

Neste trabalho é proposta uma metodologia para o problema de um rastreador de sinal em sistemas de controle. Considera-se o sistema ilustrado na Figura 1.3, pode-se otimizar a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ e também a norma de $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$. Como existe uma atenuação do ruído no sistema através do compensador $\mathcal{H}_2$, e minimiza-se a norma $\mathcal{H}_\infty$ entre o sinal de referência e o sinal de erro, de modo que esta norma atinja valores de pequenas grandezas, cria-se um rastreador de frequência.

A inclusão de peso na frequência para o projeto do rastreador é importante, pois permite ao projetista criar um seguidor de referência que funcione em uma determinada faixa de frequência desejada, inclusas nas especificações de projeto, o que não ocorre em projetos sem peso na frequência. O projeto dos filtros são de extrema importância neste trabalho, pois o mesmo determinam as frequências que serão mais importantes na construção do rastreador.

Os métodos de projetos são equacionados na forma de LMIs. Assim, este projeto pode ser facilmente resolvido utilizando-se algoritmos ([GNLC95], [dOFG97]) disponíveis na literatura de convergência polinomial.



6.2 Perspectivas

Neste trabalho foi proposta uma técnica para alocação de zeros, trata-se de um estudo inicial sobre a metodologia apresentada para tal assunto. Apesar de ser um trabalho inicial, foram obtidos bons resultados, onde projetou-se um rastreador através da modificação de zeros considerando ruído presente no sistema, caracterizando-se um processo de controle robusto, pois envolve as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$.

Com base neste trabalho observa-se que existe várias possibilidades de utilizar a alocação de zeros em outros problemas clássicos da literatura de controle, como por exemplo no sistema massa mola. Os avanços proposto neste estudo são promissores e a seguir são relacionados alguns temas interessantes onde pode-se incluir o estudo dos zeros proposto neste trabalho.

- i) Alocar os zeros via norma $\mathcal{H}_2$;
- ii) Rejeitar ruído através da norma $\mathcal{H}_\infty$;
- iii) Considerar incertezas paramétricas politópicas na planta do sistema;
- iv) Estudo do caso discreto para todas as estruturas do caso contínuo apresentado neste trabalho;
- v) Alocar os zeros dentro de uma região circular do plano s ;
- vi) Formular os estudos para o caso *MIMO*;
- vii) Forçar uma alocação dos pólos dentro de uma região para garantir a resposta transitória.
- viii) Inserir ao projeto especificações de restrições nas amplitudes de entrada e saída.



Apêndice A

O Estimador de Kalman

O estimador de *Kalman* é uma técnica recursiva de atualização usada para determinar os parâmetros corretos de um modelo de um dado processo. Dados alguns valores iniciais, pode-se prever e ajustar os parâmetros do modelo através de cada nova medição, obtendo a estimativa do erro em cada atualização. A sua habilidade para incorporar os efeitos de erros e sua estrutura computacional fizeram com que o estimador de Kalman tivesse um amplo campo de aplicações, especialmente no que se refere à análise de trajetórias em visão computacional.

Para este trabalho utilizou-se o *MATLAB* para obter o estimador de *Kalman*, mas para maiores detalhes ver [Kal60].

A função $[Kest, L, P] = Kalman(SYS, QN, RN, NN)$ projeta o estimador de *Kalman* *Kest* para planta contínua ou discreta, sendo o sistema descrito em forma de variáveis de estado. Para um modelo contínuo no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Hw(t) + v(t)$$

sendo conhecidos a entrada $u(t)$, o processo ruidoso $w(t)$, ruído de medida $v(t)$ e as covariâncias

$$E\{ww'\} = QN, \quad E\{vv'\} = RN, \quad E\{wv'\} = NN$$



O estimador *Kest* tem como entrada $[u(t); y(t)]$ e gera a estimação ótima $y_e(t), x_e(t)$ de $y(t), x(t)$ por:

$$\dot{x}_e(t) = Ax_e(t) + Bu(t) + L[y(t) - Cx_e(t) - Du(t)]$$

$$y_e(t) = Cx_e(t) + Du(t)$$

em contrapartida, a função *dkalman* é aplicada para sistemas discretos no tempo.

Em *default*, *SYS* é o modelo na forma de espaço de estado $SS(A, [B \ G], C, [D \ H])$ e $NN = 0$ quando omitido. A número de linhas de *QN* especifica o número de entradas ruidosas $w(t)$ (última entrada do *SYS*). O estimador de *Kalman Kest* é contínuo quando o sistema for contínuo e discreto caso contrário.

Kalman também retorna o ganho do estimador L e o erro de covariância do sistema em espaço de estado P . No caso contínuo no tempo com $H = 0$, P resolve a equação de *Riccati*,

$$AP + PA' - (PC' + GN)^{-1}R(CP + N'G') + GQG' = 0.$$

$[Kest, L, P] = Kalman(SYS, QN, RN, NN, SENSORS, KNOWN)$ permite situações mais gerais quando:

i) Nem todas as saídas do sistema são medidas

ii) Além da entrada ruidosa $w(t)$ do sistema, pode-se ter os vetores *SENSORS* E *KNOWN* como sinais que podem ser medidos e acrescentados ao projeto do estimador de *Kalman*, sendo a entrada $u(t)$ do sistema conhecida.

Apêndice B

Como discutido no capítulo 2, mas especificamente na seção 2.3, é conveniente ao projeto do rastreador a inclusão de peso na frequência e isto pode ser realizado através da utilização de filtros. Este apêndice trata mais detalhadamente o assunto, dando ênfase aos filtros do tipo: passa-baixa, passa-alta e passa-faixa.

Um filtro é um circuito que processa sinais em uma frequência especificada, por exemplo o filtro passa-baixa rejeita frequências altas e permite a passagem de sinais com frequências baixas. A forma mais comum de processamento de sinais é a amplificação e em geral os filtros não somente afetam a amplitude mas também a fase. O modo como os filtros funcionam variam de acordo com a frequência e isto pode ser representado matematicamente através da descrição da função transferência $H(s)$ de cada filtro.

6.3 Filtro Passa-Baixa

A resposta do filtro passa-baixa é caracterizada por uma frequência w_o chamada de frequência de corte tal que $|H(jw)| = 1$ para $w < w_o$, indicando que a entrada com frequência menor que w_o irá passar através do filtro, enquanto as frequências maiores que w_o sofrerão completa atenuação. Uma aplicação comum do filtro passa-baixa é a eliminação de ruídos de alta frequência de um determinado sinal, conforme mostra Figura 6.1.



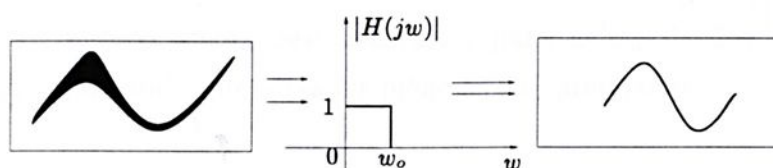


Figura 6.1: Filtro passa-baixa ideal.

6.3.1 Projeto do Filtro Passa-Baixa

Colocando um resistor em paralelo com um capacitor em um amplificador operacional realimentado, monta-se um integrador para um filtro passa-baixa com ganho, de acordo com a Figura 6.2 (a). A função de transferência desse filtro é $H(jw) = -Z_2/R_1$, sendo $Z_2 = R_2/[1/(jwC)] = R_2/(1 + jwR_2C)$. Adotando-se $w = 2\pi f$, pode-se descrever $H(s)$ na seguinte forma:

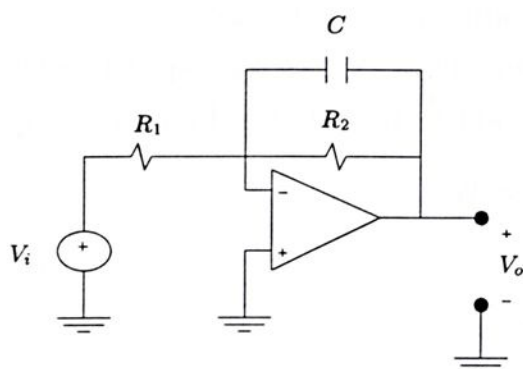
$$H = H_o \frac{1}{1 + j(w/w_o)}$$

sendo,

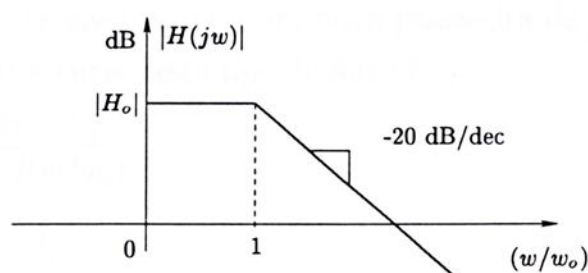
$$H_o = \frac{-R_2}{R_1}$$

e

$$w_o = \frac{1}{R_2C}$$



(a)



(b)

Figura 6.2: (a) Circuito do filtro passa-baixa, (b) Diagrama de bode do filtro passa-baixa.

Para $w/w_o \ll 1$ tem-se que $H \simeq H_o$, indicando que os sinais de baixas

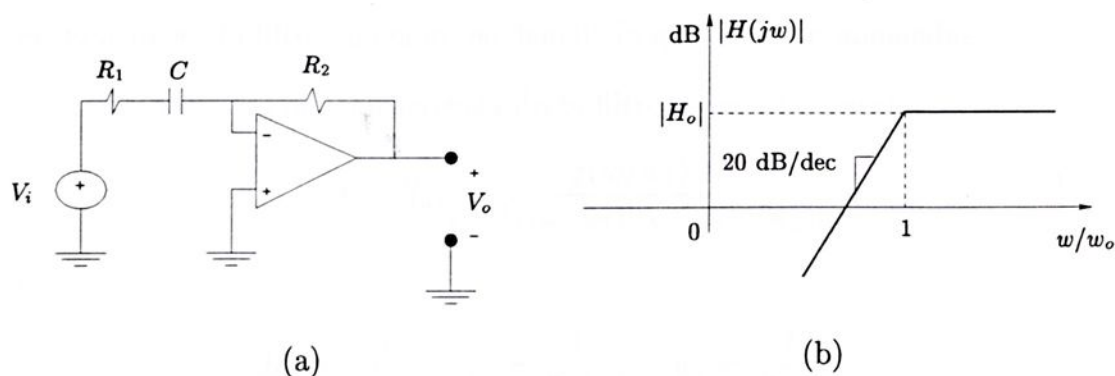


Figura 6.4: (a) Circuito do filtro passa-alta, (b) Diagrama de bode do filtro passa-alta.

6.5 Filtro Passa-Faixa

A resposta do filtro passa-faixa é caracterizada por uma faixa de frequência $w_L < w < w_H$ tal que a entrada com frequência presente nesta faixa passem pelo filtro, enquanto sinais com frequência fora desta faixa são atenuados, de acordo com o exemplo ilustrado na Figura 6.5. A diferença $w_H - w_L$ é denominada largura de banda do filtro.

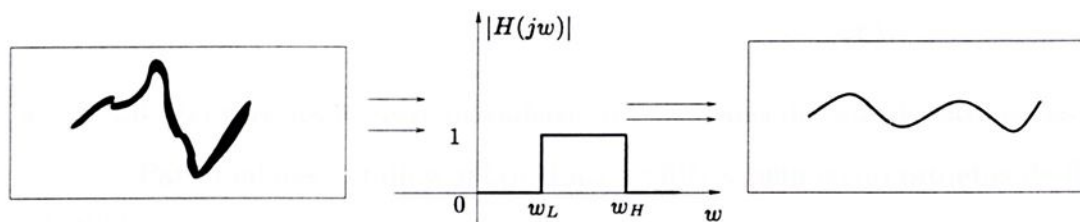


Figura 6.5: Filtro passa-faixa ideal.

6.5.1 Projeto do filtro Passa-Faixa

Os circuitos dos filtros passa-baixa e passa-alta podem ser combinados de acordo com a Figura 6.6(a), de modo a criar um filtro passa-faixa. A impedância de entrada $Z_1 = R_1 + 1/(jwC_1)$ forma a seção passa-alta com frequência de corte $w_1 = 1/R_1C_1$, enquanto a impedância de realimentação $Z_2 = R_2/[1/(jwC_2)]$ forma a seção passa-baixa com frequência de corte $w_2 = 1/R_2C_2$. Se for especificado w_1 e w_2 de modo que $w_2 < w_1$, então as frequências de entradas com a banda $w_1 \leq w \leq w_2$

freqüências passam pelo filtro, caso contrário, para $w/w_o \gg 1$ tem-se que $H \simeq H_o \times 1/(jw/w_o)$, indicando que altas freqüências são atenuadas.

6.4 Filtro Passa-Alta

A resposta do filtro passa-alta é complementar a resposta do filtro passa-baixa. A entrada com freqüência maiores que a freqüência de corte w_o passam pelo filtro, enquanto os sinais com freqüência menores que a freqüência de corte w_o são atenuados, conforme ilustrado na Figura 6.3.

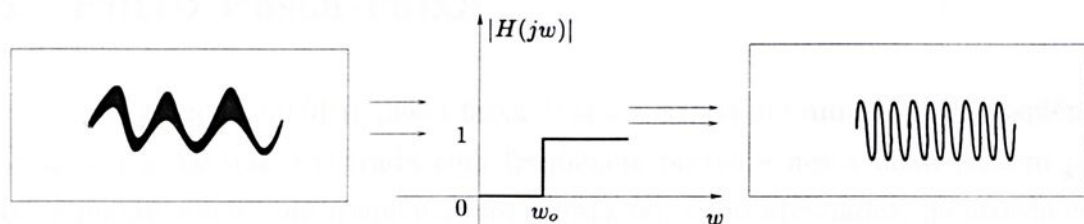


Figura 6.3: Filtro passa-alta ideal.

6.4.1 Projeto do Filtro Passa-Alta

Colocando um capacitor em série com um resistor e utilizando um amplificador operacional cria-se um amplificador inversor para um filtro passa-alta de acordo com a Figura 6.4 (a). A função transferência deste tipo de filtro é:

$$H = H_o \frac{j(w/w_o)}{1 + j(w/w_o)}$$

sendo,

$$H_o = -\frac{R_2}{R_1}$$

e

$$w_o = \frac{1}{R_1 C}$$

Para $w/w_o \ll 1$ tem-se que $H \simeq H_o j(w/w_o)$, indicando que os sinais de baixas freqüências são atenuados, caso contrário, para $w/w_o \gg 1$ tem-se que $H \simeq H_o$, indicando que altas freqüências passam pelo filtro.

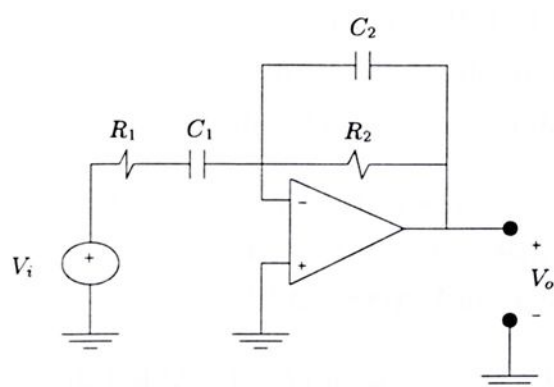
passam através do filtro enquanto as demais frequências são atenuadas.

A função de transferência deste filtro é descrita a seguir:

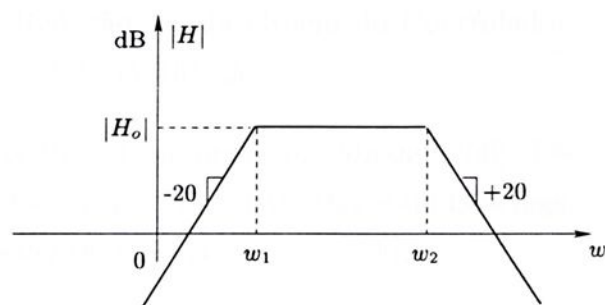
$$H = H_o \frac{j(\omega/\omega_1)}{[1 + (j(\omega/\omega_1))][1 + j(\omega/\omega_2)]}$$

sendo,

$$H_o = -\frac{R_2}{R_1}, \quad \omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}.$$



(a)



(b)

Figura 6.6: (a) Circuito do filtro passa-faixa, (b) Diagrama de bode do filtro passa-faixa.

Para maiores detalhes sobre tipos de filtro, bem como projetos de filtros, ver [Fra98].

- [dOFG97] M. C. de Oliveira, D. P. Farias, e J. C. Geromel. *LMISol, User's guide*. UNICAMP, Campinas, SP, 1997.
- [FPEN94] G. F. Franklin, J. D. Powell, e A. Emami-Naeini. *Feedback Control of Dynamic Systems*. Addison Wesley, USA, 1994.
- [Fra98] S. Franco. *Design with Operational Amplifiers and Analog Integrated Circuits*. 2. ed. McGraw-Hill International Editions, Boston, USA, 1998.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, e M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Mathworks Inc., USA, 1995.
- [Hau00] A. S. Hauksdóttir. Optimal zeros for model reduction of continuous-time system. *39th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1889–1893, June 2000.
- [Hau02] A. S. Hauksdóttir. Optimal zero locations of continuous-time system with distinct poles tracking first-order step responses. *IEEE Transactions on Circuits and System, Fundamental Theory and Applications*, 49(5):685–688, May 2002.
- [Kal60] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of ASME - Journal of Basic Engineering*, 82:35–45, 1960.
- [KG00] K. H. Kienitz e G. Grübel. Zero assignment in a scalar control system transfer-function exploiting linear dynamic feedback structures. *39th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1889–1893, June 2000.
- [KMP94] P.T. Kabamba, S. M. Meerkov, e E.K. Poh. $\mathcal{H}_2$ -Optimal zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(6):1298–1301, June 1994.
- [KS90] Moore K.L. e Bhattacharyya S.P. A Technique for Choosing Zero Locations for Minimal Overshoot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(5):577–580, May 1990.



Referências Bibliográficas

- [AP01] E. Assunção e P. L. D. Peres. Otimização Global para os Problemas de Redução $\mathcal{H}_2$ de Modelos e Redução $\mathcal{H}_2$ da Ordem do Controlador. *Revista Controle e Automação*, 12(2):93–101, 2001.
- [AT02] E. Assunção e M. C. M. Teixeira. Comments on Magnetically Levitated Micro PM Motors by Two Types of Active Magnetic Bearings. *IEEE/ASME Transactions Mechatronics*, 7(1):99–100, 2002.
- [AQTM02a] E. Assunção, C. Q. Andrea, M. C. M. Teixeira, e E. F. Marchesi. Alocação de Zeros em um Sistema de Controle Aplicado ao Micromotor PM. *XIV Congresso Brasileiro de Automática-CBA*, pp. 2190–2195, setembro 2002.
- [AQTM02b] E. Assunção, C. Q. Andrea, M. C. M. Teixeira, e E. F. Marchesi. Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ com Posicionamento de Pólos e Zeros Usando LMIs. *DINCON-1ª Escola Temática de Dinâmica e Controle da SBMAC*, Agosto 2002.
- [BB91] S. Boyd e C. H. Barrat. *Linear Controller Design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.
- [BGFB94] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, e V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, USA, 1994.
- [CGL97] P. Colaneri, J. C. Geromel, e A. Locatelli. *Control Theory and Design*. Academic Press, San Diego, California, USA, 1997.



- [LWY02] F. Liao, J.L. Wang, e G. Yang. Reliable robust flight tracking control: an LMI approach. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 10(1):76–90, January 2002.
- [Mur75] P. Murdoch. Pole and zero assignment by state vector feedback. *Automatica*, 11:199–201, 1975.
- [Mur77] P. Murdoch. Assignment of pole and zeros in a scalar transfer-function by state vector feedback. *Control System Design by Pole-Zero Assignment*, Academic Press, New York, pp. 137–144, 1977.
- [Oga97] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1997.
- [Per97] P. L. D. Peres. *Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: Caracterização por Desigualdades Matriciais Lineares*. Tese de Livre Docência, UNICAMP, Campinas, SP, 1997.
- [Pie99] P. S. Pierri. *Uma Técnica de Imposição de Zeros para Auxílio em Projeto de Sistemas de Controle*. Tese de Doutorado, USP, São Paulo, SP, 1999.
- [SD95] D. K. Schmidt e D. Benson. Loop Shaping and a Zero-Placement Technique as Applied to the Benchmark Problem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 5:33–51, 1995.
- [Sma91] Ye. M. Smagina. A method of designing of observable output ensuring given zeros location. *Problems of Control and Information Theory*, 20(5):299–307, 1991.
- [TA01] M. C. M. Teixeira e E. Assunção. Controle Automático de Sistemas Não-Lineares com Modelos Fuzzy de Takagi-Sugeno. *I Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmicas e Controle*, APLICON, pages 481–500, 2001.
- [TA02] M. C. M. Teixeira e E. Assunção. On Lag Controllers: Design and implementation. *IEEE Transactions on Education*, 45(3):285–288, 2002.

- [TL92] M. C. Tu e C. M. Lin. Robust stabilisation of multivariable feedback systems with desired performance requirement. *IEE Proceedings*, 139(3):259–266, May 1992.
- [VD97] C. Valentin e G. Duc. LMI-Base Algorithms For Frequency Weigth Optimal $\mathcal{H}_2$ - Norm Model Reduction. 36th *Conference on Decision and Control*, pp. 767–772, December 1997.





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dee.feis.unesp.br

