UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Fundamentos da Modelagem da Placa de Kirchhoff para Aplicações com o Método dos Elementos Finitos

Trabalho de Conclusão de Curso

Discente: Valquíria Rezende Ariza

Orientador: Douglas Domingues Bueno

UNESP
Ilha Solteira - SP
Novembro 2022

Resumo

Este trabalho de conclusão de curso de graduação tem como propósito apresentar sucintamente a modelagem da placa de Kirchhoff para aplicações com o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF tem sido uma importante ferramenta de análise, e permite discretizar estruturas para se realizar diferentes tipos de estudos, incluindo em estática e dinâmica, principalmente durante o desenvolvimento de produtos. O trabalho também apresenta os fundamentos do MEF, bem como as principais informações para se obter as matrizes de massa e rigidez globais, que representam uma placa discretizada com o elemento de Kirchhoff. São apresentadas simulações computacionais implementadas em linguagem OCTAVE, com discussão de resultados para a placa com elementos discretos do tipo mola, conectados em alguns nós estruturais. Os resultados demonstram funções de resposta em frequência, com discussões sobre os principais aspectos físicos envolvidos.

Palavras-chave: Placa de Kichhoff, Método dos Elementos Finitos, Matriz Elementar, Matrizes Globais.

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

A719f

Ariza, Valquíria Rezende.
Fundamentos da modelagem da placa de Kirchhoff para aplicacões com o metodo dos elementos finitos / Valquíria Rezende Ariza. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2022
40 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2022

Orientador: Douglas Domingues Bueno
Inclui bibliografia

1. Placa de Kirchhoff. 2. Método dos elementos finitos. 3. Matriz elementar. 4. Matrizes globais.

Raiane da Silva Santos
Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA - CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

ATA DA DEFESA – TRABALHO DE GRADUAÇÃO

TÍTULO: Fundamentos da metodologia da placa de Kirchhoff para aplicações com o método dos Elementos Finitos

ALUNA: Valquíria Rezende Ariza RA: 161050492

ORIENTADOR: Douglas Domingues Bueno

Aprovado (X) - Reprovado ( ) pela Comissão Examinadora

Comissão Examinadora:

Prof. _____
Presidente (Orientador)

Eng. _____
Eng. Bruna Spila de Luca (Siemens)

Prof. _____
Eng. Mec. Dr. Rodrigo Borges Santos (UFGD)

Ilha Solteira (SP) 15 de dezembro de 2022.

Lista de Figuras

2.1 Sistema massa-mola 5
2.2 *Lumped Mass System* 6
2.3 Função de resposta em frequência para o sistema massa-mola 7
2.4 Gráfico Sistema massa-mola para valores de 0,25k (azul); 0,5k (preto); e k (vermelho) 7
2.5 Função de resposta em frequência para o *Lumped Mass System* 8

3.1 Ilustração do elemento de placa de Kirchhoff, sendo $u_{z(i)}$ o deslocamento transversal, $\theta_{\eta(i)}$ e $\theta_{\xi(i)}$ as rotações, e (η, ξ) o sistema local de coordenadas, para $i = 1,..,4$. 10
3.2 Ilustração do elemento de placa de Kirchhoff deformada. 11
3.3 Origem e direção dos nós internos de cada elemento 14
3.4 Sequência dos nós dos elementos da primeira linha de elementos da placa. . . . 15
3.5 Linha 1 da placa para três elementos na direção x. 15
3.6 Linha 1 do exemplo para três elementos na direção x 15
3.7 Lei de formação para a segunda linha da placa. 16
3.8 Linha 2 da placa para três elementos na direção x 16
3.9 Linha 2 do exemplo para três elementos na direção x. 16
3.10 Lei de formação para a terceira linha da placa. 17
3.11 Linha 3 da placa para três elementos na direção x. 17
3.12 Linha 3 do exemplo para três elementos na direção x. 17
3.13 Ilustração de uma placa discretizada por nove elementos: números dos elementos e dos nós. 18
3.14 Ilustração de placa discretizada por quatro elementos: números dos elementos e dos nós. 20

4.1 Função de resposta em frequência (FRF) para t de 0,002m em um elemento de placa com nó 1 engastado em translação 23
4.2 FRF H_{44} para diferentes espessuras de placa elementar com engaste para translação no nó 1 24
4.3 Função de resposta em frequência (FRF) para t de 0,002m em um elemento de placa cujo nó 1 é engastado na translação e rotação 25
4.4 FRF H_{44} para diferentes espessuras de placa elementar com engaste para translação e rotação no nó 1 26

4.5 FRF da placa discretiza por um e quatro elementos, com engaste no nó 1 . . . 27
4.6 FRFs para a placa elementar com adição de molas de rigidez $k = 100N/m$ aos quatro nós . . . 27
4.7 FRFs para a placa elementar com adição de molas de rigidez $k = 1000N/m$ aos quatro nós . . . 28
4.8 FRFs para a placa elementar com adição de molas de rigidez $k = 10000N/m$ aos quatro nós . . . 28
4.9 FRF para uma placa discretizada com quatro elementos, com mola linear de rigidez k acoplada ao nó 1 . . . 29
4.10 Comparação da resposta em frequência para uma placa de quatro elementos com engaste e mola de rigidez k acoplada ao nó 1 . . . 30

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Objetivo do Trabalho 2

1.2 Organização do Documento 2

2 Fundamentos de Vibrações **4**

2.1 Sistema massa-mola 4

2.2 *Lumped mass system* 5

2.3 Resultados Preliminares e Discussões 6

3 Modelagem da Placa de Kirchhoff **9**

3.1 Método dos Resíduos Ponderados 9

3.2 Modelo de Placa de Kirchhoff 9

3.3 Condição de um Nó Engastado 12

3.4 Matrizes globais de massa e rigidez 14

3.5 Efeito da Discretização 20

3.6 Molas nos Nós dos Elementos de Placa 21

4 Resultados e Discussões **23**

4.1 Dinâmica de um elemento com nó engastado em flexão 23

4.2 Placa com um elemento cujo nó 1 é engastado na translação e rotação (3 graus de liberdade) 24

4.3 Efeito da Discretização 26

4.4 Adição de molas aos nós do elemento de placa 26

4.5 Placa de quatro elementos com adição de mola ao nó 1 29

5 Considerações Finais **31**

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros 31

Referências Bibliográficas **32**

A Matrizes de Massa e Rigidez do Elemento de Placa **33**

A.1 Matrizes de Massa e Rigidez para Quatro Elementos de Placa 34

A.2 Matriz de Rigidez para Elementos de Placa com Molas conectadas aos Nós . . 35

1 Introdução

A teoria clássica de placas de Kichhoff foi desenvolvida por volta do ano de 1888, e permite obter resultados adequados para placas finas, para as quais o efeito da deformação cisalhante ao longo da espessura pode ser desprezado. Essa teoria tem sido cada vez mais utilizada na solução de problemas de engenharia especialmente devido o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos (MEF), tipicamente empregado para a análises a partir de discretização.

Ares (2016) apresenta as bases teóricas da placa de Kirchhoff e, com elementos infinitesimais, são deduzidas as equações diferenciais governantes. O Método dos Elementos de Contorno é aplicado, apresentando bons resultados de convergência com outras soluções analíticas disponíveis. Segundo os autores, a abordagem possibilita reduções no tempo de processamento e uso de memória computacional. de Oliveira Ribeiro (1992) também utiliza do Método dos Elementos de Contorno e da teoria de Reissner para o problema de flexão de placas. Por meio da implementação computacional de elementos de geometria linear com aproximação parabólica do segundo grau, o trabalho propõe formulações integrais como uma alternativa viável e segura, em comparação ao Método dos Elementos Finitos.

Outra forma abordada para a análise da placa de Kirchhoff é por meio de elementos infinitesimais triangulares, como abordado por Costa & Rodrigues (2018). Para o estudo, os autores desenvolvem um algoritmo computacional para os cálculos de esforços, deslocamentos e reações de apoio em uma placa delgada, submetida a carregamentos uniformes em sua superfície. Os autores concluem que, para a placa engastada, a convergência ocorre para valores superiores, e apresenta um pico de deflexão, possivelmente devido à utilização de elementos conformes. Além de Costa & Rodrigues (2018), Mesquita (1998) também utiliza o elemento triangular, que é resultado do acoplamento entre um elemento de flexão de placa (DKT) e um elemento de tensão plana, que é baseado na formulação livre (FF).

Também utilizando elementos finitos triangulares, DST (do inglês, *Discrete Shear Triangle*) e DKS (do inglês, *Discrete Kichhoff Triangle*), Viana & Vieira (2008) estudam a análise vibratória de placas. Os autores abordam as estratégias linear e pseudoconsistente para compor as funções dos deslocamentos ao longo do domínio do elemento. Assim, concluem que o segundo modelo proposto é mais estável para a determinação da matriz de massa. Os autores destacam que as respostas são diferentes para qualquer tipo de vinculação utilizada. O Método dos Elementos Finitos é utilizado para o problema não linear de cascas. Eles concluem que o elemento adotado é adequado, mas ressaltam a necessidade de se utilizar mais de três progressões de Gauss.

da Rocha (2004) estuda placas para aplicações em vibração estrutural e acústica empregando materiais com propriedades piezelétricas. O autor implementa um programa compu-

tacional para modelagem, empregando o Método dos Elementos Finitos, de vigas e placas com materiais piezelétricos (PZTs) incorporados. Os resultados das aplicações reproduzem o efeito do acoplamento das estruturas com os transdutores. Da mesma maneira, Torres (2008) também discute a análise de placas laminadas compostas por materiais piezelétricos. No estudo, o autor desenvolve uma formulação aproximada por meio do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e da Teoria de Deformação Cisalhante de Ordem Superior.

Dias (1998) desenvolve e implementa computacionalmente uma metodologia de solução numérica para o problema de equilíbrio de placas, com a descretização das placas em elementos infinitesimais. As restrições de contato são apresentadas pela autora por bases elásticas, unilaterais e bilaterais. O estudo concluiu que a solução obtida após operações de pivoteamento é equivalente à solução do problema original. Outro método de estudo de estruturas utilizando a Teoria das Placas e o Método dos Elementos Finitos é por meio de modelagens computacionais que determina os deslocamentos previstos, tensões e forças atuantes nas placas, que representam estruturas maiores, comumente vistas na indústrias *offshore*. Como conclusão, os resultados analíticos se aproximam daqueles verificados pelo Método dos Elementos Finitos, sendo, portanto, satisfatórios. Leal (2015) apresenta uma formulação baseada no Método dos Elementos Finitos para análise de placas, cujos elementos são providos de 4 nós, com 3 graus de liberdade para cada. Aproximado o campo de deslocamento para um polinômio de 12 termos e de terceiro grau, consta-se a aproximação do modelo implementado com o Método dos Elementos de Contorno, o que ilustra o correto desenvolvimento do estudo e a eficiência do programa computacional desenvolvido.

Neste contexto, o presente trabalho apresenta um estudo do elemento finito tipo placa de Kirchhoff, e os aspectos fundamentais para sua implementação computacional. Também, apresenta-se uma breve introdução sobre o método dos Elementos Finitos, com destaque para a montagem das matrizes de massa e rigidez globais, para uma placa fina. São introduzidas informações sobre a implementação computacional, realizada em ambiente OCTAVE, bem como os processos para se incluir efeito de engaste ou molas, conectadas em nós previamente escolhidos. Este documento também apresenta simulações computacionais, com foco em funções de resposta em frequência obtidas, com algumas discussões da física envolvida. Assim, a seguir são apresentados os objetivos do trabalho, além da organização deste documento.

1.1 Objetivo do Trabalho

Este trabalho tem como objetivo estudar e apresentar a modelagem da placa de Kirchhoff para aplicações envolvendo o Método dos Elementos Finitos. Entre os objetivos específicos, destaque-se a apresentação do processo para se incluir efeitos de engastes, bem como a inclusão de molas conectadas a nós da malha e a montagem das matrizes globais.

1.2 Organização do Documento

Este documento é organizado na seguinte forma:

- O **Capítulo 1**: apresenta uma breve introdução ao tema do trabalho, o objetivo e a

organização do texto.

- O **Capítulo 2**: apresenta uma introdução aos fundamentos da modelagem de problemas de vibrações, em particular para sistemas massa mola, com 1 (um) e 2 (dois) graus de liberdade.
- O **Capítulo 3**: apresenta a modelagem da placa de Kirchhoff e outros aspectos relevantes para o uso do método dos Elementos Finitos.
- O **Capítulo 4**: apresenta resultados de simulações computacionais e análises de resultados.
- O **Capítulo 5**: apresenta considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.
- O **Apêndice A**: descreve as matrizes de massa e rigidez do elemento de placa, entre outras matrizes utilizadas neste trabalho.

2 Fundamentos de Vibrações

Este capítulo apresenta informações básicas sobre a dinâmica vibratória de estruturas. Com isso, pretende-se contemplar os fundamentos para compreender o uso do elemento de placa de Kirchhoff, mostrado no Capítulo 3.

2.1 Sistema massa-mola

A equação do movimento de um sistema massa mola, mostrado na Figura 2.1, com massa m, rigidez k e coeficiente de amortecimento c é dada por $[m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = F_v(t)]$. Aplicando a transformada de Laplace se tem $[m\mathcal{L}\ddot{u}(t) + c\mathcal{L}\dot{u}(t) + k\mathcal{L}u(t) = \mathcal{L}F_v(t)]$, sendo $F_v(t)$ uma força externa. Assim, tem-se

$$m[s^2\mathcal{L}u(t) - su(0) - \dot{u}(0)] + c[s\mathcal{L}u(t) - u(0)] + k[\mathcal{L}u(t)] = \mathcal{L}F_v(t) \tag{2.1}$$

Considerando as condições iniciais nulas, pode-se escrever

$$ms^2U(s) + csU(s) + kU(s) = F_v(s) \tag{2.2}$$

Rearranjando a equação com $U(s)$ em evidência, tem-se $U(s)[ms^2 + cs + k] = F_v(s)$. Assim, tem-se a seguinte função de transferência

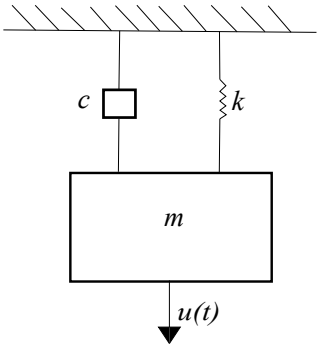
$$\frac{U(s)}{F_v(s)} = \frac{1}{(s^2m + sc + k)} \tag{2.3}$$

Uma vez que $s = j\omega$ e $j^2 = -1$, tem-se:

$$\frac{U(\omega)}{F_v(\omega)} = \frac{1}{(-\omega^2m + j\omega c + k)} \tag{2.4}$$

sendo ω a frequência angular em rad/s.

Figura 2.1: Sistema massa-mola



Fonte: Próprio autor

2.2 *Lumped mass system*

Para o *Lumped mass system* mostrado na Figura 2.2, tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = -M\ddot{u}_q(t) \tag{2.5}$$

Como considerado para o sistema massa-mola-amortecedor, aplica-se a transformada de Laplace, tal que $[m\mathcal{L}\ddot{u}(t) + c\mathcal{L}\dot{u}(t) + k\mathcal{L}u(t) = -M\mathcal{L}\ddot{u}_q(t)]$. Então,

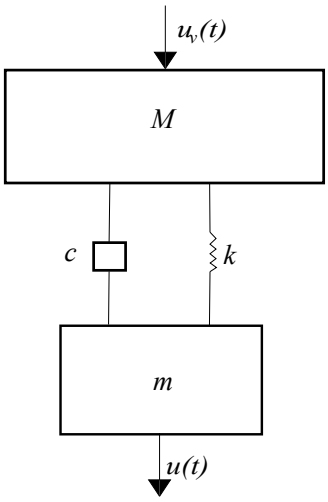
$$m[s^2\mathcal{L}u(t) - su(0) - \dot{u}(0)] + c[s\mathcal{L}u(t) - u(0)] + k\mathcal{L}u(t) = -M[s^2\mathcal{L}u_q(t) - su_q(0) - \dot{u}_q(0)] \tag{2.6}$$

Para condições inicial nulas, $[ms^2U(s) + csU(s) + kU(s) = -Ms^2U_q(s)]$. Colocando $U(s)$ em evidência se obtém $U(s)[ms^2 + cs + k] = -Ms^2U_q(s)$. Assim, a função de transferência é, portanto, $U(s)/U_q(s) = -Ms^2/(s^2m + sc + k)$. Substituindo $s = j\omega$ e $j^2 = -1$ se tem $\dfrac{U(\omega)}{U_q(\omega)} = \dfrac{-M(-1)\omega^2}{(-\omega^2m + j\omega c + k)} = H(\omega)$, ou seja,

$$H(\omega) = \frac{\omega^2 M}{(-\omega^2 m + j\omega c + k)} \tag{2.7}$$

sendo M e m as massas.

Figura 2.2: *Lumped Mass System*



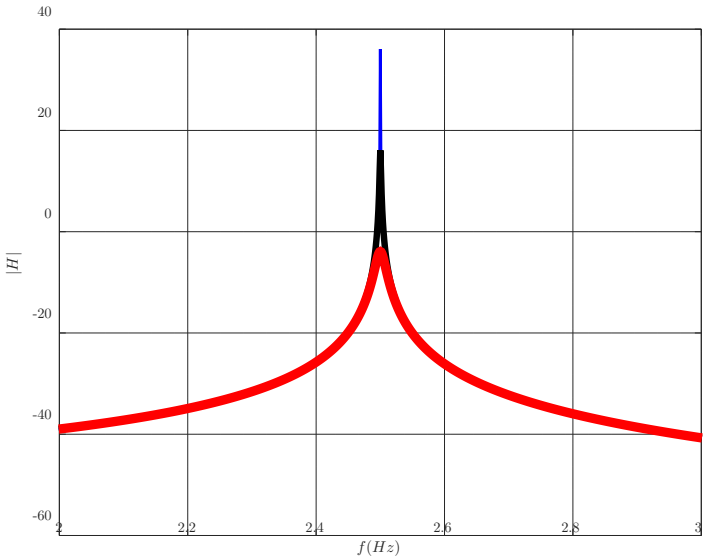
Fonte: Próprio autor

2.3 Resultados Preliminares e Discussões

A Figura 2.3 apresenta o comportamento de H do sistema massa-mola-amortecedor para a faixa de frequência de 0 até 5 Hz, com um incremento de 0,001 Hz. As cores indicam diferentes valores do coeficiente de amortecimento, sendo que a azul representa $c = 0{,}001$ Ns/m, para a preta $c = 0{,}01$ Ns/m e para a vermelha $c = 0{,}1$ Ns/m. Nota-se que o pico da magnitude da função de resposta em frequência H cresce a medida que o amortecimento c diminui. Por outro lado, a Figura 2.4 representa uma simulação de H para diferentes valores de rigidez da mola k, sendo 0,25 N/m (azul), 0,5 N/m (preto) e 1 N/m (vermelho). Nota-se que o pico da curva, que ocorre na frequência de ressonância do sistema, desloca-se para frequências superiores à medida em que a rigidez aumenta.

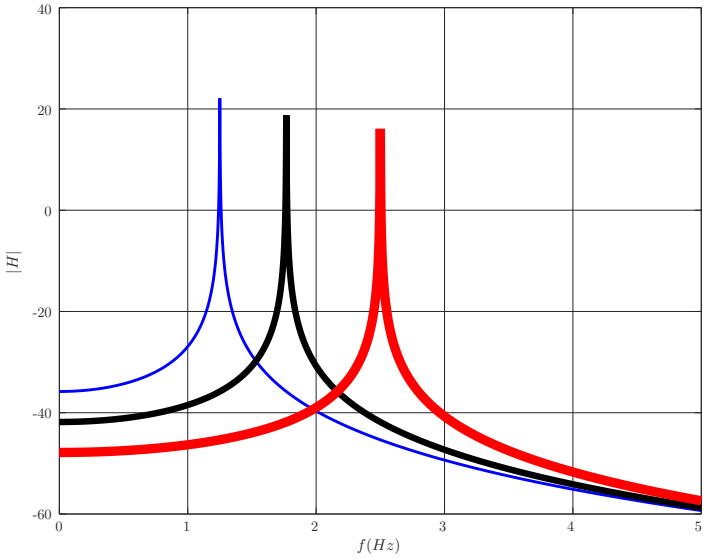
Da mesma forma para o *Lumped Mass System*, a Figura 2.5 apresenta H para diferentes valores de coeficiente de amortecimento c, 0,001 Ns/m linha azul, 0,01 Ns/m linha preta, e 0,1 Ns/m linha vermelha. Como no sistema massa-mola, observa-se que o pico da função de resposta em frequência H é maior com menores valores de amortecimento. Entretanto, a curva apresenta maior magnitude, o que mostra que o *Lumped Mass System* demora mais a atingir o ponto de ressonância.

Figura 2.3: Função de resposta em frequência para o sistema massa-mola



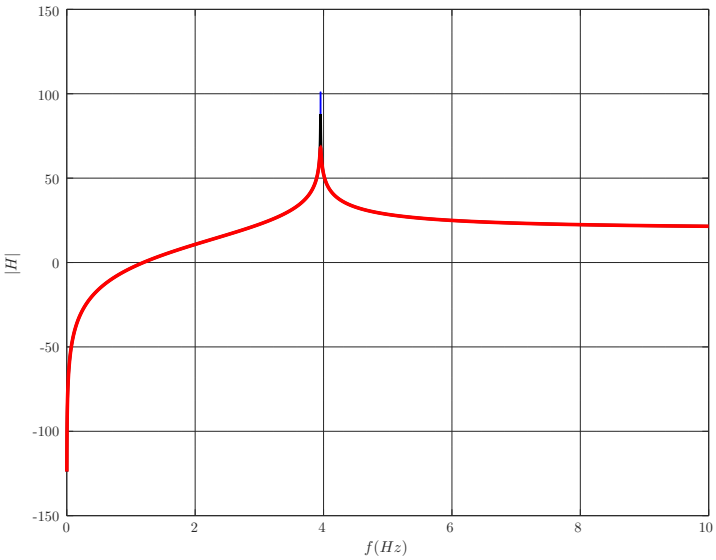
Fonte: Próprio autor.

Figura 2.4: Gráfico Sistema massa-mola para valores de 0,25k (azul); 0,5k (preto); e k (vermelho)



Fonte: Próprio autor.

Figura 2.5: Função de resposta em frequência para o *Lumped Mass System*



Fonte: Próprio autor.

3 Modelagem da Placa de Kirchhoff

Este capítulo apresenta os principais aspectos deste trabalho. Apresenta-se preliminarmente uma visão geral do método dos Resíduos Ponderados, comumente empregado nas soluções envolvendo o método dos Elementos Finitos. São também apresentados detalhes da formulação do elemento de placa de Kirchhoff.

3.1 Método dos Resíduos Ponderados

Entre as metodologias mais comumente aplicadas para a resolução numérica de equações diferenciais parciais, ou ordinárias, com valores de contorno, estão o Método de Diferenças Finitas; Método de Elementos Finitos; Método de Volumes Finitos; e Método dos Resíduos Ponderados (Moreira de Lemos 2007).

O Método dos Resíduos Ponderados consiste na realização de formulações para obtenção de soluções aproximadas, suficientemente precisas, de problemas de valor de contorno (PVC). Essas formulações são feitas por meio da integração ponderada da equação diferencial que representa o problema. Caso essa solução aproximada não satisfaça a equação em todos seus pontos, gera-se um resíduo decorrente do erro de aproximação. Dessa forma, quanto menor for o resíduo, melhor é a aproximação obtida. Portanto, caso a função aproximada for igual a função que satisfaz a equação diferencial em todos os pontos, o resíduo é nulo. Assim, o método (combinado ou não com processos não-convencionais de enriquecimento da função aproximada) é uma boa alternativa para diminuir a dificuldade na resolução de problemas.

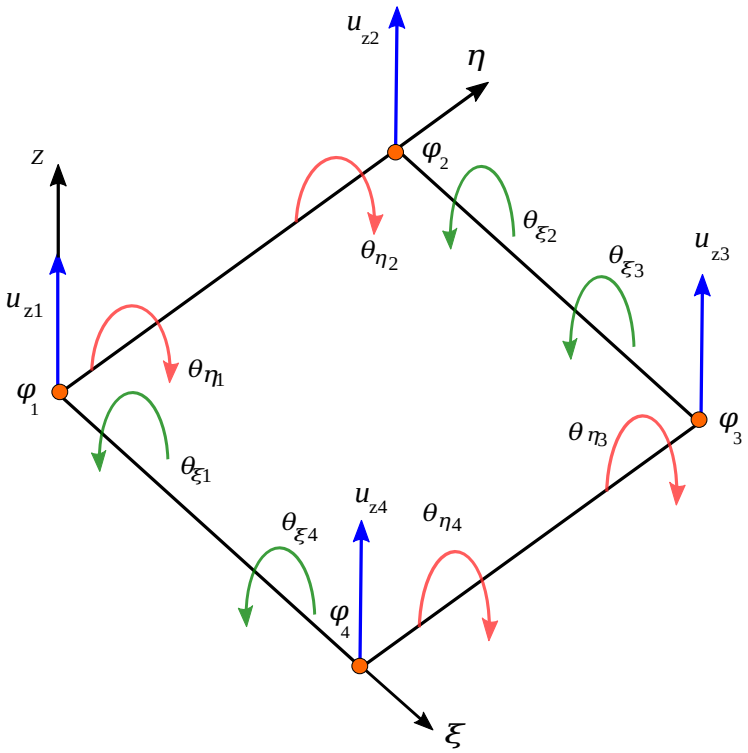
Os métodos mais conhecidos e utilizados dentro do Método dos Resíduos Ponderados são: método dos momentos; método de Galerkin; método dos mínimos quadrados; e método da colocação ortogonal. As aplicações do método descrito são variadas. Entre elas se tem, por exemplo, a análise de estruturas de tubos submetidos a carregamentos hidrostáticos, como Macedo & Persival (2008) apresentam em seus estudos. No trabalho, busca-se aplicar sobre a formulação em resíduos ponderados a técnica de enriquecimento das funções aproximadas definidas no Método dos Elementos Finitos Generalizados. Além disso, são analisadas alternativas formuladas pela combinação do Método dos Mínimos Quadrados com divisão do domínio de integração.

3.2 Modelo de Placa de Kirchhoff

O modelo de placa de Kirchhoff é descrito por quatro nós e três graus de liberdade por nó, conforme ilustra a figura 3.1, sendo u_j o deslocamento transversal e $\theta_{(\,)}$ as rotações de cada

j-ésimo nó. Na figura, cada nó possui um deslocamento transversal $u_{z(i)}$, $i = 1,..,4$, na direção z, uma rotação θ_x em torno do eixo y e um θ_y em torno de x. Além disso, ξ e η são coordenadas generalizadas do elemento das coordenadas x e y, respectivamente.

Figura 3.1: Ilustração do elemento de placa de Kirchhoff, sendo $u_{z(i)}$ o deslocamento transversal, $\theta_{\eta(i)}$ e $\theta_{\xi(i)}$ as rotações, e $(\eta,\ \xi)$ o sistema local de coordenadas, para $i = 1,..,4$.



Fonte: Adaptado da referência (Marqui 2007)

A hipóteses de Kirchhoff, válida para placas finas com isotropia total e submetidas a forças normais ao plano médio, é a seguinte: um plano normal ao eixo neutro permanece o mesmo, antes e após a deformação, ou seja, os segmentos das normais ficam com os mesmos comprimentos. Assim, não há variação da espessura durante a deformação. Portanto, pode-se dizer que os efeitos de inércia de rotação e cisalhamento são desprezíveis. (de Oliveira Ribeiro 1992)

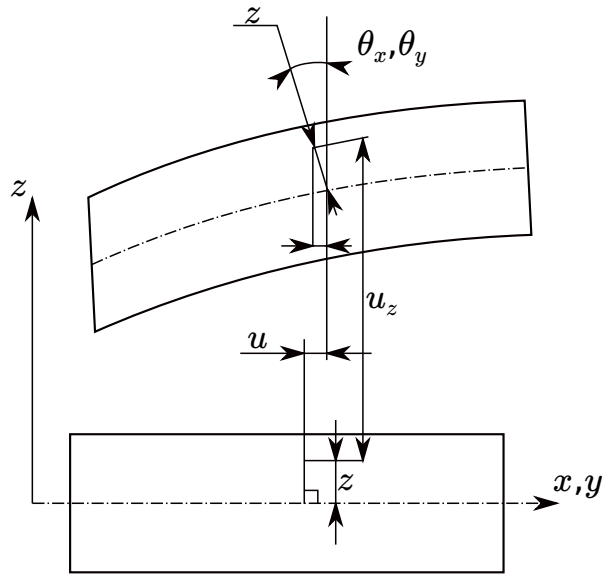
A figura 3.2 apresentada abaixo esquematiza as hipóteses listadas. A partir dela são descritas as equações de deslocamento, para cada nó da placa, através das seguintes equações:

$$u_x = -z\frac{\partial u_z}{\partial x} \qquad u_y = -z\frac{\partial u_z}{\partial y} \qquad u_z = u_z(x,y) \tag{3.1}$$

Similarmente, as equações de deformação são escritas em função dos deslocamentos transversais u_z, tal que (da Rocha 2004):

$$\varepsilon = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 u_z}{\partial^2 x} \tag{3.2}$$

Figura 3.2: Ilustração do elemento de placa de Kirchhoff deformada.



Fonte: Adaptado da referência (da Rocha 2004)

$$\varepsilon = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 u_z}{\partial^2 y} \tag{3.3}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -z2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \tag{3.4}$$

Para o elemento de placa apresentado cada nó tem um deslocamento transversal u_z na direção z, uma rotação θ_x em torno do eixo y e uma rotação θ_y em torno do eixo x. Assim, tem-se o seguinte vetor deslocamento $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4\}^T \tag{3.5}$$

Sendo cada subvetor de deslocamento $\mathbf{u}_i$ dado por:

$$\mathbf{u}_k = \left\{u_{z(k)} \ \theta_{x(k)} \ \theta_{y(k)}\right\}^T \tag{3.6}$$

para $k = 1, \ 2, \ 3, \ 4$. Além disso, expressa-se também a deformação mecânica da seguinte forma:

$$\varepsilon = \mathbf{L}_u \, \mathbf{u} \approx \mathbf{L}_u \, \mathbf{N}_u \, \mathbf{u}_{ap} \tag{3.7}$$

e, de forma equivalente, $\mathbf{L}_u \, \mathbf{N}_u \mathbf{u}_{ap} = \mathbf{B}_u \mathbf{u}_{ap}$. Na equação acima, $\mathbf{L}_u$ é obtida por um rearranjo matricial das equações (3.1) a (3.5), sendo, portanto, um operador diferencial para o problema particular da elasticidade. Além disso, $\mathbf{N}_u$ é a função polinomial para a aproximação do vetor $\mathbf{u}$, o que explica a mudança deste para o vetor aproximado $\mathbf{u}_{ap}$. Rearranjando a equação, tem-se $\mathbf{B}_u$, calculado a partir da aplicação de $\mathbf{L}_u$ à função de interpolação $\mathbf{N}_u$.

Considerando a e b como comprimento e largura da placa, respectivamente, tem-se a seguinte função de interpolação $\mathbf{N}_u$ para os deslocamentos da placa:

$$\mathbf{N}_u^T = \begin{bmatrix} 1-\xi\eta-(3-2\xi)\xi^2(1-\eta)-(1-\xi)(3-2)\eta^2 \\ (1-\xi)\eta(1-\eta)^2 b \\ -\xi(1-\xi)^2(1-\eta)a \\ (1-\xi)(3-2\eta)\eta^2+\xi(1-\xi)(1-2\xi)\eta \\ -(1-\xi)(1-\eta)\eta^2 b \\ -\xi(1-\xi)^2\eta a \\ (3-2\xi)\xi^2\eta-\xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ -\xi(1-\eta)\eta^2 b \\ (1-\xi)\xi^2\eta a \\ (3-2\xi)\xi^2(1-\eta)+\xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ \xi\eta(1-\eta)^2 b \\ (1-\xi)\xi^2(1-\eta)a \end{bmatrix}_{12\times 1} \tag{3.8}$$

Substituindo as relações de deslocamento na equação (3.5), obtêm-se o seguinte:

$$\mathbf{B}_u = -z[\frac{\partial^2 \mathbf{N}_u}{\partial^2 x}\frac{\partial^2 \mathbf{N}_u}{\partial^2 y}2\frac{\partial^2 \mathbf{N}_u}{\partial x \partial y}]^T \tag{3.9}$$

Tendo como referência as matrizes de massa e de rigidez do elemento estrutural, e fazendo as devidas substituições de $\mathbf{N}_u$ e $\mathbf{B}_u$, tem-se as seguintes matrizes de massa e rigidez, respectivamente, para o elemento de placa:

$$\mathbf{M}^e = \rho abt \int_0^1 \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u d\xi \tag{3.10}$$

$$\mathbf{K}^e = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)ab}\int_0^1 \mathbf{B}_u^T \mathbf{B}_u d\xi \tag{3.11}$$

Integrando as equações (3.10) e (3.11) na direção de ξ obtém-se as matrizes de massa e rigidez para o elemento de placa, apresentadas no Apêndice A.

3.3 Condição de um Nó Engastado

Definidas as matrizes elementares de massa e rigidez, pode-se representar inicialmente uma placa com 1 (um) elemento, especialmente para comparação de resultados com a modelagem usando diversos elementos. Assim, para a rigidez da placa tem-se que

$$\mathbf{F} = \mathbf{k}\,\mathbf{u} \tag{3.12}$$

sendo que $\mathbf{F}_{12\times 1}$ é o vetor de força elástica, $\mathbf{k}_{12\times 12}$ é a matriz de rigidez e $\mathbf{u}_{12\times 1}$ é o vetor deslocamento. Assim, tem-se que

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_1\ \mathbf{F}_2\ \mathbf{F}_3\ \mathbf{F}_4\}^T \tag{3.13}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & \mathbf{k}_{13} & \mathbf{k}_{14} \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} & \mathbf{k}_{24} \\ \mathbf{k}_{31} & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} & \mathbf{k}_{34} \\ \mathbf{k}_{41} & \mathbf{k}_{42} & \mathbf{k}_{43} & \mathbf{k}_{44} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4\}^T \tag{3.15}$$

A partir da matriz de rigidez apresentada, percebe-se que a força aplicada em determinado nó i ($i = 1,...,4$) da placa é proporcional aos deslocamentos em todos os nós, ou seja:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{4} \mathbf{k}_{ij}\mathbf{u}_j \tag{3.16}$$

Considerando o nó 1 engastado, e os demais livres para o movimentos, tem-se

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_E \ \mathbf{F}_L\}^T \tag{3.17}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{EE} & \mathbf{k}_{LE} \\ \mathbf{k}_{EL} & \mathbf{k}_{LL} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_E \ \mathbf{u}_L\}^T \tag{3.19}$$

Nas equações acima, o subíndice E é referente ao nó engastado e o subíndice L é referente aos nós livres. Ou seja, $\mathbf{F}_E = \mathbf{F}_1$, $\mathbf{u}_E = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{F}_L = \{\mathbf{F}_2 \ \mathbf{F}_3 \ \mathbf{F}_4\}^T{}_{9\times1}$ e $\mathbf{u}_L = \{\mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 \ \mathbf{u}_4\}^T{}_{9\times1}$. Similarmente, tem-se $\mathbf{k}_{EE3\times3}$, $\mathbf{k}_{LE3\times9}$, $\mathbf{k}_{EL9\times3}$ e $\mathbf{k}_{LL9\times9}$. A partir das equações (3.17) a (3.19), tem-se que a força elástica nos nós livres é dada por

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{k}_{EL}\,\mathbf{u}_E + \mathbf{k}_{LL}\,\mathbf{u}_L \tag{3.20}$$

Para um engaste ideal, $\mathbf{u}_E = \mathbf{0}$ e, portanto, tem-se

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{k}_{LL}\,\mathbf{u}_L \tag{3.21}$$

Note que, como exemplo, o caso de uma força externa na vertical sobre o nó 3, tem-se o seguinte vetor para força externa:

$$\mathbf{F}_{ext} = \{\mathbf{0}_{3\times1} \ \mathbf{0}_{3\times1} \ \mathbf{f}_{ext3\times1} \ \mathbf{0}_{3\times1}\}^T \tag{3.22}$$

sendo $\mathbf{f}_{ext} = \{f_{ext} \ 0 \ 0\}^T$.

Caso 1: Considerando apenas a força elástica

O somatório de forças se dá por $-\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$, ou $\mathbf{u}_L = \mathbf{k}_{LL}^{-1}\,\mathbf{F}_{ext}$.

Caso 2: Considerando a força elástica e a força de inércia:

Neste caso se tem $-\mathbf{F}_L - \mathbf{F}_L^M + \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$. Assim, $\mathbf{k}_{LL}\,\mathbf{u}_L + \mathbf{M}_{LL}\,\ddot{\mathbf{u}}_L = \mathbf{F}_{ext}$. Aplicando a transformada de Laplace, tem-se:

$$(\mathbf{k}_{LL} - \omega^2\,\mathbf{M}_{LL})\,\mathbf{u}_L(\omega) = \mathbf{F}_{ext}(\omega) \tag{3.23}$$

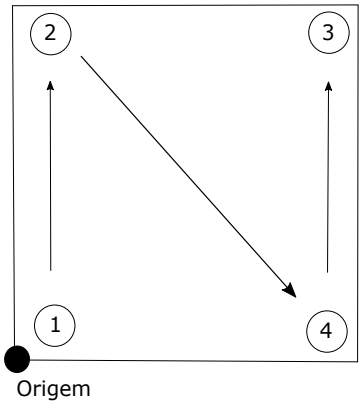
$$\mathbf{u}_L(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\,\mathbf{F}_{ext}(\omega) \tag{3.24}$$

sendo $\mathbf{H}(\omega) = (\mathbf{k}_{LL} - \omega^2\mathbf{M}_{LL})^{-1}$ a matriz de funções de respostas em frequência.

3.4 Matrizes globais de massa e rigidez

Para se obter as matrizes globais de uma representação de placa discretizada tem-se como o primeiro passo a organização dos elementos que a compôe, incluindo a definição de uma origem, uma sequência de numeração dos elementos, além de uma sequência de nós internos de cada elemento. Assim, define-se a origem da placa como o canto inferior esquerdo, e a sequência dos nós internos conforme Figura 3.3. Com isso, tem-se a matriz de dimensão $n \times n$ ao se considerar n graus de liberdade de acordo com a discretização da placa. A sequência definida deve corresponder as posições dos nós no vetor de deslocamentos $\mathbf{u}$.

Figura 3.3: Origem e direção dos nós internos de cada elemento

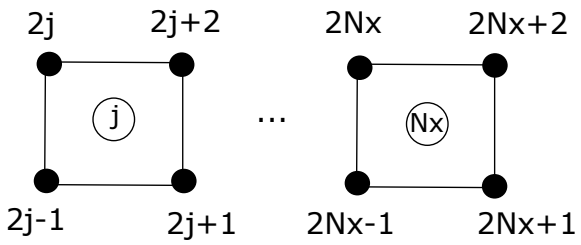


Fonte: Próprio autor.

- *Elemento na Linha 1 da placa*

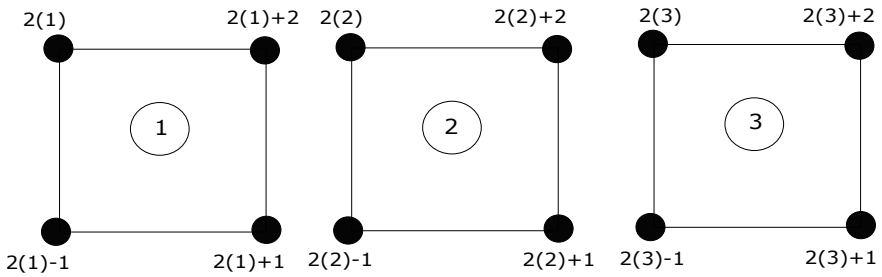
Entenda como primeira linha a sequência horizontal, inferior, de elementos que compõe a placa discretizada. Tem-se, então, que $i = 1$, tal que a seguinte regra de formação pode ser considerada para programar computacionalmente a montagem das matrizes globais da placa. Considera-se N_x elementos na linha, sendo portanto $j = 1,...,N_x$, conforme ilustrado na Figura 3.4. Por exemplo, para a linha 1 e três elementos ($N_x = 3$), tem-se $i = 1$ e $j = 1,2,3$. tem-se os seguintes elementos mostrados na Figura 3.5.

Figura 3.4: Sequência dos nós dos elementos da primeira linha de elementos da placa.



Fonte: Próprio autor.

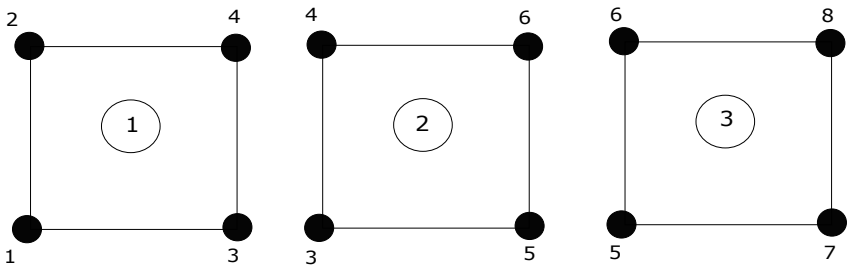
Figura 3.5: Linha 1 da placa para três elementos na direção x.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 3.6 se tem a primeira linha de elementos da placa, com indicação dos nós internos e externos de cada um. Repare que os nós externos 3 e 4 do elemento 1 coincidem com os nós internos 1 e 2 do elemento 2. Da mesma forma, os nós externos 5 e 6 do elemento 2 coincidem com os nós internos 1 e 2 do elemento 3. Essa coincidência continua caso existam mais elementos na linha.

Figura 3.6: Linha 1 do exemplo para três elementos na direção x



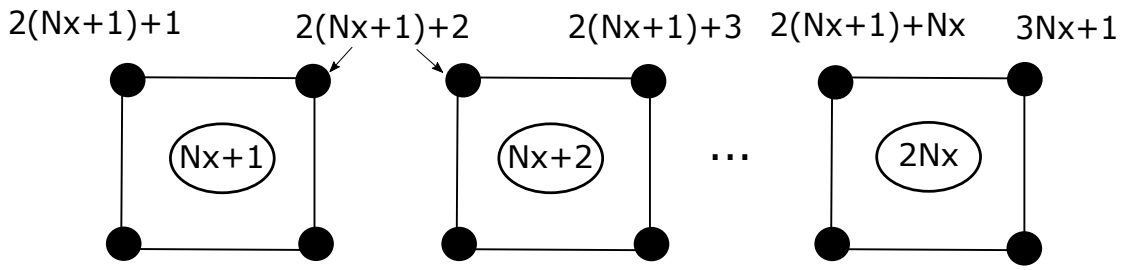
Fonte: Próprio autor.

- Elemento na Linha 2 da placa

Para a segunda linha de elementos da placa ($i = 2$), tem-se a regra de formação mostrada na Figura 3.7. O primeiro elemento da linha 2 corresponde ao seguinte ao último elemento da linha 1 (ou seja, $N_x + 1$). Ainda, o último dessa linha é dado pelo dobro do último da linha 1 ($2N_x$). Então, na sequência do exemplo anterior, para três elementos na linha 1 se tem a

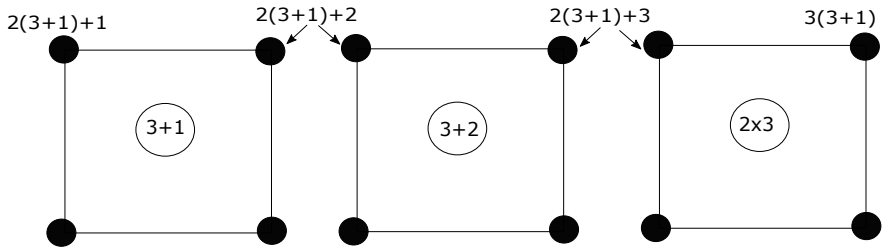
seguinte linha 2 conforme Figura 3.7. Assim, forma-se a segunda linha de elementos da placa, conforme ilustrado na Figura 3.8.

Figura 3.7: Lei de formação para a segunda linha da placa.



Fonte: Próprio autor.

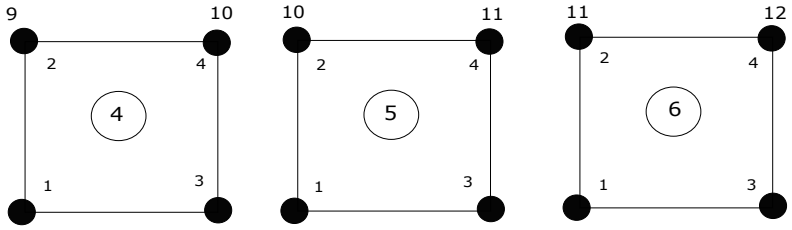
Figura 3.8: Linha 2 da placa para três elementos na direção x



Fonte: Próprio autor.

A Figura 3.9 mostra um exemplo particular para 3 elementos compondo a primeira linha de elementos da placa, ou seja, 3 elementos na direção x. Note que os nós externos inferiores dos elementos da segunda linha coincidem com os nós externos superiores da primeira linha.

Figura 3.9: Linha 2 do exemplo para três elementos na direção x.

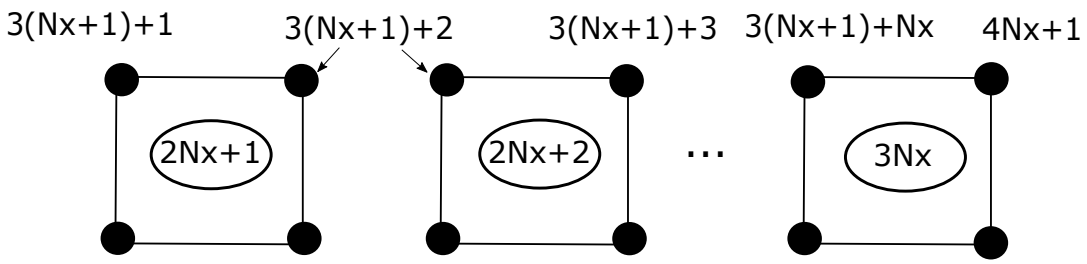


Fonte: Próprio autor.

- *Elemento na Linha $\geq$ 3 da placa*

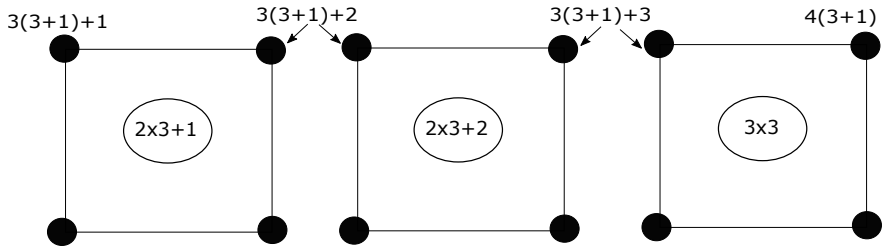
Para a terceira linha de elementos da placa ($i = 3$), tem-se a formação apresentada na Figura 3.10. Seguindo a mesma lógica da linha anterior, o primeiro elemento da linha 3 está na sequência do último da linha 2 ($2Nx + 1$), e o último dessa linha é o triplo do último elemento da linha 1 ($3Nx$). Dessa forma, tem-se os seguintes elementos apresentados na Figura 3.11, cuja numeração é especificamente apresentada na Figura 3.12.

Figura 3.10: Lei de formação para a terceira linha da placa.



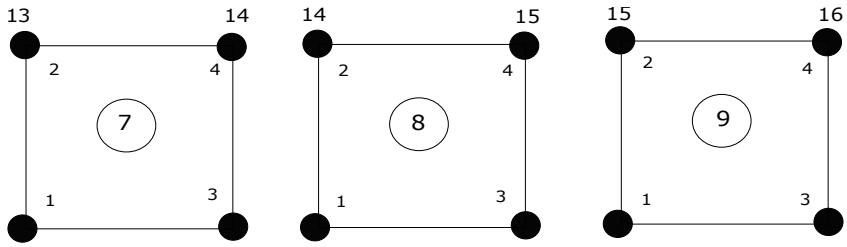
Fonte: Próprio autor.

Figura 3.11: Linha 3 da placa para três elementos na direção x.



Fonte: Próprio autor.

Figura 3.12: Linha 3 do exemplo para três elementos na direção x.

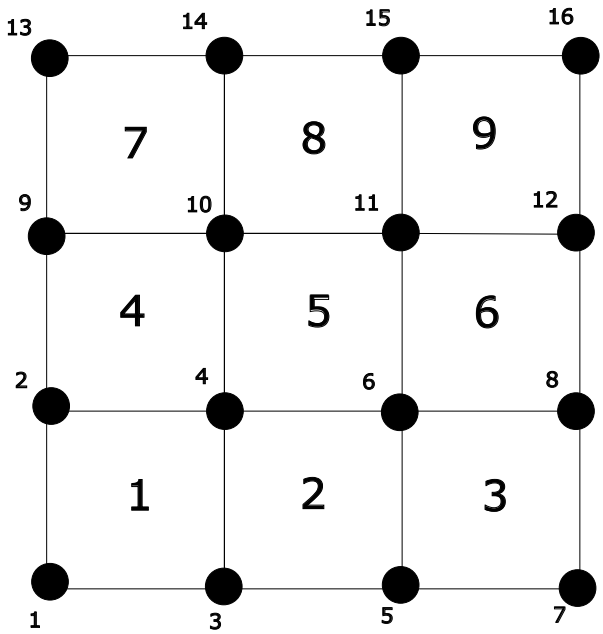


Fonte: Próprio autor.

As relações de coincidência são as mesmas mencionadas para as linhas anteriores. Para as

outras linhas em diante, a lógica de formação segue sendo a mesma. Segundo o exemplo, 3 elementos na direção x, tem-se a placa mostrada na Figura 3.13.

Figura 3.13: Ilustração de uma placa discretizada por nove elementos: números dos elementos e dos nós.



Fonte: Próprio autor.

A partir dos resultados anteriores pode-se apresentar uma descrição geral, que permite a implementação computacional de um algoritmo para obtenção da matriz de conectividade nodal para a placa de Kirchhoff, conforme se mostra a seguir:

- **Para i=1: Elemento:** $j = 1,...,N_x$

  nó 1: $2j - 1$ nó 2 a $2j$

  nó 3: $2j + 1$ nó 4 a $2j + 2$

- **Para i=2: Elemento:** $(j + N_x)$, ..., $2N_x$

  nó 1: $2j$ nó 2 a $2(N_x + 1) + j$

  nó 3: $2(j + 1)$ nó 4 a $2(N_x + 1) + j + 1$

- **Para $i \geq 3$: Elemento:** $(i - 1)N_x + j$

  nó 1: $(i - 1)(Nx + 1) + j$ nó 2 a $i(N_x + 1) + j$

  nó 3: $(i - 1)(Nx + 1) + j + 1$ nó 4 a $i(N_x + 1) + j + 1$

Matrizes globais

Construída a matriz de conectividade nodal, cuja função é montar as relações de elementos e nós na placa, calcula-se as matrizes de massa e rigidez globais. Para tanto, são utilizadas matrizes obtidas anteriormente, ou seja, as matrizes de massa e rigidez do elemento de placa (Apêndice A), e as matrizes de massa e rigidez para quatro elementos de placa (Apêndice A.1).

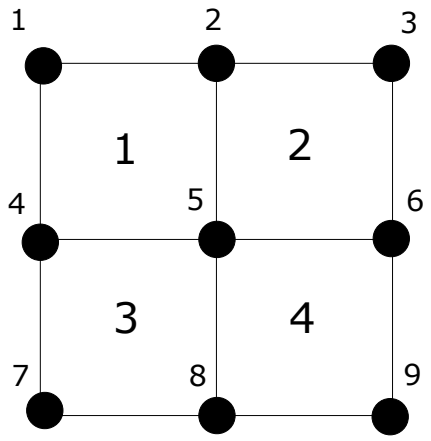
3.5 Efeito da Discretização

A discretização da placa de Kirchhoff é ideal para sua análise, uma vez que sua divisão em vários elementos aprimora a análise, aumentando a acurácia dos resultados. Dessa forma, nesta seção se discute a placa dividida em quatro elementos, para ilustrar a discretização.

Placa com Quatro Elementos

A Figura 3.14 apresenta os quatro elementos de placa, cujos nós e elementos estão numerados. Assim, a placa é constituída por 9 nós, com 3 graus de liberdade por nó, que então resulta em matizes de massa e de rigidez globais com dimensão 27×27.

Figura 3.14: Ilustração de placa discretizada por quatro elementos: números dos elementos e dos nós.



Fonte: Próprio autor.

O elemento da placa, por sua vez, segue o padrão apresentado abaixo, cujas matrizes de massa e rigidez, ambas de dimensão 12×12, são dividas em 16 submatrizes de ordem 3 (descritas no Apêndice A.1). As posições dos nós do elemento acima são fixas. Dessa forma, o vetor de deslocamento $\mathbf{u}$ é da forma $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_{13\times1}\ \mathbf{u}_{23\times1}\ \mathbf{u}_{33\times1}\ \mathbf{u}_{43\times1}\}^T$, sendo cada subvetor dado por $\mathbf{u}_i = \{u_{zi}\ \theta_{x1}\ \theta_{y1}\}^T$.

A seguir são apresentadas as matrizes de massa e rigidez elementares, sendo cada termo uma submatriz de dimensão 3×3.

$$\mathbf{M}_e^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{(1)} & \mathbf{M}_{12}^{(1)} & \mathbf{M}_{13}^{(1)} & \mathbf{M}_{14}^{(1)} \\ \mathbf{M}_{21}^{(1)} & \mathbf{M}_{22}^{(1)} & \mathbf{M}_{23}^{(1)} & \mathbf{M}_{24}^{(1)} \\ \mathbf{M}_{31}^{(1)} & \mathbf{M}_{32}^{(1)} & \mathbf{M}_{33}^{(1)} & \mathbf{M}_{34}^{(1)} \\ \mathbf{M}_{41}^{(1)} & \mathbf{M}_{42}^{(1)} & \mathbf{M}_{43}^{(1)} & \mathbf{M}_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

$$\mathbf{K}_e^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} & \mathbf{K}_{13}^{(1)} & \mathbf{K}_{14}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} & \mathbf{K}_{23}^{(1)} & \mathbf{K}_{24}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{31}^{(1)} & \mathbf{K}_{32}^{(1)} & \mathbf{K}_{33}^{(1)} & \mathbf{K}_{34}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{41}^{(1)} & \mathbf{K}_{42}^{(1)} & \mathbf{K}_{43}^{(1)} & \mathbf{K}_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

O número 1 indica que se analisa o elemento 1. Para os demais elementos, o procedimento é análogo. Além disso, cada linha das matrizes apresentadas acima corresponde a um nó do

elemento. Dessa forma, tem-se que a força elástica da placa elementar é dada por

$$\mathbf{F}^{(1)} = \mathbf{K}_e^{(1)}\,\mathbf{u}^{(1)} \tag{3.27}$$

No qual $\mathbf{F}^{(1)}{}_{12\times1}$ é a força elástica no elemento 1; $\mathbf{K}_e^{(1)}{}_{12\times12}$ é a matriz de rigidez elementar do elemento; e $\mathbf{u}^{(1)}{}_{12\times1}$ é o vetor de deslocamentos nodais no elemento 1. Assim, tem-se

$$\mathbf{F}^{(1)} = \left\{\mathbf{F}_1^{(1)}{}_{3\times1}\ \mathbf{F}_2^{(1)}{}_{3\times1}\ \mathbf{F}_3^{(1)}{}_{3\times1}\ \mathbf{F}_4^{(1)}{}_{3\times1}\right\}^T \tag{3.28}$$

Cada subvetor acima é a força elástica no nó correspondente do elemento 1. Similarmente, tem-se

$$\mathbf{u}^{(1)} = \left\{\mathbf{u}_1^{(1)}{}_{3\times1}\ \mathbf{u}_2^{(1)}{}_{3\times1}\ \mathbf{u}_3^{(1)}{}_{3\times1}\ \mathbf{u}_4^{(1)}{}_{3\times1}\right\}^T \tag{3.29}$$

em cada subvetor correspondente ao deslocamento de cada nó do elemento 1. Portanto, para o elemento 1 se tem que

$$\mathbf{F}_1^{(1)} = \mathbf{K}_{11}^{(1)}\,\mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{12}^{(1)}\,\mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{13}^{(1)}\,\mathbf{u}_3 + \mathbf{K}_{14}^{(1)}\,\mathbf{u}_4 \tag{3.30}$$

$$\mathbf{F}_2^{(1)} = \mathbf{K}_{21}^{(1)}\,\mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{22}^{(1)}\,\mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{23}^{(1)}\,\mathbf{u}_3 + \mathbf{K}_{24}^{(1)}\,\mathbf{u}_4 \tag{3.31}$$

$$\mathbf{F}_3^{(1)} = \mathbf{K}_{31}^{(1)}\,\mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{32}^{(1)}\,\mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{33}^{(1)}\,\mathbf{u}_3 + \mathbf{K}_{34}^{(1)}\,\mathbf{u}_4 \tag{3.32}$$

$$\mathbf{F}_4^{(1)} = \mathbf{K}_{41}^{(1)}\,\mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{42}^{(1)}\,\mathbf{u}_2 + \mathbf{K}_{43}^{(1)}\,\mathbf{u}_3 + \mathbf{K}_{44}^{(1)}\,\mathbf{u}_4 \tag{3.33}$$

Cada equação acima corresponde à força elástica de cada nó, representado pelo subíndice. O primeiro elemento de cada uma delas condiz à força no nó correspondente devido ao deslocamento do nó 1. O segundo é a força no nó correspondente devido ao deslocamento do nó 2. E assim por diante. O procedimento é o mesmo para os demais elementos.

Finalmente, para a construção da matriz global de dimensão 27×27, apresentada no Apêndice, a primeira etapa é dividí-la em 9 espaços, cujas linhas representam o nó a ser analisado e as colunas representam em qual nó está tendo deslocamento. Cada espaço é preenchido por uma ou mais submatrizes elementares de dimensão 3×3. O procedimento é analisar os elementos separadamente, verificando a correspondência de seus nós com os da placa. Por exemplo, o termo $\mathbf{M}_{11}^{(1)}$ da matriz (A.7) corresponde à submatriz referente às linhas de 1 a 3 e colunas de 1 a 3 da matriz (A.2).

3.6 Molas nos Nós dos Elementos de Placa

Similarmente ao conteúdo apresentado no Capítulo 3.3 deste documento, tem-se nesta seção o efeito do acoplamento de molas nos vértices da placa. No entanto, diferentemente do engaste, para o qual é restringido o deslocamento de translação e rotação no nó, a mola tem o efeito de adicionar uma rigidez ao sistema. Esta, por sua vez, é incrementada à matriz de rigidez elementar da placa. Considerando uma mola de rigidez k adicionada verticalmente ao nó 1 de uma placa de quatro elementos, cuja submatriz de rigidez $\mathbf{K}_{11}^{1}$ é apresentada na equação A.8,

tem-se a seguinte matriz $\mathbf{K}_k$ da rigidez adicionada :

$$\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Assim, a submatriz de rigidez 11 no nó 1, ou seja, a submatriz referente ao deslocamento transversal no nó 1 é alterada para $\mathbf{K*}^1_{11} = \mathbf{K}^1_{11} + \mathbf{K}_k$. O procedimento é o mesmo para a adição de molas em outros nós da placa.

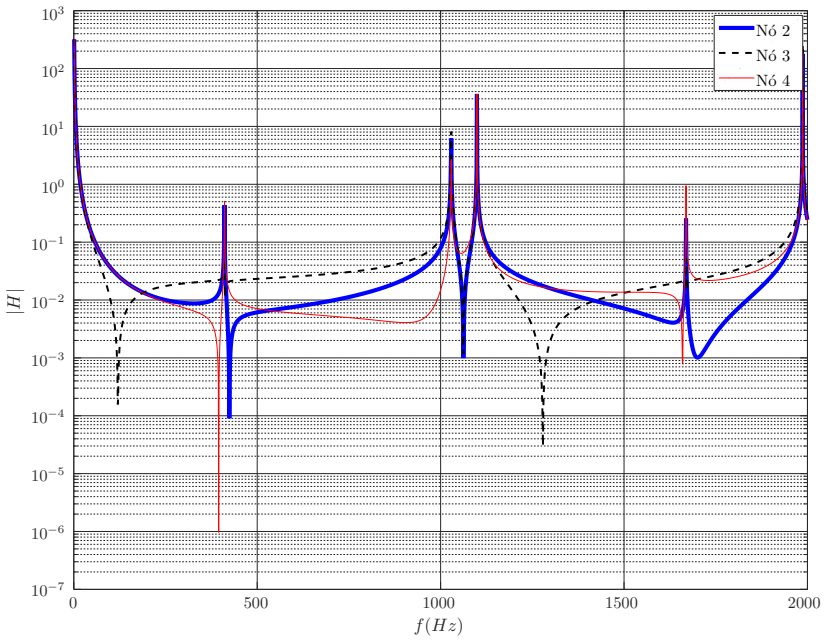
4 Resultados e Discussões

Este capítulo apresenta os resultados de simulações computacionais realizadas considerando a modelagem da placa de Kirchhoff introduzida neste trabalho.

4.1 Dinâmica de um elemento com nó engastado em flexão

Considere um elemento de placa com engaste parcial no nó 1 (um), restringindo apenas o movimento de flexão (translação). Assume-se uma placa elementar de $10m \times 10m$, de alumínio, com espessura de $0{,}002m$. Assim, tem-se as seguintes FRFs (função de resposta em frequência) no nó 2 (linha azul), nó 3 (linha preta) e nó 4 (linha vermelha). Embora seja possível apresentar tais resultados, sabe-se que a adequada representação de uma estrutura, usando o método dos Elementos Finitos, exige a discretização por um substancial número de elementos, em vez de apenas um. No entanto, este resultado tem sua importância didática, principalmente para se exercitar a programação computacional usando a modelagem em estudo neste trabalho.

Figura 4.1: Função de resposta em frequência (FRF) para t de $0{,}002m$ em um elemento de placa com nó 1 engastado em translação

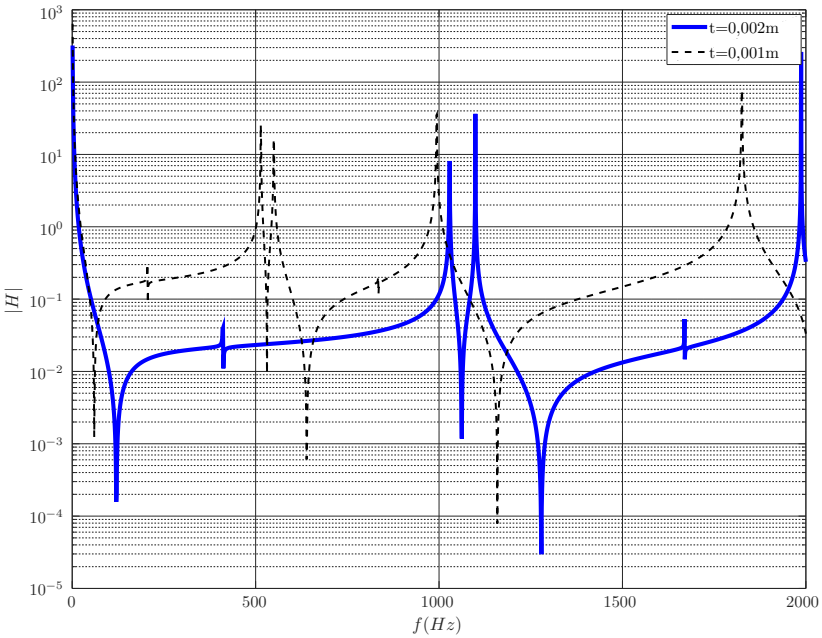


Fonte: Próprio autor.

Além da análise de todos os pontos da placa, é interessante também perceber o efeito que a

mudança de espessura pode ocasionar. Dessa forma, na Figura 4.2 apresenta a FRF para o nó 3, escolhido arbitrariamente, para espessuras de placa de 0,002m (linha azul) e 0,001m (linha preta). Considera-se entrada e saída em flexão, correspondendo à posição $i = 4$ e $j = 4$, para (i,j) indicando respectivamente as posições na linha e coluna da matriz de FRFs. Nota-se nos resultados que as diferentes FRFs observam distintos modos do sistema, que naturalmente não são fisicamente bem representados ao se considerar apenas um elemento de placa.

Figura 4.2: FRF H_{44} para diferentes espessuras de placa elementar com engaste para translação no nó 1



Fonte: Próprio autor.

Sabe-se que as funções de resposta em frequência (FRF) para uma entrada no GDL i e saída no GDL j corresponde à FRF para entrada no GDL j e saída no GDL i, conforme estabelecido pelo Princípio da Reciprocidade.

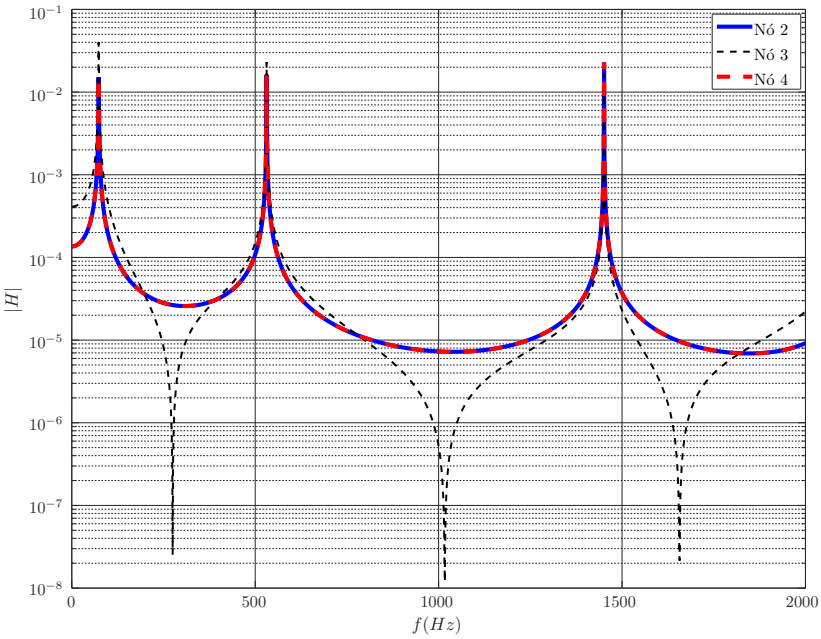
4.2 Placa com um elemento cujo nó 1 é engastado na translação e rotação (3 graus de liberdade)

Para a simulação computacional do elemento de placa com o nó 1 engastado, em todos os graus de liberdade, sendo a espessura t igual a 0,002m, tem-se na Figura 4.3 as FRFs dos nós 2 (linha azul), 3 (linha preta) e 4 (linha vermelha). Similarmente, na Figura 4.4 se tem os resultados para as espessuras de 0,002m (linha azul) e de 0,001m (linha preta). Ao se observar as curvas, nota-se que ao reduzir a espessura do elemento de placa, em relação ao resultado mostrado na Figura 4.1, a curva se desloca para a esquerda, expressando a diminuição de rigidez e, consequentemente, a redução das frequências dos modos observados.

Fisicamente, ao engastar o nó em todos os graus de liberdade, é como se o mesmo não existisse. Portanto, a diferença entre essa e curva da Figura 4.1 é que a resposta em frequência

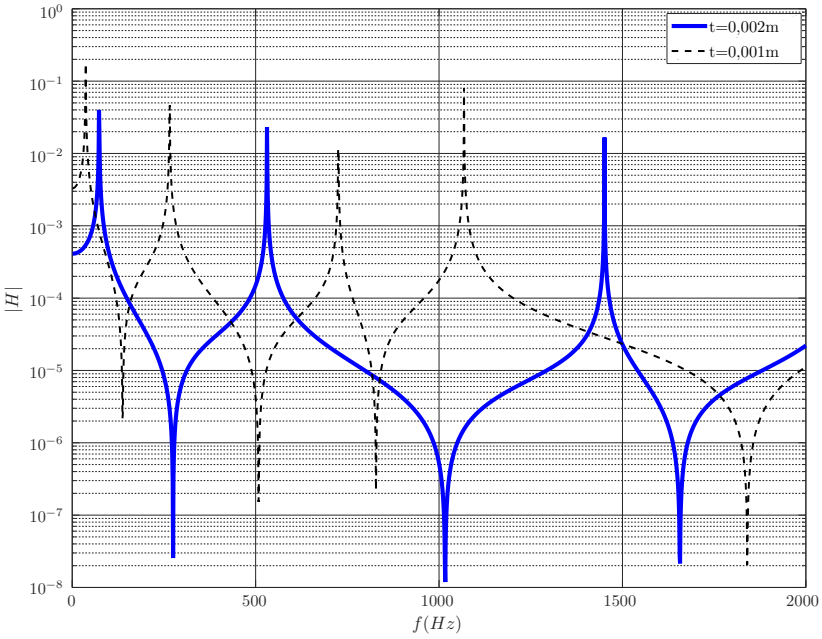
considera a placa com um nó a menos, sendo, portanto, maior em comparação ao caso em que o nó não é engastado.

Figura 4.3: Função de resposta em frequência (FRF) para t de $0{,}002m$ em um elemento de placa cujo nó 1 é engastado na translação e rotação



Fonte: Próprio autor.

Figura 4.4: FRF H_{44} para diferentes espessuras de placa elementar com engaste para translação e rotação no nó 1



Fonte: Próprio autor.

4.3 Efeito da Discretização

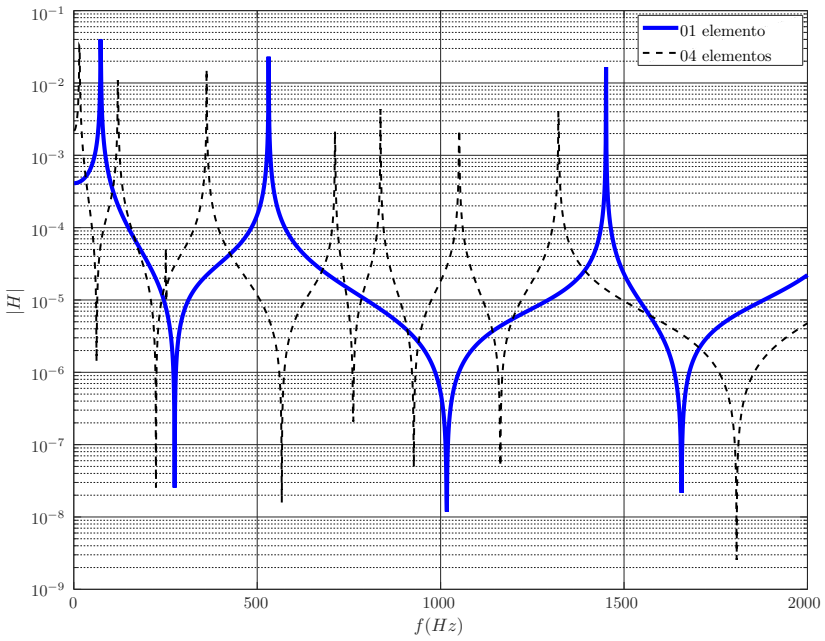
Considere a placa discretizada em quatro elementos, com engaste no nó 1 do elemento um. A Figura 4.5 apresenta uma comparação de FRFs obtidas ao se discretizar a placa com 1 (um) elemento (linha azul) e com 4 (quatro) elementos (linha preta), para uma espessura t de $0{,}002m$. Nota-se claramente que a maior discretização permite se capturar mais informações da dinâmica da placa, sendo em particular observados 4 modos adicionais para a faixa de frequência de até $2000Hz$. Também note que o número de picos da função de resposta em frequência corresponde ao número de graus de liberdade do sistema, bastando se considerar a faixa de frequência suficientemente adequada para observá-los.

4.4 Adição de molas aos nós do elemento de placa

Considere um elemento de placa com adição de molas (em flexão) às suas extremidades, ao invés de engaste. Como discutido no seção 3.6, adiciona-se a nova rigidez à matriz $\mathbf{K}$ correspondente a cada nó. Dessa forma, são simuladas computacionalmente as FRFs incluindo as molas em todos os quatro nós do elemento, para uma placa de $10m \times 10m$, de alumínio e espessura t de $0{,}002m$, e para diferentes valores de rigidez. Nas Figuras 4.6 a 4.8, apresentadas abaixo, as cores representam os quatro nós do elemento, sendo que a cor preta representa o nó 1, a vermelha o nó 2, a verde o nó 3, e a azul o nó 4.

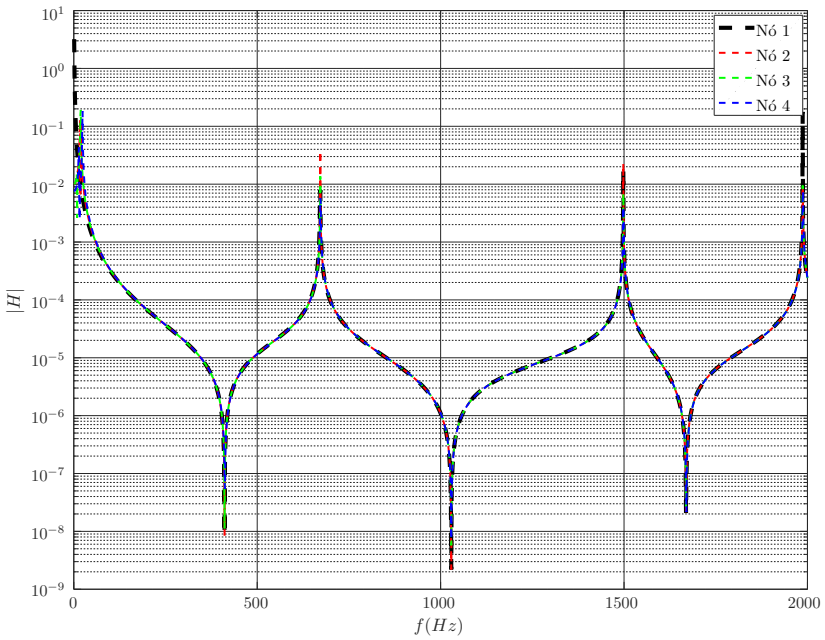
Nota-se que, ao se adicionar molas aos nós do elemento de placa se tem um aumento rigidez total, visto que cada novo valor de rigidez k da mola é adicionado às linhas e colunas

Figura 4.5: FRF da placa discretiza por um e quatro elementos, com engaste no nó 1



Fonte: Próprio autor.

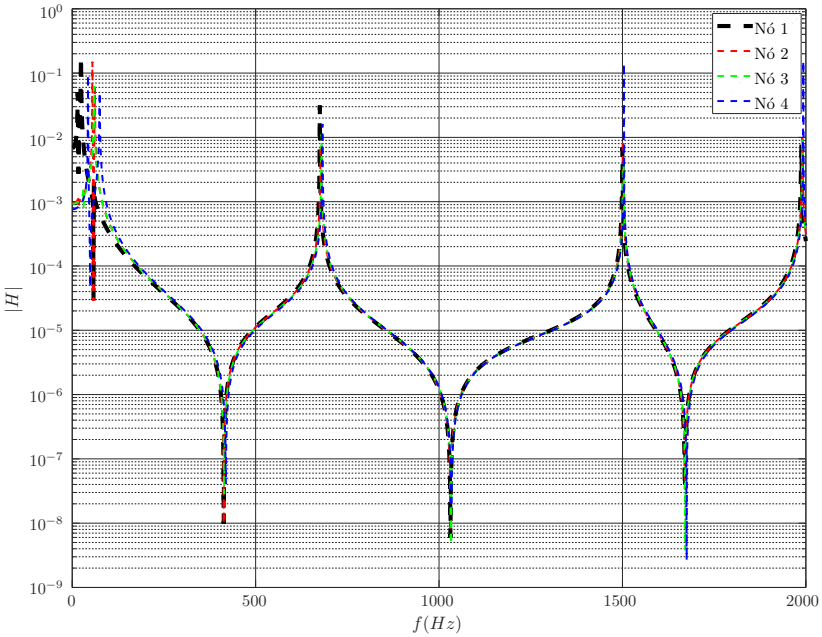
Figura 4.6: FRFs para a placa elementar com adição de molas de rigidez $k = 100N/m$ aos quatro nós



Fonte: Próprio autor.

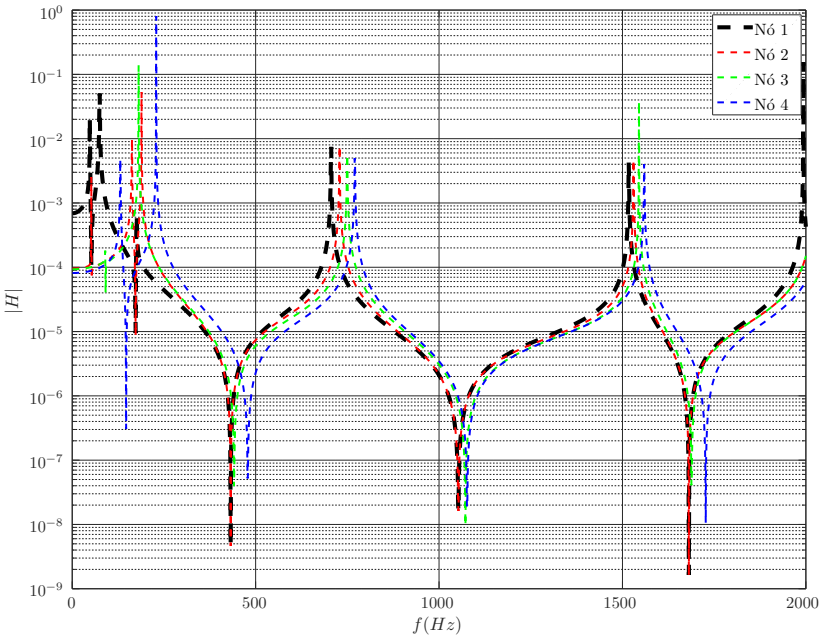
dos nós e graus de liberdade correspondentes. Assim, com maior rigidez, a placa apresenta maior resistência ao deslocamento, como expressa a Lei de Hooke, tendo então um menor nível de resposta quando submetida à forças externas.

Figura 4.7: FRFs para a placa elementar com adição de molas de rigidez $k = 1000N/m$ aos quatro nós



Fonte: Próprio autor.

Figura 4.8: FRFs para a placa elementar com adição de molas de rigidez $k = 10000N/m$ aos quatro nós



Fonte: Próprio autor.

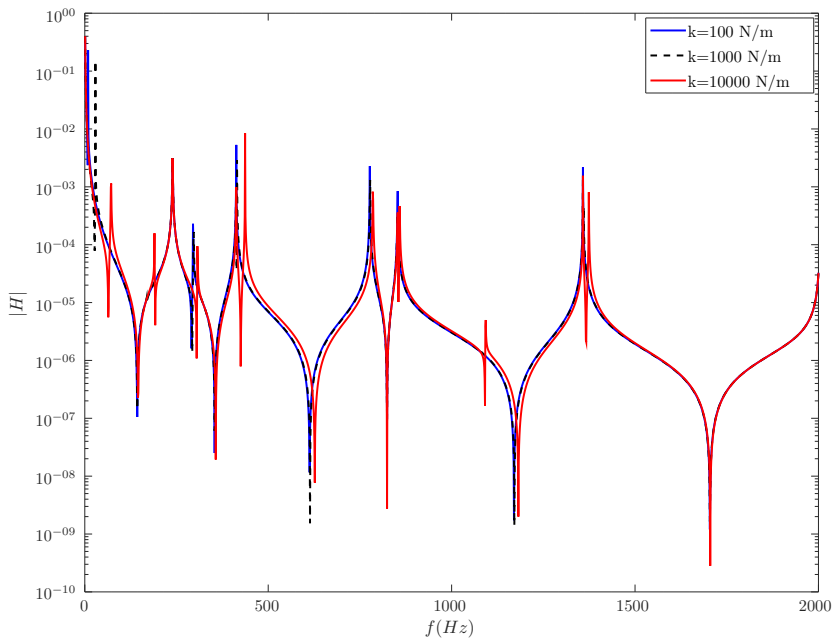
4.5 Placa de quatro elementos com adição de mola ao nó 1

Considerando uma mola conectada verticalmente ao nó 1 da placa discretizada por quatro elementos e, atribuindo diferentes valores para a rigidez k dessa mola, tem-se as FRF da

Figura 4.9, obtidas para espessura de 0,002m. Comparando as curvas para a placa de quatro elementos com engaste no nó 1 (Figura 4.5) com as curvas da Figura 4.9, obtém-se o resultado mostrado na Figura 4.10. A linha preta representa a FRF para a condição de um engaste no nó 1, e as linhas tracejadas coloridas são as FRFs obtidas ao se adicionar a mola. Cada cor equivale a uma rigidez, previamente apresentadas na Figura 4.9.

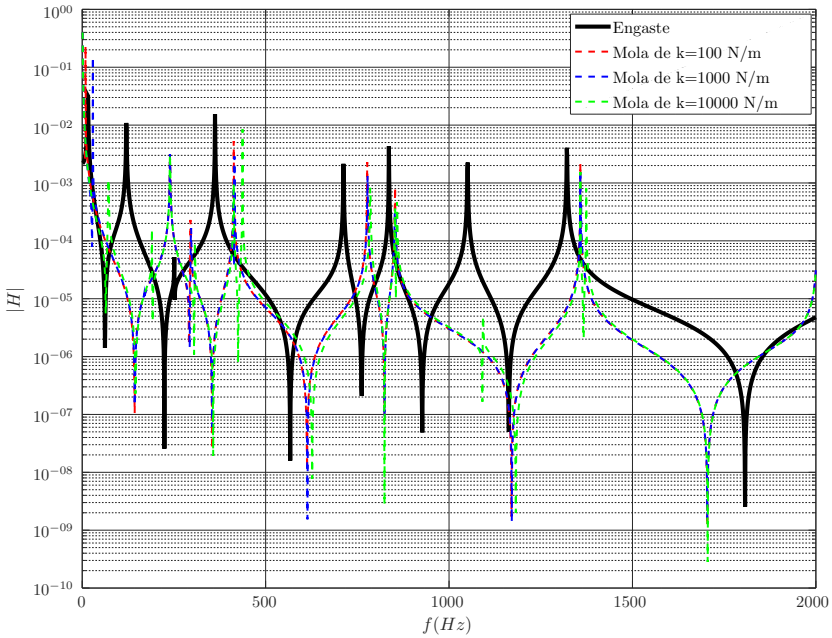
Como descrito anteriormente, a diferença física entre a placa cujo nó 1 é engastado com a placa cujo nó 1 é adicionado uma mola, é que para o primeiro caso a rigidez do nó é anulada. Ou seja, a resposta em frequência é proporcional aos outros três nós do elemento. E para o segundo cenário, uma rigidez é adicionada. Portanto, tem-se que a resposta em frequência será maior quanto menor for a rigidez do elemento, seguindo uma proporção inversa. Maior rigidez (adição de molas) significa maior estabilidade, menos resposta frente à interferências externas.

Figura 4.9: FRF para uma placa discretizada com quatro elementos, com mola linear de rigidez k acoplada ao nó 1



Fonte: Próprio autor.

Figura 4.10: Comparação da resposta em frequência para uma placa de quatro elementos com engaste e mola de rigidez k acoplada ao nó 1



Fonte: Próprio autor.

5 Considerações Finais

Este trabalho teve como finalidade estudar os fundamentos da modelagem de placas delgadas, seguindo a Teoria de Kirchhoff, cujos elementos são compostos por 4 (quatro) nós com 3 (três) graus de liberdade cada. A ideia geral é considerar que as estruturas podem ser representadas de forma discretizada, no contexto das aplicações envolvendoo Método dos Elementos Finitos (MEF).

A discretização dos elementos é normalmente realizada para a otimização de formas, em que aspectos geométricos, geração de malhas e processamento de resultados são envolvidos. Em particular neste estudo foram considerados apenas poucos elementos, pois o foco foi avaliar e compreender conceitualmente a formulação e estrutura de obtenção das matrizes globais. No entanto, sabe-se que a discretização da malha com um maior número de elementos permite obter resultados mais precisos, enriquecendo a análise final de uma dada estrutura.

Além da discretização da placa, foram estudadas situações de engaste e adição de molas, observando os efeitos na resposta dinâmica, através da função de resposta em frequência do sistema, por meio de simulações computacionais. Com isso, a comparação preliminar entre adição de engaste teórico com o efeito incluído por uma mola conectada, sugere que este é um importante tópico de estudos para bem representar condições reais de engaste das diferentes aplicações de engenharia.

5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

A seguir são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Aplicar os conceitos envolvidos no método de Elementos Finitos, considerando outros elementos, como os de barra, de treliça, entre outros.

- Realizar simulações computacionais empregando o método de Elementos Finitos através de softwares comerciais, visando envolver análises para aplicações de demandas de mercado, como do automobilístico, aeronáutico, entre outros.

Referências Bibliográficas

Ares, V. E. (2016), Formulação e implementação do método dos elementos de contorno para placas de kirchhoff unidirecionalmente estiradas, Master's thesis, Unicamp.

Costa, G. d. & Rodrigues, F. (2018), 'Análise de placas retangulares delgadas pelo método dos elementos finitos', *Simpósio de Mecânica Computacional* .

da Rocha, T. L. (2004), Modelagem de estruturas inteligentes, Master's thesis, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Depto. de Engenharia Mecãnica, Universidade Estadual Paulista (UNESP).

de Oliveira Ribeiro, G. (1992), Sobre a formulação do método dos elementos de contorno para a flexão de placas usando as hipóteses de reissner, PhD thesis, Universidade de São Paulo.

Dias, A. R. (1998), Análise de placas com restrições de contato, Master's thesis, Universidade Federal de Ouro Preto.

Leal, C. E. F. (2015), Formulação de métodos dos elementos finitos para a análise elástica linear de placas delgadas, Trabalho de conclusão de curso de graduação, Departamento Acadêmico de Construção Civil (DACOC), Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR).

Macedo, M. & Persival, S. (2008), 'Emprego do método de resíduos ponderados para a análise de tubos', *Cadernos de Engenharia de Estruturas* .

Marqui, C. R. (2007), Modelagem de estruturas piezelétricas para aplicação em localização de falhas, Master's thesis, Universidade Estadual Paulista.

Mesquita, A. D. (1998), Uma formulação do método dos elementos finitos aplicada à análise elastoplástica de cascas, Master's thesis, Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), Universidade de São Paulo (USP).

Moreira de Lemos, E. (2007), Implementação dos métodos de resíduos ponderados por quadraturas gaussianas, Master's thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Torres, D. A. F. (2008), Método dos Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Análise de Placas Laminadas Compostas Inteligentes, PhD thesis, Universidade Federal de Santa Catarina.

Viana, H. & Vieira, A. (2008), Análise vibratória de placas, *in* '8°Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional'.

Apêndice A Matrizes de Massa e Rigidez do Elemento de Placa

A matriz de massa do elemento de placa é descrita como

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho abt}{176400}\mathbf{m}_{I,J} \tag{A.1}$$

sendo a matriz $\mathbf{m}_{I,J}$ dada por:

$$\mathbf{m}_{I,J} = \begin{bmatrix}
24178 & & & & & & & & & & & \\
3227b & 560b^2 & & & & & & & & & & \\
-3227a & -441ab & 560a^2 & & & & & & & & & \\
8582 & 1918b & -1393a & 24178 & & & & & & & & \\
-1918b & -420b^2 & 294ab & -3227b & 560b^2 & & & & simétrica & & & \\
-1393a & -294ab & 280a^2 & -3227a & 441ab & 560a^2 & & & & & & \\
2758 & 812b & -812a & 8582 & -1393b & -1918a & 24178 & & & & & \\
-812b & -210b^2 & 196ab & -1393b & 280b^2 & 294ab & -3227b & 560b^2 & & & & \\
812a & 196ab & -210a^2 & 1918a & -294ab & -420aa & 3227a & -441ab & 560aa & & & \\
8582 & 1393b & -1918a & 2758 & -812b & -812a & 8582 & -1918b & 1393a & 24178 & & \\
1393b & 280b^2 & -294ab & 812b & -210b^2 & -196ab & 1918b & -420b^2 & 294ab & 3227b & 560b^2 & \\
1918a & 294ab & -420a^2 & 812a & -196ab & -210a^2 & 1393a & -294ab & 280a^2 & 3227a & 441ab & 560a^2
\end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Por sua vez, a matriz de rigidez do elemento de placa é dada por

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{I,I} & simétrica \\ \mathbf{k}_{II,I} & \mathbf{k}_{II,II} \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

Na matriz acima, $\mathbf{k}_{I,I}$, $\mathbf{k}_{II,I}$ e $\mathbf{k}_{II,II}$ são matrizes dos coeficientes de rigidez, definidas a seguir, respectivamente.

$$\mathbf{k}_{I,I} = \begin{bmatrix}
4(\beta_2+\beta_3)+\frac{\beta_4}{5} & & & & & \\
(2\beta_3+\frac{\beta_5}{5})b & (\frac{4\beta_3}{3}+\frac{4\beta_6}{15})b^2 & & & & \\
-(2\beta_2+\frac{\beta_5}{5})a & -\nu ab & (\frac{4\beta_2}{3}+\frac{4\beta_6}{15})a^2 & & simétrica & \\
2(\beta_2-2\beta_3)-\frac{\beta_4}{5} & -(2\beta_3+\frac{\beta_6}{5})b & (-\beta_2+\frac{\beta_5}{5})a & 4(\beta_2+\beta_3)+\frac{\beta_4}{5} & & \\
(2\beta_3+\frac{\beta_6}{5})b & (\frac{2\beta_3}{3}-\frac{1\beta_6}{15})b^2 & 0 & -(2\beta_3+\frac{\beta_5}{5})b & (\frac{4\beta_3}{3}+\frac{4\beta_6}{15})b^2 & \\
(-\beta_2+\frac{\beta_5}{5})a & 0 & (\frac{2\beta_2}{3}-\frac{4\beta_6}{15})a^2 & -(2\beta_2+\frac{\beta_5}{5})a & \nu ab & (\frac{4\beta_2}{3}+\frac{4\beta_6}{15})a^2
\end{bmatrix} \tag{A.4}$$

$$\mathbf{k}_{II,I} = \begin{bmatrix} -2(\beta_2+\beta 3)+\frac{\beta_4}{5} & -(\beta_3-\frac{\beta_6}{5})b & -(-\beta_2+\frac{\beta_6}{5})a & -2(2\beta_2-\beta_3)-\frac{\beta_4}{5} & -(\beta_3-\frac{\beta_5}{5})b & (2\beta_2+\frac{\beta_6}{5})a \\ (\beta_3-\frac{\beta_6}{5})b & (\frac{1\beta_3}{3}+\frac{1\beta_6}{15})b^2 & 0 & -(\beta_3-\frac{\beta_5}{5})b & (\frac{2\beta_3}{3}-\frac{4\beta_6}{15})b^2 & 0 \\ (-\beta_2+\frac{\beta_6}{5})a & 0 & (\frac{1\beta_2}{3}+\frac{1\beta_6}{15})a^2 & -(2\beta_2+\frac{\beta_6}{5})a & 0 & (\frac{2\beta_2}{3}-\frac{1\beta_6}{15})a^2 \\ -2(2\beta_2-\beta_3)-\frac{\beta_4}{5} & (\beta_3-\frac{\beta_5}{5})b & (2\beta_2+\frac{\beta_6}{5})a & -2(\beta_2+\beta_3)+\frac{\beta_4}{5} & (\beta_3-\frac{\beta_6}{5})b & -(-\beta_2+\frac{\beta_6}{5})a \\ (\beta_3-\frac{\beta_5}{5})b & (\frac{2\beta_3}{3}-\frac{4\beta_6}{15})b^2 & 0 & (-\beta_3+\frac{\beta_6}{5})b & (\frac{1\beta_3}{3}+\frac{1\beta_6}{15})b^2 & 0 \\ -(2\beta_2+\frac{\beta_6}{5})a & 0 & (\frac{2\beta_2}{3}-\frac{1\beta_6}{15})a^2 & (-\beta_2+\frac{\beta_6}{5})a & 0 & (\frac{1\beta_2}{3}+\frac{1\beta_6}{15})a^2 \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

$$\mathbf{k}_{II,II} = \begin{bmatrix} 4(\beta_2+\beta_3)+\frac{\beta_4}{5} & & & & & \\ -(2\beta_3+\frac{\beta_5}{5})b & (\frac{4\beta_3}{3}+\frac{4\beta_6}{15})b^2 & & & & \\ (2\beta_2+\frac{\beta_5}{5})a & -\nu ab & (\frac{4\beta_2}{3}+\frac{4\beta_6}{15})a^2 & & \textit{simétrica} & \\ 2(\beta_2-2\beta_3)-\frac{\beta_4}{5} & (2\beta_3+\frac{\beta_6}{5})b & -(-\beta_2+\frac{\beta_5}{5})a & 4(\beta_2+\beta_3)+\frac{\beta_4}{5} & & \\ -(2\beta_3+\frac{\beta_6}{5})b & (\frac{2\beta_3}{3}-\frac{1\beta_6}{15})b^2 & 0 & (2\beta_3+\frac{\beta_5}{5})b & (\frac{4\beta_3}{3}+\frac{4\beta_6}{15})b^2 & \\ -(-\beta_2+\frac{\beta_5}{5})a & 0 & (\frac{2\beta_2}{3}-\frac{4\beta_6}{15})a^2 & (2\beta_2+\frac{\beta_5}{5})a & \nu ab & (\frac{4\beta_2}{3}+\frac{4\beta_6}{15})a^2 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

Nas matrizes acima, $\beta_1 = b/a$, $\beta_2 = \beta_1^2$, $\beta_3 = 1/\beta_2$, $\beta_4 = 14-4\nu$, $\beta_5 = 1+4\nu$ e $\beta_6 = 1-\nu$.

A.1 Matrizes de Massa e Rigidez para Quatro Elementos de Placa

A seguir são apresentadas as matrizes de massa e rigidez ao se considerar quatro elementos para representar a placa.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1_{11} & \mathbf{M}^1_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^1_{14} & \mathbf{M}^1_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^1_{21} & \mathbf{M}^1_{22}+\mathbf{M}^2_{11} & \mathbf{M}^2_{12} & \mathbf{M}^1_{24} & \mathbf{M}^1_{23}+\mathbf{M}^2_{14} & \mathbf{M}^2_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^2_{21} & \mathbf{M}^2_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^2_{24} & \mathbf{M}^2_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^1_{41} & \mathbf{M}^1_{42} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^1_{44}+\mathbf{M}^3_{11} & \mathbf{M}^1_{43}+\mathbf{M}^3_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^3_{14} & \mathbf{M}^3_{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^1_{31} & \mathbf{M}^1_{32}+\mathbf{M}^2_{41} & \mathbf{M}^2_{42} & \mathbf{M}^1_{34}+\mathbf{M}^3_{21} & \mathbf{M}^1_{33}+\mathbf{M}^2_{44}+\mathbf{M}^3_{22}+\mathbf{M}^4_{11} & \mathbf{M}^2_{43}+\mathbf{M}^4_{12} & \mathbf{M}^3_{24} & \mathbf{M}^3_{23}+\mathbf{M}^4_{14} & \mathbf{M}^4_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^2_{31} & \mathbf{M}^2_{32} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^2_{34}+\mathbf{M}^4_{21} & \mathbf{M}^2_{33}+\mathbf{M}^4_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^4_{24} & \mathbf{M}^4_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^3_{41} & \mathbf{M}^3_{42} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^3_{44} & \mathbf{M}^3_{43} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^3_{31} & \mathbf{M}^3_{32}+\mathbf{M}^4_{41} & \mathbf{M}^4_{42} & \mathbf{M}^3_{34} & \mathbf{M}^3_{33}+\mathbf{M}^4_{44} & \mathbf{M}^4_{43} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^4_{31} & \mathbf{M}^4_{32} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^4_{34} & \mathbf{M}^4_{33} \end{bmatrix} \tag{A.7}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^1_{11} & \mathbf{K}^1_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^1_{14} & \mathbf{K}^1_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^1_{21} & \mathbf{K}^1_{22}+\mathbf{K}^2_{11} & \mathbf{K}^2_{12} & \mathbf{K}^1_{24} & \mathbf{K}^1_{23}+\mathbf{K}^2_{14} & \mathbf{K}^2_{13} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^2_{21} & \mathbf{K}^2_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^2_{24} & \mathbf{K}^2_{23} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^1_{41} & \mathbf{K}^1_{42} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^1_{44}+\mathbf{K}^3_{11} & \mathbf{K}^1_{43}+\mathbf{K}^3_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^3_{14} & \mathbf{K}^3_{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}^1_{31} & \mathbf{K}^1_{32}+\mathbf{K}^2_{41} & \mathbf{K}^2_{42} & \mathbf{K}^1_{34}+\mathbf{K}^3_{21} & \mathbf{K}^1_{33}+\mathbf{K}^2_{44}+\mathbf{K}^3_{22}+\mathbf{K}^4_{11} & \mathbf{K}^2_{43}+\mathbf{K}^4_{12} & \mathbf{K}^3_{24} & \mathbf{K}^3_{23}+\mathbf{K}^4_{14} & \mathbf{K}^4_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^2_{31} & \mathbf{K}^2_{32} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^2_{34}+\mathbf{K}^4_{21} & \mathbf{K}^2_{33}+\mathbf{K}^4_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^4_{24} & \mathbf{K}^4_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^3_{41} & \mathbf{K}^3_{42} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^3_{44} & \mathbf{K}^3_{43} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^3_{31} & \mathbf{K}^3_{32}+\mathbf{K}^4_{41} & \mathbf{K}^4_{42} & \mathbf{K}^3_{34} & \mathbf{K}^3_{33}+\mathbf{K}^4_{44} & \mathbf{K}^4_{43} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^4_{31} & \mathbf{K}^4_{32} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^4_{34} & \mathbf{K}^4_{33} \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

A.2 Matriz de Rigidez para Elementos de Placa com Molas conectadas aos Nós

Como descrito no Capítulo 3.6, o procedimento prático empregado para adição de molas nos nós dos elementos de placa consiste em adicionar um novo valor de rigidez à rigidez atual, na posição da matriz correspondente a cada grau de liberdade no qual a mola deve atuar.

Considerando um elemento de placa, cuja matriz de rigidez é apresentada na Eq. (A.3), e supondo a adição de molas de rigidez k, (matriz na Eq. 3.34), nos quatro nós do elemento, a nova matriz de rigidez é a seguinte:

$$\mathbf{K^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{I,I} + \mathbf{K}_k & \\ \mathbf{k}_{II,I} + \mathbf{K}_k & \mathbf{k}_{II,II} + \mathbf{K}_k \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

Similarmente, em uma placa discretiada por quatro elementos, a matriz de rigidez $\mathbf{K}_k$ (Eq. 3.34) é adicionada às submatrizes correspondentes da matriz de rigidez $\mathbf{K}$, A.8, resultando em:

$$\mathbf{K^*} = \mathbf{K} + \mathrm{diag}\left(\mathbf{K}_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{K}_k, \right) \tag{A.10}$$