IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO IFT–T.002/94

2

Teorias Pseudamente Acopladas Não-Minimamente à Gravitação

Ubirajara Ferraiolo Wichoski

Orientador

Antônio José Accioly

Janeiro 1994

À Ana Cristina e aos meus pais
Jacy e Guido.

Agradecimentos

Ao orientador Antônio José Accioly, agradeço pela amizade e companheirismo demonstrados durante todo o período de trabalho conjunto e pela colaboração incansável.

Sou grato também a todos os professores, colegas e funcionários do IFT por terem tornado muito agradáveis os anos de trabalho nesta instituição. Particularmente, agradeço aos professores Bruto M. Pimentel Escobar, Ruben Aldrovandi, A. H. Zimerman, Adriano A. Natale e Lauro Tomio; aos colegas Fernando Kokubun, Hatsumi Mukai, Cláudio M. G. de Souza, Nelson N. L. P. Pereira da Silva, Osvaldo Negrini, Nelson Bertarello, Kwok Sau Fa, Felice Pisano e Édson Gonçalves; e aos amigos do *staff* do IFT, sr. Antônio Rubbi, Marina, Rosane, Luzinete, Vilma, Laura, Maria José, Alexandre, Laércio, José Francisco, Ana Luiza, Marcelo, Orides e Susumu.

Agradeço ao prof. Francesco Guerra, da Universidade de Roma La Sapienza, pela gentileza do convite com que me distinguiu e pelo estímulo que isto representou.

Agradeço aos meus familiares pelo carinho e, em especial, às tias Leda e Yara.

Finalmente, sou grato ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Mostra-se que as teorias acopladas não-minimamente à gravitação não violam o Princípio de Equivalência Fraco. A demonstração é completamente independente do modelo adotado para a descrição do acoplamento gravitacional não-mínimo. Mostra-se também que o funcional $S[g,\phi]=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{k}\left(1+k\lambda\phi^2\right)+\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right]$ descreve, em geral, a mesma teoria clássica independentemente do valor da constante de acoplamento λ.

Palavras-chaves: Gravitação, Acoplamento Não-Mínimo, Princípio de Equivalência Fraco, Teorias $\lambda R\phi^2$.

Áreas de Conhecimento: 1.05.01.03-7; 1.05.03.01-3; 1.05.03.02-1.

ABSTRACT

It is shown that gravitational nonminimally coupled theories do not violate the Weak Equivalence Principle. The proof is model-independent. It is also shown that the action functional $S[g,\phi]=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{k}\left(1+k\lambda\phi^2\right)+\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right]$ describes, in general, one and the same classical theory whatever may be the value of the coupling constant λ.

Key words: Gravitation, Nonminimal Coupling, Weak Equivalence Principle, $\lambda R\phi^2$ Theories

ÍNDICE

CONVENÇÕES

Adotamos a assinatura (+, –, –, –) para a métrica. As unidades são escolhidas de modo tal que $\hbar = c = 1$, e portanto $\frac{k}{8\pi} = G = M_{Pl}^2$ é a constante gravitacional.

Índices gregos variam de 0 a 3. Índices latinos variam de 1 a 3.

Derivada parcial:

$$\partial_\alpha \phi \equiv \phi_{,\alpha} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$$

Símbolo de Christoffel:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\left(g_{\beta\lambda,\gamma} + g_{\gamma\lambda,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda}\right)$$

Tensor de Riemann:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\delta} + \Gamma^\sigma{}_{\beta\delta}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\gamma}$$

Tensor de Ricci e Curvatura Escalar:

$$R_{\mu\upsilon} = R^\alpha{}_{\mu\upsilon\alpha}$$

$$R = R^\alpha{}_\alpha$$

Derivada Covariante:

$$A^{\beta}{}_{;\alpha} \equiv \nabla_{\alpha} A^{\beta} = \partial_{\alpha} A^{\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\alpha\sigma} A^{\sigma}$$

$$A_{\beta;\alpha} \equiv \nabla_{\alpha} A_{\beta} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta} A_{\sigma}$$

Simetrização:

$$A_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}\right)$$

Anti-simetrização:

$$A_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta} - A_{\beta\alpha}\right)$$

INTRODUÇÃO

Os anos oitenta, assim como o início dos noventa, têm testemunhado um crescente aumento de interesse no que concerne ao campo escalar relativístico, devido em grande parte ao proeminente papel por este desempenhado nos assim chamados universos inflacionários. No entanto, apesar do hercúleo trabalho despendido nesta direção, não podemos nos vangloriar ainda da posse de um conhecimento sem lacunas no que tange a uma série de questões fundamentais relacionadas ao acoplamento entre os campos gravitacional e escalar. Um exemplo típico é fornecido pela interação da gravidade com um campo escalar sem massa ϕ, descrita pelo funcional,

$$S[g,\phi]=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{k}\left(1+k\lambda\phi^2\right)+g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\right], \tag{I}$$

com $k=8\pi G$ em unidades naturais. Observe que o termo $R\phi^2$ que comparece na ação (I) é o único termo possível envolvendo um acoplamento adimensional entre ϕ — que não auto-interage — e a curvatura [1]. Classicamente o valor da constante de acoplamento λ é escolhido, por uma questão de simplicidade, como sendo *zero* ou $-1/6$, apesar de não haver nenhuma razão *a priori* para que este parâmetro não possa assumir qualquer outro valor real. Este fato nos conduz a uma questão bastante delicada: que valor de λ devemos, pelo menos em princípio, selecionar? *A motivação do presente trabalho é exatamente responder a esta indagação no âmbito clássico.*

Infelizmente, teorias como a descrita por (I) têm sido alvo de julgamentos um tanto precipitados por parte da comunidade científica, pelo fato de envolverem acoplamentos não-mínimos; o que, de acordo com uma antiga tradição, implicaria numa violação do Princípio de Equivalência Fraco — uma partícula-teste em queda livre segue uma "linha reta" ou geodésica do espaço-tempo local, qualquer que seja sua composição interna. Vamos mostrar na Parte I deste trabalho que esta idéia é inteiramente falaz. Para tanto, demonstraremos inicialmente que a teoria descrita pela ação (I) faz parte de uma classe de teorias onde o acoplamento não-mínimo pode ser totalmente eliminado da equação de movimento concernente ao campo que se acopla com a gravidade, razão pela qual denominamos tais teorias de *pseudamente acopladas não-minimamente à gravitação* [2]. Tal fato nos mostra, por um lado, que em geral a equação de movimento contém simetrias não encontráveis na Lagrangeana — o que é razoavelmente bem conhecido — e, por outro, que a Lagrangeana não é o objeto relevante para caracterizar o acoplamento gravitacional não-mínimo, mas sim a equação de movimento relativa ao campo que se acopla com a gravidade. Num recente comentário, Faraoni [3] argumenta que estas conclusões são falsas. Segundo ele, as simetrias presentes na equação de movimento são herdadas pela Lagrangeana associada, quando esta existe. Como réplica ao argumento de Faraoni, apresentaremos uma prova rigorosa, baseada no cálculo de formas funcionais, que *se uma Lagrangeana (ou Lagrangeanas) existe, ela não possui, em geral, todas as simetrias associadas à equação de movimento original* [4]. Em seguida mostraremos na "força bruta" que as teorias pseudamente acopladas não-minimamente à gravitação não violam o Princípio de Equivalência Fraco [2]. Hwang [5] generalizou este resultado no caso específico de campos escalares não-minimamente acoplados à gravitação. Para finalizar esta primeira parte de nosso trabalho, apresentaremos uma demonstração geral, ou seja, independente do modelo adotado para a descrição do acoplamento gravitacional não-mínimo, que as teorias acopladas não-minimamente à gravitação não violam o Princípio de Equivalência Fraco [6]. Este resultado engloba aqueles encontrados em [2] e [5].

Na Parte II mostraremos que o funcional (I) descreve, em geral, a mesma teoria clássica independentemente do valor da constante de acoplamento λ [7]. Estudaremos em seqüência a compatibilidade das teorias descritas por (I) com os testes clássicos da gravitação [7], assim como a possibilidade da carga escalar poder prevenir a formação de buracos negros no contexto das teorias definidas por (I) [8].

Na conclusão discutiremos como estender o resultado encontrado em [7], em nível de árvore [4 e 9]. Apresentaremos também um esboço relativo a futuras aplicações da equivalência clássica das teorias $\lambda R\phi^2$.

PARTE I

A Relatividade Geral e o Acoplamento Não-Mínimo

I.1. Os Acoplamentos Mínimo e Não-Mínimo em Gravitação

O interesse no estudo do acoplamento da gravitação com outros campos físicos é ressaltado pelo fato desta desempenhar um papel mais fundamental que as outras interações. Vista desta ótica, a gravitação é o palco onde as outras interações têm lugar.

O entendimento deste papel em nível clássico, pode ser a chave para solucionar muitas das dificuldades que aparecem quando se busca uma correta teoria quântica da gravitação.

Voltando os olhos para a pesquisa que vem sendo feita no estudo da interação da gravitação com outros campos, vemos que muitos princípios e suposições, até então muito bem estabelecidos, começam a ser cada vez mais questionados.

O Princípio do Acoplamento Mínimo é um deles. Embora, como veremos a seguir, não seja isento de ambigüidades, acreditava-se que a sua violação implicaria na violação de um dos princípios mais fundamentais e bem estabelecidos experimentalmente da mecânica: o Princípio de Equivalência de Newton.

Vincular estes dois princípios significaria fazer com que todas as evidências a favor do Princípio de Equivalência de Newton ou, como é modernamente conhecido, Princípio de Equivalência Fraco, se tornassem evidências a favor do Princípio do Acoplamento Mínimo.

No decorrer do nosso trabalho constatamos, porém, que a violação do Princípio do Acoplamento Mínimo não implica na violação do Princípio de Equivalência Fraco.

Este fato será demonstrado inicialmente para uma classe de teorias *supostamente* não-minimamente acopladas à gravitação.

Iniciamos nossa exposição descrevendo como se dá a interação mínima (que incorpora o Princípio do Acoplamento Mínimo) e não-mínima entre a gravitação e os outros campos físicos.

À primeira vista a descrição da interação de um dado campo bosônico com a gravitação parece ser extremamente simples: seja um dado campo ψ^A, onde A representa quaisquer índices tensoriais. A interação deste campo com a gravitação se dá com a substituição na densidade de Lagrangeana $\mathcal{L}(\psi^A, \partial\psi^A)$, que descreve a dinâmica do campo ψ^A na relatividade especial

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\upsilon} &\rightarrow g_{\mu\upsilon} \\ \partial_\mu &\rightarrow \nabla_\mu \quad , \end{aligned} \tag{I.1}$$

onde ∇_μ é a derivada covariante construída com os símbolos de Christofell $\Gamma^\alpha{}_{\mu\upsilon}$; os quais, por sua vez, são definidos em termos do tensor métrico $g_{\mu\upsilon}$ (potencial gravitacional), como se segue

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\upsilon} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\left[g_{\mu\lambda,\upsilon} + g_{\upsilon\lambda,\mu} - g_{\mu\upsilon,\lambda}\right]. \tag{I.2}$$

Esta prescrição é conhecida como Princípio do Acoplamento Mínimo (PAM).

Um campo escalar real não-massivo $\phi(x)$, por exemplo, cuja Lagrangeana na ausência de interações é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \eta^{\mu\upsilon}\partial_\mu\phi\partial_\upsilon\phi, \tag{I.3}$$

na presença de um campo gravitacional tomaria, conforme o PAM, a seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= \sqrt{-g}\; g^{\mu\upsilon}\nabla_\mu\phi\nabla_\upsilon\phi \\ &= \sqrt{-g}\; g^{\mu\upsilon}\partial_\mu\phi\partial_\upsilon\phi \\ &= \sqrt{-g}\; \partial^\mu\phi\,\partial_\mu\phi \quad . \end{aligned} \tag{I.4}$$

Desta maneira, a Lagrangeana que descreve a interação mínima campo escalar-gravitação será

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_\phi, \tag{I.5}$$

onde $\mathcal{L}_E$ é a Lagrangeana da Relatividade Geral de Einstein, dada por

$$\mathcal{L}_E = \sqrt{-g}\,\frac{R}{k}, \tag{I.6}$$

onde k é a constante de Einstein[1]. Note que termos adicionais como massa, potencial, auto-interação ou a presença de uma constante cosmológica, podem ser facilmente incluídos nesta descrição.

A variação da ação correspondente a Lagrangeana (I.5) em relação a ϕ , nos dá

$$\begin{aligned}
\delta_\phi I &= \int d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\upsilon}\delta_\phi\left(\partial_\mu\phi\partial_\upsilon\phi\right) \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\upsilon}\left[\partial_\mu\phi\partial_\upsilon\delta\phi + \partial_\upsilon\phi\partial_\mu\delta\phi\right] \\
&= 2\int d^4x\sqrt{-g}\,\partial^\upsilon\phi\partial_\upsilon\delta\phi \\
&= -2\int d^4x\,\partial_\upsilon\left(\sqrt{-g}\,\partial^\upsilon\phi\right)\delta\phi \\
&= -2\int d^4x\sqrt{-g}\,\nabla_\upsilon\nabla^\upsilon\phi\,\delta\,\phi \\
&= -2\int d^4x\sqrt{-g}\,\Box\phi\,\delta\,\phi \quad .
\end{aligned}$$

E, portanto, a equação para o campo ϕ é a de Klein-Gordon

$$\Box\phi = 0. \tag{I.7}$$

Variando agora a mesma ação em relação a $g_{\mu\nu}$, obtemos

[1] k = $8\pi G$ no sistema natural de unidades; G é a constante de gravitação de Newton.

$$\delta_g I = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{G^{\mu\upsilon}}{k}\delta g_{\mu\upsilon}\right\} + \int d^4x\frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\mu\upsilon}\partial^{\alpha}\phi\partial_{\alpha}\phi\delta g_{\mu\upsilon}$$

$$+\int d^4x\sqrt{-g}\delta_g\left(g^{\mu\upsilon}\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi\right)$$

$$=\int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{G^{\mu\upsilon}}{k}+\frac{1}{2}g^{\mu\upsilon}\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi-\left(\partial_{\alpha}\phi\partial_{\beta}\phi\right)g^{\alpha\mu}g^{\beta\upsilon}\right\}\delta g_{\mu\upsilon} ,$$

daí as equações de campo

$$G^{\mu\upsilon} + kT^{\mu\upsilon}_{(\phi)} = 0 \tag{I.8}$$

com

$$T^{\mu\upsilon}_{(\phi)} = \partial^{\mu}\phi\partial^{\upsilon}\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\upsilon}\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi. \tag{I.9}$$

No caso de um campo vetorial $A_\mu(x)$, que escolhemos ser o potencial vetor do campo eletromagnético, as equações que descrevem a dinâmica do campo A_μ , na relatividade especial e na ausência de cargas, são as equações de Maxwell da eletrodinâmica clássica

$$\partial_{\mu}F^{\mu\upsilon} = 0 \tag{I.10}$$

$$\partial_{[\lambda}F_{\mu\upsilon]} = 0, \tag{I.11}$$

onde

$$F_{\mu\upsilon} = \partial_{\mu}A_{\upsilon} - \partial_{\upsilon}A_{\mu} \tag{I.12}$$

é o tensor antissimétrico de Maxwell para o potencial A_μ. A equação (I.11) segue diretamente da definição (I.12) do tensor de Maxwell; a equação (I.10) pode ser obtida da Lagrangeana

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\eta^{\upsilon\beta}F_{\mu\upsilon}F_{\alpha\beta}. \tag{I.13}$$

Mais uma vez segundo o PAM, a presença de um campo gravitacional implicaria na substituição da métrica de Lorentz $\eta_{\mu\upsilon}$ por uma métrica riemanniana arbitrária $g_{\mu\upsilon}$ e também das derivadas ordinárias por derivadas covariantes. Assim, definimos o tensor de Maxwell generalizado

$$\begin{aligned} F_{\mu\upsilon} &\equiv \nabla_\mu A_\upsilon - \nabla_\upsilon A_\mu \\ &= \partial_\mu A_\upsilon - \partial_\upsilon A_\mu \quad , \end{aligned} \tag{I.14}$$

que em virtude da antissimetria se reduz à forma tradicional (I.12). Com isto, a equação (I.11) é imediatamente satisfeita,

$$\nabla_{[\lambda}F_{\mu\upsilon]} = 0. \tag{I.15}$$

A Lagrangeana de Maxwell generalizada toma a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\alpha}g^{\upsilon\beta}F_{\mu\upsilon}F_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, F^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon} \quad . \end{aligned} \tag{I.16}$$

Introduzindo a representação de Einstein-Hilbert para o campo gravitacional, a Lagrangeana total da interação mínima eletromagnetismo-gravitação é expressa por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_F \quad , \tag{I.17}$$

onde $\mathcal{L}_E$ é dada por (I.6).

Variando a ação correspondente à Lagrangeana (I.17) em relação a A_μ, vem

$$\begin{aligned}
\delta_A I &= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, g^{\alpha\mu} g^{\beta\upsilon}\delta_A\left(F_{\alpha\beta}F_{\mu\upsilon}\right) \\
&= -\int d^4x\sqrt{-g}\, F^{\mu\upsilon}\delta_A\left(F_{\mu\upsilon}\right) \\
&= -\int d^4x\sqrt{-g}\, F^{\mu\upsilon}\left[\partial_\mu\delta A_\upsilon - \partial_\upsilon\delta A_\mu\right] \\
&= 2\int d^4x\sqrt{-g}\, F^{\mu\upsilon}\partial_\upsilon\delta A_\mu \\
&= 2\int d^4x\,\partial_\upsilon\left(\sqrt{-g}\, F^{\mu\upsilon}\right)\delta A_\mu \\
&= -2\int d^4x\left(\sqrt{-g}\,\nabla_\upsilon F^{\mu\upsilon}\right)\delta A_\mu \quad .
\end{aligned}$$

E, portanto, a equação do campo A_μ é

$$\nabla_\upsilon F^{\mu\upsilon} = 0. \tag{I.18}$$

Variando agora a mesma ação em relação a $g_{\mu\upsilon}$,

$$\begin{aligned}
\delta_g I &= \delta_g I_E + \delta_g I_F \\
&= -\int d^4x\sqrt{-g}\,\frac{G^{\mu\upsilon}}{k}\delta g_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\int d^4x F_{\alpha\beta}F_{\mu\upsilon}\delta_g\left(\sqrt{-g}\, g^{\alpha\mu} g^{\beta\upsilon}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Porém,

$$-\frac{1}{2}\int d^4x\, F_{\alpha\beta}F_{\mu\upsilon}\delta_g\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\mu}g^{\beta\upsilon}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\upsilon}\delta g_{\mu\upsilon}-\int d^4x\sqrt{-g}F_{\alpha\beta}F_{\mu}{}^{\beta}\delta g^{\alpha\mu}$$

$$=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{4}g^{\mu\upsilon}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}+F^{\mu}{}_{\lambda}F^{\upsilon\lambda}\right]\delta g_{\mu\upsilon} \quad ,$$

de onde podemos escrever

$$G^{\mu\upsilon}+kT^{\mu\upsilon}_{(F)}=0, \tag{I.19}$$

com

$$T^{\mu\upsilon}_{(F)}=\frac{1}{4}g^{\mu\upsilon}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}-F^{\mu}{}_{\lambda}F^{\upsilon\lambda}. \tag{I.20}$$

Ao repetirmos o procedimento acima, para o caso das equações de Maxwell não-homogêneas, nos deparamos com o fato de que o PAM não é um princípio desprovido de ambigüidades na passagem para o espaço curvo.

Sejam, então, as equações de Maxwell não-homogêneas

$$\partial_{\upsilon}F^{\mu\upsilon}=J^{\mu}, \tag{I.21}$$

que com a ajuda de (I.14) podem ser escritas como

$$A^{\upsilon,\mu}{}_{,\upsilon}-A^{\mu,\upsilon}{}_{,\upsilon}=J^{\mu}. \tag{I.22}$$

No gauge de Lorentz,

$$A^{\upsilon}{}_{,\upsilon}=0$$

e uma vez que

$$A^{\upsilon,\mu}{}_{,\upsilon} = A^{\upsilon}{}_{,\upsilon}{}^{,\mu}$$

podemos escrever,

$$A^{\mu,\upsilon}{}_{,\upsilon} = J^{\mu}. \tag{I.23}$$

Aplicando agora as regras do PAM a esta equação, obtemos no gauge de Lorentz

$$\begin{aligned} A^{\mu;\upsilon}{}_{;\upsilon} &= J^{\mu} \\ A^{\upsilon}{}_{;\upsilon} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{I.24}$$

Há, porém, uma outra alternativa. Podemos considerar a equação

$$F^{\mu\upsilon}{}_{;\upsilon} = J^{\mu}, \tag{I.25}$$

que vem da aplicação das regras do PAM diretamente à equação (I.21). Escrevendo (I.25) em termos do vetor A_{μ}, segue

$$A^{\upsilon;\mu}{}_{;\upsilon} - A^{\mu;\upsilon}{}_{;\upsilon} = J^{\mu}, \tag{I.26}$$

mas, como as derivadas covariantes não comutam, temos em geral

$$A^{\mu}{}_{;\beta;\alpha} = A^{\mu}{}_{;\alpha;\beta} + R^{\mu}{}_{\upsilon\alpha\beta} A^{\upsilon}, \tag{I.27}$$

onde $R^{\mu}{}_{\upsilon\alpha\beta}$ é o tensor de curvatura de Riemann.

Daí,

$$A^{\upsilon;\mu}{}_{;\upsilon} = A^{\upsilon}{}_{;\upsilon}{}^{;\mu} - R^{\mu}{}_{\beta}A^{\beta}, \tag{I.28}$$

onde $R^{\mu}{}_{\beta} \equiv g^{\mu\gamma}R_{\gamma\beta}$ é o tensor de Ricci.

Esta versão das equações de Maxwell é escrita no gauge de Lorentz como

$$A^{\mu;\upsilon}{}_{;\upsilon} + R^{\mu}{}_{\beta}A^{\beta} = J^{\mu}$$
$$A^{\upsilon}{}_{;\upsilon} = 0 \quad , \tag{I.29}$$

que é diferente do resultado obtido em (I.24). Vemos claramente neste exemplo que a simples substituição $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ não é isenta de ambigüidades.

Ao lado disso, existe o fato de que o PAM só foi testado em regiões de campo gravitacional fraco [10].

Em vista destas considerações, somos levados a pensar na possibilidade de construirmos acoplamentos gravitacionais mais abrangentes.

Em regiões onde o campo gravitacional é forte (como é o caso dos pulsares e das estrelas colapsantes), é possível que os campos de matéria se acoplem diretamente aos termos de curvatura $(R, R_{\mu\upsilon}, R_{\mu\upsilon\alpha\beta})$, além, é claro, das derivadas comuns serem substituídas por derivadas covariantes e da métrica de Lorentz $\eta_{\mu\upsilon}$ ser substituída por uma métrica riemanniana arbitrária $g_{\mu\upsilon}$.

Este é o caso das teorias conhecidas como teorias acopladas não-minimamente à gravitação; nestas os termos de curvatura se acoplam diretamente aos campos de matéria formando termos do tipo $R\psi^{A}, R_{\mu\upsilon}\psi^{A}, R_{\mu\upsilon\alpha\beta}\psi^{A}$, que são conhecidos como termos do acoplamento não-mínimo.

De um modo geral, o acoplamento gravitacional não-mínimo admite uma representação Lagrangeana da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{int}}[grav, mat],$$

onde $\mathcal{L}_E$ é Lagrangeana da gravitação de Einstein, dada por (I.6); $\mathcal{L}_m$ é a Lagrangeana da matéria; $\mathcal{L}_{\text{int}}$ é a Lagrangeana da interação não-mínima.

Dependendo da natureza do campo considerado, podem existir vários tipos de acoplamentos não-mínimos entre este campo e o gravitacional. Contudo, de uma maneira geral, o fato de serem construídas teorias onde existem termos na Lagrangeana que misturam estes campos com os funcionais da curvatura, nos faz esperar o surgimento de termos desse tipo também na equação de movimento do campo que se acopla com a gravitação. Vamos mostrar que, ao contrário do previsto, quando o acoplamento não-mínimo é feito com a curvatura escalar R, este acoplamento pode ser totalmente eliminado da equação de movimento do campo que se acopla com a gravidade. Por esta razão denominamos tais teorias de

I.2. Teorias Pseudamente Acopladas Não-Minimamente à Gravitação [2]

Consideraremos inicialmente a ação mais geral descrevendo um campo escalar real ϕ acoplado não-minimamente à gravitação de Einstein,

$$I_{R\phi} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[R\left(\frac{1}{k}+f(\phi)\right)+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) + \mathrm{L}_m\right] \qquad \text{(I.30)}$$

onde L_m é a Lagrangeana da matéria. As funções $f(\phi)$ e $V(\phi)$ são arbitrárias e distinguem as diferentes teorias possíveis e $[f(\phi)] = [k^{-1}] = \mathrm{L}^{-2}$.

Variando a ação (I.30) em relação a ϕ, temos

$$\delta_\phi I_{R\phi} = \int d^4x\sqrt{-g}\,\delta_\phi\left[f(\phi)R+\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) + \mathrm{L}_m\right]$$

$$= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{\partial f(\phi)}{\partial\phi}R - g^{\mu\upsilon}\partial_\upsilon\partial_\mu\phi - \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi}\right]\delta\phi$$

$$=\int d^4x\sqrt{-g}\left[f'(\phi)R-\Box\phi-V'(\phi)\right]\delta\phi \quad ,$$

onde $f'(\phi)=\dfrac{df(\phi)}{d\phi}$ e $V'(\phi)=\dfrac{dV(\phi)}{d\phi}$.

Assim, a equação para o campo ϕ é

$$\Box\phi=f'(\phi)R-V'(\phi). \tag{I.31}$$

Variando (I.30) em relação ao campo gravitacional, obtemos

$$\delta_g I_{R\phi}=\int d^4x\delta_g\left\{\sqrt{-g}\left[\left(f(\phi)+\frac{1}{k}\right)R+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi)+\mathrm{L}_m\right]\right\}$$

$$=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(f(\phi)+\frac{1}{k}\right)G_{\mu\upsilon}+\partial_\mu\partial_\upsilon f(\phi)-g_{\mu\upsilon}\partial_\alpha\partial^\alpha f(\phi)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\upsilon\phi-\frac{1}{4}g_{\mu\upsilon}\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi+\frac{1}{2}g_{\mu\upsilon}V(\phi)+T_{\mu\upsilon}\right]\delta g^{\mu\upsilon}$$

$$=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(\frac{1}{k}+f(\phi)\right)G_{\mu\upsilon}+\nabla_\upsilon\nabla_\mu f(\phi)-g_{\mu\upsilon}\Box f(\phi)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\upsilon\phi-\frac{1}{4}g_{\mu\upsilon}\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi+\frac{1}{2}g_{\mu\upsilon}V(\phi)+T_{\mu\upsilon}\right]\delta g^{\mu\upsilon}$$

onde usamos a prescrição

$$\delta_g\int d^4x\sqrt{-g}\,\mathrm{L}_m=\int d^4x\sqrt{-g}\,T^{\mu\upsilon}\delta g_{\mu\upsilon}. \tag{I.32}$$

As equações de campo correspondentes são dadas por

$$G^{\mu\upsilon}=-k\left[T^{\mu\upsilon}+T^{\mu\upsilon}_{(\phi)}\right], \tag{I.33}$$

onde

$$T^{\mu\nu}_{(\phi)} = \nabla^{\mu}\nabla^{\nu} f(\phi) - g^{\mu\nu}\Box f(\phi) + \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\,\partial^{\nu}\phi$$
$$-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}\partial^{\alpha}\phi\partial_{\alpha}\phi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}V(\phi) + G^{\mu\nu}f(\phi) \quad . \tag{I.34}$$

Note que $T^{\mu\nu}_{(\phi)}$ pode ser escrito como

$$T^{\mu\nu}_{(\phi)} = T^{\mu\nu}_{(min)} + \left(\nabla^{\mu}\nabla^{\nu} - g^{\mu\nu}\Box\right) f(\phi) + G^{\mu\nu} f(\phi), \tag{I.35}$$

com

$$T^{\mu\nu}_{(min)} = \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial^{\nu}\phi - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi + \frac{V(\phi)}{2}g^{\mu\nu} \tag{I.36}$$

onde $T^{\mu\nu}_{(min)}$ é o tensor energia do campo escalar para o caso do acoplamento mínimo entre este campo e o campo gravitacional.

Tomando o traço de (I.33), obtemos

$$R = k\left(1 + f(\phi)k\right)^{-1}\left[T - \frac{1}{2}\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi + 2V(\phi) - 3\Box f(\phi)\right] \tag{I.37}$$

onde $T \equiv T_{\mu}{}^{\mu}$ é o traço do tensor energia-momento da matéria.

Substituindo este resultado em (I.31), a equação para o campo escalar toma a forma

$$\Box\phi = kf'(\phi)\left(1 + f(\phi)k\right)^{-1}\left[T - \frac{1}{2}\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi + 2V(\phi) - 3\Box f(\phi)\right] - V'(\phi). \tag{I.38}$$

Passemos agora a analisar as teorias contendo o acoplamento não-mínimo entre o campo eletromagnético, representado pelo tensor $F_{\mu\upsilon}$ (cf. (I.14)), e o campo gravitacional, representadas pela ação geral

$$I_{RF} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{k} - \frac{1}{2}F_{\mu\upsilon}F^{\mu\upsilon} + h(F^2)R + \mathsf{L}_m\right], \tag{I.39}$$

onde $F^2 = F_{\mu\upsilon}F^{\mu\upsilon}$ e $h(F^2)$ é uma função arbitrária de F^2 e tem dimensão $\left[h(F^2)\right] = \left[k^{-1}\right] = \mathrm{L}^{-2}$.

Variando a ação (I.39) em relação ao campo eletromagnético, temos

$$\delta_A I_{RF} = \int d^4x\sqrt{-g}\,\delta_A\left[\frac{R}{k}\left(1 + h(F^2)\right) - \frac{1}{2}F^2 + \mathsf{L}_m\right]$$

$$= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{2\partial_\upsilon\left(\sqrt{-g}\,F^{\mu\upsilon}\right)}{\sqrt{-g}} - \frac{\partial_\upsilon\left(\sqrt{-g}\,R\frac{\partial h}{\partial A_{\mu,\upsilon}}\right)}{\sqrt{-g}}\right]\delta A_\mu$$

e conseqüentemente,

$$\delta_A I_{RF} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[4\nabla_\upsilon\left(R\frac{dh}{dF^2}F^{\mu\upsilon}\right) - 2\,\nabla_\upsilon F^{\mu\upsilon}\right]\delta A_\mu .$$

Daí seguem as equações para o campo eletromagnético

$$\nabla_\upsilon F^{\mu\upsilon} - \nabla_\upsilon\left[2R\frac{dh}{dF^2}F^{\mu\upsilon}\right] = 0. \tag{I.40}$$

Calculemos agora a variação de (I.39) em relação ao campo gravitacional

$$\delta_g I_{RF} = \int d^4x \delta_g \left\{ \sqrt{-g} \left[\frac{R}{k}\left(1 + h(F^2)\right) - \frac{1}{2}F^2 + L_m \right] \right\}$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{k} + h(F^2) \right) G_{\mu\upsilon} + \nabla_\mu \nabla_\upsilon h(F^2) - g_{\mu\upsilon} \Box h(F^2) \right.$$

$$\left. + R\frac{\partial h(F^2)}{\partial g^{\mu\upsilon}} + T_{\mu\upsilon} - F_{\mu\alpha}F^{\alpha}{}_{\upsilon} + \frac{1}{4}F^2 g_{\mu\upsilon} \right] \delta g^{\mu\upsilon}$$

$$= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{k} + h(F^2) \right) G_{\mu\upsilon} + \nabla_\mu \nabla_\upsilon h(F^2) - g_{\mu\upsilon} \Box h(F^2) \right.$$

$$\left. +2R\frac{\partial h(F^2)}{\partial F^2} F_{\mu}{}^{\alpha} F_{\upsilon\alpha} + T_{\mu\upsilon} - F_{\mu\alpha}F^{\alpha}{}_{\upsilon} + \frac{1}{4}F^2 g_{\mu\upsilon} \right] \delta g^{\mu\upsilon} \quad .$$

Daí as equações de campo

$$G^{\mu\upsilon} = -k\left(T^{\mu\upsilon} + T^{\mu\upsilon}_{(F)}\right), \tag{I.41}$$

onde

$$T^{\mu\upsilon}_{(F)} = \frac{1}{4}F^2 g^{\mu\upsilon} - F^{\mu}{}_{\alpha} F^{\upsilon\alpha} + \left(\nabla^\mu \nabla^\upsilon - g^{\mu\upsilon}\Box\right) h(F^2)$$
$$+2R\frac{d h(F^2)}{dF^2} F^{\mu}{}_{\alpha} F^{\upsilon\alpha} + G^{\mu\upsilon} h(F^2) \quad . \tag{I.42}$$

Tomando o traço de (I.41), vem

$$R = k\left(T - 3\Box h(F^2)\right)\left(1 + kh(F^2) + 2kh'(F^2)\right)^{-1}, \tag{I.43}$$

onde $h'(F^2) = \dfrac{dh(F^2)}{dF^2}$.

Substituindo (I.43) na equação para o campo eletromagnético (I.40), vem

$$\nabla_{\upsilon}F^{\mu\upsilon} - \nabla_{\upsilon}\Big\{2h'(F^2)F^{\mu\upsilon}k\big[1 + kh(F^2) + 2kF^2h'(F^2)\big]^{-1} \cdot \big[T - 3\Box h(F^2)\big]\Big\} = 0 \quad . \tag{I.44}$$

Neste ponto notemos que tanto a equação para o campo escalar (I.38) como a equação para o campo eletromagnético (I.44) não contêm termos de curvatura, embora as Lagrangeanas correspondentes possuam termos com produtos entre a curvatura escalar R e aqueles campos.

Conforme já havíamos anunciado, isto nos levou a chamar estas teorias de *teorias pseudamente acopladas não-minimamente à gravitação* [2].

O papel da curvatura escalar R é fundamental na definição destas teorias, o que é evidenciado pelas equações de vínculo (I.37) e (I.43); o fato da curvatura escalar R poder ser expressa em termos dos campos escalar e eletromagnético, respectivamente nestas equações, nos permite eliminá-la das equações dos campos não-gravitacionais.

Para acoplamentos envolvendo outros funcionais da curvatura isto em geral não é possível. Senão vejamos: seja uma teoria onde o eletromagnetismo, representado pelo tensor do campo eletromagnético ($F^{\mu\upsilon}$), está acoplado não-minimamente à gravitação através do tensor de Ricci ($R_{\mu\upsilon}$), descrita pela seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{R}{k} + \lambda R_{\mu\upsilon}F^{\mu\alpha}F^{\upsilon}{}_{\alpha} - \frac{1}{2}F^2\right], \tag{I.45}$$

onde λ é uma constante de acoplamento tal que $[\lambda] = L^2$.

As equações de campo são dadas por

$$G^{\mu\upsilon} = -k\left[E^{\mu\upsilon} + \lambda T^{\mu\upsilon}_{(F)}\right] \tag{I.46}$$

$$\nabla_{\upsilon}\left(F^{\mu\upsilon} - \lambda R^{\mu\gamma}F_{\gamma}^{\upsilon} - R^{\upsilon\gamma}F_{\gamma}^{\mu}\right) = 0, \tag{I.47}$$

onde $E^{\mu\upsilon}$ é o tensor energia-momento do campo eletromagnético dado por

$$E^{\mu\upsilon} = \frac{1}{4}g^{\mu\upsilon}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - F^{\mu\alpha}F^{\upsilon}{}_{\alpha}, \tag{I.48}$$

e

$$\begin{aligned} T^{\mu\upsilon}_{(F)} &= -\frac{1}{2}R_{\alpha\beta}F^{\alpha\gamma}F^{\beta}{}_{\gamma}g^{\mu\upsilon} + g^{\mu\gamma}g^{\sigma\upsilon}\nabla_{\alpha}\left(\nabla_{(\gamma}F_{\sigma)\beta}F^{\alpha\beta}\right) \\ &+ \Box\left(F_{\alpha}{}^{(\mu}F^{\upsilon)\alpha}\right) - \nabla_{\alpha}\left(\nabla_{\beta}F^{\alpha\gamma}F^{\beta}{}_{\gamma}\right)g^{\mu\upsilon} - R_{\alpha\beta}F^{\alpha(\mu}F^{\upsilon)\beta} \\ &+ 2R^{\alpha(\mu}F^{\upsilon)\beta}F_{\alpha\beta} \quad . \end{aligned} \tag{I.49}$$

Calculando o traço da equação (I.46) vem

$$R = \lambda k\left(4R_{\mu\upsilon}F^{\mu\alpha}F^{\upsilon}{}_{\alpha} - 2\nabla_{\mu}\nabla_{\upsilon}F^{\mu\alpha}F^{\upsilon}{}_{\alpha} - 2\Box F^{2}\right). \tag{I.50}$$

Como vemos, a equação (I.50) não é uma equação de vínculo que permita, em geral, eliminar os termos de curvatura da equação de campo (I.47).

Um exemplo de acoplamento não-mínimo com o tensor de curvatura de Riemann $R_{\mu\upsilon\alpha\beta}$ nos é dado por Prasanna [11, 12], que propôs o seguinte invariante para o campo eletromagnético no espaço-tempo curvo: $R_{\mu\upsilon\alpha\beta}F^{\mu\upsilon}F^{\alpha\beta}$. A Lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{R}{k} - \frac{1}{2}F_{\mu\upsilon}F^{\mu\upsilon} + \lambda R_{\mu\upsilon\alpha\beta}F^{\mu\upsilon}F^{\alpha\beta}\right]. \tag{I.51}$$

As equações de movimento são

$$G^{\mu\upsilon} = -k\left[E^{\mu\upsilon} + \lambda T^{\mu\upsilon}_{(P)}\right], \tag{I.52}$$

$$\nabla_{\upsilon}\left[\sqrt{-g}\left(\lambda R^{\alpha\beta\mu\upsilon} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} F^{\mu\upsilon}\right)\right] = 0, \tag{I.53}$$

onde $E^{\mu\upsilon}$ é dado por (I.48) e

$$T^{\mu\upsilon}_{(F)} = 3R^{(\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} F^{\ \upsilon)\alpha} F^{\beta\gamma} - \frac{1}{2} g^{\mu\upsilon} R_{\alpha\beta\gamma\sigma} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\sigma} - 2\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha}\left(F^{\alpha(\mu} F^{\upsilon)\beta}\right). \tag{I.54}$$

Calculando o traço da equação (I.52) vem

$$R = k\lambda\left[6R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} F_{\mu}{}^{\alpha} F^{\beta\gamma} - 2R_{\alpha\beta\gamma\sigma} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\sigma} - 4\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\left(F^{\alpha}{}_{\mu} F^{\mu\beta}\right)\right]. \tag{I.55}$$

Aqui também a equação (I.55) não é uma equação de vínculo que permita eliminar os termos de curvatura da equação de campo (I.53).

Portanto, as teorias pseudamente acopladas não-minimamente, de uma maneira geral, se restringem àquelas que possuem acoplamentos não-mínimos com a curvatura escalar R.

Esta conclusão nos leva a desconfiar que a curvatura escalar R tem um papel fundamental na construção dos acoplamentos entre a gravitação e outros campos físicos.

O acoplamento deste escalar com os campos de matéria acarreta profundas mudanças na dinâmica da equação do campo que se acopla com a gravitação sem, contudo, envolver nesta equação termos de curvatura.

Isto faz com que estas teorias apresentem modificações em relação à descrição dada pela Relatividade Geral em vários contextos, muito explorados na literatura, que por sua vez são casos particulares do tratamento geral que demos através de (I.30) e (I.39).

A teoria de Zee [13] é um exemplo de uma teoria da gravidade que incorpora o conceito de quebra espontânea de simetria fazendo o uso de um acoplamento do tipo $R\phi^2$ na Lagrangeana

$$\mathcal{L}_Z = \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\phi^2 R + \frac{1}{2}g^{\mu\upsilon}\partial_\mu\phi\partial_\upsilon\phi - V(\phi) + \mathsf{L}_m\right], \tag{I.56}$$

onde ε é uma constante de acoplamento adimensional; ϕ é um campo escalar; $V(\phi)$ é uma função que pode ser explicitada por $V(\phi) = \frac{1}{8}\lambda\left(\phi^2 - \upsilon^2\right)^2$, com ν sendo o valor esperado para o vácuo do campo ϕ e λ uma constante adimensional.

Madsen [14], no contexto dos modelos cosmológicos inflacionários dos anos 80, estudou uma teoria geral do acoplamento não-mínimo de um campo escalar real com a gravidade de Einstein. A Lagrangeana desta teoria é dada por

$$\mathcal{L}_m = \sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \xi\phi^2\right)R + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)\right\}, \tag{I.57}$$

onde ϕ é um campo escalar; $V(\phi)$ é um potencial arbitrário; ξ é uma constante de acoplamento adimensional.

No contexto da teoria quântica de campos, Callan *et al* [15] propuseram um novo e melhorado tensor energia-momento com o intuito de abrandar as divergências presentes no tensor energia-momento convencional. Por esta razão, este tensor, em geral, não é o tensor energia-momento canônico.

Para uma teoria com um campo escalar massivo e auto-interação quártica descrita pela Lagrangeana

$$\mathsf{L}_m = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \sigma\phi^4, \tag{I.58}$$

o novo tensor é definido por

$$\Theta_{\mu\upsilon} = T_{\mu\upsilon} - \frac{1}{6}\left(\partial_\mu \partial_\upsilon - g_{\mu\upsilon}\Box\right)\phi^2, \tag{I.59}$$

onde $T_{\mu\upsilon}$ é o tensor energia-momento convencional que é dado por

$$T_{\mu\upsilon} = \partial_\mu \varphi \partial_\upsilon \phi - g_{\mu\upsilon} L_m. \tag{I.60}$$

Uma nova teoria da gravitação é proposta considerando este novo tensor energia-momento como fonte da gravidade.

Isto é conseguido com o termo $-\frac{1}{12}R\phi^2$ sendo introduzido na ação de Einstein. A nova ação é dada por

$$I = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{6}\phi^2\right)R + L_m\right], \tag{I.61}$$

onde a Lagrangeana da matéria L_m é dada por (I.58).

Schimidt, Greisner, Heinz e Müller [16], com o intuito de obter uma configuração estável como situação final na história de um objeto em colapso, também propuseram uma nova teoria da gravitação com um campo escalar ϕ de massa m, onde novamente um termo do tipo $R\phi^2$ é responsável pelo acoplamento não-mínimo. A Lagrangeana desta teoria é dada por

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left[\frac{R}{2k} - \frac{\beta}{12}\phi^2 R + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\Lambda}{k} + L_m\right],$$

onde k é a constante de Einstein; β é uma constante de acoplamento arbitrária e Λ a constante cosmológica.

Accioly, Vaidya e Som [17-19] estudaram várias teorias de gravitação com um campo escalar conformemente invariante, entre as quais a teoria descrita pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}=\sqrt{-g}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{\phi^2}{6}\right)R+\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}F^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon}\right], \tag{I.62}$$

onde ϕ é um campo escalar conformemente invariante; $F^{\mu\upsilon}$ é o tensor do campo eletromagnético, em que o campo eletromagnético aparece acoplado minimamente à gravitação; e, outra vez, o acoplamento não-mínimo entre a gravitação e o campo escalar se faz através de um termo do tipo $R\phi^2$.

Um caso particular da teoria (I.40), estudada por Accioly e Pereira da Silva [20, 21] (e também por Gönner [10]), é dado pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}=\sqrt{-g}\left[\frac{R}{k}-\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}+\lambda\frac{R}{k}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}+\mathrm{L}_m\right], \tag{I.63}$$

onde λ é uma constante de acoplamento. A eletrodinâmica resultante é não-linear.

Este também é o caso da teoria de Novello e Salim [22], descrita pela Lagrangeana

$$\mathcal{L}=\sqrt{-g}\left[\frac{R}{k}\left(1+\lambda A_\mu A^\mu\right)-\frac{1}{2}F_{\mu\upsilon}F^{\mu\upsilon}+\mathrm{L}_m\right], \tag{I.64}$$

onde λ é uma constante de acoplamento e A_μ o potencial vetor. Neste caso é gerada uma eletrodinâmica não-linear onde a massa do fóton depende do valor da curvatura escalar R. Aqui a curvatura escalar R se acopla diretamente com o potencial vetor do campo eletromagnético A_μ.

Embora, estritamente falando, este tipo de acoplamento não pertença à classe de teorias dadas por (I.39), pode-se mostrar facilmente que estes acoplamentos também geram teorias pseudamente acopladas não-minimamente à gravitação. Enfatizamos que é o acoplamento com a curvatura escalar R que distingue estas teorias e não a natureza do campo considerado.

I.3. A Importância da Equação de Movimento

As teorias pseudamente acopladas não-minimamente evidenciam que,

i) a equação de movimento possui em geral simetrias que não são simetrias da Lagrangeana associada;

ii) a Lagrangeana não é o objeto relevante para caracterizar o acoplamento não-mínimo, mas sim a equação de movimento concernente ao campo que se acopla com a gravidade.

Num comentário bastante recente, Faraoni [3] argumentou que a Lagrangeana e a equação de movimento resultante são completamente equivalentes no que tange ao conteúdo físico. Vamos mostrar que isto não é verdade [4]. De acordo com a grande maioria dos autores que investigaram este tópico [23-28], *se uma Lagrangeana (ou Lagrangeanas) existe, ela não possui, em geral, todas as propriedades de simetria da equação de movimento original.* Um exemplo trivial da mecânica clássica em uma dimensão, nos ajudará a elucidar este ponto. Consideremos a seguinte equação de movimento

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} = 0, \tag{I.65}$$

onde $\ddot{q} = \dfrac{d^2q}{dt^2}$; $\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$ e α é uma constante. Como foi ressaltado por Santilli [23], existem duas Lagrangeanas não-equivalentes, L e $\overline{L}$, que reproduzem a eq.(I.65)

$$L = \frac{1}{2} e^{\alpha t} \dot{q}^2 \tag{I.66}$$

$$\overline{L} = \frac{1}{2} \dot{q} \ln \dot{q}^2 - \alpha q + \dot{q} f(q), \tag{I.67}$$

onde $f(q)$ é uma função arbitrária de q. Não é difícil notar que a equação de movimento (I.65) é invariante sob a transformação de escala

$$q \to \xi q, \tag{I.68}$$

enquanto que a Lagrangeana $\overline{L}$ não se transforma covariantemente segundo esta mesma transformação. Obviamente, a Lagrangeana da eq.(I.66) é invariante sob a transformação de escala (I.68); mas uma vez que ela depende explicitamente do tempo para $\alpha \neq 0$, concluímos que esta Lagrangeana só é adequada para o processo usual de quantização no caso particular $\alpha = 0$. Portanto, a Lagrangeana apropriada para a quantização é aquela que não compartilha das simetrias da equação de movimento.

A seguir, apresentamos uma demonstração rigorosa, baseada no cálculo das formas funcionais, da afirmação i).

Vamos considerar a densidade de Lagrangeana $L[\varphi]$ dependente de um conjunto de campos $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, e sua ação funcional associada

$$S[\varphi] = L[\varphi(x)]. \tag{I.69}$$

Note que estamos usando uma notação simbólica, onde são omitidos os somatórios e as integrações nas variáveis repetidas. Diferenciando a expressão acima, obtemos

$$\delta S[\varphi] = \delta L[\varphi] = \{\delta_a L[\varphi(x)]\}\delta\varphi^a. \tag{I.70}$$

A expressão entre chaves em (I.70) sendo igual a zero, nos fornece as equações de campo $\delta_a L[\varphi] = 0$.

Relacionado a um conjunto de equações de campo $E_a[\varphi] = 0$, existe uma 1-forma funcional, a forma de Euler, cuja expressão é dada por

$$E[\varphi] = E_a[\varphi]\,\delta\varphi^a. \tag{I.71}$$

Suponha agora que X represente um gerador de uma transformação agindo no espaço dos campos φ. Agindo sobre as formas, a transformação é dada pela derivada de Lie [2] $\mathbf{L}_x$. Como as derivadas de Lie comutam com diferenciais, temos

$$\mathbf{L}_x E = \mathbf{L}_x \delta L = \delta \mathbf{L}_x L = 0. \tag{I.72}$$

Conseqüentemente, *uma simetria da Lagrangeana* ($\mathbf{L}_x L = 0$) *é uma simetria da equação* ($\mathbf{L}_x E = 0$), *mas a equação pode ter simetrias que não são simetrias da Lagrangeana.* $\mathbf{L}_x E = 0$ *implica apenas em que* $\mathbf{L}_x L$ *seja uma forma fechada.*

Em relação a afirmação ii), ainda segundo Faraoni [3], o acoplamento com a curvatura não é eliminado da equação para o campo ϕ (cf. eq.(I.50)): ele continuaria presente através da constante de acoplamento λ, cujos termos relacionados modificam a dinâmica da teoria. Quanto a isto, mostraremos na Parte II que a teoria é a mesma para qualquer valor de λ.

I.4. O Princípio do Acoplamento Mínimo (PAM) e o Princípio de Equivalência Fraco (PEF)

O Princípio de Equivalência Fraco, ou a equivalência entre as massas gravitacional e inercial de um corpo de prova, é muito mais que um teste para as teorias de gravitação: é o fundamento destas.

O PEF pode ser definido da seguinte maneira [29]: se um corpo de prova não-carregado é colocado em um evento inicial, então a sua trajetória subseqüente será independente de sua estrutura interna e composição.

---

[2] As derivadas de Lie L_x agindo sobre formas funcionais, têm propriedades análogas àquelas do cálculo diferencial.

Por corpo de prova não-carregado entendemos um corpo eletricamente neutro com auto-energia gravitacional (estimada através da teoria de Newton) negligenciável, e que o seu tamanho seja pequeno o suficiente para que o acoplamento com as não-homogeneidades do campo gravitacional seja desprezível.

Os primeiros experimentos para verificar a igualdade entre as massas gravitacional e inercial foram, ao que tudo indica, realizados por Galileu no início do século XVII, tendo sido refeitos por Newton algumas décadas mais tarde. Ambos demonstraram experimentalmente que a aceleração de um corpo, no campo gravitacional da Terra, não depende da composição deste corpo. Nos dois casos a experiência foi feita com a utilização de pêndulos. Em 1827, o experimento foi repetido por Bessel, também usando um pêndulo, mas obtendo um resultado mais preciso. Em 1890, Eötvös refez o experimento usando uma balança de torsão verificando o mesmo resultado com uma precisão de aproximadamente 10^{-8} (para a razão da diferença entre as massas gravitacional e inercial divida pela massa do corpo). Alguns anos mais tarde Eötvös, Pekar e Fekete repetiram o experimento, aumentando a precisão para aproximadamente 10^{-9}. Em 1964 o experimento foi refeito por Dicke [30], e em 1971 por Braginsky e Panov [31]. Estes dois experimentos foram executados usando balanças de torsão e elevaram a precisão dos resultados para aproximadamente 10^{-12}. Recentemente (1989-1990) foram levados a cabo experimentos tipo "Eöt-Wash" onde uma sofisticada balança de torsão é usada para comparar as acelerações do berílio e do cobre [32]. Originalmente desenvolvidos para a busca da quinta força, também são testes do PEF, tendo confirmado os resultados já obtidos.

A validade do PEF dota o espaço-tempo com uma família de trajetórias preferenciais, as geodésicas da métrica, que são as linhas-de-universo dos corpos de teste em queda livre. Em um sistema local, que siga uma destas trajetórias, os corpos de teste têm movimentos não-acelerados.

Na Relatividade Geral, pode-se mostrar rigorosamente que a conservação do tensor energia-momento, por sua vez uma consequência das equações de Einstein, implica [33] em que as partículas-teste sigam as geodésicas do espaço-tempo.

Aqui faremos uma demonstração não rigorosa, mas bastante simples e elucidativa, deste fato.

Seja um conjunto de partículas livres (partículas que não interagem entre si). Se o seu número for muito grande, podemos considerá-las como um fluido ideal sem pressão (poeira), o que implica que seu tensor energia-momento pode ser escrito como

$$T^{\mu\nu} = \rho U^{\mu} U^{\nu}, \tag{I.73}$$

onde ρ é a densidade de energia e U_{μ} um vetor tipo tempo normalizado ($U^{\mu}U_{\mu} = 1$).

Das equações de Einstein,

$$G^{\mu\nu} = -kT^{\mu\nu}, \tag{I.74}$$

segue-se que

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 = -kT^{\mu\nu}{}_{;\nu}. \tag{I.75}$$

Portanto,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \tag{I.76}$$

Levando em conta a equação (I.73), vem

$$0 = T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \left(\rho U^{\mu}\right)_{;\nu} U^{\nu} + \rho U^{\mu} U^{\nu}{}_{;\nu}. \tag{I.77}$$

Como $U^{\mu}U_{\mu} = 1$, temos que

$$U_{\mu} U^{\mu}{}_{;\nu} = \frac{1}{2}\left(U^{\mu}U_{\mu}\right)_{;\nu} = 0. \tag{I.78}$$

Multiplicando a eq. (I.77) por U_μ e, em vista de (I.78), obtemos

$$\left(\rho U^{\upsilon}\right)_{;\upsilon}=0, \tag{I.79}$$

ou seja, a equação de continuidade (conservação da massa).

Portanto, (I.77) toma agora a forma

$$U^{\mu}U^{\upsilon}{}_{;\mu}=0 \tag{I.80}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}&\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\left[U^{\upsilon}{}_{,\mu}+\Gamma^{\upsilon}_{\mu\lambda}U^{\lambda}\right]=0\\&\frac{d^2x^{\upsilon}}{d\tau^2}+\Gamma^{\upsilon}_{\mu\lambda}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}=0\quad.\end{aligned} \tag{I.81}$$

Da equação acima, vemos que as linhas-de-universo das partículas são geodésicas. Como por hipótese as partículas não interagem entre si, podemos concluir que a linha-de-universo de uma **única** partícula-teste livre será também uma geodésica.

Invertendo a argumentação acima, podemos dizer que para as partículas-teste seguirem geodésicas do espaço-tempo, obedecendo assim ao PEF, o tensor momento energia deve ser conservado.

Conforme havíamos mencionado anteriormente, é crença generalizada que a violação do PAM implica na violação do PEF.

Vamos mostrar, usando a "força bruta", que isto não é verdade no caso particular das teorias pseudamente acopladas não-minimamente à gravitação [2].

Para o caso das teorias descritas por (I.30), vamos calcular $\nabla_{\upsilon}T^{\mu\upsilon}_{(\phi)}$:

$$\nabla_\upsilon T^{\mu\upsilon}_{(\phi)} = \frac{1}{2}\,\partial^\mu\phi\left[\Box\phi + V'\right] + \nabla^\upsilon\nabla^\mu\nabla_\upsilon f$$

$$-\nabla^\mu\nabla_\upsilon\nabla^\upsilon f + R^\mu_{\ \upsilon} f^{;\upsilon} - \frac{1}{2} R f^{;\mu} \quad .$$

Utilizando (I.31) e lembrando que as derivadas covariantes não comutam

$$\left[\nabla_\lambda, \nabla_\gamma\right]\nabla^\lambda f(\phi) = -R_{\lambda\gamma}\nabla^\lambda f(\phi), \tag{I.82}$$

podemos escrever

$$\nabla_\upsilon T^{\mu\upsilon}_{(\phi)} = \frac{R}{2}\partial^\mu f(\phi) - R^\mu{}_\upsilon\,\partial^\upsilon f(\phi) + R^\mu{}_\upsilon\,\partial^\upsilon f(\phi) - \frac{1}{2} R\,\partial^\mu f(\phi)$$

$$= 0 .$$

O que mostra que para o caso do campo escalar $\nabla_\upsilon T^{\mu\upsilon}_{(\phi)} = 0$.

Para as teorias descritas por (I.39), calculemos $\nabla_\upsilon T^{\mu\upsilon}_{(F)}$:

$$\nabla_\upsilon T^{\mu\upsilon}_{(F)} = \frac{1}{2} F_{\upsilon\alpha}\left[F^{\upsilon\alpha;\mu} - 2F^{\mu\alpha;\upsilon}\right] + F^\mu{}_\alpha F^{\alpha\upsilon}{}_{;\upsilon}$$

$$- R^\mu{}_\upsilon \nabla^\upsilon h(F^2) F^\mu{}_\alpha \nabla_\upsilon\left(2R\frac{dh}{dF^2}F^{\alpha\upsilon}\right)$$

$$- 2R\frac{dh}{dF^2}F_{\alpha\upsilon}F^{\mu\alpha;\upsilon} + R^\mu{}_\upsilon\nabla^\upsilon h(F^2) - \frac{1}{2}R\nabla^\mu h(F^2)$$

$$= \frac{3}{2}F_{\upsilon\alpha}F^{[\mu\alpha;\upsilon]} + F^\mu{}_\alpha\left[F^{\alpha\upsilon}{}_{;\upsilon} - \nabla_\upsilon\left(2R\frac{dh}{dF^2}F^{\alpha\upsilon}\right)\right]$$

$$+ R\frac{dh}{dF^2}F_{\alpha\upsilon}\left[F^{\upsilon\alpha;\mu} - 2F^{\mu\alpha;\upsilon}\right]$$

$$= \frac{3}{2} F_{\upsilon\alpha} F^{[\mu\alpha;\upsilon]} + F^{\mu}{}_{\alpha}\left[F^{\alpha\upsilon}{}_{;\upsilon} - \nabla_{\upsilon}\left(2R \frac{dh}{dF^2} F^{\alpha\upsilon} \right)\right]$$

$$+ 3R \frac{dh}{dF^2} F_{\alpha\upsilon} F^{[\mu\alpha;\upsilon]} \quad . \tag{I.83}$$

Usando (I.40) e levando em conta que

$$F^{[\mu\alpha;\upsilon]} = 0, \tag{I.84}$$

obtemos

$$\nabla_{\upsilon} T^{\mu\upsilon}_{(F)} = 0. \tag{I.85}$$

O que implica em

$$\nabla_{\upsilon}\left(T^{\mu\upsilon} + T^{\mu\upsilon}_{F,\phi} \right) = 0. \tag{I.86}$$

A teoria descrita por (I.30) foi generalizada por Hwang [5] através da seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left\{ \frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{1}{2} w(\phi) g^{\mu\upsilon} \partial_{\mu}\phi \partial_{\upsilon}\phi + \mathrm{L}_{m} \right\}.$$

Utilizando a "força bruta", ele mostrou que $T_{M}^{\mu\upsilon}{}_{;\upsilon} = 0$; o que implica na compatibilidade desta teoria com o PEF.

A bem da verdade, tentar mostrar, via "força bruta", que teorias efetivamente acopladas não-minimamente à gravitação não violam o PEF, é uma tarefa extremamente árdua e na maioria dos casos inconclusiva. Isto nos motivou a demonstrar este resultado utilizando uma descrição independente do modelo usado para descrever a interação gravitacional não-mínima. Apresentamos em seqüência esta demonstração [6].

Seja $\mathsf{L}_I = \mathsf{L}_I\left(\psi^A, g_{\mu\nu}\right)$ a Lagrangeana para algum campo de matéria não-minimamente acoplado à gravidade. O campo é descrito pelas variáveis ψ^A, onde A representa qualquer índice tensorial. A ação total para a teoria acoplada não-minimamente é

$$I(x) = \int d^4 x \mathcal{L}(x) \tag{I.87}$$

com

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_E + \mathcal{L}_I + \mathcal{L}_m, \tag{I.88}$$

onde $\mathcal{L}_E$ é a Lagrangeana da Relatividade Geral, dada por (I.6); $\mathcal{L}_m$ é a Lagrangeana da matéria usual dada por

$$\mathcal{L}_m = \sqrt{-g}\,\mathsf{L}_m \tag{I.89}$$

e $\mathcal{L}_I$ por

$$\mathcal{L}_I = \sqrt{-g}\,\mathsf{L}_I\left(\psi^A, g_{\mu\nu}\right). \tag{I.90}$$

Vamos supor, fato este subentendido em toda nossa discussão anterior, que $\mathcal{L}_m$ não contém o campo ψ^A.

Como a ação é um escalar ela é invariante sob a transformação de coordenadas infinitesimal

$$\delta_c x^\mu = \bar{x}^\mu - x^\mu = \xi^\mu, \tag{I.91}$$

o que nos permite escrever

$$
\begin{aligned}
0 &= \bar{I}(\bar{x}) - I(x) \\
&= \int d^4x \bar{\mathcal{L}}(\bar{x}) - \int d^4x\, \mathcal{L}(x) \\
&= \int d^4x \left[\bar{\mathcal{L}}(x) - \mathcal{L}(x)\right] \\
&= \int d^4x \delta_c \mathcal{L}(x) \\
&= \int d^4x \delta_c \mathcal{L}_E + \int d^4x \delta_c \mathcal{L}_I + \int d^4x \delta_c \mathcal{L}_m \quad .
\end{aligned}
$$

Porém, $\int d^4x\delta_c\mathcal{L}_E$, $\int d^4x\delta_c\mathcal{L}_I$ e $\int d^4x\delta_c\mathcal{L}_m$ são, por sua vez, separadamente invariantes pela transformação infinetesimal de coordenadas (I.91), devido a própria natureza do processo de covariância.

Examinemos o que esta invariância nos fornece em cada caso.

i) $\int d^4x\delta_c\mathcal{L}_E = 0;$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{k}\int d^4x \delta_c \sqrt{-g}\, R \\
&= \frac{1}{k}\int d^4x \frac{\delta\left(\sqrt{-g}\, R\right)}{\delta g_{\mu\upsilon}} \delta_c g_{\mu\upsilon} \\
&= -\int d^4x \sqrt{-g}\, \frac{G^{\mu\upsilon}}{k} \delta_c g_{\mu\upsilon} \quad .
\end{aligned} \tag{I.92}
$$

Uma vez que

$$
\delta_c g_{\mu\upsilon} = -\left(\nabla_\mu \xi_\upsilon + \nabla_\upsilon \xi_\mu\right), \tag{I.93}
$$

vem

$$
\begin{aligned}
0 &= \int d^4x\sqrt{-g}\,\frac{G^{\mu\upsilon}}{k}\left(\nabla_\mu \xi_\upsilon + \nabla_\upsilon \xi_\mu\right) \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\,\frac{2G^{\mu\upsilon}}{k}\nabla_\mu \xi_\upsilon \qquad \text{(I.94)} \\
&= -\int d^4x\, 2\frac{\sqrt{-g}}{k}\left(\nabla_\mu G^{\mu\upsilon}\right)\xi_\upsilon \quad .
\end{aligned}
$$

Como ξ_υ é arbitrário, segue-se

$$\nabla_\upsilon G^{\mu\upsilon} = 0, \tag{I.95}$$

o que não é nada mais do que a identidade de Bianchi contraída.

ii) $\int d^4x\,\delta_c \mathcal{L}_I = 0;$

$$0 = \int d^4x\sqrt{-g}\,\frac{\delta \mathrm{L}_I}{\delta \psi^A}\delta_c \psi^A + \int d^4x\,\frac{\delta \mathrm{L}_I}{\delta g_{\mu\upsilon}}\delta_c g_{\mu\upsilon}. \tag{I.96}$$

Porém, $\dfrac{\delta \mathrm{L}_I}{\delta \psi^A} = 0$ são as equações para o campo ψ^A, o que implica em

$$\int d^4x\sqrt{-g}\,T^{\mu\upsilon}_{(I)}\delta_c g_{\mu\upsilon} = 0,$$

devido a (I.93)

$$-2\int d^4x\sqrt{-g}\,\xi_\mu \nabla_\upsilon T^{\mu\upsilon}_{(I)} = 0. \tag{I.97}$$

Pelo fato de ξ_μ ser arbitrário

$$\nabla_\upsilon T^{\mu\upsilon}_{(I)} = 0, \tag{I.98}$$

ou seja, o tensor energia-momento correspondente ao acoplamento gravitacional não-mínimo é covariantemente conservado na concha de massa de ψ^A independentemente de quaisquer outras propriedades do resto da ação. Este resultado é extremamente importante pois evita, na prática, a árdua tarefa de computar na "força bruta" a divergência covariante do tensor energia-momento.

iii) $\int d^4 x \delta_c \mathcal{L}_m = 0;$

repetindo o raciocínio que anteriormente nos levou a equação, nós obtemos agora a relação

$$\nabla_\mu T_m^{\mu\nu} = 0, \tag{I.99}$$

a qual nos diz que a troca de energia entre a matéria e o campo gravitacional é descrita exatamente como na teoria de Einstein.

Assim, estamos na posição de enunciar o seguinte teorema

Teorema: *Qualquer teoria cuja ação é dada por (I.87) obedece ao Princípio de Equivalência Fraco.*

Vamos supor agora que a Lagrangeana de matéria $\mathcal{L}_m$ depende do campo ψ^A. No caso particular de ψ^A ser um campo escalar ϕ, no lugar da eq.(I.99) obtemos

$$\nabla_\mu T_m^{\mu\nu} = -\rho J^\nu \tag{I.100}$$

$$\rho \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \phi} \quad , \quad J^\mu \equiv \partial^\mu \phi. \tag{I.101}$$

Uma vez que $\frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta \phi} + \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta \phi} = 0$, a equação (I.100) pode ser reescrita como

$$\nabla_\mu T_m^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta \phi} \partial^\nu \phi. \tag{I.102}$$

É fácil ver que

$$\nabla_\mu T_I^{\mu\nu} = -\frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta \phi} \partial^\nu \phi. \tag{I.103}$$

Assim, nem $T_m^{\mu\nu}$ ou $T_I^{\mu\nu}$ são conservadas covariantemente. Entretanto, numa região do espaço onde ϕ não muda, tal como aqui e agora, teremos novamente $\nabla_\mu T_m^{\mu\nu} = 0$ e $\nabla_\mu T_I^{\mu\nu} = 0$. Estes resultados são completamente independentes do modelo usado para descrever a interação não-mínima entre o campo ϕ e a curvatura. Zee [13] e Accioly e Pimentel [34] obtiveram a equação (I.102) fazendo uso de modelos específicos para descrever o acoplamento não-mínimo.

A equação (I.103) foi obtida em primeiro lugar por Deser [35] no estudo da divergência do tensor energia-momento num campo externo. O método utilizado para obter a equação (I.100) é igualmente aplicável a qualquer outro campo tensorial ψ^A.

I.5. Os Princípios de Equivalência e a Conjectura de Schiff

Schiff propôs uma implicação entre dois princípios fundamentais da física: o Princípio de Equivalência Fraco e o Princípio de Equivalência de Einstein.

Retomando a nossa discussão sobre o Princípio de Equivalência Fraco, podemos enunciá-lo alternativamente como: todos os corpos caem num campo gravitacional com a mesma aceleração não importando a sua massa ou estrutura interna.

Einstein, por sua vez, acrescentou um elemento chave a este princípio, que revelou ser o caminho para a Relatividade Geral: se todos os corpos caem com a mesma aceleração num campo gravitacional externo, então, para um observador num elevador em queda livre no mesmo campo gravitacional os corpos, da mesma maneira, não deverão possuir aceleração (exceto, talvez, por efeitos de maré ou devido as não-homogeneidades no campo gravitacional, as quais podem ser tão pequenas quanto se deseje, fazendo o elevador suficientemente pequeno). Portanto, do ponto de vista de seu movimento mecânico, os corpos se comportarão como se não houvesse gravidade.

Mais que isso, Einstein propôs que não somente as leis da mecânica, mas todas as leis da física, devem se comportar no elevador como se a gravidade estivesse ausente, como, por exemplo, as leis da eletrodinâmica. Esse novo princípio de equivalência levou Einstein à Relatividade Geral, e é chamado Princípio de Equivalência de Einstein.

A manifestação matemática do PEE é o Princípio de Acoplamento Mínimo (PAM) [29].

Sob o aspecto experimental, a validade do PEE implica em que sejam observadas [36],

i) a validade do PEF, ou seja, a invariância da razão entre a massa inercial e a massa gravitacional;

ii) a validade das equações generalizadas da eletrodinâmica de Maxwell;

iii) a estabilidade de certas constantes adimensionais microscópicas.

Como vemos, o PEE incorpora o PEF e o PAM.

Por volta de 1960, tendo em vista uma possível vinculação teórica entre os princípios do PEE, Schiff [37] conjecturou que qualquer teoria de gravitação que incorporasse o PEF necessariamente incorporaria o PEE.

Imediatamente vemos que isto implicaria em vincular a validade do PAM à validade do PEF.

Com a demonstração geral que apresentamos na Seção I.4, vemos que as teorias acopladas não-minimamente à gravitação (que não estão submetidas ao PAM) obedecem ao PEF.

Assim, chegamos ao seguinte corolário

Corolário. *As teorias não-minimamente acopladas à gravitação, em geral, são contra-exemplos para a conjectura de Schiff.*

PARTE II

A Equivalência Clássica das Teorias $\lambda R\phi^2$

II.1. Um Teorema Geral

Tem sido sugerido por muitos autores que a ação correspondente à gravitação deveria conter, além da ação de Einstein, certos funcionais não-mínimos do campo escalar. As razões para tanto são múltiplas: a necessidade de abrandar as divergências do tensor de energia-momento [15]; a possibilidade de uma explicação teórica para o princípio de Mach [38];, a incorporação do mecanismo de quebra espontânea de simetria na gravitação [13]; a construção de modelos não-singulares para o universo [39, 40]; a necessidade de manter a renormalizabilidade em teorias de campo no espaço curvo [1]; e assim por diante[41].

Em geral, as candidatas a tais ações não-minimamente acopladas contêm um termo da forma $\lambda R\phi^2$, o qual é o único termo local possível envolvendo um acoplamento *adimensional* entre o campo ϕ e a curvatura escalar R. Conseqüentemente iremos concentrar nossa atenção em teorias descritas pelo funcional

$$S[g,\phi]=\int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{k}+g^{\mu\upsilon}\partial_\mu\phi\partial_\upsilon\phi+\lambda R\phi^2\right], \qquad \text{(II.1)}$$

com $k = 8\pi G$ em unidades naturais.

O parâmetro de acoplamento λ que comparece em (II.1) é normalmente escolhido como sendo zero ou -1/6 por questões de simplicidade. Não existe, no entanto, nenhuma razão *a priori* para que este não possa tomar qualquer outro valor real. Isto nos leva a uma questão embaraçosa: que valor de λ deveremos, pelo menos em princípio, utilizar em nossos cálculos ordinários? Como veremos na seqüência, a resposta a esta indagação é bastante surpreendente: qualquer que seja o valor da constante de acoplamento λ a ação (II.1) descreve, em geral, a mesma teoria em nível clássico.

Iniciamos nossa demonstração reparametrizando a métrica inicial $g_{\mu\upsilon}$ por meio da transformação conforme

$$\overline{g}_{\mu\upsilon}(x) = \Omega^2(x)\, g_{\mu\upsilon}(x) \quad , \quad \Omega^2 \equiv 1 + \lambda k \phi^2 \quad . \tag{II.2}$$

Obviamente $1 + \lambda k \phi^2$ é suposto ser positivo. É fácil mostrar que a correspondente transformação para a curvatura escalar é dada por

$$\overline{R} = \overline{\Omega}^2 R + 6\,\overline{\Omega}^3 \Box \Omega. \tag{II.3}$$

Dos resultados anteriores obtemos a seguinte expressão para a ação S [g ,ϕ] em termos da nova métrica $\overline{g}^{\mu\upsilon}$

$$S[g,\phi] = \int d^4x \sqrt{-\overline{g}} \left\{ \frac{R}{k} + \overline{\Omega}^4\, \overline{g}^{\mu\upsilon} \left[1 + k\lambda(1+6\lambda)\phi^2 \right] \partial_\mu \phi \partial_\upsilon \phi \right\}. \tag{II.4}$$

A não-linearidade com respeito ao campo escalar ϕ pode, por meio de uma nova redefinição de campos, ser removida de (II.4). De fato, da relação diferencial

$$\overline{g}^{\mu\upsilon} \partial_\mu \phi \partial_\upsilon \phi\, \overline{\Omega}^4 \left[1 + k\lambda(1+6\lambda)\phi^2 \right] = \overline{g}^{\mu\upsilon}\, \partial_\mu \overline{\phi} \partial_\upsilon \overline{\phi}, \tag{II.5}$$

onde $\overline{\phi}$ é um novo campo escalar, segue-se a equação diferencial[3]

$$\frac{d\,\overline{\phi}(\phi)}{d\phi} = \frac{\sqrt{1 + k\lambda\phi^2(1+6\lambda)}}{1 + k\lambda\phi^2}, \tag{II.6}$$

a qual pode ser integrada com ajuda da condição de contorno $\overline{\phi}(\phi)\Big|_{\phi=0} = 0$. O resultado é o seguinte

i) para $\lambda > 0$;

[3] Note que $1 + k\lambda\phi^2 > 0$ implica em $1 + k\lambda\,(1+6\lambda)\,\phi^2 > 0$.

$$\bar{\phi}=\sqrt{\frac{1+6\lambda}{k\lambda}}\ln\left[\sqrt{1+k\lambda(1+6\lambda)\phi^2}+\sqrt{k\lambda(1+6\lambda)}\,\phi\right]$$
$$-\sqrt{\frac{3}{2k}}\ln\frac{\left[\sqrt{1+k\lambda(1+6\lambda)\phi^2}+\sqrt{6k\lambda^2}\,\phi\right]^2}{1+k\lambda\phi^2} \tag{II.7}$$

ii) para $-\frac{1}{6}<\lambda<0$;

$$\bar{\phi}=\sqrt{\frac{1+6\lambda}{-k\lambda}}\left[\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+k\lambda(1+6\lambda)\phi^2}}{\sqrt{-k\lambda(1+6\lambda)}\,\phi}\right]$$
$$+\sqrt{\frac{3}{2k}}\ln\frac{\left[\sqrt{1+k\lambda(1+6\lambda)\phi^2}+\sqrt{6k\lambda^2}\,\phi\right]^2}{1+k\lambda\phi^2} \tag{II.8}$$

iii) para $\lambda=-\frac{1}{6}$;

$$\bar{\phi}=\sqrt{\frac{3}{2k}}\ln\left[\frac{1+\sqrt{\frac{k}{6}}\,\phi}{1-\sqrt{\frac{k}{6}}\,\phi}\right], \tag{II.9}$$

iv) para $\lambda<-\frac{1}{6}$;

$$\bar{\phi}=\sqrt{\frac{1+6\lambda}{k\lambda}}\ln\left[\sqrt{1+k\lambda(1+6\lambda)\phi^2}-\sqrt{k\lambda(1+6\lambda)}\,\phi\right]$$
$$+\sqrt{\frac{3}{2k}}\ln\frac{\left[\sqrt{1+k\lambda(1+6\lambda)\phi^2}+\sqrt{6k\lambda^2}\,\phi\right]^2}{1+k\lambda\phi^2}\quad . \tag{II.10}$$

Nas figuras 1, 2 e 3 estes resultados são mostrados na forma de gráficos.

A nova ação é dada por

$$\bar{S}[\bar{g},\bar{\phi}] = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{\bar{R}}{k} + \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \bar{\phi} \partial_\nu \bar{\phi} \right]. \qquad \text{(II.11)}$$

Portanto, para um campo escalar não-massivo, o acoplamento $\lambda R\phi^2$ pode ser totalmente eliminado. Como, por outro lado, $\bar{S}[\bar{g},\bar{\phi}]$ e $S[g,\phi]$ são ações classicamente equivalentes, uma vez que a primeira foi obtida da segunda por meio de redefinições de campo, concluímos que [7]

Teorema. *Em nível clássico, o funcional (II.1) descreve a mesma teoria independentemente do valor de* λ *desde que* $1 + k\lambda\ \phi^2 > 0$ *(as condições de contorno sobre o campo barrado são determinadas a partir das condições impostas sobre os campos sem barra).*

Em outras palavras, pode-se dizer que uma classe infinita de teorias consideradas não equivalentes pelos teóricos da área, nada mais é do que a mesma teoria escrita de infinitas maneiras diferentes.

No caso particular de $\lambda = -\frac{1}{6}$ (acoplamento conforme) o teorema anterior reproduz um resultado bem conhecido e que foi originalmente obtido por Bekenstein [39]: um algoritmo que permite gerar soluções para as equações de Einstein-campo-escalar-conforme a partir das soluções das equações de Einstein-campo-escalar-ordinário.

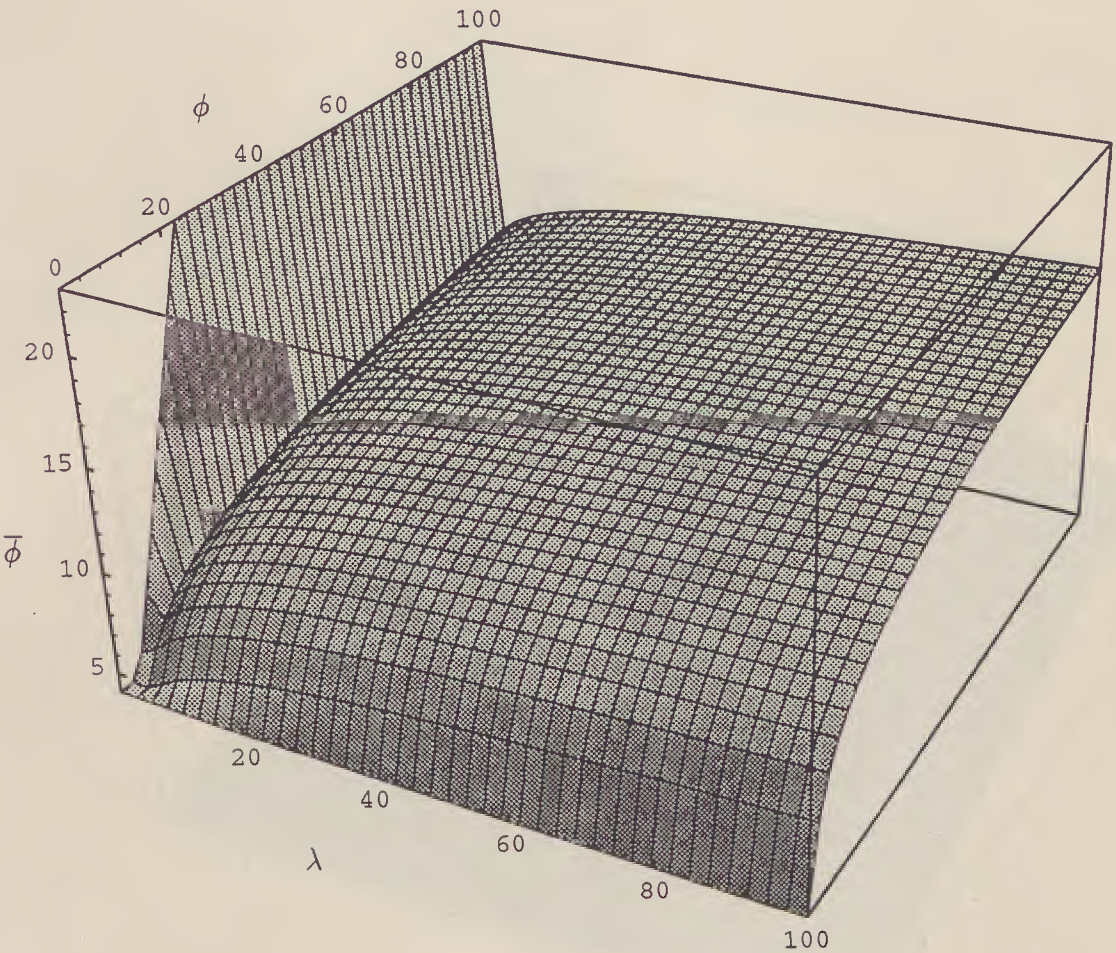

Fig. 1- O campo escalar $\overline{\phi}$ como função de ϕ e da constante de acoplamento λ, tal que $\lambda > 0$.

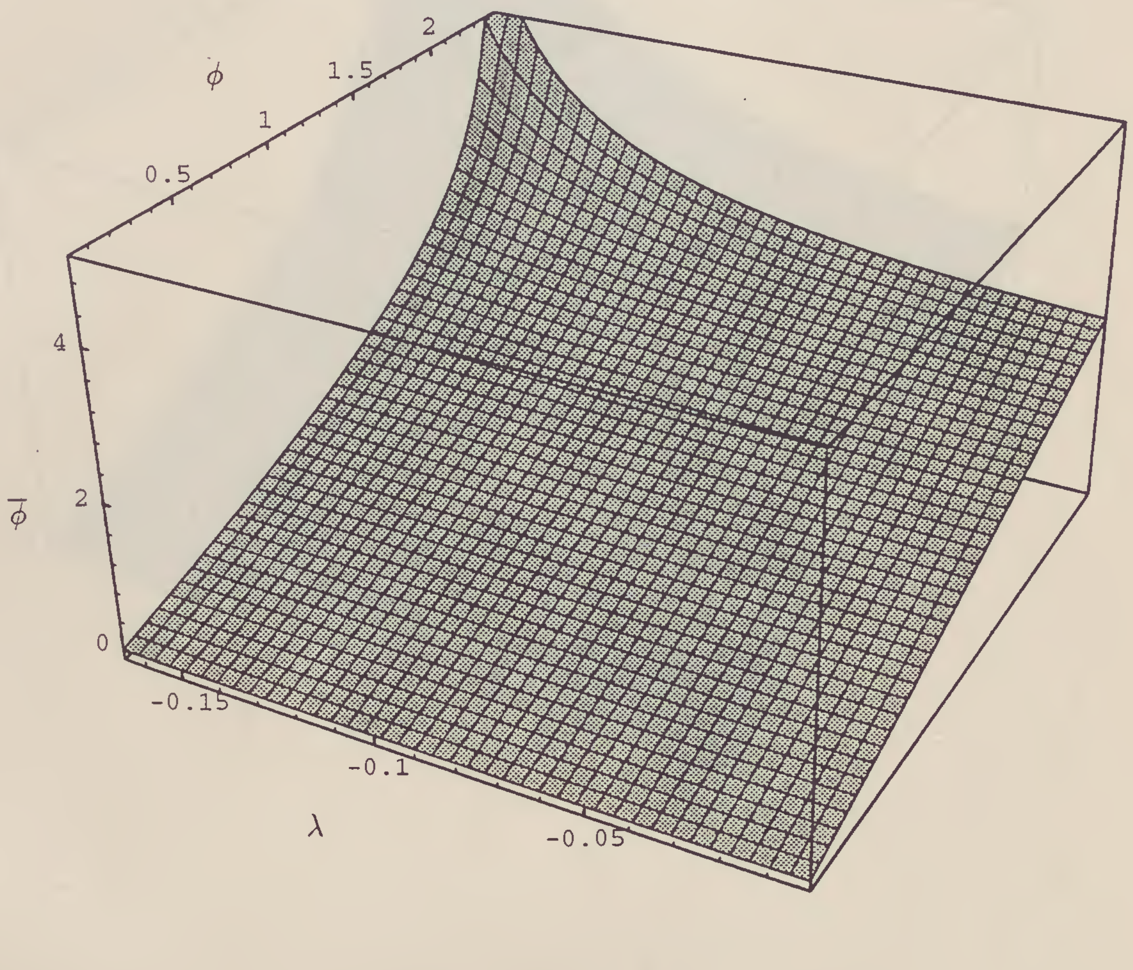

Fig. 2- O campo escalar $\bar{\phi}$ como função de ϕ e da constante de acoplamento λ, tal que $-1/6 < \lambda < 0$.

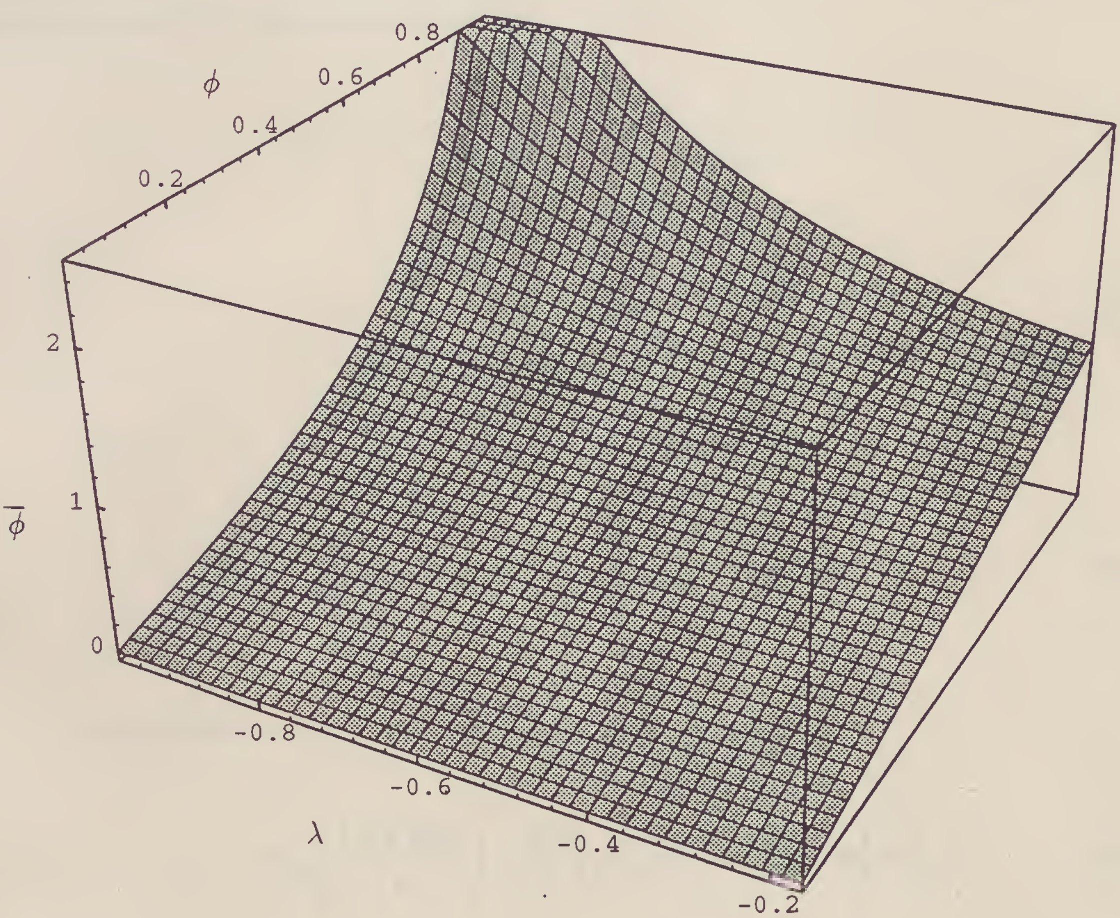

Fig. 3- O campo escalar $\overline{\phi}$ como função de ϕ e da constante de acoplamento λ, tal que $\lambda < -1/6$.

II.2. Os Parâmetros PPN

Examinaremos nesta seção o limite pós-Newtoniano para o problema esfericamente simétrico de um corpo dentro da classe de teorias $\lambda R\phi^2$. As equações de campo obtidas pela variação da ação (II.1) são as que se seguem

$$G_{\mu\upsilon}\left(\frac{1+k\lambda\phi^2}{k}\right)=T_{\mu\upsilon} \tag{II.13}$$

$$\Box\phi-\lambda R\phi=0, \tag{II.14}$$

onde

$$T_{\mu\upsilon}=\lambda\left[g_{\mu\upsilon}\Box-\nabla_\mu\nabla_\upsilon\right]\phi^2+\frac{1}{2}g_{\mu\upsilon}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi-\partial_\mu\phi\partial_\upsilon\phi. \tag{II.15}$$

As equações (II.13) e (II.14) são equivalentes a

$$R_{\mu\upsilon}\left[\frac{1+k\lambda\phi^2}{k}\right]+\frac{g_{\mu\upsilon}}{2}\left[3\lambda\Box\phi^2+\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi\right]=T_{\mu\upsilon} \tag{II.16}$$

$$\Box\phi+\frac{k\lambda\phi}{1+k\lambda\phi^2}\left[\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi+3\lambda\Box\phi^2\right]=0. \tag{II.17}$$

É digno de nota o fato que, embora a equação (II.17) seja altamente não-linear, ela não contém qualquer traço do acoplamento gravitacional não-mínimo original. Para λ = 0, as equações (II.16) e (II.17) se reduzem a

$$R_{\mu\upsilon} = -k\partial_\mu \phi \partial_\upsilon \phi$$
$$\Box\phi = 0 \quad . \tag{II.18}$$

Uma vez que a ação S descreve a mesma teoria clássica não importando qual o valor de λ (com $1 + k\lambda\phi^2$ sendo suposto positivo), consideraremos $\lambda = 0$, por conveniência, nos cálculos que se seguem.

A métrica esfericamente simétrica na forma "isotrópica" é dada por

$$ds^2 = e^{2\upsilon}dt^2 - e^{2\mu}\left(dr^2 + r^2 d\Omega^2\right), \tag{II.19}$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\varphi^2$; e μ e ν dependem apenas de r.

As equações de Einstein relevantes são

$$\upsilon'' + \upsilon'^2 + \upsilon'\mu' + \frac{2\upsilon'}{r} = 0 \tag{II.20}$$

$$\frac{\upsilon'}{r} + \upsilon'\mu' + \frac{3\mu'}{r} + \mu'' + \mu'^2 = 0 \tag{II.21}$$

$$\left(e^{\upsilon+\mu} r^2 \phi'\right)' = 0, \tag{II.22}$$

onde o apóstrofo denota a diferenciação com respeito a r. Além disto, temos a equação de vínculo

$$\upsilon'\mu' - \upsilon'' - \upsilon'^2 - \frac{2\mu'}{r} - 2\mu'' = k\phi'^2. \tag{II.23}$$

Integrando obtemos

$$e^{2\nu}=\left[\frac{1-U}{1+U}\right]^{\frac{2n}{m}} \tag{II.24}$$

$$e^{2\mu}=\left[1+U\right]^{2\left(1+\frac{n}{m}\right)}\left[1-U\right]^{2\left(1-\frac{n}{m}\right)} \tag{II.25}$$

$$\phi=\frac{Q}{m}\ln\left[\frac{1+U}{1-U}\right], \tag{II.26}$$

onde $U=\frac{m}{2r}$ e $kQ^2+2n^2=2m^2$. A coordenada radial varia no intervalo $\frac{m}{2}<r<\infty$. A constante real Q é interpretada como carga escalar, visto que $\phi\sim-\frac{Q}{r}$ para valores grandes de r.

Expandindo $e^{2\upsilon}$ e $e^{2\mu}$ em série de potências em V, onde $V=\frac{n}{r}$, a métrica toma a forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[1-2\alpha V+2\beta V^2+\ldots\right]dt^2 \\ &-\left[1+2\gamma V+2\delta V^2\left(\frac{3}{4}-\frac{Q^2}{8m^2}\right)+\ldots\right]\left(dr^2+r^2d\Omega^2\right) \quad , \end{aligned} \tag{II.27}$$

onde, como na Relatividade Geral, $\alpha=\beta=\gamma=1$. A propósito, a precisão em α é de 10^{-4} , em γ aproximadamente 10^{-3}, e em β cerca de 10^{-2} [42, 29]. Notemos, ainda, que o efeito resultante da carga escalar é a redução da massa geométrica original m, que agora é obtida pela expressão

$$n=\left(m^2-\frac{kQ^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{II.28}$$

Da equação (II.27) segue que nossa classe de teorias é compatível com as restrições empíricas existentes.

II.3. As Teorias $\lambda R\phi^2$ e os Buracos Negros

De acordo com a Relatividade Geral, a configuração final mais geral para um objeto colapsado é um buraco negro de Kerr-Newman. Se considerarmos que os únicos parâmetros ajustáveis que aparecem nesta métrica são massa, carga elétrica e momento angular, concluímos que estes parâmetros são exatamente aqueles que necessitamos para identificar um buraco negro.

Essa é a essência do teorema *no-hair*, o qual foi resumido por Wheeler na frase *um buraco negro não tem cabelos*. Este enunciado tem um significado mais profundo do que se possa imaginar num primeiro momento: ele quer dizer que os buracos negros são compatíveis somente com campos externos gravitacionais e eletromagnéticos.

Entretanto, uma vez que os mésons escalares e vetoriais são os responsáveis pela mediação da interação forte, pode-se argumentar que um buraco negro formado a partir de matéria submetida a uma interação bastante forte como, por exemplo, a matéria do núcleo das estrelas, deva ter associado a ele um campo externo de mésons. Esse campo violaria claramente o teorema *no-hair*.

Até o presente, todas as investigações concernentes à incompatibilidade dos campos escalares com os buracos negros envolvem campos escalares que são acoplados ou minimamente [43-48] ou conformemente [39, 49, 50] à gravitação. Como uma continuação natural destas investigações, vamos analisar se a carga escalar pode evitar a formação de buracos negros caso o acoplamento entre este campo e a gravidade seja do tipo $\lambda R\phi^2$. Para tanto, consideraremos a solução isotrópica encontrada na seção anterior. Seja R uma nova coordenada radial definida pela expressão

$$r = \frac{m}{2} cth \frac{m}{2\mathrm{R}}. \tag{II.29}$$

Levando (II.29) respectivamente em (II.24), (II.25) e (II.26), obtemos

$$ds^2 = e^{\frac{-2n}{R}} dt^2 - \frac{e^{\frac{2n}{R}} \left(\frac{m}{R}\right)^4}{\left(\operatorname{senh}\frac{m}{R}\right)^4} dR^2 - \frac{e^{\frac{-2n}{R}} \left(\frac{m}{R}\right)^2 R^2}{\left(\operatorname{senh}\frac{m}{R}\right)^2} d\Omega^2 \qquad \text{(II.30)}$$

$$\phi = -\frac{Q}{R}. \qquad \text{(II.31)}$$

Esta solução foi descoberta por Wyman [51] e redescoberta por Agnese e La Camera [47], e é a mais geral solução estática e esfericamente simétrica das equações (II.18). Agnese e La Camera [48] e Roberts [52] mostraram que a mesma é desprovida de horizontes. Portanto, *não existem buracos negros no contexto das teorias* $\lambda R \phi^2$ [8] (estamos admitindo que $1 + k\lambda R\phi^2 > 0$). Em outras palavras, a carga escalar não é um "cabelo" do buraco negro.

DISCUSSÃO GERAL E CONCLUSÕES

Adotando formas de acoplamento mais complexas para representar a interação entre a gravitação e outros campos chegamos, na Parte I deste trabalho, a uma classe peculiar de teorias: *as teorias pseudamente acopladas não-minimamente à gravitação*. Nestas, o efeito líquido do acoplamento não-mínimo é tornar a equação do campo que se acopla com a gravitação *não-linear*, conforme mostra o exemplo que se segue. Seja

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{k} - \frac{1}{2}F^2 + \lambda RF^2\right] \tag{C.1}$$

a ação que descreve a dinâmica de um campo eletromagnético não-minimamente acoplado à gravitação einsteiniana. As equações de campo para $g^{\mu\upsilon}$ e A^{μ} são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} &G^{\mu\upsilon} + k\Big\{\frac{1}{4}F^2 g^{\mu\upsilon} - F^{\mu}{}_{\alpha}F^{\upsilon\alpha} \\ &+\lambda\left[\nabla^{\mu}\nabla^{\upsilon}F^2 - g^{\mu\upsilon}\Box F^2 + 2RF^{\mu}{}_{\alpha}F^{\upsilon\alpha} + G^{\mu\upsilon}F^2\right]\Big\} = 0 \end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\nabla_{\upsilon}\left[F^{\mu\upsilon} - 2R\lambda F^{\mu\upsilon}\right] = 0. \tag{C.3}$$

Tomando o traço da equação (C.2), e substituindo na equação (C.3), obtemos

$$\nabla_{\upsilon} F^{\mu\upsilon} + 6\lambda^2 k \nabla_{\upsilon}\left[\frac{F^{\mu\upsilon}\Box F^2}{1-k\lambda F^2}\right] = 0. \qquad \text{(C.4)}$$

É interessante observar que o acoplamento não-mínimo foi totalmente eliminado da equação anterior. Este resultado singular nos leva a uma questão do tipo "o-ovo-ou-a-galinha", ou seja, o que seria mais importante para caracterizar o acoplamento não mínimo: a densidade de Lagrangeana ou a equação de movimento? No caso específico de teorias onde o campo de matéria se acopla diretamente com o *escalar de Ricci (R)*, tudo indica que seja a equação de movimento. Este resultado, que parece favorecer a equação de movimento em detrimento da densidade de Lagrangeana, não parecerá assim tão estranho, se nos recordarmos que existem equações de movimento que não possuem Lagrangeanas. Exemplos notáveis são fornecidos pelas equações de Navier-Stokes e Korteweg de-Vries [27]. Além disso, conforme foi mostrado recentemente, existem certas teorias não-Lagrangeanas que podem ser quantizadas [28]. Estes resultados nos levam a conjecturar que o que fisicamente realmente conta é a equação de movimento, já que a Lagrangeana, quando existe, é simplesmente uma ferramenta matemática convencional desprovida de significado físico apriorístico [4].

Demonstramos em seguida a compatibilidade entre o Princípio de Equivalência Fraco e o acoplamento gravitacional não-mínimo, no caso dos campos bosônicos. *Um trabalho interessante seria tentar estender este resultado para o caso de campos fermiônicos.*

Na Parte II, mostramos que as teorias $\lambda R\phi^2$ são classicamente equivalentes e compatíveis com as restrições empíricas existentes. Verificamos também que, no contexto destas teorias, a carga escalar não é um "cabelo". *Seria interessante mostrar que o buraco negro com campo escalar conformemente invariante descoberto por Bekenstein [39, 49], e que foi provado ser instável por Bronnikov e Kireyev [50], não obedece à restrição* $1-\frac{k\phi^2}{6}>0$, *que é exatamente a condição exigida para que as teorias* $\lambda R\phi^2$ *sejam equivalentes.*

Uma outra possível aplicação deste Teorema de equivalência seria mostrar, usando, por exemplo, a teoria de sistemas dinâmicos, que os universos de Robertson-Walker são, no contexto destas teorias, singulares.

Para finalizar, gostaríamos de frisar que as teorias $\lambda R\phi^2$ são completamente equivalentes em nível de árvore [9]. A demonstração deste resultado encontra-se na Tese de Doutorado de *Kwok Sau Fa* intitulada *Equivalência Quântica dos Acoplamentos Mínimo e Não-Mínimo em Teorias* $\lambda R\phi^2$, a qual será defendida brevemente no Instituto de Física Teórica.

REFERÊNCIAS

[1] Birrel N D and Davies P C W 1982 *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge)

[2] Accioly A J and Wichoski U F 1990 *Class. Quantum Grav.* **7** L139-L141

[3] Faraoni V 1993 to appear in *Class. Quantum Grav.*

[4] Accioly A J, Aldrovandi R and Wichoski U F 1993 to appear in *Class. Quantum Grav.*

[5] Hwang J 1991 *Class. Quantum Grav.* **8** 1047

[6] Accioly A J, Wichoski U F and Bertarello N IFT-P.048/93 to appear in *Brazilian J. Phys.* **23**

[7] Accioly A J, Wichoski U F, Kwok S F and Pereira da Silva N L P IFT-P.052/93 to appear in *Class. Quantum Grav.*

[8] Accioly A J, Wichoski U F, Negrini O and Oliveira M S (submitted for publication)

[9] Accioly A J, Kwok S F, Pereira da Silva N L P and Spehler D 1993 IFT-P.058/93 (submitted for publication)

[10] Gönner H F M 1984 *Found. Phys.* **14** 865

[11] Prasanna A R 1971 *Phys. Lett.* **37A** 331

[12] Prasanna A R 1973 *Lett. Nuovo Cimento* **6** 420

[13] Zee A 1979 *Phys. Rev. Lett.* **72** 417

[14] Madsen M 1988 *Class. Quantum Grav.* **5** 627

[15] Callan C G, Coleman S and Jackiw R 1970 *Ann. Phys.* **59** 42

[16] Schmidt G, Greiner W, Heinz V and Müller B 1981 *Phys. Rev. D* **24** 1484

[17] Accioly A J, Vaidya A N and Som M M 1983 *J. Math Phys.* D **24** 2176

[18] Accioly A J, Vaidya A N and Som M M 1983 *Phys. Rev.* D **27** 2282

[19] Accioly A J, Vaidya A N and Som M M 1983 *Phys. Rev.* D **28** 1853

[20] Accioly A J and Pereira da Silva N L P 1986 *Prog. Lett.* **76** 1179

[21] Accioly A J and Pereira da Silva N L P 1986 *Phys. Lett.* **118A** 271

[22] Novello M and Salim J M 1979 *Phys. Rev. D* **20** 377

[23] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics Vols. I, II* (Springer-Verlag, New York)

[24] Marmo G and Saletan E J 1977 *Lett. Nuovo Cimento* **40B** 67 and references therein

[25] Balachandran A P, Govindarajan T R and Vijayalakshmi 1978 *Phys. Rev. D* **18** 1950 and references therein

[26] Okubo S 1980 *Phys. Rev. D* **22** 919

[27] Aldrovandi R and Kraenkel R A 1988 *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** 1329

[28] Aldrovandi R and Kraenkel R A 1989 *J. Math Phys.* **30** 1866

[29] Will C M 1981 *Theory and Experiments in Gravitational Physics* (Cambridge University Press, Cambridge)

[30] Roll P G, Krotkov R and Dicke R H 1964 *Ann. Phys.* **26** 442

[31] Braginsky V B and Panov V I 1972 *Sov. Phys. JETP.* **34** 463

[32] Will C M 1992 *Int. J. Mod Phys. D* **1** 13

[33] Papapetrou A 1974 *Lectures on General Relativity* (D. Reidel Publ. Co., Dordrecht)

[34] Accioly A J and Pimentel B M 1990 *Can. J. Phys.* **68** 1183

[35] Deser S 1970 *Ann. Phys.* **59** 248

[36] Misner C W, Thorne K S and Wheeler I A 1973 *Gravitation* (W. H. Freeman and Company

[37] Schiff L I 1960 *Am. J. Phys.* **28** 340

[38] Lord E A 1976 *Tensors, Relativity and Cosmology* (Tata MacGraw-Hill Publishing Co. Ltda., New Delhi)

[39] Bekenstein J D 1974 *Ann. Phys.* **82** 535

[40] Deng Y and Mannhein P D 1988 *Astrophys. J.* **324** 1

[41] Amendola L 1993 *Phys. Lett. B* **301** 175

[42] Shapiro I I, Counselman C C and King R W 1976 *Phys. Rev. Lett.* **36** 555

[43] Janis A I, Newman E T and Winicourt J 1968 *Phys. Rev. Lett.* **20** 878

[44] Bekenstein J D 1972 *Phys. Rev. D* **5** 2403

[45] Teitelboim C 1972 *Phys. Rev. D* **5** 2941

[46] Bekenstein J D 1972 *Phys. Rev. D* **6** 1239

[47] Agnese A G and La Camera M 1982 *Lett. Nuovo Cimento* **35** 365

[48] Agnese A G and La Camera M 1985 *Phys. Rev. D* **31** 1280

[49] Bekenstein J D 1975 *Ann. Phys.* **91** 75

[50] Bronnikov K A and Kireyev Y N 1978 *Phys. Lett.* **67A** 95

[51] Wyman M 1981 *Phys. Rev. D* **24** 839

[52] Roberts M D 1989 *Gen. Rel. Grav.* **21** 907